UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática

Modelado de Toma de Decisión con Coalición de Criterios e Información Lingüística

Tesis que presenta el Ingeniero

Rubén Alfredo Bernal

Para optar al título de **DOCTOR**

Director: Dr. José Ignacio Peláez Sánchez

Codirector: Dr. Marcelo Javier Karanik

Málaga – España

Octubre – 2015

AUTOR: Rubén Alfredo Bernal
http://orcid.org/0000-0001-6842-8933

EDITA: Publicaciones y Divulgación Científica. Universidad de Málaga

A mi esposa e hijos

La memoria titulada “Modelado de Toma de Decisión con Coalición de Criterios e Información Lingüística” que presenta D. Rubén Alfredo Bernal para optar al grado de doctor, ha sido elaborada en el departamento de Lenguajes y Ciencias de la Computación de la Universidad de Málaga, bajo la dirección del Doctor D. José Ignacio Peláez Sánchez y la codirección del Doctor D. Marcelo Karanik.

Málaga, Octubre 2015

El Doctorando	El Director	El Codirector
Rubén Alfredo Bernal	Dr. José Ignacio Peláez Sánchez	Dr. Marcelo Karanik

Agradecimientos

Después del caminar que arrancó hace varios años para la confección de esta tesis, es preciso dar gracias a muchas personas por las enseñanzas recibidas pero especialmente por los momentos vividos y compartidos.

Especialmente al Dr. José Ignacio Peláez Sánchez, mi director de tesis, por su valioso aporte y por invitarme a pensar por caminos diferentes.

También quiero agradecer profundamente al Dr. Marcelo Karanik, mi codirector de tesis, por su dedicación, su apoyo incondicional y largas charlas de debates.

A mi padre, porque desde el cielo estará orgulloso por el logro obtenido y a mi madre por su silencio y contención.

Finalmente, debo destacar la invalorable ayuda de mi esposa e hijos, por alentarme a seguir y por entender los motivos que muchas veces les privaron de la presencia de su esposo y padre.

Rubén Alfredo Bernal

Málaga – España
Octubre 2015

Contenidos

Figuras

Tablas

Capítulo 1 Introducción

En este capítulo se introduce el concepto de toma de decisiones como un aspecto inevitable en la vida, se destacan los operadores de agregación como herramientas indispensable de apoyo a la decisión.

Se realiza además una breve distinción de los operadores clásicos y su limitada utilidad respecto al modelado de situaciones de consenso por mayoría o cuando existe algún tipo de interacción entre los criterios evaluados en el proceso de toma de decisión.

1.1. Toma de Decisiones

Desde el principio de la vida, los seres humanos enfrentamos un sinnúmero de situaciones donde es necesario decidir qué camino seguir. Tomamos decisiones continuamente, algunas veces por motivos significativos y trascendentes, tales como alcanzar un noble ideal, formar una familia, tener hijos o elegir la actividad que deseamos realizar durante nuestra existencia; aunque no son más que unas pocas a lo largo de toda una vida.

La mayoría de las veces decidimos por cosas menos importantes. Qué ropa ponernos, qué desayunar o cenar o el lugar para disfrutar las vacaciones. La inmensa mayoría de nuestras decisiones son pequeñas, fútiles o intrascendentes. Sin embargo, el conjunto total de las grandes y pequeñas decisiones es lo que nos define. Somos, en definitiva, la suma de cada una de esas elecciones.

Normalmente, un problema de esta naturaleza, consiste en seleccionar alternativas apropiadas de un conjunto de alternativas posibles que pueden ser evaluadas respecto de un número de criterios o atributos. Estas cuestiones pueden volverse sumamente complejas, sobre todo cuando se consideran diferentes ambientes del problema, como por ejemplo bajo situaciones de incertidumbre, de riesgo o con datos imprecisos. Si a estas circunstancias se le suma la necesidad de lograr un consenso entre personas que pueden intervenir y las interacciones que pueden darse entre los criterios, puede no ser sencillo escoger la alternativa más adecuada en el proceso decisorio.

1.1.1 ¿Cuáles son las decisiones importantes?

William Starbuck expresa claramente: "Tomar una decisión implica el fin de la deliberación y el inicio de la acción". A diario los seres humanos deben tomar decisiones, tanto a nivel personal, familiar, organizacional o en niveles de mayor envergadura. Por esta razón, el hombre ha estado en una constante búsqueda de herramientas y conocimientos que lo ayuden en dicha tarea. Tomar decisiones basadas en la mera intuición puede provocar, a menudo, que las acciones que se inicien como consecuencia de estas, no sean las más adecuadas.

Una decisión, normalmente implica cambios, y la necesidad de asumir un riesgo como parte ineludible de cada decisión tomada, debido a que siempre existirán alternativas que son suprimidas. Las personas, los gobiernos u organizaciones, etc., se ven obligados a calcular y gestionar los riesgos asociados a tomar buenas o malas decisiones por el impacto que pueden tener en sus bienes o activos.

Sin lugar a dudas, en los diversos aspectos de la vida, el proceso de elegir una alternativa, armar un ranking o clasificarlas, es una tarea constante y de crucial importancia.

Así por ejemplo, en un proceso de evaluación de proyectos de cualquier naturaleza, donde es necesario realizar una asignación de recursos lo más adecuadamente posible, de modo de maximizar los beneficios y minimizar gastos y posibles pérdidas, es necesario contar con herramientas que permitan seleccionar los más rentables, priorizando los disponibles de la manera más objetiva posible. Una decisión errónea, puede provocar la asignación de recursos (económicos, humanos, de infraestructura, etc.) a proyectos que no son convenientes desplazando a otros que sí lo son.

Los programas sociales o gubernamentales tampoco escapan a situaciones donde deben tomarse decisiones adecuadas, sobre todo porque existen factores como distorsiones económicas, impuestos, aranceles, subsidios, precios, monopolios, oligopolios, impacto ambiental, costos de inversión, de mantenimiento, de operación, etc., que pueden perturbar el proceso decisorio.

Similarmente, las entidades financieras pertenecen a otro ámbito donde el proceso de toma de decisiones es fundamental. El riesgo que posee una entidad como consecuencia del incumplimiento de las obligaciones contractuales de sus contrapartes es un aspecto que acarrea múltiples inconvenientes administrativos y de costos si las decisiones tomadas son incorrectas. Por lo tanto, será altamente deseable que estas entidades dispongan de métodos más precisos que permitan decidir qué clientes minimizan el riesgo para ofrecerles sus productos.

Cuando estas cuestiones exceden el nivel personal o de una única entidad, la toma de decisiones puede requerir el acuerdo de la mayoría de los decisores, buscando además disminuir o atenuar las objeciones de la minoría y alcanzar así decisiones por consenso.

1.1.2 ¿Existen Procesos Formales para tomar decisiones?

En estudios realizados para medir los límites cognitivos (Miller, 1956), se establece que una persona puede manejar entre cinco y nueve piezas de información de manera simultánea. Esto implica que las limitaciones cognitivas pueden generar, en ciertas situaciones, que el decisor no pueda determinar eficientemente la importancia de ciertas características relevantes para el proceso de toma de decisión. Si bien existen técnicas para sintetizar información y detectar lo que realmente es relevante de una situación, las limitaciones cognitivas propias del decisor pueden también incrementar sustancialmente el grado de dificultad en la selección de la alternativa adecuada.

Es por ello que constantemente se proponen métodos que buscan minimizar la complejidad del proceso de toma de decisiones y hacerlo más sencillo para el hombre.

Dentro de este ámbito, se han desarrollado diferentes esquemas que intentan dar respuesta al problema de la toma de decisión, como son, entre otros: los grafos de preferencias (Roubens and Vincke, 2012), el proceso analítico jerárquico (Saaty, 1988), los métodos Electre (Roy, 1991) (Figueira et al., 2005), toma de decisión lingüística (Herrera and Herrera-Viedma, 2000) (Massanet et al., 2014) (Xu, 2008) (Delgado et al., 1993), etc., teniendo como nexo común todos ellos el uso de operadores de agregación ya sea en una o en varias de sus fases de desarrollo.

En un proceso de decisión donde probablemente se evalúen alternativas frente a distintos criterios es necesario contar con mecanismos que permitan obtener una media o valor global para cada alternativa teniendo en cuenta los criterios analizados.

Este mecanismo, normalmente denominado agregación, se implementa a partir de funciones u operadores de agregación que permiten combinar diferentes valores en un único valor; el cual puede ser visto como representativo de las valoraciones de entrada.

El proceso de agregación puede realizarse de diferentes maneras de acuerdo a lo que se espera de dicho proceso (semántica de agregación), a la naturaleza de los valores a agregar y de la escala que se utilice. Por lo tanto, de acuerdo al dominio de aplicación del problema los diferentes tipo de operadores pueden ser útiles o no (Marichal, 1998).

Existen funciones de agregación ampliamente utilizadas, dentro de las cuales la media aritmética ponderada es una de ellas. Asimismo, los operadores OWA (Yager, 1988), en todas sus variantes, están siendo utilizados considerablemente en los últimos años. Sin embargo no permiten modelar situaciones donde es necesario tener un valor representativo de la mayoría (Peláez and Doña, 2003a) (Peláez et al., 2007) o cuando los criterios evaluados no son independientes unos de otros (Marichal, 2000).

1.1.3 ¿Qué es la coalición de criterios?

En un proceso de TD bajo incertidumbre, donde existen varios criterios y varias alternativas, es posible encontrar dependencias entre los criterios que son evaluados en el proceso decisorio. Es decir, que existan agrupaciones de criterios cuya presencia de manera conjunta puede tener mayor o menor peso (importancia) que la suma de la importancia de dichos criterios por separado o tomados individualmente (Tan, 2011).

La multiplicidad de criterios a considerar es un componente importante que se presenta en numerosos ámbitos y que normalmente implica un gran esfuerzo al momento de construir un modelo que refleje sus interacciones. Es muy frecuente encontrarse con situaciones donde ocurren claras dependencias entre criterios que generan cambios en las valoraciones de la importancia de los mismos.

Tomando como ejemplo una entidad financiera, donde se desea decidir sobre la asistencia crediticia a diferentes clientes, es claramente evidenciable la relación entre el riesgo asumido, ingresos mensuales y las edades de dichos clientes. Es así que a mayor edad cronológica seguramente habrá que considerar un mayor riesgo que si se tiene una cartera más joven con ingresos similares.

Asimismo, considerando el problema en el cual se desea evaluar a estudiantes en relación a diferentes asignaturas: estadística, probabilidades y álgebra (Marichal, 2000). Claramente, las dos primeras tienen algún grado de redundancia debido a que normalmente los alumnos que tienen un buen desempeño en estadística, también lo tendrán en probabilidades y viceversa. Como los dos primeros criterios, de alguna manera están superpuestos o tienen una correlación, es posible que se sobreestime a buenos alumnos en estadística y probabilidades y se subestime a los que no lo son.

En problemas donde los criterios que se tienen en cuenta para la decisión, no tienen relación o son independientes, la importancia que tienen las agrupaciones de los mismos es aditiva, sin embargo cuando dichos criterios tienen alguna interacción dicha importancia podría ser mayor o menor (Marichal, 2000). Las medidas clásicas como la media aritmética ponderada o los operadores OWA no modelan adecuadamente el fenómeno (Tan and Chen, 2010) (Tan, 2011). Son necesarios otros modelos más elaborados que permitan proveer de importancias diferentes a los criterios cuando aparecen en relación unos con otros.

La integral discreta de Choquet con respecto a medidas difusas no aditivas es un operador de agregación adecuado para modelar el fenómeno expuesto (Grabisch and Labreuche, 2005), de manera que, al combinar las entradas no solamente se tenga en cuenta su magnitud o importancia individual, sino que tomen relevancia las coaliciones que pueden aparecer.

1.2. Motivación del Trabajo de Tesis

Cuando es necesario resumir en un único valor diferentes opiniones relacionadas a una situación particular, usualmente se recurre a un proceso de agregación. Este proceso básicamente consiste en determinar el valor apropiado que represente la opinión de la mayoría. Es común el uso de la media aritmética ponderada a pesar de los conocidos problemas que presenta cuando los valores a agregar son extremos (Peláez and Doña, 2003a).

Los operadores OWA son una alternativa (Yager, 1988), aunque presentan problemas de distribución cuando se maneja el concepto de cardinalidades.

Si bien este problema puede resolverse mediante el uso de operadores de mayoría como el MA-OWA (Peláez and Doña, 2003a), en determinadas condiciones, concretamente cuando las cardinalidades de algunos de los valores a agregar son muy altas, este operador converge muy rápidamente a la mayoría, descartando totalmente la opinión de la minoría.

Para dar solución a este problema, se propone una nueva variante del operador MA-OWA denominado SMA-OWA (Selective Majority Additive Ordered Weighting Averaging Operator). El mismo implementa un mecanismo que permite proporcionar un grado de importancia a las opiniones de modo que la minoría no sea desestimada muy rápidamente. Se proveen además una adecuada caracterización y una validación del comportamiento del operador para procesos de agregación de mayoría.

En los últimos tiempos, el comercio electrónico ha crecido muy rápidamente. Es cada vez más frecuente encontrase con personas que adquieren productos y servicios vía Internet y que además basan su compra en información contenida en este medio. Comprar un libro o una cámara fotográfica, reservar un hotel o decidir sobre qué película mirar, puede ser una decisión fundamentada en información consultada en los denominados Social Media.

Es habitual observar las opiniones de otros compradores que han valorado los mismos productos o servicios con el objetivo de orientar el proceso de compra o adquisición.

Con la finalidad de ofrecer una valoración de los productos y servicios ofrecidos, la mayoría de sitios web proveen la posibilidad de que los usuarios expresen su opinión luego de realizada la compra. Cada comprador es invitado a expresar su grado de satisfacción mediante una escala definida (expresadas normalmente con un sistema de estrellas o etiquetas lingüísticas). Finalmente las opiniones son resumidas en una única valoración por producto o servicio.

Un problema muy común, es la manera en que se resumen las opiniones de los usuarios en un único valor debido a que normalmente no es representativo de la mayoría.

Asimismo, en determinadas situaciones, las alternativas de opinión pueden tener la misma importancia unas con otras, sin embargo, si una gran cantidad de personas votan una opción,

¿debería tener el mismo peso que otra que tiene un solo voto? Para manejar esta cuestión se propone un nuevo operador de consenso denominado SAM-OWA (Selective Aggregated Majority Ordered Weighted Averaging) que permite asignar diferentes pesos a cada alternativa.

Adicionalmente, cuando intervienen diferentes criterios en la decisión, es muy frecuente encontrarse con situaciones donde dichos criterios tienen algún tipo de interacción. Por ejemplo, en un diagnóstico médico donde la presencia de un síntoma no es relevante sin la presencia de otro que ocurra simultáneamente. En estas circunstancias, para obtener resultados adecuados y elegir las alternativas más apropiadas, es necesario emplear operadores de agregación particulares como las integrales difusas, ya que los operadores clásicos como la media aritmética ponderada o los operadores OWA no se comportan adecuadamente.

Las integrales difusas proporcionan un funcionamiento apropiado cuando ocurren coaliciones entre los criterios debido a que no solamente de proporcionan pesos a cada criterio individualmente, sino que además pueden asignar importancia a los diferentes subconjuntos de criterios. Esta posibilidad se debe a que están definidas respecto de una medida difusa o capacidad.

Por lo tanto, será necesaria la definición de una medida difusa adecuada que modele este tipo de situaciones teniendo en cuenta las opiniones de diferentes expertos y minimizando las apreciaciones que estos deban suministrar.

Se propone modelar un método de toma de decisión multicriterio, multi experto, mediante la utilización de información lingüística (basado en la integral discreta de Choquet) para establecer la importancia individual de cada criterio y de los posibles grupos que puedan aparecer cuando existen dependencias entre los mismos.

1.3. Estructura de la Tesis

La memoria está organizada en diferentes capítulos que se detallan a continuación.

En el Capítulo 2 se hace una descripción detallada de los operadores de agregación más utilizados actualmente, partiendo de los más simples hasta llegar a los definidos con una finalidad específica. Se consideran operadores de mayoría junto con sus versiones lingüísticas, y otros que modelan situaciones donde puede ocurrir alguna interacción entre los criterios evaluados.

En el Capítulo 3 se presenta un nuevo operador de agregación denominado SMA-OWA como extensión del conocido operador MA-OWA. Se realiza una definición matemática del operador donde se explican las características del mecanismo que permite asignar diferente importancia a las opiniones de la mayoría y minoría: denominado CRF (Cardinality Relevance Factor). Se propone además un proceso de validación del operador considerando tres diferentes aspectos: la enumeración detallada de las propiedades requeridas para un operador de agregación; un estudio detallado de la manera en que se calculan los pesos a partir de las cardinalidades; y una comparación de la distancia Manhattan promedio entre las opiniones individuales y los valores agregados en relación a la media aritmética ponderada y el operador MA-OWA.

El Capítulo 4 provee una generalización del operador de agregación SMA-OWA debido a que, a pesar de contar con un mecanismo para proveer importancia a las minorías, carece de la posibilidad de asignar pesos a los valores individuales basados en criterios distintos a su cardinalidad (como por ejemplo la importancia de cada valor a agregar).

Se define entonces el operador de agregación SAM-OWA mediante el cual es posible asignar pesos (o importancia) a cada valor a agregar y, al mismo tiempo, usar las cardinalidades en el proceso de agregación. Se muestra su aplicación en Social Media para obtener un valor representativo de las opiniones de usuarios, cuando se evalúan productos o servicios.

Se presentan varios casos donde queda evidenciado un mejor comportamiento (para modelar el concepto de mayoría) que al utilizar la media aritmética.

En el Capítulo 5 se discute la necesidad de considerar medidas e integrales difusas para modelar procesos de agregación donde se presenta algún tipo de dependencia entre los criterios intervinientes en la toma de decisión.

El modelo propuesto, basado en la integral discreta de Choquet, plantea la construcción automática de la medida difusa asociada a este tipo de operadores de agregación, tomando como base la importancia individual de cada criterio, sus interacciones y el grado de sinergia de las mismas. Los decisores podrán suministrar esta información mediante el uso de etiquetas lingüísticas como mecanismo para facilitar su experiencia durante el proceso decisorio.

Finalmente se exponen las conclusiones que se derivan de esta memoria, así como las aportaciones y principales líneas de futuros trabajos que han surgido durante su desarrollo.

Capítulo 2 Conceptos Preliminares

Las herramientas que dan soporte a un proceso de toma de decisiones deben adecuarse para modelar la realidad de la manera más fielmente posible. Normalmente es necesario combinar diferentes valoraciones de entrada en un único valor, con la finalidad de contar con un valor característico y representativo de los valores de entrada. Para atender estas cuestiones, se han desarrollado operadores de agregación con diferentes semánticas.
En este capítulo se realiza una caracterización de distintas funciones de agregación cubriendo sus propiedades más importantes. Se parte desde los operadores clásicos, operadores OWA aditivos y geométricos y de mayoría. Finalmente se definen y enumeran propiedades y conceptos asociados de la integral de Choquet como operador de agregación cuando existe interacción de criterios. Se hace referencia además al tratamiento de información mediante etiquetas lingüísticas como método para facilitar la experiencia de los expertos durante la toma de decisión.

2.1. Operadores de Agregación

En un proceso de toma de decisión multicriterio, uno de los componentes fundamentales es el mecanismo de agregación que debe realizarse para fusionar las ponderaciones que reciben las alternativas evaluadas frente a los diferentes criterios.

Este mecanismo permite combinar diferentes valores en un único valor los cuales pueden ser vistos como representativos de los valores de entrada. Es comúnmente usado como soporte a la decisión, votación, visión artificial, redes neuronales, sistemas expertos, análisis de rendimiento, de comportamiento, etc. Generalmente se proporciona el nombre de "operador de agregación" a una función que modele un mecanismo de agregación.

En toma de decisión los valores a agregar son típicamente relaciones de preferencias o grados de satisfacción. Una relación de preferencia indica con qué grado se prefiere una alternativa a

respecto de otra b (una valoración relativa). En cambio, un grado de satisfacción expresa en qué medida una alternativa se ajusta a un criterio dado (una valoración absoluta) (Marichal, 1998).

Los operadores de agregación son funciones especiales definidas en un subdominio $\mathbb{I}$ de la recta real. La característica principal de este tipo de funciones es que son monótonas crecientes y acotadas. Esto significa que ante valores de entrada crecientes, los valores que devuelve la función no pueden ser decrecientes y que los mismos son devueltos en la misma escala de los valores de entrada, respectivamente.

Definición

Formalmente (Grabisch et al., 2011), una función *agregación* en un intervalo $\mathbb{I}^n$ es una función $A^{(n)}: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ tal que:

i. es no-decreciente (en cada variable);
ii. es acotada;

$$\inf_{x\in\mathbb{I}^n} A^{(n)}(\boldsymbol{x}) = \inf \mathbb{I} \quad \text{y} \quad \sup_{x\in\mathbb{I}^n} A^{(n)}(\boldsymbol{x}) = \sup \mathbb{I} \tag{1}$$

$$\text{If } \mathbb{I} = [a,b], A^{(n)}(\mathbf{a}) = a \quad \text{y} \quad A^{(n)}(\mathbf{b}) = b \tag{2}$$

$$\text{donde } \mathbf{a} = (a, \dots, a) \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = (b, \dots, b)$$

iii. para todo $x \in \mathbb{I}$

$$A^{(1)}(x) = x \tag{3}$$

El entero n representa la cardinalidad de la función de agregación (el número de variables).

Ejemplo de funciones de agregación básicas son la media aritmética, la media geométrica, la función mínimo, la función máximo, el operador OWA basado en promedios de pesos ordenados (Yager, 1988), MA-OWA (Peláez and Doña, 2003a), etc. Sin embargo existe un tipo especial de integrales que pueden comportarse como operadores de agregación con características particulares.

El concepto de integral es una generalización de las funciones de agregación, particularmente la integral de Lebesgue, porque está definida respecto de una medida. Más adelante se hará una caracterización detallada de este tipo de integrales y de las medidas difusas sobre las cuales están definidas.

A continuación se hace una revisión detallada de los principales métodos de agregación, partiendo de los más sencillos (como la media aritmética) hasta los más elaborados (como las integrales difusas).

2.1.1 Operadores clásicos

En esta sección se detallan operadores de agregación clásicos, denominados frecuentemente medias, se consideran la media aritmética clásica y su versión con ponderación de pesos. Se analizan brevemente además las medias geométrica y armónica.

2.1.1.1 Media aritmética

Definición

La media aritmética es la función de agregación más comúnmente usada y se define como una función de dimensión *n* del tipo $M^{(n)}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$M(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \tag{4}$$

donde $\mathbf{x} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$.

Propiedades Principales

- La media aritmética M es una función estrictamente creciente;
- M es una función simétrica;
- M es una función aditiva: $M(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = M(\mathbf{x}) + M(\mathbf{y})$;
- M es una función homogénea: $M(\lambda\mathbf{x}) = \lambda M(\mathbf{x})$.

2.1.1.2 Media aritmética ponderada

Cuando los valores de entrada no son simétricos, es muy común asociar a la media aritmética un vector de pesos $\boldsymbol{w} = [w_1, w_2, \dots, w_n]$ donde $w_i \in [0,1]$ y $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Cada w_i representa la importancia relativa del valor x_i en relación al valor total de agregación.

Definición

La media aritmética ponderada es una función de agregación de dimensión n que se define como ${M_{\boldsymbol{w}}}^{(n)}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que:

$$M_{\boldsymbol{w}}(\mathbf{x}) = w_1 a_1 + w_2 a_2 + \cdots + w_n a_n = \sum_{i=1}^{n} w_i a_i \tag{5}$$

donde $\mathbf{x} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$.

Propiedades Principales

- La media aritmética $M_{\boldsymbol{w}}$ es una función estrictamente creciente si todos los $w_i > 0$;
- $M_{\boldsymbol{w}}$ es una función asimétrica idempotente, excepto cuando $w_i = \frac{1}{n}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$;
- $M_{\boldsymbol{w}}$ es una función aditiva: $M_{\boldsymbol{w}}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = M_{\boldsymbol{w}}(\mathbf{x}) + M_{\boldsymbol{w}}(\mathbf{y})$;
- $M_{\boldsymbol{w}}$ es una función homogénea: $M_{\boldsymbol{w}}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda M_{\boldsymbol{w}}(\mathbf{x})$ para todo $\lambda \in [0,1]$.

2.1.1.3 Media geométrica

Definición

La media geométrica de dimensión n es una función de agregación que se define como $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que:

$$g(\mathbf{x}) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i \right)^{\frac{1}{n}} \tag{6}$$

donde $\mathbf{x} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$.

Propiedades Principales

- La media geométrica g es acotada entre el mínimo y máximo de sus argumentos
- Es conmutativa
- Es idempotente
- Es monótona

Dado un vector de pesos w, la versión ponderada se define como:

$$g_w(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} {a_i}^{w_i} \tag{7}$$

donde $\mathbf{x} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$.

2.1.1.4 Media armónica

Definición

La media armónica de dimensión n es una función de agregación que se define como $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que:

$$h(\mathbf{x}) = n \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \right)^{-1} \tag{8}$$

donde $\mathbf{x} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$.

Dado un vector de pesos w, la versión ponderada de la media armónica se define como:

$$h_w(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{a_i} \right)^{-1} \tag{9}$$

donde $\mathbf{x} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$.

2.1.2 Operadores OWA

Otra modalidad de agregación fue introducida por Yager proponiendo un método basado en promedios ordenados (Yager, 1988). Desde su definición, ha sido aplicado como mecanismo de agregación en diferentes ámbitos tales como redes neuronales (Yager, 1992), sistemas de aprendizaje automático (Kacprzyk, 1996), sistemas expertos (O’Hagan, 1988), de apoyo a la decisión (Carlsson and Fullér, 2011), etc. Este tipo de operadores ha sido investigado en profundidad en (Yager, 1996) (Filev and Yager, 1998), (Liu and Lou, 2007), (Yager, 2009), (Yager, 2010). Como se puede notar en la literatura (Yager, 1993), (Yager and Filev, 1999), el operador OWA provee una rica familia de operadores de agregación prametrizados.

Motivados por estas ideas, hoy en día, continúan desarrollándose trabajos de investigación en el área de las ciencias de la computación relacionados con este operador, por ejemplo en (Zarghami et al., 2008), (Yager, 2008), (Angelov and Yager, 2013), (Yager and Alajlan, 2014); y diferentes aplicaciones como clasificación de imágenes hiperespectrales mediante aprendizaje supervisado y no supervisado (Alajlan et al., 2012), etc.

Definición

El operador OWA de dimisión n es un mapeo $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con un vector de pesos asociado $W = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$ tal que $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ y $w_i \in [0,1]$ dónde:

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} b_i w_i \tag{10}$$

donde b_i es el i-ésimo elemento más grande de la colección $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

En este operador, claramente, el orden de los elementos no interesa, debido a que un aspecto fundamental es el reordenamiento de los mismos. Esto provoca que los elementos a agregar a_i no estén asociados con un peso w_i específico, mientras que un peso w_i sí estará asociado con una posición ordenada en la agregación.

Un operador OWA, es una clase de función de agregación parametrizada que permite generar el operador OR (*Max*), el operador AND (*Min*) y cualquier otro operador entre ellos como la media aritmética solo con variar el vector de pesos asociado W. Por ejemplo si se agregan n valores con los vectores de pesos $W^* = [1, 0, 0, \dots, 0]^T$, $W_* = [0, 0, 0, \dots, 1]^T$ y $W_{\boldsymbol{ave}} = [{}^1\!/_n, {}^1\!/_n, {}^1\!/_n, \dots, {}^1\!/_n]^T$, produce los operadores Max, Min y media aritmética respectivamente.

Es fácil deducir que mediante el uso de los vectores de pesos:

W^*, se obtiene $F^*(a_1, a_2, \dots, a_n) = Max(a_i)$,

W_*, se obtiene $F_*(a_1, a_2, \dots, a_n) = Min(a_i)$,

$W_{\boldsymbol{ave}}$, se obtiene $F_{ave}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$.

Propiedades Principales

- Un operador OWA es una función acotada: $F_*(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq F(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq F^*(a_1, a_2, \dots, a_n)$;
- Es conmutativa: $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = F(b_1, b_2, \dots, b_n)$, siendo $\langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$ una permutación de $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$;
- Es monótona: $F(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq F(b_1, b_2, \dots, b_n)$, siendo $a_i \leq b_i$ para todo i.
- Es idempotente: $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = a$, siendo $a_i = a$ para todo i.

Un detalle más amplio de las propiedades de este tipo de operadores con sus correspondientes demostraciones se puede encontrar en (Fodor et al., 1995).

Yager (Yager, 1988) introdujo además dos importantes medidas asociadas con un operador OWA. La primera llamada dispersión o entropía y se define como:

$$Disp(W) = -\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot \ln w_i \tag{11}$$

y cumple las siguientes propiedades:

- si $w_i = 1$ para algún i, entonces las dispersión es mínima: $Disp(W) = 0$;
- si $w_i = \frac{1}{n}$ para todo i, entonces la dispersión es máxima: $Disp(W) = \ln n$.

La segunda medida definida en (Yager, 1988), se denomina medida $orness$ y se define como:

$$orness(W) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (n-i) \cdot w_i \tag{12}$$

Agregaciones OWA con $orness$ mayor o igual a $1/2$, se consideran del tipo OR y menor o igual que $1/2$, del tipo AND. Las primeras corresponden a preferencias más bien optimistas mientras que las segundas representan preferencias pesimistas. Es simple notar además que $orness(W_*) = 0$ y $orness(W^*) = 1$.

La agregación con un vector de pesos decreciente $w_1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_n$ determina un vector optimista (del tipo OR), mientras que si los pesos son crecientes $w_1 \leq w_2 \leq \cdots \leq w_n$, define un vector pesimista (del tipo AND).

De esta forma se puede definir una medida de $andness$ como:

$$andness(W) = 1 - orness(W) \tag{13}$$

El siguiente teorema muestra formalmente esta característica (Yager, 1993):

Teorema. Sean W y W' dos vectores de dimensión *n* tales que:

i. $w_i = w'_i, \quad i \neq j;\ i \neq k$
ii. $w_j = w'_j + \Delta$
iii. $w_k = w'_k - \Delta$

con $\Delta > 0$, $j > k$, entonces $orness(W) > orness(W')$

Demostración

$$orness(W) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(n-i)\cdot w_i \tag{14}$$

$$orness(W) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\big((n| - i)\cdot w_i{}' + (n-j)\Delta - (n-k)\Delta\big) \tag{15}$$

$$orness(W) = orness(W') + \frac{1}{n-1}\Delta(k-j) \tag{16}$$

y como $j > k$, entonces se cumple que $orness(W) > orness(W')$.

Este teorema muestra cómo, conforme se sube en el vector de pesos, el $orness$ del operador aumenta, disminuyéndose en el caso contrario.

Considerando un vector de pesos $W = [w_n, w_{n-1}, \ldots, w_1]$, se obtiene un operador OWA dual de F denotado por $\hat{F}$.

Semántica de los operadores OWA

Los operadores OWA, en función de la determinación del vector de pesos, pueden tener diferentes interpretaciones. Un rol importante de este tipo de operadores tiene que ver con el modelado de cuantificadores lingüísticos definidos en (Zadeh, 1983). Se considera que el vector de pesos es una manifestación del cuantificador que subyace el proceso de agregación (Yager, 1988).

Un cuantificador monótono no-decreciente, se define como una función $Q: [0,1] \rightarrow [0,1]$ tal que:

i. $Q(0) = 0$
ii. $Q(1) = 1$
iii. $Q(x) \geq Q(y)$ con $x > y$

Para modelar cuantificadores típicos tales como "para todo", "la mayoría", "al menos la mitad", etc. se puede utilizar la siguiente función:

$$Q(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases} \quad \text{con } a, b, x \in [0,1] \tag{17}$$

Variando los parámetros a y b, se pueden obtener cuantificadores específicos. Por ejemplo, si $(a, b) = (0.6, 1)$ se comportaría como el cuantificador "la mayoría".

El vector de pesos se obtiene de la siguiente manera:

$$w_i = Q\left(\frac{i}{n}\right) - Q\left(\frac{i-1}{n}\right); \qquad i = 1, \dots, n \tag{18}$$

Por ejemplo, para $n = 10$, se obtiene $W = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25]$.

2.1.3 Familia de Operadores OWA

Una de las principales ventajas de los operadores OWA es la flexibilidad que tienen para realizar el proceso de agregación y está directamente relacionado con la manera en que se determina el vector de pesos W. Variando unos pocos parámetros es posible construir una familia de operadores OWA, tal como se detalla en (Yager, 1993).

2.1.3.1 ME-OWA

La primera familia de operadores OWA parametrizados fue introducida por O´Hagan (O'Hagan, 1988), donde sugiere calcular el vector de pesos asociado al operador OWA maximizando la entropía. El primer paso consiste en seleccionar el valor de *orness* α

(optimista o pesimista); el segundo paso es encontrar los valores w_i del vector de pesos W, de modo que devuelvan el valor α deseado con la máxima dispersión (entropía):

$$Maximizar: \; -\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot \ln w_i \tag{19}$$

sujeto a:

$$\alpha = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(n-i) \cdot w_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \tag{20}$$

$$w_i \in [0,1].$$

2.1.3.2 S-OWA

Esta familia de operadores fue introducida por (Yager and Filev, 1994). A su vez se pueden distinguir dos subfamilias: los operadores del tipo 'OR' y los del tipo 'AND'. En ambos casos, para calcular los pesos w_i es necesario definir un par de parámetros: $\alpha \in [0,1]$ y $\beta \in [0,1]$ respectivamente.

La modalidad de cálculo, para cada caso, es la siguiente:

Para el caso de operadores del tipo 'OR' (denominados A_{SO}):

$$w_1 = \frac{1}{n}(1-\alpha) + \alpha$$

$$w_i = \frac{1}{n}(1-\alpha); \quad i = 2..n \tag{21}$$

lo que provee una agregación de la forma:

$$F_{SO}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \alpha \cdot \max(a_i) + \frac{1}{n}(1-\alpha)\sum_{i=1}^{n} a_i \tag{22}$$

Esto permite generar un promedio ponderado entre el máximo y la media de los valores a agregar. Adicionalmente, la medida de $orness$ se calcula como sigue:

$$orness(F_{SO}) = \frac{1}{2}(\alpha + 1) \tag{23}$$

y como $\alpha \in [0,1]$, necesariamente $orness(F_{SO}) \in [0.5, 1]$. Cuando $\alpha = 1$, el $orness(F_{SO}) = 1$ y cuando $\alpha = 0$, el $orness(F_{SO}) = \frac{1}{2}$; (coincidentes con un promedio simple). La Figura 1(a) muestra la forma típica de un cuantificador que genera una agregación S-OWA del tipo 'OR'.

Para el caso de operadores del tipo 'AND' (denominados F_{SA}):

$$\begin{aligned} w_i &= \frac{1}{n}(1-\beta); \quad i \neq n \\ w_n &= \frac{1}{n}(1-\beta) + \beta \end{aligned} \tag{24}$$

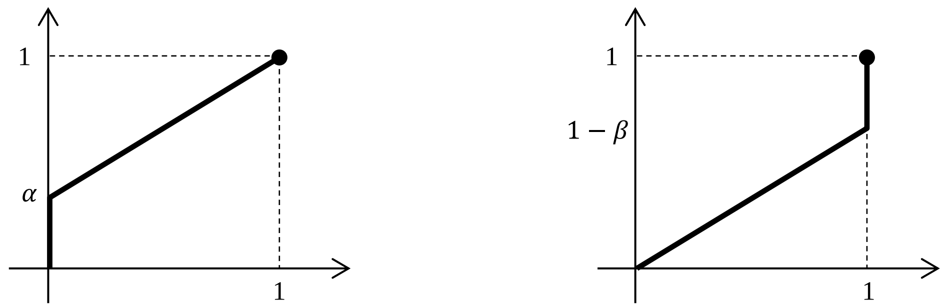
lo que provee una agregación de la forma:

$$F_{SA}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \beta \cdot \min(a_i) + \frac{1}{n}(1-\beta)\sum_{i=1}^{n} a_i \tag{25}$$

y permite generar un promedio ponderado entre el mínimo y la media de los valores a agregar. Adicionalmente, la medida de $orness$ se calcula como sigue:

$$orness(F_{SA}) = \frac{1}{2}(1 - \beta) \tag{26}$$

y como $\beta \in [0,1]$, necesariamente $orness(F_{SO}) \in [0, 0.5]$. Cuando $\beta = 1$, el $orness(F_{SA}) = 0$ y cuando $\beta = 0$, el $orness(F_{SA}) = \frac{1}{2}$ (coincidentes con un promedio simple). La Figura 1(b), muestra la forma típica de un cuantificador que genera una agregación S-OWA del tipo 'AND'.



(a) (b)

Figura 1: Cuantificadores S-OWA estilo ‘OR’ (a) y estilo ‘AND’ (b)

Finalmente, dado un valor de *orness* λ es fácil calcular los valores asociados al vector de pesos W de la siguiente manera:

i. Si $\lambda \geq 0.5$, $\alpha = 2\lambda - 1$ para el operador S-OWA del estilo ‘OR’;
ii. Si $\lambda < 0.5$, $\beta = 1 - 2\lambda$ para el operador S-OWA del estilo ‘AND’.

En (Yager, 1993) se puede encontrar una generalización del operador S-OWA que combina las dos familias de operadores con $\alpha, \beta \in [0,1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$.

2.1.3.3 Window-OWA

Otra familia de operadores OWA, descriptos en (Yager, 1993), se caracteriza por usar dos parámetros m y k para determinar los pesos de la agregación mediante:

$$w_i = \begin{cases} 0 & i < k \\ \dfrac{1}{m} & k \leq i < k + m \\ 0 & i \geq k + m \end{cases} \tag{27}$$

Los valores m y k son números enteros positivos tal que $k + n \leq n + 1$, donde n representa la cardinalidad de la agregación. Este operador tendrá un vector de pesos W con las siguientes características: m pesos distintos de cero y todos con el idéntico valor $\frac{1}{m}$, siendo la posición k donde comienzan los pesos no nulos como por ejemplo: $W = \left[0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right]^T$.

Definición

Este tipo de operadores se define mediante:

$$F_W(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{m} \sum_{i=k}^{k+m-1} b_i \tag{28}$$

donde b_j es el j-ésimo elemento más grande de la colección $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

La medida de $orness$ se calcula como sigue:

$$orness(F_W) = \frac{1}{n-1}\left(n - k - \frac{1}{2}(m-1)\right) \tag{29}$$

donde, si k o m aumentan, el $orness(F_W)$ disminuye.

La medida de dispersión está relacionada simplemente con la cantidad de elementos que intervienen en el proceso de agregación:

$$Disp(F_W) = -\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot \ln w_i = -\sum_{i=k}^{k+m-1} \frac{1}{m} \cdot \ln \frac{1}{m} = -\ln \frac{1}{m} = \ln m \tag{30}$$

Si el valor de $m = 1$, se obtiene otra familia de operadores OWA denominada Step OWA; su definición específica y su caracterización puede encontrarse en (Yager, 1993).

Se pueden determinar los valores de k y m para un determinado valor de $orness\,\lambda$ dado mediante la siguiente ecuación:

$$\lambda = \left(\frac{1}{n-1}\right)\left(n - k - \frac{m-1}{2}\right) \tag{31}$$

considerando que k y m deben ser enteros positivos tal que $k + m \leq n + 1$, se pueden calcular sus valores óptimos que satisfagan un valor particular de $orness$ mediante el siguiente planteo de optimización:

$$optimizar^{1}\text{:}\;\; m \tag{32}$$

sujeto a:

[1] El término optimizar puede referirse a maximizar o minimizar.

$$2k + m = 2n(1 - \lambda) + 2\lambda + 1,$$
$$k + m \leq n + 1,$$
$$k > 1, \tag{33}$$
$$m > 1.$$

en (Yager, 1993) se puede encontrar un análisis detallado de casos especiales variando los valores de m y k y algunos ejemplos de aplicación de este tipo de operadores.

2.1.3.4 Operadores con pesos dependientes de los valores a agregar

Se puede generalizar el concepto de agregación permitiendo que los valores del vector de pesos no sean constantes (como en los casos de los definidos en las secciones precedentes), sino que sean calculados en función de los valores a agregar, específicamente los valores b_i. Es necesario mantener las condiciones: $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ y $w_i \in [0,1]$ a las que se permitirá que:

$$w_i = f_i(b_1, b_2, \dots, b_n). \tag{34}$$

Definición

En general los operadores de agregación dependientes de los valores a agregar se definene como:

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i(b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot b_i \tag{35}$$

La mayoría de las propiedades de los operadores OWA se mantienen en esta generalización (es acotado, idempotente y cumple la propiedad conmutativa), sin embargo no es necesariamente monótona (un ejemplo que verifica que esta propiedad no se cumple se puede encontrar en (Yager, 1993)).

2.1.3.5 Neat OWA

Un operador de agregación se caracteriza por ser *neat*, si la agregación es independiente del ordenamiento de los valores a_i.

Definición

Formalmente, si $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ es cualquier permutación de $(a_1, a_2, \dots, a_n)$,

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot b_i \tag{36}$$

es un operador *neat* si los valores w_i permanezcan fijos.

Un ejemplo simple es la media aritmética:

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot a_i \tag{37}$$

Sin embargo cuando los pesos se calculan a partir de los valores a agregar, es posible obtener otros operadores *neat*.

En (Yager and Filev, 1994) se introduce la primera familia de operadores donde los pesos se calculan a partir de los valores a agregar. Por ejemplo, puede considerarse:

$$w_i = f_i(b_1, b_2, \dots, b_n) = \frac{{b_i}^{\alpha}}{\sum_{i=1}^{n} {b_i}^{\alpha}}; \quad \alpha \geq 0 \tag{38}$$

Es simple ver que las condiciones: $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ y $w_i \in [0,1]$ se mantienen, y debido a que no es importante el orden de los valores a agregar, resulta:

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{{a_i}^{\alpha}}{\sum_{i=1}^{n} {a_i}^{\alpha}} \cdot a_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} {a_i}^{\alpha+1}}{\sum_{i=1}^{n} {a_i}^{\alpha}} \tag{39}$$

Casos especiales:

$$\text{Si } \alpha = 0: \quad F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{n} \sum a_i = F_{ave} \tag{40}$$

$$\text{Si } \alpha = 1: \quad F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{\sum {a_i}^2}{\sum a_i} \tag{41}$$

$$\text{Si } \alpha \to \infty: \quad F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \max[a_i] = F^*(a_1, a_2, \dots, a_n) \tag{42}$$

Si se considera ahora que:

$$w_i = f_i(b_1, b_2, \dots, b_n) = \frac{\left(\frac{1}{b_i}\right)^{\alpha}}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{b_i}\right)^{\alpha}}; \quad \alpha \geq 0 \tag{43}$$

el proceso de agregación, resulta:

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\frac{1}{a_i}\right)^{\alpha}}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_i}\right)^{\alpha}} \cdot a_i = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_i}\right)^{\alpha-1}}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_i}\right)^{\alpha}} \tag{44}$$

Casos especiales:

$$\text{Si } \alpha = 0: \quad F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{\sum\left(\frac{1}{a_i}\right)^{-1}}{\sum 1} = \frac{1}{n}\sum a_i = F_{ave} \tag{45}$$

$$\text{Si } \alpha = 1: \quad F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{\sum 1}{\sum \frac{1}{a_i}} = \frac{n}{\sum \frac{1}{a_i}} = n\left(\sum \frac{1}{a_i}\right)^{-1} \text{ (Media armónica)} \tag{46}$$

$$\text{Si } \alpha \to \infty: \quad F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \min[a_i] = F_*(a_1, a_2, \dots, a_n) \tag{47}$$

Otros casos de interés para el cálculo de los pesos podrían ser:

$$w_i = \frac{(1 - b_i)^{\alpha}}{\sum_{i=1}^{n}(1 - b_i)^{\alpha}} \tag{48}$$

$$w_i = \frac{u_i}{\sum_{i=1}^{n} u_i} \quad \text{con} \quad u_i = \prod_{j \neq i} b_j^{\,\alpha}. \tag{49}$$

por lo tanto, para este último caso, los valores de w_i dependerán del producto de todos los elementos excepto del i-ésimo.

2.1.4 Operador Geométrico OWG

El operador OWG (Ordered Weighted Geometric) está basado en la media geométrica y en el operador OWA (Chiclana et al., 2000) (Herrera et al., 2003), extendido luego en (Chiclana et al., 2004). Permite incorporar el concepto de mayoría difusa en el proceso de decisión cuando las preferencias tienen una escala proporcional como las propuestas por Saaty en AHP (Saaty, 1990). Incorpora las ventajas del operador OWA para incorporar el concepto de mayoría (a través de cuantificadores) y las ventajas que brinda la media geométrica.

Definición

El operador OWG es una función $F^G\colon \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que tiene asociado un vector de pesos $W = [w_1, w_2, \ldots, w_n]$, tal que:

i. $w_i \in [0,1]$, y
ii. $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$

y se define para una lista de agregación $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$, de acuerdo a la siguiente expresión:

$$F^G(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{i=1}^{n} {c_i}^{w_i} \tag{50}$$

donde c_i es el i-ésimo valor mayor de la colección $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$.

El operador OWG satisface las principales propiedades que lo hacen válido como operador de agregación en los problemas de decisión. Un detalle de las mismas se pueden encontrar en (Chiclana et al., 2000).

Debido a que este operador está basado en el operador OWA clásico y su vector de pesos puede determinarse mediante un cuantificador difuso Q, presenta los mismos problemas en relación a la semántica de mayoría en problemas de decisión en grupo (Peláez, 2005).

2.2. Operadores de Mayoría

Otro problema interesante en toma de decisiones se plantea en situaciones donde los valores agregados deben ser representativos del consenso de los intervinientes en el proceso decisorio (que puede variar de unos pocos a millones). Por ejemplo para elegir el líder en un grupo, el representante que gobierne un pueblo, votar una ley, sacar conclusiones de encuestas, calificar una noticia en un periódico o simplemente marcar tendencias en las redes sociales.

Encontrar un valor representativo de la opinión de la mayoría mediante un proceso de agregación no es una tarea sencilla. Frecuentemente las opiniones son sumarizadas en un único valor utilizando la media aritmética y aunque, en determinadas situaciones, este valor permite dar una idea relativamente adecuada de la opinión de la mayoría, hay otras, donde este objetivo no se logra.

En la toma de decisión social, es habitual la formación de coaliciones o grupos por parte de los decisores con el objetivo de formar conjuntos con opiniones comunes. En (Gamson, 1961), (Riker, 1962); queda de manifiesto cómo los conflictos de intereses entre individuos pueden ser resueltos formando alianzas, para luego, mediante negociaciones, buscar una solución de tales conflictos, de acuerdo con las relativas fuerzas de cada individuo o grupo de individuos implicados.

Es habitual suponer que los participantes en los contextos de formación de la coalición son actores racionales, y esto es a menudo interpretado como que persiguen estrategias destinadas a maximizar sus propios beneficios individuales (Browne and Rice, 1979).

En (Müller and Strom, 2003) queda evidenciado que en los procesos de negociación, los grupos más significativos y numerosos por el tamaño de su representación y proximidad participan e influyen de manera manifiesta, pero también intervienen, de manera considerable, la oposición estratégica del resto de los grupos.

Es aquí donde el concepto de mayoría juega un papel importante, debido que será necesario encontrar un modelo que exprese la validez de un resultado que se obtenga luego de aplicarlo.

En este sentido, se pueden encontrar trabajos donde se pone de manifiesto los problemas que trae aparejado utilizar una media aritmética o un operador OWA simple en estas situaciones, debido a que no es posible modelar fielmente el concepto de mayoría.

En un proceso de toma de decisión multi-agente, a menudo es necesario contar con una opinión general que sintetice la opinión de la mayoría de los que toman las decisiones. En los enfoques difusos a la toma de decisiones multi-agente, los conceptos de consenso y de mayoría se modelan utilizando cuantificadores lingüísticos (Peláez and Doña, 2003b) (Herrera et al., 2009), términos lingüísticos (Massanet et al., 2014) y las preferencias lingüísticas (Alonso et al., 2013). En esta línea, se han propuesto además algunos operadores que introducen estrategias de cuantificación individuales y grupales (Yager, 1996) (Peláez and Doña, 2006); modelos para grupos heterogéneos (Pérez et al., 2014) y granulación de los términos lingüísticos (Cabrerizo et al., 2013).

Aunque los operadores OWA son ampliamente utilizados para la agregación, se han realizado estudios que muestran que la definición habitual de los operadores OWA basado en cuantificadores lingüísticos no captura la semántica de un consenso (Peláez et al., 2007). Para resumir la opinión de la mayoría, se han propuesto varios enfoques (Pasi and Yager, 2003), (Peláez, 2001). Por ejemplo, Yager y Filev (Yager and Filev, 1999) definen el operador (IOWA) mediante ordenación inducida promedio ponderada, que permite obtener un valor escalar de la opinión de la mayoría. Pasi y Yager (Pasi and Yager, 2003) utilizan el vago concepto de la opinión de la mayoría (mayoría difusa) como un subconjunto difuso. Ambos enfoques aparecen en el contexto de cuantificadores lingüísticos difusos.

Finalmente, el uso directo de los operadores convencionales OWA, repitiendo los elementos con cardinalidad mayor que la unidad, no siempre produce resultados razonables, y pueden aparecer problemas de distribución (Peláez and Doña, 2003a). De hecho, los operadores de agregación más comunes ponen demasiado énfasis en la opinión de la minoría a expensas de la mayoría. Para resolver este problema, se han propuesto diferentes enfoques que se describen en las secciones siguientes.

Particularmente, en (Peláez and Doña, 2003a) se introduce el operador de mayoría aditiva OWA (MA-OWA) que utilizan un vector de pesos en función de las cardinalidades de los agregados y puede ser interpretado como una media aritmética de medias aritméticas. Una extensión de la agregación lingüística de estos operadores también se ha introducido en (Peláez and Doña, 2003b).

2.2.1 IOWA

Una clase de operadores OWA conocidos como IOWA (Induced OWA, de sus siglas en ingles), se proponen en (Yager and Filev, 1999). Este tipo de operadores, que esencialmente agregan objetos que son tuplas de dos elementos, constituyen una familia de operadores de agregación muy generales. La facilidad para mezclar tipos de datos en los pares a agregar, proporciona además la posibilidad de trabajar con etiquetas lingüísticas.

En (Pasi and Yager, 2006), se propone el uso de este operador para modelar el concepto de mayoría en contextos de toma de decisión en grupo.

Los operadores IOWA asocian un valor v_i, denominado valor de inducción, a cada valor a_i a agregar, el cual se usará como argumento para realizar el proceso de ordenación según esencialmente se propone en un operador OWA.

Definición

El operador IOWA de dimisión n es un mapeo $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con un vector de pesos asociado $W = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$ tal que $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ y $w_i \in [0,1]$ dónde:

$$IOWA(\langle a_1, u_1\rangle, \langle a_2, u_2\rangle, \dots, \langle a_n, u_n\rangle) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot a_{a-index(i)} \tag{51}$$

donde $a - index$ es una función índice tal que $a - index(i)$ es el índice del i-ésimo elemento más grande de la colección $\langle a_1, a_2, \dots, a_n\rangle$.

Para modelar el concepto de mayoría, en (Pasi and Yager, 2006) se muestra que utilizar el operador IOWA asociado al cuantificador lingüístico *most* no es adecuado. Dejan claro que es necesario considerar un operador que tenga en cuenta la similaridad de los valores a agregar. Se propone entonces calcular los valores de la variable de inducción mediante la utilización de una función de similaridad entre pares. Se define entonces una función binaria $Sup\ (a, b)$ que indica si dos elementos están suficientemente cerca. Una posible función podría ser:

$$Sup(a_i, a_j) \begin{cases} 0 & si\ |a_i - a_j| < \alpha \\ 1 & en\ otro\ caso \end{cases} \tag{52}$$

Para cada elemento que se intenta agregar, se puede calcular el valor que devuelve la función (52) respecto de todos los demás y sumarlos. Finalmente realizar el ordenamiento en función de las sumas obtenidas para cada elemento.

2.2.2 Mayoría MA-OWA

Un nuevo operador *neat*, conocido como MA-OWA fue propuesto por Peláez y Doña (Peláez and Doña, 2003a), que generaliza la media aritmética cuando los elementos a agregar tienen cardinalidades mayores a uno y donde el vector de pesos depende de los valores a agregar. El operador MA-OWA es una especie de media aritmética de medias aritméticas. La idea detrás de este operador consiste en calcular la media aritmética de los valores con cardinalidad mayor a uno, cuyo resultado ingresa en el proceso de agregación con cardinalidad uno, al mismo tiempo que se disminuyen, en una unidad, las cardinalidades del resto de los elementos. El proceso continúa hasta encontrar un punto fijo, que es el resultado del proceso de agregación.

Ejemplo 1

Considere el siguiente conjunto de valores a agregar:

$$\boldsymbol{a} = \langle 0.7, 0.7, 0.7, 0.7, 0.5, 0.4, 0.1, 0.1, 0.1 \rangle$$

Su media aritmética, $F_{ave}(\boldsymbol{a}) = 0.444$, no representa la opinión de la mayoría debido a que el 55% de los valores están por sobre 0.4 y el 44% son iguales a 0.7. Se puede considerar que los valores a agregar se agrupan en tuplas con sus respectivas cardinalidades por ejemplo: $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{N}^N$, donde $a_i = (v_i, m_i)$ representa el valor a agregar, v_i, y su cardinalidad, $m_i > 0$.

Para este ejemplo,

$$\boldsymbol{a} = \{(0.7,4), (0.5,1), (0.4,1), (0.1,3)\}$$

el procedimiento para obtener el valor de agregación mediante el operador MA-OWA es el siguiente: en primer lugar, se calcula la media aritmética de los valores:

$$F_{ave}(0.7, 0.4, 0.5, 0.1) = 0.425,$$

y se obtiene el siguiente conjunto reducido:

$$\boldsymbol{a_1} = \{(0.425,1), (0.7,3), (0.1,2)\}.$$

El proceso se repite iterativamente:

$$F_{ave}(0.425, 0.7, 0.1) = 0.408$$

$$\boldsymbol{a_2} = \{(0.408,1), (0.7,2), (0.1,1)\},$$

$$F_{ave}(0.408, 0.7, 0.1) = 0.403$$

$$\boldsymbol{a_3} = \{(0.403,1), (0.7,1)\},$$

hasta obtener un punto fijo,

$$\boldsymbol{a_4} = \{(0.551,1)\}.$$

Finalmente el resultado del proceso de agregación es $F_{MA}(\boldsymbol{a}) = 0.551$. Claramente es más representativo de la mayoría.

Definición

Formalmente, el operador MA-OWA, se define como una función: $F_{MA}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{N}^N \to \mathbb{R}$ tal que:

$$F_{MA}(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} w_{i,N} v_{\sigma(i)} \tag{53}$$

donde: $N = \max_{1 \leq i \leq n} m_i$, y $\sigma \in S_n$ es una permutación ordenada tal que $v_{\sigma(i)} \geq v_{\sigma(i+1)}$, y los pesos se definen como:

$$w_{i,1} = \frac{1}{u_1} = \frac{1}{n}; \;\; u_1 = n \tag{54}$$

Para $2 \leq k \leq N$

$$w_{i,k} = \frac{\gamma_{i,k} + w_{i,k-1}}{u_k}; \quad 1 \leq i \leq n \tag{55}$$

$$u_k = 1 + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{j,k} \tag{56}$$

donde:

$$\gamma_{j,k} = \begin{cases} 1 & m_{\sigma(j)} \geq k \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases} \tag{57}$$

Esta definición requiere que:

$$\sum_{i=1}^{n} w_{i,k} = 1 \quad \text{para } k = N. \tag{58}$$

Donde k representa la cardinalidad considerada en cada paso del proceso.

Propiedades Principales

Para todo $m_i = 1, F_{MA}(\boldsymbol{a}) = F_{AM}(\boldsymbol{a})$. Cuando $m_1 \to \infty$ y $w_{1,N} \to \infty$, entonces $F_{MA}(\boldsymbol{a}) = F_{e_1}$. Similarmente cuando $m_n \to \infty$, y $w_{n,N} \to \infty$, $F_{MA}(\boldsymbol{a}) = F_{e_n}$.

Este operador es acotado y cumple las propiedades de idempotencia, conmutatividad. Sin embargo la propiedad de monotonicidad se mantiene solo si las cardinalidades de los valores a agregar es exactamente la misma en todos los casos (Peláez and Doña, 2003a):

$$F_{MA,w}\left(v^{(1)}, m\right) \geq F_{MA,w}\left(v^{(2)}, m\right), \qquad v_j^{(1)} \geq v_j^{(2)}, \qquad \forall j. \tag{59}$$

Ejemplo 2

El valor de agregación $F_{MA}(\boldsymbol{a})$ calculado mediante la definición del operador MA-OWA se realiza paso a paso mediante la Tabla 1. En la primera fila se muestran los valores a agregar, en la segunda están sus cardinalidades. En las subsiguientes se agregan la matriz de valores $\gamma_{j,k}$ y en la última columna están los valores u_k según las ecuaciones (54) a (57) de la definición.

	$v_{\sigma(1)}$ 0.7	$v_{\sigma(2)}$ 0.5	$v_{\sigma(3)}$ 0.4	$v_{\sigma(4)}$ 0.1	
$\gamma_{i,k}$	$m_{\sigma(1)}$ 4	$m_{\sigma(2)}$ 1	$m_{\sigma(3)}$ 1	$m_{\sigma(4)}$ 3	u_k
$\gamma_{i,1}$	1	1	1	1	4
$\gamma_{i,2}$	1	0	0	1	3
$\gamma_{i,3}$	1	0	0	1	3
$\gamma_{i,4}$	1	0	0	0	2

Tabla 1: Valores de $\gamma_{i,k}$ y u_i para el Ejemplo 2

Los pesos dependientes de las cardinalidades se calculan de la siguiente manera:

$$w_{1,4} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{4}1\right)\right)\right) = \frac{53}{72},$$

$$w_{2,4} = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{3}\left(0 + \frac{1}{3}\left(0 + \frac{1}{4}1\right)\right)\right) = \frac{1}{72},$$

$$w_{3,4} = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{3}\left(0 + \frac{1}{3}\left(0 + \frac{1}{4}1\right)\right)\right) = \frac{1}{72},$$

$$w_{4,4} = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{4}1\right)\right)\right) = \frac{17}{72}.$$

Finalmente, el operador MA-OWA devuelve:

$$F_{MA}(\{(0.7,4),(0.5,1),(0.4,1),(0.1,3)\}) = 0.7\frac{53}{72} + 0.5\frac{1}{72} + 0.4\frac{1}{72} + 0.1\frac{17}{72} = \frac{397}{720} = 0.551.$$

2.2.3 Operadores QMA-OWA

Uno de los operadores más utilizados para representar la opinión de expertos en un valor representativo de la mayoría es el operador OWA mediante el uso de cuantificadores lingüísticos. Estos cuantificadores se utilizan para indicar la estrategia de agregación de la opinión de los expertos. Sin embargo en problemas de toma de decisión en grupo es posible obtener valores que no son representativos del concepto de mayoría expresado por el cuantificador (Peláez and Doña, 2006).

La incorporación del concepto de mayoría en el vector de pesos del operador MA-OWA (descripto en la sección anterior), hace que este operador tenga un mejor comportamiento que el operador OWA clásico, sin embargo este enfoque no permite modelar los conceptos como “muchos” o “al menos el 80%” (Peláez et al., 2007). Por esta razón, es necesario introducir el uso de cuantificadores lingüísticos en el proceso de agregación y permitir así modelar este tipo de semánticas. Se define entonces un operador de agregación que utiliza dos estrategias de cuantificación: individual y grupal (Peláez and Doña, 2006).

2.2.3.1 Cuantificación individual

El proceso de cuantificación individual aplica la semántica del cuantificador sobre cada uno de los valores del vector de pesos individualmente. Estos valores se calculan previamente mediante algún operador de agregación para luego aplicar la semántica del cuantificador mediante la siguiente expresión:

$$w_i{}^Q = w_i{}^N \cdot Q\left(\frac{i}{n}\right) + \lambda \tag{60}$$

donde $w_i{}^N$es el peso individual obtenido mediante algún operador de agregación, Q es el cuantificador lingüístico y λ es la Q-Normalización (explicada a continuación).

2.2.3.2 Cuantificación en grupo

Desde un punto de vista social (en problemas de toma de decisión en grupo) es conveniente que todos los grupos de opiniones estén representados por al menos un individuo. Esta premisa no siempre se cumple con la cuantificación individual ya que existen grupos de opinión que son eliminados del proceso de agregación. Para solucionar este problema se propone la cuantificación en grupo, la cual siempre garantiza dicha condición (Peláez et al., 2007).

En la cuantificación en grupo el cuantificador se aplica sobre cada grupo de mayoría produciendo un nuevo grupo con una cardinalidad que representa la semántica expresada por Q. En esta estrategia los pesos se calculan para cada grupo dividiendo el peso original de cada elemento por su cardinalidad; y a continuación se aplica el cuantificador sobre el grupo. El nuevo vector de pesos cuantificados se calcula con la siguiente expresión:

$$w_i{}^Q = \frac{w_i}{\delta_i} \cdot \sum_{j=1}^{\delta_i} Q\left(\frac{j}{\delta_i}\right) + \lambda \tag{61}$$

donde Q es el cuantificador, n es el número de grupos de mayoría, δ_i es la cardinalidad del grupo i; y λ es la Q-Normalización.

Esta estrategia de cuantificación elimina la exclusión de grupos de elementos a agregar, de manera que se obtiene una representación de la mayoría pero al mismo tiempo quedan representadas todas las minorías.

La Figura 2, muestra las diferencias entre la cuantificación individual y la cuantificación en grupo.

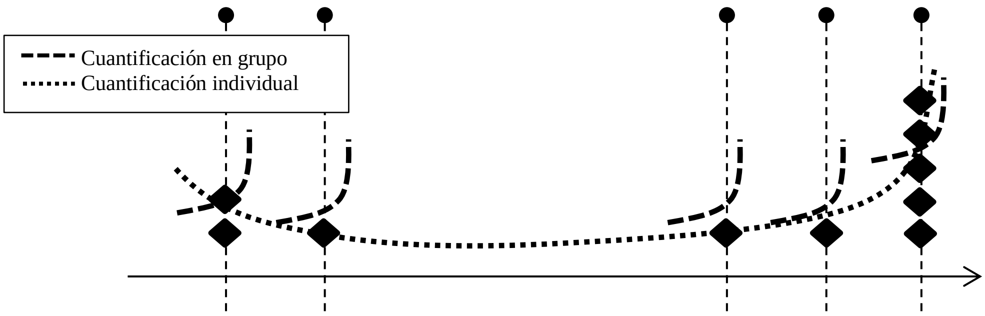


Figura 2: Representación del cuantificador con la semántica de cuantificación en grupo y cuantificación individual

2.2.3.3 Q-Normalización

Las estrategias de cuantificación de mayoría se basan en la aplicación del cuantificador sobre los pesos calculados con un operador de agregación. Cada elemento de la agregación ve modificado su peso por la cantidad expresada por la semántica del cuantificador, de manera que $\sum_{i=1}^{n} w_i \neq 1$, es decir, los pesos dejan de estar normalizados. Por lo tanto es necesario un proceso de normalización de pesos que haga que $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ para todo $w_i \in [0,1]$, y al mismo tiempo incorpore la semántica del cuantificador en dicha normalización.

Inicialmente, se parte de un conjunto de pesos normalizados obtenidos tras la aplicación del operador de agregación. Cuando se aplica el cuantificador Q sobre cada peso w_i, se produce una variación del mismo, igual a $w_i \cdot q_i$. La Q-normalización redistribuirá los pesos en función el cuantificador usado.

Definición

Formalmente, la Q-normalización se define como sigue:

Sea el vector de pesos $W = [w_1, w_2, \dots, w_n]$ y el cuantificador para cada elemento $Q = [q_1, q_2, \dots, q_n]$ donde $0 \leq q_i \leq 1$ y $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, por lo que se establece:

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot q_i \leq 1 \tag{62}$$

Si $\varepsilon = 1 - \rho$, entonces $\frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^{n} q_i}$ es la cantidad a ser añadida a cada elemento en la proporción expresada por q_i. Luego se demuestra que la Q-Normalización es:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n}\left(w_i \cdot q_i + \frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^{n} q_i} \cdot q_i\right) = \\ &\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot q_i + \frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^{n} q_i} \cdot \sum_{i=1}^{n} q_i = \\ &\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot q_i + \varepsilon = \rho + 1 - \rho = 1 \end{aligned} \tag{63}$$

Como se observa en su definición, la Q-Normalización modifica cada peso incrementándolo en función del cuantificador usado en cada caso con respecto a los demás elementos cuantificados, añadiendo, en función de este valor, a cada peso la cantidad ε que corresponda.

De esta forma, se obtiene una normalización que se integra en el proceso de agregación reflejando la semántica del cuantificador.

2.2.3.4 Operador QMA-OWA Individual

Definición

El operador de mayoría usando el modelo de cuantificación individual se define como sigue:

$$F_{Q_I MA}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} {w_i}^Q \cdot b_i = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (b_1, b_2, \ldots, b_n) \cdot b_i \tag{64}$$

donde ${w_i}^Q \in [0,1]$ con $\sum_{i=1}^{n} {w_i}^Q = 1$ y b_i es el i-ésimo elemento de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ordenado en orden ascendente según las cardinalidades.

Los pesos del operador QMA-OWA con estrategia individual se calculan como sigue.

$$w_i{}^Q = w_i{}^N \cdot Q\left(\frac{i}{n}\right) + \left[Q\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1 - \sum_{i=1}^{n}\left(w_i{}^N \cdot Q\left(\frac{i}{n}\right)\right)}{\sum_{i=1}^{n} Q\left(\frac{i}{n}\right)}\right] \tag{65}$$

siendo $w_i{}^N$ el peso individual del elemento obtenido con el operador MA-OWA, Q es el cuantificador, y la expresión comprendida entre corchetes se corresponde con la Q-Normalización.

2.2.3.5 Operador QMA-OWA en grupo

La cuantificación individual puede excluir grupos de opinión en los procesos de toma de decisión en grupo, y al no estar representadas todas las opiniones pueden obtenerse resultados indeseados. Para resolver este problema, en (Peláez and Doña, 2006) se propone el operador de mayoría cuantificada QMA-OWA con estrategia de grupo.

Definición

En este caso el operador se define como sigue:

$$F_{Q_G MA}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i{}^Q \cdot b_i = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot b_i \tag{66}$$

donde $w_i{}^Q \in [0,1]$ con $\sum_{i=1}^{n} w_i{}^Q = 1$ y b_i es el i-ésimo elemento de $a_1, a_2, \dots, a_n$ ordenado en orden ascendente según las cardinalidades.

Los pesos del operador QMA-OWA con estrategia de grupo se calculan como sigue.

$$w_i{}^Q = \frac{w_i}{\delta_i} \cdot \sum_{j=1}^{\delta_i} Q\left(\frac{i}{\delta_i}\right) + \left[\sum_{j=1}^{\delta_i} Q\left(\frac{j}{\delta_i}\right) \cdot \frac{1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{\delta_i} \cdot \sum_{j=1}^{\delta_i} Q\left(\frac{j}{\delta_i}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\delta_i} Q\left(\frac{j}{\delta_i}\right)}\right] \tag{67}$$

siendo w_i el peso individual del elemento obtenido con el operador MA-OWA, Q es el cuantificador, y la expresión comprendida entre corchetes es la Q-Normalización.

Ejemplo 3

Supongamos que se tienen los siguientes valores a agregar $B = [0 \quad 0 \quad 0.7 \quad 0.8 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$ y se desea obtener un valor que tenga en cuenta el concepto de mayoría. Utilizando los operadores revisados, se puede obtener, de modo comparativo, los siguientes resultados:

Operador OWA

Valores a agregar: $B = [0 \quad 0 \quad 0.7 \quad 0.8 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$

Vector de pesos: $W = [0 \;\; 0 \;\; 0.057 \;\; 0.285 \;\; 0.285 \;\; 0.285 \;\; 0.088]$

$OWA = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot b_i = 0.485.$

Operador MA-OWA

Valores a agregar: $B = [0.7 \quad 0.8 \quad 0 \quad 1]$

Cardinalidades: $[1 \quad 1 \quad 2 \quad 3]$

Vector de pesos ordenado: $W = [0.708 \quad 0.208 \quad 0.042 \quad 0.042]$

$MA - OWA = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot b_i = 0.771.$

Operador QMA-OWA$_I$

Cuantificado con el cuantificador “*muchos*” con estrategia individual.

Valores a agregar: $B_N = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0.8 \quad 0.7]$

Vector de pesos: $W_N = \left[\frac{0.708}{3} \quad \frac{0.708}{3} \quad \frac{0.708}{3} \quad \frac{0.208}{2} \quad \frac{0.208}{2} \quad 0.041 \quad 0.041\right]$

Cuantificador Q: $Q = [0 \quad 0 \quad 0.057 \quad 0.343 \quad 0.629 \quad 0.914 \quad 1]$

Vector de pesos cuantificado: $W^Q = [0 \quad 0 \quad 0.013 \quad 0.077 \quad 0.225 \quad 0.327 \quad 0.358]$

$QMA - OWA_I = \sum_{i=1}^{n} {w_i}^Q \cdot b_i = 0.910.$

Operador QMA-OWA$_G$

Cuantificado con el cuantificador “*muchos*” con estrategia de grupo.

Valores a agregar: $B_N = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0.8 \quad 0.7]$

Vector de pesos: $w = [0.042 \;\; 0.042 \;\; 0.208 \;\; 0.708]$

Cuantificador Q para grupos con cardinalidad 1: $Q = [1]$

Cuantificador Q para grupos con cardinalidad 2: $Q = [0.2 \;\; 1]$

Cuantificador Q para grupos con cardinalidad 3: $Q = [0 \;\; 0.533 \;\; 1]$

Vector de pesos cuantificado: $W^Q = [0.132 \quad 0.132 \quad 0.234 \quad 0.501]$

$QMA - OWA_G = \sum_{i=1}^{n} w_i{}^Q \cdot b_i = 0.7$.

La Figura 3, muestra de manera gráfica los valores obtenidos con cada operador.

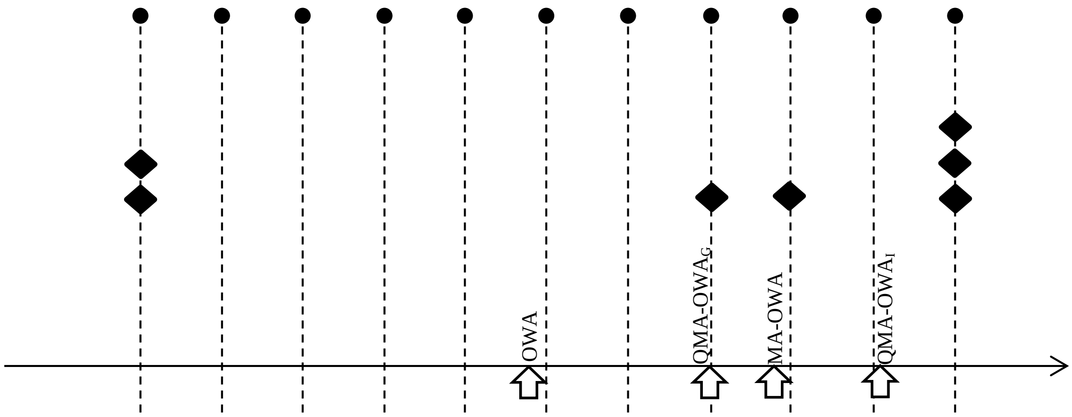


Figura 3: Representación gráfica de los valores agregados mediante OWA, MA-OWA y QMA-OWA

2.2.4 Operador WKC-OWA

El operador Work Committee-OWA (WKC-OWA) está definido para realizar un proceso de agregación de información en problemas de decisión democrática. Este operador modela, de algún modo, la semántica de mayoría usando específicamente el concepto de comité de trabajo, donde la opinión de cada ciudadano está representada en grupos heterogéneos (La Red et al., 2011).

Definición

El operador WKC-OWA se define como:

$$F_{WKC}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot a_i = \sum_{i=1}^{n} f_i(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot a_i \tag{68}$$

donde $w_i \in [0,1], \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ y

$$f_i(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{\max|\{a_1, a_2, \dots, a_n\}| \cdot h_i(a_1, a_2, \dots, a_n)} \tag{69}$$

donde h_i es una función que indica el número de elementos con cardinalidad menor o igual que a_i para todo $a_k \in \{a_i, \dots, a_n\}$:

$$h_k(b_1, b_2, \ldots, b_n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} L_{ki} \tag{70}$$

donde

$$L_{ki} = \begin{cases} 1, & si\ |b_i| \geq \sum_{j=1}^{k} p_{kj} \quad con\ b_i \neq b_k\ y\ b_i \neq b_{i-1} \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases} \tag{71}$$

y

$$p_{kj} = \begin{cases} 1, & si\ |b_i - b_k| < \alpha \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases} \tag{72}$$

El valor α modela el tamaño de cada comisión y se comporta como un operador *neat* debido a que el vector de pesos se calcula en función de los valores a agregar y son independientes al orden de los mismos.

2.2.5 Agregación Lingüística

2.2.5.1 Enfoque Lingüístico

En entornos difusos multi expertos, un problema de toma de decisión en grupo está compuesto de diferentes elementos tales como: un conjunto finito de alternativas, un conjunto finito de criterios y un conjunto de expertos o decisores que son llamados a expresar sus valores de preferencia para un conjunto predefinido de opciones (alternativas), con la finalidad de seleccionar la mejor (Herrera and Herrera-Viedma, 2000).

Muchas veces, en entornos de estas características, donde es necesario calificar un fenómeno relacionado con la percepción humana, normalmente se utilizan palabras del lenguaje natural en vez de valores numéricos. Es común encontrarse con situaciones donde la información que es necesario que provean los decisores, no puede evaluarse con precisión en una forma cuantitativa, sin embargo es factible suministrarla cualitativamente (Herrera-Viedma et al., 2000). Asimismo, en algunas situaciones, tampoco es posible contar con información cuantitativa precisa debido al alto costo de procesamiento insumido, por lo que un valor aproximado puede ser aceptable. Por ejemplo para describir la velocidad de un vehículo es factible usar términos lingüísticos (como “lento”, “veloz”, “muy veloz”, etc) en vez de valores numéricos precisos (Chen and Ben-Arieh, 2006).

La información sobre la satisfacción asociada a un resultado o un estado de la naturaleza puede expresarse mejor en términos de etiquetas lingüísticas. Su uso, en toma de decisión en grupo, hace que las evaluaciones o apreciaciones que deban realizarse sean más flexibles y fiables, pero hace que el proceso de agregación de las etiquetas lingüísticas sea más complicado, especialmente cuando se consideran que los expertos tienen diferente grado de experticia.

El conjunto de términos lingüísticos es escogido en función del conocimiento o nivel de experticia que tiene el experto sobre el tema en cuestión. Consecuentemente, pueden existir diferentes conjuntos lingüísticos si intervienen diferentes expertos con la capacidad de expresar su evaluación con diferentes grados de precisión. Un dato importante entonces, es la “granularidad de la incertidumbre” (Herrera-Viedma et al., 2000) y tiene que ver con la cardinalidad que tendrán los conjuntos lingüísticos que se utilizarán para expresar el grado de satisfacción de los expertos.

Por ejemplo, un experto podrá tener la posibilidad de discernir entre 5 valores posibles y otro en 7 valores posibles, de modo tal que los conjuntos lingüísticos podrían ser $S_1 = \{ninguno,\ bajo,\ medio,\ alto,\ perfecto\}$ y $S_2 = \{ninguno,\ muy\,bajo,\ bajo,\ medio,\ alto,\ muy\ alto,\ perfecto\}$ respectivamente.

Un algoritmo de fusión, necesariamente debe poder mapear o transformar el conjunto de etiquetas de S_1 en S_2 o transformarlos a valores numéricos donde la misma etiqueta “$bajo$” puede no tener la misma definición para ambos conjuntos. La misma etiqueta “$bajo$”, tendrá diferentes funciones de pertenencia (explicadas más adelante), por lo tanto no se podrán usar las dos etiquetas equivalentemente en un proceso de decisión (Chen and Ben-Arieh, 2006).

Sintácticamente, hay dos enfoques principales para generar un conjunto de etiquetas lingüísticas. La primera basada en una gramática libre de contexto, que permitirá generar infinitas etiquetas tal como se expresa en (Bonissone, 1980) y (Zadeh, 1975a) (Zadeh, 1975b) (Zadeh, 1975c). Sin embargo en la práctica los seres humanos razonablemente pueden mantener en mente unos siete términos por lo que se puede considerar un segundo enfoque mediante un conjunto finito de etiquetas.

En (Huynh and Nakamori, 2005) puede encontrarse una definición formal de una jerarquía lingüística asociada a una variable lingüística X. Consiste en un número finito de niveles $l_0, l_1, \ldots, l_n$, donde l_0 es la raíz del árbol (la variable lingüística) y los demás niveles l_i son los diferentes conjuntos de etiquetas lingüísticas S_i con $i = 1..n$ donde $|S_i| < |S_{i+1}|$ con $i = 1..n$-1.

Denotaremos $|S_i| = n_i$, y

$$S_i = \{s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{n_i-1}\}, \tag{73}$$

donde cada s_i es una etiqueta discreta tal que $s_i \ll s_j$ si $i < j$, y donde $\ll$ representa el orden semántico. El valor n_i, se denomina cardinalidad del conjunto S_i y normalmente es impar (Xu, 2008).

La cardinalidad de S debe ser lo suficientemente pequeña para no imponer precisión inútil sobre los expertos y lo suficientemente rica para permitir una discriminación del desempeño de cada objeto evaluado en un número limitado de grados (Bordogna et al., 1997).

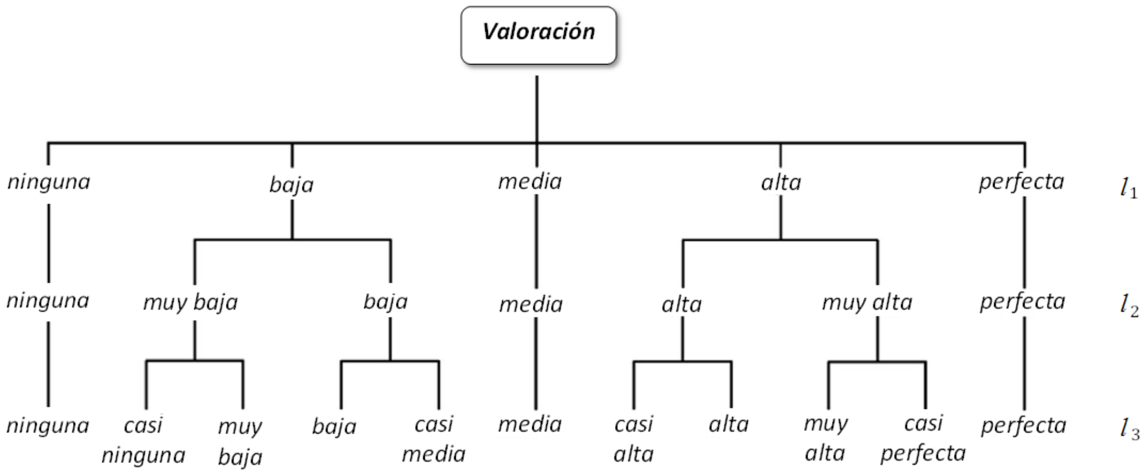


Figura 4: Árbol de jerarquía de dominios para la variable lingüística "*valoración*"

La Figura 4 muestra un ejemplo completo de una jerarquía para la variable lingüística "*valoración*" (Herrera-Viedma et al., 2000), (Morente-Molinera et al., 2015).

Cuando intervienen etiquetas lingüísticas en un proceso de toma de decisiones será necesario asociar a cada etiqueta un número difuso en el intervalo $[0,1]$, que normalmente se describen mediante funciones de pertenencia.

Existen varias posibilidades de representar la función de pertenencia. Se las puede representar mediante una función trapezoidal mediante una tupla de 4 elementos (a, b, d, c), donde a y c pueden representar los límites izquierdo y derecho del dominio de definición de la función trapezoidal y $[b, d]$ indica el intervalo donde la función toma el valor 1. Si $b - d = 0$ aparece un caso particular de este tipo de representación donde la función de pertenencia es triangular (Figura 5). Una tercer manera, podría ser utilizando una función gaussiana.

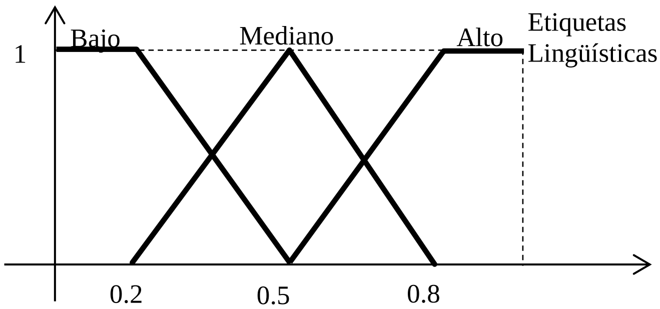


Figura 5: Representación triangular de 3 etiquetas para la variable lingüística "Altura"

Un proceso de toma de decisiones multicriterio con información lingüística consta de los siguientes pasos:

1) *Selección del conjunto de términos lingüísticos con sus significados*: Consiste en establecer el dominio de expresión lingüística utilizado para proporcionar los valores acerca de las alternativas en relación a los diferentes criterios. En este paso es necesario seleccionar la granularidad del conjunto de términos lingüísticos, sus etiquetas y su semántica.
2) *Selección del operador de agregación de la información lingüística*: Consiste en establecer el operador de agregación de información lingüística más apropiado para combinar los valores de comportamiento lingüísticos dados.
3) *Selección de las mejores alternativas*: Consiste en elegir las mejores alternativas de acuerdo con los valores obtenidos. Se lleva a cabo en dos fases:
   a) *Fase de agregación de información lingüística*: Consiste en la obtención de un valor lingüístico global sobre las alternativas, agregando los valores de comportamiento

lingüísticos proporcionados de acuerdo con todos los criterios mediante el operador de agregación elegido.

b) *Fase de Explotación*: Consiste en establecer un ranking entre las alternativas de acuerdo con el valor los valores de desempeño global para la elección de las mejores alternativas.

Se han propuesto numerosos operadores de agregación lingüísticos que permiten manejar el proceso de fusión de etiquetas en un único valor. Por ejemplo los operadores max, min, mediana y mediana ponderada (Yager and Rybalov, 1997) (Yager, 1998), operador de agregación lingüística basado en símbolos (Delgado et al., 1993), el operador LOWA (Herrera et al., 1996) o más recientemente el operador de agregación basado en 2-tupla (Herrera and Martinez, 2000) (Martınez and Herrera, 2012), y los operadores (EOWA y EOWG) para agregación de etiquetas lingüísticas basado en relaciones de preferencias lingüísticas (Xu, 2004), etc. En (Peláez and Doña, 2003b) se define también un operador de mayoría lingüístico que tiene en cuenta la cardinalidad de las etiquetas en el proceso de agregación. Asimismo, se han propuesto diferentes modelos para agregación lingüística multi-granular (Chen and Ben-Arieh, 2006), basados en números difusos discretos (Massanet et al., 2014), o aplicables a la web (Alonso et al., 2013), etc.

2.2.5.2 Operador lingüístico de Mayoría LAMA-OWA

El operador de agregación LAMA, es un operador de agregación de etiquetas lingüísticas que toma en cuenta la cardinalidad de las mismas en el proceso de agregación. Una extensión del mismo está basado en el modelo de 2-tupla (Herrera and Martinez, 2000). Es una variación del operador de mayoría definido en la sección 2.2.2 cuya definición simbólica se encuentra en (Peláez and Doña, 2003b):

Se considera un conjunto de etiquetas $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ y $N = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$ la frecuencia o cardinalidad de cada etiqueta s_i, donde cada $\delta_i \leq \delta_{i+1}$ para todo $1 \leq i \leq n-1$.

Definición

El operador $LAMA$ es la etiqueta s_m dado por:

$$s_m = LAMA\big((s_1, \delta_1), (s_2, \delta_2), \dots, (s_n, \delta_n)\big) = s_1 \otimes \lambda_1 \oplus s_2 \otimes \lambda_2 \oplus \dots \oplus s_n \otimes \lambda_n \qquad (74)$$

donde $\oplus$ es las suma de etiquetas y $\otimes$ simboliza el producto de una etiqueta por un real positivo definidos en (Delgado et al., 1993) y donde:

$$\lambda_i = \begin{cases} \dfrac{1}{d_1}, & si\ i = 1 \\ \dfrac{1}{d_1} \cdot \dfrac{1 - n^{\delta_2}}{1 - n}, & si\ i = 2 \\ \lambda_{i-1} + \dfrac{1}{d_{i-1}} \cdot \dfrac{1 - (n - i + 2)^{\delta_i - \delta_{i-1}}}{1 - (n - i + 2)}, & si\ i > 2 \end{cases} \quad (75)$$

con

$$d_i = \begin{cases} 1, & si\ i = 1; n = 1 \\ n^{\delta_2}, & si\ i = 1; n = 2 \\ n^{\delta_2} \cdot \displaystyle\prod_{j=1}^{n-2} (n - j)^{\delta_{j+2} - \delta_{j+1}}, & si\ i = 1; n > 2 \\ \displaystyle\prod_{j=i-1}^{n-2} (n - j)^{\delta_{j+2} - \delta_{j+1}}, & si\ i > 1 \end{cases} \quad (76)$$

2.2.6 Operador Geométrico de mayoría MM-OWA

Otro operador denominado MM-OWA puede encontrarse en (Peláez, 2005) donde el vector de pesos se calcula en función de los valores a agregar de la misma manera que lo hace el operador MA-OWA, por lo que permite incorporar la semántica de mayoría de este operador y las ventajas del operador OWG para manejar apreciaciones de expertos que estén expresadas en una escala proporcional.

Definición

El operador MM-OWG es una función $F^G: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que tiene asociado un vector de pesos $W = [w_1, w_2, \dots, w_n]$, tal que:

i. $w_i \in [0,1]$, y
ii. $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$

y se define para una lista de agregación $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$, de acuerdo a la siguiente expresión:

$$F^{MM}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{i=1}^{n} {c_i}^{f_i(b_1, b_2, \ldots, b_n)} \tag{77}$$

donde c_i es el i-ésimo valor mayor de la colección $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ y donde $f_i(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ es la función de importancia calculada mediante el operador MA-OWA.

Ejemplo 4

Suponiendo que es necesario agregar un conjunto de valoraciones de ocho expertos referentes a una alternativa a: $A = \left[9, 9, 9, 3, 3, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. El operador MM-OWA considera cuatro valores $\left[9, 3, 1, \frac{1}{2}\right]$ con cardinalidades $[3, 2, 1, 2]$ respectivamente. El vector de pesos calculado mediante MA-OWA será: $W = [0.032, 0.156, 0.156, 0.656]$, por lo que el valor agregado será:

$$F_{MM}\left(\frac{1}{2}, 1, 3, 9\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{0.032} \cdot 1^{0.156} \cdot 3^{0.156} \cdot 9^{0.656} = 4.907$$

En (Peláez, 2005) se puede encontrar un detalle de las propiedades de este operador, donde se destacan las aplicables a problemas de toma de decisión multicriterio como en AHP (Saaty, 1990), donde es necesario agregar matrices con relaciones de preferencias recíprocas multiplicativas que satisfagan la propiedad de consistencia.

2.3. Operadores de Agregación Difusos

En procesos de toma de decisión es frecuente encontrarse con situaciones donde los criterios que se evalúan para seleccionar la alternativa más adecuada, tienen algún tipo de relación o dependencia entre ellos y donde los operadores tales como la media aritmética ponderada o los operadores OWA, no modelan adecuadamente la situación.

Por lo tanto, este fenómeno usualmente implica descartar operadores como los señalados debido a que se utilizan en presencia de criterios independientes y recurrir a otros que tienen en cuenta las interacciones que pueden existir entre los mismos.

Estas relaciones normalmente son complejas de identificar y modelar, sin embargo se pueden agrupar en tres grupos: correlación (directa o indirecta), de sustitución o complementariedad y dependencia preferencial (Marichal, 2000).

La correlación entre dos criterios probablemente sea la relación más intuitiva y más conocida. Una correlación positiva (directa) entre los criterios i y j debería modelarse de la siguiente manera:

$$\mu(ij) < \mu(i) + \mu(j)^{2} \tag{78}$$

que expresa una interacción negativa o sinergia negativa. Esto implica que "la contribución marginal de j para cada combinación de criterios que contiene i es estrictamente menor que la contribución de j a la misma combinación donde i no existe" (Marichal, 2000).

Contrariamente, una correlación negativa (inversa) entre los criterios i y j debería modelarse de la siguiente manera:

$$\mu(ij) > \mu(i) + \mu(j) \tag{79}$$

que expresa una interacción positiva o sinergia positiva. Esto significa que ponderaciones altas para i normalmente implican ponderaciones o pesos bajos para j y viceversa. La satisfacción simultánea de ambos criterios es bastante poco frecuente, por lo tanto deberían favorecerse las alternativas que presenten este perfil (Marichal, 2000).

Es posible encontrarse también con situaciones donde la satisfacción de un solo criterio produce casi el mismo efecto que la satisfacción de más de uno, por lo que la importancia de la coalición de un par de criterios es muy próxima a la importancia de uno de ellos siempre en presencia del otro. Esto implica que los criterios puedan sustituirse o intercambiarse (Marichal, 2000). Esta condición lo expresa la medida difusa μ tal que:

$$\mu(T) < \begin{Bmatrix} \mu(T \cup i) \\ \mu(T \cup j) \end{Bmatrix} \approx \mu(T \cup ij), \quad T \subseteq N - \{i, j\} \tag{80}$$

donde N es el conjunto de criterios que incluye a i y j; y $\approx$ significa aproximadamente igual.

[2] Se considera una notación simplificada cuando aparecen conjuntos de criterios omitiendo llaves: $\mu(i)$ en vez de $\mu(\{i\})$ e ij en vez de $\{i, j\}$.

Alternativamente, existen situaciones donde la satisfacción de un solo criterio produce un efecto muy débil comparado con la satisfacción de un par de ellos; por ejemplo en un diagnóstico médico, donde la aparición de un síntoma puede no ser demasiado importante excepto por la aparición de algún otro indicio que ocurra de manera conjunta. Este efecto de complementariedad, puede modelarse mediante una medida difusa μ tal que:

$$\mu(T) \approx \begin{Bmatrix} \mu(T \cup i) \\ \mu(T \cup j) \end{Bmatrix} < \mu(T \cup ij), \quad T \subseteq N - \{i, j\} \tag{81}$$

donde N es el conjunto de criterios.

Pueden ocurrir además, situaciones donde la preferencia de los criterios i y j varía respecto de otro criterio k (Marichal and Roubens, 2000). Por ejemplo, la situación en la cual se desea adquirir un automóvil y las alternativas posibles se evalúan respecto de criterios tales como el precio, el consumo y el confort. Es probable que si se prefiere una alternativa a bajo precio, se prefiera también bajo consumo, sin embargo ante la preferencia de un automóvil con precio más elevado, muy posiblemente se valorará más el confort respecto del consumo.

Junto a la clásica integral de Riemann existen otro tipo de integrales, de las cuales la integral de Lebesgue es de particular interés debido a que está definida respecto de una medida, específicamente, una medida aditiva.

La integral discreta de Choquet es una generalización de la integral de Lebesgue y se comporta como un operador de agregación adecuado para modelar el fenómeno de interacción de criterios expuesto precedentemente, debido a que está definida respecto de una medida no-aditiva (Grabisch and Labreuche, 2005), de manera que, al combinar las entradas no solamente tiene en cuenta su magnitud o importancia individual, sino que tomen relevancia las coaliciones que pueden aparecer.

Este tipo de operadores se definen respecto de una función de conjuntos denominada medida difusa μ. Si consideramos el conjunto de los criterios evaluados, se puede definir un peso no solo para cada criterio de modo independiente sino también para cada subconjunto de criterios (Tan and Chen, 2010) y modelar así la interacción entre los mismos.

En problemas donde los criterios que se tienen en cuenta para la decisión, no tienen relación o son independientes, la importancia que tienen las agrupaciones de los mismos es aditiva, sin embargo en muchas aplicaciones prácticas, dichos criterios tienen alguna interacción por lo que es necesario recurrir a medidas subaditivas o superaditivas (Marichal, 2000). En estos casos, las medidas clásicas como la media aritmética ponderada o los operadores OWA no modelan adecuadamente el fenómeno (Tan and Chen, 2010), (Tan, 2011).

En muchas situaciones, la determinación de un ranking adecuado de las alternativas consideradas, puede ser erróneo si no se consideran las dependencias entre los criterios. Hay vasta muestra en la literatura donde queda de manifiesto las posibilidades que proporciona dicha integral, como por ejemplo en el análisis de preferencias de consumidores (Vu et al., 2012), estimaciones en evaluación de proyectos (Bonetti et al., 2012), evaluación de alumnos durante el proceso de aprendizaje para conducir vehículos militares (Grabisch and Roubens, 2000), evaluación de preferencias de turistas en relación a hoteles en Hong Kong (Li et al., 2013), valoración de propiedades residenciales (Gomes et al., 2013), análisis de rendimiento de bancos y exposición al riesgo (Doumpos and Zopounidis, 2010), etc.

Se define, a continuación, el elemento primordial y necesario para utilizar una integral discreta como operador de agregación: la medida difusa.

2.3.1 Medida Difusa

Informalmente, una medida es una función para medir un conjunto de objetos (finitos o infinitos). Por ejemplo el largo de un intervalo de la recta real es un ejemplo de medida aditiva; el área o el volumen en un espacio bidimensional o tridimensional respectivamente también son ejemplos de medidas aditivas. Sin embargo, pueden aparecer también medidas no aditivas denominadas también medidas monótonas, capacidades (introducidas por Choquet (Choquet, 1954)) o medidas difusas (introducidas por Sugeno (Sugeno, 1974)).

El término "medida difusa", es a menudo utilizado en la comunidad de conjuntos difusos, sin embargo es confuso debido a que matemáticamente no se considera ningún concepto difuso (Grabisch et al., 2011). Más allá de la nomenclatura utilizada, las medidas difusas e integrales difusas son aplicadas en muchos campos de investigación, tales como toma de decisión multicriterio (TDMC) y en la actualidad resulta un importante tópico de investigación.

Definición

Sea N un conjunto clásico y $\mathcal{A}$ una σ-algebra[3] de subconjuntos de N, una medida difusa sobre N (Murofushi and Sugeno, 1991) es una función de conjuntos monótona $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ que satisface:

$$\mu(\emptyset) = 0; \mu(N) = 1; \tag{82}$$

$$\mu(A) \leq \mu(B) \;\; \forall\, A, B \in \mathcal{A} \;\text{ tal que }\; A \subseteq B. \tag{83}$$

Una medida difusa asigna importancia a todos los subconjuntos posibles de criterios de un conjunto de criterios dado. Por lo tanto es necesario asignar pesos, no solo a los criterios individualmente, sino también a cada combinación posible entre los mismos.

En caso de una medida difusa aditiva, es suficiente con determinar n coeficientes $\mu(1), \mu(2), \dots, \mu(n)$ que representan la importancia de cada criterio individualmente. Sin embargo, si se consideran interacciones entre ellos, es necesario definir 2^n coeficientes que corresponden a los posibles subconjuntos de N.

Hay diferentes modelos para determinar las medidas difusas que modelen una situación particular tales como algoritmos genéticos, algoritmos de gradiente descendente, redes neuronales, algoritmos enjambre de partículas e incluso, a partir de información requerida a expertos. Grabisch introdujo un algoritmo de gradiente descendente con restricciones para identificar medida difusa aplicado al reconocimiento de patrones (Grabisch, 1995). En (Grabisch and Roubens, 2000) se presentaron dos enfoques (basado en la minimización del error cuadrático y satisfacción de restricciones). Wang propone un algoritmo especulativo para extraer una medida difusa a partir de datos de muestra (Wang et al., 2012). Otros investigadores utilizan algoritmos genéticos (Combarro and Miranda, 2006) y algoritmos de generación al azar (Combarro et al., 2013). En (Wang et al., 2011) se propone un algoritmo

[3] Una σ-álgebra definida sobre un conjunto N, representada por $\mathcal{A}$, es una familia de subconjuntos de N que cumple las siguientes propiedades:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$,
- Si $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, entonces también está su complemento: $\overline{\mathrm{A}} \in \mathcal{A}$
- Si $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_n \in \mathcal{A}$ entonces $\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \dots \cup \mathrm{A}_n \in \mathcal{A}$

Si $P(N)$ es el conjunto potencia del conjunto N entonces $P(N)$ es una σ-álgebra sobre N (la mayor σ-álgebra posible sobre N). Por ejemplo, para $n = 3$, los conjuntos posibles son $2^3 = 8$: $\mu(\emptyset)$, $\mu(1)$, $\mu(2)$, $\mu(3)$, $\mu(1,2)$, $\mu(1,3)$, $\mu(2,3)$, $\mu(1,2,3)$.

basado en enjambre de partículas para determinar un tipo de medidas difusas generales a partir de datos.

Adicionalmente, se han propuesto otras técnicas que requieren alguna información de diferentes expertos. Por ejemplo, en (Takahagi, 2007), el decisor debe identificar los pesos y grados de interacción entre criterios mediante un diamante rotulado.

2.3.1.1 Tipos de Medidas Difusas

Las propiedades de la integral de Choquet dependen de la medida difusa que se utilice en el proceso de agregación. Es posible que esta integral se comporte como una media aritmética ponderada, un operador OWA, etc. En esta sección se presentan las medidas difusas más importantes.

Medida Difusa Simétrica

Una medida difusa μ es *simétrica* si $\mu(A) = \mu(B)$ siempre que $|A| = |B|$ para cualquier $A, B \subseteq N$. Alternativamente se puede decir que μ es simétrica si para cualquier $A \subseteq N$:

$$\mu(A) = Q\left(\frac{|A|}{n}\right) \tag{84}$$

para alguna función monótona no decreciente $Q: [0,1] \to [0,1]$, $Q(0) = 0$ y $Q(1) = 1$.

Medida Difusa Dual

Es *dual* si está definida por $\mu^d(A) = \mu(N) - \mu(N - A)$ para cualquier $A \subseteq N$. O similarmente $\mu^d(A) = 1 - \mu(A^c)$, donde A^c es el complemento de A en N.

Medida Difusa Self-Dual

Una medida difusa μ será *self-dual* si es igual a su dual μ^d. Se cumple $\mu(A) + \mu(A^c) = 1$ para todo $A \subseteq N$.

Medida Difusa Sub y Supermodulares

Una medida difusa se denomina *submodular* si para cualquier $A, B \subseteq N$,

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \leq \mu(A) + \mu(B) \tag{85}$$

Se denomina *supermodular* si:

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \geq \mu(A) + \mu(B) \tag{86}$$

Serán subaditivas o superaditivas cuando A y B son disjuntos ($A \cap B = \emptyset$).

Medida Difusa Sub y Superaditivas

Una medida difusa se denomina *subaditiva* si para cualquier $A, B \subseteq N$, $A \cap B = \emptyset$:

$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) \tag{87}$$

Se denomina *superaditiva* si:

$$\mu(A \cup B) \geq \mu(A) + \mu(B) \tag{88}$$

Medida Difusa Aditiva

Una medida difusa μ es *aditiva* si si para cualquier $A, B \subseteq N$, con $A \cap B = \emptyset$:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \tag{89}$$

Para una medida difusa aditiva, claramente $\mu(A) = \sum_{i \in A} \mu(i)$, además se cumple que $\mu(A \cup ij) = \mu(A \cup i) + \mu(A \cup j) - \mu(A)$ para todo $A \subseteq N - \{i, j\}$.

Medida Difusa Booleana

Una medida difusa μ se denomina *booleana* o *medida-{0,1}* si $\mu(A) = 0$ o $\mu(A) = 1$ para todo $A \subseteq N$. Particularmente, la medida difusa normalizada más débil se define como:

$$\mu_{min}(A) = \begin{cases} 0, & si \;\; A \subset N \\ 1, & si \;\; A = N \end{cases} \tag{90}$$

mientras que la más fuerte es:

$$\mu_{max}(A) = \begin{cases} 0, & si \;\; A = \emptyset \\ 1, & en\ otro\ caso \end{cases} \quad (91)$$

La medida Dirac está dada para cualquier $A \subseteq N$ por:

$$\mu_{Dirac}(A) = \begin{cases} 1, & si\ x_0 \ \in A \\ 0, & si\ x_0 \ \notin A \end{cases} \quad (92)$$

donde x_0 es un elemento de N.

Ejemplo 5

La siguiente medida difusa es aditiva:

$$\mu(1,2,3) = 1$$

$$\mu(1,2) = 0.5 \qquad \mu(1,3) = 0.6 \qquad \mu(2,3) = 0.3$$

$$\mu(1) = 0.4 \qquad \mu(2) = 0.1 \qquad \mu(3) = 0.2$$

$$\mu(\emptyset) = 0$$

La siguiente medida difusa es simétrica:

$$\mu(1,2,3) = 1$$

$$\mu(1,2) = 0.6 \qquad \mu(1,3) = 0.6 \qquad \mu(2,3) = 0.6$$

$$\mu(1) = 0.2 \qquad \mu(2) = 0.2 \qquad \mu(3) = 0.2$$

$$\mu(\emptyset) = 0$$

La siguiente medida difusa es subaditiva:

$$\mu(1,2,3) = 1$$

$$\mu(1,2) = 0.2 \qquad \mu(1,3) = 0.4 \qquad \mu(2,3) = 0.4$$

$$\mu(1) = 0.1 \qquad \mu(2) = 0.2 \qquad \mu(3) = 0.3$$

$$\mu(\emptyset) = 0$$

Otros ejemplos se pueden encontrar en (Beliakov et al., 2007).

2.3.2 Transformación Möbius

Definición

Sea μ una medida difusa, la transformación Möbius de μ es una función de conjuntos definida para cada $A \subseteq N$ como:

$$\mathcal{M}(A) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A-B|} \mu(B) \tag{93}$$

Es posible recuperar la medida μ a partir de su función inversa: la tranformada $Zeta$:

$$\mu(A) = \sum_{B \subseteq A} \mathcal{M}(A). \quad \forall A \subseteq N \tag{94}$$

La transformación Möbius es invertible y es una representación alternativa de una medida difusa, por lo que deben mantenerse las condiciones de límites y de monotonicidad expresadas en las ecuaciones (82) y (83). Las mismas se definen respectivamente como:

$$\mathcal{M}(\emptyset) = 0 \quad \text{y} \quad \textstyle\sum_{A \subseteq N} \mathcal{M}(A) = 1 \tag{95}$$

$$\textstyle\sum_{B \subseteq A \mid i \in B} \mathcal{M}(B) \geq 0 \text{ para todo } A \subseteq N \text{ y p ara todo } i \in A \tag{96}$$

Ejemplo 6

Consideremos la medida difusa μ sobre $N = \{1, 2, 3\}$ dada por:

$$\mu(1,2,3) = 1$$

$$\mu(1,2) = 0.9 \qquad \mu(1,3) = 0.4 \qquad \mu(2,3) = 0.3$$

$$\mu(1) = 0.4 \qquad \mu(2) = 0 \qquad \mu(3) = 0.1$$

$$\mu(\emptyset) = 0$$

Se puede calcular su transformación Möbius $\mathcal{M}$ como:

$$\mathcal{M}(1,2,3) = -0.1$$

$$\mathcal{M}(1,2) = 0.5 \qquad \mathcal{M}(1,3) = -0.1 \qquad \mathcal{M}(2,3) = 0.2$$

$$\mathcal{M}(1) = 0.4 \qquad \mathcal{M}(2) = 0 \qquad \mathcal{M}(3) = 0.1$$

$$\mathcal{M}(\emptyset) = 0$$

donde la suma de todos los valores de la transformación Möbius es igual a 1 de acuerdo a la ecuación (95).

2.3.3 Medida Difusa λ

Con la finalidad de reducir la complejidad de una medida difusa, Sugeno (Sugeno, 1974) introdujo la idea de medida difusa λ.

Definición

Una medida difusa λ es una medida difusa μ donde para todo $A, B \in N, A \cap B = \emptyset$ satisface:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) + \lambda\mu(A)\mu(B) \tag{97}$$

donde $\lambda \in (-1, \infty)$.

Bajo estas condiciones, todos los valores de $\mu(A)$ pueden calcularse a partir de n valores independientes $\mu(i)$, $i = 1, \dots, n$ mediante:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} i\right) = \frac{1}{\lambda}\left(\prod_{i=1}^{m}\big(1 + \lambda\mu(i)\big) - 1\right) \tag{98}$$

con $\lambda \neq 0$.

Haciendo variar λ convenientemente, es posible determinar una medida difusa no aditiva donde deben mantenerse las condiciones de monotonicidad y de límites inferior y superior. Específicamente, para modelar diferentes tipos de interacción, se considera lo siguiente:

(a) Medida subaditiva:

Si $\lambda \in (-1, 0)$, $\mu(A \cup B) < \mu(A) + \mu(B)$ (99)

(b) Medida superaditiva:

Si $\lambda \in (0, \infty)$, $\mu(A \cup B) > \mu(A) + \mu(B)$ (100)

(c) Medida aditiva:

Si $\lambda = 0$, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (101)

donde $A, B \in N$.

Particularmente cuando se considera la ecuación (101), la medida difusa se comporta como la media aritmética ponderada.

Es lógico pensar que para mantener la monotonicidad de la medida difusa, el valor de λ no puede tomar cualquier valor del rango permitido, sino que debe ser cuidadosamente seleccionado para cumplir la condición de la ecuación (83).

2.3.4 Medidas difusas aditivas de orden k

Para problemas en el cual intervienen n elementos o atributos a ser analizados, será necesario construir una medida difusa con 2^n coeficientes reales que satisfagan la condición de monotonicidad. Para hacer frente a esta complejidad, en (Grabisch, 1997) se propone el concepto de medida difusa aditiva de orden k o simplemente k-aditiva.

Definición

Una medida difusa μ se denomina k-aditiva para $1 \leq k \leq n$, si su transformación Möbius verifica:

$$\mathcal{M}(A) = 0 \tag{102}$$

para cualquier $A \subseteq N$, $|A| > k$ y además existe un subconjunto B con k elementos tal que $\mathcal{M}(B) \neq 0$. Este tipo de medidas limita la interacción de criterios para subconjuntos de tamaño mayor que k por lo que la cantidad de coeficientes que deberán determinarse para la construcción de la medida difusa se reducirá de $2^n - 2$ [4] a $\sum_{i=1}^{k} \binom{n}{i}$. Claramente con $k = 2$, se necesitarán solo $n + \binom{n}{2} = (n(n+1))/2$ coeficientes para definir la medida difusa (Marichal and Roubens, 2000).

2.3.5 Integral de Choquet

La integral de Choquet fue introducida en 1954 por Gustave Choquet (Choquet, 1954). Es una generalización de la integral de Lebesgue donde la medida clásica se reemplaza por una medida no aditiva μ (Grabisch et al., 2011). Se la considera como un operador de agregación que generaliza la media aritmética ponderada permitiendo modelar interacción entre criterios.

Definición

Considerando una medida difusa μ sobre un conjunto de criterios $N = \{c_1, \dots, c_n\}$ y donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, \infty)^n$, la integral (discreta) de Choquet de $\mathbf{x}$ respecto de μ se define como:

$$\mathbb{C}_\mu(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_{(i)} \left[\mu\left(\{j | x_j \geq x_{(i)}\}\right) - \mu\left(\{j | x_j \geq x_{(i+1)}\}\right) \right] \tag{103}$$

donde:
$x_{(\cdot)}$ es una permutación de $\mathbf{x}$ tal que $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$ y $x_{(n+1)} = \infty$ por convención.

Alternativamente se la puede definir como:

$$\mathbb{C}_\mu(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_{(i)} \left[\mu\left(A_{(i)}\right) - \mu\left(A_{(i+1)}\right) \right] \tag{104}$$

donde:
$x_{(\cdot)}$ es una permutación de $\mathbf{x}$ tal que $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$;
$A_{(i)} = \{i, \dots, n\}$;
$A_{(n+1)} = \varnothing$ y
$\mu\left(A_{(n+1)}\right) = 0$.

Reordenando los términos de la suma, podría escribirse como:

[4] Los coeficientes de $\varnothing$ y N están determinado por definición: $\mu(\varnothing) = 0$; $\mu(N) = 1$

$$\mathbb{C}_\mu(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} [x_{(i)} - x_{(i-1)}]\mu(H_i) \qquad (105)$$

donde $x_{(0)} = 0$ por convención y $H_i = \{(i), \dots, (n)\}$ es el subconjunto de índices de los $n - i + 1$ componentes más grandes de **x.**

La integral de Choquet puede expresarse además en función de la transformación Möbius como:

$$\mathbb{C}_\mu(\mathbf{x}) = \sum_{A \subseteq N} \mathcal{M}(A)\, h_A(\mathbf{x}) \qquad (106)$$

donde $h_A(\mathbf{x}) = \min_{x \in A} x_i$.

Esta integral tiene muy buenas propiedades de agregación (Marichal, 2000) y cumple con las propiedades requeridas para todo operador de agregación: *monotonicidad creciente* (respuesta no negativa a cualquier aumento de los argumentos); *idempotencia* (comprendido entre valores mínimo y máximo); *estabilidad* respecto al intervalo donde está definida y el mismo comportamiento de la media aritmética ponderada cuando la medida difusa es aditiva (Marichal, 2000) y (Grabisch et al., 2011).

2.3.5.1 Propiedades

- La integral de Choquet es una función de agregación idempotente lineal y continua definida por tramos.
- Puede comportarse como media aritmética ponderada, funciones OWA, máximo y mínimo.
- Una combinación lineal convexa entre la integral de Choquet con respecto a dos medidas difusas μ_1 y μ_2, $\alpha\mathbb{C}_{\mu_1} + (1-\alpha)\mathbb{C}_{\mu_2}$, con $\alpha \in [0,1]$, es también una integral de Choquet con respecto a $\mu = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$.

- La integral de Choquet satisface la aditividad comonótona. Por ejemplo para dos vectores cualquiera comonótonos[5] $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in [0, \infty)^n$, se cumple que $\mathbb{C}_\mu(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbb{C}_\mu(\mathbf{x}) + \mathbb{C}_\mu(\mathbf{y})$.
- Si consideramos dos medidas difusas μ_1 y μ_2 sobre N, se cumple que $\mu_1 \leq \mu_2$ si y solo si $\mathbb{C}_{\mu_1} \leq \mathbb{C}_{\mu_2}$
- La integral de Choquet tiene elemento neutro y absorbente solo en los casos límites de min y max.
- La integral de Choquet $\mathbb{C}_\mu$ es simétrica si y solo si μ es simétrica.
- La integral de Choquet sobre $\mathbb{R}^n$, es invariante frente a cambios en la escala del intervalo (transformación positiva). Esto es: $\mathbb{C}_\mu(c\mathbf{x} + a\mathbf{1}_N) = c \cdot \mathbb{C}_\mu(\mathbf{x}) + a$, para cualquier $c > 0$ y $a \in \mathbb{R}$.
- El dual de una integral de Choquet es la integral de Choquet respecto de su medida difusa dual. Para cualquier medida difusa μ se tiene $\left(\mathbb{C}_\mu\right)^d = \mathbb{C}_{\mu^d}$.

Ejemplo 7

Consideremos el problema de evaluar estudiantes respecto de tres asignaturas: Matemática (M), Física (F) y Literatura (L) tomado de (Beliakov et al., 2007). Se tienen las siguientes consideraciones: usualmente los alumnos que son buenos en matemática, también lo serán en física y viceversa, por lo que estas disciplinas presentan algún tipo de redundancia o solapamiento.

Al realizar el proceso de agregación mediante una media aritmética ponderada M_W (donde los pesos se interpretan como la importancia de cada asignatura), es posible que se produzcan sobreestimaciones para alumnos buenos en matemática y/o física.

En la Tabla 2 se enumeran las puntuaciones de estudiantes a, b y c en una escala del 0 al 20:

Estudiante	M	F	L
a	18	16	10
b	10	12	18
c	14	15	15

Tabla 2: Puntuaciones de alumnos frente a diferentes asignaturas

[5] Dos vectores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se dicen comonótonos si existe una permutación σ sobre $\{1, 2, \dots, n\}$ tal que $x_{\sigma(1)} \leq x_{\sigma(2)} \leq \cdots \leq x_{\sigma(n)}$ y $y_{\sigma(1)} \leq y_{\sigma(2)} \leq \cdots \leq y_{\sigma(n)}$.
Equivalentemente esta condición puede expresarse como: $(x_i - x_j)(y_i - y_j) \geq 0$ para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Si se supone que existe una orientación científica, las materias matemática y física tendrán mayor importancia y se verá reflejado en el peso correspondiente, pudiéndose considerar por ejemplo $W = [w_M, w_F, w_L] = [3, 3, 2]$. Sin embargo si se desea favorecer a los alumnos con puntuaciones equilibradas, el alumno c debería considerarse mejor que a, quien tiene baja calificación en literatura. Dada esta situación, no hay un vector de pesos W donde $w_M = w_F > w_L$ y que además $M_W(c_M, c_F, c_L) > M_W(a_M, a_F, a_L)$.

Considerando la medida difusa μ:

$$\mu(M, F, L) = 1$$

$$\mu(M, F) = 0.5 \qquad \mu(M, L) = 0.9 \qquad \mu(F, L) = 0.9$$

$$\mu(M) = 0.45 \qquad \mu(F) = 0.45 \qquad \mu(L) = 0.3$$

$$\mu(\emptyset) = 0$$

donde se mantienen las importancias de las asignaturas individualmente pero el peso de $\mu(M, F)$ es menor que $\mu(M) + \mu(F)$ debido a su solapamiento. Asimismo los pesos de los pares $\mu(M, L)$ y $\mu(F, L)$ son mayores que la suma de los pesos individuales.

Mediante la integral de Choquet, es posible calcular una calificación global para cada alumno: $\mathbb{C}_\mu(a_M, a_F, a_L) = 13.9$, $\mathbb{C}_\mu(b_M, b_F, b_L) = 13.6$ y $\mathbb{C}_\mu(c_M, c_F, c_L) = 14.6$; y el ranking de los mismos en función de dicha calificación será $c \succ a \succ b$ como era requerido.

2.3.6 Índices

En procesos de toma de decisión donde intervienen diferentes criterios, es frecuente encontrarse con algún tipo de interacción (positiva o negativa) entre los mismos. En estos casos, suele ser necesario conocer la importancia que tiene un criterio en una coalición o medir de algún modo la interacción que existe entre los criterios. La importancia de un criterio $i \in N$ no estará determinada solamente por el valor de $\mu(i)$ sino también por todos los $\mu(S)$ tal que $i \in S$ (Marichal and Roubens, 2000).

Para lograr esto se utiliza el concepto de valor Shapley que mide la importancia de un criterio i en todas las posibles coaliciones y el índice de interacción que también mide la interacción de un par de criterios i y j en todas las posibles coaliciones.

2.3.6.1 Valor Shapley

Definición

Sea μ una medida difusa, el valor Shaley es el vector $\phi_{Sh}(\mu) = \left(\phi_{Sh}(1), \dots, \phi_{Sh}(n)\right)$, donde cada término del vector es un índice Shapley (Shapley, 1988) definido para cada $i \in N$ donde:

$$\phi_{Sh}(i) = \sum_{A \subseteq N - \{i\}} \frac{(n - |A| - 1)!\,|A|!}{n!} [\mu(A \cup i) - \mu(A)] \tag{107}$$

El valor Shapley puede interpretarse como un valor promedio de la contribución de cada criterio individualmente a todas las coaliciones.

Para una medida aditiva cada índice Shapley $\phi_{Sh}(i) = \mu(i)$. La propiedad fundamental del índice Shapley es: $\sum_{i=1}^{n} \phi_{Sh}(i) = \mu(N)$ (Marichal and Roubens, 2000).

2.3.6.2 Índice Banzhaf

Este índice puede verse como una alternativa al índice Shapley.

Definición

Considerando μ una medida difusa, el índice Banzhaf para $i \in N$ se define como (Banzhaf, 1965):

$$\phi_B(i) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{A \subseteq N - \{i\}} [\mu(A \cup i) - \mu(A)] \tag{108}$$

2.3.6.3 Índice de interacción

El índice de interacción mide el grado de sinergia que pueden tener un par de criterios. Si se consideran los criterios $i, j \in N$, la diferencia $d(ij) = \mu(ij) - \mu(i) - \mu(j)$, parece reflejar el grado de interacción entre i, j. La diferencia es 0 cuando las importancias individuales se suman para determinar el peso de la coalición. En este caso, no hay interacción entre i y j. Si la diferencia es mayor o menor que 0, evidentemente existe una sinergia positiva o negativa entre i y j respectivamente.

Una definición apropiada del índice de interacción debería considerar las medidas de todos los subconjuntos que contienen i y j. Por lo tanto la interacción entre los criterios i y j puede considerarse como el promedio de las contribuciones de j en presencia de i, menos el promedio de las contribuciones de j en ausencia de i. En (Murofushi and Soneda, 1993) se propone una definición para este índice.

Definición

Sea μ una medida difusa, el índice de interacción para cada par $i, j \in N$ se define como:

$$I_{ij} = \sum_{A \subseteq N - \{i,j\}} \frac{(n - |A| - 2)!\,|A|!}{(n-1)!} [\mu(A \cup ij) - \mu(A \cup i) - \mu(A \cup j) + \mu(A)] \qquad (109)$$

$I_{ij} \in [-1, 1]$ para cualquier par i, j. Un índice de interacción $I_{ij} < 0$ indica una correlación positiva entre los criterios i y j (sinergia negativa, redundancia o solapamiento), asimismo $I_{ij} > 0$ indica una correlación negativa (sinergia negativa, complementariedad).

2.3.6.4 Índice de interacción para coaliciones

El índice de interacción entre los criterios de un subconjunto A fue introducido por Grabisch (Grabisch, 1997) como extensión del caso donde se mide la interacción de dos criterios.

Definición

Sea μ una medida difusa, el índice de interacción para cada $A \subseteq N$ se define como:

$$I(A) = \sum_{B \subseteq N - A} \frac{(n - |B| - |A|)!\,|B|!}{(n - |A| + 1)!} \sum_{C \subseteq A} (-1)^{|A-C|} \mu(B \cup C) \qquad (110)$$

Particularmente, $I(A)$ coincide con I_{ij} si $A = \{i, j\}$, y coincide con $\phi(i)$ si $A = \{i\}$.

2.3.6.5 Índice de interacción Banzhaf para Coaliciones

El índice de interacción Banzhaf entre los criterios de un subconjunto A se define como (Marichal and Roubens, 2000):

Definición

Sea μ una medida difusa, el índice de interacción basado en el índice Banzhaf para cada $A \subseteq N$ se define como:

$$I_B(A) = \frac{1}{2^{n-|A|}} \sum_{B \subseteq N-A} \sum_{C \subseteq A} (-1)^{|A-C|} \mu(B \cup C) \tag{111}$$

o de manera más compacta:

$$I_B(A) = \frac{1}{2^{n-|A|}} \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A-B|} \mu(B) \tag{112}$$

2.3.7 Grados de conjunción y disyunción

La integral de Choquet $\mathbb{C}_\mu(\mathbf{x})$ puede interpretarse como el valor promedio que resulta del proceso de agregación de $\mathbf{x}$ sobre un espacio de probabilidades de distribución uniforme $[0,1]^n$:

$$E(\mathbb{C}_\mu) = \int_{[0,1]^n} \mathbb{C}_\mu(\mathbf{x})\ dx \tag{113}$$

Considerando que la integral de Choquet es acotada, esto es $\min x_i \leq \mathbb{C}_\mu(\mathbf{x}) \leq \max x_i$, se obtiene que $E(\min) \leq E(\mathbb{C}_\mu) \leq E(\max)$ (Marichal, 2004).

Definición

El grado de conjunción o grado de andness de $\mathbb{C}_\mu$ es la posición relativa de $E(\mathbb{C}_\mu)$ con respecto del límite inferior del intervalo $[E(\min), E(\max)]$. Está definido por:

$$andness\ (\mathbb{C}_\mu) = \frac{E(\max) - E(\mathbb{C}_\mu)}{E(\max) - E(\min)} \tag{114}$$

Este valor representa el grado con el cual el valor promedio de $\mathbb{C}_\mu$ se acerca al límite inferior, se comporta como un mínimo o tiene un comportamiento conjuntivo.

Definición

Similarmente, el grado de *orness* de $\mathbb{C}_\mu$, se denomina grado de disyunción y mide el grado con el cual la integral se comporta como un máximo o tiene un comportamiento conjuntivo. Está definida por:

$$orness\ (\mathbb{C}_\mu) = \frac{E(\mathbb{C}_\mu) - E(\min)}{E(\max) - E(\min)} \tag{115}$$

Para cualquier medida difusa μ, se define:

$$orness\ (\mathbb{C}_\mu) = \frac{1}{n-1} \sum_{A \subseteq N} \frac{n - |A|}{|A| + 1} \mathcal{M}(A) \tag{116}$$

donde $\mathcal{M}(A)$ es la transformación Möbius de A. En términos de la medida difusa es:

$$orness\ (\mathbb{C}_\mu) = \frac{1}{n-1} \sum_{A \subseteq N} \frac{(n - |A|)!\,|A|!}{n!} \mu(A) \tag{117}$$

Por definición los valores de $andness\ (\mathbb{C}_\mu)$ y $orness(\mathbb{C}_\mu)$ se encuentran dentro del intervalo $[0,1]$. Por lo tanto se cumplen las siguientes propiedades:

- $andness\ (\mathbb{C}_\mu) + orness(\mathbb{C}_\mu) = 1$ por lo tanto $andness\ (\mathbb{C}_\mu) = 1 - orness(\mathbb{C}_\mu)$
- $andness\ (\mathbb{C}_{\mu^d}) = orness(\mathbb{C}_\mu)$;
- $orness\ (\mathbb{C}_{\mu^d}) = andness(\mathbb{C}_\mu)$;
- Si $orness(\mathbb{C}_\mu) > 0.5$ implica un comportamiento disyuntivo de $\mathbb{C}_\mu$.
- Si $orness(\mathbb{C}_\mu) < 0.5$ implica un comportamiento conjuntivo de $\mathbb{C}_\mu$.

2.3.8 Entropía

La entropía mide la incertidumbre que existe antes de que un experimento se lleve a cabo. Puede considerarse como una medida de dispersión de la medida difusa. Una caracterización de la misma en relación a una medida difusa μ se trata en (Marichal, 2002) y puede calcularse mediante:

$$H(\mu) = \sum_{i \in N} \sum_{A \subseteq N - \{i\}} \frac{(n - |A| - 1)!\,|A|!}{n!} h\big(\mu(A \cup i) - \mu(A)\big) \tag{118}$$

donde $h(t) = -t \cdot \log t$ si $t > 0$ y $h(0) = 0$.

El valor máximo de H es $\log n$ y se obtiene solo si la medida difusa es aditiva y simétrica. El valor mínimo 0 se obtiene solo si μ es una medida difusa booleana (Beliakov et al., 2007).

Capítulo 3 Agregación de mayoría

Article: *"Selective Majority Additive Ordered Weighting Averaging Operator"*
Authors: Marcelo Karanik, José Ignacio Peláez, Rubén Bernal
Journal: European Journal of Operational Research
Year: 2015
Pages:
DOI: 10.1016/j.ejor.2015.10.011
State: Accepted. October 2015. Article in press

Abstract: Usually, in order to summarize various opinions about a particular situation (mainly product or service valuation on Internet) a process called aggregation is used. This process basically consists of determining the appropriate value to represent the majority's opinion and many strategies and operators can be used for this purpose. Simple arithmetic mean is widely used to resume several opinions in a single value, but this value is generally not representative or it is affected by the extreme values. An alternative to aggregate opinions are the Ordered Weighting Averaging (OWA) operators. Nevertheless, they have distribution problems when applied to aggregates with cardinalities. These problems may be solved by using Majority Additive OWA (MA-OWA) operators, a sort of arithmetic mean of arithmetic means. MA-OWA operator works adequately but, in some cases, discards the the majority's opinion, specifically when it does not coincide with the largest cardinality value. In order to generalize the usage of MA-OWA operator, the rest of opinions are taken into account using a cardinality relevance factor. This paper introduces a Selective Majority Additive OWA (SMA-OWA) which manages the significance of all opinions varying the Cardinality Relevance Factor. Mathematical extension of SMA-OWA, its properties and some illustrative examples are presented in this article.

Capítulo 4 Mayoría en Social Media

Article: *"Majority OWA operator for opinion rating in social media"*
Authors: José Ignacio Peláez, Rubén Bernal, Marcelo Karanik
Journal: Soft Computing
Year: 2014
Pages: 1–9
DOI: 10.1007/s00500-014-1564-6

Abstract: In recent years, the acquisition of products and services via Internet has grown exponentially. Today, a person goes through different websites in search of better alternatives and prices. In this searching process, he/she uses social media applications to exam the opinions of others who have purchased such services or products. Also, the seller offers summarized information of buyers' valuation by a satisfaction value on a predefined scale (expressed with a system of stars or linguistic labels). This number is calculated using an arithmetic mean and, in many cases, it does not adequately reflect all users' opinions. In this article, a new consensus operator called Selective Aggregated Majority Ordered Weighted Averaging (SAM-OWA) is proposed. It is based on the opinions of the majority though also considering the opinion of the minority. SAM-OWA calculates the individual weights of each value of the satisfaction scale, using the number of votes obtained (cardinality). The mathematical foundation of SAM-OWA operator and some application examples to improve the results obtained by the arithmetic mean are presented.

Capítulo 5 Agregación con Coalición de Criterios

Article: *"Fuzzy measure identification for criteria coalitions using linguistic information"*
Authors: Rubén Bernal, Marcelo Karanik, José Ignacio Peláez
Journal: Soft Computing
Year: 2015
Pages: 1-13
DOI: 10.1007/s00500-015-1589-5

Abstract: Modeling interactions between criteria in Multiple Criteria Decision Analysis (MCDA) is a complex task. Such complexity arises when there are visible redundancies and synergies among criteria, which traditional MCDA methods cannot deal with. The Choquet integral is a model that has been conceived to deal with these issues, but an appropriate fuzzy measure must be defined. This article shows how to compute a fuzzy measure for criteria coalitions using linguistic information efficiently. Due to the complexity to identify an adequate fuzzy measure when the criteria set cardinality increases, the proposed model reduces the effort to determine the measure of each criteria combination by focusing on relevant interactions. Then, this fuzzy measure is used on Choquet integral to establish the best alternative in a decision making problem. Finally, a comparison between the arithmetic mean, the OWA operator and the proposed method is presented.

Article: *"Discrete Choquet integral based method for criteria synergy determination"*
Authors: *Rubén Bernal – Marcelo Karanik, José Ignacio Peláez, Estela del Rocio Yanez Benavides*
Conf: CLEI 2015 - SLIOIA
Year: October 2015

Abstract: In multi-criteria decision-making processes, a set of criteria that can act independently or have some kind of relation between them are considered. When this latter appears, the process cannot be a simple problem due to complexity to model such synergy relations. To deal with these issues, a Choquet integral based method has been developed to determine the most appropriate ranking of alternatives. Therefore, a fuzzy measure that models considerations of an expert in the problem domain must be identified. The proposed model is a novel and efficient algorithm for determining a non-additive fuzzy measure guided by linguistic attributes. Finally, an illustrative example and a comparison with other aggregation operators is presented.

Capítulo 6 Discusión: Integración de modelos

En el presente capítulo, se muestra la potencialidad de un modelo que integra los operadores de mayoría junto con los de coalición de criterios. Se discute la manera en que pueden calcularse la importancia de los criterios que intervienen en un proceso de toma de decisión teniendo en cuenta la opinión de la mayoría y cómo calcular los pesos y grados de sinergia de las coaliciones de la medida difusa mediante la misma información.
Se detalla la manera en que puede utilizarse el modelo y las posibles ventajas y campo de aplicación del mismo.

6.1. Opinión de la mayoría y coaliciones de criterios

En los Capítulos anteriores de esta Tesis, se han definido dos operadores de agregación (SMA-OWA y SAM-OWA) y un modelo de coalición de criterios. Los tres muestran ser de gran utilidad para el proceso de toma de decisión de manera separada, pero su potencial aumenta si se los emplea en un modelo integrado. Es decir, si se puede resumir la opinión de la mayoría y con esos valores modelar la importancia de cada criterio y su posible interacción que definan la elección de una alternativa, es posible poder explicar por qué los consumidores prefieren un determinado producto y con esta información potenciar aquellos aspectos que le den una ventaja significativa sobre la competencia.

Los operadores de agregación SMA-OWA y SAM-OWA explicados en los Capítulos 3 y 4 son herramientas que permiten obtener valores más representativos de la opinión de la mayoría. Estos operadores aplicados a la valoración de criterios, se vuelven fundamentales para cualquier modelo multi-criterio si se necesita obtener el resumen de la opinión de la mayoría. Consecuentemente, es factible emplear esos valores utilizando un método que determine la alternativa más adecuada en función a lo que piensa la mayoría.

Por otro lado el modelo de coaliciones de criterios explicado en el Capítulo 5, necesita: (a) la valoración individual de los criterios para resolver un problema de toma de decisión y (b) la determinación de las coaliciones (es decir la sinergia y la intensidad de la relación de los conjuntos de criterios).

Un modelo integrado de Coaliciones de Criterios en base a la opinión de la mayoría, requiere la implementación de los procesos que permitan abordar los puntos (a) y (b) pero teniendo en cuenta un enfoque orientado a la agregación de la muchas opiniones. Para el primer punto, se necesita un operador de agregación. En este caso los operadores SMA-OWA y SAM-OWA han demostrado ser adecuados para resumir la opinión de la mayoría. Para el segundo punto, la cuestión es más compleja, ya que de las opiniones individuales se deben desprender qué conjuntos de criterios se interrelacionan, con qué tipo de sinergia y con qué magnitud.

Un modelo integrado de Coaliciones adecuado debe deducir dinámicamente las preferencias de los consumidores a medida que ellos valoran los aspectos de los productos comprados. Es decir, los consumidores valoran los aspectos individuales (criterios) del producto y un grupo de expertos determinan previamente las coaliciones y el signo de las mismas, para que el modelo defina las interacciones entre los aspectos de manera automática. De esta manera se considerarán entonces agregación por mayoría en dos niveles, para determinar la importancia de los criterios evaluados y para determinar las coaliciones que pudieran aparecer entre los mismos.

Claramente, la información que devuelva un modelo de estas características será de suma importancia para comprender qué busca el consumidor de un producto particular.

6.2. Modelo Propuesto

El modelo que integra los operadores de mayoría desarrollados y el esquema de toma de decisiones con interacción de criterios consta de dos procesos principales. En primer lugar debe determinarse la importancia individual de los atributos evaluados mediante un proceso agregación de opiniones (por ejemplo usando el operador SMA-OWA o el operador SAM-OWA). Esto permite determinar la importancia relativa respecto del resto de atributos. En segundo lugar se determina el signo y el grado de sinergia de cada grupo de criterios a partir de las preferencias de un grupo de expertos.

El diagrama del modelo se muestra en la Figura 6.

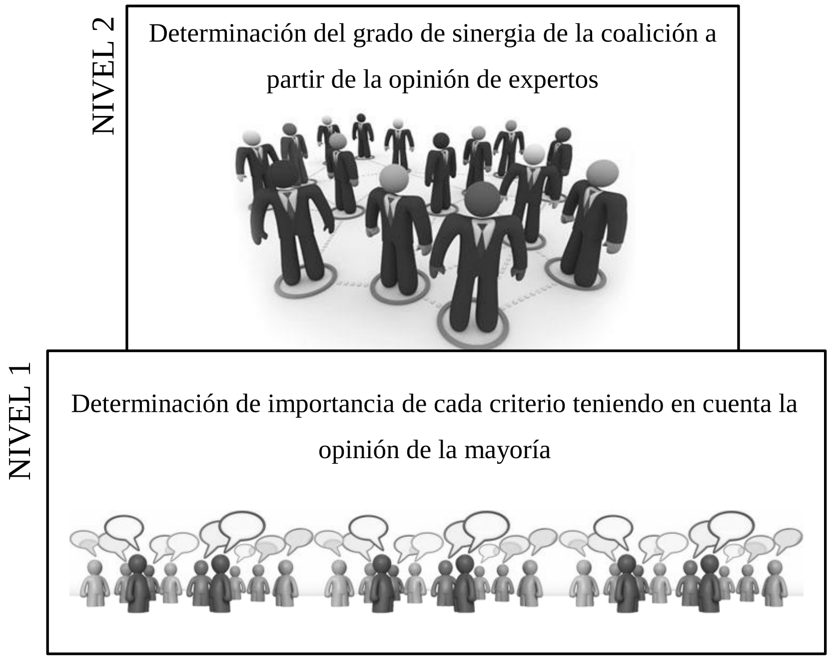


Figura 6: Modelo de agregación de mayoría con coaliciones en dos niveles

Para la definición formal, consideremos un conjunto de alternativas $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ que pueda ser evaluado respecto de un conjunto de n criterios $N = \{c_1, \dots, c_n\}$. Cada alternativa $a_i \in A$, se caracteriza por $x^a = (x_1^a, x_2^a, \dots, x_n^a) \in \mathbb{R}^n$, donde x_i^a es la valoración parcial de a respecto del criterio c_i. A partir de x^a, es posible calcular una medida consenso $M(x^a)$ para cada alternativa mediante un proceso de agregación de mayoría en dos niveles $M: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Consideremos además A, B, C ... todos los subconjuntos pertenecientes al conjunto de partes $\mathcal{P}(N)$ y $\mu(A), \mu(B)$, ... sus importancias o pesos.

Para identificar los pesos de cada subconjunto de criterios, se consideran dos etapas o niveles:

a) *Mayoría en nivel 1: Determinar la importancia de cada criterio:* cada criterio se evalúa individualmente para determinar su importancia relativa respecto al objetivo. Esta información es suministrada por las apreciaciones de diferentes usuarios, como por ejemplo: por personas en la web, por los empleados de una empresa, por los alumnos de una universidad, etc. motivo por el cual es necesario considerar una valoración de la mayoría para determinar un valor consenso. Esta etapa permite determinar los valores de cada $\mu(C_i)$, con $C_i \in N$ y $1 \le i \le n$.
b) *Mayoría en nivel 2: Determinar los pesos de la interacción de criterios:* un conjunto de expertos es consultado respecto del signo y grado de sinergia de cada coalición. Como se estableció anteriormente, pueden usarse etiquetas lingüísticas para que cada

experto suministre la importancia de los grupos de criterios, información que también debe ser agregada en un único valor a partir del consenso de la mayoría. De esta manera se determina el peso para cada $\mu(C_i), C_i \in \mathcal{P}(N) - N$, donde $\mathcal{P}(N)$ es el conjunto de partes de N.

Consideremos además:

Un conjunto de etiquetas o valoraciones $V = \{v_1, \ldots, v_j\}$; donde cada v_i se utiliza para proveer la importancia relativa de cada criterio respecto del objetivo evaluado;[6]

Un conjunto de etiquetas $W = \{w_1, \ldots, w_j\}$; donde cada w_i se utiliza para proveer el grado de sinergia entre los criterios (incluye la etiqueta nula);[7]

Un par (el, lq) que indica el número de etiquetas lingüísticas diferentes de V que pueden distinguir los expertos; el valor de lq se determinará de acuerdo al nivel de experticia el de los expertos;

si $(el, lq) = (1, 3)$:

$V = \{\textit{bajo, medio, alto}\}$ y

$W = \{\textit{null, moderado, extremo}\}$;

si $(el, lq) = (2, 5)$:

$$V = \left\{\begin{matrix}\textit{muy bajo, bajo, medio,} \\ \textit{alto, muy alto}\end{matrix}\right\} \text{ y}$$

$$W = \left\{\begin{matrix}\textit{null, débil, moderado,} \\ \textit{fuerte, extremo}\end{matrix}\right\};$$

si $(el, lq) = (3, 7)$:

$$V = \left\{\begin{matrix}\textit{bajísimo, muy bajo, bajo, medio, alto,} \\ \textit{muy alto, altísimo}\end{matrix}\right\} \text{ y}$$

$$W = \left\{\begin{matrix}\textit{null, muy débil, débil, moderado,} \\ \textit{fuerte, muy fuerte, extremo}\end{matrix}\right\}.$$

Finalmente, un par (e_i, lq) con el perfil de los expertos e_i.

[6] V no incluye la etiqueta nula (Null) porque un criterio con peso igual a 0 no debería tenerse en cuenta en el proceso de toma de decisión.

[7] W incluye la etiqueta nula (Null) porque podrían existir criterios sin interacción.

6.2.1 Agregación de valoraciones de criterios

En el primer nivel, y con el objetivo de representar la opinión de la mayoría adecuadamente, el modelo propuesto utiliza el operador de agregación SMA-OWA o SAM-OWA para agregar las valoraciones que recibió cada criterio. Para ello, será necesario determinar la cardinalidad r_i de cada valoración v_i de $V = \{v_1, \dots, v_j\}$: $\boldsymbol{a} = \{(v_1, r_1), \dots, (v_j, r_j)\}$.

Como se explicó en los Capítulos 3 y 4, estos operadores se basan en el operador MA-OWA (Peláez and Doña, 2003a). La idea principal de este operador es representar la generalización de la media aritmética cuando los valores a agregar tienen cardinalidades mayores que uno. El operador MA-OWA es una especie de media aritmética de medias aritméticas. La idea subyacente detrás de este operador es la repetición del siguiente procedimiento: dado un conjunto de valores con sus correspondientes cardinalidades, un nuevo conjunto se obtiene a partir de ellos incorporando el valor agregado (mediante media aritmética) con cardinalidad uno y, simultáneamente el resto de las cardinalidades se reduce en uno. Este procedimiento se repite hasta obtener un conjunto con un solo valor, es decir, el valor agregado del conjunto original.

El operador MA-OWA se comporta eliminando completamente a la opinión de las minorías si la cardinalidad del valor más común es mucho mayor que el resto. Se define entonces un operador selectivo (SMA-OWA) que permite administrar los diferentes niveles de importancia sobre el conjunto de opiniones. SMA-OWA considera la importancia de todas las opiniones introduciendo un factor de relevancia de la cardinalidad (CRF de sus siglas en ingles). Esta flexibilidad es muy deseable para evaluación de servicios que son juzgados por diferentes usuarios (donde se usan estrellas por ejemplo).

El operador de agregación SMA-OWA es una generalización del operador MA-OWA y extiende su uso a problemas donde el proceso de agregación converge rápidamente hacia el valor de mayor cardinalidad.

La variación del CRF en el operador SMA-OWA provee un mecanismo apropiado para asignar importancia a todas las opiniones y los pesos utilizados para el proceso de agregación se basan en la cardinalidad de cada valor. Sin embargo, SMA-OWA no tiene la posibilidad de asignar pesos individuales basados en otros criterios que no sean la cardinalidad de los valores (por ejemplo la importancia de cada valor). Para hacer frente a esta situación se utiliza una generalización del operador SMA-OWA: el operador SAM-OWA (Selective Aggregated Majority OWA) de sus siglas en ingles.

El operador SAM-OWA también puede ser utilizado para reemplazar a la media aritmética con baja cantidad de opiniones. Esto es muy importante para aplicaciones de medios y redes sociales debido a que, en el comienzo del proceso de agregación, existe poca información de los usuarios que permitan obtener resultados confiables.

Utilizando cualquiera de los dos operadores mencionados, se obtienen valores agregados más precisos tomando en cuenta la opinión de la mayoría.

Para encuadrar ambos operadores en el contexto del modelo integrado de coaliciones de criterios, solamente se necesita realizar el procesamiento de las valoraciones de los usuarios. Este procesamiento tiene como base la determinación del CRF como factor crítico. Como se analizó en el Capítulo 3, una alternativa adecuada para determinar el CRF es utilizar la dispersión del conjunto de cardinalidades. Este mecanismo permite que, de manera automática, el CRF sea calculado cada vez que se incorpora una nueva opinión. Si hay una polarización muy grande hacia un valor (o un conjunto de ellos) el CRF tiende a uno. Por el contrario, si las cardinalidades son similares tiende a 0.5. Como se analizó en el Capítulo 3, para el primer caso, el resultado de la agregación potencia a la mayoría y en el segundo la agregación tiende a la media aritmética de los valores.

Una vez establecido el valor del CRF, el proceso de agregación es automático y se obtienen las valoraciones individuales para cada criterio teniendo en cuenta la opinión de la mayoría.

El algoritmo de cálculo para la Fase 1 se detalla a continuación:

Algoritmo 1
Fase 1: Proceso de agregación de mayoría del primer nivel.

Para cada criterio $C_i \in N$ hacer:

Inicio

a. Determinar la cardinalidad r_i para cada $v_i \in V$.
b. Obtener $\boldsymbol{a}_{C_i} = \{(v_1, r_1), \ldots, (v_j, r_j)\}$
c. Calcular el peso correspondiente a $C_i \in N$ mediante agregación de mayoría utilizando SMA-OWA o SAM-OWA.

Fin

6.2.2 Determinación de las Coaliciones de Criterios

Una vez determinada la importancia de los criterios individualmente y con la finalidad de poder aplicar la integral de Choquet como operador de agregación, es necesario construir una medida difusa adecuada que tenga en cuenta la opinión de la mayoría. Con este objetivo, un grupo de expertos en el dominio del problema, será encargado de suministrar la información requerida, para luego obtener un valor consenso del signo y grado de sinergia para cada coalición de criterios.

Si se tiene un conjunto de n criterios, se requerirá como máximo la determinación de $2^n - 2$ coeficientes para definir la medida difusa[8]. Sin embargo, no será necesario que los expertos provean el signo y grado de sinergia para todas las combinaciones de criterios. Aquellas que no son tenidas en cuenta, se considerarán aditivas.

El algoritmo de cálculo para la fase 2, determinará un valor consenso del signo y grado de sinergia de todas las coaliciones agregando las apreciaciones de todos los expertos intervinientes mediante el operador SMA-OWA.

Algoritmo 2 Fase 2: Proceso de agregación de mayoría del segundo nivel.
Determinar el número de etiquetas lq que pueden distinguir los expertos. Establecer un mapeo entre cada etiqueta lingüística de W ($W \rightarrow \mathbb{N}_0$). Para cada conjunto de criterios $C_i \in \mathcal{P}(N) - N$ hacer: *Inicio* a. Determinar el peso de la coalición: para $C \in \mathcal{P}(N)$ con cardinalidad $1 < i \leq n$: $\mu(C) = \mu(A) + \mu(B) + \lambda\mu(A)\mu(B)$ donde $\mu(A) = max\left(\mu(A_j)\right);\ A_j \subseteq C;\ \lvert A_j \rvert = i - 1$ $\mu(B) = \mu(C - A)$ $\lambda \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}]$

[8] Los coeficientes de $\varnothing$ y N están determinados por la definición de la medida difusa: $\mu(\varnothing) = 0$; $\mu(N) = 1$

con $\lambda_{min} = \frac{max[\mu(A),\mu(B)] - (\mu(A)+\mu(B))}{\mu(A)\mu(B)}$

$\lambda_{max} = abs(\lambda_{min})^9$

$A, B \in \mathcal{P}(N)$

b. Para cada experto e_i (si considera que hay coalición) hacer:
Inicio
   a. Determinar el signo de sinergia (positiva o negativa).
   b. Para sinergia positiva, registrar el grado de sinergia en $\boldsymbol{a} = \{(n_j, r_j)\}$.
   c. Para sinergia negativa, registrar el grado de sinergia en $\boldsymbol{a} = \{(-n_j, r_j)\}$.
Fin
c. Agregar por mayoría (SMA-OWA) las apreciaciones de los expertos a partir de $\boldsymbol{a}$ y obtener $M(\boldsymbol{a})$[10].
d. Calcular el valor de λ:
   $\lambda = M(\boldsymbol{a})\Delta_\lambda;\ -(lq-1) \leq M(\boldsymbol{a}) \leq (lq-1)$
   con: $\Delta_\lambda = \frac{\lambda_{max}}{lq-1}$

Fin

Se puede notar que el valor de λ, no necesariamente será un valor entero debido al comportamiento del operador de agregación de mayoría. Finalmente, para concluir con el proceso de agregación, es necesario complementar las dos fases analizadas mediante los siguientes pasos:

Algoritmo 3
Agregación final y determinación del ranking de alternativas.

1. Normalizar los valores a $[0..1]$ para obtener μ:

$$\mu(A_i) = \frac{\mu(A_i)}{max(\mu(B))};\quad \forall\, A_i, B \in \mathcal{P}(N)$$

2. Para cada alternativa $a_i \in A$, determinar el perfil:

   $x^a = (x_1^a, x_2^a, \ldots, x_n^a) \in \mathbb{R}^n$.

3. Agregación de resultados:
   Para cada alternativa $a_i \in A$, calcular la integral discreta de Choquet $\mathbb{C}_\mu(a_i)$ respecto de la medida difusa μ.

[9] Para mantener la equidistancia a 0.
[10] Notar que el valor de $F(\boldsymbol{a})$ puede ser positivo o negativo.

6.3. Utilización del Modelo Propuesto

El modelo de coaliciones de criterios en base a la opinión de la mayoría es una herramienta para válida para determinar qué aspectos de un producto o servicio son los más importantes para la mayoría de los usuarios. Esta característica permite que pueda ser utilizado para valorar productos y servicios WEB (evaluación de hoteles, autos, servicios de viaje, música y video, noticias, etc) y también para resumir valores de los diversos ítems de cuestionarios de satisfacción y encuestas (por ejemplo con valores de múltiples opciones).

Ambas aplicaciones mencionadas tienen como objetivo poder establecer las preferencias de los usuarios en base a las opiniones que realizan sobre los distintos aspectos del objeto a evaluar. De esta manera, la utilización del modelo requiere una definición precisa de las características de las alternativas.

En cualquier proceso de toma de decisión multicriterio, el objetivo es establecer la mejor alternativa en base a criterios preestablecidos. Es decir, se deben definir aquellos aspectos que caracterizan a un objeto y que sean posibles de valorar. En el modelo de coaliciones de criterios en base a la opinión de la mayoría, esta tarea es de fundamental importancia. Los pasos para la utilización de este modelo son:

Etapa 1. Definición Preliminar:

(1.a) Definición del objeto de estudio. Consiste en determinar concretamente del objeto de estudio, y qué tipo de soporte de información se utilizará para recabar las opiniones de los usuarios.

(1.b) Definición de los criterios que se utilizarán para la evaluación. Consiste establecer claramente cuáles serán los aspectos del objeto en estudio que serán analizados. De esta definición depende la utilidad de los resultados devueltos por el modelo.

(1.c) Definición del operador de agregación que se utilizará. Para este modelo propuesto se pueden utilizar cualquiera de los operadores descriptos en los Capítulos 3 y 4. La utilización de alguno de ellos dependerá del dominio de problema. Es decir, si se necesita determinar distintos grados de importancia de los valores de agregación se puede utilizar el operador SAM-OWA. En cambio, si esta característica no es necesaria, se puede utilizar el operador SMA-OWA. En ambos casos, sí se debe definir la estrategia para la definición del CRF.

Etapa 2. Cálculo de Agregación y Coaliciones:

(2.a) Obtención de las valoraciones. Consiste en determinar cómo se captarán las opiniones de los usuarios. Es decir con la definición técnica de la recopilación de los datos provistos al modelo.

(2.b) Agregación de las valoraciones. Consiste en la aplicación del operador de agregación seleccionado para obtener el valor representativo para cada criterio. Esto determinará la importancia relativa de cada criterio respecto al resto.

(2.c) Determinación de las coaliciones, el tipo y la magnitud de la sinergia. Consiste en establecer, en base a los valores agregados para cada criterio, los distintos subconjuntos de criterios que tienen relación entre sí. Luego se deben determinar el tipo de sinergia (positiva, negativa o nula) y, finalmente, la magnitud de dicha sinergia.

(2.d) Armado de la medida difusa. Consiste en determinar la medida difusa a utilizar conjuntamente con la integral de Choquet para determinar los valores del modelo completo en base a la interacción de los criterios tal como se ha explicado en el Capítulo 5.

Etapa 3. Evaluación:

(3.a) Selección de la alternativa adecuada. Consiste en aplicar los valores de interacción del modelo a las alternativas concretas y establecer cuál es la opción que más se ajusta como solución del problema de toma de decisión.

(3.b) Evaluación de la interacción de los criterios. Adicionalmente, el modelo puede ser utilizado para explicar las relaciones entre los distintos criterios, esta información es de suma utilidad si se pretende comprender como interactúan entre sí los distintos aspectos de un objeto particular.

6.4. Ventajas del Modelo

El modelo propuesto es una herramienta de toma de decisión multicriterio sólido matemáticamente. En los Capítulos 3, 4 y 5 se han sentado las bases matemáticas de los operadores de agregación y del modelo de coaliciones demostrando que se sustentan en bases matemáticas adecuadas y precisas. Esto le da un valor cualitativo muy importante ya que las recomendaciones tienen sustento formal.

Además, el modelo puede ser utilizado por usuarios que valoran distintos aspectos de un objeto, pero también por expertos. En este último caso, se puede aprovechar la experiencia y experticia de los decisores para darle un valor agregado a la decisión. Es decir, además de contar con una herramienta que pueda establecer qué es lo que busca un usuario cuando elige un producto, también puede ser utilizado por personas calificadas en la resolución de complejos problemas de toma de decisiones.

Otro aspecto de suma importancia es que el modelo propuesto puede ser empleado para determinar las relaciones entre los diversos aspectos de un mismo problema. Ya sea para que lo utilicen usuarios no calificados en dominios simples o usuarios expertos en dominios complejos. En el primer caso, la determinación de "lo que la gente prefiere" es una potencial herramienta para entender lo que el mercado está demando. Claramente esta situación de estar atentos a lo que ocurre es altamente deseable para las empresas en mercados que están caracterizados por la dinámica y por la imprevisibilidad. En el segundo caso, es decir la utilización del modelo por parte de los expertos, permite observar qué aspectos (sobre todo técnicos) son los que influyen directamente sobre los productos a evaluar. Esto permite que las organizaciones estén previendo la evolución tecnológica de los productos que le interesan. Ambas actividades forman parte de un área de mucho auge actualmente: la Vigilancia Tecnológica y la Inteligencia Competitiva. Estas dos áreas son de suma importancia para tener un panorama claro de la evolución del entorno.

En cuanto a los aspectos de implementación, el modelo propuesto no requiere recursos computacionales excesivos. Esto significa que no hace falta excesiva capacidad de cómputo ni espacio de almacenamiento. Sí requiere un sistema de almacenamiento organizado de las opiniones de los usuarios para poder recuperarlas en tiempo y forma para realizar los cálculos necesarios. Además, es robusto computacionalmente, esto se evidencia en la actualización dinámica de los resultados a medida que cambian las cardinalidades en las opiniones sin que ello genere problemas en la realización de los cálculos y la determinación de los valores intermedios.

Finalmente, es preciso mencionar que el modelo propuesto es simple de implementar. Solamente requiere, como se mencionó, un sistema adecuado de almacenamiento y organización de los datos y la implementación de los algoritmos de cálculo correspondientes.

Capítulo 7 Conclusiones y Trabajo Futuro

En el ámbito de la toma de decisiones, los operadores de agregación son una herramienta fundamental. En esta tesis se desarrollaron contribuciones relacionadas con operadores de mayoría y en situaciones de toma de decisión multicriterio donde existe interacción entre los atributos evaluados.

En el Capítulo 3 se ha presentado una extensión del operador de mayoría MA-OWA, proveyéndole de un mecanismo para proporcionar diferentes importancias a las mayorías y minorías. Se introduce el uso de un Factor de Relevancia de la Cardinalidad (CRF) con la finalidad de evitar descartar la opinión de la minoría cuando la cardinalidad de alguno de los valores a agregar se destaca sustancialmente sobre el resto. Su uso provee un método eficiente para agregar opiniones basadas en cardinalidades.

Se propuso una formulación matemática, un análisis de sus características y las particularidades que adquiere cuando se hace variar el factor de relevancia de la cardinalidad.

Se ha mostrado que cumple las propiedades necesarias de todo operador de agregación y de otras propiedades específicas debido a su definición particular. Un estudio de la manera en que se calculan los pesos intervinientes en la agregación, ha servido para mostrar que el nuevo operador posee un comportamiento adecuado cuando existen cardinalidades extremas de alguno de los valores a agregar.

En simulaciones realizadas, y en comparación con la media aritmética ponderada y el operador MA-OWA, se pudo constatar que minimiza las distancias Manhattan promedio entre los valores agregados y las opiniones individuales.

Debido a la flexibilidad que provee el uso del CRF, es destacable mencionar que este operador puede comportarse satisfactoriamente en ámbitos dinámicos donde las cardinalidades de los valores a agregar cambian constantemente.

A partir del caso de estudio propuesto, se pudo concluir que la dispersión de las cardinalidades está íntimamente relacionada con el valor CRF adecuado para cada situación. Si la dispersión de cardinalidades es alta, indica que existe disparidad de opiniones y consecuentemente debe priorizarse la mayoría, el CRF debe estar cerca de 1. Si las dispersiones bajan, valores cercanos a la media aritmética son adecuados, el CRF debe acercarse a 0.5. Se propusieron para tal fin dos posibles métodos de cálculo que varían en función de alguna medida de dispersión de las cardinalidades como por ejemplo la varianza, rango o desvío estándar.

En el Capítulo 4, se desarrolló una generalización de este operador SMA-OWA denominado SAM-OWA, donde las valoraciones del vector de pesos pueden calcularse en función de otros criterios distintos a la cardinalidad exclusivamente.

El nuevo operador propuesto aborda de manera eficiente las situaciones donde existen opiniones dispares y su resultado refleja un mayor equilibrio a la media aritmética. En este sentido, una posible valoración emitida por error no tiene un gran impacto sobre el proceso de agregación debido al factor regulador CRF.

Con el uso del operador SAM-OWA pueden obtenerse valoraciones más adecuadas cuando se necesita priorizar la opinión de la mayoría. Se ha mostrado su utilidad en los Social Media cuando se lo compara con la media aritmética ponderada (comúnmente utilizada). Este operador se presenta como una alternativa de agregación de la opinión de la mayoría en sitios web que ofrecen productos y servicios (valoración de hoteles, libros, viajes, música, videos, etc.) y que intentan resumir la opinión de sus usuarios en un único valor representativo (utilizando estrellas o etiquetas lingüísticas por ejemplo).

Asimismo, se puede extender su utilidad para seleccionar candidatos para puestos estratégicos en empresas, votar una ley, calificar una noticia en un periódico (donde el lector puede exponer su punto de vista), etc.

La flexibilidad de uso del operador SAM-OWA muestra que es posible aplicarlo en diferentes ámbitos tanto comerciales, académicas y sociales.

Finalmente, cuando en un proceso de toma de decisiones, además a parecen interacciones entre los criterios evaluados, ha quedado evidenciado que las integrales difusas producen agregaciones adecuadas siempre que la medida difusa subyacente esté definida correctamente.

En el Capítulo 5 se desarrolló un método para identificar medidas difusas no aditivas construidas a partir de apreciaciones de expertos. Estas apreciaciones son suministradas mediante la utilización de etiquetas lingüísticas permitiendo al decisor focalizarse en la importancia de los criterios individualmente y en el signo e intensidad de sus interacciones. Las etiquetas lingüísticas propuestas son muy simples de utilizar y proveen un adecuado nivel de abstracción inclusive con expertos con distinto nivel de experticia.

Se ha mostrado finalmente, que el método propuesto genera una medida difusa apropiada que se calcula automáticamente y que, mediante la integral de Choquet, permite obtener resultados más adecuados que al utilizar otros operadores de agregación.

7.1. Trabajo Futuro

Teniendo en cuenta que el operador SMA-OWA y su generalización SAM-OWA, proporcionan resultados más precisos, se los puede combinar con otras estrategias de toma de decisiones con el fin de obtener mejores valores agregados. En la actualidad, estos operadores están siendo probados en combinación con el modelo de coalición de criterios con el fin de modelar la interacción criterios basados en la opinión de la mayoría.

Esta fusión parece ser apropiada para su utilización en ámbitos de Social Media con la finalidad de medir la relevancia de comentarios, videos, fotos etc. y el impacto que pueden tener en los usuarios. Asimismo será necesario adecuar los modelos para que las valoraciones suministradas se comporten dinámicamente con el transcurso del tiempo.

Referencias

Alajlan, N., Bazi, Y., Melgani, F., Yager, R.R., 2012. Fusion of supervised and unsupervised learning for improved classification of hyperspectral images. Inf. Sci. 217, 39 – 55. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.ins.2012.06.031

Alonso, S., Pérez, I.J., Cabrerizo, F.J., Herrera-Viedma, E., 2013. A linguistic consensus model for Web 2.0 communities. Appl. Soft Comput. 13, 149 – 157. doi:10.1016/j.asoc.2012.08.009

Angelov, P., Yager, R., 2013. Density-based averaging – A new operator for data fusion. Inf. Sci. 222, 163 – 174. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.ins.2012.08.006

Banzhaf, J.F., 1965. Weighted Voting Doesn't Work: A Mathematical Analysis. Rutgers Law Rev. 19 317 – 344.

Beliakov, G., Pradera, A., Calvo, T., 2007. Averaging Functions, in: Aggregation Functions: A Guide for Practitioners, Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer Berlin Heidelberg, pp. 39–122.

Bonetti, A., Bortot, S., Fedrizzi, M., Pereira, R.A.M., Molinari, A., 2012. Modelling group processes and effort estimation in project management using the Choquet integral: an MCDM approach. Expert Syst Appl 39, 13366–13375. doi:10.1016/j.eswa.2012.05.066

Bonissone, P.P., 1980. A Fuzzy Sets Based Linguistic Approach: Theory and Applications, in: Proceedings of the 12th Conference on Winter Simulation, WSC '80. IEEE Press, Piscataway, NJ, USA, pp. 99–111.

Bordogna, G., Fedrizzi, M., Pasi, G., 1997. A linguistic modeling of consensus in group decision making based on OWA operators. Syst. Man Cybern. Part Syst. Hum. IEEE Trans. On 27, 126–133. doi:10.1109/3468.553232

Browne, E.C., Rice, P., 1979. A Bargaining Theory of Coalition Formation. Br. J. Polit. Sci. 9, 67–87. doi:10.1017/S0007123400001629

Cabrerizo, F.J., Herrera-Viedma, E., Pedrycz, W., 2013. A method based on PSO and granular computing of linguistic information to solve group decision making problems defined in heterogeneous contexts. Eur. J. Oper. Res. 230, 624–633. doi:10.1016/j.ejor.2013.04.046

Carlsson, C., Fullér, R., 2011. OWA Operators in Multiple Criteria Decisions, in: Possibility for Decision, Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer Berlin Heidelberg, pp. 77–100.

Chen, Z., Ben-Arieh, D., 2006. On the fusion of multi-granularity linguistic label sets in group decision making. Comput. Ind. Eng. 51, 526–541. doi:10.1016/j.cie.2006.08.012

Chiclana, F., Herrera, F., Herrera-viedma, E., 2000. The Ordered Weighted Geometric Operator: Properties and Application, in: In Proc. 8th Conf. Inform. Processing and Management of Uncertainty in Knowledgebased Systems (IPMU. pp. 985–991.

Chiclana, F., Herrera-Viedma, E., Herrera, F., Alonso, S., 2004. Induced ordered weighted geometric operators and their use in the aggregation of multiplicative preference relations. Int. J. Intell. Syst. 19, 233–255. doi:10.1002/int.10172

Choquet, G., 1954. Theory of capacities. Ann. Inst. Fourier 5, 131–295.

Combarro, E.F., Díaz, I., Miranda, P., 2013. On random generation of fuzzy measures. Fuzzy Sets Syst. 228, 64–77. doi:10.1016/j.fss.2012.09.006

Combarro, E.F., Miranda, P., 2006. Identification of fuzzy measures from sample data with genetic algorithms. Comput. Oper. Res. 33, 3046 – 3066. doi:10.1016/j.cor.2005.02.034

Delgado, M., Verdegay, J.L., Vila, M.A., 1993. On aggregation operations of linguistic labels. Int. J. Intell. Syst. 8, 351–370. doi:10.1002/int.4550080303

Doumpos, M., Zopounidis, C., 2010. A multicriteria decision support system for bank rating. Decis. Support Syst. 50, 55–63. doi:10.1016/j.dss.2010.07.002

Figueira, J., Mousseau, V., Roy, B., 2005. ELECTRE methods, in: Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys. Springer, pp. 133–153.

Filev, D., Yager, R.R., 1998. On the issue of obtaining OWA operator weights. Fuzzy Sets Syst. 94, 157 – 169. doi:http://dx.doi.org/10.1016/S0165-0114(96)00254-0

Fodor, J., Marichal, J.-L., Roubens, M., 1995. Characterization of the ordered weighted averaging operators. Fuzzy Syst. IEEE Trans. On 3, 236–240. doi:10.1109/91.388176

Gamson, W.A., 1961. A Theory of Coalition Formation. Am. Sociol. Rev. 26, pp. 373–382.

Gomes, L.F.A.M., Machado, M.A.S., Costa, F.F. da, Rangel, L.A.D., 2013. Criteria interactions in multiple criteria decision aiding: A Choquet formulation for the TODIM method, in: Proceedings of the First International Conference on Information Technology and Quantitative Management, ITQM 2013, Dushu Lake Hotel, Sushou, China, 16-18 May, 2013. pp. 324–331. doi:10.1016/j.procs.2013.05.042

Grabisch, M., 1997. k-order additive discrete fuzzy measures and their representation. Fuzzy Sets Syst. 92, 167 – 189. doi:http://dx.doi.org/10.1016/S0165-0114(97)00168-1

Grabisch, M., 1995. A new algorithm for identifying fuzzy measures and its application to pattern recognition, in: Int. Joint Conf. of the 4th IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems and the 2nd Int. Fuzzy Engineering Symposium. pp. 145–150.

Grabisch, M., Labreuche, C., 2005. Fuzzy measures and integrals in MCDA, in: Figueira, J., Greco, S., Ehrgott, M. (Eds.), Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys. Springer Verlag, Boston, Dordrecht, London, pp. 563–608.

Grabisch, M., Marichal, J.-L., Mesiar, R., Pap, E., 2011. Aggregation functions: Means. Inf. Sci. 181, 1–22. doi:10.1016/j.ins.2010.08.043

Grabisch, M., Roubens, M., 2000. Application of the Choquet integral in multicriteria decision making, in: Grabisch, M., Murofushi, T., Sugeno, M. (Eds.), Fuzzy Measures and Integrals: Theory and Applications. Physica Verlag, Heidelberg, pp. 348–374.

Herrera, F., Alonso, S., Chiclana, F., Herrera-Viedma, E., 2009. Computing with words in decision making: foundations, trends and prospects. Fuzzy Optim. Decis. Mak. 8, 337–364. doi:10.1007/s10700-009-9065-2

Herrera, F., Herrera-Viedma, E., 2000. Linguistic decision analysis: steps for solving decision problems under linguistic information. Fuzzy Sets Syst. 115, 67 – 82. doi:http://dx.doi.org/10.1016/S0165-0114(99)00024-X

Herrera, F., Herrera-Viedma, E., Chiclana, F., 2003. A study of the origin and uses of the ordered weighted geometric operator in multicriteria decision making. Int. J. Intell. Syst. 18, 689–707. doi:10.1002/int.10106

Herrera, F., Herrera-Viedma, E., Verdegay, J.L., 1996. Direct approach processes in group decision making using linguistic OWA operators. Fuzzy Sets Syst. 79, 175 – 190. doi:http://dx.doi.org/10.1016/0165-0114(95)00162-X

Herrera, F., Martinez, L., 2000. A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words. Fuzzy Syst. IEEE Trans. On 8, 746–752. doi:10.1109/91.890332

Herrera-Viedma, E., Herrera, F., Martínez, L., Herrera, F., 2000. A fusion approach for managing multi-granularity linguistic term sets in decision making, in: Sets in Decision Making, Fuzzy Sets and Systems. pp. 43–58.

Huynh, V.-N., Nakamori, Y., 2005. A satisfactory-oriented approach to multiexpert decision-making with linguistic assessments. Syst. Man Cybern. Part B Cybern. IEEE Trans. On 35, 184–196. doi:10.1109/TSMCB.2004.842248

Kacprzyk, J., 1996. Fuzzy quantifiers and OWA operators in inductive learning from erroneous examples, in: Fuzzy Systems, 1996., Proceedings of the Fifth IEEE International Conference on. pp. 1382–1386 vol.2. doi:10.1109/FUZZY.1996.552378

La Red, D.L., Doña, J.M., Peláez, J.I., Fernandez, E.B., 2011. WKC-OWA, a new Neat-OWA operator to aggregate information in democratic decision problems. Int. J. Uncertain. Fuzziness Knowl.-Based Syst. 19, 759–779. doi:10.1142/S0218488511007222

Li, G., Law, R., Vu, H.Q., Rong, J., 2013. Discovering the hotel selection preferences of Hong Kong inbound travelers using the Choquet Integral. Tour. Manag. 36, 321 – 330. doi:10.1016/j.tourman.2012.10.017

Liu, X., Lou, H., 2007. Parameterized additive neat OWA operators with different orness levels. Int J Intell Syst 21, 1045–1072. doi:10.1002/int.20176

Marichal, J.-L., 2004. Tolerant or intolerant character of interacting criteria in aggregation by the Choquet integral. Eur. J. Oper. Res. 155, 771 – 791. doi:http://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217(02)00885-8

Marichal, J.-L., 2002. Entropy of discrete Choquet capacities. Eur. J. Oper. Res. 137, 612 – 624. doi:http://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217(01)00088-1

Marichal, J.-L., 2000. An axiomatic approach of the discrete Choquet integral as a tool to aggregate interacting criteria. IEEE T Fuzzy Syst. 8, 800–807. doi:10.1109/91.890347

Marichal, J.-L., 1998. Aggregation Operators for Multicriteria Decision Aid (Doctoral thesis). University of Liège, Liège, Belgium.

Marichal, J.-L., Roubens, M., 2000. Determination of weights of interacting criteria from a reference set. Eur. J. Oper. Res. 124, 641 – 650. doi:10.1016/S0377-2217(99)00182-4

Martınez, L., Herrera, F., 2012. An overview on the 2-tuple linguistic model for computing with words in decision making: Extensions, applications and challenges. Inf. Sci. 207, 1 – 18. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.ins.2012.04.025

Massanet, S., Riera, J.V., Torrens, J., Herrera-Viedma, E., 2014. A new linguistic computational model based on discrete fuzzy numbers for computing with words. Inf. Sci. 258, 277–290. doi:10.1016/j.ins.2013.06.055

Miller, G., 1956. The Magical Number Seven, Plus or Minus Two: Some Limits on Our Capacity for Information Processing. Psychol. Rev. 63, 81–97.

Morente-Molinera, J.A., Pérez, I.J., Ureña, M.R., Herrera-Viedma, E., 2015. On multi-granular fuzzy linguistic modeling in group decision making problems: A systematic review and future trends. Knowl.-Based Syst. 74, 49 – 60. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.knosys.2014.11.001

Müller, W.C., Strom, K., 2003. Coalition Governments in Western Europe, Comparative European politics. Oxford University Press.

Murofushi, T., Soneda, S., 1993. Techniques for reading fuzzy measures (III): Interaction index. Presented at the 9th Fuzzy System Symposium, Sapporo, Japan, pp. 693–696.

Murofushi, T., Sugeno, M., 1991. A theory of fuzzy measures: Representations, the Choquet integral, and null sets. J. Math. Anal. Appl. 159, 532 – 549. doi:10.1016/0022-247X(91)90213-J

O'Hagan, M., 1988. Aggregating Template Or Rule Antecedents In Real-time Expert Systems With Fuzzy Set Logic, in: Signals, Systems and Computers, 1988. Twenty-Second Asilomar Conference on. pp. 681–689. doi:10.1109/ACSSC.1988.754637

Pasi, G., Yager, R.R., 2006. Modeling the concept of majority opinion in group decision making. Inf. Sci. 176, 390 – 414. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.ins.2005.07.006

Pasi, G., Yager, R.R., 2003. Modeling the Concept of Fuzzy Majority Opinion, in: Bilgiç, T., De Baets, B., Kaynak, O. (Eds.), Fuzzy Sets and Systems — IFSA 2003, Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, pp. 143–150.

Peláez, J.I., 2001. AMA: An OWA Operator Based on the Majority Process, in: Reusch, B. (Ed.), Computational Intelligence. Theory and Applications, Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, pp. 937–949.

Peláez, J.I., Doña, J.M., 2006. A majority model in group decision making using QMA-OWA operators. Int J Intell Syst 21, 193–208. doi:10.1002/int.20127

Peláez, J.I., Doña, J.M., 2003a. Majority additive-ordered weighting averaging: A new neat ordered weighting averaging operator based on the majority process. Int J Intell Syst 18, 469–481. doi:10.1002/int.10096

Peláez, J.I., Doña, J.M., 2003b. LAMA: A linguistic aggregation of majority additive operator. Int J Intell Syst 18, 809–820. doi:10.1002/int.10117

Peláez, J.I., Doña, J.M., Gómez-Ruiz, J.A., 2007. Analysis of OWA operators in decision making for modelling the majority concept. Appl. Math. Comput. 186, 1263–1275. doi:10.1016/j.amc.2006.07.161

Peláez, A. José Ignacio, Doña, Jesús María, Mesas, 2005. Majority multiplicative ordered weighting geometric operators and their use in the aggregation of multiplicative preference relations. Mathw. Soft Comput. 12, 107–120.

Pérez, I.J., Cabrerizo, F.J., Alonso, S., Herrera-Viedma, E., 2014. A New Consensus Model for Group Decision Making Problems With Non-Homogeneous Experts. Syst. Man Cybern. Syst. IEEE Trans. On 44, 494–498. doi:10.1109/TSMC.2013.2259155

Riker, W., 1962. The Theory of Political Coalitions, New Heaven and London. ed. Yale University Press.

Roubens, M., Vincke, P., 2012. Preference modelling. Springer Science & Business Media.

Roy, B., 1991. The outranking approach and the foundations of electre methods. Theory Decis. 31, 49–73. doi:10.1007/BF00134132

Saaty, T.L., 1990. How to make a decision: The analytic hierarchy process. Eur. J. Oper. Res. 48, 9 – 26. doi:http://dx.doi.org/10.1016/0377-2217(90)90057-I

Saaty, T.L., 1988. What is the analytic hierarchy process? Springer.

Shapley, L.S., 1988. A value for n-person games, in: Roth, A.E. (Ed.), The Shapley Value. Cambridge University Press, pp. 31–40.

Sugeno, M., 1974. Theory of fuzzy integrals and its applications. Tokyo Institute of Technology.

Takahagi, E., 2007. A fuzzy measure identification method by diamond pairwise comparisons: AHP scales and Grabish's graphical interpretation, in: Apolloni, B., Howlett, R., Jain, L. (Eds.), Knowledge-Based Intelligent Information and Engineering Systems, Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, pp. 316–324.

Tan, C., 2011. A multi-criteria interval-valued intuitionistic fuzzy group decision making with Choquet integral-based TOPSIS. Expert Syst. Appl. 38, 3023 – 3033. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.eswa.2010.08.092

Tan, C., Chen, X., 2010. Intuitionistic fuzzy Choquet integral operator for multi-criteria decision making. Expert Syst. Appl. 37, 149 – 157. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.eswa.2009.05.005

Vu, H.Q., Li, G., Beliakov, G., 2012. A fuzzy decision support method for customer preferences analysis based on Choquet Integral, in: FUZZ-IEEE 2012, IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Brisbane, Australia, June 10-15, 2012, Proceedings. pp. 1–8. doi:10.1109/FUZZ-IEEE.2012.6250776

Wang, X., Contreras, A.F.G., Ceberio, M., Hoyo, C.D., Gutierrez, L.C., 2012. A speculative algorithm to extract fuzzy measures from sample data., in: FUZZ-IEEE. IEEE, pp. 1–8.

Wang, X.-Z., He, Y.-L., Dong, L.-C., Zhao, H.-Y., 2011. Particle swarm optimization for determining fuzzy measures from data. Inf. Sci. 181, 4230 – 4252. doi:10.1016/j.ins.2011.06.002

Xu, Z., 2008. Linguistic Aggregation Operators: An Overview, in: Bustince, H., Herrera, F., Montero, J. (Eds.), Fuzzy Sets and Their Extensions: Representation, Aggregation and Models, Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer Berlin Heidelberg, pp. 163–181.

Xu, Z.S., 2004. EOWA and EOWG operators for aggregating linguistic labels based on linguistic preference relations. Int. J. Uncertain. Fuzziness Knowl.-Based Syst. 12, 791–810. doi:10.1142/S0218488504003211

Yager, R.R., 2010. Lexicographic ordinal OWA aggregation of multiple criteria. Inf. Fusion 11, 374 – 380. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.inffus.2009.11.001

Yager, R.R., 2009. On the dispersion measure of OWA operators. Inf. Sci. 179, 3908 – 3919. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.ins.2009.07.015

Yager, R.R., 2008. Using trapezoids for representing granular objects: Applications to learning and OWA aggregation. Inf. Sci. 178, 363 – 380. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.ins.2007.08.015

Yager, R.R., 1998. Fusion of ordinal information using weighted median aggregation. Int. J. Approx. Reason. 18, 35 – 52. doi:http://dx.doi.org/10.1016/S0888-613X(97)10003-2

Yager, R.R., 1996. Quantifier guided aggregation using OWA operators. Int. J. Intell. Syst. 11, 49–73. doi:10.1002/(SICI)1098-111X(199601)11:1<49::AID-INT3>3.0.CO;2-Z

Yager, R.R., 1993. Families of OWA Operators. Fuzzy Sets Syst 59, 125–148. doi:10.1016/0165-0114(93)90194-M

Yager, R.R., 1992. OWA neurons: a new class of fuzzy neurons, in: Neural Networks, 1992. IJCNN., International Joint Conference on. pp. 226–231 vol.1. doi:10.1109/IJCNN.1992.287131

Yager, R.R., 1988. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decisionmaking. IEEE Trans Syst Man Cybern 18, 183–190. doi:10.1109/21.87068

Yager, R.R., Alajlan, N., 2014. A generalized framework for mean aggregation: Toward the modeling of cognitive aspects. Inf. Fusion 17, 65 – 73. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.inffus.2011.10.001

Yager, R.R., Filev, D.P., 1999. Induced ordered weighted averaging operators. Syst. Man Cybern. Part B Cybern. IEEE Trans. On 29, 141–150. doi:10.1109/3477.752789

Yager, R.R., Filev, D.P., 1994. Parametrized And-like and Or-like OWA operators. Int. J. Gen. Syst. 22, 297–316. doi:10.1080/03081079408935212

Yager, R.R., Rybalov, A., 1997. Understanding the median as a fusion operator. Int. J. Gen. Syst. 26, 239–263. doi:10.1080/03081079708945181

Zadeh, L.A., 1983. A computational approach to fuzzy quantifiers in natural languages. Comput. Math. Appl. 9, 149 – 184. doi:http://dx.doi.org/10.1016/0898-1221(83)90013-5

Zadeh, L.A., 1975a. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—III. Inf. Sci. 9, 43 – 80. doi:10.1016/0020-0255(75)90017-1

Zadeh, L.A., 1975b. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—I. Inf. Sci. 8, 199 – 249. doi:10.1016/0020-0255(75)90036-5

Zadeh, L.A., 1975c. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—II. Inf. Sci. 8, 301 – 357. doi:10.1016/0020-0255(75)90046-8

Zarghami, M., Szidarovszky, F., Ardakanian, R., 2008. Sensitivity Analysis of the OWA Operator. Syst. Man Cybern. Part B Cybern. IEEE Trans. On 38, 547–552. doi:10.1109/TSMCB.2007.912745