

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA
INDUSTRIAL
Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Análisis de robustez de un estimador basado en redes
neuronales de Hopfield en un sistema dinámico no lineal

Robustness analysis of an estimator based on Hopfield
neural networks in nonlinear dynamical systems

Autora: D.^a Francisca Martín Vergara
Director: Dr. D. Miguel A. Atencia Ruiz
Tutor: Dr. D. Fernando Vidal Verdú
Titulación: Máster en Ingeniería Mecatrónica

MÁLAGA, octubre de 2014

"Basta un poco de espíritu aventurero para estar siempre satisfechos, pues en esta vida, nada sucede como deseábamos, como suponíamos, ni como teníamos previsto."

Noel Clarasó

Índice

Índice

1. Introducción	1
2. Presentación del problema	1
3. Modelo de parametrización lineal	3
4. Métodos de estimación basados en el error de predicción	6
4.1. Estimador del gradiente	7
4.2. Estimador mínimos cuadrados estándar	8
4.3. Mínimos cuadrados con factor de olvido exponencial	9
4.4. Mínimos cuadrados con olvido exponencial variable	10
4.5. Estimador basado en redes neuronales de Hopfield	11
5. Descripción de los casos de estudio	12
5.1. Caso de estudio 1: péndulo simple con rozamiento bajo	12
5.2. Caso de estudio 2: péndulo simple con rozamiento alto	13
5.3. Caso de estudio 3: péndulo simple con rozamiento variable	13
5.4. Caso de estudio 4: ruido blanco en los estimadores	13
6. Resultados	14
6.1. Caso de estudio 1: péndulo simple con rozamiento bajo	14
6.1.1. Aplicación del método del gradiente	16
6.1.2. Aplicación del método de mínimos cuadrados estándar	18
6.1.3. Aplicación del método de mínimos cuadrados con factor de olvido	20
6.1.4. Aplicación del método de mínimos cuadrados con olvido exponencial variable	25
6.1.5. Aplicación del estimador basado en redes neuronales de Hopfield	26
6.1.6. Comparación de los métodos	28
6.2. Caso de estudio 2: péndulo simple con rozamiento alto	29
6.2.1. Aplicación del método del gradiente	31
6.2.2. Aplicación del método de mínimos cuadrados	31
6.2.3. Aplicación del método de mínimos cuadrados con factor de olvido	35
6.2.4. Aplicación del método de mínimos cuadrados con olvido exponencial variable	37

6.2.5.	Aplicación del estimador basado en redes neuronales de Hopfield	42
6.2.6.	Comparación de los métodos	44
6.3.	Caso de estudio 3: péndulo simple con rozamiento variable	45
6.3.1.	Aplicación del método del gradiente	46
6.3.2.	Aplicación del método de mínimos cuadrados	49
6.3.3.	Aplicación del método de mínimos cuadrados con factor de olvido	51
6.3.4.	Aplicación del método de mínimos cuadrados con olvido exponencial variable	53
6.3.5.	Aplicación del estimador basado en redes neuronales de Hopfield	55
6.3.6.	Comparación de los métodos	57
6.4.	Caso de estudio 4: ruido blanco en los estimadores	58
6.4.1.	Sistemas con rozamiento bajo	58
6.4.2.	Sistemas con rozamiento alto	58
6.4.3.	Sistemas con rozamiento variable	61
7.	Discusión	63
8.	Conclusiones y trabajos futuros	64
	Bibliografía	65

1. Introducción

La estimación de parámetros puede definirse como la identificación de las características de un sistema a partir de un conjunto de medidas u observaciones. Esta disciplina está presente en prácticamente todas las áreas de la ingeniería, pues a menudo se utilizan modelos matemáticos para describir fenómenos de la vida real, así como experimentos que validan dichos modelos. Con bastante frecuencia, los modelos contienen un número de parámetros que no se pueden medir o calcular directamente mediante la aplicación de las leyes establecidas y, por lo tanto, deben estimarse a partir de datos experimentales.

El presente Trabajo Fin de Máster pretende analizar la robustez en métodos de estimación de parámetros en sistemas dinámicos no lineales. Para hacer frente a los problemas de estimación de parámetros en sistemas dinámicos no lineales será preciso hacer uso, entre otras, de dos grandes grupos de técnicas numéricas: optimización y solución de ecuaciones diferenciales. Los métodos de estimación propuestos se van a implementar mediante simulaciones por ordenador y las estimaciones serán evaluadas en diferentes condiciones de medición de ruido.

2. Presentación del problema

Los modelos son representaciones simplificadas del conocimiento de la dinámica de un sistema. El principal problema que se presenta es la obtención del modelo de un sistema. Dicha obtención basada en datos experimentales se conoce como identificación. Se trata de un proceso iterativo con varias fases cuyo éxito depende de ciertas propiedades, como puede ser la calidad de las señales de entrada o la identificabilidad.

Los pasos a seguir para la identificación de sistemas son los siguientes:

- Planificación de experimentos.
- Realización de experimentos y registro de datos.
- Selección del tipo de modelo.
- Eficiencia del modelo.
- Estimación de los parámetros del modelo.
- Validación del modelo.

En la Figura 1, se muestra el diagrama de un modelo cíclico de diseño, desarrollo y validación de modelos matemáticos. Se supone que el modelo está basado en los principios de la ingeniería y se construye a partir del conocimiento físico.

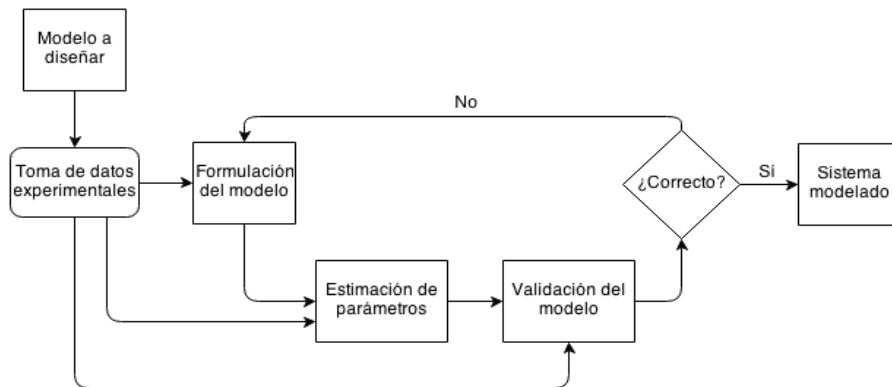


Figura 1: Pasos a seguir para la identificación de sistemas.

La información obtenida de los experimentos reales se utiliza para estimar los parámetros desconocidos del modelo. Esta es una de las tareas en que se puede descomponer el problema de la identificación, y que se aborda mediante los diferentes métodos de estimación [9]. La mayoría de los métodos de estimación de parámetros dependen del conocimiento de las medidas de error, es decir, la diferencia entre la salida real y la salida estimada.

El control adaptativo se creó en la década de los años 50 y aún hoy en día es una disciplina pujante en cuanto a actividad investigadora con cientos de artículos y varios libros publicados al año. En sus 60 años de existencia, la teoría del control adaptativo se ha convertido en una disciplina científica rigurosa y se ha pasado de soluciones heurísticas a formulaciones matemáticas rigurosas, de solucionar problemas básicos a tareas más exigentes para un amplio conjunto de sistemas, de problemas de existencia a aplicaciones orientadas a la robustez y el rendimiento. Una de las razones de esta popularidad y crecimiento tan rápido se debe a su principal objetivo: controlar sistemas con parámetros desconocidos [7]. Cuando existen parámetros desconocidos en un sistema dinámico (lineal o no lineal), una forma de disminuir esta incertidumbre es utilizando la estimación: deduciendo los valores de los parámetros a partir de las medidas conocidas de las señales de entrada y salida del sistema. Existen dos tipos de algoritmos para realizar la estimación de parámetros:

1. Estimación *offline*: se da cuando los parámetros son constantes y se tiene suficiente tiempo para realizar la estimación antes de controlar, es decir, se reúnen todos los datos de entrada-salida del sistema para a continuación, estimar los parámetros del modelo. En este caso, los parámetros estimados no varían con el tiempo.

2. Estimación *online*: ocurre cuando los parámetros varían durante la

operación, aunque sea muy lentamente. En este caso es necesario llevar un registro del valor de los parámetros. Es decir, se estiman los parámetros incluso cuando se generen nuevos datos durante el funcionamiento del modelo, por lo que el valor de los parámetros estimados puede variar con el tiempo. Los algoritmos de estimación *online* suelen ser recursivos, es decir, para estimar los valores de los parámetros con el paso del tiempo se utilizan las medidas y las estimaciones de los parámetros anteriores [8], lo que facilita la aproximación sucesiva al valor correcto de los parámetros.

Normalmente, los problemas en el contexto del control adaptativo incluyen parámetros que varían con el tiempo muy lentamente, por lo que los métodos de estimación *online* son más relevantes.

A continuación, se van a estudiar varios métodos básicos de estimación *online*. A diferencia de la mayoría de las discusiones sobre estimación de parámetros, se va a utilizar una formulación en tiempo continuo en lugar de tiempo discreto. Esto es así por el hecho de que los sistemas físicos no lineales son continuos por naturaleza. Además, si se utilizan grandes cantidades de datos en el análisis y el diseño, los sistemas de control digitales se pueden tratar como sistemas continuos en el tiempo. La disponibilidad de cómputo de gran cantidad de datos de forma barata permite el uso de modelos continuos en el tiempo.

Se debe tener en cuenta que aunque la finalidad principal de los estimadores *online* sea proporcionar los parámetros estimados para autoajustar el sistema, también se pueden utilizar para otros propósitos como la detección de errores o la supervisión de carga.

3. Modelo de parametrización lineal

La idea principal de la estimación de parámetros es extraer información de los parámetros desde los datos disponibles del sistema. Por tanto, se necesita un modelo de estimación para relacionar los datos disponibles con los parámetros desconocidos, de forma parecida al ajuste de datos experimentales donde se necesita conjeturar la forma de una curva antes de encontrar los coeficientes específicos que la describen basándose en los datos.

Un modelo bastante general para las aplicaciones de estimación de parámetros en forma de parametrización lineal es:

$$y(t) = W(t) \theta \tag{1}$$

donde:

- El vector $y(t)$ es un vector n -dimensional que contiene las salidas del sistema.

- La matriz $W(t)$ es una matriz $n \cdot m$, denominada matriz de señales.
- El vector θ es un vector m -dimensional que contiene los parámetros desconocidos que se desean estimar.

Nótese que tanto $y(t)$ como $W(t)$ deben ser conocidos a partir de las medidas de las señales del sistema y, por tanto, la única cantidad desconocida son los parámetros que contiene el vector θ .

De esta forma, se hace que la ecuación (1) sea simplemente una ecuación lineal en términos del valor desconocido θ , existiendo una ecuación para cada instante de tiempo t . Así, si se tienen las medidas continuas de $y(t)$ y de $W(t)$ en un intervalo de tiempo, se tendrá un número infinito de ecuaciones de la forma de la ecuación (1). En la práctica, evidentemente, solo se dispondrá de los valores de $y(t)$ y de $W(t)$ en un número finito k de instantes de tiempo, dando lugar a k conjuntos de ecuaciones.

El objetivo de la estimación de parámetros es resolver esas k ecuaciones redundantes para los m parámetros desconocidos. De una forma más clara, a fin de poder estimar los m parámetros, se necesitarán al menos un total de m ecuaciones. Sin embargo, para estimar los parámetros de θ de una forma correcta con la presencia de ruido y error en el modelado, se necesitarán más datos.

En la estimación *offline*, una vez que se tienen los datos de y y de W para un determinado intervalo de tiempo, se resuelven las ecuaciones una vez, obteniendo un único valor de estimación. En cambio, en la estimación *online*, una vez que se resuelve la ecuación de forma recursiva, implica que el valor estimado de $\hat{\theta}$ se actualiza cada vez que un nuevo conjunto de datos y y W esté disponible.

Según [10], cómo de bien y de rápido se estimen los parámetros de θ depende de dos aspectos fundamentales:

1. El método de estimación utilizado.
2. El contenido de los datos de la salida del sistema $y(t)$ y de la matriz de señales de entrada $W(t)$.

Cualquier sistema lineal puede ser reescrito en la forma de la ecuación (1), después de filtrar ambos lados de la ecuación del sistema mediante un filtro exponencial estable del orden adecuado. Al igual que con los sistemas lineales, la dinámica de la mayoría de los sistemas no lineales también puede ser reescrita en la forma de la ecuación (1). Un ejemplo simple de sistema no lineal es el del péndulo simple, donde la velocidad de entrada es lineal en términos de la masa y el coeficiente de rozamiento. Para este caso, la dinámica de este sistema viene dada por la ecuación autónoma no lineal:

$$m L^2 \frac{d^2\theta}{dt} + b \frac{d\theta}{dt} + m g L \sin \theta = 0 \quad (2)$$

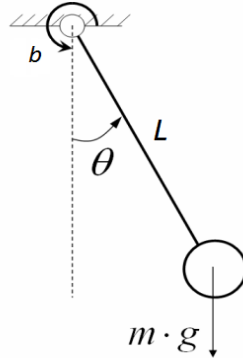


Figura 2: Representación del péndulo simple.

donde L es la longitud de la cuerda, m es la masa, b es el coeficiente de rozamiento y g es la constante de gravedad. Este ejemplo se ilustra en la figura 2.

Si se considera que $x_1 = \theta$, $x_2 = \frac{d\theta}{dt}$, la ecuación en el espacio de estados correspondiente es:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{b}{mL^2}x_2 - \frac{g}{L}\sin x_1 \end{aligned} \quad (3)$$

Para parametrizar linealmente esta ecuación, es decir, convertirla a la forma $y(t) = W(t)\theta$, se puede reescribir la ecuación en forma de producto de matrices, resultando:

$$\frac{dx_2}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin x_1 & -x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{g}{l} \\ \frac{b}{mL^2} \end{pmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{dx_2}{dt} \\ W(t) &= \begin{pmatrix} -\sin x_1 & -x_2 \end{pmatrix} \\ \theta &= \begin{pmatrix} \frac{g}{l} \\ \frac{b}{mL^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

Para algunas dinámicas más complicadas, puede que sea necesario aplicar filtros y transformar parámetros para poder expresarlos en la forma de la ecuación (1).

Para concluir, puede decirse que, desde el punto de vista de la estimación de parámetros, lo que se busca es una relación lineal entre los datos conocidos y los parámetros desconocidos.

4. Métodos de estimación basados en el error de predicción

Antes de mostrar los diferentes métodos básicos para la estimación de parámetros, se va a explicar el concepto de error de predicción. Se va a suponer que el vector de parámetros θ de la ecuación (1) es desconocido y su estimación va a ser $\hat{\theta}(t)$ en el instante de tiempo t . Se puede predecir el valor de la salida $y(t)$ basada en el parámetro estimado y el modelo:

$$\hat{y}(t) = W(t)\hat{\theta}(t) \quad (5)$$

donde $\hat{y}(t)$ es la salida estimada en el tiempo t . La diferencia entre la salida estimada y la salida real $y(t)$ es lo que se denomina error de predicción:

$$e_t(t) = \hat{y}(t) - y(t) \quad (6)$$

Todos los métodos de estimación que se van a mostrar están basado en este error. Estos estimadores pertenecen a los denominados estimadores basados en el error de predicción. El error de predicción está relacionado con el error de la estimación de parámetros, como puede verse:

$$e_t = W\hat{\theta} - W\theta = W\tilde{\theta} \quad (7)$$

donde $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$.

A continuación se va a discutir la motivación, formulación y propiedades de los siguientes métodos:

1. Estimador del gradiente.
2. Estimador mínimos cuadrados estándar.
3. Mínimos cuadrados con factor de olvido exponencial.
4. Mínimos cuadrados con olvido exponencial variable.
5. Estimador basado en las redes neuronales de Hopfield.

Nótese que en el análisis de convergencia de estos estimadores se va a suponer que los parámetros reales son constantes, por lo que puede obtenerse una idea del comportamiento del estimador. Sin embargo, siempre se debe tener en cuenta que se está trabajando con parámetros variables en el tiempo.

Los sistemas no lineales presentan ciertos fenómenos que no se evidencian al estudiar los sistemas lineales [6]. Una de estas diferencias es la existencia de múltiples puntos de equilibrio aislados. En un sistema lineal puede darse el caso

de que tenga un solo punto de equilibrio aislado, y por tanto un solo estado de régimen estacionario que (si el punto es asintóticamente estable) atrae al estado del sistema independientemente de su estado inicial. Pero en un sistema no lineal pueden darse varios puntos de equilibrio, y la convergencia a uno estable depende del estado inicial, por lo que es conveniente estudiar la estabilidad de los diferentes puntos de equilibrio de los sistemas no lineales. Para ello se presenta el concepto de estabilidad en el sentido de Lyapunov.

Un punto de equilibrio de un sistema dinámico es estable en el sentido de Lyapunov si todas las soluciones que nacen en las cercanías del punto de equilibrio permanecen en dicha cercanía. En otro caso, el punto de equilibrio se denomina inestable. Dicho punto de equilibrio se llama asintóticamente estable si las soluciones, además de permanecer cercanas al punto de equilibrio, convergen hacia el punto de equilibrio a medida que pasa el tiempo. La estabilidad asintótica de un punto de equilibrio puede demostrarse por la existencia de una función de Lyapunov que, entre otras propiedades técnicas, se caracteriza por decrecer a lo largo de las trayectorias del sistema, a medida que transcurre el tiempo.

A continuación, se muestran en detalle los estimadores que se van a estudiar en este Trabajo Fin de Máster.

4.1. Estimador del gradiente

Es el más simple de todos los estimadores *online*. La idea básica en el estimador del gradiente es que los parámetros se deben actualizar, por lo que el error de predicción se reduce. Esta idea se implementa actualizando los parámetros en la dirección opuesta a la del gradiente, con respecto a los parámetros, del error de predicción al cuadrado, es decir:

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -p_0 \frac{\partial e_t^T}{\partial \hat{\theta}} e_t \quad (8)$$

donde p_0 es un número positivo denominado ganancia del estimador. Esta ecuación puede ser reescrita de la forma:

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -p_0 W^T e_t \quad (9)$$

Para ver las propiedades de este estimador, se utilizan las ecuaciones (7) y (9) para obtener:

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dt} = -p_0 W^T W \tilde{\theta} \quad (10)$$

Si se utiliza la función de Lyapunov candidata:

$$\vartheta = \tilde{\theta}^T \tilde{\theta} \quad (11)$$

cuya derivada es:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -2p_0 \tilde{\theta}^T W^T W \tilde{\theta} \leq 0 \quad (12)$$

se concluye que el estimador del gradiente siempre es estable. Nótese que la función de Lyapunov que se ha escogido es el error del parámetro al cuadrado, con lo que se observa que la magnitud del error de los parámetros siempre está decreciendo.

No obstante la existencia de función de Lyapunov, la convergencia de los parámetros estimados hacia los parámetros reales depende de la excitación de la señal. La tasa de variación de los parámetros reales también afecta a la estimación, ya que cuanto más rápido varíen, más complicado será para el estimador converger hacia el valor correcto. Por tanto, la calidad de la estimación de los parámetros con el método del gradiente depende de varios factores:

1. Del nivel de excitación de la matriz de señales W .
2. Del valor de la ganancia del estimador p_0 .
3. De la variación de los parámetros.

4.2. Estimador mínimos cuadrados estándar

Con este método se pretende minimizar la diferencia entre los datos reales y los datos estimados. En este método la estimación de los parámetros se genera minimizando el error total de la predicción:

$$J = \int_0^t \|y(\tau) - W(\tau) \hat{\theta}(\tau)\|^2 d\tau \quad (13)$$

con respecto a $\hat{\theta}(t)$. Como esto implica el análisis de todos los datos anteriores, este estimador tiene la ventaja de que promedia los efectos del ruido medido. Los parámetros estimados en $\hat{\theta}$ cumplen:

$$\left(\int_0^t W^T(\tau) W(\tau) d\tau \right) \hat{\theta}(t) = \int_0^t W^T(\tau) y(\tau) d\tau \quad (14)$$

Sea la matriz $P(t)$:

$$P(t) = \left(\int_0^t W^T(\tau) W(\tau) d\tau \right)^{-1} \quad (15)$$

A la hora de computar esta matriz, para mejorar la eficiencia computacional, es preferible que el cálculo de P se ejecute de forma recursiva en lugar de evaluar la integral en cada instante de tiempo. Esto implica reemplazar la ecuación (15) por la ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt} (P^{-1}(t)) = W^T(t) W(t) \quad (16)$$

Diferenciando (14) y utilizando (15) y (16), se obtiene que la ley de actualización de los parámetros es:

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -P(t) W^T(t) e_t \quad (17)$$

siendo $P(t)$ la matriz de ganancia del estimador, similar que el caso del estimador del gradiente. En la implementación del estimador, es conveniente actualizar la ganancia P directamente, en vez de utilizar (16) y luego realizar la inversa de la matriz. Si se deriva la matriz identidad:

$$\frac{d}{dt} (P P^{-1}) = \frac{dP}{dt} P^{-1} + P \frac{d}{dt} (P^{-1}) = 0 \quad (18)$$

se obtiene que:

$$\frac{dP}{dt} = -P W^T W P \quad (19)$$

que, junto con la ecuación (17) forman la definición del método de mínimos cuadrados.

Si se utilizan las ecuaciones (18) y (19) para estimación *online*, se debe proporcionar un valor inicial a las estimaciones y a la matriz de ganancias. Si se dispone de algún conocimiento previo sobre el valor de los parámetros, se debe utilizar la mejor estimación conocida *a priori* para inicializar $\hat{\theta}$. Por su parte, para escoger la matriz de ganancia inicial $P(0)$ se recomienda escoger los valores más altos, siempre que no sean tan altos que la sensibilidad al ruido destruya la estabilidad del estimador. Por simplicidad esta matriz se recomienda que sea diagonal.

4.3. Mínimos cuadrados con factor de olvido exponencial

El olvido exponencial de datos es una técnica muy útil relacionada con los parámetros que cambian con el tiempo. Se basa en que los datos anteriores están generados por parámetros pasados, por lo que deben ser descartados cuando se utilicen para la estimación de los parámetros actuales. A continuación se describe la formulación general del método de mínimos cuadrados con factor de olvido variable en el tiempo.

Si se incorpora el factor de olvido exponencial de datos a la estimación de

mínimos cuadrados se tiene que:

$$J = \int_0^t e^{-\int_r^t \lambda(s) ds} \|y(\tau) - W(\tau)\hat{\theta}(\tau)\|^2 d\tau \quad (20)$$

donde $\lambda(s) \geq 0$ es el factor de olvido variable con el tiempo. Se observa que el término exponencial de la integral representa la ponderación de los datos. Una forma fácil de mostrar la actualización de los parámetros es de la misma forma que en la ecuación (17), pero en este caso la matriz de ganancias sería:

$$\frac{d}{dt} (P^{-1}) = -\lambda P^{-1} + W^T W \quad (21)$$

Para mejorar la eficiencia a la hora de realizar la implementación de esta ecuación, es preferible utilizar:

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P - P W^T W P \quad (22)$$

Se observa que el factor de olvido exponencial conduce a la convergencia exponencial de los parámetros estimados, debido a que $\lambda(t)$ debe ser mayor o igual a una constante positiva.

4.4. Mínimos cuadrados con olvido exponencial variable

Para mantener los beneficios del método con factor de olvido, sobre todo la capacidad de seguimiento de los parámetros variables, evitando la posibilidad de la no acotación de la ganancia, es preferible ajustar la variación del factor de olvido de forma que el olvido de datos se active cuando W sea suficientemente excitada y se suspenda cuando W no lo sea.

Dado que la importancia de la matriz de ganancia P es un indicador del nivel de excitación de W , es razonable correlacionar la variación del factor de olvido con $\|P(t)\|$. Se ha escogido una técnica específica para conseguir ese objetivo:

$$\lambda(t) = \lambda_0 \left(1 - \frac{\|P\|}{k_0} \right) \quad (23)$$

siendo λ_0 y k_0 constantes positivas que representan el ratio máximo de olvido y la magnitud máxima de la matriz de ganancia, respectivamente.

El factor de olvido de la ecuación (23) implica el olvido de datos con un factor λ_0 si la norma de P es pequeña, reduciendo la velocidad de olvido si la norma de P llega a ser muy grande y deteniéndose si la norma alcanza el límite superior especificado. Un valor muy alto de λ_0 significa un olvido muy rápido, lo que implica tanto la capacidad de estimar con mayor precisión la variación de los parámetros como mayores oscilaciones en los parámetros estimados. Por

tanto, escoger un λ_0 representa una compensación entre la velocidad de rastreo y el nivel de oscilación de los parámetros estimados. La magnitud máxima de la matriz de ganancia k_0 afecta a la velocidad de actualización de los parámetros y también a los efectos de perturbación en la predicción del error.

Para ser consistentes con el objetivo de acotar la ganancia, se ha escogido que:

$$\|P(0)\| \leq k_0$$

y, por lo tanto, se define:

$$P(0) \leq k_0 I$$

En resumen, la aportación de este método consiste en que aquí el factor de olvido no es una constante, sino una función en el tiempo definida por la ecuación (23).

4.5. Estimador basado en redes neuronales de Hopfield

Este estimador basado en redes neuronales de Hopfield está inspirado en el método del gradiente. Fue definido por primera vez en [4] basándose en el modelo de optimización propuesto por Abe [1] y definido por la siguiente ecuación:

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_j a_{ij} s_j - b_i \quad (24)$$

siendo

$$s_i(t) = \tanh\left(\frac{p_i(t)}{\beta}\right) \quad (25)$$

donde p_i es la entrada a la neurona i , s_i es el estado de la neurona i y β es un parámetro para controlar la pendiente de la tangente hiperbólica. Los valores de la matriz $A = (a_{ij})$ y del vector $b = (b_i)$ se calculan de forma que la red converja a la solución del problema planteado. Tal y como se indica en [5], la capacidad para realizar optimización de las redes de Hopfield proviene del hecho de que son sistemas dinámicos estables, lo que se puede probar con la existencia de una función de Lyapunov para la red neuronal definida en las ecuaciones (24) y (25), cuya forma es la siguiente:

$$V = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} s_i s_j + \sum_{i=1}^n I_i s_i \quad (26)$$

El proceso de diseño de una red de Hopfield para optimización consiste en identificar la función de Lyapunov dada por la ecuación (26) con la función objetivo del problema dado, obteniendo de esa identificación los valores de las constantes a_{ij} , b_i . Una gran ventaja que presenta la formulación de Abe es la forma multi-

nomial de la función de Lyapunov, como se muestra en la ecuación (26), ya que suele coincidir con la función objetivo de muchos problemas de optimización.

Para aplicar las redes de Hopfield a estimación de parámetros, se toma como función objetivo a minimizar el error de predicción $V = \frac{1}{2} e_t^T e_t$, siendo $e_t = W\hat{\theta} - y$, como se definió en la ecuación (7). Entonces, tras una manipulación algebraica, se obtienen los siguientes valores:

$$A = -W^T W \quad (27)$$

y

$$b = -W^T y \quad (28)$$

Hay que tener en cuenta que, debido a la presencia de la función tangente hiperbólica en la ecuación (25), el modelo de Hopfield solo puede proporcionar una estimación en el intervalo $(-1, 1)$. En caso de que se presuponga que los valores de los parámetros reales están fuera de ese rango, será preciso hacer una traslación y un cambio de escala.

5. Descripción de los casos de estudio

A continuación, se va a estudiar el comportamiento de los métodos de estimación explicados en el apartado anterior en varios ejemplos reales, concretamente en un péndulo simple. Se ha realizado un estudio para tres casos diferentes, dependiendo del rozamiento: cuando es muy bajo, cuando es muy alto y cuando es variable. Además, para cada uno de estos tres casos, se ha ido variando las ganancias para poder analizar el comportamiento de los estimadores.

5.1. Caso de estudio 1: péndulo simple con rozamiento bajo

El sistema en estudio se definió en la sección 2, siendo ilustrado por la figura 2. Como se vio allí, este sistema queda parametrizado linealmente en la forma $y = W\theta$ si se define:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{dx_2}{dt} \\ W(t) &= \begin{pmatrix} -\sin x_1 & -x_2 \end{pmatrix} \\ \theta &= \begin{pmatrix} \frac{g}{l} \\ b \\ mL^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

Para este caso de estudio se va a considerar que el coeficiente de rozamiento

que afecta al sistema va a ser muy bajo, es decir, el péndulo comenzará a oscilar y tardará bastante tiempo en detenerse, por lo que el sistema estará continuamente excitado.

Cabe destacar que este tipo de sistemas produce un movimiento oscilatorio armónico y que, a medida que transcurre el tiempo, debido al coeficiente de rozamiento, la amplitud del sistema tiende a disminuir muy lentamente, diciéndose en este caso que el movimiento es amortiguado.

5.2. Caso de estudio 2: péndulo simple con rozamiento alto

El segundo ejemplo que se va a estudiar es exactamente igual que el caso anterior, con la salvedad de que en este caso se va a variar una de las variables de entrada al sistema: el coeficiente de rozamiento (b). Se va a considerar que dicho coeficiente de rozamiento va a tener un valor mucho más alto.

Para este caso en particular, al ser el rozamiento muy alto, el péndulo simple apenas oscilará y por tanto, se detendrá en un corto período de tiempo, debido a que el factor de rozamiento se encarga de retardar el sistema. Esto implica que el sistema no esté continuamente excitado y se cuente con pocos datos para poder realizar la estimación.

De esta forma, se va a observar la influencia de esta única variable en el comportamiento de los diferentes estimadores.

5.3. Caso de estudio 3: péndulo simple con rozamiento variable

Para este tercer caso de estudio, se va a considerar que el coeficiente de rozamiento sea variable con el tiempo, es decir, el coeficiente de rozamiento tendrá un valor distinto en cada instante temporal. Para ello, se va a hacer uso de una función definida por partes, donde al principio prácticamente no existe rozamiento, luego se empieza a incrementar linealmente, hasta que finalmente se estabiliza en un valor muy alto.

Este caso es el más parecido a un sistema físico real donde el factor de rozamiento puede variar durante el funcionamiento del sistema a lo largo del tiempo.

5.4. Caso de estudio 4: ruido blanco en los estimadores

En este cuarto caso de estudio, se va a introducir ruido blanco en el sistema dinámico no lineal que se está estudiando en este Trabajo Fin de Máster. Se va a realizar una comparación del efecto que produce la introducción de un

determinado ruido en el comportamiento de los diferentes métodos de estimación mencionados. En la realización de las diferentes pruebas, se va a considerar el ruido blanco, es decir, una señal aleatoria caracterizada porque sus valores en distintos instantes de tiempo no guardan correlación estadística entre sí. Para ello, se va a hacer uso de la función aleatoria *randn* proporcionada por Matlab y el resultado arrojado se va a sumar a la salida proporcionada por el sistema dinámico. Se va a estudiar cómo afecta en la estimación la introducción de ruido blanco cuando el rozamiento es bajo, alto y variable.

6. Resultados

En este apartado se van a mostrar los resultados y el comportamiento obtenidos tras la aplicación de los diferentes estimadores a cada uno de los casos de estudio expuestos. Para todos los ejemplos planteados, se parte de la base de que los valores iniciales del sistema van a ser iguales para todas las pruebas que se van a realizar.

Así, dependiendo del estimador que se vaya a utilizar, se van a ir variando los parámetros del mismo con el objetivo de observar y analizar el comportamiento de dicho estimador, buscando que se aproxime todo lo posible e incluso que calcule correctamente el valor de los parámetros reales.

En último lugar, se va a estudiar el comportamiento de todos los estimadores ante la presencia de un determinado ruido aleatorio.

6.1. Caso de estudio 1: péndulo simple con rozamiento bajo

Como se ha indicado anteriormente, el procedimiento que se ha seguido para realizar el estudio, ha sido fijar los parámetros reales e ir cambiando las variables de los diferentes estimadores. En primer lugar, en la figura `fig:pendulovp` se muestra la salida proporcionada (velocidad y posición) por las ecuaciones que definen la dinámica de funcionamiento del sistema físico del péndulo simple sometido a un rozamiento muy bajo. A continuación, en el apartado 6.1.1, se muestran varias estimaciones realizadas con el estimador del gradiente, variando en cada ejemplo el valor de la ganancia del estimador. Los resultados obtenidos se muestran en las figuras 4, 5 y 6.

En segundo lugar, se muestran las estimaciones realizadas por el estimador de mínimos cuadrados donde, al igual que en el caso anterior, para cada ejemplo se ha ido variando el valor de la matriz de ganancia inicial y cuyos resultados se pueden ver en las figuras 7, 8 y 9.

En el apartado 6.1.3 se estudia la estimación realizada con el estimador de

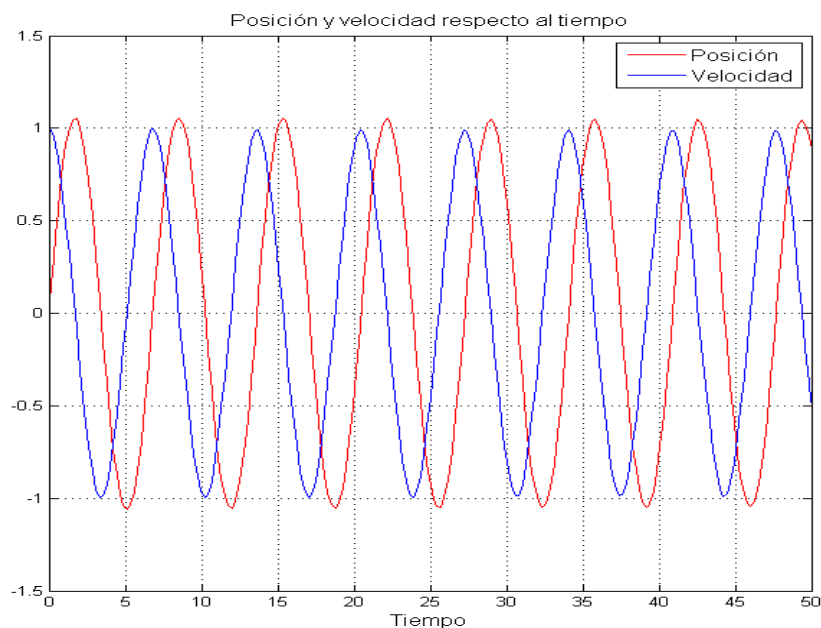


Figura 3: Salida del péndulo simple con un factor de rozamiento bajo.

mínimos cuadrados con factor de olvido. Para este caso se han realizado las mismas pruebas que para el estimador de mínimos cuadrados y se ha observado que, al igual que los otros dos estimadores, cuando el sistema está constantemente excitado se aproxima mucho más rápido a los valores reales, tal y como puede verse en las figuras 10, 11 y 12. En la figura 13 se realiza una comparación entre la salida proporcionada por los estimadores de mínimos cuadrados y mínimos cuadrados con factor de olvido para una misma matriz de ganancia inicial.

En cuarto lugar, en el apartado 6.1.4, se muestra el funcionamiento del estimador de mínimos cuadrados con olvido exponencial variable sobre el sistema del péndulo. En este caso, se tiene que ajustar debidamente el valor de la magnitud de la matriz de ganancia inicial para que el comportamiento de este estimador sea el más apropiado y se ajuste mejor al valor de los parámetros reales. Todo ello se ha ilustrado en las figuras 14, 15, 16 y 17.

A continuación, en el apartado 6.1.5, se puede consultar las salidas estimadas proporcionadas por el estimador basado en redes neuronales de Hopfield para diferentes valores de la matriz de ganancias. Los resultados se muestran en las figuras 18, 19 y 20.

Por último, en el apartado 6.1.6, se realiza una comparación del comportamiento de todos los métodos para el mismo ejemplo, ilustrado por la figura 21.

6.1.1. Aplicación del método del gradiente

Como se ha dicho, en la figura 3 puede observarse la salida proporcionada por la simulación de las ecuaciones del péndulo simple para el caso de un factor de rozamiento muy bajo. Se puede ver claramente que, a medida que discurre el tiempo, el péndulo oscila de forma regular tanto para la posición como para la velocidad y tarda un largo período de tiempo en detenerse, ya que la amortiguación es muy limitada. En el apartado 4.1 se ha explicado que, para aplicar el estimador del gradiente, se debe implementar la siguiente ecuación:

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -p_0 W^T e_t \quad (30)$$

donde $\hat{\theta}$ es el vector con los parámetros estimados, W es la matriz de señales, p_0 es un número positivo denominado ganancia del estimador y e_t es el error de predicción:

$$e_t = W(\hat{\theta} - \theta)$$

Para todas las simulaciones que se van a realizar, el diseño experimental que se ha considerado ha sido el mismo:

- Longitud de la cuerda $L = 10$.
- Masa del péndulo $m = 1$.
- Gravedad $g = 9,8$.
- Factor de rozamiento $b = 0,01$.
- Tiempo de simulación $t_f = 50$.
- Posición inicial del péndulo $x_0 = 0$.
- Velocidad inicial $v_0 = 1$.

Como se ha indicado anteriormente, para el caso del estimador del gradiente, se han realizado varias pruebas variando la constante de ganancia p_0 . En la figura 4 se observa el comportamiento del estimador con una ganancia muy baja ($p_0 = 1$), en la figura 5 con una ganancia un poco más alta ($p_0 = 10$) y por último, en la figura 6 con una ganancia muy alta ($p_0 = 1000$).

En las pruebas realizadas se ha observado que, si el sistema está continuamente excitado, es decir con una constante de rozamiento muy baja, y se permite un tiempo de ejecución alto, el estimador del gradiente finaliza calculando los parámetros estimados de forma correcta cuando la ganancia es muy baja. En cambio, a medida que se aumenta el valor de la ganancia, aparecen oscilaciones

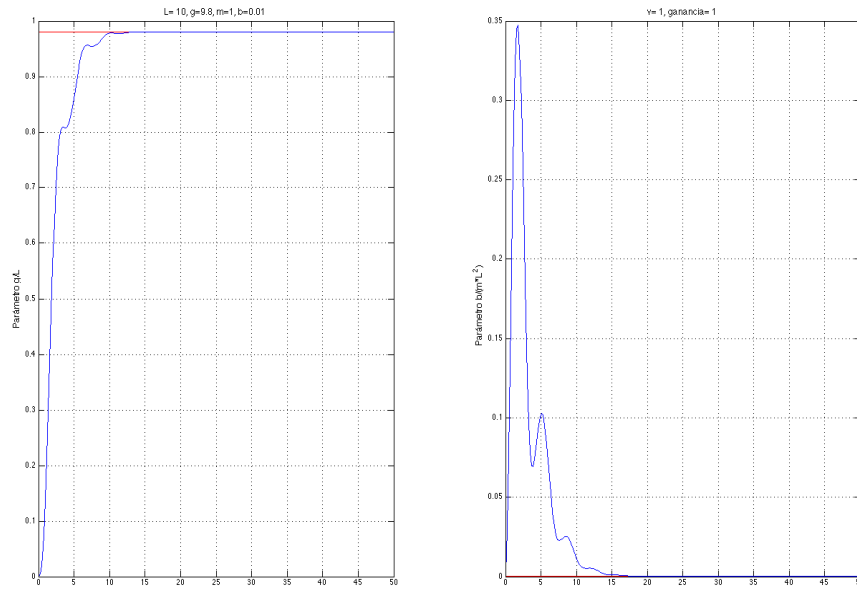


Figura 4: Método de gradiente para rozamiento bajo y ganancia $p_0 = 1$.

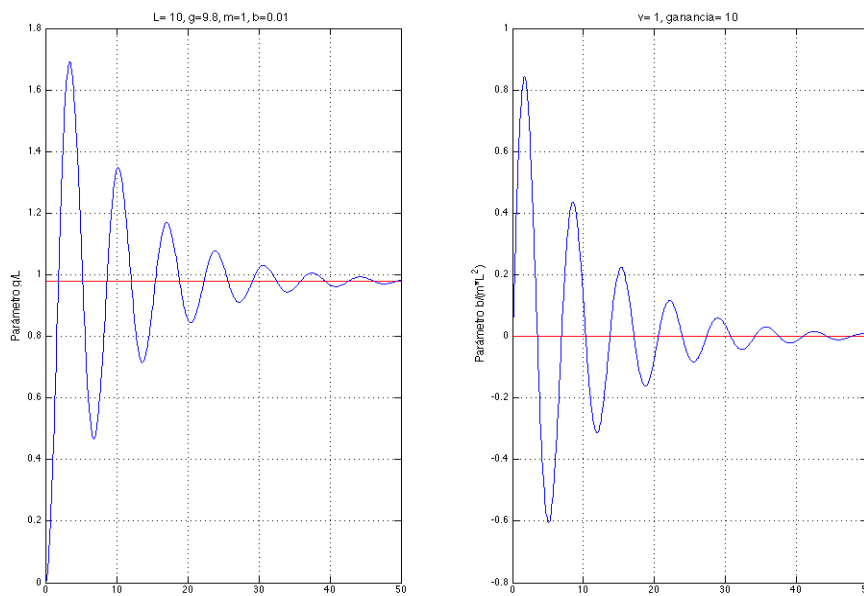


Figura 5: Método de gradiente para rozamiento bajo y ganancia $p_0 = 10$.

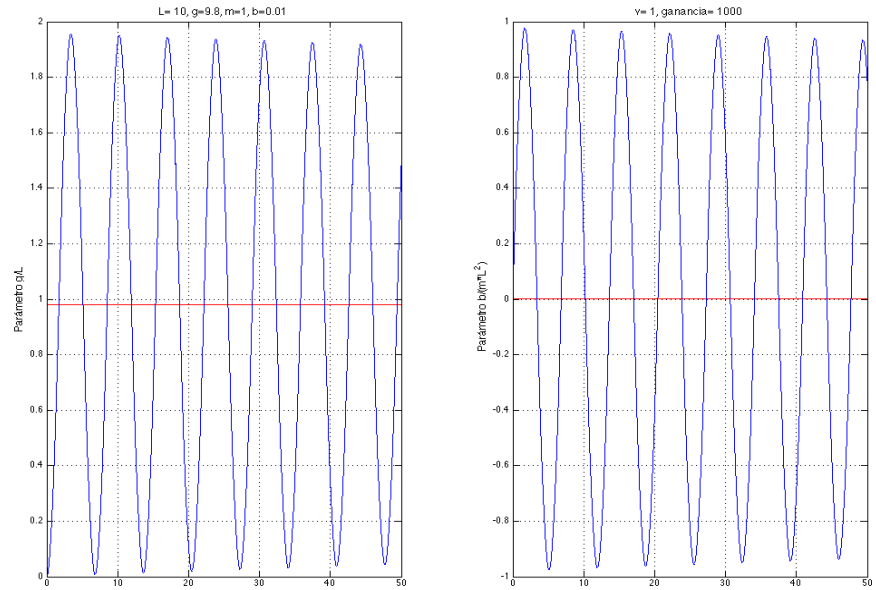


Figura 6: Método de gradiente para rozamiento bajo y ganancia $p_0 = 1000$.

que hacen que la convergencia a la estimación correcta sea más lenta. Finalmente, para un valor muy alto de la ganancia, la oscilación es tan sostenida que no se llega a alcanzar el valor de los parámetros reales.

En resumen, escoger el valor de la ganancia p_0 tiene una influencia fundamental en el comportamiento de este estimador ya que, en principio, podría suponerse que al incrementar el valor de la ganancia la estimación converge más rápidamente, pero llegado a cierto punto, si se continúa aumentando el valor de la ganancia, la estimación se vuelve oscilatoria y la convergencia más lenta. Este fenómeno se produce por la naturaleza del gradiente en la estimación, tal y como puede verse en la figura 6 donde se ha asignado una ganancia muy alta.

Además del efecto en la velocidad de convergencia, la elección de un determinado p_0 también tiene implicaciones en la capacidad del estimador para realizar el seguimiento de los parámetros variables en el tiempo y resistir las perturbaciones, como veremos más adelante.

6.1.2. Aplicación del método de mínimos cuadrados estándar

Para poder realizar la estimación en el método de mínimos cuadrados, hay que proporcionar unos valores iniciales y una matriz de ganancia inicial al estimador, teniendo en cuenta que los valores de la matriz de ganancia deben

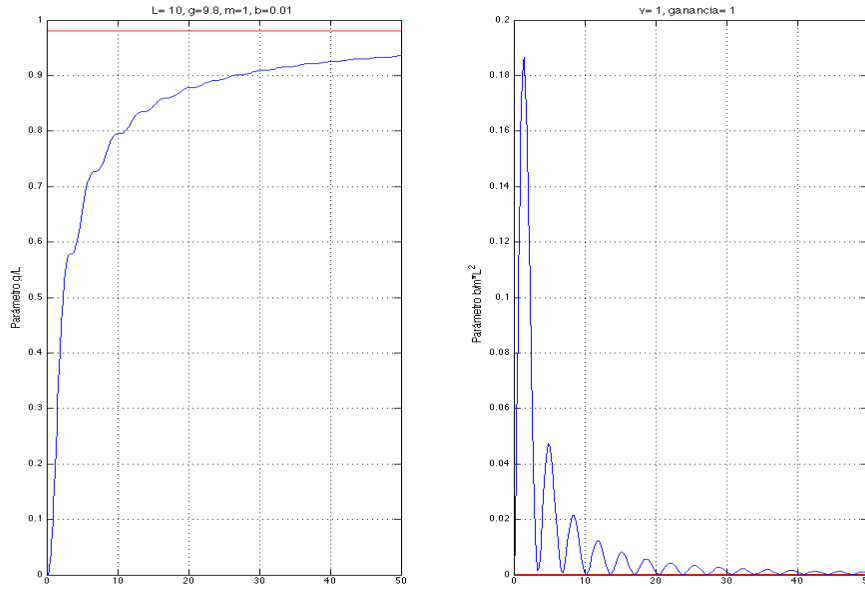


Figura 7: Estimador de mínimos cuadrados estándar para un factor de rozamiento bajo con matriz de ganancia inicial identidad $P_0 = I$.

ser tan altos como permita la sensibilidad al ruido [9]. Así, siguiendo a [10], el estimador de mínimos cuadrados estándar resulta al implementar el siguiente sistema:

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -P W^T e_t \quad (31)$$

$$\frac{dP}{dt} = -P W^T W P$$

donde $\hat{\theta}$ es el vector con los parámetros estimados, P es la matriz de ganancias y e_t es el error de predicción:

$$e_t = \hat{y} - y = W\hat{\theta} - y$$

Para el ejemplo estudiado se han proporcionado los mismos valores iniciales que para el caso del gradiente, a excepción del valor de la ganancia, ya que para el caso del gradiente se trata de una constante y para el estimador de mínimos cuadrados se define un valor inicial, que debe ser una matriz simétrica y definida positiva. Por tanto, para que las pruebas sean lo más parecidas posibles, se han realizado con la matriz identidad, con diez veces la matriz identidad y con mil

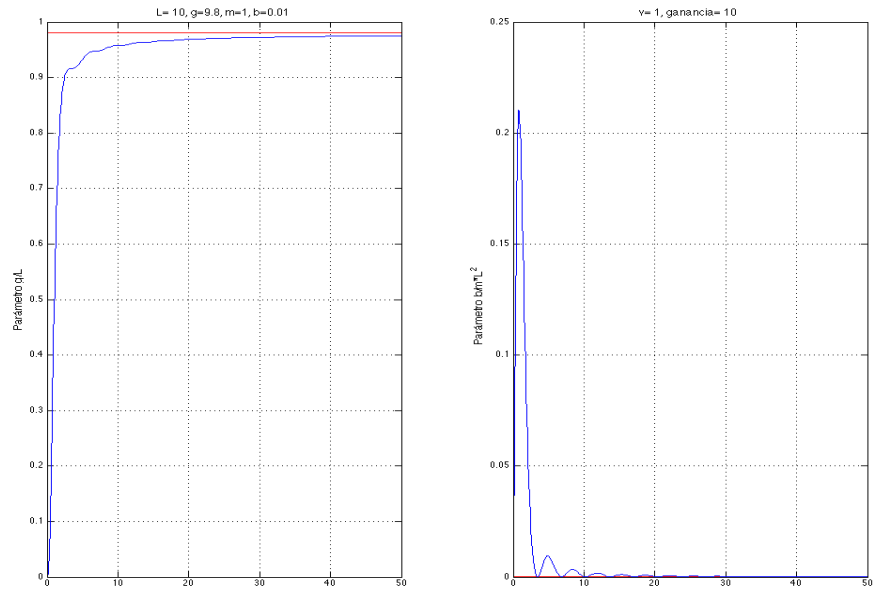


Figura 8: Estimador de mínimos cuadrados para un factor de rozamiento bajo con una matriz de ganancia inicial $P_0 = 10 \cdot I$.

veces dicha matriz. El resultado de estas tres pruebas puede observarse en las figuras 7, 8 y 9.

En este caso en concreto, se ha observado que a medida que se incrementa el valor de la matriz de ganancia, el estimador de mínimos cuadrados estándar converge mucho más rápido a los valores reales que con una matriz de ganancia pequeña en el estimador. Véase la diferencia entre las figuras 7 y 9, donde en la primera de ellas se ha inicializado la matriz de ganancia a la matriz identidad y en la segunda con mil veces dicha matriz. En el primer caso, el estimador no llega a calcular de forma correcta los valores en el tiempo establecido y, en cambio en el segundo caso, converge rápidamente al valor real.

6.1.3. Aplicación del método de mínimos cuadrados con factor de olvido

Se ha implementado este algoritmo para el ejemplo del péndulo y se han realizado los mismos experimentos que para el estimador del gradiente y de mínimos cuadrados estándar.

El ejemplo escogido tiene los mismos parámetros iniciales que el ejemplo de los apartados anteriores, con la salvedad de que en este método se cuenta con una variable más en el estimador: el factor de olvido. Con el factor de olvido,

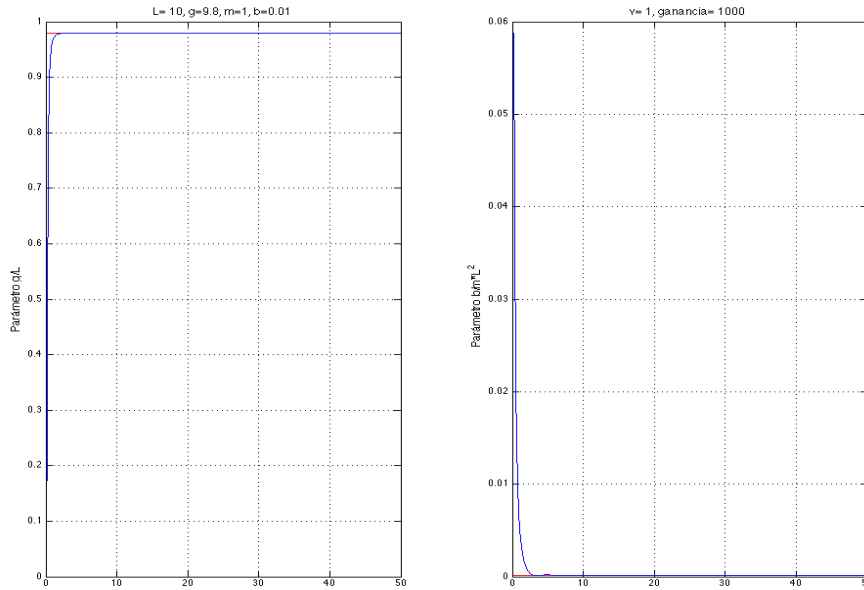


Figura 9: Estimador de mínimos cuadrados para un factor de rozamiento bajo con una matriz de ganancia inicial $P_0 = 1000 \cdot I$.

se consigue que el estimador tenga memoria finita. La modificación consiste en sustituir la ganancia $P(t)$ por $\lambda P(t)$. Cuando $\lambda = 1$ se tiene el algoritmo de mínimos cuadrados estándar, mientras que si $\lambda < 1$ el estimador *olvida* las medidas más antiguas, ya que proporciona un decrecimiento exponencial de los valores. La elección de un determinado λ es un compromiso entre eliminar ruido o realizar un mejor seguimiento de la variación de los parámetros. En principio, se ha establecido el factor de olvido a 0,9, tal y como se recomienda en [3], donde se indica que el factor de olvido debe estar en el intervalo de 0,9 a 0,99. Además, para realizar las pruebas se ha ido cambiando la matriz de ganancia inicial para ver el comportamiento de este estimador.

En las figuras 10, 11 y 12 puede verse el resultado obtenido, observando claramente que cuanto mayor sea la matriz de ganancia más rápido se estima el valor correcto. También se observa que el comportamiento obtenido es mejor que con el estimador de mínimos cuadrados estándar para el mismo valor de la matriz de ganancias, ya que converge al valor objetivo en menor tiempo. Esta circunstancia se ilustra con la figura 13, en la que se muestra una comparación entre los dos estimadores y puede verse claramente la diferencia.

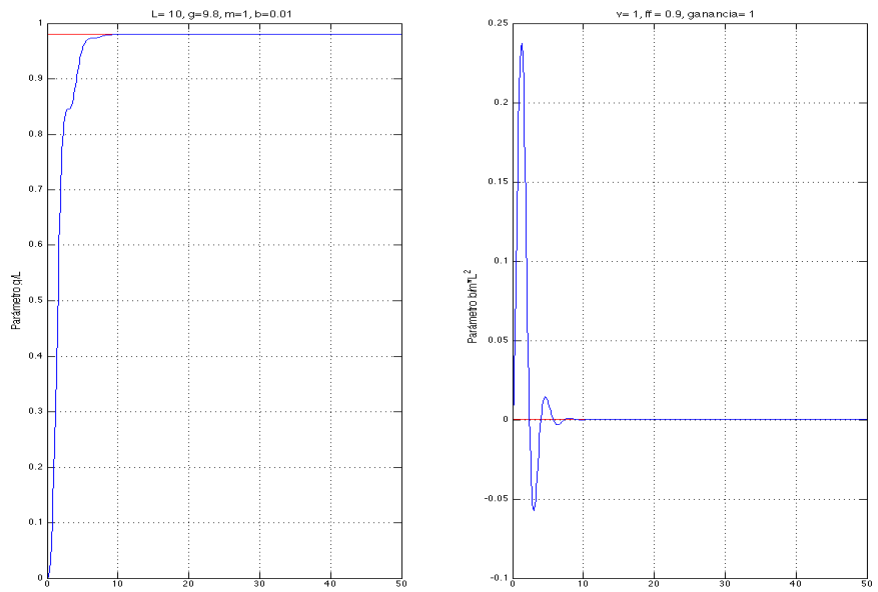


Figura 10: Método de mínimos cuadrados con factor de olvido y matriz ganancia inicial identidad $P_0 = I$.

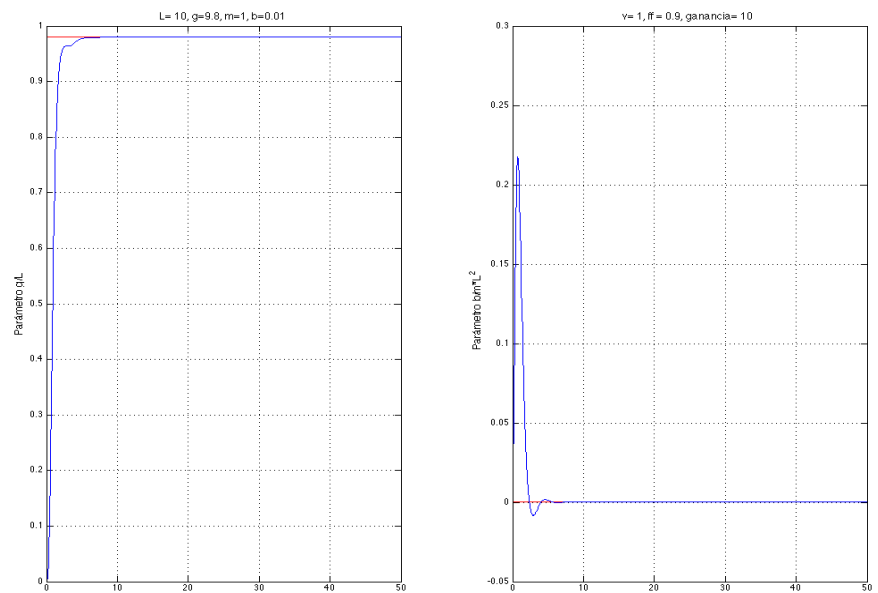


Figura 11: Método de mínimos cuadrados con factor de olvido y matriz de ganancia inicial $P_0 = 10 \cdot I$.

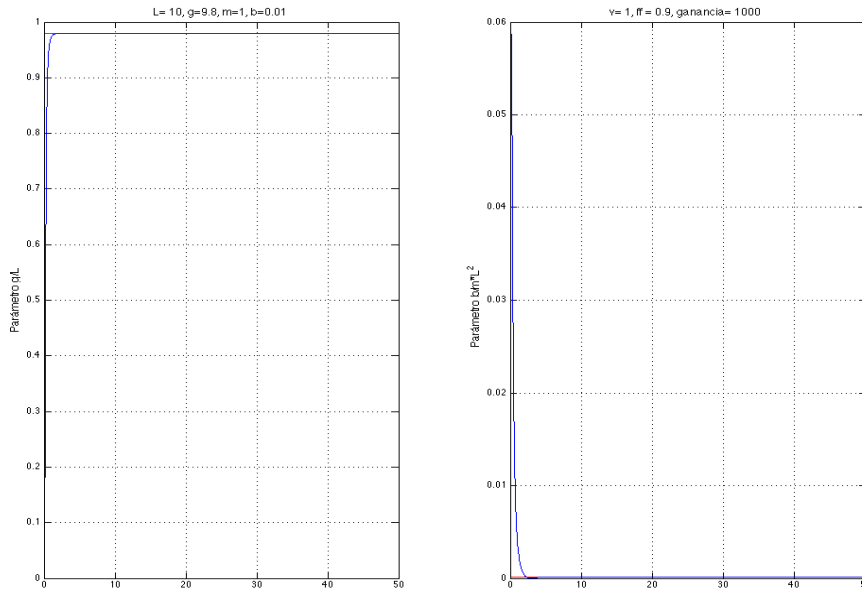


Figura 12: Método de mínimos cuadrados con factor de olvido y matriz ganancia inicial $P_0 = 1000 \cdot I$.

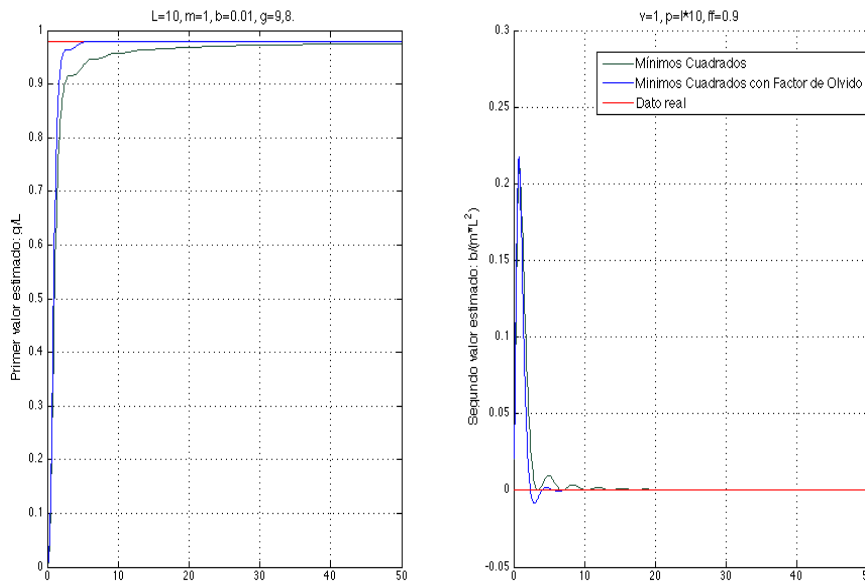


Figura 13: Comparación de los métodos de mínimos cuadrados estándar y mínimos cuadrados con factor de olvido con una matriz de ganancia inicial $P_0 = 10 \cdot I$.

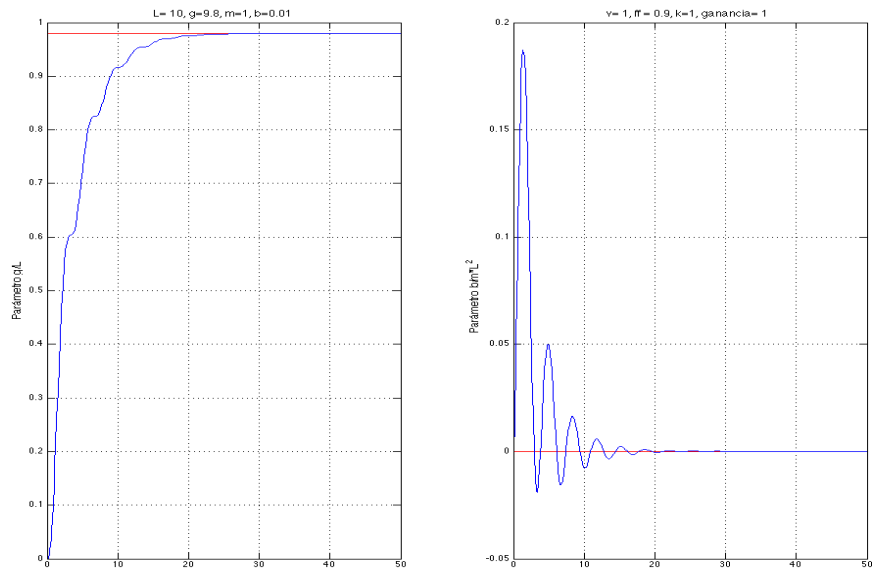


Figura 14: Método de mínimos cuadrados con olvido exponencial variable para un factor rozamiento bajo con matriz ganancia inicial identidad $P_0 = I$ y cota de ganancia $k_0 = 1$.

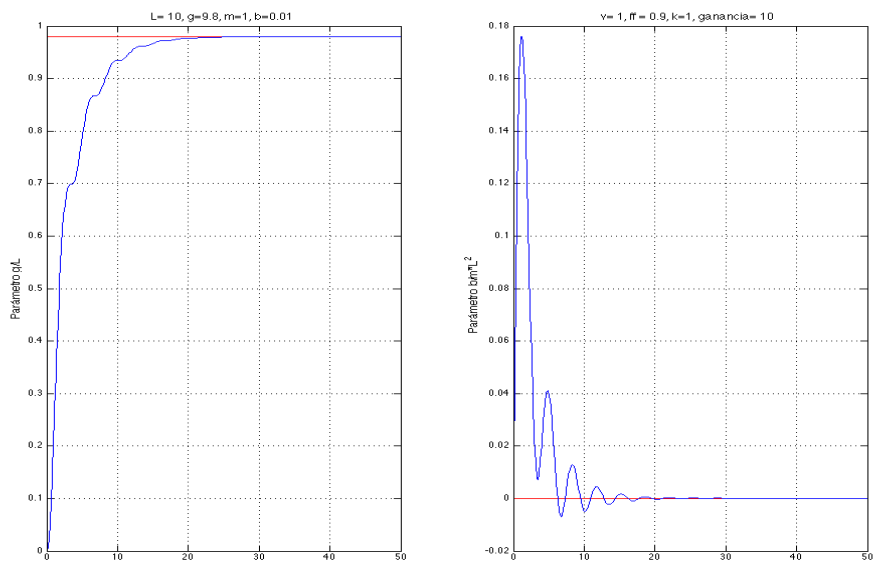


Figura 15: Método de mínimos cuadrados con olvido exponencial variable para un factor rozamiento bajo con una matriz de ganancia inicial $P_0 = 10 \cdot I$ y cota de ganancia $k_0 = 1$.

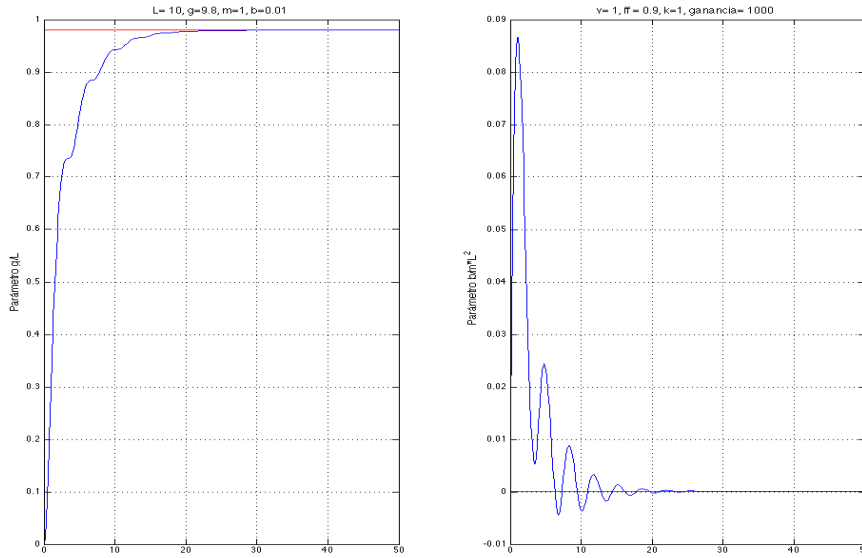


Figura 16: Método de mínimos cuadrados con olvido exponencial variable para un factor rozamiento bajo con matriz ganancia inicial identidad $P_0 = 1000 \cdot I$ y cota de ganancia $k_0 = 1$.

6.1.4. Aplicación del método de mínimos cuadrados con olvido exponencial variable

Al igual que con los estimadores anteriores, se ha implementado este algoritmo para el ejemplo del péndulo y se han realizado los mismos experimentos que para los otros estimadores, con la salvedad de que en este método se cuenta con una variable más en el estimador: la magnitud máxima de la matriz de ganancia (k_0). En principio, se ha escogido un valor de k bajo, en concreto $k = 1$, y se ha ido cambiando la matriz de ganancia para ver y analizar el comportamiento de este estimador. A continuación, se ha realizado el ejemplo con un valor de $k = 100$.

En las figuras 14, 15 y 16, se observa que se necesita bastante tiempo en obtener los valores reales de los parámetros, ya que al haber escogido el valor de la magnitud de la matriz de ganancia k muy bajo, la velocidad de actualización de los parámetros se ve afectada. Si, por ejemplo, aumentamos este valor a 100 para la simulación que mejor comportamiento tiene, es decir la de mayor matriz de ganancia, se obtienen los resultados mostrados en la figura 17, donde la estimación converge correctamente a los valores reales y en un tiempo mucho menor.

Cabe destacar que el comportamiento es el mismo para los otros ejemplos

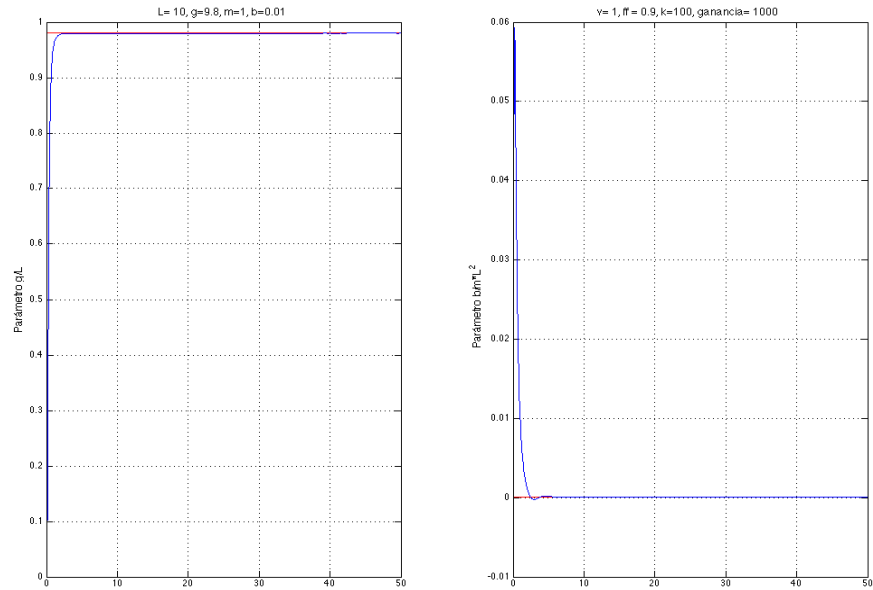


Figura 17: Método de mínimos cuadrados con olvido exponencial variable para un factor rozamiento bajo con matriz ganancia inicial identidad $P_0 = 1000 \cdot I$ y cota de ganancia $k_0 = 100$.

donde la ganancia es menor. Para todos ellos, si se aumenta el valor de la magnitud de la matriz de ganancia k_0 , la estimación converge a los valores reales mucho más rápido que con un valor pequeño de k_0 .

6.1.5. Aplicación del estimador basado en redes neuronales de Hopfield

Al igual que en los apartados anteriores, en este punto se ha aplicado el estimador basado en redes neuronales de Hopfield al sistema dinámico no lineal del péndulo simple, variando sólo el valor de la ganancia. En la figura 18 puede verse el comportamiento cuando la ganancia es baja. Se observa que el estimador termina convergiendo correctamente al valor deseado. Se debe tener en cuenta que este estimador utiliza un vector de parámetros nominales θ_n para realizar una traslación del intervalo sobre el que se realiza la estimación. Dado que la estimación inicial está en el origen, el vector θ_n contiene una estimación *a priori* del valor real de los parámetros antes de comenzar la estimación. En principio, se ha supuesto que este valor puede ser $\theta_n = (0, 1 \quad 0, 9)$.

Para el siguiente ejemplo se ha escogido una ganancia de 10, observando en este caso que la salida proporcionada acaba convergiendo de forma correcta para

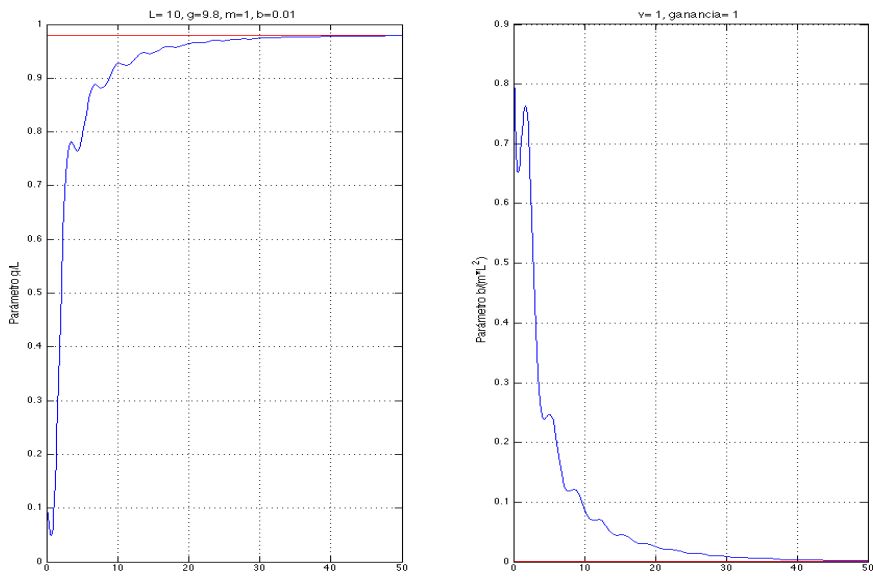


Figura 18: Estimador basado en redes neuronales de Hopfield en péndulo simple con rozamiento bajo y ganancia $p_0 = 1$.

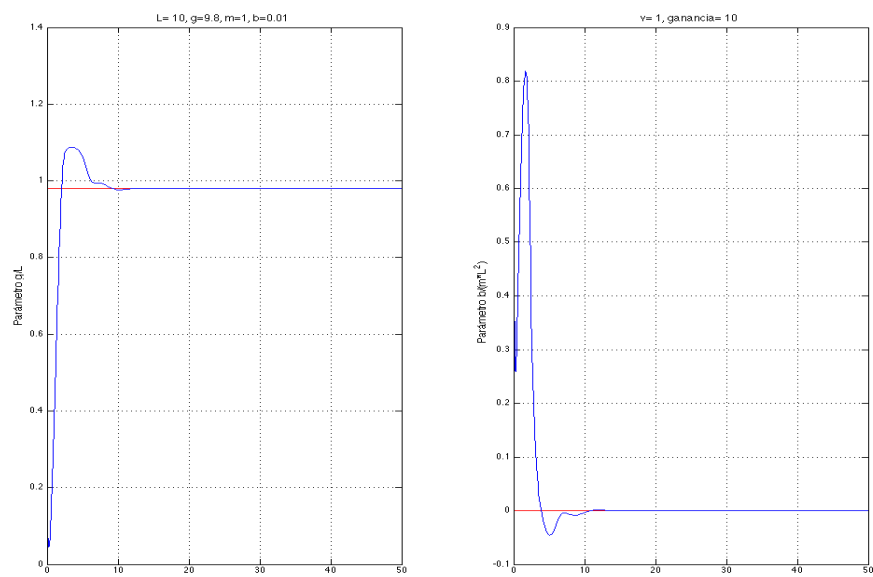


Figura 19: Estimador basado en redes neuronales de Hopfield en péndulo simple con rozamiento bajo y ganancia $p_0 = 100$.

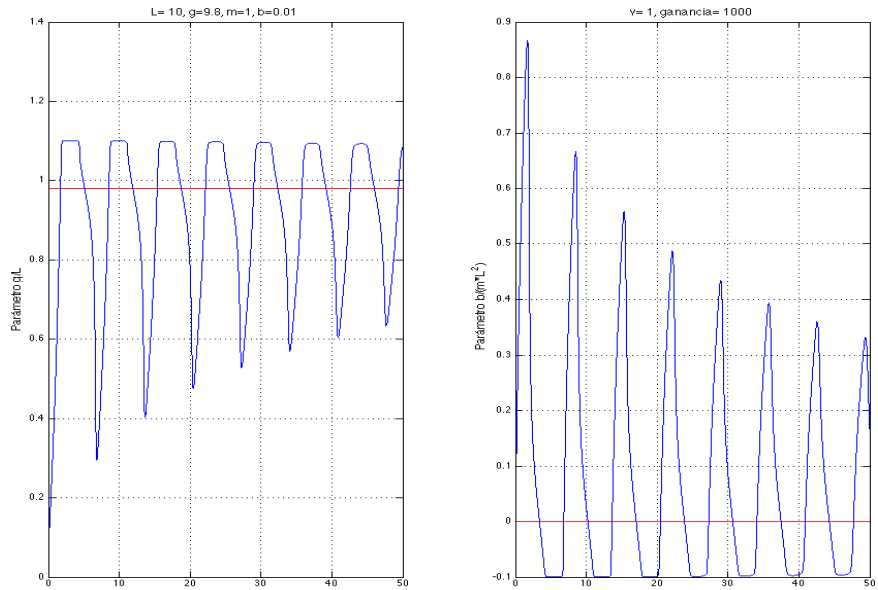


Figura 20: Estimador basado en redes neuronales de Hopfield en péndulo simple con rozamiento bajo y ganancia=1000.

los dos parámetros, pero mucho más rápido que cuando la ganancia es menor, tal y como puede verse en la figura 19.

Por último, para el caso donde la ganancia aplicada es muy alta, se observa que el estimador basado en redes neuronales de Hopfield comienza a oscilar, como se aprecia en la figura 20. Cabe señalar que este comportamiento es similar al que presentaba el estimador del gradiente, con la salvedad de que, en este caso, las oscilaciones de la estimación se amortiguan de forma más rápida que en el caso del gradiente.

6.1.6. Comparación de los métodos

En la figura 21 se muestra el resultado del comportamiento de todos los algoritmos de estimación ante el sistema dinámico no lineal del péndulo simple con un factor de rozamiento muy bajo. En dicha figura se observa que todos los métodos acaban convergiendo a los valores reales pero, dependiendo del método utilizado, se llega a los valores objetivos de forma más rápida o más lenta.

En concreto, el estimador del gradiente es el que necesita más tiempo para obtener el valor objetivo, mientras que se observa que los estimadores de mínimos cuadrados en todas sus variantes son mucho más eficientes a la hora de calcular el valor correcto. Respecto al estimador basado en redes neuronales de Hopfield,

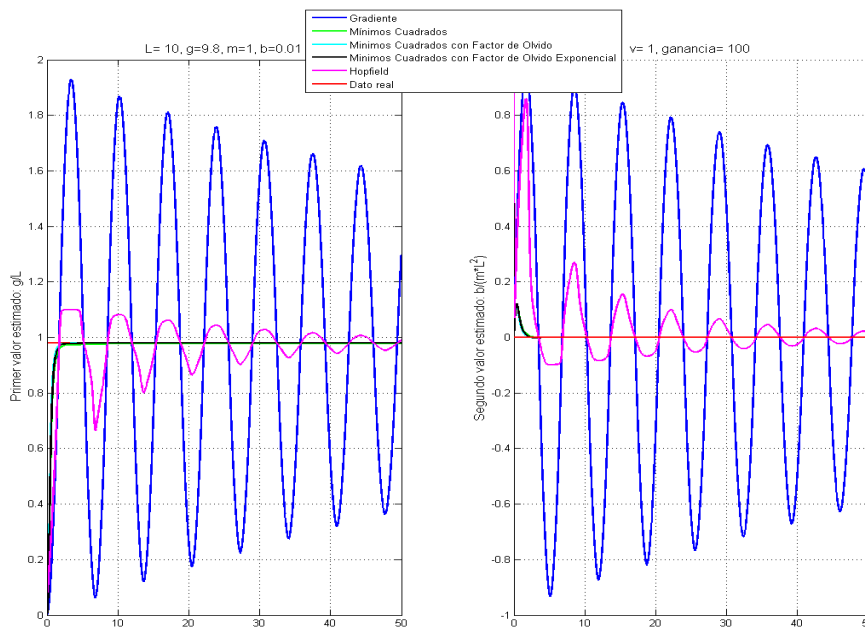


Figura 21: Resultado de la aplicación de todos los métodos al péndulo simple con rozamiento bajo.

se observa que se comporta de forma similar al gradiente, pero consigue el valor objetivo antes, ya que las fluctuaciones son más bajas.

6.2. Caso de estudio 2: péndulo simple con rozamiento alto

En el análisis de este caso de estudio, en primer lugar, se muestra la salida proporcionada (velocidad y posición) por las ecuaciones que definen la dinámica de funcionamiento del sistema físico del péndulo simple, así como la estimación realizada con el estimador del gradiente variando el valor de la ganancia. En segundo lugar, se muestra la estimación realizada con el estimador de mínimos cuadrados, incrementando el valor de la matriz de ganancia para analizar el comportamiento de este estimador. En tercer lugar, se estudia la estimación realizada con el estimador de mínimos cuadrados con factor de olvido. Para este, caso se han realizado las mismas pruebas que para el mínimos cuadrados estándar y se ha observado que, al igual que en el caso de estudio anterior, cuando el estimador tiene una ganancia alta, se aproxima mucho más rápido a los valores reales.

Concretamente, en el apartado 6.2.1 se implementa el método del gradien-

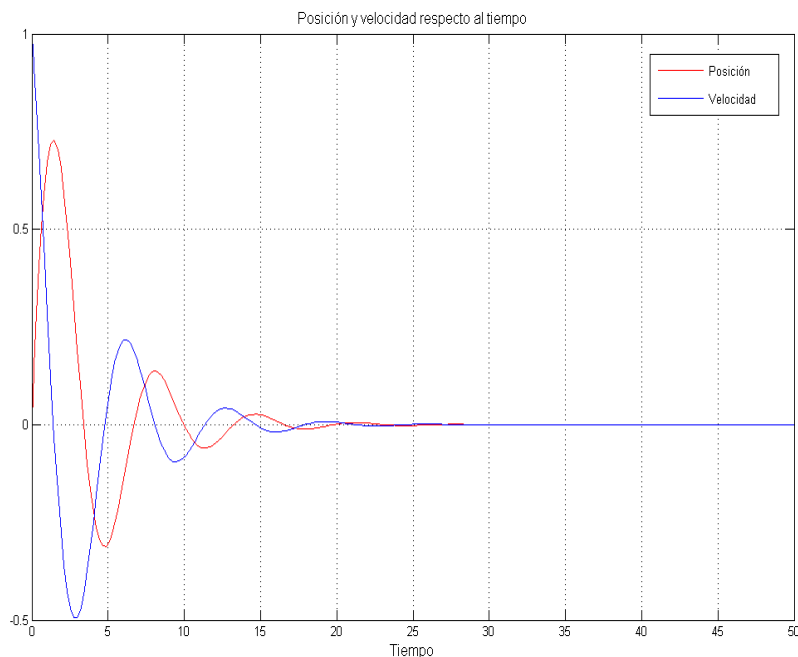


Figura 22: Salida del péndulo simple con un factor de rozamiento alto.

te, ilustrado los resultados en las figuras 23, 24 y 25 con diferentes valores del parámetro de ganancia. En el apartado 6.2.2 se muestra el comportamiento del método de mínimos cuadrados presentado en las figuras 26, 27 y 28, variando el valor de la matriz de ganancia inicial. A continuación, en el apartado 6.2.3 se pueden observar los resultados obtenidos por el método de mínimos cuadrados con factor de olvido, ilustrado por las figuras 29, 30 y 31. El apartado 6.2.4 muestra, en las figuras 33, 34 y 35, el comportamiento del método de mínimos cuadrados con olvido exponencial variable, para un valor $k_0 = 1$ y en las figuras 36, 37 y 38 para $k_0 = 100$. En el apartado 6.2.5, pueden verse los resultados arrojados tras la aplicación del estimador basado en redes neuronales de Hopfield, ilustrado en las figuras 39, 40 y 41. Finalmente, en la figura 42 del apartado 6.2.6 se realiza una comparación con los resultados obtenidos para ver las diferencias encontradas en el comportamiento de los estimadores estudiados.

Para la realización de este caso de estudio, se debe tener en cuenta que en cualquier sistema dinámico sometido a un factor de rozamiento muy alto, no se produce suficiente excitación persistente, por lo que alguno de los estimadores estudiados no estimarán de forma correcta. Para corregir este problema se debe ajustar convenientemente la ganancia hasta obtener el resultado deseado, teniendo en cuenta que si se aumenta demasiado la ganancia, se ha observado

que los resultados proporcionados por algunos estimadores son oscilatorios y no son válidos.

Para todas las simulaciones que se van a realizar, los parámetros que se han considerado han sido los mismos que en el apartado 6.1, a excepción del factor de rozamiento que en este caso toma el valor $b = 50$.

En la figura 22 puede observarse la salida proporcionada por la simulación de las ecuaciones del péndulo simple para el caso de un factor de rozamiento alto. En este caso, el péndulo apenas oscila tanto para la posición como con la velocidad, ya que al tener un rozamiento muy alto el péndulo deja de moverse en un corto espacio de tiempo.

6.2.1. Aplicación del método del gradiente

El hallazgo más significativo es que si el sistema converge rápidamente, solo se puede llegar a realizar una estimación aproximada, y ello ajustando la ganancia del estimador. Para el ejemplo del péndulo simple con un factor de rozamiento muy alto y con el mismo diseño experimental que en el caso de estudio 1, se ha obtenido el resultado de la figura 23 donde se observa que la estimación no se ajusta convenientemente al resultado proporcionado por los parámetros reales para ninguno de los dos parámetros.

En el caso de que se ajuste convenientemente el valor de la ganancia del estimador (p_0), se obtienen resultados cercanos a los valores reales, tal y como puede observarse en la figura 24, donde se ha ajustado el valor de la ganancia del estimador a 10.

Por tanto, al igual que ocurre con el caso de estudio anterior donde el factor de rozamiento es muy bajo, el escoger el valor de la ganancia p_0 tiene una influencia fundamental en el comportamiento del estimador ya que al incrementar el valor de la ganancia, la estimación conduce a una convergencia más rápida, pero llegado a cierto punto si se continúa aumentando el valor de la ganancia, la estimación se vuelve oscilatoria y la convergencia más lenta. Como ya se indicó anteriormente, este fenómeno se produce por la naturaleza del gradiente en la estimación, tal y como puede verse en la figura 25 donde se ha asignado una ganancia muy alta para este ejemplo $p_0 = 1000$, y el resultado de la estimación obtenido no es mejor que cuando la ganancia es 10.

6.2.2. Aplicación del método de mínimos cuadrados

Para la realización de las primeras pruebas se ha escogido una matriz de ganancia inicial con valores bajos: la matriz identidad. El resultado que se ha obtenido se puede consultar en la figura 26, donde se observa que la estimación realizada no se aproxima al valor correcto de los parámetros.

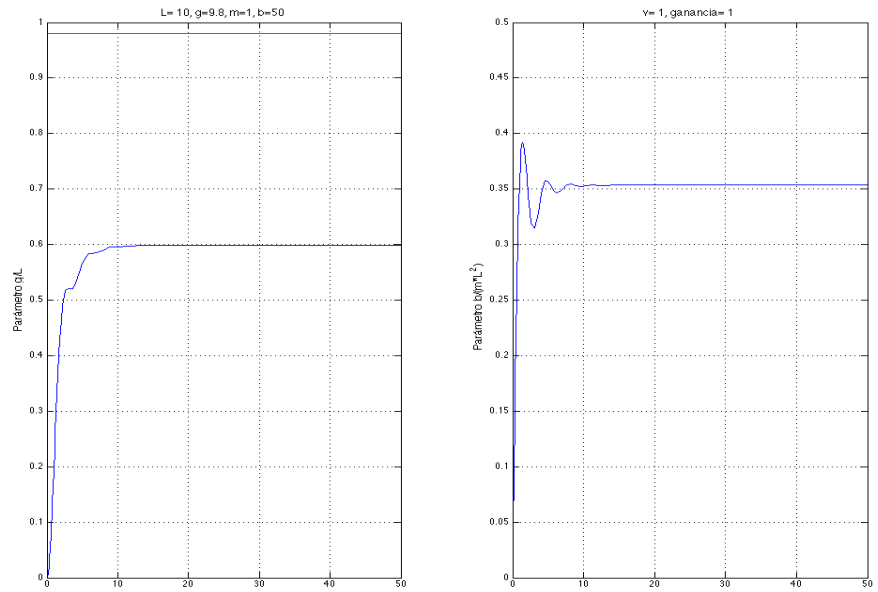


Figura 23: Método del gradiente en el péndulo simple con factor de rozamiento alto y ganancia $p_0 = 1$.

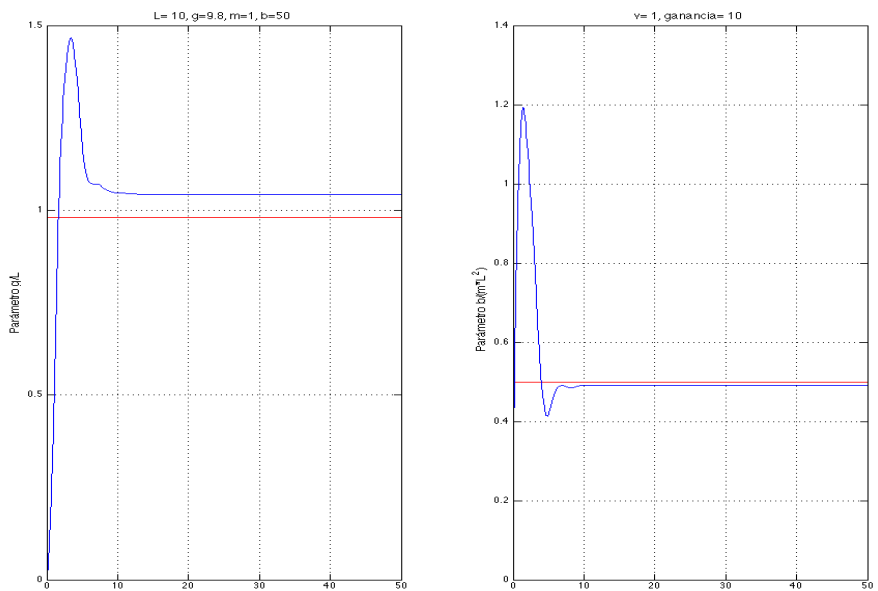


Figura 24: Método del gradiente en el péndulo simple con factor de rozamiento alto y ganancia $p_0 = 10$.

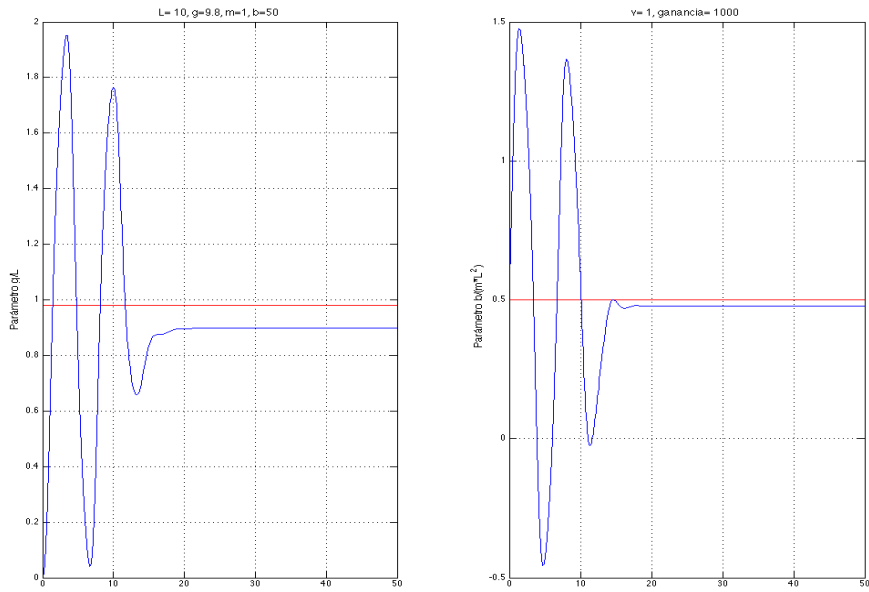


Figura 25: Método del gradiente en el péndulo simple con factor de rozamiento alto y ganancia $p_0 = 1000$.

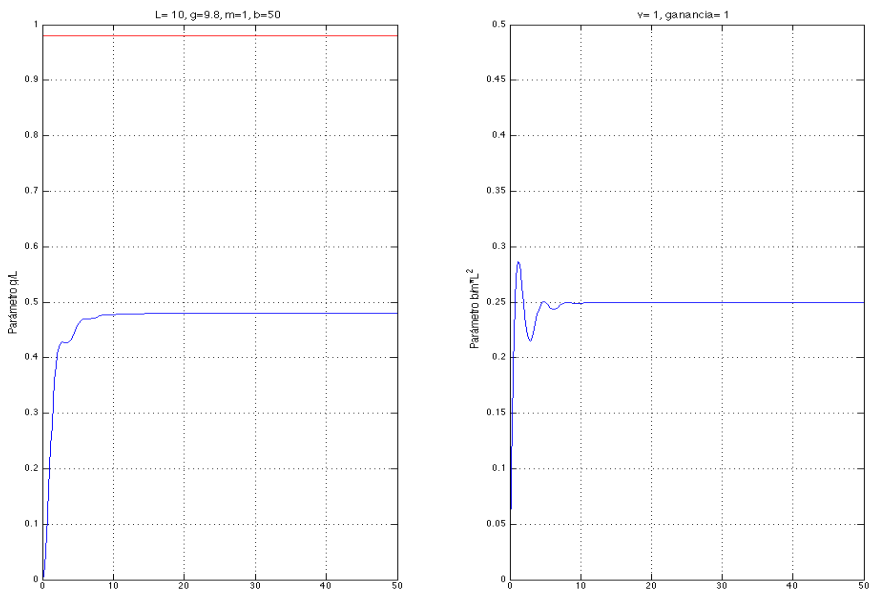


Figura 26: Método de mínimos cuadrados con factor de rozamiento alto y la matriz identidad $P_0 = I$ como matriz de ganancia inicial.

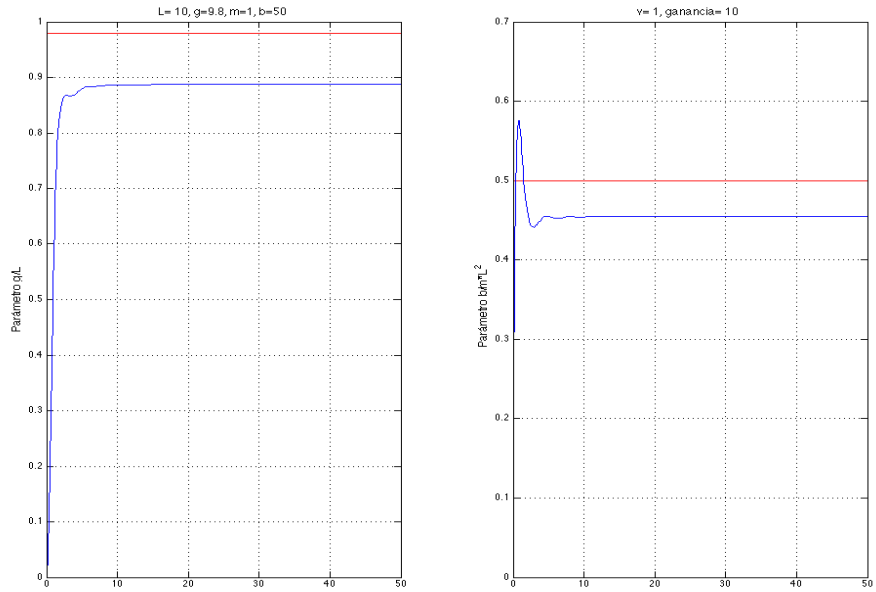


Figura 27: Método de mínimos cuadrados con factor de rozamiento alto y una matriz de ganancias inicial $P_0 = 10 \cdot I$ en el estimador.

Si se incrementa el valor de la matriz de ganancias a 10, el resultado obtenido es el mostrado en la Figura 27, donde se observa que la estimación se ha aproximado bastante a los valores reales.

Otra prueba que se ha realizado ha sido sobre el mismo ejemplo, pero con el valor de la matriz de ganancias alto. El resultado obtenido es el mostrado en la Figura 28 donde para los dos parámetros la estimación realizada es correcta y se realiza en un corto espacio de tiempo.

Por tanto, para este ejemplo se concluye que al variar la matriz de ganancias inicial del estimador y cuanto mayor sea dicha matriz de ganancias, la estimación que se realiza se aproxima mucho más a los valores de los parámetros reales del problema. Sin embargo, se debe tener en cuenta que, al igual que en el método del gradiente, si el sistema está continuamente excitado, por ejemplo, con una velocidad de entrada alta, el resultado de la estimación es más favorable tanto para el método del gradiente como para el de mínimos cuadrados. Por ejemplo, cuando el rozamiento es bajo, el comportamiento de estos estimadores es más favorable, como pudo observarse en las figuras 8 y 9 donde se obtiene mucho antes el valor real del parámetro.

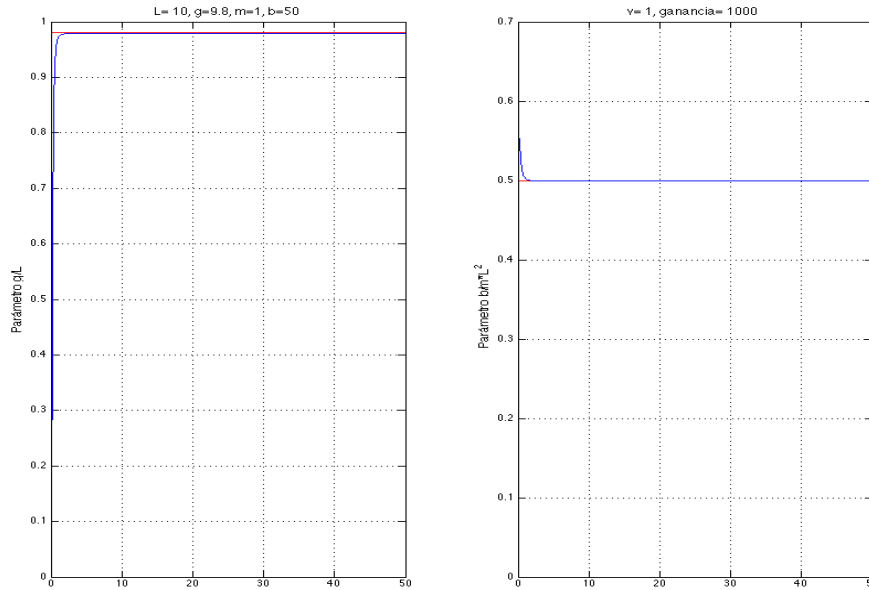


Figura 28: Método de mínimos cuadrados con factor de rozamiento alto y una matriz de ganancias inicial $P_0 = 1000 \cdot I$ en el estimador.

6.2.3. Aplicación del método de mínimos cuadrados con factor de olvido

Para la realización de las primeras pruebas se ha escogido una matriz de ganancia inicial con valores bajos, la matriz identidad $P_0 = I$, y un factor de olvido de 0,9, siguiendo las recomendaciones de [3], donde se indica que el factor de olvido debe estar en el intervalo $(0,9 \quad 0,99)$ y de la misma forma que se ha realizado en el apartado 6.1.3. El resultado que se ha obtenido se muestra en la figura 29 donde se observa que la estimación realizada termina convergiendo al valor correcto.

La siguiente prueba que se ha realizado ha sido sobre el mismo ejemplo con los mismos parámetros, pero se ha incrementado el valor de la matriz de ganancias inicial del estimador a 10. El resultado que se ha obtenido es el de la figura 30, donde se observa que la estimación converge rápidamente y correctamente al valor del parámetro real.

Otra prueba que se ha realizado ha sido sobre el mismo ejemplo, pero volviendo a incrementar el valor de la matriz de ganancias 1000 veces, para observar la diferencia con el ejemplo anterior. Así, en la figura 31 se muestra el resultado con una matriz de ganancias muy alta. En ella se puede observar que este

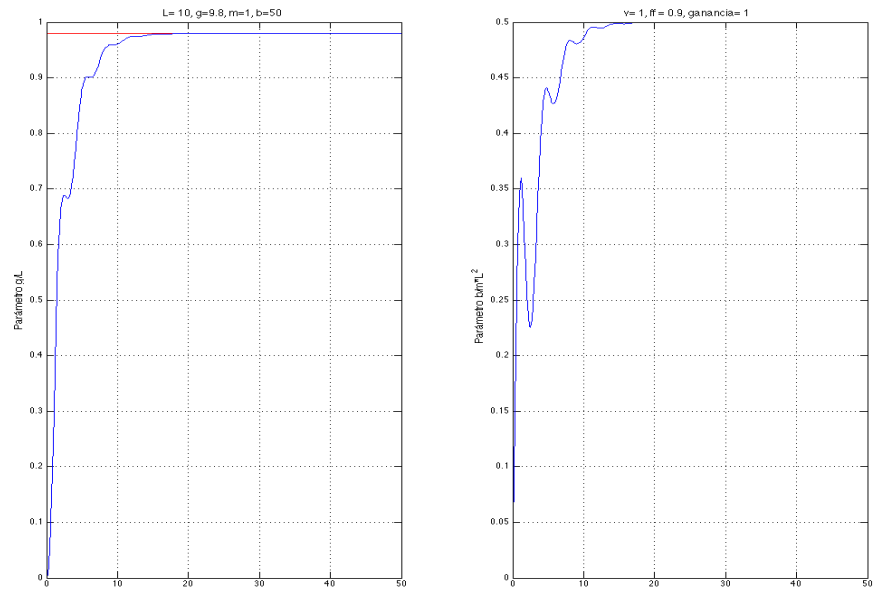


Figura 29: Método de mínimos cuadrados con factor de olvido, rozamiento alto y la matriz identidad $P_0 = I$ como matriz de ganancia inicial.

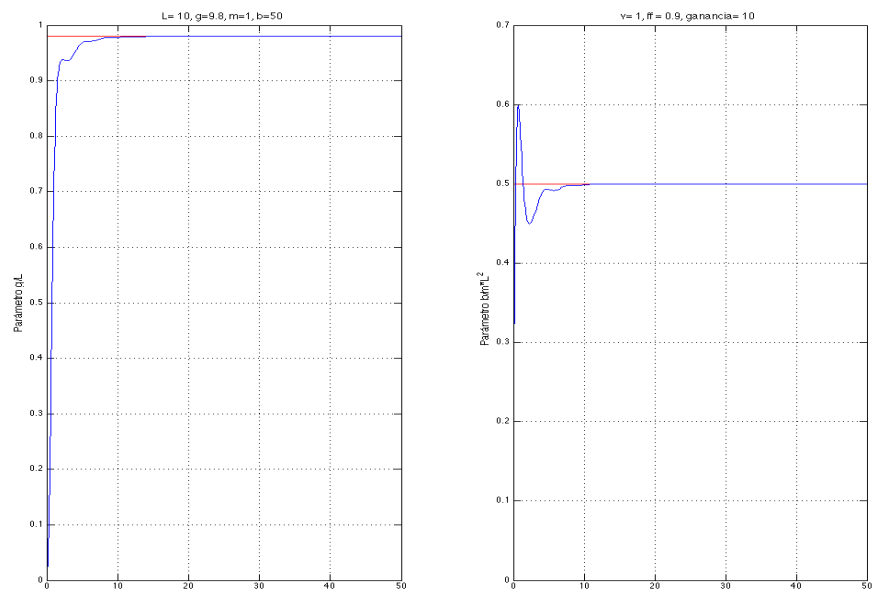


Figura 30: Mínimos cuadrados con factor de olvido, rozamiento alto y una matriz de ganancias inicial $P_0 = 10 \cdot I$.

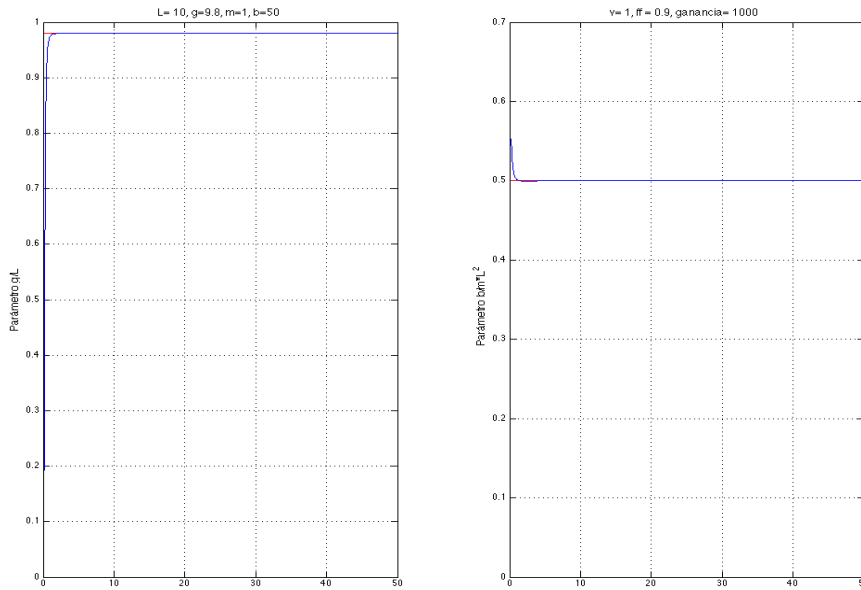


Figura 31: Mínimos cuadrados con factor de olvido, rozamiento alto y matriz de ganancia $P_0 = 1000 \cdot I$.

método de estimación converge de forma rápida y efectiva a los valores reales del problema.

Se puede ver claramente que, para este estimador, a medida que se incrementa el valor de la matriz de ganancia inicial, los resultados que arroja de la estimación convergen correctamente al valor real de forma más rápida.

El comportamiento obtenido es mejor que con el estimador de mínimos cuadrados estándar para los mismos valores de la matriz de ganancias, ya que, o bien, la convergencia al valor objetivo se produce en menos tiempo, o bien simplemente el método de mínimos cuadrados no converge. A este respecto, véase la figura 32 en la que se muestra una comparación entre los dos estimadores para un valor de la matriz de ganancia de 10 veces la matriz identidad, observándose claramente la diferencia.

6.2.4. Aplicación del método de mínimos cuadrados con olvido exponencial variable

Las pruebas realizadas con el ejemplo del péndulo simple y este método de estimación de parámetros han arrojado los resultados que se muestran a continuación.

En la primera prueba que se ha realizado, se ha establecido la matriz identi-

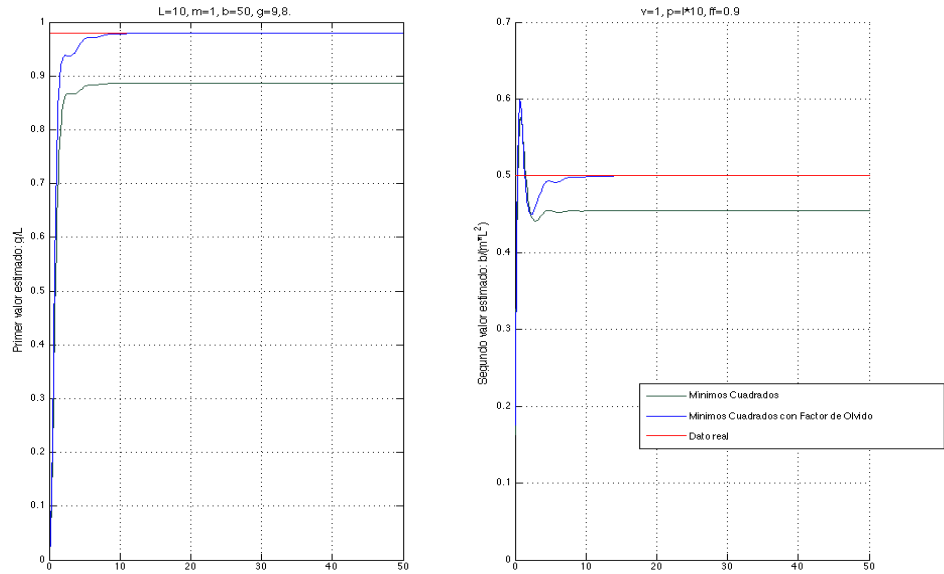


Figura 32: Comparación de los métodos de mínimos cuadrados estándar y mínimos cuadrados con factor de olvido para el péndulo con rozamiento bajo con una matriz de ganancia inicial $P_0 = 10 \cdot I$.

dad como matriz de ganancias inicial y el valor del parámetro de la magnitud de la matriz de ganancias $k_0 = 1$. El resultado se puede consultar en la figura 33.

A continuación, se ha multiplicado por diez el valor de la matriz de ganancias del estimador, estableciendo un factor de olvido de $\lambda_0 = 0,9$. El resultado que se ha obtenido es el de la figura 34, donde se observa que la estimación no converge al valor del parámetro real.

Otra prueba que se ha realizado ha sido sobre el mismo ejemplo, pero en este caso el valor de la matriz de ganancias se ha multiplicado por 1000. Así, en la figura 35 se muestra el resultado con una matriz de ganancias muy alta y un valor de la cota $k_0 = 1$.

Como se puede observar claramente en las figuras 33, 34 y 35, con estos valores en el estimador, este no tiene un comportamiento correcto, por lo que se ha optado por variar el valor de la magnitud de la matriz de ganancias k_0 . Si se incrementa el valor de la magnitud de la matriz de ganancia k_0 hasta 100, los resultados que se obtienen son los mostrados en las figuras 36, 37 y 38, donde puede apreciarse el cambio favorable en el comportamiento del estimador.

En la figura 36 se muestra el resultado obtenido con la matriz identidad como matriz de ganancias inicial para un valor de la magnitud de la matriz de ganancias $k_0 = 100$. Puede observarse que no se llega a estimar correctamente los

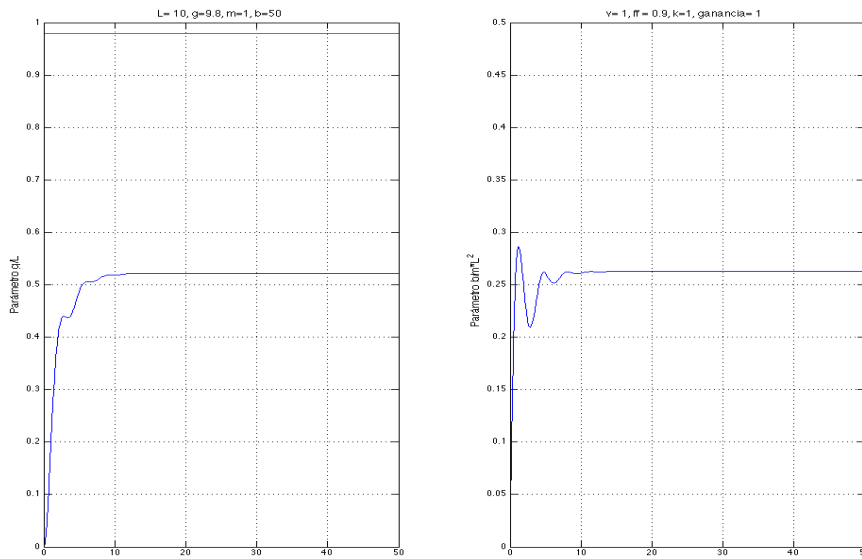


Figura 33: Mínimos cuadrados con olvido exponencial variable, con la matriz identidad $P_0 = I$ como matriz de ganancia inicial, un factor de olvido $\lambda_0 = 0,9$ y una cota $k_0 = 1$, para el péndulo con rozamiento bajo.

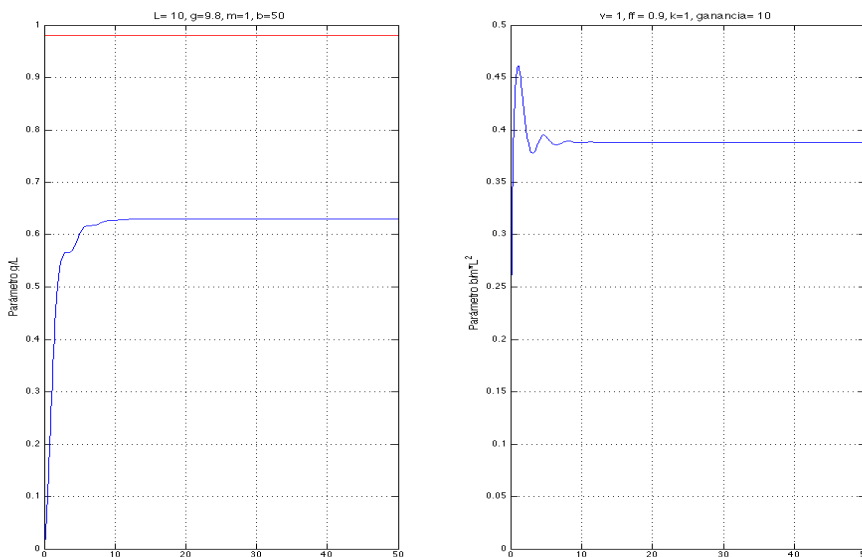


Figura 34: Mínimos cuadrados con olvido exponencial variable, con una matriz de ganancias inicial $P_0 = 10 \cdot I$ y cota $k_0 = 1$, para el péndulo con rozamiento bajo.

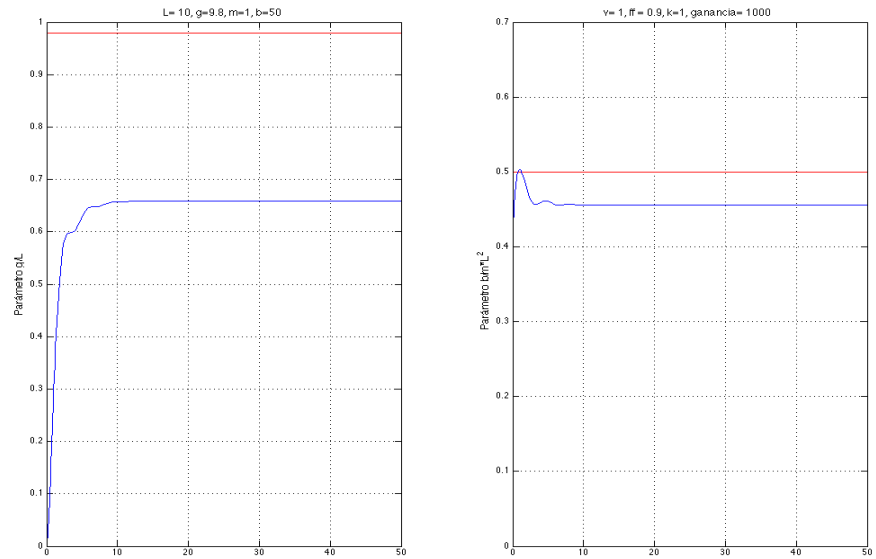


Figura 35: Mínimos cuadrados con olvido exponencial variable, con matriz de ganancia inicial $P_0 = 1000 \cdot I$ y cota $k_0 = 1$, para el péndulo con rozamiento bajo.

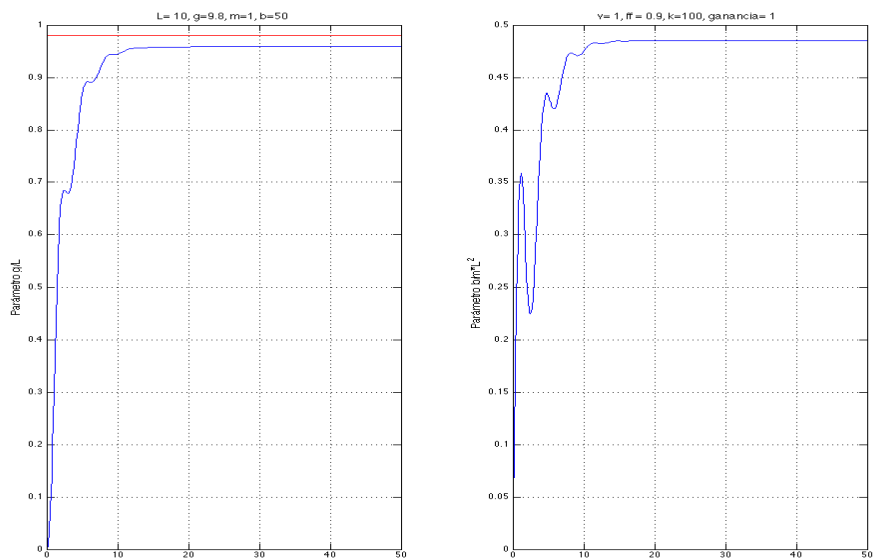


Figura 36: Mínimos cuadrados con olvido exponencial variable en péndulo simple con rozamiento alto, matriz de ganancias inicial identidad $P_0 = I$ y cota $k_0 = 100$.

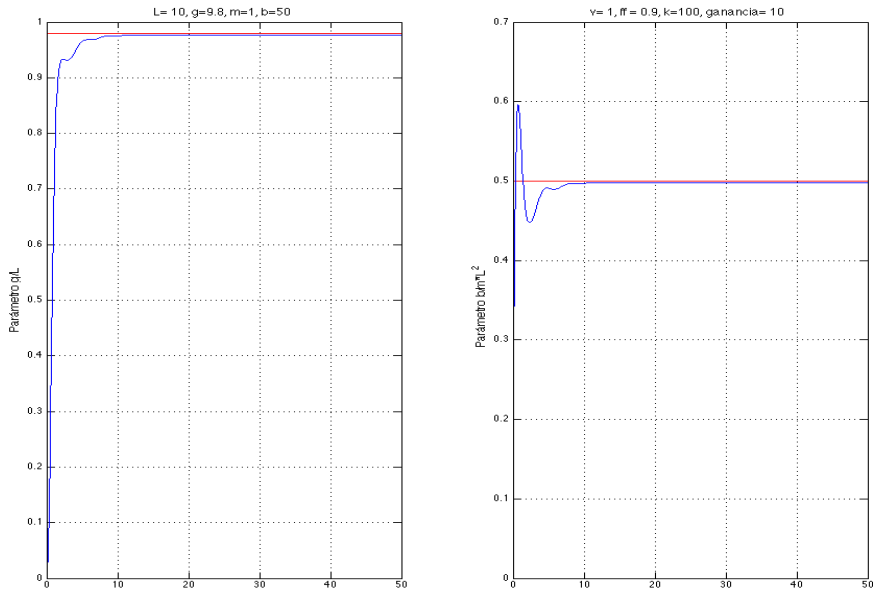


Figura 37: Mínimos cuadrados con olvido exponencial variable en péndulo simple con rozamiento alto, matriz de ganancias inicial $P_0 = 10 \cdot I$ y cota $k_0 = 100$.

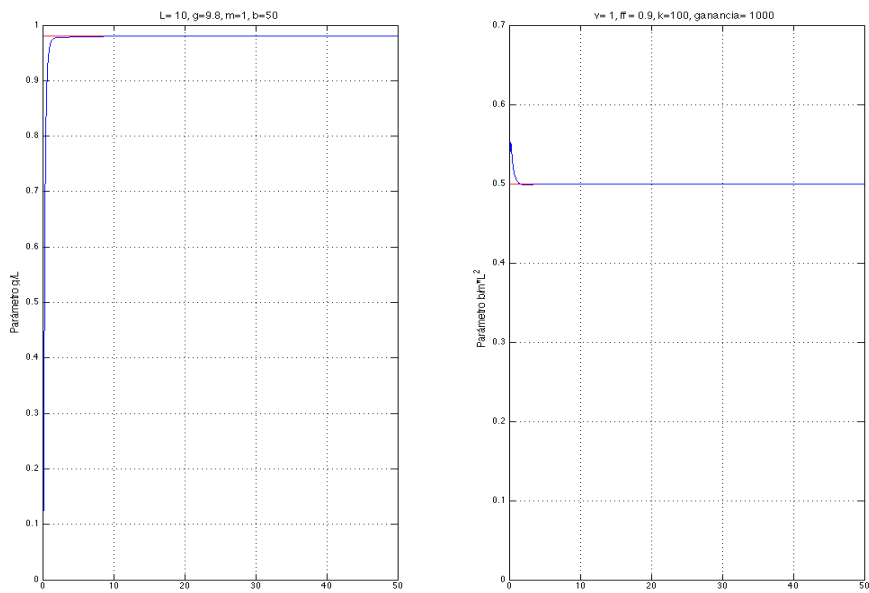


Figura 38: Mínimos cuadrados con olvido exponencial variable en péndulo simple con rozamiento alto, matriz de ganancias inicial $P_0 = 1000 \cdot I$ y cota $k_0 = 100$.

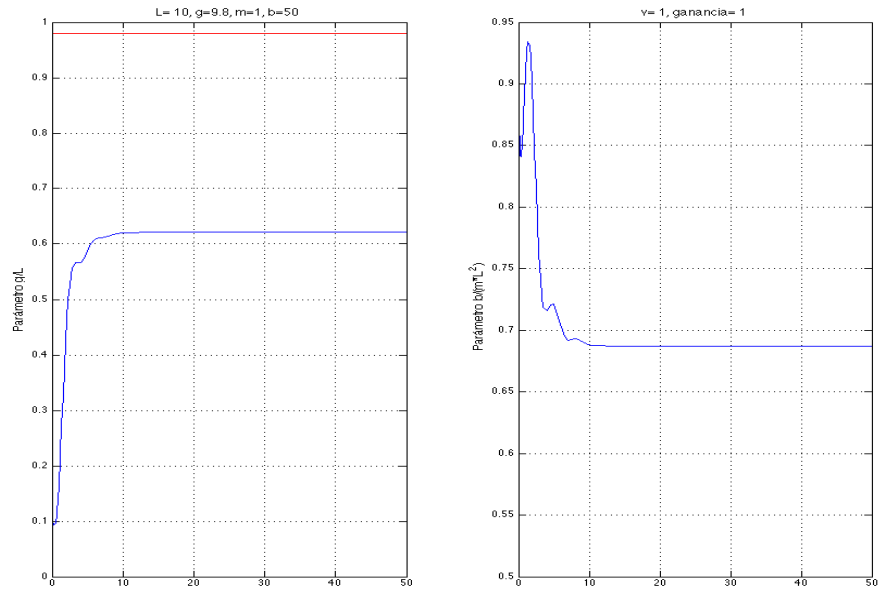


Figura 39: Estimador basado en redes neuronales de Hopfield en péndulo simple con rozamiento alto y ganancia $p_0 = 1$.

parámetros. Si aumentamos diez veces el valor de la matriz identidad inicial, se obtiene el resultado proporcionado por la figura 37 donde los valores estimados llegan a coincidir con los valores reales.

Por último, se ha observado que con un valor alto de la magnitud de la matriz de ganancias $k_0 = 100$ y un valor alto de la matriz de ganancias inicial, escogiendo para este caso mil veces la matriz identidad, el estimador de mínimos cuadrados con factor de olvido exponencial variable converge correcta y rápidamente a los valores esperados para ambos parámetros, tal y como puede verse en la figura 38.

6.2.5. Aplicación del estimador basado en redes neuronales de Hopfield

Las pruebas realizadas con el sistema dinámico no lineal del péndulo simple y este método de estimación de parámetros han arrojado los resultados que se muestran a continuación.

Al igual que en el resto de apartados, en la primera prueba que se ha realizado, se ha establecido el valor del parámetro de la ganancia a $p_0 = 1$. El resultado se puede consultar en la figura 39.

A continuación, se ha incrementando por diez el valor del parámetro de

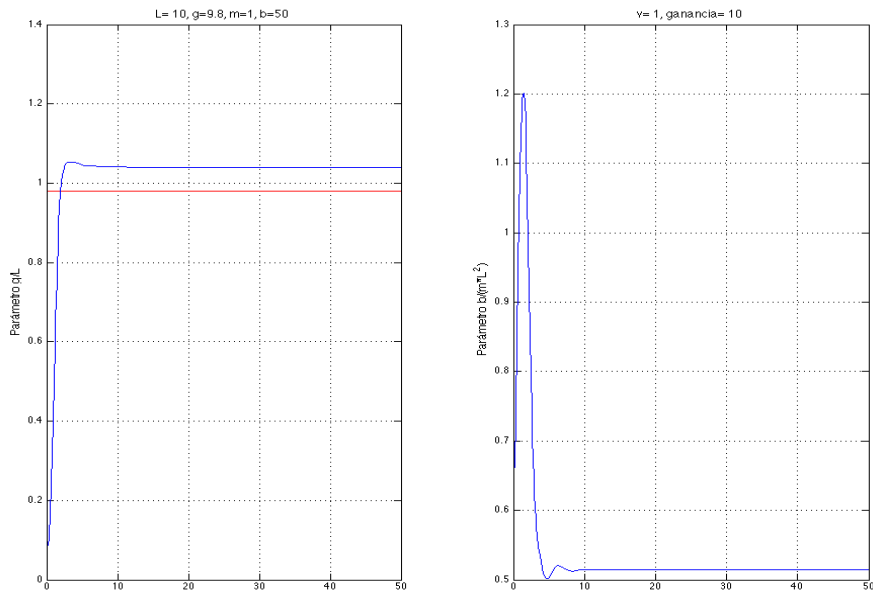


Figura 40: Estimador basado en redes neuronales de Hopfield en péndulo simple con rozamiento alto y ganancia $p_0 = 10$.

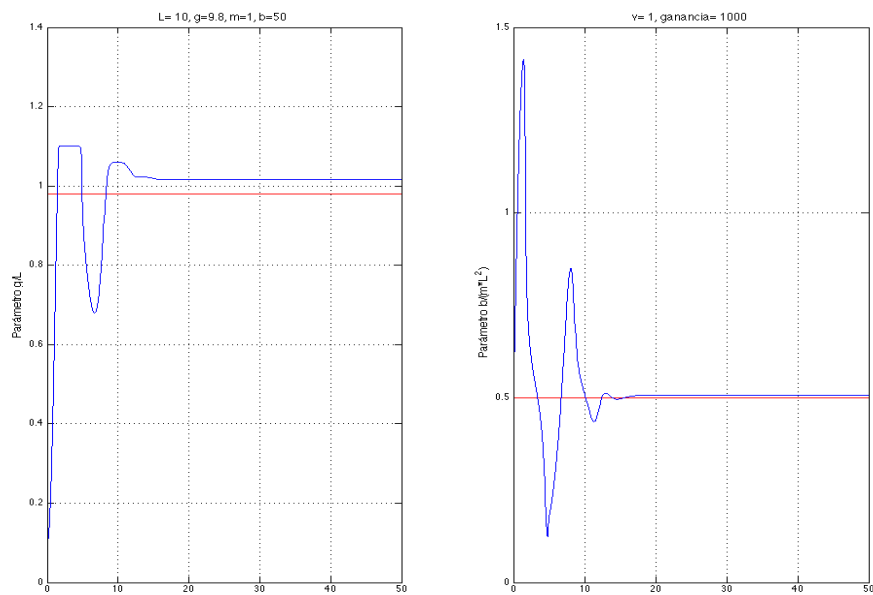


Figura 41: Estimador basado en redes neuronales de Hopfield en péndulo simple con rozamiento alto y ganancia $p_0 = 1000$.

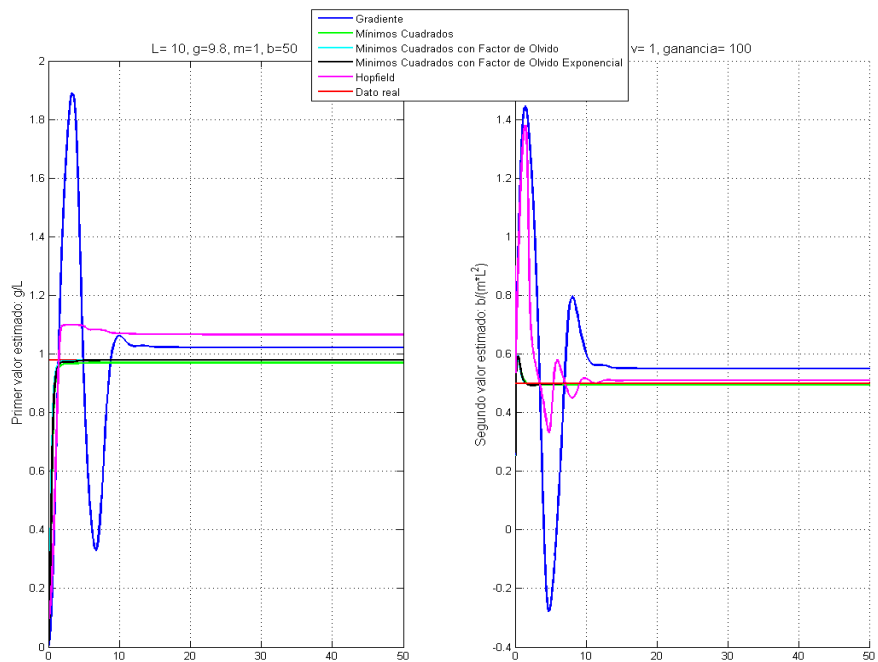


Figura 42: Comportamiento de todos los estimadores para el péndulo simple con rozamiento alto.

ganancias del estimador. El resultado que se han obtenido es el de la figura 40. En ambos casos, se observa que el valor estimado difiere bastante del valor real.

Otra prueba que se ha realizado ha sido sobre el mismo ejemplo, pero en este caso el valor del parámetro de ganancia ha sido multiplicado por 1000. Así, en la figura 41 se muestra el resultado obtenido. En este caso se puede observar que el resultado obtenido converge de forma correcta para el cálculo del segundo parámetro, pero no para el primero.

6.2.6. Comparación de los métodos

En este apartado se va a realizar una comparación de todos los métodos vistos para el caso donde el factor de rozamiento es muy alto.

En la figura 42 se observa el comportamiento de todos los estimadores para el mismo ejemplo, cuando el rozamiento es alto. Para todos los estimadores se ha escogido el valor de los parámetros que mejores resultados proporcionaban.

Se aprecia que los métodos de estimación que mejores resultados arrojan son el de mínimos cuadrados con factor de olvido y con factor de olvido exponencial variable cuando la magnitud de la matriz de ganancia k_0 es alta.

Cabe destacar que, como la dinámica de este sistema mostrada en la figura 22

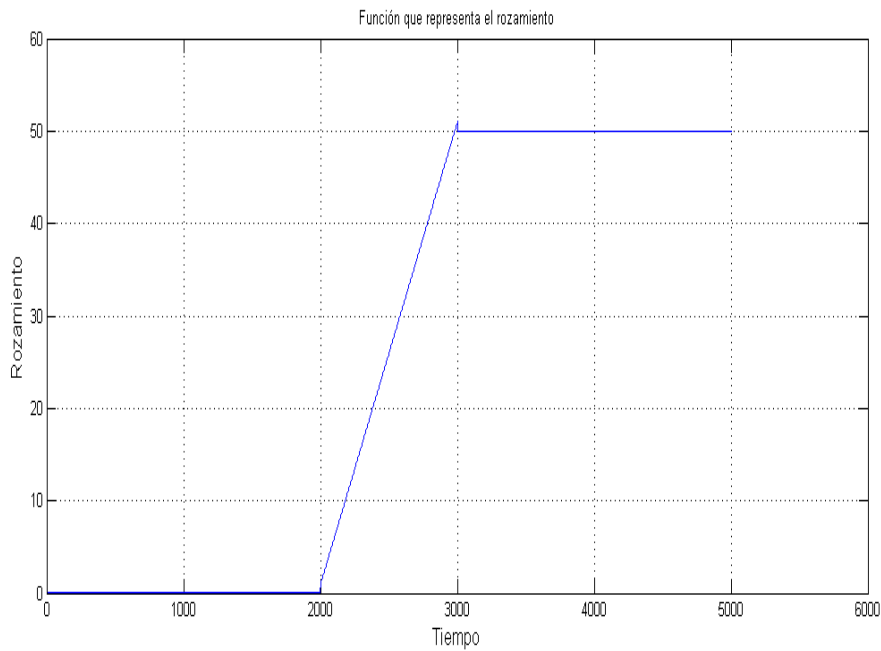


Figura 43: Función definida a trozos que representa el rozamiento.

es menos compleja y se estabiliza rápidamente, se introduce menos excitación en el estimador, lo que hace más complicado y difícil el cálculo de la estimación. Por este motivo, los estimadores basados en el gradiente y el de mínimos cuadrados estándar no logran calcular con precisión el valor objetivo.

6.3. Caso de estudio 3: péndulo simple con rozamiento variable

En este caso de estudio, se ha optado por considerar el factor de rozamiento del péndulo simple como una función definida a trozos dependiente del tiempo. El comportamiento de la función que va a representar el factor de rozamiento se muestra en la figura 43, donde al principio el rozamiento es prácticamente nulo para, a continuación, ir incrementando de forma lineal hasta alcanzar un valor alto constante.

En la figura 44 se muestra la salida proporcionada por la simulación de las ecuaciones del péndulo simple cuando el factor de rozamiento es una función variable en el tiempo. En este caso, el péndulo comienza a oscilar tanto para la posición como la velocidad; cuando comienza a subir el valor de la función de rozamiento, las oscilaciones son menores hasta que finalmente, cuando llega a un rozamiento muy alto, se detiene.

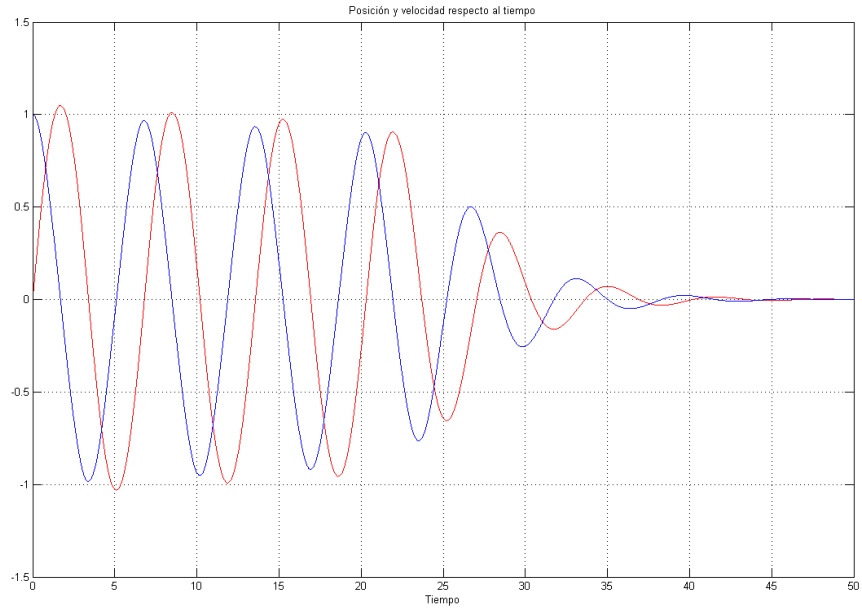


Figura 44: Salida del péndulo simple con un rozamiento variable.

En este apartado se va a proceder de forma similar a los anteriores. En primer lugar, en el apartado 6.3.1 se va a mostrar el comportamiento del estimador del gradiente frente al péndulo con rozamiento variable, cambiando el valor de la ganancia, tal y como puede observarse en las figuras 45, 46 y 47. A continuación, en las figuras 48, 49 y 50 del apartado 6.3.2 se ilustra el comportamiento del estimador de mínimos cuadrados. En el apartado 6.3.3 se puede consultar el resultado de aplicar el estimador de mínimos cuadrados con factor de olvido, ilustrado en las figuras 51, 52 y 53. En el apartado 6.3.4 se muestran los resultados que se han obtenido para el estimador de mínimos cuadrados con olvido exponencial variable, resumido en las figuras 54, 55 y 56. En las figuras 57, 58 y 59 del apartado 6.3.5 se muestran los resultados obtenidos para el estimador basado en redes neuronales de Hopfield. Para finalizar, en el apartado 6.3.6 se muestra una comparativa de los resultados arrojados por cada uno de los estimadores mencionados anteriormente, resumida en la figura 60.

6.3.1. Aplicación del método del gradiente

Al igual que en los casos de estudios con el rozamiento constante de los apartados 6.1.1 y 6.2.1, se han realizado pruebas sobre el mismo ejemplo con los mismos parámetros de entrada, pero cambiando el valor del parámetro de la

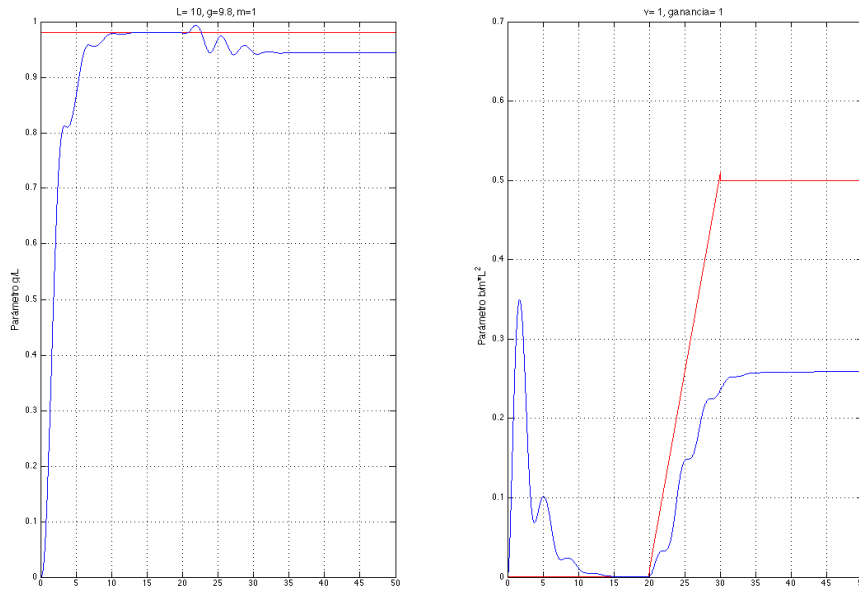


Figura 45: Resultado de la aplicación del método del gradiente al péndulo simple con rozamiento variable y ganancia $p_0 = 1$.

ganancia en el estimador. De esta forma se puede observar el comportamiento del método del gradiente cuando se tiene que el factor de rozamiento que afecta al sistema varía con el tiempo.

En la figura 45, donde se ha considerado una ganancia igual a uno, se observa que cuando el rozamiento es muy bajo, el estimador calcula correctamente el valor estimado, pero a medida que va incrementándose el factor de rozamiento, el estimador se desvía del valor correcto, tanto para el parámetro que depende del factor de rozamiento como para el que no.

En cambio, si se incrementa el valor del parámetro de la ganancia, la estimación se va ajustando correctamente al valor real, tal y como se puede observar en las figuras 46 y 47, donde puede apreciarse el cambio que sufre la estimación cuando empieza a incrementarse el valor del factor de rozamiento y cuando este se estabiliza en un valor muy alto.

En el caso de que se ajuste convenientemente el valor de la ganancia del estimador p_0 , se obtienen resultados cercanos a los valores reales, tal y como puede observarse en la figura 46, donde se ha establecido el valor de la ganancia del estimador a 1000.

Por tanto, para el estimador del gradiente con un factor de rozamiento variable con el tiempo, se observa cualitativamente la misma necesidad que cuando el

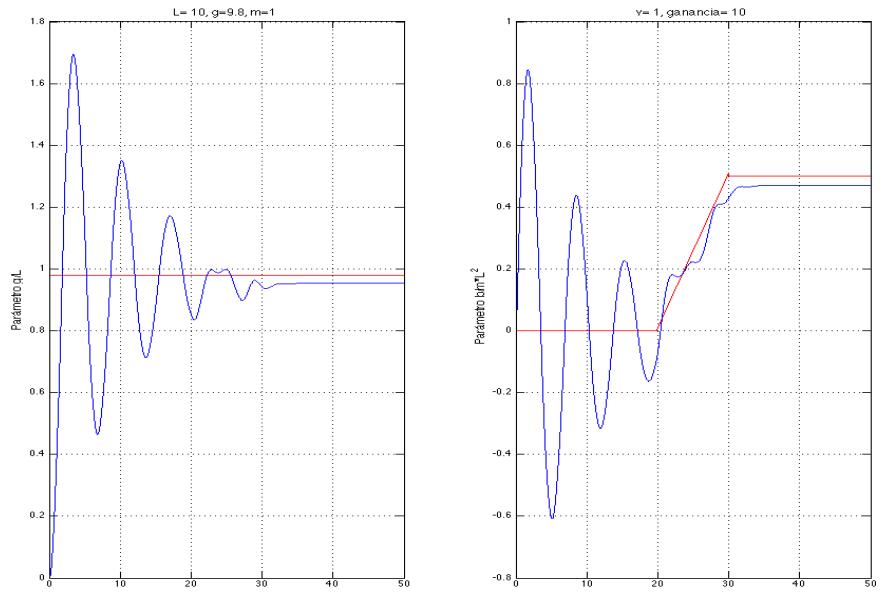


Figura 46: Resultado de la aplicación del método del gradiente al péndulo simple con rozamiento variable y ganancia $p_0 = 10$.

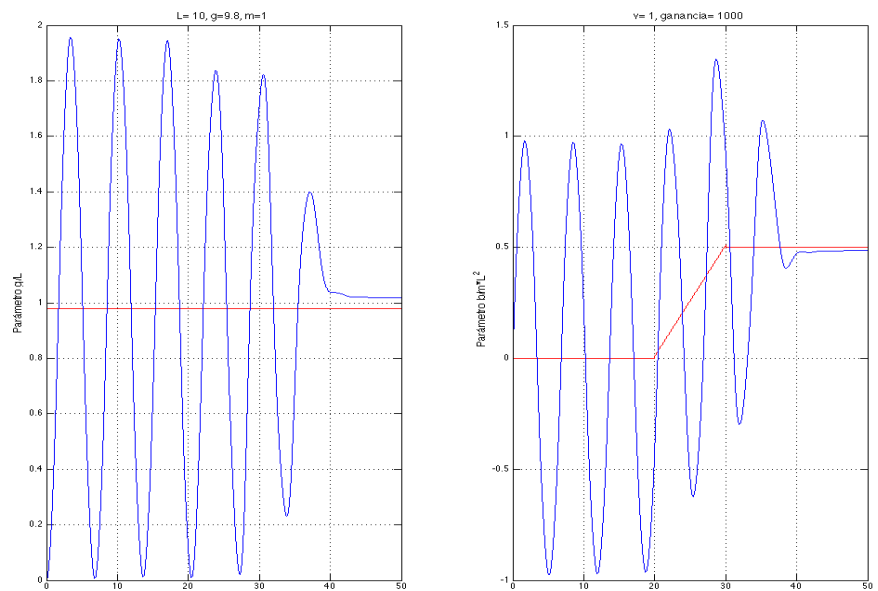


Figura 47: Resultado de la aplicación del método del gradiente al péndulo simple con rozamiento variable y una ganancia $p_0 = 1000$.

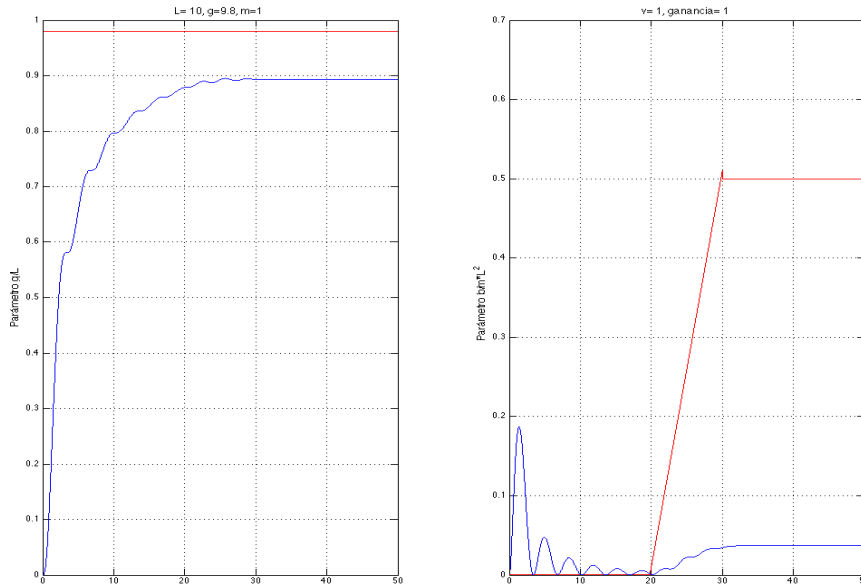


Figura 48: Aplicación del método de mínimos cuadrados con rozamiento variable y matriz identidad $P_0 = I$ como matriz de ganancia inicial.

rozamiento es constante: es preciso encontrar el valor de la ganancia que mejor ajusta la estimación, de forma que esta no produzca una salida oscilatoria.

6.3.2. Aplicación del método de mínimos cuadrados

Para la aplicación del método de mínimos cuadrados cuando el factor de rozamiento es variable con el tiempo, se han proporcionado los mismos valores iniciales que para los otros casos, variando la matriz de ganancias con los mismos valores que para las otras pruebas realizadas.

Los ejemplos ilustrados en las figuras 48, 49 y 50 muestran el comportamiento del método de mínimos cuadrados con la matriz identidad, con diez veces la matriz identidad y con mil veces la matriz identidad como matriz de ganancia inicial, respectivamente.

Con el valor más bajo de la matriz de ganancia (figura 48) se observa que a medida que el valor del factor de rozamiento varía en el tiempo, la estimación cambia y no estima de forma correcta ninguno de los dos parámetros.

Si se incrementa el valor de la matriz de ganancias, el resultado obtenido es el mostrado en las Figuras 49 y 50, donde los valores obtenidos convergen a un valor completamente distinto al valor correcto.

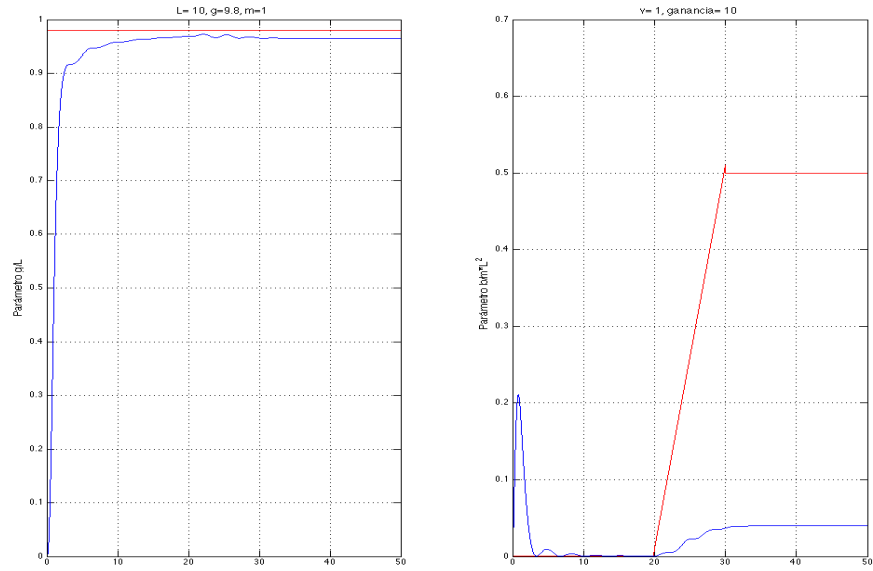


Figura 49: Aplicación del método de mínimos cuadrados al péndulo simple con rozamiento variable y una matriz de ganancias inicial $P_0 = 10 \cdot I$ en el estimador.

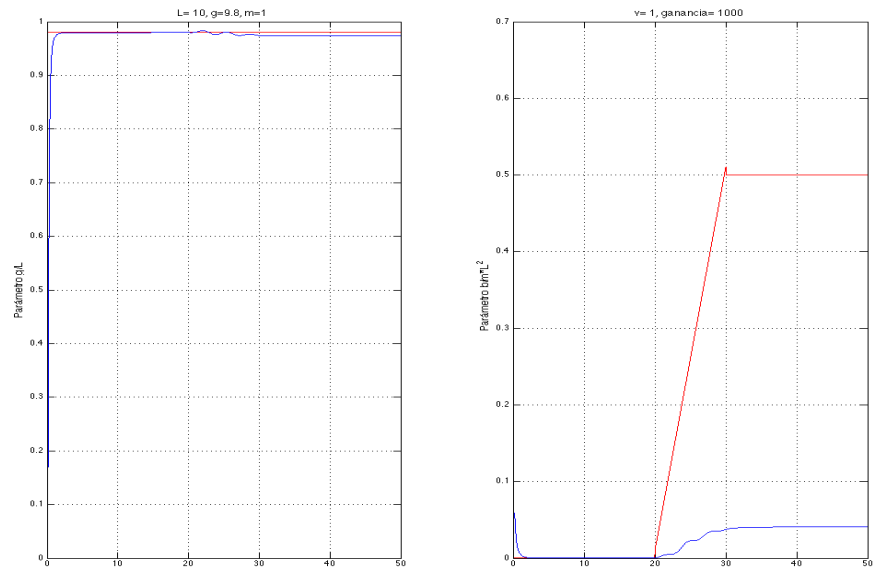


Figura 50: Método de mínimos cuadrados al péndulo simple con rozamiento variable y una matriz de ganancias inicial de valores altos $P_0 = 1000 \cdot I$ en el estimador.

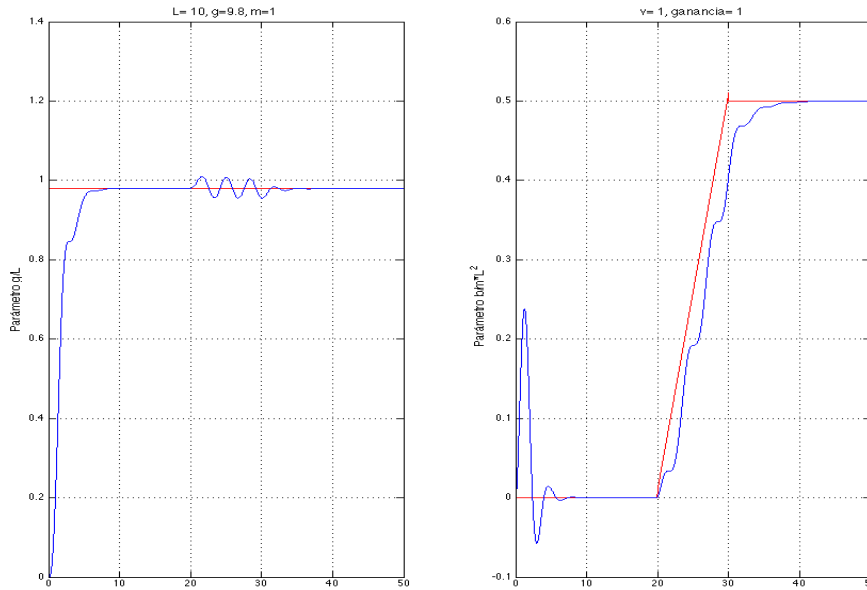


Figura 51: Método de mínimos cuadrados con factor de olvido en péndulo simple con rozamiento variable y la matriz identidad $P_0 = I$ como matriz de ganancia inicial.

6.3.3. Aplicación del método de mínimos cuadrados con factor de olvido

Para probar el método de mínimos cuadrados con factor de olvido en el caso de que el factor de rozamiento sea variable con el tiempo, se han realizado varias pruebas en las que se ha ido modificando el valor de la matriz de ganancias inicial del estimador. El resto de parámetros permanecen iguales que en los ejemplos anteriores.

En la figura 51 se puede observar el comportamiento de la estimación con una matriz de ganancias inicial muy baja. Para este caso, la estimación realizada converge correctamente para ambos parámetros, sobre todo en la franja constante de la función del factor de rozamiento, tanto para los valores bajos como altos. Sin embargo, se observa que cuando se va incrementando el rozamiento, la estimación tiende a oscilar.

Para el resto de pruebas, ocurre lo mismo que en la prueba anterior: cuando se incrementa el valor de la matriz de ganancias del estimador a 10 o a 1000, con un factor de olvido de $\lambda = 0,9$, el resultado mostrado en las figuras 52 y 53 permite observar que la estimación converge rápidamente y correctamente al valor del parámetro real.

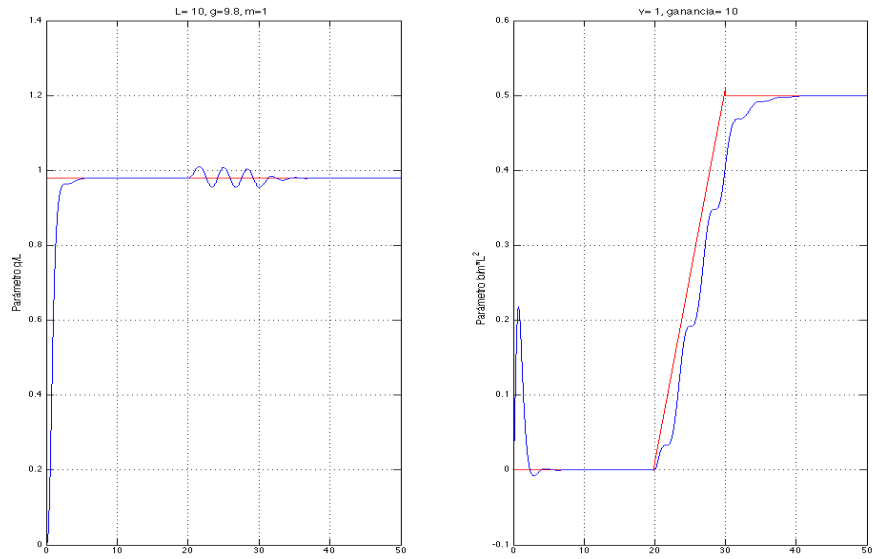


Figura 52: Mínimos cuadrados con factor de olvido en péndulo simple con rozamiento variable y diez veces la matriz identidad $P_0 = 10 \cdot I$ como matriz de ganancia inicial.

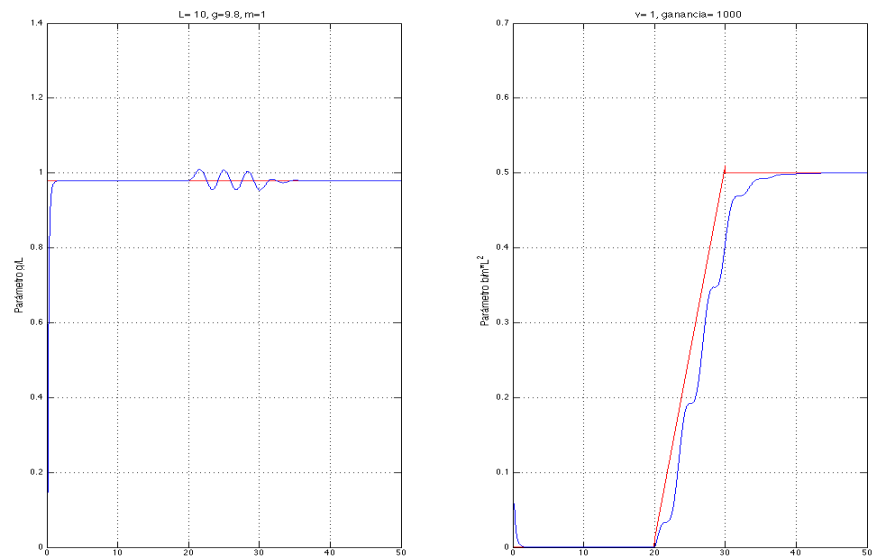


Figura 53: Mínimos cuadrados con factor de olvido en péndulo simple con rozamiento variable y diez veces la matriz identidad $P_0 = 1000 \cdot I$ como matriz de ganancia inicial.

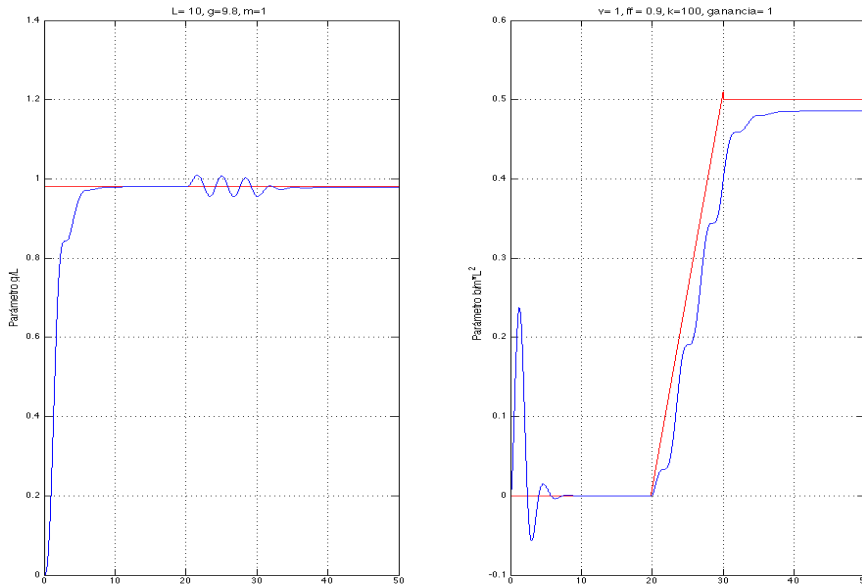


Figura 54: Mínimos cuadrados con olvido exponencial variable en péndulo simple con rozamiento variable con matriz de ganancias inicial $P_0 = I$ y magnitud $k_0 = 100$.

6.3.4. Aplicación del método de mínimos cuadrados con olvido exponencial variable

Las pruebas realizadas para el sistema dinámico del péndulo simple cuando el factor de rozamiento es una función variable en el tiempo y el método de mínimos cuadrados con factor de olvido exponencial variable han arrojado los resultados que se muestran a continuación.

La forma de proceder ha sido la misma que para el resto de casos de estudio, es decir, se han fijado una serie de valores a los parámetros y se ha ido variando la matriz de ganancias, para así poder observar el comportamiento de este método.

En la figura 54, se muestra el comportamiento de este método con la matriz identidad como matriz de ganancias inicial y un valor de la magnitud de la matriz de ganancias $k_0 = 100$. Se ha escogido este valor de k_0 porque se observó en los casos de estudio con rozamiento muy bajo y muy alto que era el valor que hacía que el estimador tuviese un mejor comportamiento a la hora de realizar las estimaciones.

En las figuras 55 y 56 se muestra el comportamiento del estimador con un valor de la matriz de ganancias de diez y mil veces la matriz identidad respectivamente. Se observa que, en los tres ejemplos, el estimador presenta un

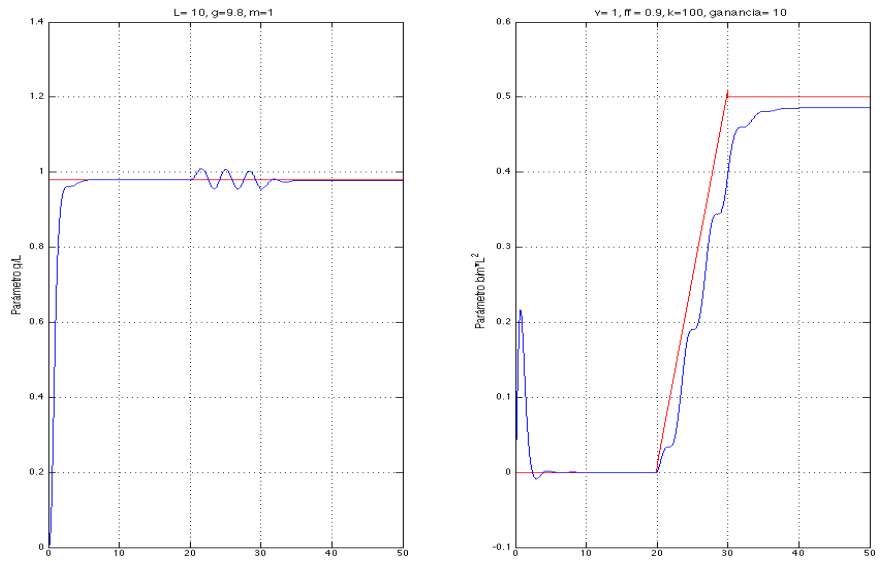


Figura 55: Mínimos cuadrados con olvido exponencial variable en péndulo simple con rozamiento variable con matriz de ganancias inicial identidad $P_0 = 10 \cdot I$ y magnitud $k_0 = 100$.

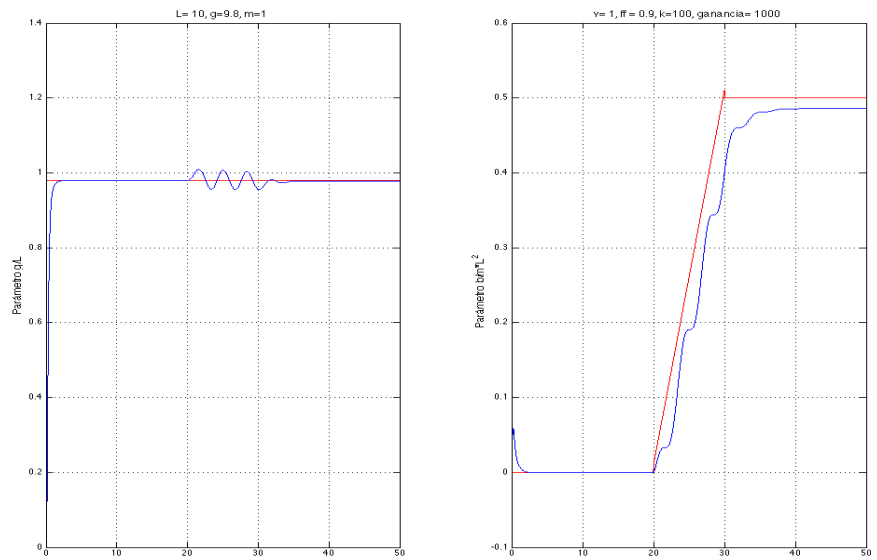


Figura 56: Mínimos cuadrados con olvido exponencial variable en péndulo simple con rozamiento variable con matriz de ganancias inicial identidad $P_0 = 1000 \cdot I$ y magnitud $k_0 = 100$.

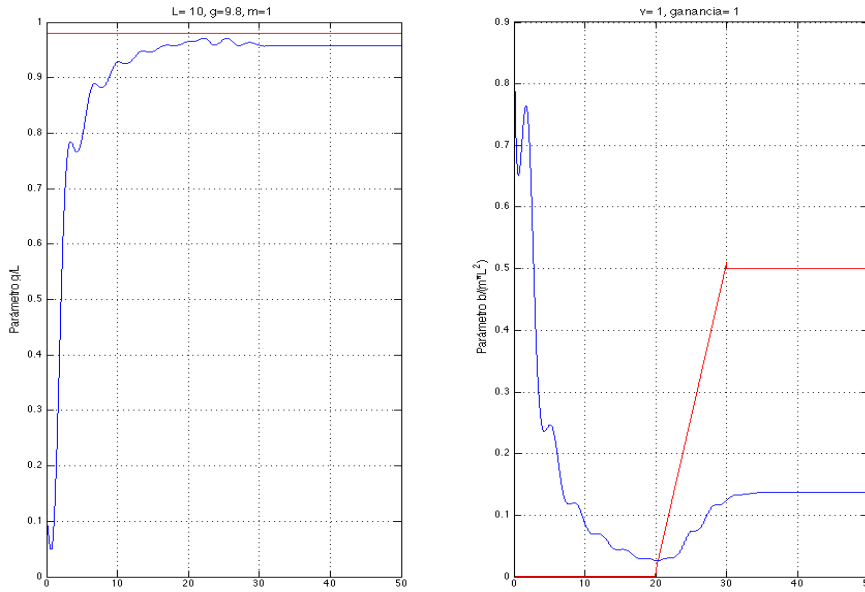


Figura 57: Estimador basado en redes neuronales de Hopfield en péndulo simple con rozamiento variable y ganancia $p_0 = 1$.

comportamiento similar: cuando el valor del factor de rozamiento es muy bajo, estima correctamente los parámetros, pero a medida que se va incrementando comienza a separarse del valor real y a no estimar de forma correcta.

6.3.5. Aplicación del estimador basado en redes neuronales de Hopfield

Las pruebas realizadas con el sistema dinámico no lineal del péndulo simple con rozamiento variable y el método de estimación de parámetros con redes de Hopfield han arrojado los resultados que se muestran a continuación.

Al igual que en el resto de apartados, en la primera prueba que se ha realizado, se ha establecido el valor del parámetro de la ganancia a $p_0 = 1$. El resultado se puede consultar en la Figura 57.

A continuación, se ha multiplicado por diez el valor del parámetro de ganancia del estimador. El resultado que se ha obtenido es el de la figura 58. En ambos casos, se observa que, cuando el rozamiento es bajo, el estimador converge hacia el valor correcto de los parámetros, pero cuando el factor de rozamiento comienza a variar el valor estimado difiere bastante del valor real.

Finalmente, se ha realizado sobre el mismo ejemplo otra prueba, pero en este caso el valor del parámetro de ganancia ha sido multiplicado por 1000. En la

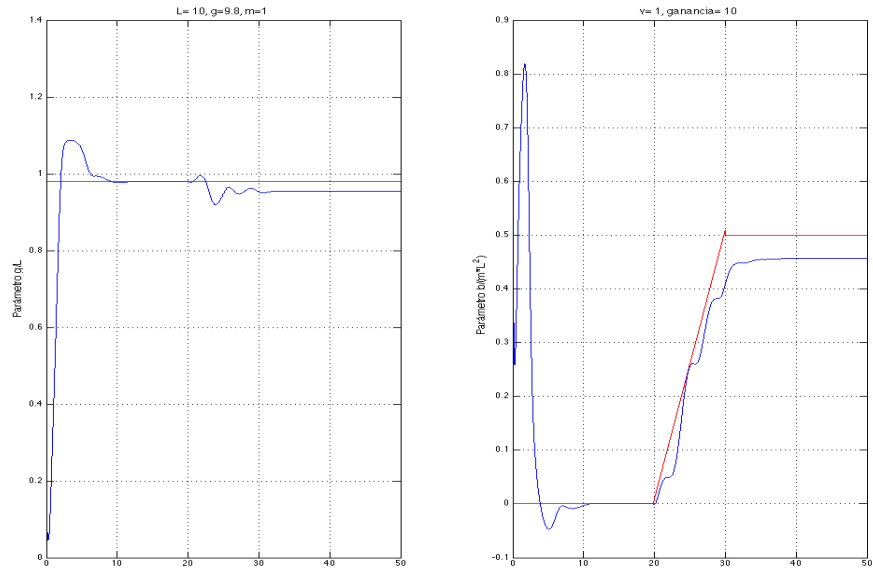


Figura 58: Estimador basado en redes neuronales de Hopfield en péndulo simple con rozamiento variable y ganancia $p_0 = 10$.

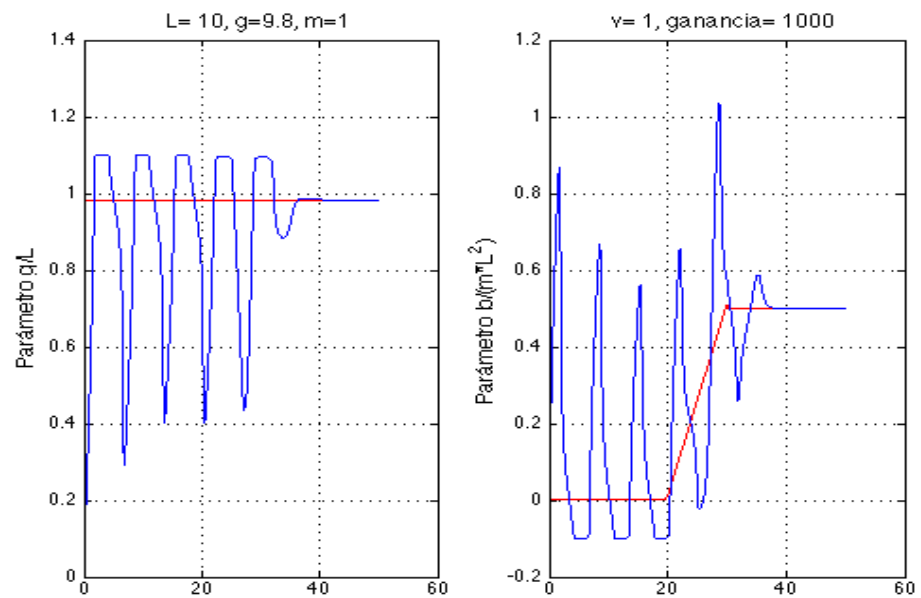


Figura 59: Estimador basado en redes neuronales de Hopfield en péndulo simple con rozamiento variable y ganancia $p_0 = 1000$.

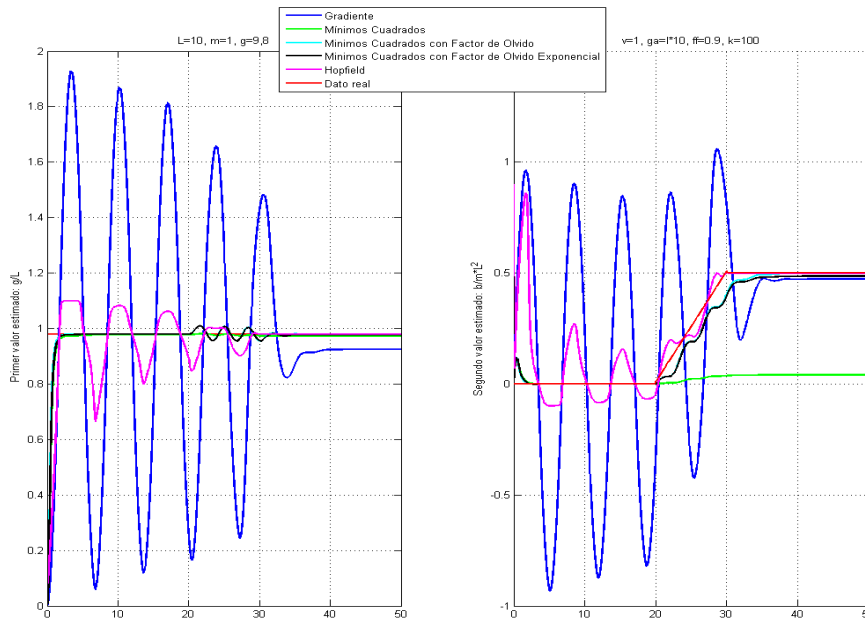


Figura 60: Comparación de todos los métodos con ganancia 10 ($P_0 = 10 \cdot I$ o $p_0 = 10$), factor de olvido $\lambda = 0,9$ y cota $k_0 = 100$.

figura 59 se muestra el resultado obtenido. En este caso se puede observar que el estimador no llega a converger al valor correcto de los parámetros cuando el factor de rozamiento es bajo y comienza a variar, ya que aparecen fuertes oscilaciones. En cambio, converge de forma correcta cuando el factor de rozamiento se estabiliza a un valor muy alto. Este comportamiento puede considerarse paradójico, ya que cuando el rozamiento es alto, la falta de excitación persistente supone un obstáculo importante a la mayoría de los estimadores.

6.3.6. Comparación de los métodos

En la figura 60 se muestra el comportamiento de todos los métodos cuando el factor de rozamiento es variable en el tiempo para el mismo ejemplo con ganancia 10 (matriz de ganancia inicial, para el caso de mínimos cuadrados, o ganancia constante, para el método de gradiente y el basado en redes de Hopfield). En la figura puede verse que el método que converge correctamente a los valores esperados es el de mínimos cuadrados con factor de olvido. El resto de estimadores convergen correctamente cuando el sistema está continuamente excitado, es decir, cuando apenas tienen rozamiento. En el momento en que el factor de rozamiento comienza a variar, la estimación es mucho más complicada

de realizar, incluso para el método que mejor se comporta (mínimos cuadrados con factor de olvido). Finalmente, cuando el rozamiento se ha incrementado tanto que el sistema se ha estabilizado, es el estimador basado en redes de Hopfield el único que proporciona con precisión el valor correcto de los parámetros.

6.4. Caso de estudio 4: ruido blanco en los estimadores

Para el sistema dinámico no lineal que se está estudiando en este Trabajo Fin de Máster, se va a realizar una comparación del efecto que produce la introducción de un determinado ruido en el comportamiento de los diferentes métodos de estimación mencionados. En la realización de las diferentes pruebas, se va a considerar el ruido blanco. Se trata de una señal aleatoria caracterizada porque sus valores en distintos instantes temporales no guardan correlación estadística entre sí.

Esta sección se ha dividido en tres partes: en primer lugar, en la sección 6.4.1 se va a estudiar el comportamiento de los estimadores con un rozamiento bajo, ilustrado en las figuras 61 y 62; a continuación, en la sección 6.4.2 se muestra el comportamiento ante un rozamiento alto, que puede consultarse en las figuras 63 y 64; finalmente, la sección 6.4.3 muestra, en las figuras 65, 66 y 67; el comportamiento de los diferentes estimadores ante un rozamiento variable en el tiempo.

6.4.1. Sistemas con rozamiento bajo

En este apartado se muestra una comparación del comportamiento de los diferentes estimadores ante un rozamiento bajo dado por $b = 0,01$. En la figura 61 se puede consultar la salida proporcionada con un ruido blanco bajo, del media $\mu = 0$ y desviación típica $\sigma = 0,01$.

A continuación, en la figura 62 puede verse la salida ante un ruido que se considera alto, en el que la desviación típica se ha incrementado hasta 0,05.

Puede observarse para ambos ejemplos, que el resultado proporcionado por los estimadores arrojan unos resultados bastante fieles a la realidad, especialmente todos los métodos basados en mínimos cuadrados, mientras que el método de gradiente y el basado en redes de Hopfield presentan fuertes oscilaciones.

6.4.2. Sistemas con rozamiento alto

En este apartado se muestra una comparación del comportamiento de los diferentes estimadores ante un rozamiento alto, definido como $b = 50$. En la figura 63 se puede consultar la salida proporcionada con un ruido blanco bajo, para el que la desviación típica se ha fijado en $\sigma = 0,01$.

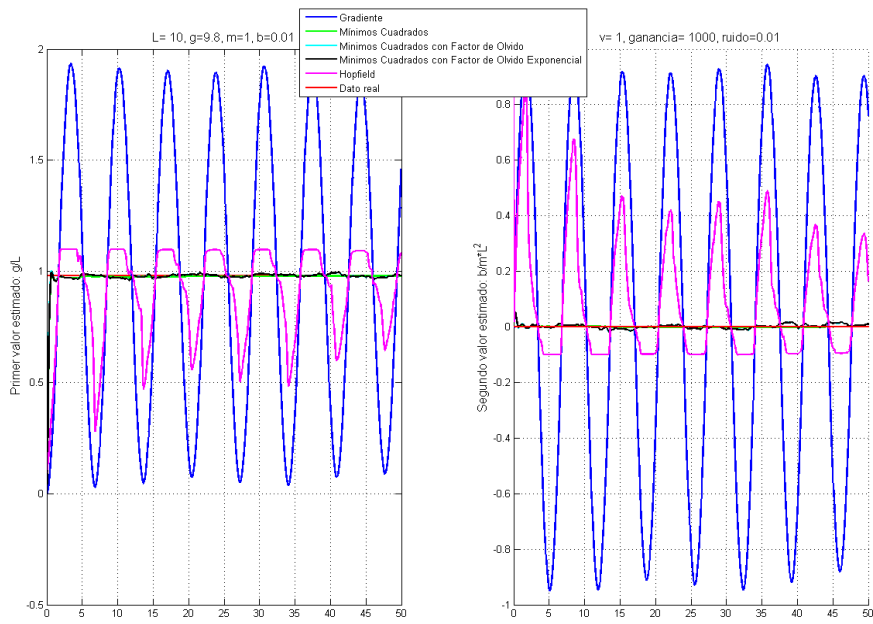


Figura 61: Comparación de todos los métodos para el péndulo con rozamiento bajo $b = 0,01$ y ruido bajo $\sigma = 0,01$.

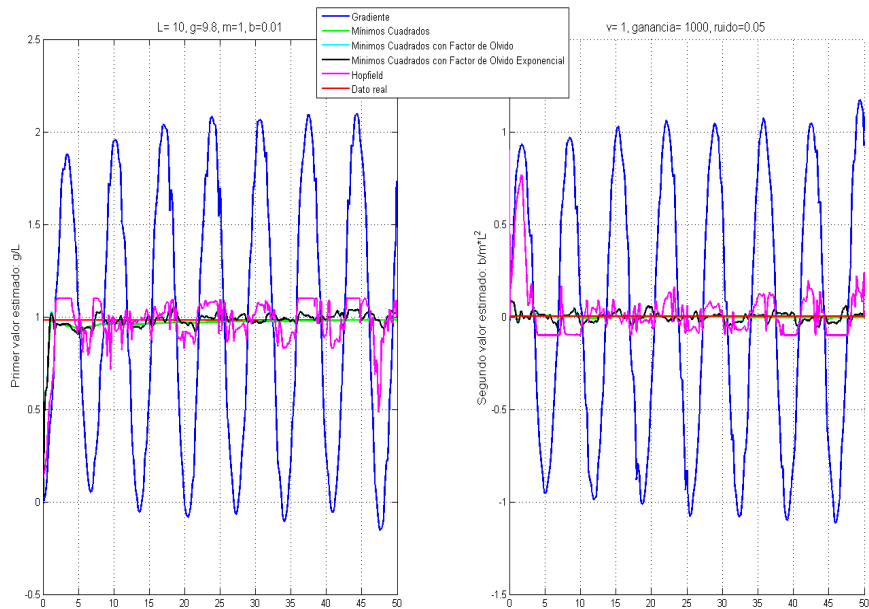


Figura 62: Comparación de todos los métodos para el péndulo con rozamiento bajo $b = 0,01$ y ruido alto $\sigma = 0,05$.

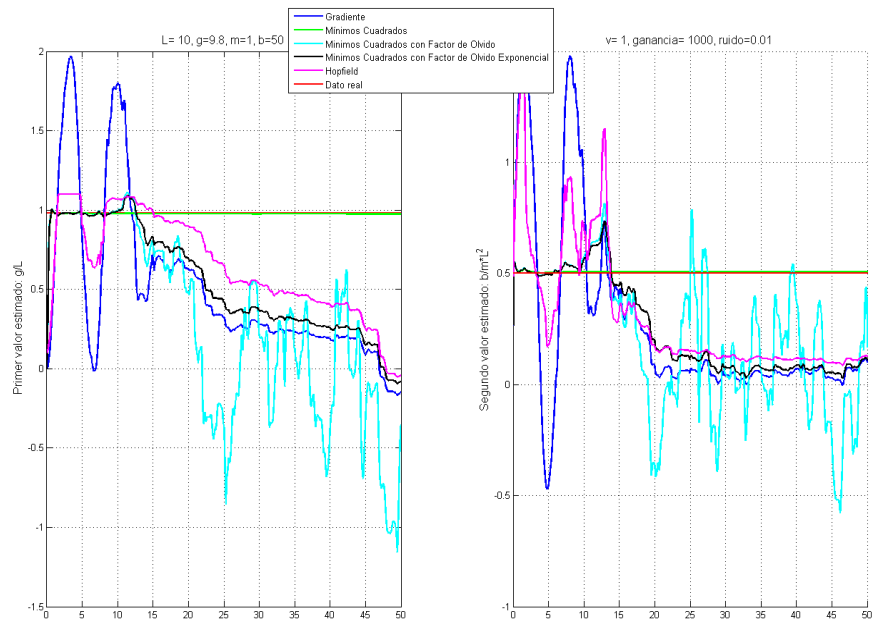


Figura 63: Comparación de todos los métodos para el péndulo con rozamiento alto $b = 50$ y ruido bajo $\sigma = 0,01$.

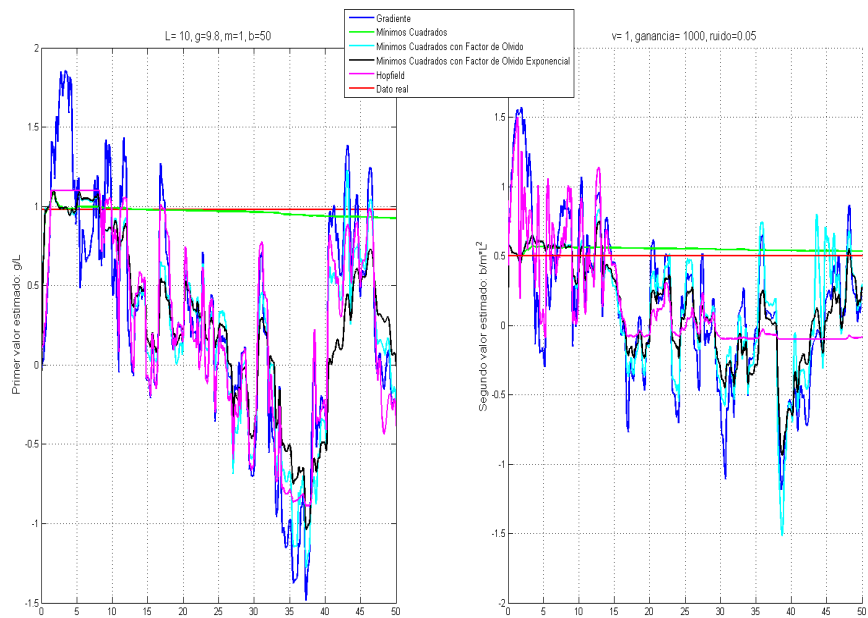


Figura 64: Comparación de todos los métodos para el péndulo con rozamiento alto $b = 50$ y ruido alto $\sigma = 0,05$.

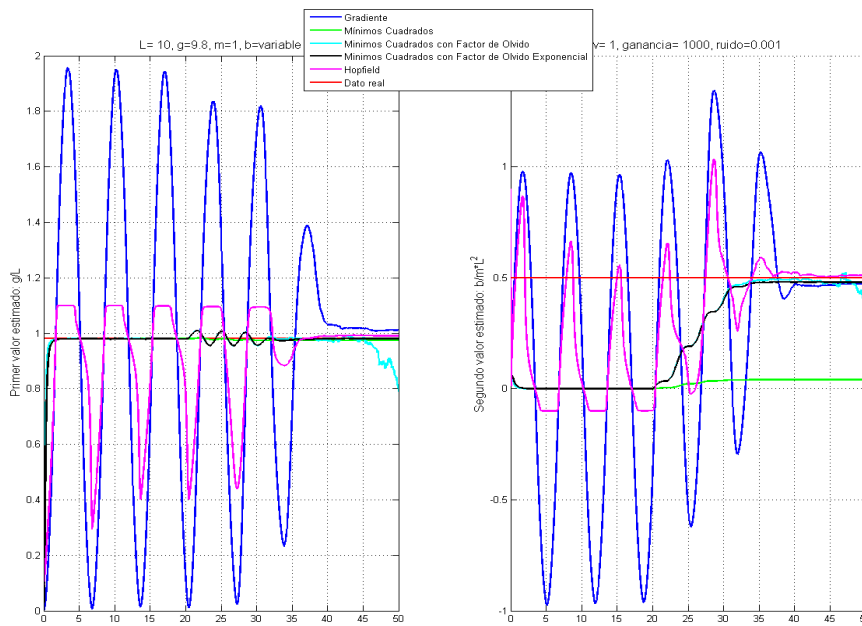


Figura 65: Comparación de todos los métodos para un rozamiento variable y un ruido despreciable $\sigma = 0,001$.

A continuación, en la figura 64 puede verse la salida ante un ruido que se considera alto, con desviación típica del orden de $\sigma = 0,05$.

Puede observarse que, cuando el ruido es bajo, el resultado proporcionado por el estimador de mínimos cuadrados con factor de olvido para el primer parámetro a estimar arroja un resultado bastante fiel a la realidad, ya que este parámetro no depende del rozamiento. En cambio, para la estimación del segundo parámetro, el estimador que realiza un cálculo correcto es el de mínimos cuadrados estándar.

En el caso de ruido alto, todos los estimadores proporcionan un resultado similar y ninguno es capaz de aproximarse al valor correcto de ninguno de los dos parámetros.

6.4.3. Sistemas con rozamiento variable

En este apartado se muestra una comparación del comportamiento de los diferentes estimadores ante un rozamiento variable con el tiempo. En la figura 65 se puede consultar la salida proporcionada con un ruido blanco bajo, con desviación $\sigma = 0,001$, que se considera prácticamente despreciable. En este caso, se puede ver que el método que mejor se comporta para la estimación de los parámetros es el de mínimos cuadrados con factor de olvido exponencial.

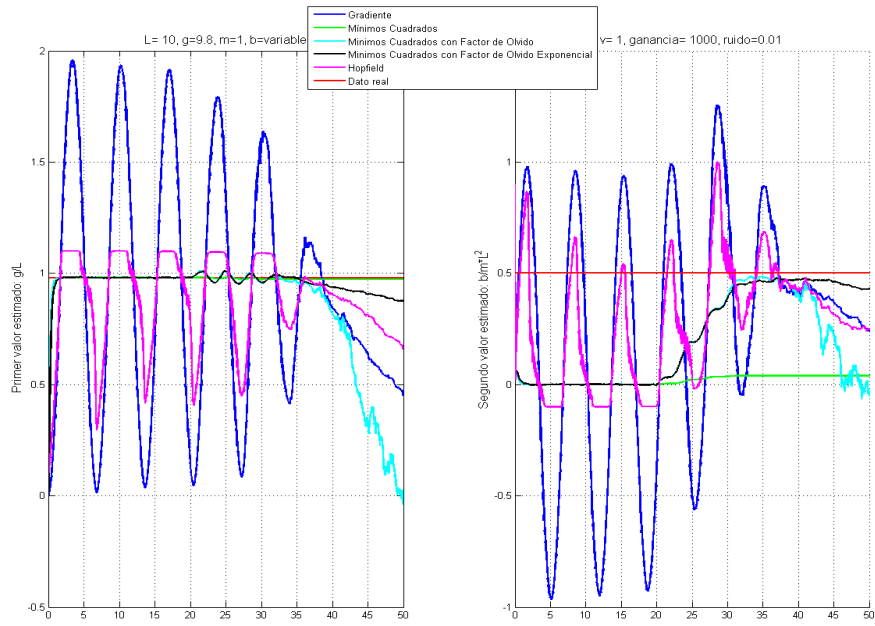


Figura 66: Comparación de todos los métodos para un rozamiento variable y un ruido bajo $\sigma = 0,01$.

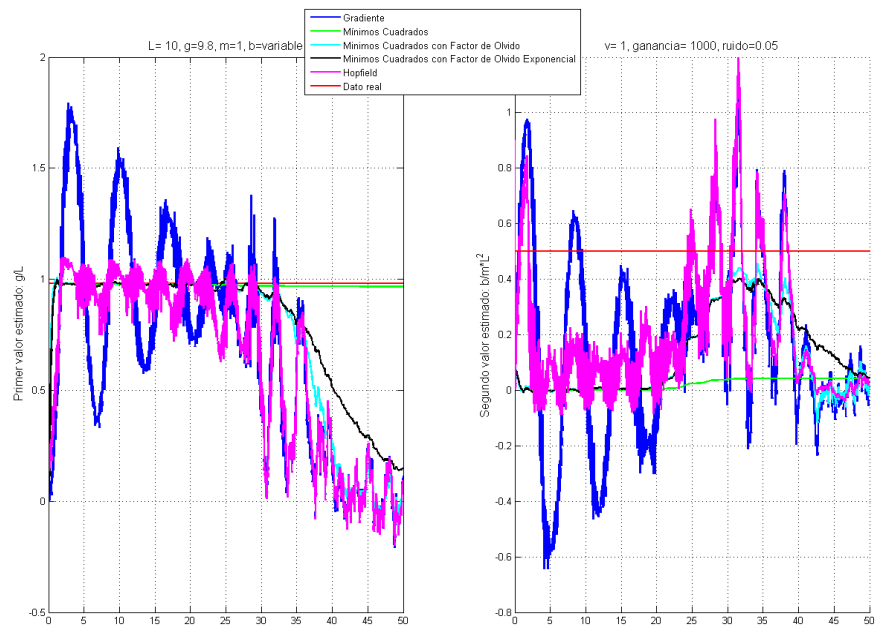


Figura 67: Comparación de todos los métodos para un rozamiento variable y un ruido alto $\sigma = 0,05$.

Para la segunda simulación que se ha realizado, se ha considerado un ruido bajo, con desviación del orden de $\sigma = 0,01$. En este caso, la salida proporcionada puede verse en la figura 66. En esta figura, se observa que para ambos parámetros el comportamiento del estimador de mínimos cuadrados con factor de olvido exponencial es el que más se aproxima al valor real en todas las fases del rozamiento, aunque cuando el rozamiento comienza a ser muy alto la estimación empieza a alejarse de los valores reales.

A continuación, en la figura 67 puede verse la salida ante un ruido que se considera alto, del orden de 0.05. En este caso, la salida de los estimadores es diferente en el cálculo del primer parámetro y del segundo. En la estimación del primer parámetro, que no depende del rozamiento a lo largo del tiempo, el estimador que mejor comportamiento tiene es el de mínimos cuadrados. El resto de estimadores cuando el rozamiento comienza a variar y a ser muy alto tienen comportamiento variable que difiere bastante de los valores reales. En cambio para la estimación del segundo parámetro, todos los estimadores tienen un comportamiento erróneo, sobre todo cuando el rozamiento se vuelve muy alto.

7. Discusión

En este Trabajo Fin de Máster se ha realizado un estudio sobre la efectividad de los métodos de estimación del gradiente, mínimos cuadrados, mínimos cuadrados con factor de olvido, mínimos cuadrados con olvido exponencial variable y un estimador basado en redes neuronales de Hopfield. Todos los estimadores se han probado sobre un sistema dinámico no lineal.

De forma general, para el caso del péndulo simple, se observa que en los ejemplos cuyo factor de rozamiento es muy alto, los resultados que se obtienen están bastante alejados de los valores correctos, en comparación con el resto de simulaciones realizadas.

Cuando el factor de rozamiento es muy bajo, se observa que todos los estimadores convergen de forma correcta al valor objetivo, pero dependiendo del estimador, se obtiene dicho valor más rápido en algunos casos. Para este ejemplo en concreto, el método de mínimos cuadrados con factor de olvido y mínimos cuadrados con factor de olvido exponencial son los que mejor se comportan.

Para el caso del péndulo con el estimador del gradiente, si el rozamiento es muy alto no hay suficiente excitación persistente, por lo que no estima de forma correcta. Para paliar este problema se ha recurrido a ajustar convenientemente la ganancia para obtener el resultado deseado. Sin embargo, si se aumenta demasiado la ganancia la estimación se vuelve oscilatoria y no es válida. Este comportamiento apoya que en algunos casos será necesario abandonar el es-

timador de gradiente y tratar de estimar los parámetros del sistema con otro estimador, por ejemplo el de mínimos cuadrados. En efecto, para el estimador de mínimos cuadrados, con una matriz de ganancia inicial con valores bajos se ha observado que el estimador converge más rápido y se aproxima más a los valores reales. A continuación, se ha incrementado el valor de la matriz de ganancia y se observa que estima correctamente los parámetros pero, incluso con este método, cuando el factor de rozamiento es muy alto, el estimador no converge de forma correcta.

Por lo que respecta al estimador de mínimos cuadrados con factor de olvido, se han realizado las mismas pruebas que para el de mínimos cuadrados estándar y se ha observado que, al igual que los otros dos estimadores, cuando el sistema está constantemente excitado se aproxima mucho más rápido a los valores reales. Por el contrario, cuando el factor de rozamiento es extremadamente alto, no da resultados correctos, por lo que en este caso es preferible optar por el estimador de mínimos cuadrados con olvido exponencial variable. Con este último, ajustando convenientemente los valores del estimador, se obtienen los valores de los parámetros de forma correcta.

En resumen, las limitaciones de los estimadores para realizar una estimación correcta, en el caso del rozamiento muy alto, se deben a que el estado del sistema converge de forma muy rápida y los estimadores no reciben suficiente información para realizar la estimación debido a esta convergencia. Este comportamiento se observa claramente cuando se ha introducido un factor de rozamiento variable con el tiempo. En este caso, cuando el rozamiento es muy bajo, todos los estimadores calculan correctamente el valor de los parámetros, pero a medida que va variando el valor del factor de rozamiento, los estimadores comienzan a oscilar y a no calcular correctamente el valor de los parámetros reales.

8. Conclusiones y trabajos futuros

Para el sistema dinámico no lineal estudiado en este Trabajo Fin de Máster, el péndulo simple, se concluye que:

- Los estimadores se comportan mejor o peor dependiendo de las condiciones iniciales del sistema al que se apliquen. Además, la capacidad de estimación se ve fuertemente afectada por la elección de los parámetros de diseño, tales como la ganancia, en el caso del método de gradiente y del estimador basado en redes de Hopfield, la matriz de ganancia inicial para el método de mínimos cuadrados, o el factor de olvido.
- Cuando el rozamiento es bajo, todos los métodos tienen un mejor compor-

tamiento. Esto se explica porque los estimadores cuentan con más datos para poder realizar correctamente la estimación.

- Si la dinámica del sistema es menos compleja y se estabiliza rápidamente, se introduce menos excitación en el estimador, lo que hace más complicado el cálculo de la estimación.

La primera observación mencionada arriba puede explicarse por los teoremas *no free lunch* [12]: ningún método proporcionará de manera consistente resultados superiores a otro para todos los sistemas y en todas las circunstancias.

La relación de la calidad de la estimación con la complejidad de la dinámica del sistema puede cuantificarse de manera rigurosa. Para ello, aparece en la teoría el concepto que se denomina *excitación persistente*. Este trabajo comprueba que se trata de un factor crítico para la eficiencia de los métodos de estimación de parámetros.

Los resultados del presente trabajo son congruentes con los encontrados por Slotine [10]. No obstante, resulta difícil establecer comparaciones entre ambos estudios puesto que este trabajo sólo se refiere a un sistema dinámico no lineal en concreto.

Como trabajo futuro se recomienda realizar un estudio comparativo de todos los métodos de estimación descritos para otro sistema dinámico no lineal, como puede ser el oscilador de van der Pol y en sistemas más complicados, como pueden ser un modelo de coagulación de sangre en aneurismas cerebrales [2] o el modelo cinético de un reactor isotérmico formulado en 1981 por Dow Chemical Company [11], donde hay un gran número de parámetros a estimar.

Bibliografía

- [1] S. Abe. Theories on the Hopfield Neural Networks. In *Proc. IEE International Joint Conference on Neural Networks*, volume I, pages 557–564, 1989.
- [2] Y. Aida and K. Shimano. Modelling of blood coagulation in cerebral aneurysms. In R. Kiss and C. Brebbia, editors, *Modelling in Medicine and Biology*, volume X of *WIT Transactions on Biomedicine and Health*, pages 51–62. WIT Press, 2013.
- [3] K. J. Astrom and B. Wittenmark. *Adaptive control*. Prentice Hall, 1995.
- [4] M. Atencia, G. Joya, and F. Sandoval. Parametric Identification of Robotic Systems with Stable Time-varying Hopfield Networks. *Neural Computing & Applications*, 13(4):270–280, 2004.

- [5] M. Atencia, G. Joya, and F. Sandoval. Hopfield Neural Networks for Parametric Identification of Dynamical Systems. *Neural Processing Letters*, 21(2):143–152, 2005.
- [6] H. Khalil. *Nonlinear systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River NJ, 2nd edition, 1996.
- [7] K. I. Krstic, M. and P. Kokotovic. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. Wiley-Interscience Publication, 1995.
- [8] L. Ljung. *System identification : theory for the user*. Prentice Hall, 1999.
- [9] S. Sastry and M. Bodson. *Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs NJ, 1989.
- [10] J. Slotine and W. Li. *Applied nonlinear control*. Prentice Hall, 1991.
- [11] Stortelder, W J H. *Parameter estimation in nonlinear dynamic systems*. CWI, Amsterdam, 1998.
- [12] J. Vandewalle, J. Suykens, B. De Moor, and A. Lendasse. State-of-the-art and evolution in public data sets and competitions for system identification, time series prediction and pattern recognition. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. ICASSP 2007*, pages IV–1269–IV–1272. IEEE, 2007.