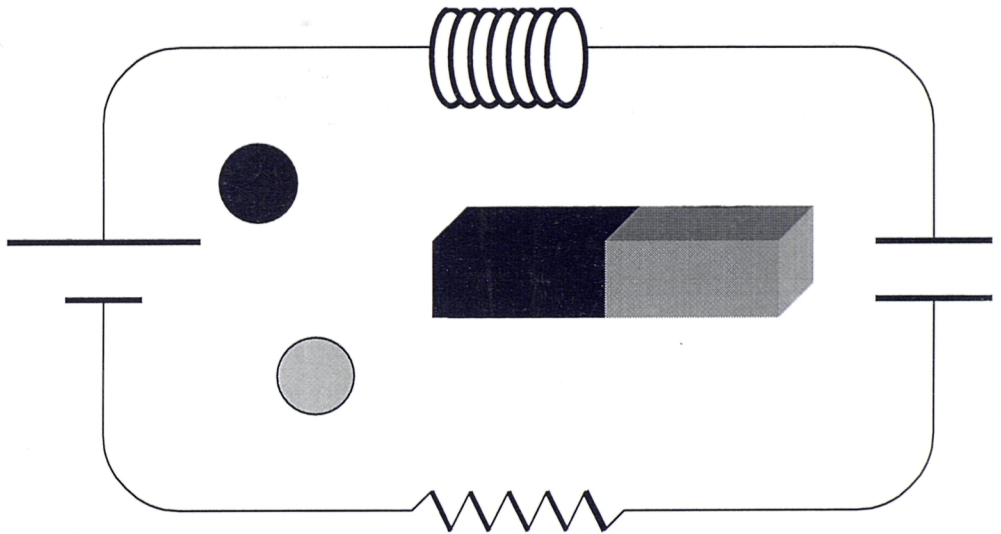


FRANCISCO JOSÉ RUBIO HERNÁNDEZ

*FÍSICA BÁSICA:  
ELECTROMAGNETISMO*



UNIVERSIDAD DE MÁLAGA / MANUALES



FRANCISCO JOSÉ RUBIO HERNÁNDEZ

FÍSICA BÁSICA:  
**ELECTROMAGNETISMO**



Publicaciones y  
Divulgación Científica

© Francisco José Rubio Hernández

© Publicaciones y Divulgación Científica. Universidad de Málaga.

Diseño de la colección: J. M. Mercado

I.S.B.N.: 84-7496-967-0

Depósito Legal: MA-1.709/2002

Imprime: Imagraf Impresores, S.A. Tel.: 952 32 85 97



Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons  
Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 4.0 Internacional:

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode>

Cualquier parte de esta obra se puede reproducir sin autorización  
pero con el reconocimiento y atribución de los autores.

No se puede hacer uso comercial de la obra y no se puede alterar,  
transformar o hacer obras derivadas.

**FRANCISCO JOSÉ RUBIO HERNÁNDEZ**

**FÍSICA BÁSICA:  
ELECTROMAGNETISMO**

**UNIVERSIDAD DE MÁLAGA / MANUALES**



*A Julia y a July*



# ÍNDICE

Prólogo.....	v
<b>Capítulo I. Operadores vectoriales</b>	
1. Gradiente de un escalar.....	1
2. Flujo de un vector.....	2
3. Divergencia de un vector.....	3
4. Teorema de la divergencia.....	4
5. Integrales de línea.....	5
6. Rotacional de un vector.....	6
7. Teorema del rotacional.....	8
8. Teorema de Helmholtz.....	9
<b>Capítulo II. Campo electrostático en el vacío I. Divergencia de “E”</b>	
1. Reseña histórica.....	11
2. Ley de Coulomb.....	12
3. Campo eléctrico.....	14
4. Ley de Gauss.....	15
5. Cálculo del campo eléctrico.....	18
<b>Capítulo III. Campo electrostático en el vacío II. Rotacional de “E”</b>	
1. Energía potencial eléctrica.....	19
2. Potencial eléctrico.....	21
3. Condensadores.....	22
4. Energía electrostática.....	24
<b>Capítulo IV. Campo electrostático en la materia I. Dieléctricos</b>	
1. El dipolo eléctrico.....	25
2. El vector polarización eléctrica.....	29
3. El vector desplazamiento eléctrico.....	31
4. Condiciones de contorno en un dieléctrico.....	33
<b>Capítulo V. Campo electrostático en la materia II. Conductores</b>	
1. Conductor en equilibrio electrostático.....	37
2. Corriente eléctrica.....	38
3. Ley de Ohm.....	39
4. Efecto Joule.....	42
5. Generador de corriente eléctrica.....	43
6. Asociación de resistencias.....	45
7. Reglas de Kirchhoff.....	46
8. Carga y descarga de un condensador. Circuito RC.....	48

<b>Capítulo VI. Campo magnetostático en el vacío I. Rotacional de “B”</b>	
1.Introducción.....	51
2.Fuerza magnética sobre una carga eléctrica en movimiento.....	51
3.Efecto Hall.....	52
4.Movimiento de una carga en un campo magnético.....	54
5.Fuerza magnética sobre una corriente eléctrica.....	58
6.Campo magnético creado por una corriente.....	58
7.Ley de Ampere.....	63
<b>Capítulo VII. Campo magnetostático en el vacío II. Divergencia de “B”</b>	
1.Flujó magnético.....	65
2.Autoinducción.....	65
3.Inducción mutua.....	66
4.Leyes de los campos estáticos.....	67
<b>Capítulo VIII. Campo magnetostático en la materia</b>	
1.El dipolo magnético.....	69
2.Imantación.....	71
3.Paramagnetismo y diamagnetismo.....	72
4.Ferromagnetismo.....	74
5.Vector “H”.....	75
<b>Capítulo IX. Ecuaciones de Maxwell. Ondas electromagnéticas</b>	
1.Introducción.....	77
2.Ley de Faraday.....	77
3.Circuito RL.....	79
4.Energía magnética.....	81
5.El transformador.....	82
6.Generador de corriente alterna.....	83
7.Circuito R.....	84
8.Circuito L.....	85
9.Circuito C.....	85
10.Circuito RLC serie.....	86
11.Análisis de circuitos de corriente alterna.....	89
12.Corriente de desplazamiento.....	91
13.Ondas electromagnéticas.....	93

## Capítulo X. La conexión relativista entre “E” y “B”

1.Introducción.....	99
2.Relatividad newtoniana.....	99
3.¿Es compatible el PRN con el electromagnetismo?.....	101
4.Postulados de la Relatividad Especial .....	102
5.Relatividad de la simultaneidad.....	102
6.Transformaciones de Lorentz .....	104
7.Invariancia de las ecuaciones de Maxwell.....	106
8.Las transformaciones de “E” y “B” .....	109
9.Campo creado por una carga que se desplaza uniformemente.....	110
Bibliografía.....	113



## PRÓLOGO

La Física es la más básica de las Ciencias de la Naturaleza. Su objetivo es dar explicación a los fenómenos naturales observados. Para ello hace uso de dos estrategias fundamentales: por un lado, utiliza un lenguaje altamente preciso, el de las Matemáticas; por otro, elabora modelos de la Naturaleza con los que poder entender su comportamiento.

El lenguaje matemático es el lenguaje de la Física, pero ésta dota a aquél de contenido real. Por eso, la “interpretación física” de las ecuaciones es la tarea docente de más relevancia, siendo en dicha actividad en la que el profesor debe dar muestras de su formación. El profesor Julio Palacios afirmó: “La Física tiene por objeto descubrir y dar forma matemática a las leyes que gobiernan la Naturaleza”. Estando totalmente de acuerdo con esta definición, será éste el espíritu de esta serie, que hemos decidido titular “Física Básica”.

El nacimiento de la Física, que podemos atribuir a la obra de Galileo, quedó marcado por el método utilizado por este genial científico. Consistió en la idealización del problema que le tenía ocupado o, dicho de un modo más técnico, la elaboración de un modelo del fenómeno natural objeto de su estudio. El estudioso de la Física pronto aprende a valorar la fuerza del uso de modelos idealizados para, posteriormente, añadir aquellos elementos adicionales que complican el problema acercándolo a la situación real.

Las dos estrategias citadas, propias de la Física, tienen por objeto la construcción de una teoría que describa correctamente el fenómeno observado y que prediga nuevos fenómenos. La validez de la teoría desarrollada está condicionada por el experimento, que es el “juez” que determina su aceptación o rechazo. La Física es, por lo tanto, una Ciencia Experimental, siendo inherente a ella el aprendizaje de métodos de medida, la elaboración de datos experimentales y la presentación con contenido fiable de los resultados que deberán ser contrastados con las predicciones teóricas, objeto de análisis. De acuerdo con esta idea, una asignatura fundamental de Física en la que no se impartan de manera reglada créditos prácticos, será un sucedáneo, tal vez válido para encajar el reparto de carga docente en un plan de estudios, pero nunca dará una sólida formación en Física, si es lo que se pretende...

Este volumen de la serie titulada “Física Básica” está dedicado al Electromagnetismo. Respecto de otras obras, la novedad es que, basándonos en el teorema de Helmholtz, se dan a conocer los campos eléctrico y magnético a partir de sus operadores vectoriales, divergencia y rotacional. En el capítulo I se introducen estos operadores vectoriales. En los capítulos II al V se estudia el campo electrostático. En el capítulo II se calcula la divergencia de  $\mathbf{E}$ , interpretando el resultado no nulo como expresión de la existencia de cargas eléctricas. En el capítulo III destacamos el carácter conservativo del campo electrostático al obtener un resultado nulo para su rotacional. El comportamiento de la materia, debido a la

presencia de un campo eléctrico, se estudia en los capítulos IV y V, distinguiendo entre materiales dieléctricos y materiales conductores. Los capítulos VI al VIII se dedican al campo magnetostático. Calculamos el rotacional de  $\mathbf{B}$  en el capítulo VI, resultando un valor no nulo, lo que significa que éste no es un campo conservativo. Por otra parte, el resultado nulo de su divergencia, que obtenemos en el capítulo VII, representa el hecho de que el monopolo magnético no existe. En el capítulo VIII estudiamos el comportamiento magnético de la materia. Después de destacar la independencia de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ , cuando son estáticos, estudiamos estos mismos campos, cuando dependen del tiempo, en el capítulo IX. Este extenso capítulo está dedicado a destacar la conexión entre los campos dependientes del tiempo, que lleva a la predicción y posterior confirmación experimental, de la existencia de ondas electromagnéticas. Finalmente, nos ha parecido apropiado introducir el capítulo X. En él se insiste, desde otro punto de vista, en la naturaleza única del campo electromagnético, siendo la observación de un campo eléctrico y/o un campo magnético, consecuencia únicamente del estado de movimiento del observador.

El estudio de este libro no debe excluir el uso de otros. Citaremos los libros de P.A.Tipler (Física para la Ciencia y la Tecnología, Ed. Reverté, Barcelona, 1999), y F.W. Sears y col. (Física Universitaria, Ed. Addison-Wesley-Longman, México, 1999), como obras más destacadas. No obstante, aunque solemos invitar a los alumnos a consultar diferentes libros de texto, debemos reconocer que su tiempo es limitado, viéndose agravada la situación cuando las asignaturas adquieren un carácter cuatrimestral. De algún modo reclaman una obra concreta a la que poder acudir, y éste ha sido el motivo que nos ha llevado a enfrentarnos a esta tarea. El autor es el único responsable de los errores que pudiera contener la obra. Cualquier crítica (sea constructiva o no) será recibida de buen grado.

Mi agradecimiento más sincero a los compañeros del Departamento de Física Aplicada II que han contribuido, con su estímulo y sabias discusiones a la consecución de este trabajo.

Estoy en deuda con mis alumnos, que a lo largo de estos años han contribuido, tal vez sin saberlo, a que este proyecto vea la luz.

En este capítulo de agradecimientos no puede faltar una mención especial al personal del SPICUM. Con su trato amable, lo que me parecía una ardua tarea se ha convertido en una actividad amena.

Finalmente, quiero agradecer a mi esposa y a mi hija su paciencia y apoyo. En cierto modo ésta es también su obra.

Málaga, Junio de 2002

## Capítulo I OPERADORES VECTORIALES

### 1. GRADIENTE DE UN ESCALAR

Sea  $f$  una magnitud escalar. Su valor en cada punto del espacio vendrá dado por una cierta función  $f(\mathbf{r})=f(x, y, z)$ . En un punto  $P$ , de coordenadas  $(x, y, z)$ , esta función toma el valor  $f(x, y, z)$ ; en otro punto  $P+dP$ , separado una distancia infinitesimal del punto  $P$ , su valor será:

$$\begin{aligned} & f(x + dx, y + dy, z + dz) = \\ & = f(x, y, z) + \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_P dx + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_P dy + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)_P dz \right] + \dots \end{aligned} \quad (I.1)$$

Por lo tanto, si despreciamos términos de orden mayor o igual que el segundo (lo cual está perfectamente justificado al ser  $dP$  infinitesimal), el cambio que se produce en la magnitud  $f$  al pasar del punto  $P$  al punto  $P+dP$  será:

$$\begin{aligned} df & = f(x + dx, y + dy, z + dz) - f(x, y, z) = \\ & = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) dy + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) dz = \\ & = \left( \hat{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial f}{\partial z} \right) \bullet (\hat{i} dx + \hat{j} dy + \hat{k} dz) \end{aligned} \quad (I.2)$$

En la ecuación (I.2),  $\hat{i}$ , es el vector unitario que determina el sentido positivo del eje  $X$ . Lo mismo puede decirse de los vectores  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$  con relación, respectivamente, a los ejes  $Y$  y  $Z$ . En la expresión final de la última igualdad, el segundo paréntesis es el vector desplazamiento,  $d\mathbf{r}$ , mientras que el primer paréntesis, que se evalúa en la posición  $P$ , recibe el nombre de gradiente de la función escalar  $f$  y se representa en la forma  $\nabla f$  o  $\text{grad } f$ . Vemos que el gradiente de una función escalar es una función vectorial. Para obtener el significado físico del gradiente de una función escalar, observemos que  $df = (\nabla f) \bullet d\vec{r} = |\nabla f| |d\vec{r}| \cos \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo formado por los vectores  $\nabla f$  y  $d\vec{r}$ . Cuando el desplazamiento  $d\vec{r}$  coincide en dirección y sentido con el vector  $\nabla f$ , la función  $f$  experimentará un cambio máximo en su valor. Por lo tanto, podemos afirmar que el gradiente de una función escalar es un vector cuya dirección coincide con la del máximo cambio en el valor de la función escalar, su sentido coincide con el de aumento de la función escalar ( $\theta=0$ ) y, finalmente, su módulo viene dado por la expresión:

$$|\nabla f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \quad (1.3)$$

Por ejemplo, en Meteorología es necesario conocer, para predecir el tiempo, el valor que la presión atmosférica toma en distintos puntos, siendo un dato fundamental la “rapidez de cambio espacial” de dicha magnitud con la posición a una altura dada. De hecho, los mapas de isobaras mostrados en los partes meteorológicos corresponden a valores de la presión atmosférica a una altura dada. Que estas líneas aparezcan más o menos juntas da idea de la rapidez de cambio de la presión con la posición, lo cual permitirá predecir si habrá movimiento lento o rápido de masas de aire y en qué sentido.

En coordenadas cilíndricas, el vector gradiente toma la forma,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \quad (1.4)$$

y, en coordenadas esféricas,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} \quad (1.5)$$

## 2. FLUJO DE UN VECTOR

Una superficie cerrada es una superficie que divide un volumen en dos regiones, una interior y otra exterior. Una superficie cerrada no tiene límites, es decir, ninguna curva actúa como extremo de la superficie. Un área elemental de la superficie cerrada se representa por  $d\mathbf{S}$ , un vector de módulo  $dS$ , normal a dicho área, y que apunta en el sentido hacia el volumen exterior. Por ejemplo, la superficie de una esfera es una superficie cerrada, donde, en todos sus puntos,  $d\mathbf{S}$  apunta radialmente hacia fuera. La elección de este vector es un convenio universalmente aceptado.

Una superficie abierta es la que está limitada por una curva. La página de un libro es una superficie abierta, siendo el borde de la página la curva que la limita. Para una superficie abierta,  $d\mathbf{S}$  tiene también módulo  $dS$  y es un vector perpendicular a la superficie que representa. Aquí tenemos también dos posibles sentidos para el vector. Se elige, también con carácter universal, como sentido positivo del vector  $d\mathbf{S}$ , el que coincide con la dirección de avance de un tornillo (de rosca hacia la derecha) cuando el perímetro de la superficie (que coincide con la curva que la limita) es recorrido en su sentido positivo. Por ejemplo, si consideramos nuevamente la superficie abierta definida por la página del libro,

tomando como positivo el sentido de recorrido del perímetro de la misma coincidente con el de las agujas del reloj, el vector superficie será perpendicular a la página y tendrá sentido positivo hacia dentro.

El flujo de un vector  $\mathbf{F}$  se define, para una superficie abierta  $S$ , como:

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (\text{I.6})$$

En este caso el signo del flujo es positivo o negativo, dependiendo de la normal que es tomada como positiva. Para una superficie cerrada  $S$  el flujo de un vector  $\mathbf{F}$  está unívocamente definido,

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (\text{I.7})$$

El pequeño círculo sobre el signo integral indica que  $S$  es una superficie cerrada y la integración debe realizarse sobre la superficie completa.

### 3. DIVERGENCIA DE UN VECTOR

Estamos en condiciones de definir la divergencia de un vector  $\mathbf{F}$  en un punto  $P$ . Ésta viene dada en términos del flujo del vector  $\mathbf{F}$  a través de una superficie cerrada  $S$  que rodea al punto  $P$ , y del volumen  $V$  encerrado por  $S$ .

Consideremos una superficie  $S_1$  que rodea al punto  $P$  y encierra un volumen  $V_1$ . El cociente,

$$\frac{1}{V_1} \oint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (\text{I.8})$$

nos da el flujo por unidad de volumen encerrado. Si tomamos otra superficie cerrada  $S_2$  que rodea al punto  $P$  pero es más pequeña que la superficie  $S_1$ , contendrá un volumen  $V_2$  menor que el volumen  $V_1$ . De igual forma podremos plantear el cociente,

$$\frac{1}{V_2} \oint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (\text{I.9})$$

Si este proceso continúa indefinidamente, el cociente tenderá hacia un único valor límite que recibe el nombre de divergencia del vector  $\mathbf{F}$  en el punto  $P$ . (Hay, sin

embargo, excepciones; por ejemplo,  $\mathbf{F}=\mathbf{r}/r^3$  en  $r=0$ ). De acuerdo con lo dicho, la divergencia de  $\mathbf{F}$  se define como,

$$\operatorname{div}\vec{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \left( \frac{1}{V} \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \right) \quad (\text{I.10})$$

En coordenadas cartesianas, la divergencia de un vector viene dada por la expresión,

$$\operatorname{div}\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (\text{I.11})$$

En coordenadas cilíndricas,

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (\text{I.12})$$

y, finalmente, en coordenadas esféricas,

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \quad (\text{I.13})$$

Un vector cuya divergencia sea nula en todos los puntos del espacio se dice que es solenoidal. Por cierto, esta denominación proviene de que el campo magnetostático, incluido el creado por un solenoide, cumple con esta propiedad.

#### 4. TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

Un teorema muy importante en el que interviene la divergencia de un vector se enuncia de la siguiente forma: “ la integral de la divergencia de un vector sobre un volumen  $V$  es igual a la integral de superficie de la componente normal del vector sobre la superficie  $S$  que limita al volumen  $V$ ”. Veamos su demostración.

Dividamos mentalmente el volumen  $V$  en un gran número de pequeñas celdas. Denotemos por  $\Delta V_i$  al volumen de la  $i$ -ésima celda, que estará limitada por la superficie  $S_i$ . Está claro que:

$$\sum_i \oint_{S_i} \vec{F} \cdot \hat{n}_i dS_i = \oint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS \quad (\text{I.14})$$

donde en cada integral de la izquierda el vector normal  $\hat{n}_i$  se dirige hacia fuera del volumen considerado. Puesto que el sentido hacia fuera de una celda coincide con el sentido hacia dentro de la celda adyacente, todas las contribuciones del primer miembro de la ecuación (I.14) se anulan, excepto las que provienen de la superficie  $S$ , quedando demostrada dicha igualdad. Para obtener el teorema de la divergencia haremos que el número de celdas tienda a infinito, de tal forma que el volumen de cada una de ellas tenderá a cero:

$$\oint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_i \left[ \frac{1}{\Delta V_i} \oint_{S_i} \vec{F} \cdot \hat{n} dS \right] \Delta V_i \quad (\text{I.15})$$

En el límite, la suma en  $i$  se convierte en una integral sobre  $V$  y el límite del cociente de la integral de superficie con respecto al volumen  $\Delta V_i$  se convierte en la divergencia de  $\vec{F}$ , es decir:

$$\oint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \int_V \text{div} \vec{F} dV \quad (\text{I.16})$$

que es el teorema de la divergencia. El uso práctico de este teorema depende de la facilidad que presente una u otra integración en cada problema concreto.

## 5. INTEGRALES DE LÍNEA

Una línea cerrada es aquella en la que es posible comenzar en un punto dado, recorrer la línea completa en un sentido, de los dos posibles, y volver al punto de partida. No es necesario que dicha línea esté situada en un plano. La línea cerrada puede ser considerada como el límite de una superficie abierta, aunque dicha superficie no es única. En realidad hay un número infinito de tales superficies para una línea dada (ésta es una de las claves de la modificación que J.C. Maxwell hizo a la ley de A.M. Ampere). Por otra parte, con excepción de las superficies del tipo Möbius, toda superficie con “dos caras” tiene una única línea cerrada que la delimita.

Una línea abierta tiene un principio y un final. No es posible regresar al punto de partida si uno recorre los puntos de la línea en un sentido (de los dos posibles).

La integral  $\int_a^b f dr$  es un tipo de integral de línea de una función escalar  $f$  a lo largo de un camino  $C$ , abierto o cerrado, que une los puntos  $a$  y  $b$ . La variable independiente  $r$  es la distancia medida a lo largo del camino, línea o curva  $C$ . Una extensión simple de esta idea es la integral de línea de una función vectorial  $\mathbf{F}$ :

$$\int_{a_C}^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{a_C}^b F \cos\theta dr \quad (\text{I.17})$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre  $\mathbf{F}$  y  $d\mathbf{r}$  en cada punto a lo largo de la curva  $C$ . Cuando el vector  $\mathbf{F}$  representa una fuerza, la integral (I.17) recibe el nombre de “trabajo” realizado por dicha fuerza al mover un cuerpo desde la posición  $a$  a la posición  $b$  a lo largo del camino  $C$ :

$$W = \int_{a_C}^b \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (\text{I.18})$$

En general, el resultado de la integral (I.18) depende de cuál sea el camino  $C$  que une los puntos  $a$  y  $b$ . Sin embargo, se da el caso, especialmente importante, en que dicho resultado es independiente del camino; se dice entonces que  $\mathbf{F}$  es una fuerza conservativa.

Si el camino  $C$  es cerrado, haremos un pequeño cambio de nomenclatura escribiendo la integral en la forma:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (\text{I.19})$$

que llamaremos “circulación” del vector  $\mathbf{F}$ . Existen dos posibles sentidos para el recorrido del camino cerrado  $C$ . Para resolver esta ambigüedad se elige, por convenio, que el sentido positivo sea el que correspondería al de avance de un tornillo que girase en ese mismo sentido.

## 6. ROTACIONAL DE UN VECTOR

Definiremos un vector cuyo módulo coincide con el cociente entre la circulación de un vector  $\mathbf{F}$ , calculada a lo largo de un camino  $C$ , que rodea a un punto  $P$ , y un área  $\Delta S$ , limitada por dicho camino  $C$ . Supondremos que  $C$  está en un plano, de tal forma que  $\Delta S$  estará unívocamente definida. Tomaremos el límite de este cociente cuando  $\Delta S$  (y, por lo tanto,  $C$ ) tiende a cero. Supondremos, finalmente, que en el límite este cociente existe y es único.

La dirección del vector que estamos definiendo será la de la normal a  $\Delta S$ , siendo su sentido coincidente con el sentido positivo de la circulación de  $\mathbf{F}$ . Esta operación puede ser realizada para una cantidad indeterminada de posibles caminos

C que rodeen al punto P. Supondremos que para una de estas operaciones el resultado dará un valor máximo, y tomaremos dicho resultado como el rotacional de  $\vec{F}$ . De esta forma, el cálculo descrito en el primer párrafo de este apartado nos dará la componente del rotacional de  $\vec{F}$  en la dirección perpendicular a la superficie  $\Delta S$ . Dicho de otro modo, si  $\hat{n}$  es un vector unitario y  $C_n$  es un camino cerrado contenido en un plano perpendicular a  $\hat{n}$ , entonces, para cualquier sistema de coordenadas, si  $\Delta S_n$  es el área limitada por  $C_n$ , la componente del rotacional de  $\vec{F}$  en la dirección de  $\hat{n}$  será:

$$(\text{rot } \vec{F})_n = (\text{rot } \vec{F}) \cdot \hat{n} = \lim_{\Delta S_n \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\Delta S_n} \oint_{C_n} \vec{F} \cdot d\vec{r} \right] \quad (\text{I.20})$$

La expresión del rotacional de un vector en coordenadas cartesianas será:

$$\text{rot } \vec{F} = \hat{i} \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \hat{j} \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \quad (\text{I.21})$$

que puede expresarse en forma resumida, dada su analogía con un producto vectorial, en la forma:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (\text{I.22})$$

De la misma forma que el gradiente de una función escalar en un punto *es* y *coincide con la dirección de* la máxima variación (con la posición) de la función escalar, el rotacional de una función vectorial en un punto *es* el valor máximo de la circulación por unidad de superficie de dicha función vectorial, y su *dirección coincide con* la de dicho vector máximo. El valor de cualquiera de estas magnitudes en otra dirección se obtiene haciendo el producto escalar del respectivo vector (gradiente o rotacional) por el vector unitario que define la dirección en cuestión.

Cuando un vector tiene un rotacional nulo en todos los puntos del espacio, se dice que es un vector irrotacional, lo cual significa que la circulación de dicho vector es nula en el entorno de cualquier punto del espacio. Si, además, dicho vector es independiente del tiempo, se dice que es conservativo.

## 7. TEOREMA DEL ROTACIONAL

El teorema del rotacional relaciona una integral evaluada en una superficie abierta con otra integral evaluada en la línea cerrada que delimita dicha superficie. Suponiendo que la función que estamos tratando es continua, el teorema resulta de aplicar la definición del rotacional a una superficie abierta delimitada por una curva cerrada. Es análogo al teorema de la divergencia, que fue obtenido aplicando la definición de divergencia a un volumen limitado por una superficie cerrada.

Una superficie finita abierta, de cualquier forma, no necesariamente plana, se puede dividir en un número infinito de rectángulos infinitesimales estando, por lo tanto, cada uno de ellos limitado por una curva cerrada. A cada uno de dichos rectángulos podemos aplicar la ecuación:

$$(\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\Delta S} \oint_{\text{rectángulo}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \right] \quad (\text{I.23})$$

o, lo que es lo mismo,

$$\oint_{\text{rectángulo}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left[ (\nabla \times \vec{F}) \cdot \Delta \vec{S} \right] \quad (\text{I.24})$$

En el lado común a dos rectángulos adyacentes, la contribución a la circulación alrededor de uno de ellos es opuesta a la contribución de la circulación alrededor del otro (esto es cierto si  $\vec{F}$  es una función continua). Este razonamiento es válido para cualquier pareja de rectángulos que consideremos. Por lo tanto, es fácil concluir que la circulación total, es decir, la suma de las circulaciones calculadas para todos y cada uno de los rectángulos, será la circulación a lo largo de la curva cerrada que delimita la superficie abierta. Es decir:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \oint_{C_i} \vec{F} \cdot d\vec{r}_i &= \sum_{i=1}^N \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \left[ (\nabla \times \vec{F}) \cdot \Delta \vec{S}_i \right] = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \sum_{i=1}^N \oint_{C_i} \vec{F} \cdot d\vec{r}_i \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \sum_{i=1}^N \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \left[ (\nabla \times \vec{F}) \cdot \Delta \vec{S}_i \right] \right] \end{aligned} \quad (\text{I.25})$$

Por lo tanto, llamando  $C$  a la curva cerrada que delimita a la superficie abierta  $S$ , tendremos el teorema del rotacional, que establece la siguiente igualdad:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} \quad (\text{I.26})$$

## 8. TEOREMA DE HELMHOLTZ

Llegados a este punto, en el que hemos definido las operaciones vectoriales que caracterizan a un campo vectorial, enunciaremos sin demostrar, por quedar fuera del objetivo de esta obra, un teorema, debido al físico alemán H.L. Helmholtz (1821-1894), que expresa que un campo vectorial queda definido cuando se conocen su divergencia y su rotacional.

*Enunciado:* Si, con relación a un campo vectorial  $\mathbf{F}$ , se conocen,

$$\nabla \cdot \vec{F} = b(\vec{r})$$

$$\nabla \times \vec{F} = c(\vec{r})$$

en cierta región limitada, de volumen  $V$ , el campo vectorial  $\mathbf{F}$  será,

$$\vec{F} = (-\nabla\phi) + (\nabla \times \vec{A})$$

donde,

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{b(\vec{r})}{r} dV$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{c(\vec{r})}{r} dV$$

Inversamente, cualquier vector  $\mathbf{F}$  se puede expresar como la suma de un vector irrotacional  $(-\nabla\phi)$  y otro solenoidal  $(\nabla \times \mathbf{A})$ .

Basándonos en este teorema, el plan que a continuación seguiremos consistirá en descubrir los campos eléctrico y magnético a partir del cálculo de sus respectivas divergencias y rotacionales. Finalmente, descubriremos la conexión existente entre dichos campos, llegando a una formulación unificada del campo electromagnético.



## Capítulo II

# CAMPO ELECTROSTÁTICO EN EL VACÍO I.

### DIVERGENCIA DE “E”

#### 1. RESEÑA HISTÓRICA

El Electromagnetismo es una rama clásica de la Física. Su desarrollo inicial fue increíblemente lento. Aunque ya en la antigua Grecia (600 a. C.) se sabía que una resina (muy abundante en esa región), denominada “elektron”, tenía la curiosa propiedad de atraer pequeños trocitos de paja o seda cuando era frotada previamente con un paño de lana, y que un misterioso mineral de la región de Magnesia tenía la no menos interesante propiedad de atraer virutas de hierro, nada especialmente relevante se hizo por comprender la naturaleza de estos, aparentemente inconexos, fenómenos hasta ¡veintidós siglos! después.

Fue en el año 1600 cuando el científico inglés W. Gilbert retomó el tema y publicó los resultados de sus investigaciones sobre las propiedades eléctricas del ámbar (elektron) y otras sustancias, así como de las propiedades cualitativas de los imanes. En 1734 el científico francés Du Fay encontró que además de atractiva, la electrificación de sustancias podía ser repulsiva. En 1748, el científico estadounidense B. Franklin estableció la distinción entre dos tipos de cargas eléctricas a las que denominó, arbitrariamente, positivas y negativas. Franklin también señaló que la carga total se conserva durante el proceso de electrificación de una sustancia.

Aunque con toda probabilidad los primeros investigadores de los fenómenos eléctricos y magnéticos debieron presentir que una profunda relación existía entre ellos, no pudieron establecerla. Fue el físico danés H.Ch. Oersted quien, en 1820, encontró que una corriente eléctrica actuaba sobre una aguja imantada, lo que supuso el primer paso hacia la unificación de la Electricidad y el Magnetismo.

Con la Revolución Industrial como motor, el Electromagnetismo se desarrolló a un ritmo vertiginoso. Muchos descubrimientos corresponden a esta época, siendo los trabajos experimentales del físico inglés M. Faraday y los teóricos del escocés J.C. Maxwell los que sintetizan el gran avance conseguido hasta el año 1900.

Los dos grandes descubrimientos de la Física del siglo XX, Relatividad y Mecánica Cuántica, tuvieron un efecto comparativamente menor sobre el desarrollo del Electromagnetismo. Mientras que la aportación de la Relatividad fue la de poder explicar la existencia de un campo magnético en términos de una transformación del campo eléctrico para un observador en movimiento, la de la Mecánica Cuántica se limitó a poder justificar fenómenos, un tanto especiales, que no son explicables por la teoría electromagnética clásica, como por ejemplo, la superconductividad y el láser. Sin embargo, la mayor parte de fenómenos electromagnéticos son explicables con la teoría clásica, lo que justifica su estudio. Durante el siglo XX poco desarrollo se produjo en esta rama de la Física, lo que

permite catalogarla de disciplina clásica. No obstante, todavía, a comienzos del siglo XXI, quedan problemas por resolver, los cuales, probablemente, deberán encontrar su solución a través de la más sofisticada Electrodinámica Cuántica. Algunas de estas cuestiones abiertas son:

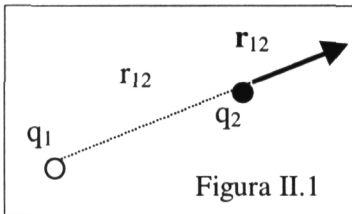
1. ¿Por qué hay dos tipos de carga eléctrica?
2. Mientras que una masa puede carecer de carga, la carga siempre va acompañada de masa, ¿por qué?
3. La carga eléctrica está cuantizada, ¿cuál es el cuanto de carga eléctrica?
4. ¿Por qué la fuerza eléctrica es gigantescamente mayor que la fuerza gravitatoria?

## 2. LEY DE COULOMB

Haciendo uso de una balanza de torsión, el ingeniero francés C.A. Coulomb (1736-1806) estudió la fuerza entre dos cargas eléctricas en reposo. Sus resultados experimentales quedan expresados mediante la ecuación:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \quad (\text{II.1})$$

De acuerdo con esta expresión, la fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales que se encuentran en reposo respecto de un observador inercial, es directamente proporcional al producto de los valores de ambas cargas ( $q_1 q_2$ ) e inversamente



proporcional al cuadrado de la distancia que las separa ( $1/r_{12}^2$ ). La constante de proporcionalidad ( $1/4\pi\epsilon_0$ ) depende del sistema de unidades elegido y debe su forma a la conveniencia que resulta al tratar otras expresiones del Electromagnetismo. La constante  $\epsilon_0$  recibe el nombre de permitividad del vacío y su valor en el sistema internacional de

unidades (S.I.) es  $8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$ . Es muy importante destacar que la fuerza  $\mathbf{F}_{12}$  que la carga  $q_1$  ejerce sobre la carga  $q_2$  está dirigida a lo largo de la línea que las une y tiene el mismo sentido que el vector unitario  $\mathbf{r}_{12}$  (el cual ha sido elegido aplicado en la carga sobre la que actúa la fuerza, en la dirección de la línea que une ambas cargas y con sentido coincidente con el de alejamiento de la carga sobre la que actúa la fuerza respecto de la carga que ejerce la fuerza) si las dos cargas son del mismo signo y contrario a dicho vector unitario si las cargas tienen signos opuestos (Figura II.1). De esta forma en la ley de Coulomb, expresada con la ecuación (II.1), queda recogido el doble comportamiento repulsivo-atractivo de la interacción electrostática.

En honor a Coulomb la unidad de medida de la carga eléctrica recibe el nombre de culombio (C) en el sistema internacional de unidades. Ciertamente ésta

es una unidad descomunalmente grande, ya que, de acuerdo con la ley de Coulomb, dos cargas de 1 C cada una, separadas una distancia de 1 m, se ejercerían una fuerza de ¡¡9 10<sup>9</sup> N!!.

Además, conseguir 1 C de carga implicaría extraer del material cargado (o añadirle si la carga es negativa) nada menos que 6.25 10<sup>18</sup> electrones, ya que 1.6 10<sup>-19</sup> C es la carga del electrón. Por lo tanto, es más normal que tratemos submúltiplos del culombio. En este sentido conviene recordar los nombres y valores de los submúltiplos más frecuentes: mili (m) = 10<sup>-3</sup>, micro (μ) = 10<sup>-6</sup>, nano (n) = 10<sup>-9</sup>, pico (p) = 10<sup>-12</sup>.

Cuando sea necesario calcular la fuerza ejercida sobre una carga puntual (q) no por otra carga puntual, sino por una distribución de N cargas puntuales (q<sub>i</sub>), haremos uso del *principio de superposición*, según el cual, la fuerza de una distribución de cargas eléctricas puntuales sobre una carga puntual dada es la suma (vectorial) de las fuerzas ejercidas por cada una de las cargas de la distribución, individualmente, como si las otras no estuvieran presentes (Figura II.2). Matemáticamente se expresa de la siguiente forma:

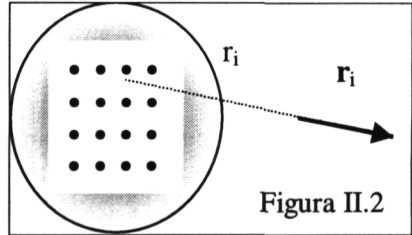


Figura II.2

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \tag{II.2}$$

La justificación del uso de este principio es doble: 1) las ecuaciones diferenciales de Maxwell, que en su momento veremos que gobiernan el campo eléctrico, son lineales, siendo una de sus propiedades el que la suma de dos de sus soluciones es también una solución de dichas ecuaciones, y 2) los hechos experimentales confirman la validez de su aplicación.

Cuando se trate de calcular la fuerza eléctrica ejercida sobre una carga puntual (q) por una distribución continua de carga eléctrica, se procederá a elegir elementos de carga eléctrica (dQ), de la distribución de carga, infinitesimalmente pequeños (esta es una idea un tanto ambigua, lo que queremos decir es que sean lo suficientemente pequeños como para que su tamaño nos permita tratarlos como cargas puntuales, pero lo suficientemente grandes como para que la estructura atómica de la materia permanezca oculta). De esta forma podremos, con ayuda de la ley de Coulomb, calcular la fuerza que dQ ejerce sobre q:

$$d\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q dQ}{r^2} \hat{r} \tag{II.3}$$

y, a continuación, “sumando elementos infinitesimales”, es decir, integrando para toda la distribución continua de carga, obtendremos el valor de la fuerza eléctrica ejercida sobre  $q$ :

$$\vec{F} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q dQ}{r^2} \hat{r} \quad (\text{II.4})$$

### 3. CAMPO ELÉCTRICO

Tenemos una idea bastante clara de la interacción entre cuerpos que se tocan. Dicho contacto proporciona una imagen visual de la fuerza con la que ambos cuerpos interaccionan. No obstante la ley de Coulomb representa una interacción entre dos cuerpos que no se tocan. ¿Cómo es esto posible?

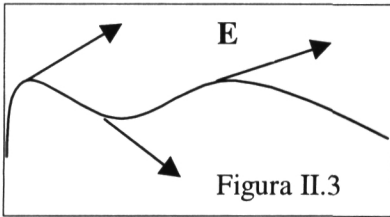
El problema (que ya fue planteado por Newton a propósito de su Ley de Gravitación) se resuelve introduciendo el concepto físico de *campo*. Siguiendo el método propio de la Física consistente en elaborar modelos que permitan explicar el comportamiento de la Naturaleza, consideraremos que la presencia de la carga eléctrica que ejerce la fuerza provoca una “alteración o modificación “ de las propiedades del espacio que la rodea, que denominaremos *campo eléctrico*, de tal forma que la carga sobre la que actúa la fuerza lo que percibe realmente es tal deformación del espacio. Consecuentemente, según este modelo no se considera que la interacción se produzca realmente entre las cargas eléctricas, sino del campo eléctrico de una de ellas sobre la otra carga. De esta forma queda resuelto el problema del contacto y, además, se consigue justificar la simultaneidad de las fuerzas de acción y reacción en la interacción a distancia sin necesidad de tener que apelar a una inexistente velocidad infinita para la transmisión de información.

Es fácil intuir que la forma experimental de detectar la presencia de un campo eléctrico en una región del espacio consistirá en utilizar como “sonda” una carga eléctrica. A esta carga de prueba o testigo se le exige que cumpla una importante condición: su valor debe ser lo suficientemente pequeño como para que el campo eléctrico que, a su vez, ella misma crea, no distorsione al campo eléctrico que pretendemos medir. Por lo tanto, su valor numérico debe ser infinitesimalmente pequeño. Finalmente, por convenio, se asume que el signo de dicha carga será positivo. De esta forma, la magnitud del campo eléctrico (que se mide en N/C) creado por una carga puntual  $q$  vendrá definida mediante la expresión:

$$\vec{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (\text{II.5})$$

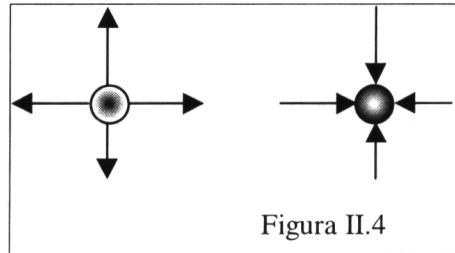
El campo eléctrico es una magnitud vectorial. Si queremos conocer el valor de la fuerza ejercida por una carga  $q_1$  sobre otra carga  $q_2$ , bastará con multiplicar el valor del campo eléctrico creado por  $q_1$  en la posición ocupada por  $q_2$ , por el valor de la carga  $q_2$ .

Evidentemente, el principio de superposición es igualmente aplicable para el cálculo del campo eléctrico creado por cargas eléctricas en reposo, pertenezcan a una distribución discreta o continua, siempre que estemos dentro de los límites de validez de ecuaciones lineales (campos no excesivamente intensos).



Con la intención de obtener una imagen gráfica del campo eléctrico se definen las *líneas de campo*. Una línea de campo eléctrico es el lugar geométrico de puntos definido por la condición de ser, en todos sus puntos, tangente al campo eléctrico a ella (Figura II.3). Como el campo eléctrico tiene un valor único en cada

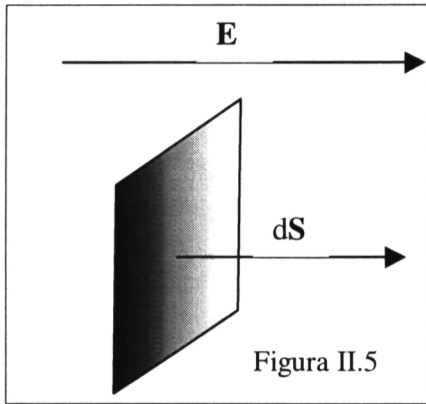
punto del espacio, dos líneas de campo no pueden cortarse. Cuando esquematizamos el campo eléctrico creado por una carga o una distribución de cargas mediante líneas de campo, seguimos ciertos criterios a la hora de dibujarlas. Concretamente: se dibuja un número de líneas proporcional al valor de la carga eléctrica, se respetan las situaciones de simetría, la proximidad entre líneas de campo eléctrico da una idea de lo intenso que es dicho vector en esa región. Finalmente, las líneas de campo eléctrico “salen” de las cargas positivas y “entran” en las cargas negativas (Figura II.4). No obstante, existe un error ampliamente admitido consistente en suponer que una línea de campo eléctrico coincide con la trayectoria que una carga testigo seguiría si fuese abandonada en el seno del campo eléctrico en cuestión. Sin embargo, esto es únicamente cierto si la línea de campo es recta, ya que, en caso contrario, habría de tenerse en cuenta la inercia en el movimiento de la carga.



#### 4. LEY DE GAUSS

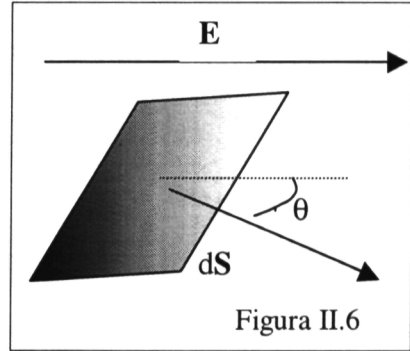
Una dificultad que subyace con el uso de la ley de Coulomb, para calcular un campo eléctrico, es que se requiere conocer exactamente cuál es la distribución de carga. Pero ésta es una información que raramente se posee. Sin embargo, se puede demostrar (teorema de Helmholtz) que un campo vectorial queda unívocamente definido si se conocen su divergencia y su rotacional.

De acuerdo con lo afirmado en el párrafo anterior, vamos a calcular en este apartado la divergencia del vector campo eléctrico, que es el objetivo de este capítulo.



En primer lugar definiremos la magnitud *flujo eléctrico*. Hemos dicho anteriormente que las líneas de campo eléctrico se dibujan con ciertos criterios. Además de representar el valor de la carga eléctrica, la intensidad del campo eléctrico y responder a las posibles simetrías de la distribución de carga, *el número de líneas que atraviesen la unidad de área en cada región del espacio deberá ser igual al valor numérico del campo eléctrico en dicha región*. A partir de esta última condición podemos definir el flujo eléctrico en una

superficie elemental  $dS$  como el número de líneas de campo que la atraviesan. Si el área está dispuesta perpendicularmente a la dirección del campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , el flujo eléctrico será simplemente  $d\phi = E dS$  (Figura II.5). Ahora bien, si los vectores  $\mathbf{E}$  y  $d\mathbf{S}$  forman un ángulo  $\theta$ , el número de líneas que la atraviesan se verá reducido, ya que el área efectiva que se enfrenta transversalmente a las líneas de campo será  $dS \cos\theta$ . Por lo tanto, en este caso, el flujo eléctrico será  $d\phi = E dS \cos\theta$  (Figura II.6). Este resultado se expresa de forma resumida afirmando que:



$$d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (\text{II.6})$$

Esta expresión será tomada como definición de flujo eléctrico. Cuando sea necesario calcular el flujo eléctrico que atraviesa una superficie finita  $\Sigma$ , sumaremos las contribuciones del flujo en cada una de las superficies elementales  $dS$  en las que es posible subdividir de manera continua dicha superficie, es decir:

$$\phi = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (\text{II.7})$$

La unidad de medida (S.I.) del flujo eléctrico es  $\text{N m}^2/\text{C}$ . La ley de Gauss se refiere al resultado de calcular el flujo eléctrico que atraviesa una superficie cerrada, que encierra a una distribución de carga eléctrica. Elegimos, arbitraria pero consensualmente, el vector superficie correspondiente a una superficie cerrada perpendicular a ella y con sentido hacia fuera del volumen

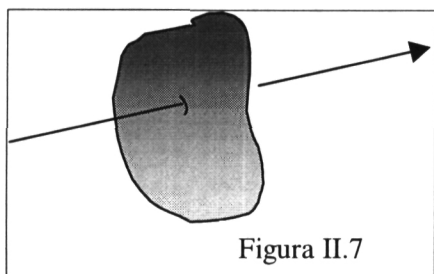


Figura II.7

por ella encerrado. Si la fuente del campo eléctrico es exterior a la superficie cerrada el flujo eléctrico que atraviesa dicha superficie será nulo, ya que toda línea de campo que entra por algún punto de la misma forzosamente saldrá por otro (Figura

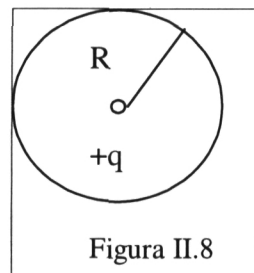


Figura II.8

II.7). Si la fuente de campo eléctrico está en el espacio encerrado por la superficie, habrá un flujo neto a través de la misma dependiente del signo y del valor numérico de la carga encerrada. Concretamente, si la carga eléctrica neta encerrada es positiva, el flujo eléctrico será positivo, ya que  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} > 0$  en todos los puntos de la superficie. Lo contrario ocurrirá si la carga neta encerrada es negativa. Matemáticamente podremos obtener el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada mediante la resolución de la integral:

$$\phi = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (\text{II.8})$$

Consideremos el caso de una carga eléctrica puntual positiva,  $q$ , y tomemos como “superficie gaussiana” una esfera de radio  $R$  centrada en la posición ocupada por dicha carga (Figura II.8). El campo eléctrico en los puntos de la esfera será  $\mathbf{E} = (q/4\pi\epsilon_0 R^2)\mathbf{r}$ . Por lo tanto, el flujo eléctrico será:

$$\phi = \oint_{\Sigma} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \oint_{\Sigma} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (\text{II.9})$$

Observamos que el resultado es independiente del valor del radio  $R$  de la esfera, aunque depende directamente del valor de la carga  $q$ . Evidentemente, si tomamos una segunda esfera de radio  $2R$  concéntrica con la anterior, el número de líneas de campo que la atraviesan será el mismo, lo que justifica el resultado que hemos destacado. Podemos continuar con este sencillo análisis observando que las líneas de campo que atraviesan una superficie elemental  $dS$  de la esfera de radio  $R$  coincide con las que atraviesan su proyección en la esfera de radio  $2R$ , siendo el área de la proyección  $4dS$  (si el radio se duplica el área se cuadruplica). Este resultado se puede generalizar al caso en el que la superficie gaussiana es irregular. En ese caso, la proyección de la superficie elemental  $dS$  de la esfera de radio  $R$  en

la superficie gaussiana irregular será  $dS'$ , y el flujo a través de esta área será  $E'dS'\cos\theta = \vec{E}' \cdot d\vec{S}'$ , donde  $\theta$  es el ángulo que forman los vectores  $d\vec{S}'$  y  $\vec{E}'$ , que coincide con el flujo que atraviesa la superficie  $d\vec{S}$  de la esfera, es decir:

$$\vec{E}' \cdot d\vec{S}' = \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (\text{II.10})$$

Integrando para las superficies cerradas en cada caso, obtendremos:

$$\begin{aligned} \phi_{ESFERA} &= \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_S E dS = \frac{q}{\epsilon_0} \\ \phi_{IRREGULAR} &= \oiint_{S'} \vec{E}' \cdot d\vec{S}' = \oiint_{S'} E' dS' \cos\theta \Rightarrow \phi_{IRREG} = \phi_{ESF} = \frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

y llegamos al resultado general:

$$\phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{NETA ENCERRADA}}{\epsilon_0} \quad (\text{II.12})$$

que se conoce como ley de Gauss. En la ecuación (II.12) S únicamente debe cumplir la condición de ser una superficie cerrada, su forma es arbitraria.

La ley de Gauss pone de manifiesto la existencia de cargas eléctricas puntuales a partir del hecho de que afirma que el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada puede ser no nulo.

## 5. CÁLCULO DEL CAMPO ELÉCTRICO

A la hora de calcular campos eléctricos creados por distribuciones arbitrarias de carga eléctrica, contamos con distintos métodos para resolver el problema. En primer lugar, intentaremos utilizar para este propósito la ley de Gauss. Para ello, será necesario que la simetría de la distribución de carga permita elegir una superficie cerrada de tal forma que el cálculo de la integral de superficie que se muestra en la ley de Gauss sea trivial. Simplemente, igualando este resultado al cociente entre la carga encerrada por dicha superficie y la permitividad del vacío, obtendremos el campo eléctrico en los puntos de la superficie cerrada. De no ser posible seguir este método, utilizaremos la ley de Coulomb. En este caso el problema será elegir la carga elemental  $dQ$  de la distribución de cargas que resulte apropiada para que la integración de los campos creados por cada una de las cargas  $dQ$ , extendida a todo el volumen donde está distribuida la carga, resulte factible.

En cualquiera de los métodos descritos, una buena dosis de intuición que, por otra parte, se puede mejorar notablemente con un buen entrenamiento consistente en “hacer problemas”, es la clave para elegir correctamente la superficie cerrada en un caso y la carga elemental en el otro.

Capítulo III

## CAMPO ELECTROSTÁTICO EN EL VACÍO II. ROTACIONAL DE “E”

### 1. ENERGÍA POTENCIAL ELÉCTRICA

La fuerza eléctrica entre dos cargas eléctricas puntuales que se encuentran en reposo se calcula mediante la ley de Coulomb. En este momento nos planteamos la pregunta: ¿es conservativa esta fuerza? Para responderla simplemente calcularemos su rotacional, ya que, como sabemos, el que sea nulo es condición necesaria y suficiente para que efectivamente sea una fuerza conservativa. En realidad será suficiente con calcular el rotacional del cociente  $\mathbf{r}/r^3$ , que expresa el término variable de la ley de Coulomb, siendo  $\mathbf{r}$  el vector posición de la carga sobre la que se ejerce la fuerza respecto de la carga que ejerce la fuerza. Observe que el cociente  $\mathbf{r}/r$  es el vector unitario radial. Por lo tanto:

$$\text{rot}\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} & \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} & \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{III.1})$$

Es decir, la fuerza electrostática entre cargas puntuales es conservativa. De acuerdo con el principio de superposición también será conservativa la fuerza eléctrica ejercida por cualquier distribución de cargas eléctricas que se encuentren en reposo.

El trabajo realizado por la fuerza eléctrica al transportar la carga sobre la que se ejerce la fuerza será independiente del camino seguido al llevar dicha carga de una posición a otra del campo eléctrico creado por la carga que ejerce la fuerza. Dicho trabajo se calculará de acuerdo con la expresión:

$$W = -\Delta E_p \quad (\text{III.2})$$

donde  $E_p$  es la energía potencial asociada con la fuerza electrostática. Como sabemos, si el trabajo realizado por la fuerza eléctrica es positivo (la fuerza desplaza a la carga positiva a favor del campo eléctrico y a la carga negativa en contra del mismo) la energía potencial disminuye. De manera análoga, si el trabajo es negativo será un agente externo el que estará realizando una fuerza en contra de

la fuerza eléctrica, de igual módulo y sentido contrario (en contra del campo si la carga es positiva y a favor del campo si es negativa) y la energía potencial aumentará en ese caso.

¿Cuál es la expresión de la energía potencial de una carga eléctrica puntual situada en el seno del campo eléctrico creado por otra carga eléctrica puntual? A partir de la relación  $\mathbf{F} = -\text{grad } E_p$ , entre fuerza conservativa y energía potencial asociada, podremos calcular  $E_p$ , ya que conocemos la expresión de  $\mathbf{F}$ . Efectivamente:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \\ F_y &= \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \\ F_z &= \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

La integración de cada una de estas expresiones nos daría el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right) + C(y, z) \\ E_p &= \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right) + C(x, z) \\ E_p &= \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right) + C(x, y) \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

de cuya combinación resulta la expresión final:

$$E_p = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r} + C \quad (\text{III.5})$$

Como sabemos, la presencia de la constante de integración  $C$ , que resulta del carácter indefinido de la integral, pone de manifiesto que el nivel cero de energía potencial (posición en la que la carga  $q'$  posee una energía potencial nula) es totalmente arbitrario.

Lo más razonable es, sin embargo, elegir el nivel cero de energía potencial allí donde la interacción de las cargas eléctricas es previsiblemente inexistente. En el caso analizado esta posición corresponde a una separación infinita entre las cargas, es decir, cuando  $r=\infty$ , así si imponemos la condición de que  $E_p(r=\infty)=0$ , resultará  $C=0$ . Con esta elección es fácil interpretar el resultado  $E_p=qq'/4\pi\epsilon_0 r$  como el trabajo necesario para traer las cargas desde una distancia de separación infinita (a efectos prácticos cuando la separación es tal que no es medible la fuerza de interacción entre ellas) a una distancia  $r$ . Si las cargas son del mismo signo el trabajo será realizado en contra del campo, luego su signo será negativo y la energía potencial final será positiva. Por el contrario, si las cargas son de distinto signo el propio campo acercará las cargas, por lo que el trabajo será positivo y la energía potencial en el estado final será negativa.

Haciendo uso del principio de superposición podemos concluir que la energía potencial que posee una carga eléctrica  $q'$  situada en determinada posición del campo eléctrico creado por una distribución de carga eléctrica, será:

$$E_p = \begin{cases} \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i} & (\text{distribución discreta}) \\ \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \iiint_Q \frac{dq}{r} & (\text{distribución continua}) \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

## 2. POTENCIAL ELÉCTRICO

Cuando nos planteamos la, un tanto esotérica, tarea de localizar el lugar donde se encuentra la energía potencial que posee una carga eléctrica, pensamos en las posiciones ocupadas por las cargas creadoras del campo eléctrico y por la carga que recibe la fuerza de dicho campo. Concluimos así que la energía potencial depende de esta última carga también. Nos interesa, sin embargo, contar con una magnitud física que describa la energía del campo eléctrico pero que sea independiente de la carga eléctrica que utilicemos para detectar su existencia. Por esta razón definimos la magnitud potencial eléctrico que, simplemente, será la energía potencial de una distribución de cargas eléctricas por unidad de carga testigo, es decir, el potencial eléctrico  $V$ , en una posición dada del espacio,

resultará de dividir la energía potencial que una carga  $q'$  posee en dicha posición, entre el valor de dicha carga  $q'$ , es decir:

$$V = \lim_{q' \rightarrow 0} \frac{E_p}{q'} \quad (\text{III.7})$$

La unidad S.I. del potencial eléctrico recibe el nombre de voltio ( $1V=1J/1C$ ).

De la relación entre fuerza y energía potencial se deduce la relación entre campo y potencial eléctrico:

$$\vec{E} = -\text{grad}V \quad (\text{III.8})$$

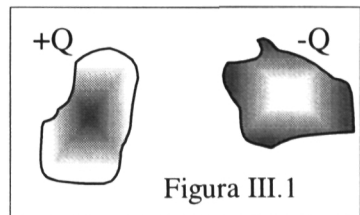
Para ayudar a visualizar el campo eléctrico resulta útil definir las superficies equipotenciales. Éstas se definen como el lugar geométrico de puntos en los que el potencial eléctrico es constante. La relación entre las superficies equipotenciales y las líneas de campo eléctrico es de perpendicularidad. Esta relación es fácilmente demostrable:

$$\vec{E} = -\text{grad}V \quad \Rightarrow \quad \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\text{grad}V \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{r} \quad (\text{III.9})$$

*d\vec{r} en superficie equipotencial*

### 3. CONDENSADORES

Se define un condensador como un sistema de dos conductores, denominados placas, separados una cierta distancia fija, que poseen la misma carga eléctrica pero con signos contrarios (Figura III. 1). Es éste un sistema que cumple con la interesante (y útil) propiedad de ser capaz de almacenar carga y energía eléctrica. La magnitud física que cuantifica esta propiedad se denomina *capacidad* y se define como el cociente entre la carga de la placa positiva y el valor absoluto de la ddp entre las dos placas, es decir:



$$C = \frac{Q}{V} \quad (\text{III.10})$$

Puesto que  $V \propto Q$ , a pesar de que pudiera parecer lo contrario por su definición, la capacidad de un condensador es independiente tanto de su carga como de la ddp

entre sus placas, convirtiéndose en una propiedad intrínseca del condensador que, como veremos, está relacionada con su geometría (en el próximo capítulo veremos que también depende del material existente en el espacio comprendido entre las placas).

Consideremos dos placas conductoras, con la misma carga eléctrica pero de signos diferentes. Supondremos, para simplificar este cálculo, que las placas son dos planos infinitos paralelos. Sus densidades superficiales de carga eléctrica serán  $+\sigma$  y  $-\sigma$ , respectivamente. La diferencia de potencial entre dichas placas, que supondremos que están separadas una distancia fija  $d$ , será, por lo tanto:

$$V = E d = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d \quad (\text{III.11})$$

Hemos supuesto que las placas tengan un área suficientemente grande como para que podamos tratarlas como infinitas con un objetivo: calcular el campo eléctrico existente en el espacio comprendido entre ellas de una manera sencilla,  $E=\sigma/\epsilon_0$ . Ahora podemos sustituir la densidad de carga superficial por su valor en un plano de área  $A$ , con una carga uniformemente distribuida de valor  $Q$ ,  $\sigma=Q/A$ , en la ecuación (III.11). El resultado:

$$V = \frac{Q}{A\epsilon_0} d \quad (\text{III.12})$$

pone de manifiesto claramente que  $V$  es directamente proporcional a la carga eléctrica de una de las placas. Éste es, como hemos dicho, un resultado de validez general para cualquier sistema de dos conductores cargados con la misma carga de signos contrarios en cada uno de ellos. A partir de (III.12), haciendo uso de la definición (III.10), obtendremos la capacidad del denominado condensador de láminas planoparalelas:

$$C = \frac{Q}{V} = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (\text{III.13})$$

Obsérvese que la capacidad es una magnitud independiente de la carga de las placas del condensador y depende de la forma geométrica del mismo.

La unidad de medida S.I. de la capacidad es  $1\text{C} / 1\text{V}$  que recibe el nombre de faradio  $F$ .

#### 4. ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Por definición, la energía electrostática de una distribución de cargas eléctricas es igual al trabajo mínimo necesario para construirla. Con un ejemplo se entenderá mejor esta definición. Calcularemos el trabajo necesario para cargar un condensador. En un instante intermedio, las placas del condensador poseerán una carga  $q$ , siendo la ddp entre ellas  $V$ , mientras que su capacidad, que es una propiedad geométrica del mismo, será en todo momento  $C$ . La relación entre las magnitudes señaladas es, como sabemos,  $V=q/C$ . El proceso de carga del condensador continúa añadiendo una carga  $dq$  a las placas del condensador a partir de la situación descrita. Esto significa que será necesario realizar un trabajo (mínimo) igual al producto  $Vdq$  en contra del campo eléctrico existente entre las placas del condensador. Por lo tanto, para cargar completamente el condensador hemos de realizar un trabajo igual a,

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \frac{Q^2}{2} = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} QV \quad (\text{III.14})$$

En el caso particular del condensador de láminas planoparalelas, la ecuación (III.14) nos da el resultado:

$$W = \Delta E_p = E_{p_f} - E_{p_i} = E_{p_f} = E_p = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{A}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 A d E^2 \quad (\text{III.15})$$

Como el producto  $Ad=dV$  es el volumen entre las placas del condensador, que es la región donde existe un campo eléctrico no nulo, podemos deducir la definición de una útil magnitud, la *densidad de energía electrostática*,  $e_p = E_p/V$ , que tiene un interesante significado físico: expresa el hecho de que allí donde hay un campo eléctrico, hay energía eléctrica. El resultado:

$$e_p = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (\text{III.16})$$

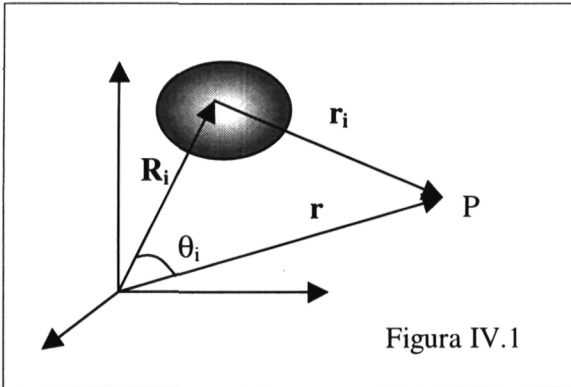
es de validez general.

## Capítulo IV

# CAMPO ELECTROSTÁTICO EN LA MATERIA I. DIELÉCTRICOS

### 1. EL DIPOLO ELÉCTRICO

Analizaremos a continuación el efecto que produce la presencia de un medio material en el comportamiento del campo eléctrico creado por cargas en reposo.



Dada una distribución de cargas (Figura IV.1), el potencial eléctrico creado por ellas en un punto P del espacio será la suma de los potenciales debidos a cada una de las cargas creadoras del campo eléctrico:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i} \quad (\text{IV.1})$$

En esta expresión  $r_i$  es el módulo del vector posición del punto P respecto de la  $i$ -ésima carga creadora del campo, y  $\mathbf{r}$  es el vector posición del punto P respecto del sistema de referencia inercial elegido. El álgebra vectorial nos permite afirmar que  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_i = \mathbf{R}_i$  es el vector posición de la  $i$ -ésima carga respecto del sistema de referencia. Si el punto P está muy alejado de la distribución de carga, podremos expresar la ecuación (IV.1) de una forma alternativa, especialmente útil, ya que será posible obtener el potencial en función de las posiciones ocupadas por las cargas y el punto P respecto del sistema de referencia, no siendo necesario conocer la posición del punto P respecto de la distribución de cargas.

De acuerdo con el teorema del coseno, si  $\theta_i$  es el ángulo formado por los vectores  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{R}_i$ , tendremos la siguiente relación entre sus módulos y el módulo del vector  $\mathbf{r}_i$ :

$$r_i^2 = R_i^2 + r^2 - 2R_i r \cos\theta_i = r^2 \left[ 1 - (2 \cos\theta_i) \left( \frac{R_i}{r} \right) + \left( \frac{R_i}{r} \right)^2 \right] \quad (\text{IV.2})$$

A partir de esta expresión obtendremos:

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r} \left[ 1 - (2 \cos \theta_i) \left( \frac{R_i}{r} \right) + \left( \frac{R_i}{r} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (\text{IV.3})$$

Si ahora hacemos uso del desarrollo de Taylor de la expresión  $(1+x)^n$ , con  $n=-1/2$  y  $x=-2\cos\theta_i(R_i/r)+(R_i/r)^2$ , resultará:

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r} \left[ 1 + \cos \theta_i \left( \frac{R_i}{r} \right) + \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta_i - 1) \left( \frac{R_i}{r} \right)^2 + \dots \right] \quad (\text{IV.4})$$

Dada la condición de estar alejado el punto P de la distribución de carga, no aparecen explícitamente los términos de orden superior a dos del cociente  $(R_i/r)$ .

Haciendo uso del desarrollo (IV.4) en la expresión (IV.1), obtendremos:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{i=1}^N q_i + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sum_{i=1}^N q_i R_i \cos \theta_i + \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sum_{i=1}^N q_i R_i^2 \frac{3 \cos^2 \theta_i - 1}{2} + \vartheta \left( \frac{1}{r^4} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.5})$$

Por analogía, la expresión correspondiente a una distribución continua de carga será:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_V \rho(\vec{R}) dv + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_V \rho(\vec{R}) R \cos \theta dv + \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int_V \rho(\vec{R}) R^2 \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} dv + \vartheta \left( \frac{1}{r^4} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.6})$$

El símbolo  $\vartheta(1/r^4)$  representa a los términos de orden  $1/r^n$  con  $n \geq 4$ .

Las expresiones (IV.5) y (IV.6) reciben el nombre de desarrollo multipolar del potencial eléctrico. El primer término corresponde a  $(1/r)(1/r^n)$  con  $n=0$ , y se le llama término monopolar por ser  $2^n=1$  cuando  $n=0$ . El segundo término corresponde a  $(1/r)(1/r^n)$  con  $n=1$ , y se le llama término dipolar por ser  $2^1=2$ . El

tercer término corresponde a  $(1/r)(1/r^n)$  con  $n=2$ , y se denomina término cuadrupolar por ser  $2^2=4$ , etc.

Obsérvese que el numerador del término monopolar es la carga total contenida en el volumen  $\forall$ , cuyo valor no depende de cuál sea el origen de coordenadas que elijamos. Si nos alejamos mucho de la distribución de carga, y la carga neta  $Q \neq 0$ , podremos hacer tender el resto de términos de la serie a cero, resultando que el potencial en el punto P será igual al potencial debido a una carga puntual Q situada en el origen de coordenadas (el término monopolar).

El numerador del término dipolar es la suma de las proyecciones de los vectores  $q_i \mathbf{R}_i$  en la dirección que une el origen de coordenadas y el punto P (vector  $\mathbf{r}$ ). La cantidad vectorial  $\sum_i q_i \mathbf{R}_i$  o  $\int_V \rho \mathbf{R} dv$  recibe el nombre de *momento dipolar* de la distribución de carga. Cuando  $Q=0$  el término dipolar

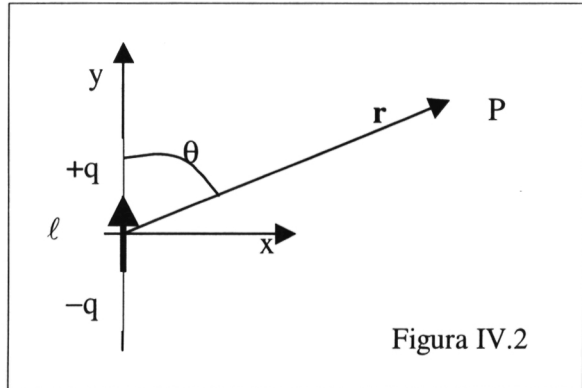


Figura IV.2

adquiere un papel protagonista. El caso más sencillo, pero no trivial, correspondiente a  $Q=0$ , se presenta cuando tenemos dos cargas de igual valor numérico pero signo contrario, separadas una cierta distancia. Esta distribución recibe el nombre de *dipolo eléctrico* (Figura IV.2). Para que desde el punto P se perciba una carga neta  $Q=0$  pero también haya una acción eléctrica no nula en dicho punto, será necesario que se cumpla que las dos cargas estén separadas una distancia mucho menor que la distancia de cada una de ellas al punto P. El dipolo eléctrico es especialmente útil ya que proporciona la clave para la explicación de problemas relacionados con el comportamiento de la materia en presencia de un campo eléctrico.

De igual forma podríamos considerar el caso en que el momento dipolar fuese cero, pasando a ocupar el protagonismo del cálculo del potencial el término cuadrupolar, pero este desarrollo queda fuera del objeto de esta obra.

Consideremos un dipolo eléctrico en el que las dos cargas, de valor  $q$  y  $-q$ , están separadas una distancia  $\ell$ . El momento dipolar será en este caso,  $\mathbf{p} = q(\ell/2)\mathbf{j} - q(\ell/2)(-\mathbf{j}) = q\ell\mathbf{j} = q\ell$ , cuyo sentido, por convenio, será tomado desde la carga negativa hacia la carga positiva. Si pretendemos calcular el potencial eléctrico en un punto P situado a una distancia  $r$  del centro del dipolo, haremos uso únicamente del término dipolar, ya que el término monopolar es nulo ( $Q = q - q = 0$ ) y los términos superiores al dipolar son despreciablemente pequeños por ser  $r \gg \ell$ . El numerador del término dipolar es el producto escalar  $\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}$ , donde  $\hat{\mathbf{r}}$  es el vector unitario que señala el

sentido desde el origen de coordenadas al punto P. Con las condiciones establecidas, el potencial debido al dipolo eléctrico será:

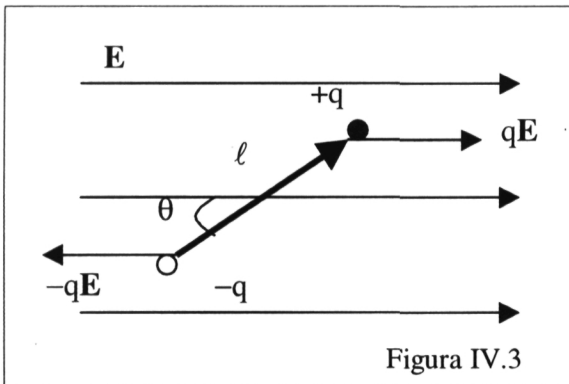
$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (\text{IV.7})$$

A partir de esta expresión podremos calcular el campo eléctrico creado por un dipolo, partiendo del carácter conservativo de dicho campo de fuerzas. Efectivamente, puesto que  $\mathbf{E} = -\text{grad}V$ , resultará:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)\hat{r} - \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)\hat{\theta} - \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\phi}\right)\hat{\phi} = \\ &= \left(\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\right)\frac{2\cos\theta}{r^3}\hat{r} + \left(\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\right)\frac{\sin\theta}{r^3}\hat{\theta} \end{aligned} \quad (\text{IV.8})$$

que es una expresión apreciablemente más compleja que la del potencial eléctrico debido al dipolo.

Basándonos en la estructura atómico-molecular de la materia, asimilaremos una molécula a un dipolo eléctrico. Sobre esta cuestión insistiremos más adelante en este capítulo. Por ahora, de acuerdo con este modelo, y con el objetivo final de analizar el comportamiento de la materia en presencia de un campo eléctrico, vamos a determinar la acción que un campo eléctrico ejerce sobre un dipolo eléctrico.



Sea un dipolo eléctrico constituido por dos cargas  $q$  y  $-q$ , separadas una distancia  $\ell$ , cuyo momento dipolar será  $\mathbf{p} = q\ell$  (véase la Figura IV.3). Supongamos que se introduce en el seno de un campo eléctrico uniforme  $\mathbf{E}$ , de tal forma que, inicialmente, el ángulo formado por  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{E}$  es  $\theta$ . Ambas cargas recibirán la fuerza de módulo  $qE$ ; en el mismo sentido que el

campo la carga positiva y en sentido contrario al campo la carga negativa. Por lo tanto, aunque la fuerza neta sobre el dipolo sea nula, aparecerá un momento no nulo, de valor  $\tau = \ell \times qE$  respecto de la carga negativa, que hará girar al dipolo

provocando su orientación con el campo eléctrico. Si el campo  $\mathbf{E}$  no fuera uniforme, además del momento no nulo de las fuerzas, existiría una fuerza neta sobre el dipolo que lo llevaría hacia la región donde el campo es más intenso. El resultado obtenido, que debemos tener presente, es que un campo eléctrico produce un giro, en el sentido del mismo, de todo dipolo eléctrico inmerso en él. De esta forma, como veremos, podremos justificar, en buena medida, el comportamiento de la materia en presencia de un campo eléctrico.

## 2. EL VECTOR POLARIZACIÓN ELÉCTRICA

De acuerdo con la respuesta de la materia frente a la acción de un campo eléctrico, ésta se clasifica en materiales conductores, aislantes, semiconductores y superconductores. Corresponde al objetivo de esta obra el tratar los dos primeros. La diferencia fundamental entre materiales conductores y aislantes radica en la posibilidad de que se produzca o no en ellos una corriente eléctrica. La estructura de la materia y el tipo de enlace químico que da lugar a dichas clases de sustancias, justifica este comportamiento opuesto. Los materiales conductores (metales) resultan del tipo de enlace químico que los generan, denominado enlace metálico, consistente en la formación de una red cristalina con los cationes que resultan de la ionización de los átomos del metal a los que les “sobran” electrones en su última capa, “bañada” por una “nube” obtenida con dichos electrones, los cuales gozan de cierta “libertad” para moverse dentro del material conductor. Consecuentemente, este tipo de materiales estará caracterizado por ser conductores de carga eléctrica. En el extremo opuesto están los materiales aislantes, que resultan del enlace covalente en sus moléculas. Este tipo de enlace consiste en la “compartición” de electrones entre átomos que necesitan completar su última capa con alguna unidad más. La consecuencia es que los electrones de valencia estarán fuertemente ligados a las moléculas, por lo que no gozarán de libertad de movimiento fuera de ellas. Se entiende así que este tipo de sustancias sean malos conductores de carga eléctrica, por lo que se denominan aislantes. Las moléculas de estas sustancias podrán poseer átomos con diferente electronegatividad, lo que supondrá que los centros de carga positiva y negativa estarán separados una cierta distancia (típicamente del orden de 0.1 Armstrong), o bien los átomos tendrán la misma electronegatividad, lo que significará que no habrá tal separación de cargas. En el primer caso, la molécula tendrá un momento dipolar permanente  $\mathbf{p}$ , en el segundo será cero el momento dipolar pero, en general, será posible inducir la separación de los centros de carga (típicamente del orden de  $10^{-5}$  Armstrong) mediante la acción de un campo eléctrico exterior, por lo que la molécula adquirirá un momento dipolar inducido. En cualquier caso, el hecho de estar constituido por dipolos eléctricos que, como hemos visto, responderán orientándose en el seno del campo eléctrico externamente aplicado, hará que a este tipo de sustancias las denominemos *dieléctricos*.

Si hay  $n$  dipolos por unidad de volumen en el material,  $\mathbf{P}=n\mathbf{p}$  será el vector polarización del material. Es fácil entender que si hay varias especies dipolares,  $\mathbf{P}=\sum n_i \mathbf{p}_i$ , será el vector polarización en ese caso. El significado del vector  $\mathbf{P}$  es el de densidad de momento dipolar en el material.

Cuando no hay ningún campo eléctrico externo aplicado sobre el material, la agitación térmica de las moléculas polares hace que, estadísticamente, estén aleatoriamente distribuidas, lo que da lugar a un vector polarización nulo. Excepcionalmente existen sustancias denominadas ferroeléctricas, en las que existe cierto alineamiento de los dipolos permanentes.

Cuando se aplica un campo externo  $\mathbf{E}$  a la sustancia, en las moléculas no polares se inducen dipolos que, lo mismo que ocurre con las moléculas polares, tienden a orientarse en la dirección del campo, apareciendo un vector polarización  $\mathbf{P}=\mathbf{P}(\mathbf{E})$ . Cuando el campo externo deja de actuar, normalmente desaparece dicha alineación de dipolos y, con ella, el vector polarización. No obstante, hay excepciones, y algunas sustancias como la cera de carnauba fundida, inmersa en un campo eléctrico, si después se enfría, adquiere una polarización permanente (electrete). Este tipo de sustancias, análogas a los imanes permanentes, no ha experimentado hasta la fecha una aplicación tecnológica importante.

La orientación de los dipolos, provocada por el campo externo  $\mathbf{E}$ , da lugar a un campo eléctrico creado por los propios dipolos, que modificará el campo externo. A partir de la ecuación (IV.7), se deduce que el potencial eléctrico en un punto exterior, debido a un dieléctrico polarizado, será:

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\forall} \frac{\vec{P} \cdot \hat{r}}{r^2} dv = \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\forall} \vec{P} \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} \right) dv = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \int_{\forall} \nabla \cdot \left( \frac{\vec{P}}{r} \right) dv + \int_{\forall} \frac{-\nabla \cdot \vec{P}}{r} dv \right]
 \end{aligned} \tag{IV.9}$$

Aplicando el teorema de la divergencia resultará:

$$\int_{\forall} \nabla \cdot \left( \frac{\vec{P}}{r} \right) dv = \oint_{\Sigma} \frac{\vec{P} \cdot d\vec{S}}{r} = \oint_{\Sigma} \frac{P_n dS}{r} \tag{IV.10}$$

donde  $P_n$  es la componente del vector  $\mathbf{P}$  perpendicular a la superficie que delimita el material dieléctrico. Llamando  $\sigma_p=P_n$  a la densidad superficial de carga de polarización, y  $\rho_p=-\nabla \cdot \mathbf{P}$  a la densidad volúmica de carga de polarización, podremos escribir, finalmente:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\Sigma} \frac{\sigma_p}{r} dS + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\forall} \frac{\rho_p}{r} dv \quad (\text{IV.11})$$

que se interpreta (Figura IV.4) afirmando que en el material dieléctrico, como consecuencia de la acción del campo eléctrico exterior  $\mathbf{E}$ , se induce una orientación de dipolos que da lugar a una distribución de carga eléctrica superficial en las caras perpendiculares al campo eléctrico, siendo una positiva y la otra negativa. Estas dos distribuciones de carga eléctrica

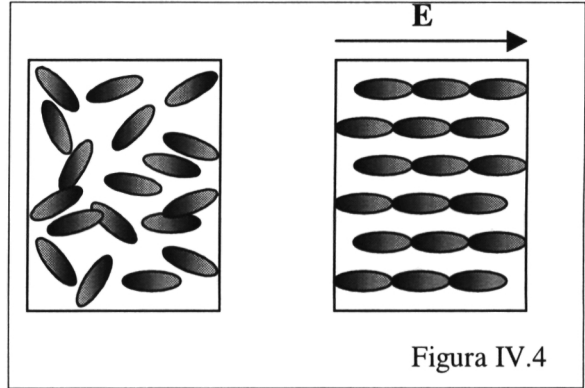


Figura IV.4

de polarización crearán un campo eléctrico que se suma al campo externo (en realidad se le resta) creado por cargas eléctricas “libres” de moverse. Si el dieléctrico es homogéneo  $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$  en todo su volumen, pero si es no homogéneo, será  $\nabla \cdot \mathbf{P} \neq 0$ , por lo que en algunos puntos del interior del material aparecerá una carga eléctrica neta de densidad,  $\rho_p$ , que creará un campo eléctrico adicional, el cual deberá restarse también del campo externo.

### 3. EL VECTOR DESPLAZAMIENTO ELÉCTRICO

Después del anterior análisis, es conveniente distinguir claramente entre cargas eléctricas de polarización y cargas libres.

La ecuación  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ , que conocemos como ley de Gauss, fue formulada para cargas eléctricas situadas en el vacío, por lo tanto, cargas libres. Sin embargo, cuando se considera la presencia de un medio material, las cargas de polarización que aparecen, crean un campo eléctrico de las mismas características que el anterior, por lo que la ley de Gauss tendrá la misma validez. Por lo tanto, debemos considerar que dicha ley es generalizable, sin más que aceptar que  $\rho = \rho_p + \rho_l$ , es decir, representa tanto cargas libres como cargas de polarización. En consecuencia:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{E}} = \frac{\rho_p + \rho_l}{\epsilon_0} \quad (\text{IV.12})$$

Sustituyendo el valor de  $\rho_p$  obtendremos:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_l}{\epsilon_0} - \frac{\nabla \cdot \vec{P}}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_l \quad (\text{IV.13})$$

y, definiendo el vector desplazamiento eléctrico como:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (\text{IV.14})$$

resultará:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_l \quad (\text{IV.15})$$

La diferencia fundamental entre las ecuaciones (IV.12) y (IV.15) es que se pone de manifiesto que son fuentes del campo  $\mathbf{E}$  tanto las cargas libres como las cargas de polarización, mientras que únicamente las cargas libres son fuente del campo  $\mathbf{D}$ .

La ecuación (IV.14) relaciona los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$  mediante un término aditivo. Puede ser interesante (dependerá de la conveniencia de su uso) que la relación entre ambos campos lo sea a través de un término multiplicativo. Con la condición de que el campo eléctrico externo no sea excesivamente intenso, para la mayor parte de sustancias, se cumple que el vector  $\mathbf{P}$  es directamente proporcional al vector  $\mathbf{E}$ :

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E} \quad (\text{IV.16})$$

donde  $\chi$  es un factor numérico que recibe el nombre de susceptibilidad eléctrica. Sustituyendo (IV.16) en (IV.14) se obtiene la relación:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \chi \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad (\text{IV.17})$$

donde los factores  $\epsilon$  y  $\epsilon_r$  reciben los respectivos nombres de permitividad y constante dieléctrica del medio. En general, las ecuaciones del tipo (IV.17) reciben el nombre de ecuaciones constitutivas, ya que pretenden caracterizar la constitución del material, en este caso a través del coeficiente  $\epsilon$ .

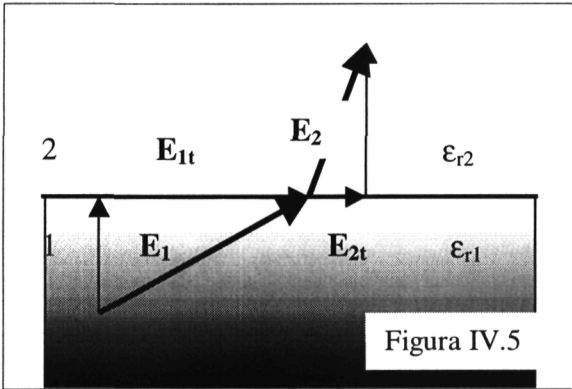
La constante dieléctrica de un material es función de la frecuencia del campo eléctrico aplicado para medirla. Nosotros estamos interesados aquí en el valor estático de dicho coeficiente (frecuencia cero), que varía normalmente entre 1 y 80, que es el valor, un tanto extremo, del agua a temperatura ambiente.

Las ecuaciones de la Electroestática en el vacío se modificarán sustituyendo  $\epsilon_0$  por  $\epsilon$ . Así, por ejemplo, la capacidad de un condensador de láminas

planoparalelas en el que se ha introducido una sustancia dieléctrica de permitividad  $\epsilon$  pasará a ser  $\epsilon A/d$  en vez de  $\epsilon_0 A/d$ , que es su valor cuando entre las placas no hay medio material alguno.

**4. CONDICIONES DE CONTORNO EN UN DIELECTRICO**

El campo electrostático  $\mathbf{E}$  es conservativo, esté presente un medio dieléctrico o no, es decir, cumple con la condición vectorial  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ . Consideremos dos medios dieléctricos, 1 y 2, de constantes dieléctricas  $\epsilon_{r1}$  y  $\epsilon_{r2}$ , respectivamente, separados por una región interfacial (Figura IV.5). El vector  $\mathbf{E}_1$  correspondiente a la región 1 se descompondrá en sus dos componentes normal a la interfase,  $\mathbf{E}_{1n}$ , y



tangente a dicha interfase,  $\mathbf{E}_{1t}$ . Lo mismo podemos hacer con el vector  $\mathbf{E}_2$ , que corresponde a la región 2. Los vectores  $\mathbf{E}_1$  y  $\mathbf{E}_2$  definen un plano (Figura IV.6), en el que consideraremos el rectángulo abcd, de base L y altura H. Como  $\mathbf{E}$  es conservativo:

$$\int_{\Sigma} (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = 0 \quad (IV.18)$$

donde  $\Sigma=LH$  es el área del rectángulo abcd. Aplicando el teorema del rotacional, obtendremos que:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_b^c \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_c^d \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_d^a \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (IV.19)$$

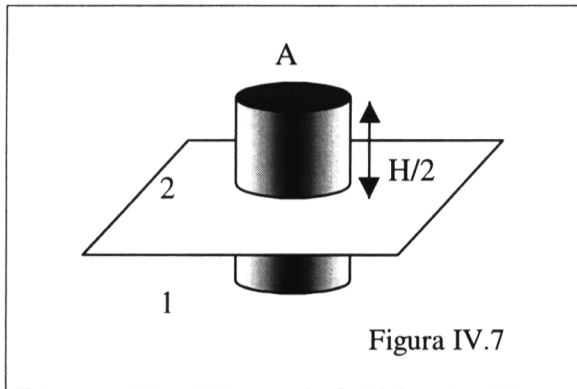
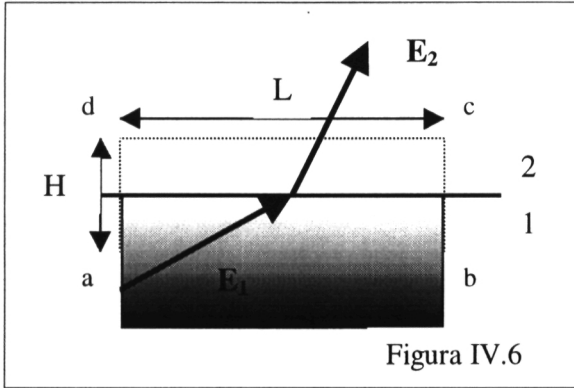
donde  $\Gamma$  representa el contorno de dicho rectángulo. Puesto que nos interesa conocer las condiciones de contorno, haremos  $H \rightarrow 0$ , por lo que las integrales en los lados bc y da serán nulas. Por lo tanto:

$$\int_a^b E_{1t} dr + \int_c^d E_{2t} dr = \int_a^b E_{1t} dr - \int_c^d E_{2t} dr = 0 \quad (IV.20)$$

Como L es arbitraria, podemos tomarla infinitesimalmente pequeña, luego los integrandos serán constantes en dicha longitud. Resolviendo las integrales tendremos:

$$\begin{aligned}
 E_{1t}L - E_{2t}L &= 0 \\
 E_{1t} &= E_{2t}
 \end{aligned}
 \tag{IV.21}$$

es decir, la componente tangencial del campo eléctrico se conserva al pasar de un medio dieléctrico a otro.



De acuerdo con la ley de Gauss en un dieléctrico,  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$ . Consideremos la región interfacial (Figura IV.7) y apliquemos esta ley a un volumen cerrado en forma de prisma de base circular perpendicular a la interfase, con base de área  $A$  y altura  $H$ , estando simétricamente construido entre ambas regiones de materiales dieléctricos. Supongamos que en la interfase existe una carga libre de densidad superficial  $\sigma$ . Entonces:

$$\begin{aligned}
 \int_{\forall} (\nabla \cdot \vec{D}) dv &= \oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \\
 &= \int_A \sigma dS
 \end{aligned}
 \tag{IV.22}$$

donde  $\Sigma$  es el área del prisma, que tiene un volumen  $\forall$ . La integral de superficie del vector  $\mathbf{D}$  se puede subdividir en tres integrales de superficie, correspondientes a las dos bases del prisma y a su superficie de revolución, entonces:

$$\int_A \vec{D}_2 \cdot d\vec{S} + \int_A \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} + \int_{\text{área rev.}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_A \sigma dS
 \tag{IV.23}$$

Como estamos interesados en el comportamiento del vector  $\mathbf{D}$  en la interfase, haremos  $H \rightarrow 0$ , por lo que la tercera integral se anulará. Por lo tanto, nos quedará:

$$\int_A D_{2n} dS - \int_A D_{1n} dS = \int_A \sigma dS \quad (\text{IV.24})$$

Ahora tomamos el área  $A$  lo suficientemente pequeña como para admitir que  $D_{2n}$  y  $D_{1n}$  son constantes, entonces:

$$\begin{aligned} D_{2n} A - D_{1n} A &= \sigma A \\ D_{2n} - D_{1n} &= \sigma \end{aligned} \quad (\text{IV.25})$$

es decir, la componente normal a la interfase del vector  $\mathbf{D}$  varía en una cantidad igual a la densidad de carga superficial existente en la misma. Si, como es habitual, no hay carga libre en la interfase:

$$D_{2n} = D_{1n} \quad (\text{IV.26})$$



## Capítulo V CAMPO ELECTROSTÁTICO EN LA MATERIA II. CONDUCTORES

### 1. CONDUCTOR EN EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO

Un material es conductor cuando, como consecuencia del tipo de enlace químico que lo genera, las cargas eléctricas pueden moverse con cierta “libertad” en su interior. Un conductor se encontrará en equilibrio electrostático cuando la carga eléctrica que posee dicha libertad de movimiento se encuentra en reposo.

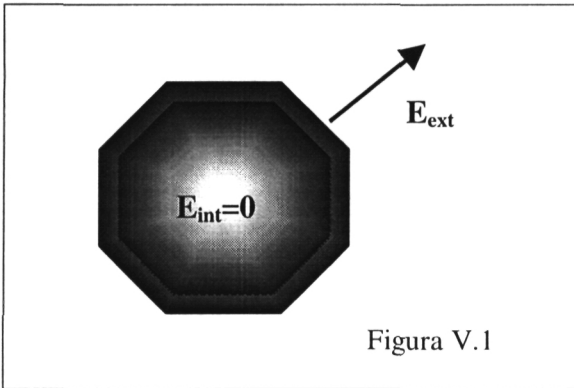


Figura V.1

A partir de la definición anterior concluimos que el campo eléctrico en el interior de un conductor en equilibrio electrostático deberá ser nulo. De lo contrario la carga eléctrica se movería, en contra de la suposición de partida. Si partimos ahora de este resultado y elegimos como superficie gaussiana una superficie cerrada paralela a la superficie exterior del conductor que se encuentra en equilibrio electrostático, infinitesimalmente próxima a ella y dibujada en su interior (Figura V.1) concluiremos, aplicando la ley de Gauss, que la carga eléctrica neta que exista en el conductor deberá, forzosamente, residir en su superficie. Finalmente, en el exterior del conductor, donde no hay razón para negar la existencia de un campo eléctrico no nulo en su superficie, deberá, si existe, ser perpendicular a la misma, ya que, de poseer componente tangente a la superficie del conductor, provocaría el movimiento de la carga eléctrica en exceso, residente en dicha región.

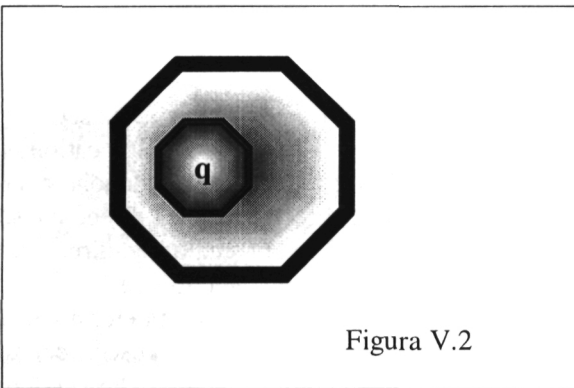


Figura V.2

¿Qué ocurre si el conductor que se encuentra en equilibrio electrostático posee una cavidad en su interior? Si dentro de la cavidad no hay ninguna carga eléctrica, tampoco la habrá en ningún punto del conductor. Bastará con utilizar la ley de Gauss para obtener la carga encerrada en cualquier región del espacio, haciendo uso del resultado ya

conocido de que el campo eléctrico en el interior del conductor es nulo. Sin embargo, la presencia de una carga eléctrica neta,  $+q$ , en la cavidad interior inducirá la aparición de una carga  $-q$  en la superficie interior del conductor y otra  $+q$  en la superficie exterior del mismo (Figura V.2). Este resultado dio lugar a una aplicación práctica muy importante, la jaula de Faraday, que fue inventada por este físico inglés y que hoy en día se utiliza con la finalidad de proteger circuitos eléctricos encerrándolos en cajas metálicas. Se entiende también que la mejor forma de estar protegido, si le sorprende una tormenta con aparato eléctrico, es quedarse en el interior de su coche.

En el siglo XIX Michael Faraday demostró experimentalmente la validez de la ley de Gauss y, con ella, de la ley de Coulomb. Para ello realizó el experimento conocido como de la “cubeta de hielo”, llamado así porque se realizó con el recipiente metálico que entonces se usaba para transportar y almacenar hielo. Faraday introdujo una bola

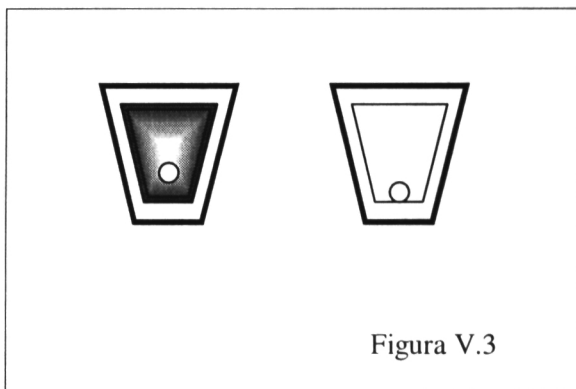


Figura V.3

metálica cargada eléctricamente en el interior de la cubeta y la aisló del exterior cerrando el recipiente (Figura V.3). De acuerdo con lo que antes hemos visto debería aparecer una carga igual y de signo contrario en la superficie interior de la cubeta e igual y del mismo signo en la superficie exterior de dicha cubeta. La forma de comprobar que éste es el fenómeno que ocurre consiste en dejar caer la bola cargada en la cubeta, tocando su base metálica. Consecuentemente las cargas de la bola y de la superficie interior de la cubeta se neutralizarían, pero la carga exterior debería mantenerse, siendo igual en valor y signo a la que se suministró a la bola metálica. Ciertamente éste fue el resultado del experimento, por lo que la ley de Gauss quedó experimentalmente confirmada.

## 2. CORRIENTE ELÉCTRICA

Las cargas “libres” de un conductor (electrones de valencia) poseen la libertad de movimiento que les permite la red cristalina formada por los cationes que forman el material. Dentro de esta red, dichas cargas están sometidas a la agitación térmica que da lugar a un movimiento aleatorio en todas las direcciones, con un resultado neto de desplazamiento nulo de carga en cualquier dirección dentro del material. Sin embargo, si se aplica un campo eléctrico exterior al material conductor, los electrones se verán forzados a moverse en un determinado sentido (contrario al del campo aplicado, dado que estas partículas poseen carga negativa  $-e$ ), lo que se traducirá en un movimiento neto de carga en dicho sentido

(Figura V.4). La fuerza que provoca este movimiento global es  $-e\mathbf{E}$  sobre cada electrón. Como dichas partículas siguen interaccionando con la red cristalina el resultado no será un simple movimiento acelerado de partículas con masa  $m$ , con

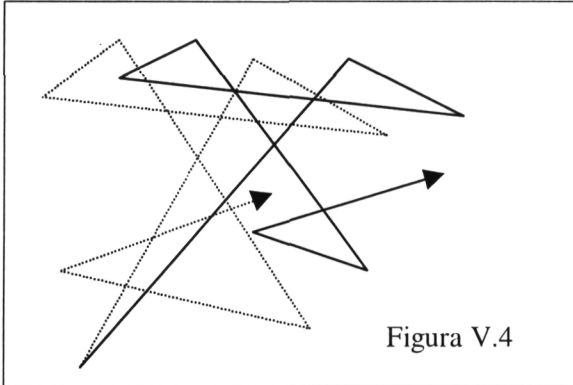


Figura V.4

aceleración  $\mathbf{a}=-e\mathbf{E}/m$ , sino que, fruto de estas interacciones, los electrones se moverán con una velocidad de *arrastré* en sentido contrario al campo externo aplicado.

El movimiento de carga eléctrica se denomina *corriente eléctrica*. La magnitud física que cuantifica la corriente eléctrica es la *intensidad* de corriente, que se define como “la carga eléctrica que, por

unidad de tiempo, pasa a través de una sección determinada”. Como vemos es una definición genérica, que no está referida exclusivamente a cargas confinadas en un material conductor. Sin embargo, por ser el objetivo de este capítulo, centraremos nuestra atención exclusivamente en este tipo de corriente eléctrica.

De acuerdo con la definición de intensidad de corriente eléctrica, si en un intervalo de tiempo  $\Delta t$  pasan  $N$  partículas con igual carga  $q$  a través de una sección determinada de un conductor (es decir, pasa una carga total  $\Delta Q=Nq$  en el intervalo  $\Delta t$ ), la intensidad de corriente media será:

$$\bar{I} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (\text{V.1})$$

No obstante, como durante dicho intervalo de tiempo la intensidad puede variar, resulta más preciso definir una intensidad de corriente instantánea:

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \quad (\text{V.2})$$

La unidad de medida de esta nueva magnitud física escalar es, en el S.I., el amperio (A).  $1 \text{ A} = 1 \text{ C} / 1 \text{ s}$ .

### 3. LEY DE OHM

Como la corriente eléctrica es el efecto que produce un campo eléctrico aplicado a un material conductor, es previsible que entre campo eléctrico y corriente eléctrica exista una relación causa-efecto. Efectivamente así es, y fue el

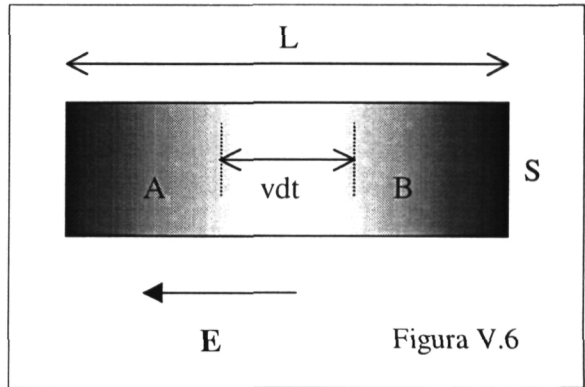
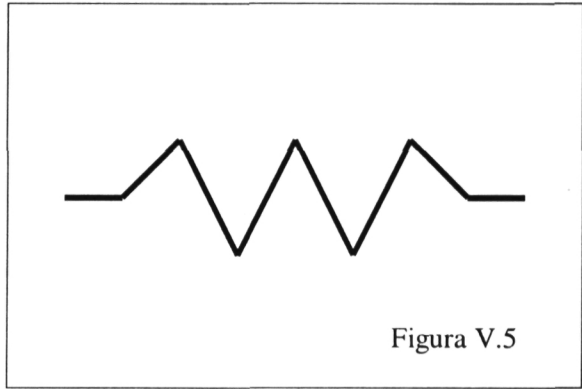
físico alemán G. Ohm (1787-1854) quien formuló dicha relación. De acuerdo con Ohm: “para un conductor metálico, a una temperatura dada, la relación entre la ddp entre dos puntos del mismo y la intensidad de corriente entre ellos es constante”.

Es importante destacar que ésta es una ley fenomenológica, no fundamental, lo que significa que la cumplen ciertas sustancias pero no otras. A las que sí cumplen con esta ley se les denomina, lógicamente, sustancias óhmicas.

Cuantitativamente, desde un punto de vista macroscópico, esta ley se formula de la siguiente forma:

$$\frac{V}{I} = R \tag{V.3}$$

donde la constante R, típica de cada material, recibe el nombre de *resistencia eléctrica*. La unidad de medida de esta magnitud, en el S.I., recibe el nombre de ohmio ( $\Omega$ ).  $1 \Omega = 1 \text{ V} / 1 \text{ A}$ . Como elemento de un circuito la resistencia eléctrica se representa tal y como se muestra en la Figura V.5. Existen varios tipos de resistencias, dependientes del tipo de aplicación. Los tipos básicos son: la resistencia de conglomerado de carbón, cuyo componente resistivo (negro de humo) se dispersa en arcilla refractaria u otro componente inerte; las resistencias fijas de alta precisión, que se fabrican depositando una película de material resistivo sobre una base cerámica; y las resistencias variables o potenciómetros, en las que un contacto móvil se desliza a lo largo de un barniz resistivo extendido sobre una base cerámica.



El significado físico de R se obtiene fácilmente a partir de la formulación microscópica de la ley de Ohm. Con esta finalidad, definiremos en primer lugar la magnitud física *densidad de corriente*, que es el equivalente microscópico de la intensidad de corriente. Consideremos una pieza cilíndrica de un material

conductor de longitud  $L$  y sección transversal  $S$  (Figura V.6), por el que circula una corriente eléctrica  $I$ , como consecuencia de la aplicación de un campo eléctrico  $\mathbf{E}$  en su interior, que da lugar a que exista una ddp  $V$  entre sus extremos. Si el material en cuestión posee  $n$  electrones por unidad de volumen, todos los electrones contenidos en el volumen  $vSdt$ , donde  $v$  es la velocidad de arrastre de los electrones ( $nvSdt$ ), pasarán a través de la sección  $S$  por la posición  $B$  en un intervalo de tiempo  $dt$ . Como la carga que pasará por dicha posición será  $envSdt$ , siendo  $e$  la carga de un electrón, la intensidad de corriente será:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{envSdt}{dt} = enSv \quad (\text{V.4})$$

Como vemos, la magnitud macroscópica  $I$  está relacionada con magnitudes microscópicas ( $e$ ,  $n$ ,  $v$ ). Pues bien, la magnitud física que recoge esta relación recibe el nombre de *densidad de corriente*, siendo su definición:

$$j = \frac{I}{S} = env \quad (\text{V.5})$$

Haciendo uso del carácter vectorial de la velocidad, a esta nueva magnitud se le dota del mismo carácter, siendo, por lo tanto, su definición final:

$$\vec{j} = en\vec{v} \quad (\text{V.6})$$

A partir de esta definición, considerando que la ddp entre los extremos del conductor de la Figura V.6 está relacionada con el campo eléctrico mediante  $V=EL$ , tendremos, sustituyendo (V.5) en (V.3), que:

$$\frac{EL}{jS} = R \Rightarrow j = \frac{L}{SR} E = \sigma E = \frac{1}{\rho} E \quad (\text{V.7})$$

donde  $\sigma$  recibe el nombre de conductividad del material y  $\rho$  es la resistividad del mismo. Estos dos coeficientes son típicos de la sustancia en cuestión. Considerando el carácter vectorial tanto de  $\mathbf{j}$  como de  $\mathbf{E}$ , relacionamos estas dos magnitudes a partir de (V.7):

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (\text{V.8})$$

Se dice que un material es óhmico cuando verifica la ley (V.8), siendo  $\sigma$  una constante.

A partir de (V.7) podemos interpretar el significado de  $R$ . Como  $R=\rho L/S$ , vemos que la resistencia depende del tipo de sustancia a través de  $\rho$ , que da idea del tipo de red cristalina así como de la cantidad de electrones “libres” en la misma, y es directamente proporcional a la longitud del material e inversamente proporcional a su sección. Estas dos últimas dependencias reflejan la importancia de la geometría del material.

Si combinamos las ecuaciones (V.6) y (V.8) obtenemos:

$$\vec{v} = \frac{\sigma}{en} \vec{E} \quad (\text{V.9})$$

La ecuación (V.9) pone de manifiesto, tal como habíamos previsto, que la velocidad de propagación de los electrones en el conductor, provocada por un campo eléctrico uniforme, es constante.

#### 4. EFECTO JOULE

Nos hemos basado, aunque no lo hayamos descrito específicamente, en un modelo microscópico de conducción en un metal debido a Drude y Lorentz, para justificar el fenómeno de la corriente eléctrica. De acuerdo con este modelo, tal como hemos señalado, la conducción eléctrica es de electrones en el seno de una red cristalina. Chocan contra ella, pierden energía en consecuencia, por lo que constantemente debe suministrarse energía eléctrica al material para que se mantenga la corriente, es decir, debe mantenerse el campo eléctrico. Esto supone que la existencia de una corriente eléctrica permanente consiste en un suministro de energía que ha de compensar el gasto que se produce en las colisiones de los electrones con la red cristalina. En virtud de estas colisiones los electrones transfieren parte de su energía cinética a los iones de la red, los cuales vibrarán con mayor amplitud (mayor energía), manifestándose macroscópicamente este hecho por un aumento de la temperatura del conductor. A este fenómeno se le denomina *efecto Joule*.

Resulta interesante determinar la rapidez con la que es transferida energía por los electrones a la red cristalina. Para ello, consideremos que el campo eléctrico realiza un trabajo, para mover a un electrón, por unidad de tiempo, igual a  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$ . Como hay  $n$  electrones por unidad de volumen, el valor total de la potencia desarrollada por unidad de volumen para mantener la corriente eléctrica será  $n\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = ne\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$ . Sustituyendo (V.9) en esta igualdad tendremos que:

$$n\vec{F} \cdot \vec{v} = \sigma E^2 = jE \quad (\text{V.10})$$

Considerando nuevamente el cilindro de la Figura V.6, la potencia necesaria para mantener la corriente eléctrica será:

$$P = (SL)jE = (jS)(EL) = IV = I^2R \quad (\text{V.11})$$

que se consume íntegramente en la resistencia eléctrica del conductor.

## 5. GENERADOR DE CORRIENTE ELÉCTRICA

Recordemos que el trabajo realizado por una fuerza  $\mathbf{F}$  al mover a una partícula desde un punto A a otro B a lo largo de un camino determinado  $\Gamma$ , se evalúa mediante la integral de línea:

$$W = \int_{A_{\Gamma}}^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (\text{V.12})$$

Si la trayectoria es cerrada los puntos inicial y final coinciden y el trabajo se calcula mediante la integral:

$$W = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (\text{V.13})$$

Cuando la fuerza es conservativa la solución de la ecuación (V.13) es cero y la ecuación (V.12) es el incremento, con signo opuesto, de la función energía potencial  $E_p$  que está relacionada con la fuerza  $\mathbf{F}$  mediante la relación  $\mathbf{F} = -\text{grad } E_p$ .

De acuerdo con lo dicho en el apartado anterior, queda claro que para mantener una corriente eléctrica en un circuito es necesario realizar un trabajo para mover las cargas en dicho circuito. Se denomina *fuerza electromotriz* (fem) al trabajo realizado, por unidad de carga eléctrica, por el propio campo eléctrico. Es decir:

$$fem = \Xi = \oint_{\text{circuito}} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (\text{V.14})$$

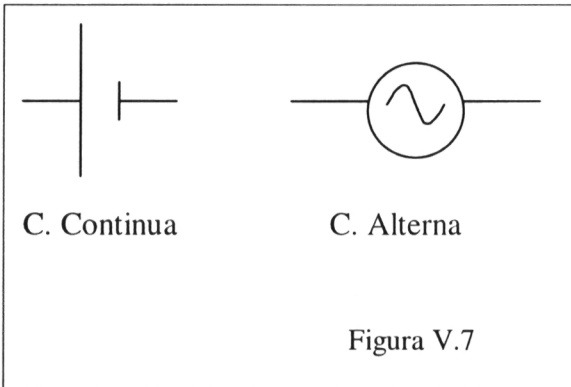
Ahora bien, como el campo electrostático es conservativo, el resultado de la integral (V.14) es siempre nulo, por lo que llegamos a la conclusión de que el campo eléctrico que mantiene una corriente eléctrica ¡no puede ser estático! No obstante, dado que el trabajo por unidad de carga eléctrica realizado por el campo  $\mathbf{E}$  que mantiene la corriente eléctrica, se consume en forma de energía térmica en la resistencia del circuito, se cumplirá la siguiente igualdad:

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = IR \quad (\text{V.15})$$

donde  $R$  es la resistencia eléctrica entre los puntos  $A$  y  $B$  del circuito e  $I$  es la corriente eléctrica en dicho tramo. De acuerdo con la ley de Ohm,  $IR=V$ , donde  $V$  representa a la ddp entre los puntos  $A$  y  $B$ . Por otra parte, como el campo eléctrico  $\vec{E}$  mueve a las cargas en el sentido en el que disminuye el potencial,  $V_B < V_A$ . Por lo tanto,  $V_B - V_A < 0$ , luego para mantener una igualdad entre números positivos en la expresión (V.15), deberemos poner:

$$IR = -(V_B - V_A) = V_A - V_B \quad (\text{V.16})$$

Al dispositivo encargado de suministrar energía eléctrica al circuito



mediante la creación de un campo eléctrico  $\vec{E}$  no estático, se le denomina *generador de corriente eléctrica*. Su representación en los esquemas de los circuitos se muestra en la Figura V.7. Como vemos existen dos representaciones básicas: el generador de corriente continua (cuando la corriente siempre circula en el mismo sentido del circuito), y el

generador de corriente alterna (cuando, como indica su nombre, la corriente cambia su sentido en el circuito con el tiempo). En este capítulo estudiaremos circuitos en los que la corriente circula siempre en el mismo sentido, por lo que únicamente estaremos interesados en los generadores de corriente continua. Son ejemplos de este tipo de generadores las baterías y las pilas.

En el caso de un generador ideal toda la energía por unidad de carga eléctrica suministrada por éste (fem) se consume en la resistencia eléctrica del circuito, es decir:

$$\Xi = IR \quad (\text{V.17})$$

Sin embargo, si el generador no cumple con esta condición de idealidad, habrá un consumo interno de energía en dicho elemento. Se toma en consideración esta circunstancia mediante la inclusión de una resistencia interna  $R_i$  en la ecuación de balance de energía del circuito:

$$\mathcal{E} - IR_i = IR \quad (\text{V.18})$$

El significado físico de la ecuación (V.18) es claro: el generador suministra al circuito la energía neta que resulta de restar a la energía total que desarrolla la energía consumida en su resistencia interna. Este extremo se manifiesta macroscópicamente mediante el calentamiento del generador.

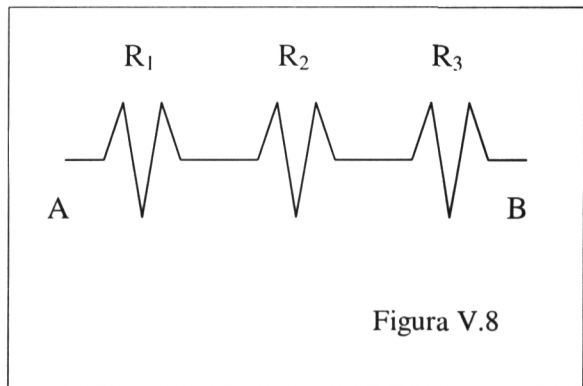
Aunque sabemos que las cargas que se mueven “realmente” en un circuito son negativas (electrones), resulta más conveniente suponer que son las cargas positivas que los electrones van dejando tras de sí las que se mueven en sentido contrario al suyo. La razón es que es más fácil interpretar algebraicamente el sentido de movimiento de una carga positiva hacia donde el potencial eléctrico disminuye (sentido del campo eléctrico) que el mismo movimiento de una carga eléctrica negativa (sentido contrario al del campo eléctrico). Por lo tanto, adoptaremos el convenio de suponer que el sentido de la corriente eléctrica en un circuito de corriente continua es desde el polo o borne positivo del generador hacia el polo o borne negativo del mismo.

## 6. ASOCIACIÓN DE RESISTENCIAS

Existen dos formas sencillas de combinar resistencias en un circuito, en serie y en paralelo. Cuando esto ocurre, tendremos la posibilidad de sustituir dichas resistencias por una sola, que consumirá la misma energía que ellas, calculando su valor de un modo sencillo. Para ello hemos de tener en cuenta la ley de Ohm y el valor de las magnitudes  $I$  y  $V$  en cada resistencia.

### 6.1. Conexión en serie

Esta situación se presenta cuando por todas las resistencias circula la misma intensidad de corriente, y el conjunto puede representarse en la forma indicada en la Figura V.8. Aplicando la condición de conservación de la carga eléctrica, sabemos que no se producirá acumulación alguna de carga eléctrica en ningún punto de la serie de resistencias. Por lo tanto, la intensidad de corriente será, como hemos afirmado, la misma en todas ellas. La caída de tensión o ddp entre los puntos extremos A y B, será la suma de los gastos de energía por unidad de carga en cada resistencia, es decir:



$$V_{AB} = IR_1 + IR_2 + IR_3 = I \left( \sum_{i=1}^3 R_i \right) \quad (\text{V.19})$$

por lo tanto, generalizando, la resistencia:

$$R = \left( \sum_{i=1}^N R_i \right) \quad (\text{V.20})$$

será equivalente a la serie de  $N$  resistencias.

### 6.2. Conexión en paralelo

En este caso las resistencias están sometidas a la misma ddp, es decir, todas ellas consumen la misma energía por unidad de carga. El conjunto podrá representarse en la forma indicada en la Figura V.9. Nuevamente, aplicando la condición de conservación de la

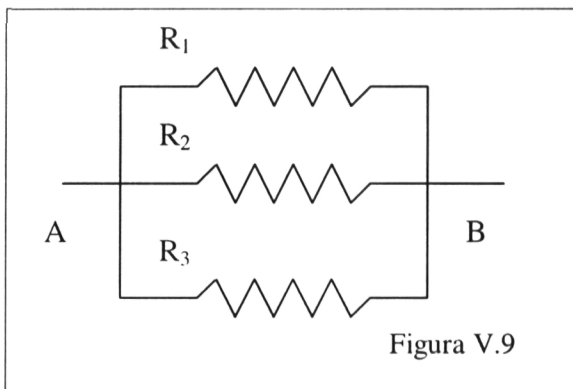


Figura V.9

carga eléctrica, no se acumulará en ningún punto del circuito, por lo que la intensidad de corriente  $I$  a la entrada de la asociación de resistencias por el punto A, será igual a la suma de las intensidades  $I_i$  que circulan por cada una de las resistencias. Es decir:

$$\frac{V}{R} = I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3} = V \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \quad (\text{V.21})$$

por lo tanto, generalizando, resultará:

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i} \quad (\text{V.22})$$

## 7. REGLAS DE KIRCHHOFF

Muchas veces no es posible reducir un circuito a una expresión tan simple como un generador conectado en serie con una resistencia. En estos casos deseamos conocer el valor de la intensidad de corriente que circula por las distintas ramas del circuito. Para resolver esta situación, el físico alemán G.R. Kirchhoff

(1824-1887) propuso dos reglas que llevan su nombre y que se basan en respectivas leyes básicas ya conocidas: la conservación de la carga eléctrica y la conservación de la energía en todo circuito eléctrico.

Estas dos reglas son:

1. *Regla de nudos.* Partiendo del hecho de que la carga eléctrica se debe conservar en un circuito, es decir, no debe ni acumularse ni perderse en una unión de dos o más conductores, se afirma que “la suma de las intensidades de corriente en un nudo (unión de 2 o más conductores) debe ser nula”. A la hora de aplicar esta regla se utiliza el convenio de tomar una intensidad entrante como positiva y una intensidad saliente como negativa.
2. *Regla de mallas.* Si ahora partimos del hecho de que la energía debe conservarse en un circuito, se afirma que “en una malla de un circuito (circuito cerrado simple) la suma de las energías por unidad de carga suministradas por los generadores debe ser igual a la suma de las energías consumidas en los distintos elementos de la malla”. Cuando se aplica esta regla se utiliza el convenio de signos consistente en afirmar que, una vez impuesta la corriente de malla, un generador suministrará una tensión positiva si favorece el sentido de dicha corriente.

La mejor forma de entender el significado de estas reglas es utilizarlas. Veamos un ejemplo. Sea el circuito de la Figura V.10. Este circuito consta de tres mallas. Elegimos las corrientes de malla con los sentidos arbitrarios que se muestran. Para cada una de estas mallas aplicamos la segunda de las reglas de Kirchhoff, resultando:

$$\begin{aligned} -V_1 &= I_1(R_1 + R_2 + R_3) - I_2R_2 - I_3R_3 \\ -V_2 &= I_2(R_2 + R_4) - I_1R_2 - I_3R_4 \\ V_3 - V_4 &= I_3(R_3 + R_4) - I_1R_3 - I_2R_4 \end{aligned} \quad (\text{V.23})$$

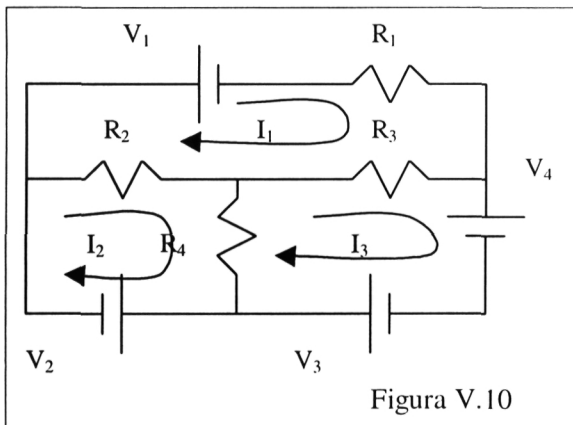


Figura V.10

Obsérvese que en cada malla la intensidad correspondiente determina el signo positivo. Tal y como hemos elegido los sentidos de las corrientes de malla, las otras dos son negativas respecto de una intensidad de malla dada. Una vez resuelto el sistema de ecuaciones anterior, es decir, una vez conocidas las intensidades de malla, podremos, con el uso de la regla

de nudos, calcular la intensidad en cada rama. Por ejemplo, la intensidad que circula por la resistencia  $R_4$  será  $I_2 - I_3$ .

## 8. CARGA Y DESCARGA DE UN CONDENSADOR. CIRCUITO RC

Terminaremos este capítulo analizando el efecto que produce un condensador en un circuito simple. Sea un circuito simple, en el que es indispensable una fuente de energía eléctrica (el generador), e inevitable una fuente de disipación de energía (la resistencia eléctrica). En serie con dichos elementos conectaremos un condensador. El resultado será el circuito de la Figura V.11. Tras cerrar el interruptor S, la fem del generador ( $\Xi$ ) provocará la aparición de una corriente de intensidad  $I$  que recorrerá el circuito, consumiendo energía en la resistencia  $R$  y almacenando energía en el condensador de capacidad  $C$ . Por lo tanto, el balance de energía para dicho circuito quedará plasmado mediante la siguiente relación de energías por unidad de carga eléctrica:

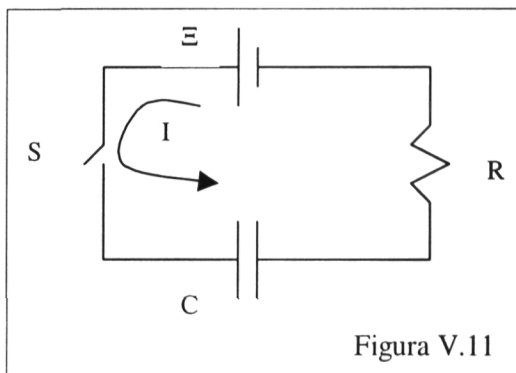


Figura V.11

$$\Xi = IR + \frac{q}{C} \quad (\text{V.24})$$

Destacaremos que  $q$  es función del tiempo ya que el condensador se va cargando progresivamente, desde que posee una carga  $q=0$  hasta que alcanza una carga  $q=Q$ . Por lo tanto, como la intensidad de corriente es la carga eléctrica que por unidad de tiempo atraviesa una sección del circuito,  $I=dq/dt$ , también será una magnitud dependiente del tiempo. Efectivamente, sustituyendo la definición de  $I$  en la ecuación (V.24) obtendremos una ecuación diferencial en la que  $q$  es la incógnita y  $t$  es la variable independiente, es decir:

$$\Xi = R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q \quad (\text{V.25})$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de primer grado con coeficientes constantes, que se puede resolver fácilmente separando las variables  $q$  y  $t$ . Efectivamente:

$$\frac{1}{R} dt = \frac{dq}{\left( \Xi - \frac{q}{C} \right)} \quad (\text{V.26})$$

Integrando entre los límites  $0 \leq t \leq t$ , correspondientes a los límites  $0 \leq q \leq q$ , resultará finalmente:

$$q(t) = \Xi C \left( 1 - e^{-t/RC} \right) \quad (\text{V.27})$$

Es decir, como habíamos previsto, la carga del condensador es función del tiempo. En la Figura V.12 se muestra la dependencia de  $q$  frente a  $t$ . Se observa que la carga aumenta asintóticamente hacia el valor máximo  $\Xi C$ , que, físicamente se alcanza cuando el error en su medida es menor que la precisión del dispositivo utilizado para medirla. Si derivamos la expresión de  $q(t)$  respecto del tiempo obtendremos la intensidad que recorre el circuito en cualquier instante. El resultado es:

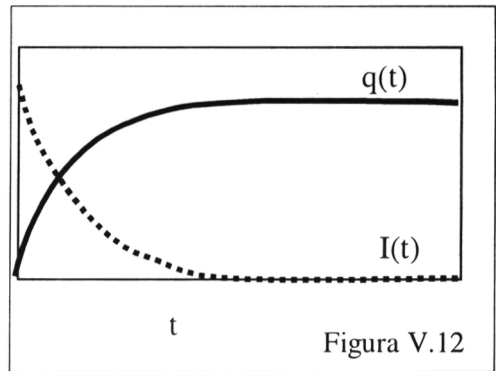


Figura V.12

$$I(t) = \frac{\Xi}{R} e^{-t/RC} \quad (\text{V.28})$$

que expresa el interesante resultado de que la intensidad disminuye con el tiempo, partiendo del valor  $\Xi/R$  hasta hacerse asintóticamente cero cuando el condensador está totalmente cargado. Esto significa que, por un lado, la presencia de un condensador en un circuito de corriente continua hace que la corriente dependa del tiempo, y, por otro, cuando transcurre el tiempo suficiente (del orden de  $RC$ ) la corriente ha disminuido apreciablemente (ha caído a un valor aproximadamente igual a la tercera parte de su valor original), hasta hacerse cero cuando el condensador se ha cargado totalmente. Precisamente al producto  $RC$  se le da un nombre especial “constante de tiempo del circuito” ya que da idea del tiempo que tarda en cargarse el condensador. Típicamente los valores de  $RC$  son pequeños (por ejemplo, si  $R=1\text{k}\Omega$  y  $C=1\mu\text{F}$ ,  $RC=1\text{ms}$ ), por lo que el proceso de carga del

condensador pertenece al tipo de fenómenos que se conocen genéricamente como transitorios.

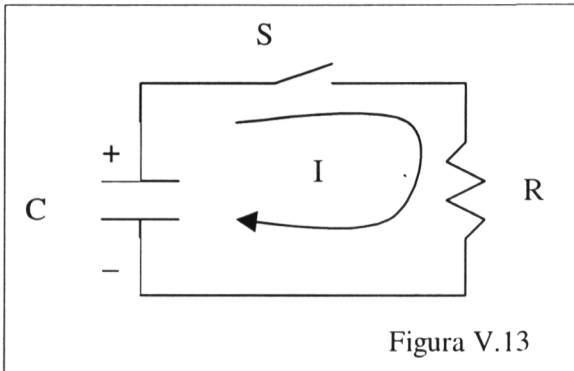


Figura V.13

Igualmente interesante resulta el análisis del proceso de descarga de un condensador. Es decir, si partimos del hecho de que en un condensador cargado existe energía eléctrica almacenada, cuando los bornes del mismo se pongan en contacto al cerrar el interruptor S, con la inevitable resistencia de un circuito, tal como muestra la Figura V.13, se producirá una

corriente eléctrica, que consistirá en la neutralización de las cargas de las placas del condensador. La ecuación de balance de energía, que relaciona la energía por unidad de carga que suministra el condensador al circuito con la que se consume en la resistencia, será:

$$\frac{q}{C} = IR \quad (\text{V.29})$$

Ahora la intensidad de corriente proviene, como hemos dicho, de la descarga del condensador, no del suministro de un generador, por lo que  $I = -dq/dt$ . Sustituyendo en (V.29) resultará:

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0 \quad (\text{V.30})$$

cuya solución, con la condición inicial  $q=Q$  en  $t=0$ , es:

$$q(t) = Q e^{-t/RC} \quad (\text{V.31})$$

Es decir, el condensador se descarga de manera exponencial con el paso del tiempo. Si ahora derivamos (V.31) respecto del tiempo obtendremos la intensidad de corriente en este circuito, que también disminuye hasta anularse:

$$I(t) = -\frac{dq}{dt} = \frac{Q}{RC} e^{-t/RC} \quad (\text{V.32})$$

## Capítulo VI

# CAMPO MAGNETOSTÁTICO EN EL VACÍO I.

### ROTACIONAL DE “B”

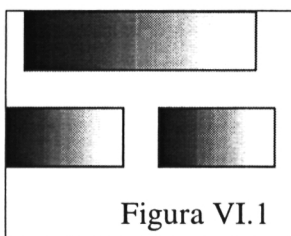
## 1. INTRODUCCIÓN

Los antiguos griegos observaron que ciertos minerales, tales como la magnetita, tenían la curiosa propiedad de atraer pequeños trozos de hierro. Ésta es una propiedad que presentan de forma natural además de la magnetita otros minerales de cobalto, magnesio y aleaciones de estos elementos. Se sabe desde sus orígenes que este fenómeno no está relacionado con la gravitación, ya que no lo presentan todos los cuerpos. Se pensaba también que no tenía relación alguna con la electricidad, puesto que los trocitos de paja atraídos por el ámbar previamente frotado con un paño de lana, no eran atraídos por la magnetita. Por lo tanto, se acordó, desde un principio, que se trataba de un nuevo fenómeno, al que se denominó *magnetismo*, nombre que deriva del de la región de Magnesia, donde por vez primera se observó este comportamiento natural.

Las zonas del mineral donde aparecen concentrados los efectos magnéticos reciben el nombre de *polos magnéticos*. Todo cuerpo magnetizado recibe el genérico nombre de *imán*.

La primera aplicación práctica del magnetismo fue la brújula, utilizada por los antiguos navegantes (y en la actualidad) para orientarse. El fundamento del funcionamiento de la brújula se encuentra en que la Tierra es un gigantesco imán. Una aguja imantada se orientará de acuerdo con la orientación del campo magnético terrestre, y ésta coincide (aproximadamente) con la dirección Norte-Sur geográfica. Por lo tanto se convino en llamar polos Norte y Sur a los polos magnéticos de un imán.

Los polos del mismo nombre de dos imanes se repelen y los de nombre distinto se atraen. Por otra parte, es un hecho experimental también el que resulta imposible aislar un polo de un imán. Es decir, si dividimos un imán en dos partes, resultan dos nuevos imanes, siendo ilimitado el proceso (Figura VI.1).

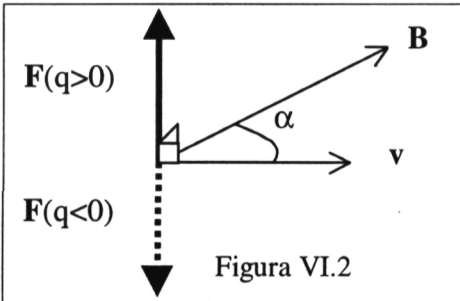


## 2. FUERZA MAGNÉTICA SOBRE UNA CARGA ELÉCTRICA EN MOVIMIENTO

Experimentalmente se observa que un imán no ejerce fuerza alguna sobre una carga eléctrica en reposo, aunque si la carga se mueve sí que aparece una fuerza sobre ella. El resultado de experimentos encaminados a determinar la expresión de la fuerza que un imán ejerce sobre una carga eléctrica en movimiento es que “el módulo es directamente proporcional a la carga eléctrica y a su velocidad”, y “la dirección es perpendicular a la de la velocidad de la carga”. Si a

esto le añadimos que se observa que existe una dirección concreta tal que si la carga eléctrica se mueve a lo largo de ella, la fuerza es nula, identificando esta dirección con la del así definido vector *intensidad del campo magnético*  $\mathbf{B}$ , resulta la expresión:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (\text{VI.1})$$



para la fuerza magnética sobre una carga eléctrica en movimiento (Figura VI.2). La magnitud  $B$  da el valor del campo magnético creado por un imán en cada punto del espacio. Como el módulo de la fuerza magnética es  $F=qvB\sin\alpha$ , resulta que será máxima cuando  $\alpha=\pi/2$  y nula cuando  $\alpha=0$ , es decir, cuando la carga se mueve en la misma dirección que el campo  $\mathbf{B}$ . La unidad S.I. del campo

magnético,  $\mathbf{B}$ , es el tesla (T).

En general, si una carga eléctrica se mueve en una región del espacio donde coexisten tanto un campo eléctrico  $\mathbf{E}$  como un campo magnético  $\mathbf{B}$ , recibirá la acción de la fuerza total:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad (\text{VI.2})$$

que recibe el nombre de *fuerza de Lorentz*.

Como la fuerza magnética es perpendicular a la dirección de movimiento de la carga ( $\mathbf{v}$ ), no realizará trabajo alguno al desplazarla. Por lo tanto no provocará variación de su energía cinética.

### 3. EFECTO HALL

El hecho de que el sentido de la fuerza magnética dependa del signo de la carga eléctrica, fue aprovechado por el físico norteamericano E.C. Hall (1855-1929) para demostrar que en un conductor son cargas de signo negativo las que se mueven por aplicación de un campo eléctrico. Veamos cómo llegamos a esta conclusión.

Sea una lámina metálica de anchura  $d$  por la que circula una corriente eléctrica de intensidad  $I$  (Figura VI.3). Dicha lámina se sitúa en el seno de un campo magnético  $\mathbf{B}$  de tal forma que su dirección es perpendicular a su superficie. Si las cargas que se mueven son de signo negativo, su sentido de movimiento sería contrario al indicado para  $I$  (recuerde el convenio para el sentido de la corriente eléctrica), resultando el sentido indicado para la fuerza magnética sobre dichas

cargas, ya que el producto  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  estaría multiplicado por una carga negativa. Consecuentemente, se produciría una desviación de cargas negativas hacia el lado indicado en la lámina (y, por defecto, resultaría una acumulación de cargas positivas en el lado opuesto). Esta separación de cargas dará lugar a la aparición de un campo eléctrico  $\mathbf{E}$  desde el lado positivo al lado negativo de la lámina. El campo eléctrico ejercerá una fuerza  $q\mathbf{E}$  sobre las cargas negativas en sentido contrario a la fuerza  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  debida al campo magnético. Inicialmente la fuerza

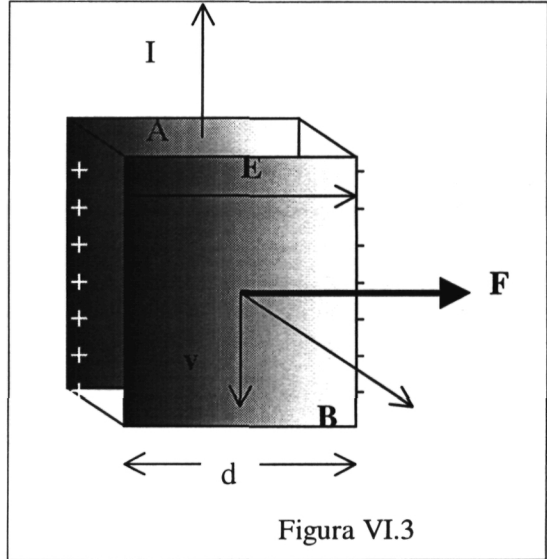


Figura VI.3

magnética supera a la fuerza eléctrica y las cargas negativas se desvían en el sentido antes indicado. Cuando la separación de cargas sea suficientemente grande, la fuerza eléctrica alcanzará un valor capaz de neutralizar a la fuerza magnética. En ese momento se verificará la igualdad:

$$qE = qvB \Rightarrow E = vB \quad (\text{VI.3})$$

La ddp que aparece entre los dos lados de la lámina es medible, estando relacionada con el campo eléctrico mediante la relación  $V=Ed$ , por lo tanto:

$$V = vBd \quad (\text{VI.4})$$

que recibe el nombre de fem Hall. El signo de esta ddp coincidirá o será contrario al mostrado en la Figura VI.3. Experimentalmente se observa que en la mayor parte de los conductores coincide, lo que confirma que los portadores de carga son, en esos casos, de signo negativo.

A partir de la expresión (VI.4), se observa que podemos medir la velocidad con la que se mueven los portadores de carga eléctrica en una corriente eléctrica confinada en un conductor,  $v=V/Bd$ . Por otra parte, como  $v=j/nq=I/nqA$ , siendo  $A$

el área transversal de la lámina, podremos medir la concentración de portadores,  $n=I/qAv=IBd/qAV$ .

#### 4. MOVIMIENTO DE UNA CARGA EN UN CAMPO MAGNÉTICO

El hecho de que no cambie la energía cinética de una carga cuando se ve sometida a la acción de un campo magnético, tiene una aplicación práctica de especial relevancia. Veámoslo.

Por sencillez, vamos a considerar en primer lugar el caso de una carga eléctrica positiva que entra en una región donde hay un campo magnético uniforme  $\mathbf{B}$ , con una velocidad constante  $\mathbf{v}$ , en una dirección perpendicular a  $\mathbf{B}$ . El módulo de la fuerza magnética es  $qvB$  y, dado que su dirección es siempre perpendicular a la trayectoria de la carga, actuará como una fuerza centrípeta que cambia la dirección de la velocidad pero no cambia su módulo (Figura VI.4). Si la carga es negativa la trayectoria tendrá sentido contrario al indicado en la figura, por lo tanto, tendremos una forma de determinar el signo de la carga de la partícula cuando éste sea desconocido. Si aplicamos la segunda ley de Newton, tendremos que:

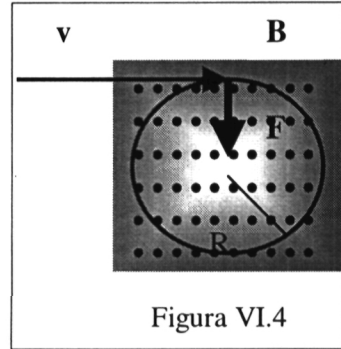


Figura VI.4

$$qvB = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{qB} \quad (\text{VI.5})$$

es decir, el radio de la circunferencia que describe la carga depende de su relación masa/carga y del módulo de su velocidad. De la relación entre velocidad lineal y velocidad angular,  $v=R\omega$ , resulta:

$$\omega = \frac{q}{m} B \quad (\text{VI.6})$$

que recibe el nombre de *frecuencia ciclotrón*. Es destacable el hecho de que la frecuencia ciclotrón depende del cociente carga/masa y del valor de  $B$ , pero ¡es independiente de la velocidad lineal de la partícula!

Es fácil imaginar que si la partícula cargada entra en una dirección no perpendicular al campo uniforme  $\mathbf{B}$ , la componente de la velocidad en la dirección del campo magnético no cambiará ni en módulo ni en dirección, mientras que la componente perpendicular a  $\mathbf{B}$  cambiará en dirección en la forma indicada anteriormente. Por lo tanto, la trayectoria resultante será helicoidal con un paso constante.

Veamos, a continuación, algunas aplicaciones prácticas del comportamiento de una carga eléctrica en el seno de un campo magnético.

**4.1. Espectrómetro de masas**

Se trata de un dispositivo utilizado para separar los distintos isótopos de un mismo elemento químico. Se fundamenta en el hecho de que el radio de la trayectoria (ecuación VI.5) es proporcional al cociente  $m/q$ , siendo constantes  $v$  y  $B$ . El dispositivo se esquematiza en la Figura VI.5.

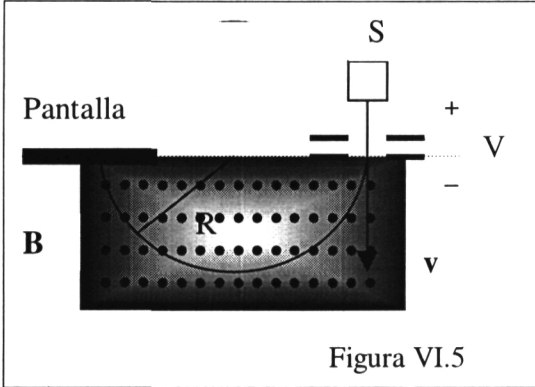


Figura VI.5

Desde una fuente de iones, S, se emiten éstos en todas direcciones. Los de un signo determinado (en el ejemplo de la Figura VI.5 son cationes) son seleccionados por un sistema de rendijas entre las que se establece, de forma adecuada, una ddp  $V$ , que acelera a los cationes hasta que alcanzan una velocidad. Cuando entran con dicha velocidad en la región en la que existe un campo magnético uniforme  $B$ , que tiene el sentido indicado en la Figura VI.5, son desviados en una trayectoria circular de radio  $R=mv/qB$ . Sustituyendo la expresión de la velocidad en esta última ecuación, resulta:

de forma adecuada, una ddp  $V$ , que acelera a los cationes hasta que alcanzan una velocidad. Cuando entran con dicha velocidad en la región en la que existe un campo magnético uniforme  $B$ , que tiene el sentido indicado en la Figura VI.5, son desviados en una trayectoria circular de radio  $R=mv/qB$ . Sustituyendo la expresión de la velocidad en esta última ecuación, resulta:

$$\frac{q}{m} = \frac{2V}{B^2 R^2} \tag{VI.7}$$

Por lo tanto, midiendo  $R$ , conocidos  $B$  y  $V$ , podemos obtener la relación  $q/m$  de cada uno de los isótopos (igual carga pero distinta masa) del elemento químico procedente de la fuente. Para medir  $R$  se dispone una placa fotográfica en la posición indicada, donde el ion correspondiente impactará.

**4.2. Tubo de rayos catódicos**

Durante la segunda mitad del siglo XIX se dedicó una gran cantidad de trabajo experimental al estudio de descargas eléctricas. Esencialmente estos experimentos

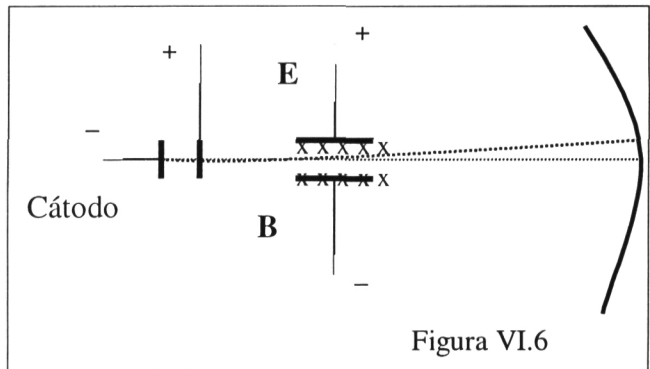


Figura VI.6

consistían en producir una descarga eléctrica en un gas a baja presión, colocando dos electrodos en su interior y aplicando una elevada ddp. Sin embargo, cuando se redujo la cantidad de gas presente en el recipiente hasta una presión inferior a  $10^{-3}$  atm, se seguía observando una mancha luminosa en la pared del mismo (Figura VI.6), opuesta a la posición ocupada por el cátodo. J.J. Thomson, que fue quien realizó el trabajo experimental más fructífero en esta línea, concluyó que alguna radiación era emitida por el cátodo, por lo que la denominó *rayo catódico*. Thomson añadió dos placas paralelas dentro del tubo y aplicó una ddp entre ellas, generando así un campo eléctrico  $\mathbf{E}$  que desviaba el rayo catódico hacia la placa positiva. Por lo tanto, estaba compuesto de partículas con carga eléctrica negativa. Es fácil demostrar que la desviación del rayo es:

$$\frac{d}{L} = \frac{qEa}{mv^2} \quad (\text{VI.8})$$

siendo  $d$  la distancia desde el punto de impacto cuando se aplica  $\mathbf{E}$  al punto de impacto cuando dicho campo no se aplica,  $L$  es la distancia desde el final de la región donde existe el campo  $\mathbf{E}$  a la pantalla del tubo,  $a$  es la longitud de las placas en la dirección del movimiento de los rayos catódicos,  $v$  es la velocidad de los mismos, y  $q/m$  es la relación carga/masa de las partículas que forman los rayos catódicos.

Si se aplica un campo magnético en la dirección y en la región indicadas en la Figura VI.6, aparecerá una fuerza magnética sobre dichas cargas en movimiento, de valor  $qvB$ , de sentido hacia la placa negativa. Ajustando adecuadamente los valores de  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{E}$ , se puede llegar a conseguir que las fuerzas eléctrica y magnética se equilibren, lo que se manifestará en que el rayo catódico no se desviará, cumpliéndose que:

$$qE = qvB \Rightarrow v = \frac{E}{B} \quad (\text{VI.9})$$

Sustituyendo esta expresión de  $v$  en la ecuación (VI.8) resultará, finalmente:

$$\frac{q}{m} = \frac{Ed}{B^2La} \quad (\text{VI.10})$$

que es la relación carga/masa de las partículas constitutivas de los rayos catódicos. A éstas se las denominó *electrones*, y J.J. Thomson, que publicó sus resultados en 1897, recibió el premio Nobel de Física en el año 1906.

### 4.3. El ciclotrón

Si queremos conocer la estructura interna de un objeto, a falta de un método más delicado, nos vemos obligados a “romperlo”. Éste es el método que utiliza la Física de Partículas para conocer la estructura íntima de la materia. Para conseguir “romper” un átomo, un protón, etc. Es necesario que impacten contra dichos objetos “blanco” otras partículas, que actúan como “proyectiles”, con energías adecuadamente altas. Es necesario, por lo tanto, conseguir que las partículas proyectil alcancen altísimas velocidades.

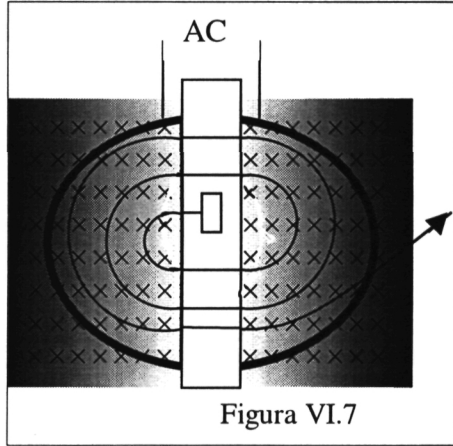


Figura VI.7

El dispositivo más evidente para tal fin es el *acelerador electrostático*, que utiliza un campo eléctrico  $E=V/d$ . Será necesario que la aceleración de la partícula de masa  $m$  y carga  $q$ ,  $a=qV/md$ , sea grande para que la velocidad resultante después de un intervalo de tiempo razonable, sea del orden de magnitud deseado. Pero esto implica que  $V$  ha de ser muy grande y  $d$  muy pequeña, lo que se traduce en problemas técnicos insalvables.

Alternativamente, y con un resultado más exitoso, se puede aprovechar el hecho de que la trayectoria de una partícula cargada en un campo magnético sea circular y que, además, la frecuencia de su movimiento (frecuencia ciclotrón) sea independiente de la velocidad lineal de la partícula (ecuación (VI.6)). En el año 1932 empezó a funcionar un dispositivo, denominado *ciclotrón*, que se fundamentaba en el comportamiento descrito. Esencialmente consiste en una cavidad cilíndrica hueca dividida en dos mitades, que por su forma, se denominan “des” (Figura VI.7). Se aplica un campo magnético uniforme paralelo al eje del cilindro. Las dos D están aisladas entre sí, existiendo en el espacio comprendido entre ellas, y en su centro, una fuente de iones. Entre las dos D se aplica una  $ddp$  alterna, de tal forma que los iones (por ejemplo, positivos) se verán acelerados hacia la D conectada temporalmente al polo negativo del generador. Los iones adquirirán una velocidad. Cuando entran en la D se encuentran con una región donde el campo eléctrico es nulo (interior de un conductor en equilibrio) y donde existe un campo magnético que les fuerza a describir una trayectoria circular de radio  $R=mv/qB$ , sin modificar el módulo de su velocidad, siendo  $\omega=qB/m$  la velocidad angular de la partícula. Haciendo coincidir la frecuencia de la tensión del generador de corriente alterna, con este valor, cuando el ion alcance el final de la primera D se encontrará con una polaridad cambiada entre las D, por lo que nuevamente se verá acelerado hacia la otra D, aumentando así su velocidad lineal.

Al entrar en la segunda D el radio de su trayectoria será mayor, pues es mayor  $v$ , pero la velocidad angular será la misma. Es fácil entender que la reiterada repetición de este proceso provocará que, finalmente, el ion alcance una velocidad lineal muy alta, con un radio de trayectoria adecuadamente alto, pero sin necesidad de utilizar un generador de fem inconmensurable. Cuanto mayor sea el tamaño del ciclotrón, siendo constantes el resto de magnitudes, mayor será la velocidad final del ion. Por este invento, el físico norteamericano, Lawrence, recibió el premio Nobel de Física en el año 1939.

El ciclotrón es el prototipo de los gigantescos aceleradores de partículas. Se trata de inmensos laboratorios (por ejemplo, el CERN tiene un diámetro de unos 12 km), en los que se provocan altísimas velocidades en partículas proyectil, que al colisionar con partículas blanco, las rompen, mostrando así su estructura interna.

## 5. FUERZA MAGNÉTICA SOBRE UNA CORRIENTE ELÉCTRICA

Consideremos una corriente eléctrica formada por  $n$  cargas por unidad de volumen, cada una de valor  $q$ , moviéndose con una velocidad  $\mathbf{v}$ . La fuerza magnética sobre cada una de ellas viene dada por la ecuación (VI.1). Consecuentemente, la fuerza por unidad de volumen que actúa sobre la corriente eléctrica será  $nq\mathbf{v}\times\mathbf{B}=\mathbf{j}\times\mathbf{B}$ . De esta forma, sobre un elemento de volumen  $dV$  actuará la fuerza:

$$d\vec{F} = \vec{j} \times \vec{B}dV \quad (\text{VI.11})$$

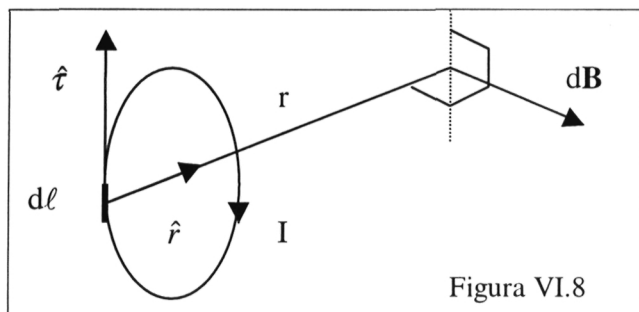
Si la corriente eléctrica está confinada en un conductor cilíndrico de sección transversal  $S$ , el volumen de un elemento  $d\ell$  del mismo será  $dV=Sd\ell$ . Por otra parte, si separamos el vector  $\mathbf{j}$  en el producto de su módulo  $j$  por un vector unitario  $\hat{\mathbf{t}}$  que señala el sentido de la corriente eléctrica, resultará la siguiente expresión para la fuerza que el campo magnético ejerce sobre un conductor de longitud  $L$  que transporta una corriente eléctrica  $I$ :

$$\vec{F} = \int_L j\hat{\mathbf{t}} \times \vec{B}Sd\ell = \int_L jS\hat{\mathbf{t}} \times \vec{B}d\ell = \int_L I\hat{\mathbf{t}} \times \vec{B}d\ell \quad (\text{VI.12})$$

## 6. CAMPO MAGNÉTICO CREADO POR UNA CORRIENTE

Sabemos que un imán crea un campo magnético, siendo una carga eléctrica en movimiento el objeto sobre el que dicho campo es capaz de ejercer una fuerza. Pero, realmente ¿qué es un imán?, dicho de otro modo, ¿qué es lo que hace que tenga esa especial propiedad?

En el año 1820 el físico danés H.C. Oersted observó que la aguja de un imán se desviaba de su orientación Norte-Sur cuando circulaba una corriente eléctrica por un conductor próximo a ella. Concluyó, acertadamente, que la corriente eléctrica ¡creaba un campo magnético! El anuncio del descubrimiento de Oersted produjo sensación en los círculos científicos de Europa y América. La excitación fue causada no sólo por la naturaleza básica de su trabajo, que mostraba una relación entre dos fenómenos físicos hasta entonces separados, sino también por el interés que despertaron las aplicaciones tecnológicas de las corrientes eléctricas. Ya se sospechaba entonces que la electricidad podría ofrecer una forma eficaz de transmitir las grandes cantidades de energía disponibles en las máquinas de vapor. Si una corriente eléctrica puede ejercer una fuerza sobre un imán, es de esperar (simplemente por la tercera ley de Newton) que el imán ejerza una fuerza también sobre la corriente eléctrica y, sin excesiva imaginación, se puede especular que el imán será capaz de



producir una corriente eléctrica. En aquellas fechas la pila de Volta, que consumía grandes cantidades de metales caros para producir pequeñas corrientes eléctricas, era la única forma conocida de generador de corriente. Se estaba viviendo así el umbral de la Edad de la Electricidad.

Biot y Savart obtuvieron, varios años después del descubrimiento de Oersted, una expresión general del campo magnético creado por una corriente eléctrica:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi L} \oint \frac{I \hat{\tau} \times \hat{r} d\ell}{r^2} \quad (\text{VI.13})$$

El significado de cada símbolo de la ecuación de Biot-Savart, que es análoga a la ley de Coulomb, se muestra en la Figura VI.8. La constante de proporcionalidad  $\mu_0$  recibe el nombre de permeabilidad del vacío, siendo  $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ kgm/C}^2$  su valor numérico en el S.I.

Vemos, de acuerdo con la expresión (VI.13) que el campo magnético es directamente proporcional a la causa que lo crea (la corriente eléctrica) e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente.

A continuación calcularemos, con el uso de la ecuación (VI.13) el campo magnético creado por distintas corrientes eléctricas, cuyas geometrías resultan de especial interés.

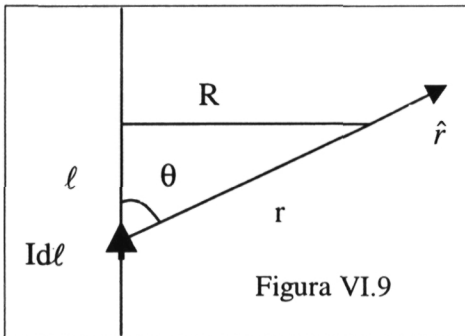
### 6.1. Corriente rectilínea e infinita

Consideremos el caso de una corriente de intensidad constante  $I$ , que tiene lugar en un conductor rectilíneo infinitamente largo. El campo magnético a una distancia  $R$  del mismo será la suma de las contribuciones de cada uno de los elementos de corriente  $Id\ell$  que se muestran en la Figura VI.9. Es decir:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\ell \sin\theta}{r^2} \hat{n} \quad (\text{VI.14})$$

donde el vector unitario  $\hat{n}$  tiene sentido hacia dentro del papel. Tres son las variables en la ecuación (VI.14), las distancias  $r$  y  $\ell$  y el ángulo  $\theta$ . Poniendo las dos primeras en función de la tercera, resultará:

$$r = \frac{R}{\sin\theta}, \quad \ell = -\frac{R}{\operatorname{tg}\theta} \Rightarrow d\ell = \frac{Rd\theta}{\sin^2\theta} \quad (\text{VI.15})$$



Por lo tanto, el campo magnético  $\mathbf{B}$  será:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I \pi}{4\pi R} \int \sin\theta d\theta \hat{n} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \hat{n} \quad (\text{VI.16})$$

Vemos que la dirección de este campo magnético es tangente a una circunferencia de radio  $R$  que rodea al conductor, siendo su sentido el de giro de un tornillo que fuese apretado en el

sentido de la corriente eléctrica  $I$ . Lo más destacable de este resultado es que las líneas del campo magnético son ¡cerradas! Éste es un resultado opuesto al obtenido en el caso del campo electrostático, donde las líneas de campo eran abiertas (empezaban en las cargas positivas y terminaban en las cargas negativas).

Como una corriente eléctrica siente la acción de un campo magnético mediante la fuerza dada por la ecuación (VI.12) y, a su vez, una corriente eléctrica crea un campo magnético dado por la ecuación (VI.13), resulta fácilmente deducible que existirá una interacción magnética entre corrientes eléctricas. Concretamente, dos corrientes rectilíneas paralelas se atraerán si son del mismo sentido y se repelerán en caso contrario.

## 6.2. Corriente circular

Se denomina *espira* a toda corriente simple cerrada. Ésta es una definición especialmente importante a la hora de entender el comportamiento magnético de la materia. Por esta razón, vamos a calcular el campo magnético creado por una espira circular en un punto de su eje de revolución. El proceso de cálculo del campo magnético en cualquier otra posición seguirá el mismo proceso, el problema es que el cálculo matemático se complica excesivamente.

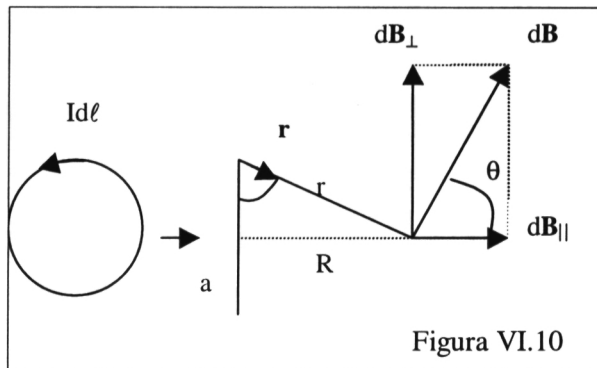
De acuerdo con la ley de Biot-Savart, considerando el significado de los símbolos expresado en la Figura VI.10, tendremos que el módulo del campo magnético creado por un elemento de corriente  $Id\ell$  en la posición indicada será:

$$dB = \frac{\mu_0 Id\ell}{4\pi r^2} \quad (\text{VI.17})$$

Esta contribución al campo magnético total se descompone en las direcciones perpendicular y paralela a la dirección del eje. Es fácil comprobar que las componentes perpendiculares de cada contribución se ven compensadas por otra, debida a un elemento de corriente diametralmente opuesto respecto del eje de la espira. Por lo tanto, el campo magnético creado por la espira en su eje tendrá la dirección del mismo, y su sentido dependerá del sentido de la corriente eléctrica. Si la corriente circula en sentido antihorario, el campo saldrá del plano del papel; si es horario, el campo entrará en el papel. Su valor numérico resulta de la integración de la componente paralela al eje:

$$dB_{||} = dB \cos\theta = \frac{\mu_0 Id\ell}{4\pi r^2} \cos\theta = \frac{\mu_0 Id\ell a}{4\pi r^2 r} = \frac{\mu_0 Ia}{4\pi (R^2 + a^2)^{3/2}} dl \quad (\text{VI.18})$$

Por lo tanto:



$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ia}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \oint dl = \frac{\mu_0 I a^2}{2(R^2 + a^2)^{3/2}} \quad (\text{VI.19})$$

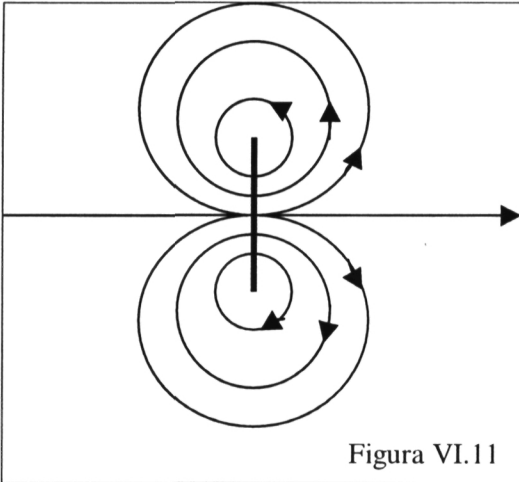


Figura VI.11

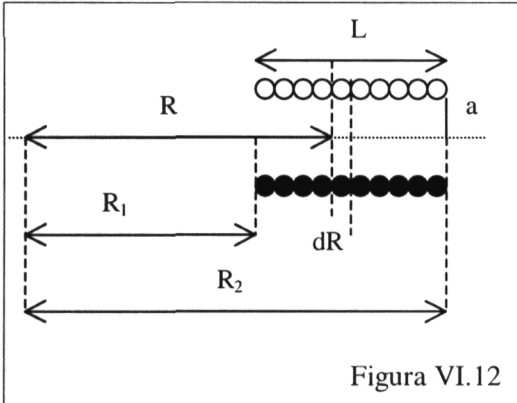


Figura VI.12

$$dB = \frac{\mu_0 I a^2}{2(R^2 + a^2)^{3/2}} \frac{N}{L} dR \quad (\text{VI.20})$$

Integrando, desde  $R_1$  a  $R_2$ , resultará:

En la Figura VI.11 se muestran las líneas del campo magnético creado por la espira circular de la Figura VI.10. Es importante destacar que son líneas cerradas.

### 6.3. Solenoide

Un solenoide es una corriente compuesta por varias espiras coaxiales (circulares), del mismo radio, por las que circulará la misma corriente de intensidad  $I$  (Figura VI.12). El campo magnético debido al solenoide será la suma del campo debido a cada espira. En concreto, en un punto de su eje, si el solenoide tiene una longitud  $L$ , y  $N$  es el número de espiras que lo forman, el campo magnético en un punto de su eje, creado por el conjunto de las  $NdR/L$  espiras contenidas en un espesor  $dR$  del solenoide, situadas a una distancia  $R$  del mismo, será:

$$B = \frac{\mu_0 IN}{2L} \left[ \frac{R_2}{\sqrt{a^2 + R_2^2}} - \frac{R_1}{\sqrt{a^2 + R_1^2}} \right] \quad (\text{VI.21})$$

Si el solenoide es infinitamente largo (modelo idealizado) el punto necesariamente estará en el interior del mismo, y las distancias  $R_1$  y  $R_2$  coincidirán en módulo aunque sus sentidos serán contrarios. Por lo tanto, el resultado de la operación entre corchetes será 2. Finalmente resultará:

$$B = \mu_0 I \frac{N}{L} \quad (\text{VI.22})$$

Las líneas del campo magnético debidas a un solenoide se muestran en la Figura VI.13, junto con las debidas a una barra imantada de la misma longitud y radio. La coincidencia entra las líneas de campo magnético de ambos sistemas llevó a Ampere a establecer una acertada hipótesis acerca del origen del campo magnético debido a un imán. Ampere afirmó que la materia estaba constituida de

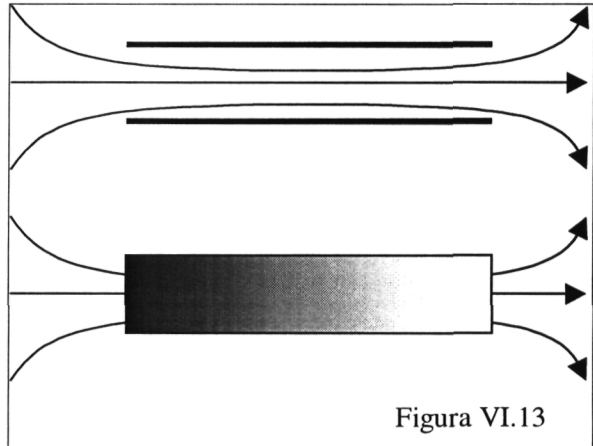


Figura VI.13

microscópicas corrientes, de cuya orientación resultaba un efecto neto en la superficie del material, consistente en una corriente eléctrica que rodeaba al mismo (análoga a la corriente del solenoide), por lo que creaba un campo magnético idéntico al del solenoide. En el capítulo dedicado al campo magnetostático en la materia volveremos sobre esta cuestión, que será tratada con más detalle. Lo importante en este momento es destacar que con esta hipótesis Ampere concluyó que la única fuente del campo magnetostático es la corriente eléctrica estacionaria.

## 7. LEY DE AMPERE

El título de este capítulo hace referencia al rotacional del campo magnetostático. El resultado se conoce como ley de Ampere. Vamos a considerar el caso de una corriente eléctrica rectilínea e infinita y calcularemos la circulación del vector  $\mathbf{B}$  a lo largo de una línea de campo (Figura VI.14). El resultado es:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C B dl = B \oint_C dl = B 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} 2\pi R = \mu_0 I \quad (\text{VI.23})$$

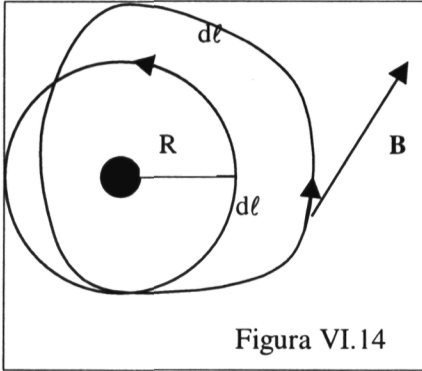


Figura VI.14

Si repetimos el cálculo considerando una trayectoria cerrada de forma arbitraria, pero que siga rodeando a la corriente  $I$  (Figura VI.14), el resultado será el mismo:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \\ \int_0^L BR d\theta &= BR \int_0^L d\theta = BR 2\pi = \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi R} R 2\pi &= \mu_0 I \end{aligned} \quad (\text{VI.24})$$

Obsérvese que aunque  $B$  no es constante a lo largo de la trayectoria, el producto  $BR$  sí lo es.

Por lo tanto, generalizando este resultado podemos concluir que la circulación del campo magnético es igual a  $\mu_0$  por la corriente neta que atraviesa el área delimitada por la trayectoria cerrada sobre la que se evalúa la circulación de dicho vector:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum_{i=1}^N I_i = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (\text{VI.25})$$

La expresión (VI.25) es la forma integral de la ley de Ampere. Ésta es una ley que expresa de manera clara que la única fuente del campo magnetostático es una corriente eléctrica estacionaria. Es análoga a la ley de Gauss, que expresa que la única fuente de un campo electrostático es una carga eléctrica estacionaria. Por lo tanto, desde un punto de vista práctico, la ley de Ampere es útil en el mismo sentido en que lo es la de Gauss: si podemos elegir una trayectoria cerrada que permita sacar fuera de la integral el campo magnético, su cálculo será tan trivial como el de sumar corrientes eléctricas que pasen a través del área delimitada por dicha trayectoria.

Si hacemos uso del teorema del rotacional, obtendremos la expresión diferencial de la ley de Ampere, que expresa el carácter no conservativo de  $\mathbf{B}$ :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (\text{VI.26})$$

## Capítulo VII

# CAMPO MAGNETOSTÁTICO EN EL VACÍO II.

## DIVERGENCIA DE “B”

### 1. FLUJO MAGNÉTICO

En el capítulo anterior hemos visto que las líneas del campo magnetostático son siempre cerradas. Esto significa que si calculamos el flujo magnético que atraviesa una superficie cerrada el resultado será siempre nulo. La razón es que, como sabemos, el flujo magnético coincide con el número de líneas de campo que atraviesan netamente una superficie, de tal forma que, por ser cerradas, toda línea de campo magnético que entre en un volumen encerrado por una superficie deberá, forzosamente, salir de ella atravesando en otro punto a la superficie, obteniéndose el resultado neto cero. Expresado analíticamente:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{VII.1})$$

La unidad de medida del flujo magnético tiene nombre propio,  $1\text{T } 1\text{m}^2 = 1\text{Wb}$  (weber). Si hacemos uso del teorema de la divergencia obtendremos este resultado en forma diferencial:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{B} dV = 0 \Rightarrow \text{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{VII.2})$$

que representa el hecho de que no existen puntos singulares en lo que al campo magnetostático se refiere. Es decir, mientras que la divergencia del campo electrostático puede ser no nula, indicando la existencia de puntos del espacio desde donde emanan o donde terminan líneas de campo, el que la divergencia del campo magnetostático sea siempre nula indica la no-existencia de tales singularidades, es decir, no existe el monopol magnético, si dividimos un imán en dos mitades, no obtenemos dos monopolos, sino dos nuevos imanes.

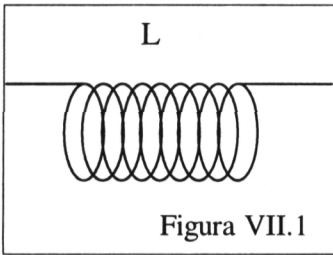
### 2. AUTOINDUCCIÓN

De acuerdo con la ley de Ampere el campo magnético es proporcional a la intensidad de corriente que lo crea. El coeficiente de proporcionalidad depende de factores geométricos (recuerde que realizamos una circulación a lo largo de un camino arbitrario) y del medio material en el que se encuentra la corriente eléctrica. Por otra parte, el flujo del campo magnético es proporcional al propio campo, por lo que también será proporcional a la intensidad de corriente que lo crea. Nuevamente, podemos afirmar que el coeficiente de proporcionalidad dependerá de factores geométricos (realizamos una integral de superficie delimitada por la

trayectoria cerrada) y del medio material. Expresaremos finalmente este razonamiento mediante la igualdad:

$$\phi_m = LI \quad (\text{VII.3})$$

En esta expresión el coeficiente  $L$ , que depende del medio material y de la geometría de la corriente eléctrica de intensidad  $I$ , recibe el nombre de coeficiente de autoinducción o *autoinductancia*. Su unidad de medida en el sistema internacional tiene nombre propio:  $1 \text{ T} / 1 \text{ A} = 1 \text{ H}$  (henrio).



Vemos que la autoinductancia da idea del valor que puede tomar el campo magnético creado por una corriente eléctrica: cuanto mayor sea la autoinductancia de un circuito, mayor será el campo magnético creado por él para una intensidad dada de corriente eléctrica. Resulta útil a veces aumentar la inductancia de un circuito, para ello se incorpora como elemento del mismo una bobina o solenoide, que estará caracterizado por un determinado valor  $L$

de autoinductancia. En el circuito se representará con el símbolo mostrado en la Figura VII.1.

### 3. INDUCCIÓN MUTUA

De la misma forma que un circuito por el que circula una corriente da lugar a un "autoflujo", la presencia de un segundo circuito dará lugar a un flujo magnético por el primer circuito.

Consideremos dos circuitos (1 y 2) por los que circulan sendas corrientes de intensidades respectivas  $I_1$  e  $I_2$ . Además de sus propias geometrías, estarán dispuestos en una posición relativa determinada. Por lo tanto, cuando afirmemos que existe una dependencia con la geometría del sistema, estaremos refiriéndonos tanto a la geometría propia de un circuito como a la geometría relativa entre los circuitos. El flujo magnético que atraviesa el circuito 1 será la suma de dos contribuciones: el flujo debido al campo magnético  $\mathbf{B}_1$  creado por la corriente  $I_1$ , y el flujo debido al campo magnético  $\mathbf{B}_2$  creado por la corriente  $I_2$ . La primera contribución ha sido estudiada en el apartado anterior. Siguiendo un razonamiento análogo, el flujo que atraviesa al circuito 1 debido al campo magnético creado por la corriente que circula por el circuito 2, será proporcional a dicha corriente:

$$\phi_{12} = M_{12}I_2 \quad (\text{VII.4})$$

El coeficiente  $M_{12}$ , que depende del medio material en el que se encuentran los circuitos y de la geometría de los mismos, recibe el nombre de coeficiente de inducción mutua o *inductancia mutua*. Se puede demostrar que  $M_{21}=M_{12}=M$ .

Como vemos, un circuito de corriente es capaz de influir en otro y en sí mismo a través de los coeficientes  $M$  y  $L$ .

#### 4. LEYES DE LOS CAMPOS ESTÁTICOS

Hemos estudiado los campos electrostático y magnetostático, por lo tanto independientes del tiempo. En este caso hemos encontrado que se trata de dos entidades separadas, sin conexión alguna, salvo por el hecho de que la fuente del primero es una carga eléctrica en reposo y la fuente del segundo es una carga eléctrica en movimiento.

El conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= 0 \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \\ \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{aligned} \quad (\text{VII.5})$$

que recogen los hechos experimentales descritos en los capítulos anteriores, ponen de manifiesto la independencia de los campos electro y magnetostático.

En un capítulo próximo veremos como la dependencia con el tiempo de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ , modificará la apariencia de las ecuaciones (VII.5), reflejándose una conexión plena entre dichos campos.



## Capítulo VIII

# CAMPO MAGNETOSTÁTICO EN LA MATERIA

### 1. EL DIPOLO MAGNÉTICO

El modelo de Ampere sobre el comportamiento de un imán, basado en la existencia de microscópicas corrientes, de cuya alineación resulta un campo magnético macroscópicamente perceptible, nos lleva a considerar dichas corrientes

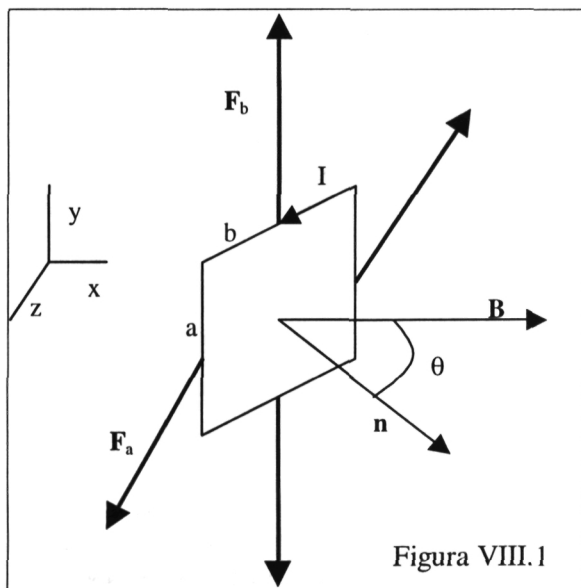


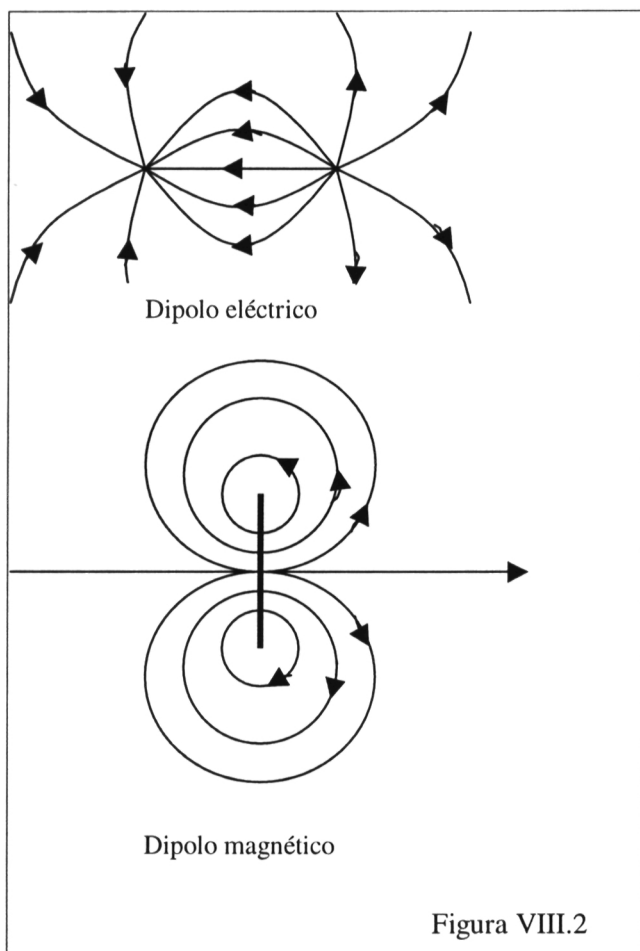
Figura VIII.1

microscópicas como los elementos básicos de la materia en lo que a propiedades magnéticas se refiere. De esta forma, justificaremos el comportamiento de la materia en un campo magnético como el resultado global del comportamiento de todas y cada una de las corrientes microscópicas que lo forman.

Empezaremos por analizar el comportamiento de una espira en un campo magnético. Para hacer más sencillos los cálculos, consideraremos el caso de una espira rectangular inmersa en

un campo magnético uniforme. Sea  $I$  la intensidad de corriente constante que circula por la espira, de lados  $a$  y  $b$ , situada en el seno de un campo magnético uniforme  $\mathbf{B}$ , de tal forma que, inicialmente, el vector normal a la espira forma un ángulo  $\theta$  con la dirección de  $\mathbf{B}$ . Supondremos además que los lados de longitud  $a$  son perpendiculares a la dirección de  $\mathbf{B}$  (Figura VIII.1). Las fuerzas magnéticas sobre los tramos de corriente de longitud  $b$  tendrán los sentidos indicados, siendo el módulo el mismo en ambos lados. Por lo tanto, el efecto neto será el de tender a abrir la espira, pero producirá un desplazamiento nulo en la misma. Por otra parte, las fuerzas sobre los lados de longitud  $a$ , que son también del mismo módulo pero de sentidos contrarios (dirección del eje  $z$ ), provocarán en la espira un desplazamiento nulo, pero un giro no nulo. El momento de dichas fuerzas, calculado respecto del punto de aplicación de una de ellas, es:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_a = bF_a \text{sen } \theta \hat{j} = bIaB \text{sen } \theta \hat{j} = IBS \text{sen } \theta \hat{j} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (\text{VIII.1})$$



donde hemos definido la magnitud vectorial  $\mathbf{m} = \mathbf{IS}$ , que recibe el nombre de *momento dipolar magnético* de la espira. Esta magnitud es análoga al momento dipolar eléctrico, que definía al dipolo eléctrico: mientras que en aquel caso eran las cargas y la distancia que las separaba los valores característicos del dipolo, en el caso del dipolo magnético son la intensidad de corriente y el área del mismo los que lo definen. Vemos que el efecto que un campo magnético produce en un dipolo magnético es su orientación en el mismo.

Recordemos que un campo eléctrico provoca una orientación de un dipolo eléctrico en la dirección del campo. En principio, el resultado es, por lo tanto, el mismo, sin

embargo, la coincidencia es solamente cualitativa. Cuantitativamente hay una diferencia importante. En la Figura VIII.2 se muestran un dipolo eléctrico y un dipolo magnético orientados en sendos campos eléctrico y magnético. Vemos que, mientras que en el caso del dipolo eléctrico en el espacio comprendido entre las dos cargas eléctricas que lo forman, el campo eléctrico creado por ellas tiene sentido contrario al campo aplicado externamente, en el caso del dipolo magnético el campo magnético creado por él tiene el mismo sentido que el campo que se aplica externamente y que lo orienta. En el primer caso, el resultado neto será una disminución del campo eléctrico, mientras que en el segundo, el campo magnético neto será mayor.

La presencia de un medio dieléctrico hace que el campo eléctrico neto sea menor, mientras que la presencia de un medio material hace que el campo magnético sea mayor. En realidad, esta última afirmación no es del todo cierta. Lo

que realmente ocurre es que mientras que la materia tiene dos tipos básicos de respuesta frente a un campo eléctrico (dieléctricos y conductores), presenta tres formas básicas de respuesta frente a un campo magnético (diamagnetismo, paramagnetismo y ferromagnetismo). Tanto en las sustancias paramagnéticas como en las ferromagnéticas, la materia responde de la manera descrita anteriormente. Sin embargo, como veremos en el próximo capítulo, el fenómeno de la inducción magnética justifica el que un campo externo pueda provocar la aparición de dipolos magnéticos inducidos en la materia, cuyo momento magnético se orientará, por conservación de la energía, en sentido contrario al campo aplicado, disminuyendo así el campo magnético neto. A este fenómeno se le denomina diamagnetismo y lo presentan todas las sustancias, lo que ocurre es que es débil en comparación con el paramagnetismo y el ferromagnetismo, por lo que queda apantallado cuando la sustancia presenta alguno de ellos. Más adelante volveremos sobre esta cuestión.

A continuación, cuantificaremos el comportamiento de la materia frente a un campo magnético. Para ello definiremos la magnitud *imantación*.

## 2. IMANTACIÓN

Como hemos dicho, al aplicar un campo magnético a un material, sus dipolos magnéticos se orientarán en la dirección del campo aplicado. Se dice entonces que la sustancia está magnetizada y la magnitud física con la que dicho estado quedará cuantificado es el vector imantación,  $\vec{M}$ , que se define como el momento dipolar magnético total por unidad de volumen:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV} \quad (\text{VIII.2})$$

De acuerdo con el modelo propuesto por Ampere, en un material magnetizado tendremos corrientes microscópicas (dipolos) orientadas en la dirección del campo aplicado  $\vec{B}_{ap}$ . Estas corrientes se cancelan entre sí en el interior del material, pero dan un valor neto en su superficie (corriente de magnetización), resultando una corriente eléctrica análoga a la de un solenoide (Figura VIII.3). En un cilindro infinitesimal de altura  $d\ell$  circula una corriente  $dI_m$  en su superficie. Como el volumen de este cilindro es  $Sd\ell$  y su momento dipolar es  $SdI_m$ , la imantación del mismo será  $M=dI_m/d\ell$ , es decir, coincide con la corriente de magnetización por unidad de longitud. A partir de este resultado, recordando el valor del campo magnético creado por un solenoide que posee  $n$  espiras por unidad de longitud recorridas por una intensidad  $I$  cada una de

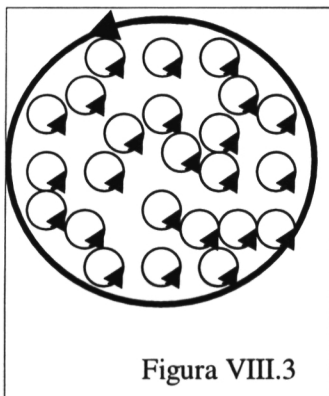


Figura VIII.3

ellas,  $B_{ap} = \mu_0 nI$ , donde  $nI$  será la corriente por unidad de longitud en el solenoide, podremos poner:

$$\vec{B}_m = \mu_0 \vec{M} \quad (\text{VIII.3})$$

Considerando que la magnetización del material ha sido la consecuencia de colocarlo coaxialmente en el interior del solenoide, el campo magnético total en el interior del material será:

$$\vec{B} = \vec{B}_{ap} + \vec{B}_m = \vec{B}_{ap} + \mu_0 \vec{M} \quad (\text{VIII.4})$$

La dirección del vector  $\mathbf{M}$  coincide con la del campo magnético aplicado. Mientras que en las sustancias para y ferromagnéticas además hay coincidencia en el sentido de ambos vectores, en las sustancias diamagnéticas son de sentidos contrarios. Finalmente, mientras que en las sustancias para y diamagnéticas el vector  $\mathbf{M}$  es directamente proporcional al campo magnético aplicado, en las sustancias ferromagnéticas la dependencia de  $\mathbf{M}$  con  $\mathbf{B}_{ap}$  es más complicada.

### 3. PARAMAGNETISMO Y DIAMAGNETISMO

Cuando las sustancias son para o diamagnéticas se verifica que  $\mathbf{M} \propto \mathbf{B}_{ap}$ . Escribiremos la siguiente igualdad:

$$\vec{M} = \frac{\chi_m}{\mu_0} \vec{B}_{ap} \quad (\text{VIII.5})$$

donde el coeficiente adimensional  $\chi_m$  recibe el nombre de *susceptibilidad magnética*. Si es positivo y dependiente de la temperatura, el material es paramagnético, y si es negativo e independiente de la temperatura, el material es diamagnético. En cualquier caso es un número muy pequeño (típicamente entre  $10^{-5}$  y  $10^{-9}$ ). Sustituyendo (VIII.5) en (VIII.4) tendremos:

$$\vec{B} = \vec{B}_{ap} + \chi_m \vec{B}_{ap} = (1 + \chi_m) \vec{B}_{ap} = \mu_r \vec{B}_{ap} \quad (\text{VIII.6})$$

siendo  $\mu_r$  la permeabilidad relativa del material.

En el caso de una sustancia paramagnética, a una temperatura dada, los dipolos magnéticos permanentes de la misma estarán orientados al azar. Cuando se aplica un campo magnético externo se producirá una orientación de los dipolos venciendo el efecto de la agitación térmica. El trabajo realizado por el campo aplicado para orientar un dipolo de momento  $\mathbf{m}$ , al girarlo un ángulo  $d\theta$ , es:

$$dW = -\tau d\theta = -mB_{ap} \text{sen } \theta d\theta \quad (\text{VIII.7})$$

El signo negativo indica que el campo tiende a disminuir el ángulo  $\theta$  formado por  $\mathbf{m}$  y  $\mathbf{B}_{ap}$ . Este trabajo se emplea en disminuir la energía potencial mecánica del dipolo:

$$dW = -dE_p \Rightarrow dE_p = mB_{ap} \text{sen } \theta d\theta \quad (\text{VIII.8})$$

Si integramos la expresión (VIII.8) eligiendo  $E_p=0$  cuando  $\theta=\pi/2$  rad, resultará:

$$E_p = -mB_{ap} \cos \theta = -\vec{m} \cdot \vec{B}_{ap} \quad (\text{VIII.9})$$

que nos da la energía potencial de un dipolo magnético cuando forma un ángulo  $\theta$  con la dirección del campo magnético aplicado  $\mathbf{B}_{ap}$ . Para tener una idea del orden de magnitud, compararemos la variación de energía potencial de un dipolo de momento  $m=9.27 \cdot 10^{-24} \text{J/T}$  (magnetón de Bohr) en un campo magnético intenso ( $B_{ap}=1\text{T}$ ) que pasa de formar un ángulo  $\theta=\pi$  rad (caso más desfavorable) a formar un ángulo  $\theta=0$  (caso más favorable), que resulta ser  $\Delta E_p = -mB_{ap} + mB_{ap}(-1) = -2mB_{ap} = -1.85 \cdot 10^{-23} \text{J}$ , con la energía de agitación térmica  $kT=4.14 \cdot 10^{-21} \text{J}$  del dipolo a temperatura ordinaria. Como vemos, esta última es muy superior a la primera, por lo que salvo que se trabaje a temperaturas muy bajas, la mayor parte de los dipolos estarán azarosamente orientados.

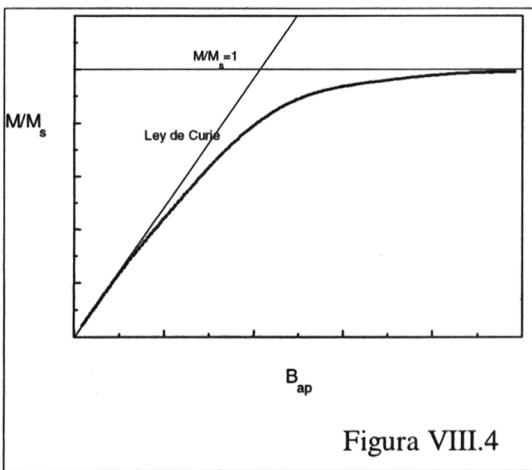


Figura VIII.4

Cuando, a una temperatura dada, progresivamente vamos aumentando el valor del campo aplicado,  $\mathbf{B}_{ap}$ , los dipolos van orientándose cada vez más (el valor de la imantación  $\mathbf{M}$  aumenta) tendiendo a alcanzarse el valor máximo de la imantación,  $\mathbf{M}_s$ , denominado imantación de saturación, correspondiente a la orientación perfecta de todos los dipolos (Figura VIII.4). La relación lineal entre el campo aplicado y la imantación del sistema, persiste mientras que aquél sea

relativamente pequeño. En ese caso se verifica la relación encontrada por P. Curie:

$$M = \frac{1}{3} \frac{mB_{ap}}{kT} M_s \quad (\text{VIII.10})$$

Cuando la sustancia es diamagnética  $M$ , que resulta de la orientación de dipolos inducidos, se opone al campo aplicado, resultando un campo magnético neto más débil que el aplicado. Sin entrar en detalles acerca de este comportamiento, señalaremos simplemente que todas las sustancias lo presentan, lo que ocurre es que se ve apantallado por el para y el ferromagnetismo en las sustancias de estos últimos tipos.

#### 4. FERROMAGNETISMO

Este comportamiento lo presentan sustancias en las que los dipolos magnéticos permanentes que las forman interaccionan fuertemente entre sí. Este hecho se ve cuantificado a través de un valor positivo comparativamente alto de la susceptibilidad magnética de dichos sistemas.

La fuerte interacción entre los dipolos hace que en el material existan regiones, denominadas *dominios magnéticos*, en las que en el ámbito microscópico los dipolos están orientados (Figura VIII.5). Aunque en términos macroscópicos la suma de los valores del vector imantación de cada dominio dé un resultado neto nulo, la aplicación de un leve campo magnético  $B_{ap}$  dará lugar a una apreciable alineación de los dipolos de cada dominio, y, lo que es más interesante, dicha alineación puede persistir cuando cesa el campo aplicado.

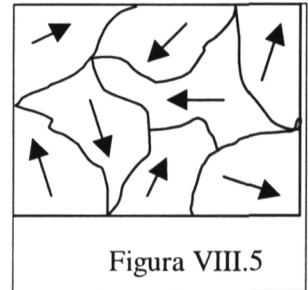


Figura VIII.5

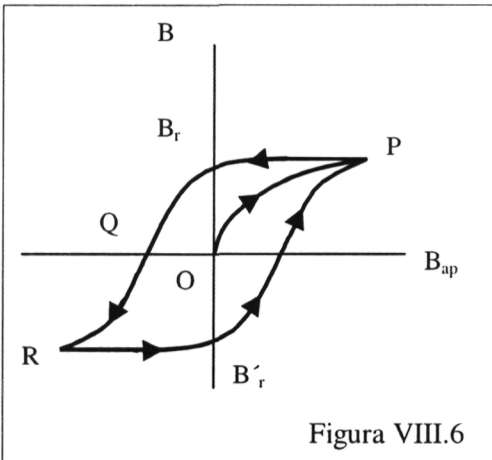


Figura VIII.6

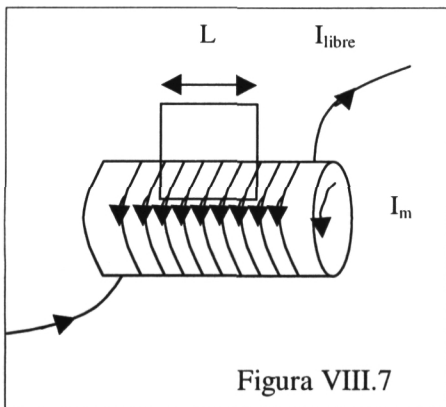
Para entender este proceso consideremos una barra de material ferromagnético que ha sido introducida coaxialmente en el interior de un solenoide. Progresivamente iremos aumentando desde cero el valor de la intensidad de corriente que circula por el solenoide. Consecuentemente aumentará el campo magnético,  $B_{ap} = \mu_0 n I$ , en el interior del solenoide. En un instante dado, de acuerdo con (VIII.4), el campo magnético en el interior del material ferromagnético será  $B = \mu_0 n I + \mu_0 M$ , estando dirigido a lo

largo del eje del solenoide. En la Figura VIII.6 se muestra la dependencia de  $B$  con

$B_{ap}$ . Como vemos,  $B$  aumenta al hacerlo  $B_{ap}$  en una cantidad superior  $\mu_0 M$ , hasta que se alcanza la imantación de saturación en el punto P, a partir del cual, si aumentamos  $B_{ap}$ ,  $B$  aumentará en la misma cantidad. Llegados a este punto disminuimos el valor de la intensidad que circula por el solenoide manteniendo el sentido de la misma. Entonces  $B$  disminuirá, pero no lo hará siguiendo el recorrido inverso a OP, sino que mantiene un valor permanente  $\mu_0 M$ , de tal forma que cuando  $I=0$ ,  $B=B_r$ . Este hecho pone de manifiesto que el material ferromagnético “memoriza” el proceso descrito. Si, a continuación, aumentamos el valor de  $I$ , pero cambiando su sentido en el solenoide,  $B$  irá disminuyendo hasta anularse en Q y, a partir de ahí, irá aumentando teniendo sentido contrario al anterior hasta que se alcanza nuevamente la imantación de saturación en R. Si nuevamente disminuimos el valor de la intensidad (manteniendo su nuevo sentido) hasta anularla, el valor de  $B$  seguirá el camino indicado hasta  $|B_r|=B_r$ . A partir de aquí, si volvemos a imponer el sentido inicial de la corriente eléctrica y la aumentamos hasta llegar al punto P, lo haremos siguiendo la nueva trayectoria indicada. Se cerrará así el denominado *ciclo de histéresis* magnética del material ferromagnético.

## 5. VECTOR “H”

A partir del análisis del apartado 2 podemos concluir que, de manera análoga a lo que ocurre con las cargas de polarización respecto de las cargas libres,



existen corrientes de magnetización además de las corrientes eléctricas reales. Específicamente, volviendo al ejemplo del solenoide que tiene en su interior, colocado concéntricamente, un cilindro de un cierto material, además de la corriente real que circula por el solenoide,  $I$ , tendremos una corriente de magnetización en la superficie del material,  $I_m$ , circulando en el mismo sentido que  $I$  si el material es para o ferromagnético y en sentido contrario si es diamagnético. Si aplicamos la ley de Ampere para calcular la circulación del

vector  $\mathbf{B}$  a lo largo del camino indicado en la Figura VIII.7, tendremos que sumar la corriente real y la corriente de imantación que pasa a través del área delimitada por dicha trayectoria. Ahora bien, esta última no está al fácil alcance de la medición experimental, por lo que es necesario modificar la ley de Ampere, de manera análoga a como lo fue la ley de Gauss, para considerar únicamente la corriente real que pasa a través de dicha área. Para tal fin, resulta apropiado definir el vector *campo magnetizante*  $\mathbf{H}$ .

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad (\text{VIII.11})$$

De acuerdo con la expresión (VIII.4), considerando el caso del solenoide aquí analizado, resultará que  $H=nI$ . Por lo tanto, la circulación del vector  $\mathbf{H}$  a lo largo de la trayectoria indicada en la Figura VIII.7 será:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = nIL = I_{\text{libre}} \quad (\text{VIII.12})$$

Por otra parte, combinando las expresiones (VIII.6) y (VIII.11) obtendremos:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_r \mu_0} \vec{B} = \frac{1}{\mu} \vec{B} \quad (\text{VIII.13})$$

y, sustituyendo (VIII.13) en (VIII.12), resultará:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu I_{\text{libre}} \quad (\text{VIII.14})$$

La ecuación (VIII.12) o, alternativamente, la (VIII.14), es la ley de Ampere modificada para el caso en el que el campo magnético se desarrolla en un medio material de permeabilidad  $\mu$ .

Aplicando el teorema del rotacional obtendremos la forma diferencial de la ley de Ampere en medios materiales:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{libre}} \quad (\text{VIII.15})$$

## Capítulo IX

# ECUACIONES DE MAXWELL. ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

### 1. INTRODUCCIÓN

Hasta ahora hemos considerado campos estáticos, es decir, independientes del tiempo. Cuando cumplen con esta condición los campos eléctrico y magnético son entidades independientes, cuya única relación procede de que en ambos casos es una carga eléctrica la fuente del campo: si está en reposo es fuente del campo eléctrico y si está en movimiento (corriente eléctrica) es fuente del campo magnético. Por lo demás, aparentan ser, como decimos, dos entidades separadas.

En este capítulo veremos como la dependencia de los campos eléctrico y magnético con el tiempo dará lugar a una profunda conexión entre ellos, convirtiéndose el uno en fuente del otro lo cual, gracias al genial trabajo teórico de Maxwell, abrió las puertas de la ciencia que propiamente denominamos Electromagnetismo, siendo la existencia de ondas electromagnéticas su predicción más relevante.

### 2. LEY DE FARADAY

Animados por el resultado experimental de Oersted, que conectaba los fenómenos de la electricidad y el magnetismo, el inglés Faraday e, independientemente, el norteamericano Henry, publicaron en 1830 sus resultados experimentales sobre un nuevo fenómeno que se denominó *inducción electromagnética*.

Si tomamos un imán y lo acercamos a una espira conectada a un galvanómetro (dispositivo que mide corrientes de baja intensidad) observaremos que se verifican los siguientes hechos:

1. si el imán y la espira permanecen en reposo relativo no se observa fenómeno alguno,
2. si el imán y la espira se mueven con cierta velocidad relativa, aparece una corriente eléctrica en la espira,
3. la intensidad de dicha corriente es mayor cuanto mayor es la velocidad relativa entre ambos elementos, y
4. el sentido de la corriente depende de que la espira se acerque o se aleje del imán (y viceversa) y del polo magnético que esté más cerca.

La expresión cuantitativa que recoge estos resultados se conoce como ley de Faraday:

$$\mathcal{E}_I = -\frac{d\phi}{dt} \quad (\text{IX.1})$$

que indica que la variación temporal del flujo magnético que atraviesa un circuito dará lugar a una fem inducida en el mismo (así lo indica el subíndice I), que se opone a la causa que la provocó (signo -), que recibe el nombre de ley de Lenz. En la Figura IX.1 esquematizamos el conjunto de los experimentos descritos:

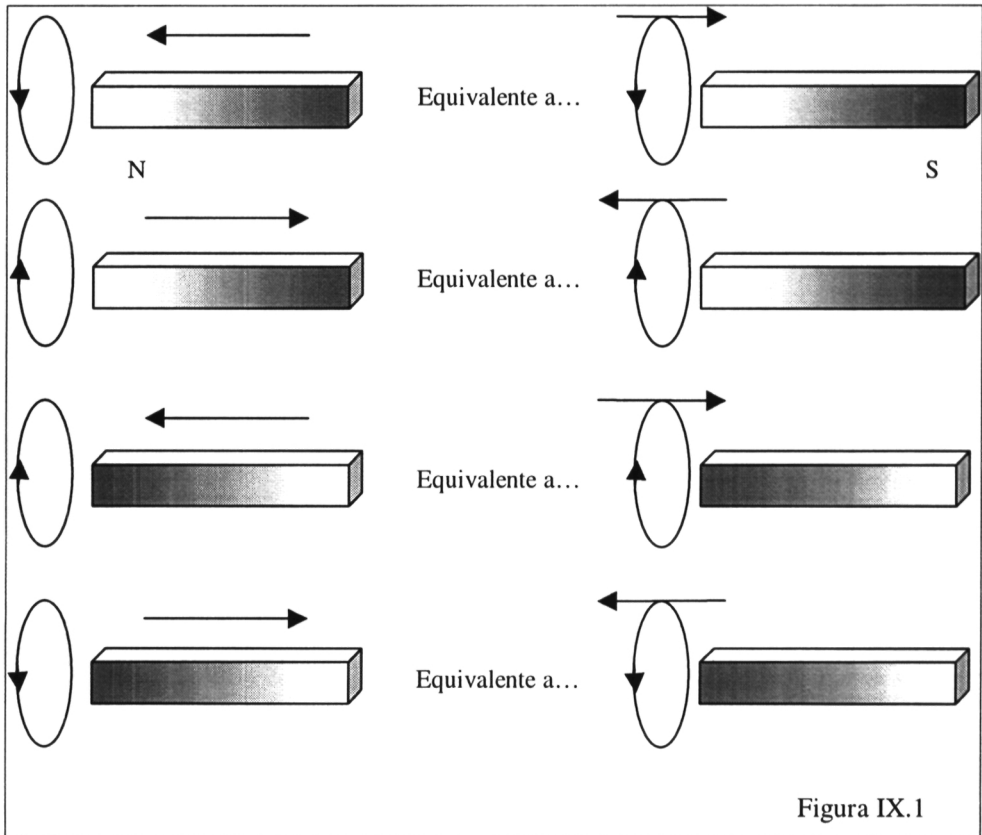


Figura IX.1

Como vemos, en el primer caso, al acercar el imán por su polo norte a la espira, aparece una corriente en esta en sentido contrario a las agujas del reloj que creará un campo magnético cuyas líneas de campo salen del área de la espira hacia el imán, contrarrestando así el aumento de líneas en la cara frontal ocasionado al acercarlo. Esta es la ley de Lenz. De igual forma pueden analizarse los otros casos. Podemos expresar la ley de Faraday de una forma en la que explícitamente aparezcan los campos eléctrico y magnético, sin más que sustituir la expresión de la fem en un circuito y del flujo magnético que lo atraviesa, en la ecuación (IX.1):

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (\text{IX.2})$$

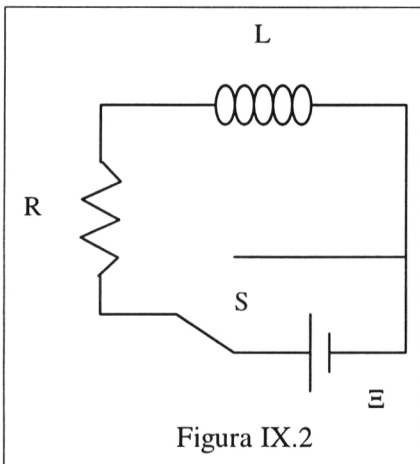
Con la ecuación (IX.2) queda claro que pueden ser fuente de un campo eléctrico tanto un campo magnético dependiente del tiempo como el hecho de que su geometría varíe con esa misma magnitud. Un ejemplo de este último caso es la dinamo. En este dispositivo un campo magnético constante envuelve una espira que, por medios mecánicos es forzada a girar. Consecuentemente el área de la espira enfrentada al campo magnético irá variando con el tiempo, por lo que se inducirá en ella una corriente eléctrica.

Haciendo uso del teorema del rotacional podemos expresar en forma diferencial la ley de Faraday:

$$\oint_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{IX.3})$$

Hemos supuesto que la geometría del circuito sea constante, que es el caso práctico más frecuente. De esta forma únicamente  $\mathbf{B}$  depende del tiempo.

### 3. CIRCUITO RL



En todo circuito eléctrico existe, inevitablemente, un coeficiente de autoinducción. Lo representaremos mediante una bobina de coeficiente  $L$ . Inevitablemente existe también una resistencia eléctrica, que representaremos mediante un resistor de resistencia  $R$ . Finalmente, es imprescindible un generador que suministre energía para que el circuito funcione. En la Figura IX.2 se muestra dicho circuito. El objetivo es analizar el efecto que produce el coeficiente de autoinducción en la intensidad del circuito. Cuando el interruptor  $S$  se coloca en la posición indicada en la figura, comenzará a circular una corriente en el circuito desde

un valor 0 hasta un valor final  $\mathcal{E}/R$ . La cuestión es que este cambio en el valor de la intensidad no es instantáneo. Por lo tanto, durante cierto intervalo la corriente variará con el tiempo. Como el autoflujo magnético del circuito es  $\phi = LI$ , admitiendo que la geometría del mismo es constante ( $L = \text{cte.}$ ), dicha magnitud cambiará con el tiempo por hacerlo la intensidad. El cambio de  $\phi$  con el tiempo dará lugar, de acuerdo con la ley de Faraday, a una fem inducida, que deberá sumarse a la suministrada por el generador para obtener la ecuación del balance de energía (por unidad de carga) del circuito. Es decir:

$$\Xi + \Xi_I = IR \Rightarrow \Xi - L \frac{dI}{dt} = IR \quad (\text{IX.4})$$

Obsérvese que la ecuación (IX.4) es válida mientras la intensidad de corriente cambia con el tiempo. Una vez que la intensidad alcanza un valor estacionario obtenemos el resultado conocido anteriormente,  $\Xi=IR$ .

La ecuación diferencial (IX.4) es fácilmente resoluble separando las variables I y t, e integrando entre  $t=0$  y t, que corresponden a  $I=0$  e I. El resultado final para I(t) será:

$$I(t) = \frac{\Xi}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad (\text{IX.5})$$

que corresponde a una exponencial creciente, siendo  $\Xi/R$  el valor de I al que tiende asintóticamente. Se observa como cuando  $t=L/R$ , la intensidad ha alcanzado aproximadamente las 2/3 partes de su valor final. Por esta razón, al cociente  $L/R$ , que da idea del tiempo que dura este proceso, se le denomina constante de tiempo (o tiempo de relajación) del circuito RL. Un valor típico de esta constante es  $10^{-3}\text{mH}/10^3\Omega=10^{-6}\text{s}$ . Por lo tanto, queda claro que es un proceso extremadamente breve, que pertenece al genérico conjunto de estados transitorios de los sistemas físicos. Transcurrido este tiempo la corriente será constante y el circuito habrá alcanzado su estado estacionario.

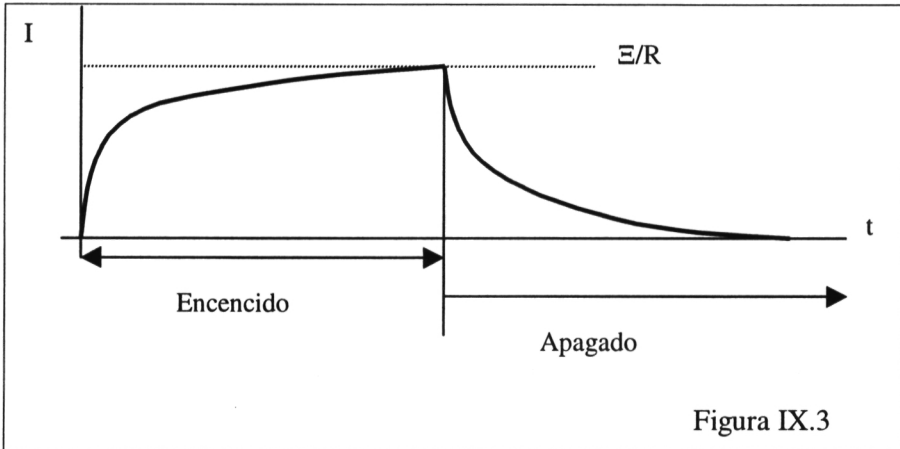
Si, una vez que el circuito está funcionando en su estado estacionario pasamos el interruptor a la otra posición, indicada en la Figura IX.2, la corriente pasará a tomar el valor 0, pero no lo hará instantáneamente. Por lo tanto, siguiendo el mismo razonamiento que antes, la ecuación de balance de energía será:

$$\Xi_I = IR \Rightarrow -L \frac{dI}{dt} = IR \quad (\text{IX.6})$$

cuya solución, con las condiciones  $I=\Xi/R$  para  $t=0$  e  $I=I$  para  $t=t$ , es:

$$I(t) = \frac{\Xi}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \quad (\text{IX.7})$$

que expresa que la intensidad disminuye exponencialmente hasta hacerse nula. Nuevamente la constante de tiempo  $L/R$  da idea de la rapidez del proceso que, nuevamente, corresponde a un estado transitorio. En la Figura IX.3 se representa esquemáticamente la evolución de la intensidad con el tiempo en el proceso descrito.



#### 4. ENERGÍA MAGNÉTICA

Del análisis anterior se obtiene un resultado que parece sorprendente. Cuando se lleva el interruptor a la segunda posición, hay un paso de corriente por el circuito a pesar de no haber una fuente de energía en el mismo (o eso parece). La situación es análoga a la descarga de un condensador, en la que la energía eléctrica que se almacenó en el mismo durante su carga, es devuelta al circuito. Por lo tanto, tendremos que pensar que en la bobina se almacena, de igual forma, *energía magnética* durante el proceso de encendido, que es devuelta al circuito durante el proceso de apagado. Si multiplicamos la ecuación (IX.4) por la intensidad del circuito, resulta:

$$I\mathcal{E} = I^2R + LI \frac{dI}{dt} \quad (\text{IX.8})$$

que se interpreta de la siguiente forma: la energía que por unidad de tiempo suministra el generador al circuito ( $I\mathcal{E}$ ) se emplea en consumo en la resistencia ( $I^2R$ ) y en almacén en forma de energía magnética en la bobina ( $LI dI/dt$ ). Ésta última es la que posteriormente es devuelta al circuito durante el proceso de apagado, tal como se deduce de multiplicar la ecuación (IX.6) por  $I$ .

A partir del resultado anterior podremos determinar la expresión de la energía magnética almacenada en la bobina:

$$LI \frac{dI}{dt} = \frac{dE_m}{dt} \Rightarrow LI dI = dE_m \Rightarrow E_m = \int_0^I LI dI = \frac{1}{2} LI^2 \quad (\text{IX.9})$$

Si ahora consideramos el caso simple de un solenoide, que crea un campo magnético uniforme en su interior de valor  $B = \mu_0 NI / \ell$ , cuyo coeficiente de autoinducción es  $L = \phi / I = \mu_0 N^2 S / \ell$ , donde  $S$  es el área de una espira, resultará para  $E_m$  la siguiente expresión:

$$E_m = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell} \left( \frac{B \ell}{\mu_0 N} \right)^2 = \frac{1}{2 \mu_0} S \ell B^2 \quad (\text{IX.10})$$

Ahora bien, como  $S \ell$  es el volumen del solenoide, resulta una expresión para la densidad de energía magnética:

$$e_m = \frac{1}{2 \mu_0} B^2 \quad (\text{IX.11})$$

que expresa la idea de que el campo magnético contiene energía allí donde existe, con una densidad dada por la expresión (IX.11). Aunque este resultado se obtuvo para un caso matemáticamente simple, es de validez general.

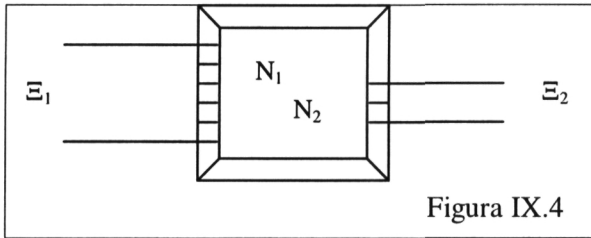
## 5. EL TRANSFORMADOR

La generación de una corriente eléctrica autoinducida a partir del hecho de que la intensidad que pasa por el circuito sea dependiente del tiempo, es también ampliable a la influencia que un circuito de corriente puede tener en otro. Si tenemos dos circuitos con un coeficiente de inducción mutua  $M$ , si la corriente que pasa por el primero de ellos,  $I_1$ , varía con el tiempo, el flujo magnético que pasa por el segundo debido al campo magnético creado por la corriente del primero, variará con el tiempo, dando lugar a una fem inducida en el segundo de valor:

$$\mathcal{E}_M = -M \frac{dI_1}{dt} \quad (\text{IX.12})$$

Este hecho ha dado lugar a una importante aplicación práctica: el transformador.

Para la transmisión de energía a larga distancia es deseable utilizar el voltaje más alto y la intensidad más pequeña posibles. De esta forma se reducen las pérdidas  $I^2 R$  en las líneas de transmisión, pudiéndose reducir el grosor del cableado, lo que reduce costos. Mientras que en las líneas de transmisión



encontramos voltajes del orden de 500kV, por razones de seguridad y aislamiento en el equipo generador y en los sistemas de distribución hacia el uso industrial y doméstico, los voltajes deben ser relativamente bajos. El voltaje

estándar en Europa es de 240V. Precisamente el transformador es el dispositivo que permite realizar la correspondiente conversión de voltaje. En la Figura IX.4 se muestra un esquema del transformador: consta de dos bobinas enrolladas aisladas eléctricamente entre sí, pero devanadas en el mismo núcleo. El núcleo es de permeabilidad alta para conseguir que el campo magnético creado por la corriente en el solenoide primario entre íntegramente en el interior del solenoide secundario, además así se maximiza la inducción mutua entre ambos circuitos. El funcionamiento del transformador es el siguiente: por el primario circula una corriente (alterna) que, al variar con el tiempo genera una fem inducida tanto en el primario como en el secundario. La fem inducida en el secundario da lugar a una corriente en éste que se transmite al circuito al que esté conectado. Las fems inducidas son:  $\mathcal{E}_1 = -N_1 d\phi/dt$  y  $\mathcal{E}_2 = -N_2 d\phi/dt$ . Como el flujo magnético es el mismo en ambos devanados, resulta la igualdad:

$$\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (\text{IX.13})$$

que expresa el hecho de que será posible aumentar o disminuir la tensión en el secundario respecto de la del primario variando adecuadamente el número de vueltas en ambos devanados.

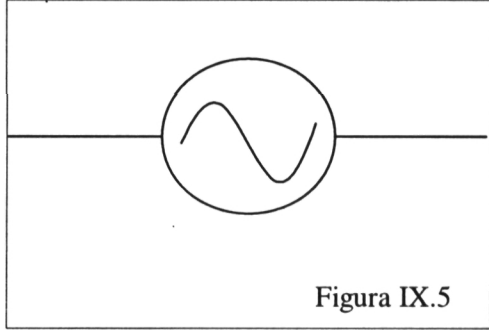
## 6. GENERADOR DE CORRIENTE ALTERNA

Otra aplicación del fenómeno de inducción electromagnética, especialmente importante por su aplicabilidad, es el *generador de corriente alterna*.

Consideremos una espira de área  $S$  inmersa en un campo magnético uniforme  $\mathbf{B}$ . Si hacemos que la espira gire con una velocidad angular constante  $\omega$  (por ejemplo, asociándola a un sistema de paletas que están en la parte inferior de la caída de un salto de agua), el flujo magnético que la atraviesa dependerá del tiempo:  $\phi = BS \cos \omega t$ . Consecuentemente aparecerá una fem inducida en la espira, cuyo valor será:

$$\Xi = -\frac{d\phi}{dt} = BS\omega \sin \omega t = \Xi_o \sin \omega t \quad (\text{IX.14})$$

Si nos fijamos en una de las caras de la espira, durante su giro unas veces el flujo estará aumentando y, a continuación irá disminuyendo para, nuevamente empezar a aumentar, y así sucesivamente. De acuerdo con la ley de Lenz esto significará que la corriente inducida en la espira irá alternativamente cambiando de sentido, de ahí el nombre de generador de corriente alterna para este dispositivo. En sí mismo sólo sería una curiosidad, pero resulta ser de gran aplicabilidad práctica, por lo que el estudio de circuitos en los que el generador sea de este tipo merece un estudio específico. El generador de corriente alterna se representa en un circuito en la forma indicada en la Figura IX.5.



## 7. CIRCUITO R

En este caso, el balance de energía en el circuito nos dará:

$$\Xi = IR \Rightarrow \Xi_o \sin \omega t = IR \Rightarrow I = \frac{\Xi_o}{R} \sin \omega t = I_o \sin \omega t \quad (\text{IX.15})$$

es decir, la tensión y la intensidad están en fase. Por otra parte, la potencia disipada en la resistencia será:

$$P = I^2 R = I_o^2 R \sin^2 \omega t \quad (\text{IX.16})$$

que es dependiente del tiempo. Su valor promedio en un ciclo completo será:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt = \frac{1}{2} I_o^2 R = \frac{1}{2} I_o \Xi_o \quad (\text{IX.17})$$

Los valores máximos de tensión e intensidad se miden con el uso de un osciloscopio, sin embargo, los voltímetros y amperímetros miden los valores de tensión e intensidad, respectivamente, equivalentes a los valores en continua que provocarían la misma disipación de energía en la resistencia, denominados valores eficaces, es decir:

$$\bar{P} = I_e \Xi_e \quad (\text{IX.18})$$

Igualando (IX.17) con (IX.18), podremos relacionar los valores eficaces con los valores máximos:

$$I_e = \frac{I_o}{\sqrt{2}}, \quad \Xi_e = \frac{\Xi_o}{\sqrt{2}} \quad (\text{IX.19})$$

## 8. CIRCUITO L

El balance de energía será en este caso:

$$\begin{aligned} \Xi - L \frac{dI}{dt} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_0^I dI &= \int_0^t \frac{\Xi_o}{L} \sin \omega t \, dt \Rightarrow I = -\frac{\Xi_o}{L\omega} \cos \omega t = \frac{\Xi_o}{L\omega} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{IX.20})$$

es decir, la intensidad está retrasada  $\pi/2$  rad respecto de la tensión. Al producto  $L\omega = X_L$  se le denomina *reactancia inductiva*.

La potencia disipada en la bobina será:

$$P = I\Xi = -I_o \Xi_o \cos \omega t \sin \omega t \quad (\text{IX.21})$$

cuyo promedio temporal en un ciclo será:

$$\bar{P} = 0 \quad (\text{IX.22})$$

es decir, en una bobina no hay disipación de energía.

## 9. CIRCUITO C

El balance de energía nos dará en este caso:

$$\begin{aligned} \Xi &= \frac{Q}{C} \Rightarrow \\ \Rightarrow Q &= C\Xi_o \sin \omega t \Rightarrow I = \frac{dQ}{dt} = C\omega \Xi_o \cos \omega t = \frac{\Xi_o}{1/C\omega} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{IX.23})$$

es decir, la intensidad está adelantada  $\pi/2$  rad respecto de la tensión. Al cociente  $1/C\omega = X_C$  se le denomina *reactancia capacitiva*.

La potencia disipada en el condensador es:

$$P = I\bar{\Xi} = I_o \Xi_o \cos \omega t \sin \omega t \quad (\text{IX.24})$$

cuyo promedio temporal en un ciclo es:

$$\bar{P} = 0 \quad (\text{IX.25})$$

es decir, en el condensador no se disipa energía.

## 10. CIRCUITO RLC SERIE

Consideremos ahora el caso más general de un circuito RLC en el que todos los elementos están en serie con un generador de fem alterna (Figura IX.6). El balance de energía en este circuito se traduce en la igualdad:

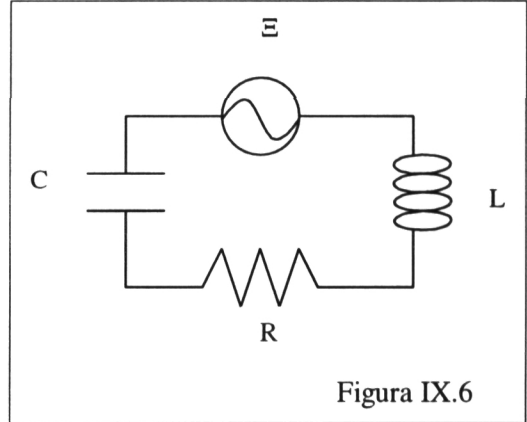


Figura IX.6

$$\begin{aligned} \Xi - L \frac{dI}{dt} &= IR + \frac{Q}{C} \Rightarrow \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I + \frac{Q}{LC} = \frac{\Xi_o}{L} \sin \omega t \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q &= \frac{\Xi_o}{L} \sin \omega t \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I &= \frac{\Xi_o \omega}{L} \cos \omega t \end{aligned} \quad (\text{IX.26})$$

que es una ecuación diferencial lineal no homogénea de segundo orden con coeficientes constantes. La obtención de  $I$  exige conocer los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales. Como vemos, esta ecuación es idéntica a la del oscilador forzado-amortiguado. Su solución consta de dos términos, uno transitorio (solución del oscilador amortiguado) y otro estacionario, que es de la forma:

$$I(t) = I_o \sin(\omega t - \delta) \quad (\text{IX.27})$$

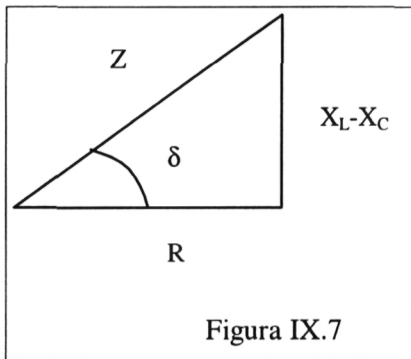
que expresa el hecho de que, en general, existirá en el estado estacionario un desfase  $\delta$  entre la tensión y la intensidad, que dependerá de los valores de  $L$  y  $C$  en la forma:

$$\delta = \arctg \frac{X_L - X_C}{R} \quad (\text{IX.28})$$

Como vemos, si la reactancia inductiva es mayor que la reactancia capacitiva, el desfase será positivo y la intensidad estará retrasada respecto de la tensión, por lo que el circuito se denominará inductivo. En caso contrario el circuito se denominará capacitivo, y si el desfase es nulo por ser idénticas ambas reactancias, el circuito se denominará resistivo. El valor máximo de la intensidad viene dado por la expresión:

$$I_o = \frac{\Xi_o}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{\Xi_o}{Z} \quad (\text{IX.29})$$

es decir, depende de la frecuencia del generador. Al denominador,  $Z$ , se le denomina *impedancia* del circuito.



Si derivamos la expresión (IX.29) respecto de la frecuencia, buscando el valor  $\omega_o$  que hace máximo el valor de la intensidad del circuito, encontramos el resultado:

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{IX.30})$$

que equivale a que las reactancias inductiva y capacitiva coincidan, es decir, a que el circuito sea resistivo. En este caso se dice que

el circuito está en *resonancia*. La potencia disipada en el circuito es:

$$\begin{aligned} P &= I\Xi = I_o \Xi_o \sin(\omega t - \delta) \sin \omega t = I_o \Xi_o \left( \sin^2 \omega t \cos \delta + \sin \omega t \cos \omega t \sin \delta \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{P} &= \frac{1}{2} I_o \Xi_o \cos \delta \end{aligned} \quad (\text{IX.31})$$

En esta ecuación,  $\cos \delta = R/Z$  recibe el nombre de factor de potencia. La combinación de la definición de  $Z$  y la ecuación (IX.28) sugiere la construcción geométrica que se muestra en la Figura IX.7, que justifica la igualdad anterior. Observamos que cuando el circuito está en resonancia de potencia,  $Z=R$  y el factor de potencia es 1, siendo máxima la potencia disipada en la resistencia del circuito.

Volviendo a la igualdad de la ecuación (IX.26) con la del oscilador mecánico forzado-amortiguado, podemos establecer una serie de analogías entre ambas, que se traducirán en una mejor comprensión de ambos fenómenos y en la posibilidad de realizar simulaciones de sistemas mecánicos mediante el diseño de circuitos eléctricos apropiados, lo que se conoce como *simulación física*. La ecuación del oscilador mecánico forzado-amortiguado es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \text{sen } \omega t \quad (\text{IX.32})$$

que, comparada con la tercera ecuación (IX.26), nos lleva a establecer las siguientes analogías:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow Q \\ b &\rightarrow R \\ m &\rightarrow L \\ \frac{1}{C} &\rightarrow k \\ F &\rightarrow \Xi \end{aligned} \quad (\text{IX.33})$$

Por lo tanto, un circuito RLC serie sin generador, en el que la energía del mismo proceda del condensador cargado previamente, será análogo a un oscilador amortiguado, y, en el caso de poca amortiguación, la intensidad del circuito disminuirá con el tiempo de acuerdo con la expresión:

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega_1 t + \theta) \quad (\text{IX.34})$$

donde  $I_0$  y  $\theta$  dependen de las condiciones iniciales y  $\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ .

Por otra parte, un circuito LC ideal, es decir, sin resistencia óhmica alguna, será equivalente a un oscilador armónico simple, cuya intensidad variará con el tiempo en la forma:

$$I(t) = I_0 \text{sen}(\omega_0 t + \phi) \quad (\text{IX.35})$$

es decir, en este circuito ideal, la energía (constante) del mismo estará cambiando continuamente de eléctrica (almacenada en el condensador) a magnética (almacenada en la bobina) y viceversa.

## 11. ANÁLISIS DE CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA

Hemos visto que la resolución de un circuito de corriente alterna pasa por resolver una ecuación diferencial de segundo orden. Éste es un problema matemático más difícil que si nos encontramos con una ecuación algebraica. El problema, por otra parte, se agrava si, en vez de resolver una ecuación diferencial hemos de resolver un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, lo que corresponde a un análisis de mallas con generadores de corriente alterna.

Como útil solución para este problema se considera que las magnitudes que caracterizan a los distintos elementos del circuito, así como las tensiones e intensidades de corriente en cada uno de ellos, están representadas mediante números complejos. Los circuitos se resuelven en este cuerpo de números y, al final del cálculo, se elige la parte del número complejo resultante que representa la magnitud real. Veamos el fundamento de este algoritmo de cálculo.

Partiremos de la expresión matemática conocida como igualdad de Euler:

$$Ae^{j\alpha} = A\cos\alpha + jA\sin\alpha \quad (\text{IX.36})$$

donde  $j = \sqrt{-1}$  es la unidad imaginaria. La igualdad (IX.36) representa las dos formas de expresar un número complejo: forma polar,  $Ae^{j\alpha}$ , donde  $A$  es el módulo del número complejo y  $\alpha$  es el ángulo que determina su radio-vector con el eje real, y forma binaria,  $A\cos\alpha + jA\sin\alpha$ , donde el primer sumando recibe el nombre de parte real y el segundo sumando, excepto la unidad imaginaria, recibe el nombre de parte imaginaria del número complejo. Pues bien, aprovechando el hecho de que la fem de un circuito de corriente alterna y la intensidad de corriente dependen de forma sinusoidal con el tiempo, es decir, como la parte imaginaria de un número complejo (alternativamente puede elegirse la parte real sin más que hacer un cambio de fase), definiremos magnitudes complejas para la fem y la intensidad del circuito. Es decir, supondremos que el circuito es alimentado por una fem:

$$\bar{E} = E_0 e^{j\omega t} \quad (\text{IX.37})$$

Lo cierto es que está alimentado por una fem que es la parte imaginaria de (IX.37), pero este extremo se tendrá en cuenta al final. Aceptando, sobre la base del hecho observado de que la forma matemática verdadera de la intensidad del circuito es

sinusoidal cuando lo es la fem, esperamos que la intensidad del circuito será de la forma (IX.37) si es esa la fem aplicada al mismo, es decir:

$$\bar{I} = I_0 e^{j(\omega t - \delta)} \quad (\text{IX.38})$$

aunque lo cierto es que será la parte imaginaria de (IX.38) la verdadera respuesta del circuito. Sustituyendo (IX.37) y (IX.38) en la ecuación diferencial (IX.26) resultará:

$$j\omega \Xi_0 e^{j\omega t} = \frac{1}{C} I_0 e^{j\omega t} e^{-j\delta} + jR\omega I_0 e^{j\omega t} e^{-j\delta} - LI_0 \omega^2 e^{j\omega t} e^{-j\delta} \quad (\text{IX.39})$$

Eliminando el factor común  $e^{j\omega t}$  y dividiendo entre  $j\omega$ , obtenemos finalmente:

$$\frac{\Xi_0}{I_0} = \left[ R + j \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] e^{-j\delta} \quad (\text{IX.40})$$

Como el primer miembro de la igualdad es un número real, el segundo miembro también lo será. Por lo tanto, el término entre corchetes será de la forma  $Ze^{j\delta}$ , siendo:

$$Z = \sqrt{(R)^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2} \quad (\text{IX.41})$$

$$\delta = \arctg \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

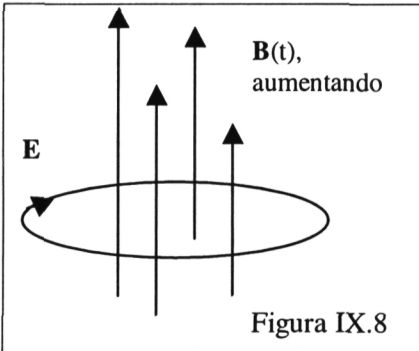
que definen a la impedancia compleja. En términos de estas magnitudes complejas, resulta la ley de Ohm para circuitos de corriente alterna:

$$\bar{E} = \bar{I}Z \quad (\text{IX.42})$$

A partir del análisis descrito podemos afirmar que un circuito de corriente alterna será resuelto siguiendo los mismos métodos que con circuitos de corriente continua, salvo que las magnitudes serán representadas con números complejos. Por lo tanto, como estrategia a seguir a la hora de resolver un circuito de corriente alterna, expresaremos todas los elementos del circuito como impedancias complejas. La fem suministrada por el generador será expresada de la misma

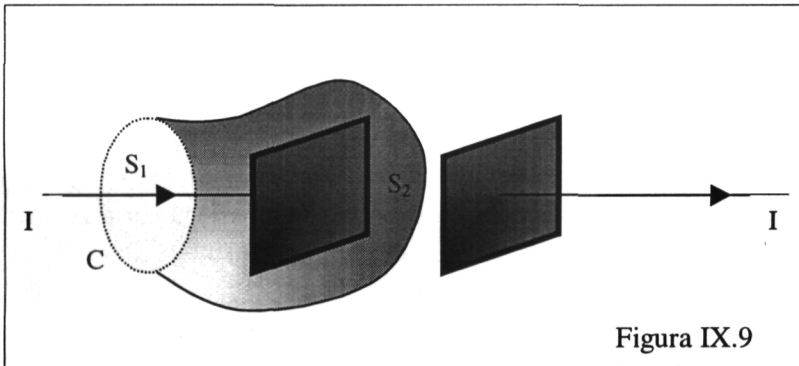
manera y aplicaremos la ley de Ohm (IX.42) para calcular la intensidad de corriente compleja en cualquier rama del circuito. Las mismas reglas de cálculo de resistencias en serie y en paralelo en un circuito de corriente continua se aplican a impedancias complejas en circuitos de corriente alterna.

## 12. CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO



De acuerdo con la ley de Faraday (IX.2), se puede obtener un campo eléctrico  $E$  a partir de un campo magnético  $B$  dependiente del tiempo. La trayectoria cerrada  $C$  que se expresa en la ecuación (IX.2) no se refiere necesariamente a un circuito eléctrico, sino que es cualquier trayectoria cerrada, incluso en el vacío. Según esto, podemos interpretar la ley de Faraday afirmando que en una región del espacio en la que exista un flujo magnético variable con el tiempo, se creará un campo

eléctrico como consecuencia, de tal forma que las líneas de dicho campo se cerrarán en trayectorias que rodearán a las líneas del campo magnético, formando circuitos eléctricos (Figura IX.8). Evidentemente estos campos eléctricos no serán conservativos. Adicionalmente, la ley de Gauss (II.12) afirma que las cargas eléctricas son también fuente del campo eléctrico, en este caso, conservativo.



Por otra parte, la ley de Ampere (VI.25) expresa el hecho de que la única fuente del campo magnético es una corriente eléctrica. Sin embargo, cuando aplicamos esta ley considerando la trayectoria cerrada de la Figura IX.9, que rodea a un conductor que transporta una corriente eléctrica  $I$ , surge una dificultad cuando dicha corriente se produce durante el proceso de carga o descarga de un condensador. La superficie limitada por la trayectoria cerrada  $C$  no tiene por qué

ser plana. Por lo tanto, podemos aplicarla considerando el flujo de densidad de corriente a través de la superficie plana  $S_1$  o, alternativamente, a través de la superficie curva  $S_2$ , que envuelve a la placa del condensador tal como se muestra en la Figura IX.9. Si analizamos el primer caso encontramos que la corriente  $I$  da lugar a un campo magnético  $\mathbf{B}$  cuyas líneas de campo rodean en circunferencias concéntricas a dicha corriente, lo cual es coherente con la predicción de la ley de

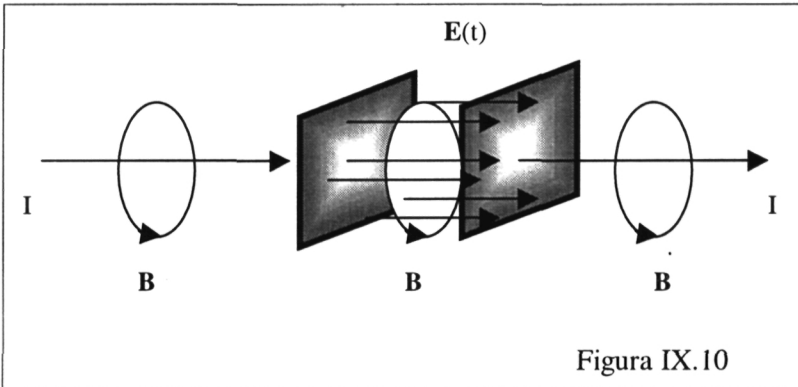


Figura IX.10

Ampere. Sin embargo, si elegimos la superficie  $S_2$  para calcular el segundo miembro de la ley de Ampere, vemos que ninguna corriente eléctrica la atraviesa, por lo que no se deduce la existencia de campo magnético alguno en la trayectoria  $C$ , lo cual es contradictorio con el resultado anterior. J.C. Maxwell resolvió el problema de la forma siguiente. Durante los procesos de carga y descarga de un condensador es un hecho experimental que se mide un campo magnético entre las placas del condensador, que es indistinguible del medido en el espacio que rodea literalmente a la corriente  $I$  (Figura IX.10). Aunque no hay una corriente eléctrica entre las placas del condensador, sí que hay un campo eléctrico, cuyo valor numérico (con la aproximación de placas planoparalelas infinitas uniformemente cargadas) es  $E=Q/\epsilon_0 S$ , siendo  $S$  el área de cada placa, cargada con una carga  $Q$ . Precisamente, durante el proceso de carga del condensador, que es cuando la corriente eléctrica es no nula (recuerde que en régimen estacionario la corriente es nula), la magnitud  $Q=ES\epsilon_0$ , no es constante, siendo su derivada temporal de dimensiones iguales a las de una intensidad de corriente:

$$I_d = \frac{dQ}{dt} = \epsilon_0 S \frac{dE}{dt} \tag{IX.43}$$

que Maxwell denominó corriente de desplazamiento. El cociente  $I_d/S=j_d$  se llamará densidad de corriente de desplazamiento, que deberá ser añadida a la ley de Ampere como una nueva fuente de campo magnético:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_o \int_S \left( \vec{j} + \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \Rightarrow \nabla \times \vec{B} = \mu_o \left( \vec{j} + \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (\text{IX.44})$$

La expresión (IX.44) recibe el nombre de ley de Ampere-Maxwell y completa la simetría entre los campos eléctrico y magnético: además de la corriente eléctrica, un campo eléctrico dependiente del tiempo es fuente también de un campo magnético.

Salvo por constantes multiplicativas, los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  aparecen en las ecuaciones de Maxwell:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_o} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_o \vec{j} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{IX.45})$$

con notable simetría. Esto significa que es previsible que de la misma forma que un campo eléctrico afecta al campo magnético, el campo magnético afectará al campo eléctrico. Por lo tanto, podremos entender el proceso por el cual, los dos campos, eléctrico y magnético, indisolublemente acoplados y sostenidos mutuamente, se propagarán en el espacio vacío como una entidad individual, sin necesidad de materia, ni de éter...

### 13. ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Por sencillez de cálculo, vamos a considerar que en el espacio vacío, libre de cargas y corrientes eléctricas, existen sendos campos eléctrico y magnético. Las ecuaciones de Maxwell tomarán la forma:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{IX.46})$$

Dado que el campo  $\mathbf{E}$  generado por  $\mathbf{B}(t)$  es perpendicular a la dirección en la que  $\mathbf{B}$  cambia, y que, análogamente, el campo  $\mathbf{B}$  generado por  $\mathbf{E}(t)$  es

perpendicular a la dirección en la que  $\mathbf{E}$  cambia, podemos adelantar la naturaleza transversal de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  en una perturbación electromagnética.

Consideremos una carga eléctrica que se encuentra en reposo. Creará un campo eléctrico  $\mathbf{E}$ . Si la carga se mueve con velocidad constante el campo eléctrico tomará valores distintos con el tiempo en cada punto del espacio, aunque lo haría con una “velocidad” constante, por lo que, de acuerdo con la última de las ecuaciones (IX.46), el campo magnético resultante no dependería del tiempo. Sin embargo, si la carga se moviera con aceleración, el campo magnético resultante dependería del tiempo al no ser constante el cambio del campo eléctrico con el tiempo en cada punto del espacio. Por lo tanto, de acuerdo con la segunda ecuación (IX.46), resultaría un campo eléctrico dependiente del tiempo como consecuencia del cambio no uniforme del campo magnético con el tiempo. El proceso se repite así de manera indefinida, produciéndose una mutua generación de los campos eléctrico y magnético, que se propaga en el espacio libre, y que denominamos *onda electromagnética*. Vemos que los campos eléctrico y magnético son la manifestación separada de un mismo fenómeno físico, *el campo electromagnético*, generado por una carga eléctrica en movimiento acelerado.

Finalmente, antes de proceder a obtener de manera rigurosa la ecuación de ondas electromagnéticas, señalemos que la simetría de las ecuaciones de Maxwell sugiere que la dirección de propagación de una onda electromagnética debe ser perpendicular a las direcciones de ambos campos eléctrico y magnético, por lo que será una onda transversal.

Tomando el rotacional de la segunda de las ecuaciones (IX.46), considerando que las derivadas temporal y espacial son intercambiables en el segundo miembro, resultará:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) \quad (\text{IX.47})$$

Sustituyendo la expresión del rotacional del campo magnético dada por la última de las ecuaciones (IX.46), y considerando el resultado de la teoría de operadores vectoriales que afirma que  $\nabla \times (\nabla \times \dots) = \nabla(\nabla \cdot \dots) - \Delta \dots$ , tendremos que:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (\text{IX.48})$$

Si, finalmente, aplicamos la primera de las ecuaciones (IX.46) en la (IX.48), resultará:

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (\text{IX.49})$$

que es la ecuación de una onda en la que la perturbación que se produce en un lugar del espacio en la magnitud campo eléctrico, se propaga en el espacio vacío, con una velocidad  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ . Maxwell calculó el valor de  $c$  a partir de los

resultados experimentales de Weber y Kohlrausch sobre  $\mu_0$  y  $\epsilon_0$ , obteniendo el valor numérico  $c=300.000$  km/s. Este resultado estaba sorprendentemente de acuerdo con la velocidad de la luz, medida por Fizeau en 1849. Maxwell concluyó que la luz era una onda electromagnética. De manera análoga se puede obtener una ecuación de ondas para el campo magnético, pero dejamos al lector la tarea de

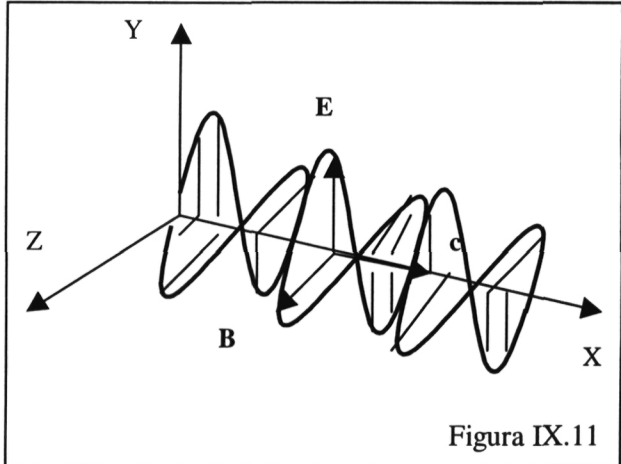


Figura IX.11

comprobarlo. Pocos años después de que Maxwell publicara sus resultados, el físico austríaco, Hertz, hizo públicos también sus resultados experimentales: había detectado ondas electromagnéticas en el laboratorio.

Si consideramos el caso más sencillo de una onda armónica plana polarizada, en la que los frentes de onda son planos y los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  varían sinusoidalmente en direcciones fijas en el espacio, la representación de dicha onda será la que se muestra en la Figura IX.11. Los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  están en fase, de tal forma que:

$$\vec{E} = c\vec{B} \quad (\text{IX.50})$$

Como todas las ondas, las electromagnéticas transportan energía y cantidad de movimiento. Los campos eléctrico y magnético almacenan energía, lo que les dota de categoría de entidad física real, dejando de ser meros modelos abstractos. Recordemos que las densidades de energía eléctrica y magnética son:

$$\begin{aligned}
 e_e &= \frac{1}{2} \epsilon_o E^2 \\
 e_m &= \frac{1}{2 \mu_o} B^2
 \end{aligned}
 \tag{IX.51}$$

A partir del hecho de que  $E=cB$ , sustituyendo la expresión de  $c$ , se concluye que, en una onda electromagnética  $e_e=e_m$ , es decir, la energía transportada por una onda electromagnética está repartida equitativamente entre ambos campos. Por lo tanto, la energía total será:

$$e_{em} = e_e + e_m = \epsilon_o E^2 = \frac{1}{\mu_o} B^2
 \tag{IX.52}$$

Si queremos cuantificar la energía transportada por una onda electromagnética mediante una magnitud de interés práctico, debemos definirla independientemente del tiempo que dure el experimento y del área que recibe la radiación. De esta forma, si consideramos un área  $A$  que durante un intervalo de tiempo  $\Delta t$  recibe una radiación electromagnética que transporta una energía por unidad de volumen  $e_{em}$ , la cantidad  $e_{em}(c\Delta t)A$  será la energía recibida por  $A$  en el tiempo  $\Delta t$ . Por lo tanto:

$$S = \frac{e_{em}(c\Delta t)A}{A\Delta t} = ce_{em}
 \tag{IX.53}$$

será la energía recibida (transportada) por unidad de tiempo y área. Haciendo uso de la ecuación (IX.52) podremos escribir:

$$S = ce_{em} = c\epsilon_o E^2 = c\epsilon_o EcB = c^2 \epsilon_o EB = \frac{1}{\mu_o} EB
 \tag{IX.54}$$

Además, como la onda se propaga en una dirección perpendicular a  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ , considerando que el espacio es isótropo, podremos definir un vector  $\mathbf{S}$ :

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_o} \vec{E} \times \vec{B} = c^2 \epsilon_o \vec{E} \times \vec{B}
 \tag{IX.55}$$

que recibe el nombre de *vector de Poynting*.

Si consideramos el caso particular de ondas armónicas:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)\end{aligned}\quad (\text{IX.56})$$

resulta un valor para el vector de Poynting instantáneo:

$$\vec{S} = c^2 \epsilon_0 \vec{E}_0 \times \vec{B}_0 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (\text{IX.57})$$

que tiene poco interés práctico, pues oscila entre valores máximos y mínimos. Mucho más interesante es conocer el promedio temporal de  $\vec{S}$ . Como intervalo de tiempo adecuado tomamos un período, ya que durante él se produce toda la variación del vector  $\vec{S}$ . El resultado:

$$I = \langle \vec{S} \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S} dt = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 = \frac{c}{2\mu_0} B_0^2 \quad (\text{IX.58})$$

recibe el nombre de irradiancia.

El análisis dimensional de la magnitud irradiancia nos lleva a un interesante resultado. Observamos que las unidades de  $I$  son las de energía/tiempo área; por lo tanto,  $I/c$  tiene dimensiones de cantidad de movimiento/tiempo área=fuerza/área=presión. Por lo tanto, al cociente:

$$P_r = \frac{I}{c} \quad (\text{IX.59})$$

le llamaremos *presión de radiación*. Corresponde, físicamente, al hecho real de que la radiación transporta cantidad de movimiento, por lo que su impacto sobre un cuerpo da lugar a una variación de la cantidad de movimiento de éste. Podemos entender, mediante una simple descripción cualitativa, el mecanismo mediante el cual la radiación ejerce una presión sobre la superficie en la que impacta. Si consideramos una onda armónica plana polarizada (Figura IX.11) que impacta en un objeto cualquiera, y nos fijamos en uno de los protones de la superficie del mismo (tenga presente que la masa del átomo es la de los protones y los neutrones, éstos últimos sin carga, por lo que no perciben acción electromagnética alguna, así que la acción sobre el cuerpo será la suma de las acciones sobre todos y cada uno de los protones yacientes en su superficie), en primer lugar la componente eléctrica de la onda ejercerá una fuerza sobre el protón en dirección tangente a la superficie del cuerpo. Consecuentemente tendremos una partícula cargada que se mueve con cierta velocidad en dirección perpendicular al campo magnético, que es la otra

componente de la onda electromagnética. Resulta así otra fuerza (magnética) que es perpendicular a la superficie del cuerpo y, puesto que los dos campos están en fase, estará dirigida hacia el interior del cuerpo, por lo que será “empujado” por la onda electromagnética.

Cuando Maxwell publicó, en 1867, su teoría electromagnética, únicamente se conocía la banda de frecuencias utilizada en Óptica (infrarrojo-visible-ultravioleta). Realmente ésta es sólo una pequeña parte del denominado *espectro electromagnético*. Todas las ondas electromagnéticas se propagan con la misma velocidad en el vacío, distinguiéndose por su longitud de onda (y su frecuencia), de tal forma que el producto  $c=\lambda\nu$  deberá permanecer constante. Dependiendo de estos valores, se distinguen distintos tipos de ondas electromagnéticas que se generan y detectan de formas diferentes, teniendo múltiples aplicaciones prácticas.

## LA CONEXIÓN RELATIVISTA ENTRE “E” Y “B”

### 1. INTRODUCCIÓN

En el año 1905 Albert Einstein publicó su Teoría Especial de la Relatividad (TER) mediante un trabajo publicado por la revista alemana *Annalen der Physik*, que llevaba por título “Sobre la Electrodinámica de los Cuerpos en Movimiento”. Lo que motivó a Einstein fue el deseo de comprender mejor la naturaleza del Electromagnetismo: el movimiento relativo entre una espira y un imán daba lugar al mismo fenómeno, es decir, una corriente eléctrica inducida, sin embargo, dependiendo de cuál de estos dos objetos se considerase en reposo el fenómeno era puramente eléctrico o puramente magnético, lo cual carecía de sentido.

No obstante, siendo esta la pretensión, el resultado fue que produjo una profunda revisión de los conceptos de espacio y tiempo, que llevó a la necesidad de superar la vieja Mecánica Newtoniana (MN), para ser sustituida por otra Mecánica más revolucionaria cuyas implicaciones fueron inicialmente difíciles de aceptar. Incluso hoy en día a quien se acerca por vez primera al estudio de la Mecánica Relativista le parecerá que algunas de las afirmaciones que se hacen pertenecen al mundo del juego matemático, sin realidad física. No obstante, tras un concienzudo estudio, el lector terminará aceptando, además de por los hechos experimentales que la confirman, que la TER es el resultado lógico y que, por el contrario, es la MN la que adolece de consistencia.

### 2. RELATIVIDAD NEWTONIANA

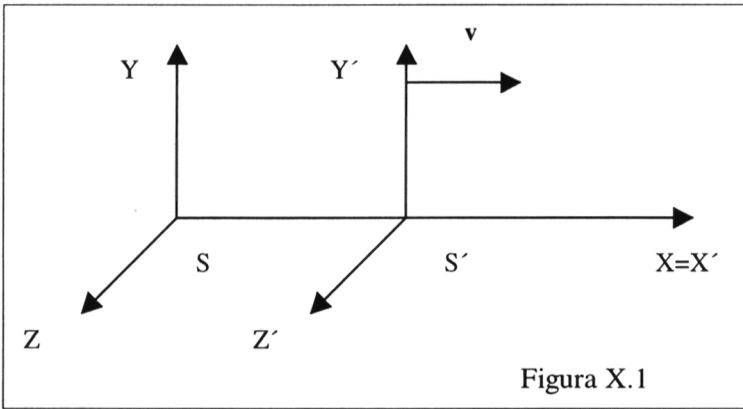
Se denomina *suceso* a todo fenómeno físico que ocurre en un lugar del espacio y en un instante de tiempo. Evidentemente todos los fenómenos físicos (medibles) ocurren en un lugar y en un instante dados, por lo que la unión fenómeno físico-suceso es inevitable. La localización espacio-temporal de todo suceso se cuantifica mediante una colección de cuatro números ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$ ) correspondientes a las coordenadas espaciales y al tiempo medidos por cierto observador. Como sabemos, al observador le asignamos un sistema de referencia, el cual está provisto de unos ejes coordenados (para fijar ideas supondremos que son cartesianos) y un reloj. Es evidente que, dependiendo del sistema de referencia, la colección de cuatro números asignados al mismo suceso será diferente, aunque éste siga siendo el mismo. Por lo tanto, lo primero que hemos de hacer es determinar inequívocamente el sistema de referencia respecto del cual van a ser descritos los distintos sucesos que vamos a estudiar. Entre los sistemas de referencia, aquéllos en los que se verifica la ley de inercia, serán objeto de nuestro interés. Los denominamos sistemas de referencia inerciales (SRI).

Consideremos dos SRI en configuración estándar (Figura X.1). El sistema  $S$  se considera en reposo y el sistema  $S'$  se considera en movimiento uniforme respecto de  $S$  tal como se indica. Con esta configuración los resultados son

matemáticamente más simples, aunque son de validez general. Además, pone de manifiesto la diferencia de efectos dependiendo de la dirección de movimiento. Las transformaciones de Galileo (TG) entre las coordenadas del mismo suceso, descritas por ambos observadores, son:

$$\left. \begin{matrix} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} x = x' + vt \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{matrix} \right. \tag{X.1}$$

La última de estas ecuaciones expresa de manera explícita el carácter absoluto del tiempo en la MN. Como vemos, las descripciones de ambos observadores son



simétricas, no pudiendo arrogarse ninguno de ellos el “privilegio” de ser el sistema de referencia en reposo. De las TG se deduce:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \Delta t' \\ \Delta x &= \Delta x' \\ \vec{u}' &= \vec{u} - \vec{v} \\ \vec{a}' &= \vec{a} \end{aligned} \tag{X.2}$$

La primera igualdad establece que los intervalos temporales son invariantes al cambiar de SRI, es decir, el tiempo transcurrido entre dos sucesos es independiente del sistema de referencia que los describa. La segunda igualdad establece la invariancia de la distancia (es trivial la igualdad en el caso de las direcciones perpendiculares a la dirección del movimiento) entre dos sucesos que ocurren simultáneamente. Por lo tanto, podemos afirmar que, en MN, los intervalos temporales y espaciales, así como la simultaneidad de los sucesos, son cantidades

absolutas, independientes del estado de movimiento del SRI. La tercera igualdad es la ley clásica de composición de velocidades: la velocidad de un objeto respecto del sistema  $S'$  es igual a la velocidad del mismo objeto respecto del sistema  $S$  restándole la velocidad del sistema  $S'$  respecto del sistema  $S$ . Estos resultados coinciden con nuestra experiencia cotidiana, por lo que no nos sorprenden en absoluto. Finalmente, la cuarta igualdad, que se deduce de la tercera derivando respecto de  $t=t'$ , muestra que ambos observadores medirían la misma aceleración. Esta última igualdad, junto con el hecho de que la masa inercial de un cuerpo no cambia cuando es medida por un observador u otro (al menos cuando las velocidades son “cotidianas”), nos lleva a la igualdad:

$$\vec{F}' = m'\vec{a}' = \vec{F} = m\vec{a} \quad (\text{X.3})$$

que estable la invariancia de las leyes de Newton respecto de las TG. Este hecho llevó a Newton a formular su Principio de Relatividad (PRN), según el cual “ningún experimento mecánico permite detectar el estado de movimiento del SRI o, alternativamente, no es posible detectar el reposo absoluto mediante un experimento mecánico”.

### 3. ¿ES COMPATIBLE EL PRN CON EL ELECTROMAGNETISMO?

De la ley clásica de composición de velocidades, que se deduce de las TG, se concluye que la velocidad de la luz dependerá del estado de movimiento del observador. Este hecho sugiere inmediatamente que es posible realizar un experimento de electromagnetismo (EM) que permita detectar el estado de movimiento del SRI a través del valor que se obtenga para la velocidad de la luz en dicho sistema de referencia. Alternativamente, cuando encontremos que es  $c$  la velocidad de la luz, habremos determinado el SRI en reposo absoluto. Este hecho expresa que las ecuaciones de Maxwell no son invariantes respecto de las TG. De esta forma se nos plantean tres posibles situaciones relativas a la relación entre PRN, MN y EM:

- a) PRN es correcto. MN es invariante pero EM no lo es. Entonces existe un sistema de referencia en reposo absoluto detectable mediante un experimento EM.
- b) PRN es correcto. Hay que modificar el EM para conseguir que sea invariante con PRN.
- c) PRN no es correcto. Hay que modificar MN para conseguir que sea invariante con un nuevo PR en el que EM es invariante.

Entre los años 1881 y 1930, los científicos norteamericanos Michelson y Morley repitieron, bajo condiciones diferentes, uno de los experimentos de mayor ingenio y sofisticación de la Historia de la Física (el lector interesado puede encontrar una descripción accesible en cualquiera de las obras citadas al final de este libro). El objetivo de su famoso experimento era detectar el reposo absoluto

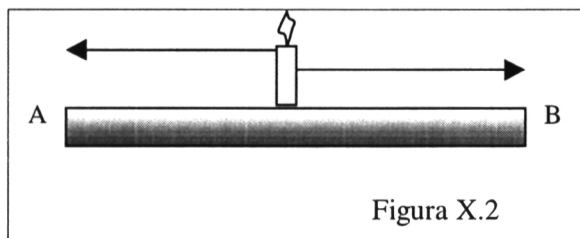
mediante un experimento de EM. Invariablemente el resultado siempre fue nulo. Por lo tanto, queda descartada la primera de las opciones anteriores. La segunda también queda descartada ya que, además de este resultado, el EM era compatible con los experimentos por lo que no había razón para considerar su modificación. Nos enfrentamos así a la tercera de las posibilidades como la única alternativa válida.

#### 4. POSTULADOS DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL

Preferimos resumir el desarrollo histórico y ordenarlo con un sentido pedagógico, en vez de cronológico. Fue la genialidad de A. Einstein la que condensó estos resultados en dos postulados o principios a partir de los cuales dedujo unas nuevas ecuaciones de transformación entre SRI, compatibles con el EM, y desarrolló una nueva Mecánica que se adecuó a estas ecuaciones, superando así la MN.

Los postulados de esta nueva teoría relativista que, por estar referida a SRI recibe el nombre de Teoría Especial de la Relatividad (TER), en contraposición con la Teoría General de la Relatividad (TGR) que fue formulada por el propio Einstein en 1917, que se refiere a SR en general, son:

- a) Principio de Relatividad: “las leyes de la Física son las mismas en todos los SRI. Es decir, no hay (o no es detectable..., entonces ¿qué sentido tiene plantearse su existencia?) sistema de referencia en reposo absoluto”.
- b) Constancia de la velocidad de la luz: “la velocidad de la luz en el vacío es independiente del estado de movimiento del observador y/o de la fuente”.



De todas formas, antes de proceder con el desarrollo de su teoría, A. Einstein se cuestionó el carácter absoluto de la simultaneidad de sucesos. Es interesante que hagamos este análisis ya que nos permitirá entender mejor los

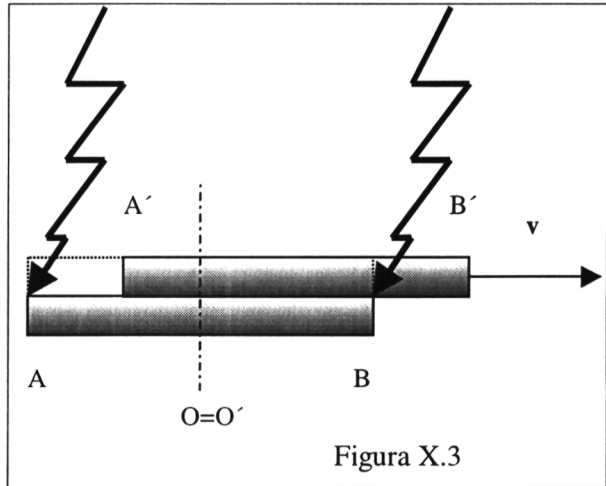
resultados que posteriormente obtendremos.

#### 5. RELATIVIDAD DE LA SIMULTANEIDAD

Imaginemos dos sucesos que ocurren en lugares diferentes respecto de un observador determinado. Diremos que son simultáneos si los respectivos relojes situados en los lugares donde se desarrollan dichos sucesos marcan el mismo tiempo. Ahora bien, ¿cómo podemos estar seguros de que los relojes son idénticos, es decir, que están sincronizados? Por lo tanto, lo primero será idear un método que permita asegurar la sincronización de relojes situados en lugares diferentes.

Tal vez a alguien se le ocurra que bastaría con sincronizar dos relojes en un mismo lugar, lo que supuestamente aseguraría que su sincronización permanece aunque los relojes se separen. Sin embargo, ¿quién puede dar fe de que el movimiento del reloj no afecta a su funcionamiento? Es preferible utilizar un método alternativo que parta de la colocación de los relojes en las respectivas posiciones en las que van a permanecer posteriormente. Una vez situados en las posiciones A y B dos relojes, en el sistema S, desde la posición central entre A y B emitiremos una señal, lo más rápida posible (la señal más rápida conocida es la luz), independiente del medio material a ser posible (la luz se propaga en el vacío) y que se comporte mejor (la velocidad de la luz es independiente del estado de movimiento de la fuente y del observador). Por lo tanto, la luz es la señal adecuada para enviar o recibir una información desde el centro situado entre A y B a dichas posiciones, de tal forma que, cuando los relojes allí colocados reciban la señal, se pondrán en marcha. Este método asegura la sincronización de dichos relojes (Figura X.2).

Una vez que hemos definido el método de sincronizar los relojes, analicemos el carácter absoluto o relativo de la simultaneidad de dos sucesos. Tal como muestra la Figura X.3, dos rayos caen en los puntos A y B del sistema S justo en el mismo instante en que los observadores O y O' coinciden en su posición en el espacio. Este último observador se mueve, con el sistema S' a una velocidad  $v$



respecto de S, tal como muestra la Figura X.3. En el momento de caer los rayos, coinciden las posiciones A y A' por un lado, y B y B' por otro. Respecto del observador O, que recibirá las luces procedentes de los rayos al mismo tiempo, los dos sucesos serán simultáneos; sin embargo, como O' viaja al encuentro de B' recibirá la luz del rayo que allí cayó antes que la del rayo que cayó en A', punto del que se aleja. Por lo tanto, para O' los sucesos no son simultáneos. Este interesante resultado es consecuencia directa del hecho de que la información (la caída de los rayos) viaja con una velocidad finita que es la misma para ambos observadores: la de la luz. Si la información viajara a velocidad infinita (algo que puede ocurrir en MN) los dos sucesos también serían simultáneos para O'. Finalmente, obsérvese que el resultado es simétrico, si se considera que es S' el sistema en reposo y S se

mueve respecto de él con velocidad  $-v$ . En este caso  $O'$  afirmarí­a que los sucesos son simultáneos y serí­a  $O$  el que dirí­a que no lo son.

## 6. TRANSFORMACIONES DE LORENTZ

A partir de sus dos postulados, A. Einstein dedujo unas nuevas ecuaciones de transformaci3n entre las coordenadas de un suceso referidas a dos SRI en movimiento relativo. Como coincidieron con las que a3os antes el fí­sico holandés H.A. Lorentz habí­a obtenido, basándose en una teorí­a del electr3n un tanto sofisticada, con la que pretendí­a justificar el resultado nulo del experimento Michelson-Morley, manteniendo intacta la existencia del sistema en reposo absoluto, reciben el nombre de Transformaciones de Lorentz (TL). Éstas son:

$$\left. \begin{array}{l} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \end{array} \right. \quad (\text{X.4})$$

donde el factor  $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2} > 1$ . Se observa que cuando  $v \ll c$ , las TL se reducen a las TG, como cabe esperar del hecho de que nuestra experiencia cotidiana, en la que los observadores se mueven a velocidades muy inferiores a la de la luz, se ajusta a las predicciones newtonianas quedando ocultos los resultados einsteinianos. Tal vez, el resultado más llamativo es que el tiempo no es un invariante, depende de la coordenada espacial y de la velocidad del observador.

A partir de las TL se deducen varios resultados interesantes. En primer lugar, comparemos la longitud de un objeto medida por  $S$  y por  $S'$ . Tal magnitud resulta de determinar la posici3n de los extremos del objeto, simultáneamente. Pero ya hemos se3alado que la simultaneidad es relativa, por lo que no nos debe sorprender en exceso el resultado que vamos a obtener. Supongamos que el objeto en cuesti3n es una barra situada a lo largo del eje com3n  $X=X'$ , que se mueve solidaria con el sistema  $S'$ , y analicemos la descripci3n dada por el observador  $S$ . Este observador dirá que la longitud de la barra es  $x_2' - x_1'$  respecto de  $S'$  siendo  $x_i'$  las coordenadas de los extremos de la barra respecto de  $S'$ . Por otra parte, el observador  $S$  mide simultáneamente (en el instante  $t$ ) las posiciones de los extremos de la barra,  $x_i$ , por lo que:

$$\left. \begin{array}{l} x_1' = \gamma(x_1 - vt) \\ x_2' = \gamma(x_2 - vt) \end{array} \right\} \Rightarrow x_2' - x_1' = \gamma(x_2 - x_1) \quad (\text{X.5})$$

es decir, el observador S afirma que la longitud de la barra es menor que el resultado que S' daría. Obsérvese que desde el punto de vista de S' ocurre al revés, manteniéndose la simetría de las descripciones de ambos observadores. La discrepancia en sus resultados se debe a que no están de acuerdo con la simultaneidad de sus medidas. A este resultado de la TER, ¡comprobado reiteradamente en el laboratorio! se le conoce como *contracción de la longitud*.

Otro interesante resultado se refiere al intervalo de tiempo entre dos sucesos. De acuerdo con S, si un reloj, situado en una posición fija  $x'$  de S' proporciona dos valores de tiempo  $t_1'$  y  $t_2'$ , el intervalo de tiempo transcurrido será  $t_2' - t_1'$ . Ahora bien, como el reloj se mueve respecto de S, el primer valor del tiempo corresponderá a la marca  $t_1$  que da el reloj en la posición  $x_1$ , y el segundo corresponde a la marca  $t_2$  que da cuando el reloj está en la posición  $x_2$ , todo esto, como decimos, respecto de S. Por lo tanto, de las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} t_1' &= \gamma \left( t_1 - \frac{v}{c^2} x_1 \right) & x' &= \gamma (x_1 - vt_1) \\ t_2' &= \gamma \left( t_2 - \frac{v}{c^2} x_2 \right) & x' &= \gamma (x_2 - vt_2) \end{aligned} \right\} \quad (\text{X.6})$$

se deduce:

$$t_2' - t_1' = \frac{(t_2 - t_1)}{\gamma} \quad (\text{X.7})$$

es decir, el intervalo de tiempo entre los sucesos es mayor para S que para S'. Esta "ralentización" del tiempo para el observador respecto del cual los sucesos tienen lugar en un punto fijo del espacio, recibe el nombre de *dilatación del tiempo*, y también es simétrica para ambos observadores y consecuencia de la relatividad de la simultaneidad.

A partir de las TL se deducen otros interesantes resultados que vamos a exponer, sin dedicarles tiempo a su demostración. En la bibliografía citada al final de este libro pueden encontrarse estos análisis.

La *ley de composición de velocidades* relativista es:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \quad (\text{X.8})$$

de la que se deduce que por muy grande que sea  $u' < c$ ,  $u$  será menor que  $c$ . Incluso, si  $u' = c$ , resulta  $u = c$ , que es el segundo postulado de la TER. Se observa también que en el límite  $v \ll c$ , la (X.8) se reduce a la ley de composición de velocidades Newtoniana (tercera ecuación X.2).

La masa inercial de un cuerpo es función de la velocidad con la que se mueve de acuerdo con la expresión:

$$m = \gamma m_0 \quad (\text{X.9})$$

donde  $m_0$  es la masa respecto del sistema en el que se encuentra en reposo.

Toda masa en reposo posee una energía por el mero hecho de tener masa. Su valor es:

$$E = m_0 c^2 \quad (\text{X.10})$$

Finalmente, por ser un resultado de especial interés para nosotros, destacaremos que la fuerza que actúa sobre una partícula que permanece en reposo respecto de  $S'$  se transforma, de acuerdo con TL en la forma:

$$\left. \begin{aligned} F_x' &= F_x \\ F_y' &= \gamma F_y \\ F_z' &= \gamma F_z \end{aligned} \right\} \quad (\text{X.11})$$

## 7. INVARIANCIA DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL

Los hechos experimentales ponen de manifiesto la validez del EM. Los hechos experimentales también llevaron al establecimiento de dos postulados de los que se dedujeron las TL. Claramente se plantea la necesidad de una nueva Mecánica. No insistiremos en este punto por quedar fuera del objetivo de esta obra, pero completaremos la tercera opción dada en el apartado 3, comprobando la invariancia del EM maxwelliano. Para simplificar los cálculos consideraremos las ecuaciones de Maxwell en el vacío y comprobaremos que son invariantes frente a un cambio de SRI, cuando son las TL el conjunto de ecuaciones utilizado para relacionar las coordenadas respecto de ambos sistemas de referencia.

Sean las ecuaciones de Maxwell en el vacío, respecto del sistema  $S$ :

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (\text{X.12})$$

Centrémonos en las ecuaciones segunda y tercera. Si las expresamos en componentes, tendremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{X.13})$$

Que sean invariantes significa que su forma, respecto del sistema  $S'$  sea idéntica, es decir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial B_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial B_{z'}}{\partial z'} &= 0 \\ \frac{\partial E_{z'}}{\partial y'} - \frac{\partial E_{y'}}{\partial z'} &= -\frac{\partial B_{x'}}{\partial t'} \\ \frac{\partial E_{x'}}{\partial z'} - \frac{\partial E_{z'}}{\partial x'} &= -\frac{\partial B_{y'}}{\partial t'} \\ \frac{\partial E_{y'}}{\partial x'} - \frac{\partial E_{x'}}{\partial y'} &= -\frac{\partial B_{z'}}{\partial t'} \end{aligned} \quad (\text{X.14})$$

Para cambiar de uno a otro sistema de coordenadas necesitamos conocer la relación entre las derivadas parciales respecto de las variables en  $S$  y las derivadas parciales respecto de las variables en  $S'$ . La relación matemática para  $\partial/\partial x$  es:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} \quad (\text{X.15})$$

siendo análoga para  $\partial/\partial y$ ,  $\partial/\partial z$  y  $\partial/\partial t$ . De las ecuaciones TL se obtiene:

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \gamma, \quad \frac{\partial y'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial t'}{\partial x} = -\frac{\gamma v}{c^2} \quad (\text{X.16})$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \gamma \left( \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right) \quad (\text{X.17})$$

y, actuando de forma semejante, obtendremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z'} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \gamma \left( \frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right) \end{aligned} \quad (\text{X.18})$$

El siguiente paso sería sustituir (X.17) y (X.18) en las ecuaciones (X.13). Por ejemplo, si sustituimos en la tercera ecuación (X.13), resultará:

$$\frac{\partial E_{x'}}{\partial z'} - \frac{\partial}{\partial x'} \left[ \gamma (E_z + v B_y) \right] = -\frac{\partial}{\partial t'} \left[ \gamma \left( B_y + \frac{v E_z}{c^2} \right) \right] \quad (\text{X.19})$$

que coincidirá con la tercera ecuación (X.14) únicamente si se verifican las igualdades:

$$\begin{aligned} E_{x'} &= E_x \\ E_z' &= \gamma (E_z + v B_y) \\ B_y' &= \gamma \left( B_y + \frac{v E_z}{c^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{X.20})$$

Por lo tanto, resulta imprescindible en este momento comprobar si, efectivamente, los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  se transforman de este modo al pasar del sistema  $S$  al  $S'$ .

## 8. LAS TRANSFORMACIONES DE “E” Y “B”

Para obtener las expresiones de las transformaciones de los campos eléctrico y magnético vamos a considerar la fuerza de Lorentz que actuaría sobre una carga eléctrica  $q$  (que es invariante al cambiar de sistema de referencia) tal y como sería medida por los observadores en  $S$  y en  $S'$ . A continuación aplicaremos las ecuaciones que relacionan las componentes de las fuerzas en ambos sistemas de referencia.

Consideremos que  $q$  está en reposo respecto de  $S'$ . Entonces, los campos  $\mathbf{E}'$  y  $\mathbf{B}'$ , medidos por este observador, ejercerán una fuerza electromagnética sobre  $q$ ,  $\mathbf{F}'=q\mathbf{E}'$ . Por otra parte, respecto de  $S$ , la carga se mueve con una velocidad  $\mathbf{v}=v\mathbf{i}$ , igual a la velocidad de  $S'$  respecto de  $S$ . De acuerdo con  $S$ , la fuerza electromagnética sobre  $q$ , debida a los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  que dicho observador mide, será  $\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$ . Relacionando las componentes de estas fuerzas de acuerdo con las expresiones (X.11), tendremos:

$$\begin{aligned} qE_x' &= qE_x \Rightarrow E_x' = E_x \\ qE_y' &= \gamma q(E_y - vB_z) \Rightarrow E_y' = \gamma(E_y - vB_z) \\ qE_z' &= \gamma q(E_z + vB_y) \Rightarrow E_z' = \gamma(E_z + vB_y) \end{aligned} \quad (\text{X.21})$$

Como vemos, hemos obtenido las dos primeras igualdades (X.20). Para obtener la transformación de las componentes del campo magnético se considera que la carga  $q$  se mueve respecto del sistema  $S'$  en las direcciones perpendiculares,  $y'$  y  $z'$ . El resultado final es:

$$\begin{aligned} B_x' &= B_x \\ B_y' &= \gamma \left( B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) \\ B_z' &= \gamma \left( B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) \end{aligned} \quad (\text{X.22})$$

Como vemos, las ecuaciones primera y tercera de (X.21) y segunda de (X.22) coinciden con las (X.20). Por lo tanto, las ecuaciones de Maxwell son invariantes frente a TL.

Además, un resultado especialmente interesante, que justifica el análisis realizado en este capítulo, es que los campos eléctrico y magnético son interdependientes. Es decir, el hecho de que un observador detecte un campo

eléctrico y/o un campo magnético es función de su estado de movimiento, resultando que los valores detectados por él están relacionados con los valores de *ambos* campos detectados por otro observador en un estado de movimiento diferente.

No sólo es el interés teórico el que se obtiene de la conexión entre **E** y **B**, sino que las relaciones (X.21) y (X.22) tienen una aplicación práctica evidente: si hemos de calcular el campo electromagnético creado por determinadas fuentes, siempre podremos cambiar a un sistema de referencia donde los cálculos sean más sencillos y, después, aplicar las ecuaciones citadas para obtener el campo en el sistema primitivo. Veremos, a continuación un sencillo ejemplo que ilustrará esta afirmación.

## 9. CAMPO CREADO POR UNA CARGA QUE SE DESPLAZA UNIFORMEMENTE

Sea una carga eléctrica  $q$  que se desplaza uniformemente, con una velocidad  $\mathbf{u}=\mathbf{u}\mathbf{i}$  respecto de un SRI, S. Se pide calcular el campo electromagnético creado por dicha carga.

Intentar resolver el problema directamente es una tarea ardua. Sin embargo, podemos cambiar de SRI y tomar aquél en el que la carga está permanentemente en reposo. Llamaremos  $S'$  al sistema en cuestión, el cuál se desplaza, en configuración estándar (Figura X.1) respecto del sistema S con una velocidad  $\mathbf{u}=\mathbf{u}\mathbf{i}$ . Por lo tanto, el campo electromagnético creado por  $q$  respecto de  $S'$  será:

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}'}{r'^3} \\ \vec{B}' &= 0\end{aligned}\tag{X.23}$$

Las componentes de este campo, considerando que  $\mathbf{r}'=x'\mathbf{i}'+y'\mathbf{j}'+z'\mathbf{k}'$ , son:

$$\begin{aligned}
 E_x' &= \frac{q\gamma(x-ut)}{4\pi\epsilon_0 \left[ \gamma^2(x-ut)^2 + y^2 + z^2 \right]^{3/2}} \\
 E_y' &= \frac{qy}{4\pi\epsilon_0 \left[ \gamma^2(x-ut)^2 + y^2 + z^2 \right]^{3/2}} \\
 E_z' &= \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 \left[ \gamma^2(x-ut)^2 + y^2 + z^2 \right]^{3/2}} \\
 B_x' &= B_y' = B_z' = 0
 \end{aligned}
 \tag{X.24}$$

y, aplicando las ecuaciones simétricas a las (X.21) y (X.22), obtendremos las componentes del campo electromagnético respecto de S, que es lo que se pedía:

$$\begin{aligned}
 E_x &= E_x', & E_y &= \gamma E_y', & E_z &= \gamma E_z' \\
 B_x &= 0, & B_y &= -\frac{u}{c^2} E_z', & B_z &= \frac{u}{c^2} E_y'
 \end{aligned}
 \tag{X.25}$$

## Bibliografía

ALONSO, M., Finn, E.J., Física, Addison-Wesley, Delaware 1995.

GETTYS, W.E., Keller, F.J., Skove, M.J., Física Clásica y Moderna, McGraw-Hill, Madrid 1991.

HAYTT, W.H., Teoría Electromagnética, McGraw-Hill, México 1992.

RESNICK, R., Introducción a la Teoría Especial de la Relatividad, Limusa, México 1977.

SEARS, F.W., Zemansky, M.W., Young, H.D., Freedman, R.A., Física Universitaria, Pearson Educación, México 1999.

SERWAY, R.A., Jewett, J.W., Principles of Physics, Harcourt, Philadelphia 2002.

TIPLER, P.A., Física para la Ciencia y la Tecnología, Reverté, Barcelona 1999.



La obra que aquí se presenta es el resultado de la experiencia docente del autor en la asignatura de Física de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales.

Fundamentalmente, el tiempo limitado con el que cuenta el alumno para dedicarlo a un estudio sosegado de la materia, ha llevado al autor a elaborar un libro de texto que ayude al estudiante a seguir las clases con mayor efectividad. Los libros de Física General responden al criterio de ser válidos para cursos introductorios de Física pertenecientes al amplio abanico de las distintas carreras científico-técnicas. Desgraciadamente, el nivel de especialización que esta asignatura ha adquirido en las diferentes carreras técnicas que se pueden estudiar en la UMA, convierte estas obras de carácter general en excesivamente extensas. El alumno reclama un texto más específico, que le permita seguir con comodidad la marcha del curso, aunque cuente con aquellos libros de Física General para ampliar o contrastar la información recibida en clase.

Puesto que el nivel de “especialización”, de la asignatura de Física (que, para destacar su función, se denominan en muchos casos Fundamentos físicos de la Ingeniería...) ha llevado a que, dependiendo de la titulación, el programa de la asignatura tenga un contenido mayor en determinada o determinadas partes de la Física, el autor ha decidido subdividir esta obra, que tiene el título general de “Física Básica”, en volúmenes, cada uno dedicado a cada una de las partes clásicas de esta Ciencia.

Este primer volumen está dedicado al estudio del Electromagnetismo. La “filosofía” de este libro es la siguiente: partiendo de un conocido teorema de Teoría de Campos debido a Helmholtz, que establece que un campo de fuerzas queda determinado cuando se conocen los valores de su divergencia y de su rotacional, se hace un recorrido por los diferentes temas que tradicionalmente se estudian en la parte de Electromagnetismo. Se establece una clara distinción entre campos estáticos y campos dependientes del tiempo. Esta última cualidad lleva, finalmente, a la formulación de un campo electromagnético unificado.

