

Mecánica de Fluidos Básica para aplicaciones Biomédicas Grado en Ingeniería de la Salud

L. Parras y E. Durán Venegas

lparras@uma.es



UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Área de Mecánica de Fluidos
Departamento de Ingeniería Mecánica, Térmica y de Fluidos
Universidad de Málaga

©2024 by Luis Parras y Eduardo Durán Venegas - This work is licensed under CC BY-NC-SA 4.0. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>.



CC BY-NC-SA 4.0 DEED

Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International

Contenido

1	Conceptos preliminares	1
1.1	Conceptos de mecánica de fluidos	1
1.1.1	Propiedades escalares y vectoriales	1
1.1.2	Operadores y operaciones vectoriales principales	2
1.1.3	Unidades	2
1.2	Propiedades de los fluidos	3
1.2.1	Formulación como medio continuo	3
1.2.2	Breve repaso de termodinámica	5
1.2.3	Equilibrio de fuerzas sobre partículas sólidas y fluidas	8
1.2.4	Deformaciones en un fluido.	9
1.2.5	Tensiones en un fluido en equilibrio.	10
1.2.6	Propiedades Físicas	11
1.2.7	Coefficiente de difusión másica	12
1.3	Cinemática	13
1.3.1	Sistemas de referencia no inerciales	16
1.3.2	Principales líneas fluidas en cinemática	16
1.3.3	Ejemplo:	17
2	Ecuaciones de conservación en Mecánica de Fluidos	19
2.1	Teorema de Gauss	19
2.2	Teorema del transporte de Reynolds	19
2.3	Ecuación de conservación de la masa	20
2.4	Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento	24
2.5	Conservación de la energía.	32
2.6	Ejercicios de Volúmenes de control	34
3	Números adimensionales	37
4	Fluidostática	41
4.1	Introducción	41
4.2	Ecuaciones de fluidostática	41
4.3	Hidrostática	42
4.4	Fuerza sobre un cuerpo sumergido. Principio de Arquímedes	42
5	Soluciones laminares a las ecuaciones de Navier-Stokes	43
5.1	Flujos unidireccionales	43
5.2	Movimiento laminar de líquidos en conductos	46

5.3	Tubos de longitud finita	48
6	Fluido ideal	53
6.1	Ecuación de Bernouilli	53
6.2	Función de corriente	59
6.3	Función potencial	60
6.4	Flujo potencial	61
7	Máquinas de fluido y aplicaciones de flujo ideal de gases	71
7.1	Introducción	71
7.2	Máquinas de Fluido	71
7.3	Llenado y vaciado de depósitos	73
7.4	Ejemplo de problema de llenado de depósitos mediante compresores	74
8	Concepto de capa límite. Capa límite laminar.	77
8.1	Introducción	77
8.2	Ecuaciones y condiciones de contorno.	78
8.3	Capa límite sobre una placa plana	82
9	Turbulencia	87
9.1	Introducción	87
9.2	Escalas de la turbulencia	87
9.3	Modelado matemático de la turbulencia	89
10	Capa límite turbulenta y flujo de líquidos en conductos	91
10.1	Introducción	91
10.2	Estructura de la capa límite	91
10.3	Pérdida de carga en conductos circulares	93
10.4	Ecuación general de flujo turbulento en conductos	94
10.5	Pérdidas secundarias en sistemas de tuberías	96
10.6	Condición de contorno en sistemas de tuberías	96
10.7	Ejemplos de problemas de flujo de líquidos en conductos	97

Lista de Figuras

1.1 Efecto del tamaño del elemento diferencial de forma gráfica (a) y efecto sobre la magnitud densidad frente al tamaño de este elemento δV .	4
1.2 Calentamiento de un sistema. En (a) el sistema se calienta a través de una resistencia una cantidad Q y en (b) lo devuelve una vez cesa el calor en un trabajo de expansión $p d(1/\rho)$.	6
1.3 Diagrama $p - v$ del agua.	8
1.4 Esquema de fuerzas sobre una partícula fluidas.	9
1.5 Deformación de una línea en el campo fluido.	9
1.6 Partícula fluida sometida a la fuerza gravitatoria.	11
1.7 Experimento de Torricelli.	11
1.8 Esquema de una deformación viscosa de una partícula fluida sometida a una tensión tangencial: Esquema de fuerzas (a) y deformaciones producidas (b).	13
1.9 Sistema no inercial en movimiento y giro.	17
2.1 Partícula fluida dentro de un campo de velocidad \vec{v} conocido.	20
2.2 Volumen de control para analizar el flujo de gas a través de un tubo.	22
2.3 Volumen de control en una bifurcación.	22
2.4 Vaciado de un depósito. Volumen de control fijo (a) o variable con el tiempo (b).	23
2.5 Deformación en un medio continuo que solo comporta un cambio de volumen (a), deformación en un medio continuo sin cambio de volumen (b) y equilibrio de fuerzas en este medio continuo (c).	26
2.6 Efecto de los esfuerzos normales sobre las deformaciones.	28
2.7 Peso sostenido por un chorro sobre una superficie.	30
2.8 Empuje en un cohete supersónico.	35
4.1 Cuerpo sumergido en un fluido en reposo, al que sólo afecta la gravedad.	42
5.1 Flujo unidireccional sobre una superficie.	44
5.2 Flujo de Couette entre dos placas paralelas.	44
5.3 Flujo de Poiseuille entre dos placas paralelas.	45
5.4 Flujo laminar sobre una superficie con superficie libre.	46
5.5 Perfil de velocidad en un conducto conectado a un depósito junto con la presión a lo largo de él.	49
5.6 Problema de ejemplo de descarga de un depósito con $Re \ll 1$.	49
6.1 Figura de un tubo en forma de U que gira excéntricamente.	56
6.2 Figura de un inyector accionado por un pistón.	58

6.3	Líneas de corriente (línea continua) y de función potencial (línea discontinua) para el problema supuesto.	61
6.4	Función de corriente (negro) y potencial (rojo) para un movimiento uniforme (a), una fuente o sumidero (b) y un torbellino (c).	65
6.5	Líneas de corriente para una corriente uniforme y una fuente (a), corriente uniforme, una fuente en $x = -a$ y un sumidero en $x = +a$ (b) y corriente uniforme con un dipolo (c).	66
7.1	Esquema para el estudio del funcionamiento de una turbomáquina de fluido mediante las ecuaciones de conservación.	71
7.2	Esquema para el estudio del llenado de un depósito de gas de volumen variable mediante las ecuaciones de conservación.	73
7.3	Esquema para el estudio del llenado de un depósito de gas de volumen constante introduciendo el aire mediante un compresor desde la atmósfera.	74
8.1	Esquema de la capa límite bidimensional sobre un cuerpo sólido. Se observan los ejes de coordenadas (x,y) sobre el que incide un flujo con velocidad $U_e(x)$. $\delta(x)$ representa el espesor de la capa límite y $u(x,y)$ es el campo de velocidad que se adapta desde cero a la velocidad exterior $U_e(x)$.	79
8.2	Esquema de la capa límite bidimensional sobre una placa plana. Se observan los ejes de coordenadas (x,y) en la superficie sobre la que incide un flujo con velocidad U_∞ . $\delta(x)$ representa el espesor de la capa límite y $u(x,y)$ es el campo de velocidad que se adapta desde cero a la velocidad exterior U_∞ .	82
8.3	Solución de Blasius, $f'(\eta)$.	85
9.1	El flujo generado por una vela permite observar los distintos regímenes de flujo que aparecen en mecánica de fluidos: el flujo laminar estacionario, el flujo laminar no estacionario y el flujo turbulento (Dr. Gary Settles).	88
9.2	Medida instantánea de la velocidad turbulenta en un punto fijo de un experimento. Se incluye en línea discontinua el valor promedio del mismo.	88
10.1	Capa límite turbulenta de una capa límite a gradiente de presión nula para $Re_\theta = 670.846$ obtenido de Schlatter et al., Phys. Fluids 21, 051702 (2009)	92
10.2	Velocidad adimensional laminar en un conducto y velocidad turbulenta en el mismo conducto.	93
10.3	Diagrama de Moody. Representa el factor de fricción en función del número de Reynolds en el conducto y de la rugosidad relativa.	95
10.4	Típicos casos en sistemas de tuberías donde aparecen pérdidas de presión secundarias: (a) válvulas, (b) codos, (c) contracciones o (d) ensanchamientos.	95
10.5	Esquema para la definición de condiciones de contorno en sistema de tuberías. A la izquierda un vaciado o descarga de depósito y a la derecha un llenado o carga de depósito.	96
10.6	Ejemplo de instalación compleja de impulsión.	98

Lista de Tablas

1.1	Principales unidades del SI junto con algunas derivadas.	3
10.1	Ejemplos de valores de la constante K en pérdidas secundarias en tuberías.	96

Sobre los autores

Luis Parras es Catedrático de Universidad del Área de Mecánica de Fluidos de la Universidad de Málaga.

Eduardo Durán Venegas es Contratado Postdoctoral con Proyecto de Excelencia para Jóvenes Investigadores en el Área de Mecánica de Fluidos de la Universidad de Málaga.

Capítulo 1

Conceptos preliminares

1.1 Conceptos de mecánica de fluidos

Este capítulo pretende ser una introducción a diferentes conceptos básicos empleados en la Mecánica de Fluidos. En particular, las formulaciones matemáticas usadas son complejas, aunque lo principal de este curso es conocer físicamente el significado de los distintos términos que aparecen en las ecuaciones, y ser capaz de realizar simplificaciones que permitan obtener soluciones simples o ecuaciones de balance. Del mismo modo, la Mecánica de Fluidos está íntimamente relacionada con la mecánica del sólido rígido y del sólido deformable, así como con ciertos conceptos fundamentales de la termodinámica. Se pasará sobre estas ideas de forma somera haciendo hincapié en el significado físico de todas ellas.

1.1.1 Propiedades escalares y vectoriales

Una propiedad escalar se define matemáticamente como una función de la posición (y del tiempo) que proporciona un valor concreto de ésta en el espacio:

$$T = T(x, y, z, t). \quad (1)$$

Por ejemplo, la temperatura de la habitación es una variable escalar, puesto que en cada posición del espacio (x, y, z) se puede definir un valor diferente de temperatura. Este concepto de función es lo que se conoce en análisis matemático como campo.

Una propiedad vectorial es una función que determina dos (si el vector es bidimensional) o tres (si es tridimensional) valores concretos para cada posición del espacio (y del tiempo). Se puede ver como un conjunto de propiedades escalares.

$$\vec{v} = u \vec{e}_x + v \vec{e}_y + w \vec{e}_z = (u, v, w), \quad (2)$$

con

$$u = u(x, y, z, t), \quad v = v(x, y, z, t), \quad w = w(x, y, z, t), \quad (3)$$

propiedades escalares.

1.1.2 Operadores y operaciones vectoriales principales

Los campos vectoriales tienen dos operaciones básicas. Una de ellas es el producto escalar que proporciona a través del producto de dos vectores un escalar y que se denota mediante el punto " \cdot ":

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (u_1, v_1, w_1) \cdot \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix} = u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2. \quad (4)$$

Por otro lado, el producto vectorial de dos vectores produce un vector perpendicular a ambos, y se denota por " \times ",

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 w_2 - w_1 v_2 \\ -u_1 w_2 + w_1 u_2 \\ u_1 v_2 - v_1 u_2 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

El producto tensorial es un producto en el que dos vectores producen un tensor (vector de vectores). Por ejemplo,

$$\vec{v}_1 \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} (u_2, v_2, w_2) = \begin{pmatrix} u_1 u_2 & u_1 v_2 & u_1 w_2 \\ v_1 u_2 & v_1 v_2 & v_1 w_2 \\ w_1 u_2 & w_1 v_2 & w_1 w_2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Por último, durante el curso aparecerá numerosas veces el operador nabla (∇), que permite simplificar las ecuaciones de Mecánica de Fluidos en notación vectorial. Se puede entender como un operador de derivada tridimensional

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (7)$$

1.1.3 Unidades

No se pretende al lector dar un compendio pormenorizado de las unidades usadas en la Mecánica de Fluidos, pero sí una introducción a las principales unidades de las variables que se usarán dentro de la asignatura. De esta forma, de forma general, las unidades principales (al menos para este curso introductorio) son las de longitud, masa, tiempo y temperatura. Todas las demás unidades se consideran derivadas de éstas. Las unidades de estas magnitudes en el sistema internacional se detallan en la tabla 1.1. Como curiosidad, recordar que las unidades se escriben en minúsculas excepto todas aquellas cuyo nombre provenga de un nombre propio:

- Newton (N), por Isaac Newton,
- Pascal (Pa), por Blaise Pascal,
- Julio (J), por James Prescott Joule,
- Kelvin (K), por William Thomson (Lord Kelvin),
- Vatio (W), por James Watt.

Magnitud	Unidad SI
Longitud	m
Masa	kg
Tiempo	s
Temperatura	K
Densidad	kg/m^3
Velocidad	m/s
Aceleración	m/s^2
Fuerza	$\text{N} = \text{kg m/s}^2$
Presión	$\text{Pa} = \text{N/m}^2$
Energía	$\text{J} = \text{N m}$
Potencia	$\text{W} = \text{J/s}$

Table 1.1: Principales unidades del SI junto con algunas derivadas.

1.2 Propiedades de los fluidos

En esta sección se va a realizar un breve repaso a la diferencia entre la mecánica clásica y la mecánica de medios continuos. En la mecánica clásica, un sistema está formado por una partícula o sistema de partículas en las que éstas están siempre a una misma distancia unas de otras. Por eso se conoce también como la mecánica del sólido rígido, puesto que si no se pueden desplazar unas con respecto a otras, no pueden existir deformaciones.

1.2.1 Formulación como medio continuo

En el caso de los fluidos, como se indicó anteriormente se usará el concepto de campo. De esta forma, se dividirá el dominio fluido en pequeños volúmenes diferenciales (infinitesimales o extremadamente pequeños), para aplicar sobre ellos las ecuaciones de conservación (de masa, momento y energía). Es importante poder determinar cuál es el tamaño que han de tener estos volúmenes diferenciales para que contengan suficientes partículas como para que las propiedades sean más o menos constantes, y sin embargo los volúmenes fluidos sean suficientemente pequeños como para que las variables sean continuas. Esto es lo que se conoce como la hipótesis de medio continuo.

Supongamos en un principio el caso de un gas y analicemos la propiedad de la densidad, que se denota generalmente por ρ . Un gas está formado por partículas (moléculas) que se mueven aleatoriamente en todas las direcciones del espacio. Si se toma un volumen diferencial de tamaño δV demasiado pequeño (del orden de varias longitudes características de moléculas), puede ocurrir que para un cierto tiempo existan dentro de él un número muy pequeño de ellas, y en otros tiempos un número muy elevado [ver el volumen pequeño de la figura 1.1 (a)]. Esto hace que la propiedad que se quiere medir, la densidad ρ , dependa del tamaño del volumen de fluido que se utilice. Por otro lado, si el tamaño del volumen diferencial es demasiado grande (varias decenas de metros), las propiedades varían demasiado dentro de él y por tanto no se pueda capturar la dinámica que ocurre dentro de éste. Es por tanto que ha de existir un tamaño intermedio donde las propiedades sean aproximadamente

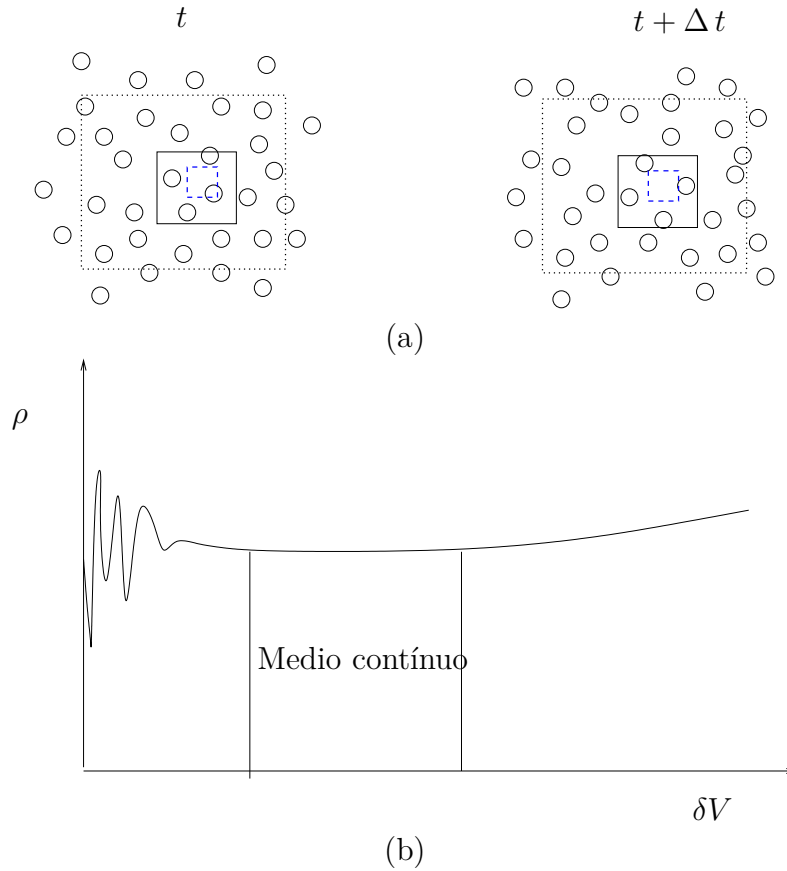


Figure 1.1: Efecto del tamaño del elemento diferencial de forma gráfica (a) y efecto sobre la magnitud densidad frente al tamaño de este elemento δV .

constantes en función del tiempo, pero por otro lado sea lo suficientemente pequeño como para poder observar las variaciones de éstas en el espacio. Esto se puede ver en la figura 1.1 (b) donde se representan el valor de densidad en función del tamaño del volumen diferencial δV . De esta forma, para pequeños volúmenes la densidad oscilará demasiado al no contener demasiadas moléculas como para que el promedio sea estable. Si se emplea un volumen óptimo, las propiedades serán homogéneas dentro del volumen diferencial.

El caso de los líquidos es similar. Físicamente, la diferencia principal con los gases es que existe cierto ordenamiento y menor movilidad entre sus moléculas. Esto es debido a lo que se conoce como fuerzas de atracción débiles (como las fuerzas de Van der Waals). Recordemos que los enlaces químicos pueden ser covalentes (o fuertes), producidos por la reacción atómica, metálicos e iónicos (débiles). Estos últimos o las fuerzas de Van der Waals son las que confieren cierto orden a los líquidos, que hacen que estén en un estado semiordenado. Esto hace que fluyan con facilidad, al igual que los gases.

Para completar los tipos de enlaces, los metálicos son aquellos que confieren una estructura cristalina a los sólidos. Si se deforman, y no se llegan a romper los enlaces, el cuerpo vuelve a su posición inicial y se encuentra en el estado elástico. En caso contrario, los enlaces se desplazan de su posición inicial (dislocaciones), haciendo que se deforme permanentemente. Esto es estudiado por la Mecánica del Sólido Deformable y por la Ciencia de Materiales, y queda fuera del alcance de este curso.

Esta última idea permite establecer la diferencia principal entre los gases y los líquidos y es que los primeros, al no tener enlaces débiles, permiten ser comprimidos y por eso se habla indistintamente de fluidos compresibles. De la misma forma, para comprimir un líquido se necesitan enormes cantidades de energía, porque todos los huecos están ocupados por moléculas, y por tanto serán fluidos incompresibles.

1.2.2 Breve repaso de termodinámica

Existen ciertos conceptos fundamentales en termodinámica necesarios para comprender la dinámica de los fluidos. Ya hemos visto que la densidad tiene en cuenta la cantidad de fluido dentro de un volumen (ρ). Del mismo modo, el concepto físico de la presión p puede entenderse como el choque elástico de las partículas con las paredes de un depósito que contiene un determinado fluido. Por último, la temperatura se puede entender como la agitación molecular de las moléculas de un fluido. Las moléculas de los fluidos, aparte de desplazarse, están agitadas por encontrarse fuera del cero absoluto. Esta agitación se mide mediante la temperatura, siendo por tanto nula para 0K. Estas tres variables están siempre relacionadas para un gas ($p = f(\rho, T)$), mediante la ecuación de estado de los gases ideales. Generalmente se ha visto de la siguiente manera,

$$pV = nRT, \quad (8)$$

donde V es el volumen ocupado, n es el número de moles de gas y R la constante universal de los gases ideales ($R = 8.314 \text{ J}/(\text{mol K})$). Para conocer los moles de gas, habrá que dividir la masa de gas entre su peso molecular y por tanto, $n = m/M$. Reordenando se tiene que

$$pV = \frac{m}{M}RT, \quad \frac{p}{m/V} = \frac{R}{M}T, \quad \frac{p}{\rho} = R_g T, \quad (9)$$

con $R_g = R/M$ la constante del gas en cuestión. Esta es la expresión general que se usa en mecánica de fluidos para la ecuación de estado.

En el caso de líquidos, al ser incompresibles ρ es constante, y por tanto no existe esta relación, y en principio (en muchos casos de interés) la temperatura y la presión no están correladas.

Una magnitud de interés en la Termodinámica es la energía interna, que indica la energía almacenada en forma de vibración molecular. De esta forma, si una partícula está vibrando, transmitirá por contacto esta vibración a las partículas colindantes, y por tanto éstas adquirirán una mayor energía (y temperatura también). Este proceso de intercambio de energía interna es lo que se conoce como calor. La temperatura tiene que ver con el estado energético de las partículas y el calor con la transmisión de esta energía.

En cuanto al primer principio de la Termodinámica, éste nos indica que la variación de energía interna es debida al calor que se extrae de los alrededores y al trabajo realizado por el sistema.

$$de = dQ - dW, \quad (10)$$

con Q el calor suministrado al sistema y $dW = pdv$ el trabajo realizado por el gas al expandirse y v es el volumen específico (la inversa de la densidad). Supongamos por ejemplo el caso de la figura 1.2. Es un depósito aislado térmicamente al que podemos introducir calor

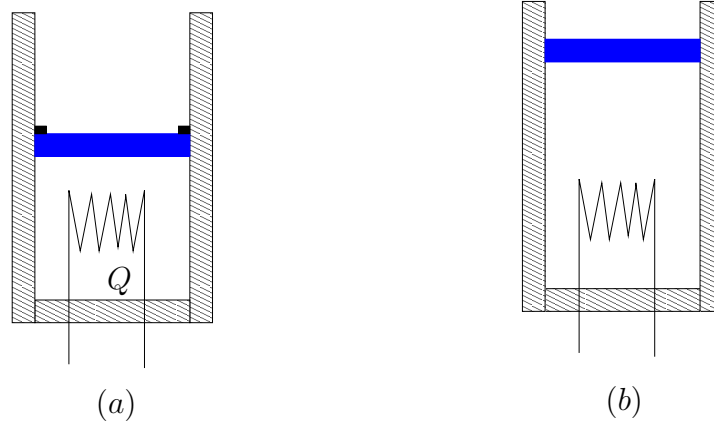


Figure 1.2: Calentamiento de un sistema. En (a) el sistema se calienta a través de una resistencia una cantidad Q y en (b) lo devuelve una vez cesa el calor en un trabajo de expansión $p d(1/\rho)$.

con una resistencia en el interior. Además, cuenta con una pared superior móvil. Si fijamos al principio la pared móvil de tal forma que no se pueda desplazar, el sistema no podrá expandirse y por tanto generar trabajo. Si añadimos calor al sistema, éste se empleará según el primer principio de la termodinámica en aumentar su energía interna. Una vez llegado a este mismo estado, se deja de aportar calor y se permite el movimiento de la pared superior. El sistema se expandirá buscando la posición de equilibrio realizando un trabajo.

La energía interna es de utilidad en sistemas cerrados (a volumen constante). Para sistemas en los que exista flujo se usa la entalpía, definida como

$$h = e + p/\rho. \quad (11)$$

Ambas propiedades son diferenciales exactas, es decir que sólo dependen del estado inicial y final y no del camino realizado. Además, $e = e(T, p)$ y $h = h(T, p)$. Se define el calor específico a volumen constante

$$c_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right) \Big|_{v=cte}, \quad e = c_v T. \quad (12)$$

Para la entalpía, se tiene que

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right) \Big|_{p=cte}, \quad h = c_p T. \quad (13)$$

Para calcular la variación de energía interna o entalpía, existen tablas para los distintos gases o mezclas de vapor y agua, así como expresiones experimentales para los coeficientes c_v y c_p en función de la temperatura.

En el caso de líquidos, al no poder producirse deformaciones por ser incompresibles ($\rho = \text{constante}$), la variación de entalpía o de energía interna es

$$\Delta e = c \Delta T, \quad \Delta h = c \Delta T. \quad (14)$$

con c el calor específico del líquido correspondiente. Por la definición de entalpía se tiene que

$$h = e + p/\rho = e + R_g T \rightarrow R_g = c_p - c_v. \quad (15)$$

La entropía mide el grado de desorden del sistema. De esta forma, indica si un sistema es reversible o no. Básicamente, la razón para que un sistema sea reversible es que no se le aporte ni pierda calor, y por tanto,

$$ds = \frac{dQ}{T} = 0. \quad (16)$$

Usando esta expresión se llega a que todos los sistemas isoentrópicos son aquellos que no tienen intercambio de calor, y la ecuación de la energía se simplifica a

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{constante}. \quad (17)$$

Demostración:

Usando el primer principio de la termodinámica, se puede escribir que

$$T ds = de + pd(1/\rho). \quad (18)$$

Usando la ley de los gases ideales se tiene que $p = R_g \rho T$ y por tanto,

$$T ds = c_v dT - R_g \rho T \frac{d\rho}{\rho^2}. \quad (19)$$

Integrando se obtiene que

$$s - s_0 = c_v \log(T/T_0) - R_g \log(\rho/\rho_0) = \log \left(\frac{(T/T_0)^{c_v}}{(\rho/\rho_0)^{R_g}} \right) = c_v \log \left(\frac{T/T_0}{(\rho/\rho_0)^{\gamma-1}} \right). \quad (20)$$

con $\gamma = c_p/c_v$ la relación de calores específicos. Finalmente, usando la ley de los gases ideales de nuevo

$$s - s_0 = c_v \log \left(\frac{p/p_0}{(\rho/\rho_0)^\gamma} \right). \quad (21)$$

Por tanto, para que un flujo sea isoentrópico ha de cumplir que

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{constante}. \quad (22)$$

Otro concepto importante al analizar los fluidos es la posibilidad de que se produzca un cambio de fase. Eso se estudia en los diagramas $p - v$ (o $p - 1/\rho$) como el que se representa en la figura 1.3. Para temperatura y presión atmosféricas, el agua se comporta como líquido. Si de pronto la calentamos a presión constante, que es lo que se realiza cuando se calienta una olla en la cocina, se viaja en el diagrama por la línea discontinua, Al llegar a la línea gruesa (azul), se produce el cambio de fase, que siempre se realiza a temperatura constante. Este cambio de fase necesita energía y esa energía se denomina calor latente de cambio de fase. Durante el proceso de cambio de fase estarán mezcladas la fase líquida y el vapor (la olla tendrá agua y las burbujas de vapor en la superficie) hasta que se obtenga sólo vapor, en el segundo corte con la línea gruesa.

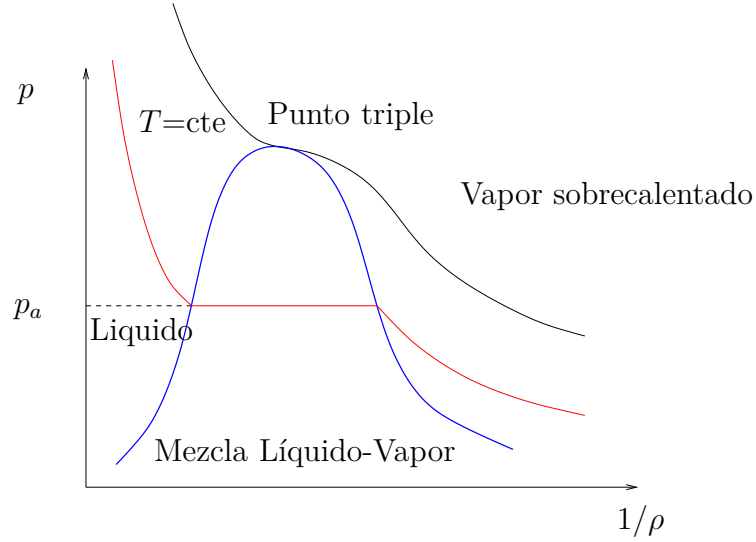


Figure 1.3: Diagrama $p - v$ del agua.

1.2.3 Equilibrio de fuerzas sobre partículas sólidas y fluidas

En el caso de la mecánica del sólido, la ecuación que rige el movimiento de las partículas es la Segunda Ley de Newton, que indica que el cambio en el momento lineal de un cuerpo es debido a la resultante de las fuerzas que actúan sobre ella,

$$\frac{d m \vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}. \quad (23)$$

En el caso de las partículas fluidas diferenciales, las fuerzas podrán ser de dos tipos. Si se observa la figura 1.4 se puede ver como sobre una partícula general actuarán fuerzas volumétricas que actúan sobre todas las moléculas dentro del volumen diferencial (f_v), así como fuerzas superficiales. Estas fuerzas superficiales serán tangenciales o normales. En Mecánica de los Medios Continuos se usan los tensores para definir los vectores de fuerzas de superficie. Un tensor es una matriz que contiene 4 campos escalares en el caso de ser bidimensional (9 en el caso de ser tridimensional). Se define como

$$\bar{\bar{\tau}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Este vector define cualquier fuerza en la superficie del volumen diferencial. Por ejemplo, si queremos saber las fuerzas superficiales sobre la cara de la derecha del elemento de la figura 1.4 habrá que multiplicar el tensor por la normal a la superficie (siempre definida hacia fuera). Se podría obtener de la misma forma todas las demás componentes.

$$\vec{\tau} = \bar{\bar{\tau}} \cdot \vec{n} = \bar{\bar{\tau}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

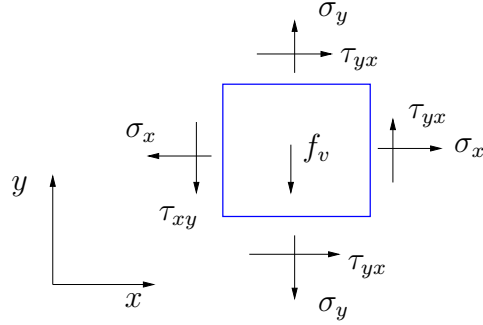


Figure 1.4: Esquema de fuerzas sobre una partícula fluida.

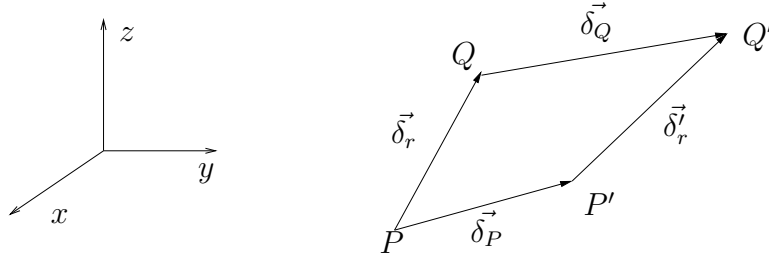


Figure 1.5: Deformación de una línea en el campo fluido.

1.2.4 Deformaciones en un fluido.

Partamos de dos puntos separados una distancia infinitesimal dentro de un fluido (P,Q), que están sometidas a dos velocidades distintas (u, v, w) para P y (u', v', w') . El desplazamiento de cada uno de los puntos se puede calcular para un diferencial de tiempo como

$$\vec{\delta}_P = u dt \vec{e}_x + v dt \vec{e}_y + w dt \vec{e}_z, \quad (26)$$

$$\vec{\delta}_Q = u' dt \vec{e}_x + v' dt \vec{e}_y + w' dt \vec{e}_z. \quad (27)$$

$$(28)$$

Si los puntos están infinitesimalmente juntos, se puede determinar el desplazamiento de Q en función del desplazamiento de P, mediante el desarrollo en serie de Taylor,

$$u' dt = u dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx dt + \frac{\partial u}{\partial y} dy dt + \frac{\partial u}{\partial z} dz dt, \quad (29)$$

$$v' dt = v dt + \frac{\partial v}{\partial x} dx dt + \frac{\partial v}{\partial y} dy dt + \frac{\partial v}{\partial z} dz dt, \quad (30)$$

$$w' dt = w dt + \frac{\partial w}{\partial x} dx dt + \frac{\partial w}{\partial y} dy dt + \frac{\partial w}{\partial z} dz dt. \quad (31)$$

$$(32)$$

De esta forma, la deformación sufrida por el vector que une PQ ($\vec{\delta}_r$) para llevarlo a P'Q' ($\vec{\delta}'_r$) se puede expresar de forma vectorial como,

$$\vec{\delta}_Q = \vec{\delta}_P + dt \nabla \vec{v} \vec{\delta}_r, \quad (33)$$

y por otro lado se tiene que

$$\vec{\delta}'_r = -\vec{\delta}_P + \vec{\delta}_r + \vec{\delta}_Q, \quad (34)$$

y por tanto se puede escribir que

$$\frac{\vec{\delta}'_r - \vec{\delta}_r}{dt} = \nabla \vec{v} \vec{\delta}_r. \quad (35)$$

El tensor $\nabla \vec{v}$ mide la variación de la velocidad por unidad de longitud en cualquier dirección. Queda definido como

$$\nabla \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (36)$$

Este vector se puede descomponer en una parte antisimétrica $\bar{\xi}$ y una parte simétrica $\bar{\gamma}$,

$$\bar{\xi} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{v} - \nabla \vec{v}^T), \quad \bar{\gamma} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T). \quad (37)$$

No se desarrollará más en este curso introductorio, pero la parte antisimétrica corresponde con una rotación como sólido rígido y la parte simétrica corresponde con la deformación del campo fluido. Es por esto que a este tensor se le denomina tensor de deformaciones.

1.2.5 Tensiones en un fluido en equilibrio.

En el caso de un fluido en equilibrio (sin movimiento), las fuerzas superficiales sólo pueden ser normales a las superficies. Esto es así porque por su capacidad de “fluir”. Si se aplica en una superficie una fuerza tangencial, éste comenzará a desplazarse. Esta fuerza perpendicular es lo que se conoce como la presión y el estudio de estos problemas la fluidostática. En la figura 1.6 se muestra una partícula diferencial sobre la que actúa la gravedad como fuerza volumétrica (\vec{g}). Si se aplica equilibrio de fuerzas, la fuerza superior ha de ser ligeramente inferior para equilibrar el peso de la partícula. Este peso se puede calcular como $\rho g dx dy dz$. La fuerza sobre la superficie inferior será $p dx dy$ y sobre la superior $(p - dp) dx dy$ puesto que para permanecer estático, la presión en la cara inferior ha de contrarrestar el peso y las fuerzas de presión ejercidas en la cara superior. Aplicando equilibrio de fuerzas sobre la partícula fluida se tiene que

$$p dx dy = (p - dp) dx dy + \rho g dx dy dz, \quad \frac{dp}{dz} = \rho g, \quad (38)$$

y por lo tanto, conociendo la presión en un punto se puede determinar la presión en cualquier punto de un fluido en equilibrio, simplemente integrando la ecuación,

$$p = p_0 + \rho g z. \quad (39)$$

Ejemplo

El experimento de Torricelli se utilizó para determinar la presión atmosférica. Para ello se introduce un tubo cerrado por un extremo relleno de mercurio, dentro de un depósito descubierto de mercurio. La columna desciende hasta alcanzar una altura de 76 cm aproximadamente. Para determinar la presión atmosférica hacemos uso de la fluidostática,

Conceptos preliminares

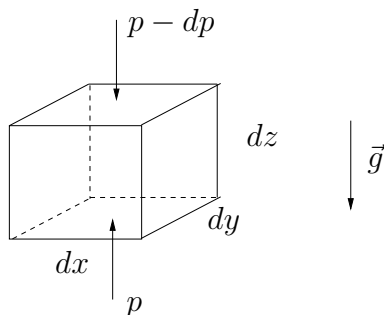


Figure 1.6: Partícula fluida sometida a la fuerza gravitatoria.

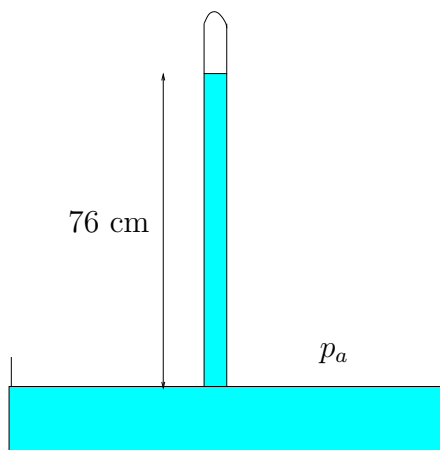


Figure 1.7: Experimento de Torricelli.

imponiendo que $p + \rho g z$ ha de ser constante entre dos puntos cualquiera del fluido, por ejemplo, uno de la superficie del depósito, y el de la superficie en el interior del tubo (suponiendo que el nivel cero de altura está en la superficie del depósito):

$$p_a = p_v + \rho g h, \quad p_a \approx \rho g h = 101290 \text{ Pa}, \quad (40)$$

donde hemos supuesto que la presión de vapor dentro del tubo es prácticamente nula.

1.2.6 Propiedades Físicas

Otro de los aspectos fundamentales para describir los fluidos es conocer las distintas propiedades que los caracterizan. Algunas de ellas provienen de ecuaciones constitutivas que nos ayudarán más tarde a definir todos los términos de las ecuaciones de Mecánica de Fluidos: Ley de Fourier, Ley de Newton y Ley de Fick. Las demás que se presentan son interesantes para otras aplicaciones.

Conductividad térmica

La ley de Fourier, indica que el calor transferido a un material depende de la diferencia de temperatura entre dos puntos y su distancia. El experimento que realizó Jean-Baptiste Joseph Fourier, fue medir la diferencia de temperatura entre los extremos de barras de

distintos materiales observando que

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} \simeq \text{constante} = k. \quad (41)$$

A esa constante se le llamó conductividad térmica y tiene unidades de $W/(K \cdot m)$. Otro parámetro íntimamente relacionado con ésta es la difusividad térmica denominada $\alpha = k/(\rho c_p)$ que se mide en m^2/s .

Viscosidad

De la misma forma que Fourier encontró la relación entre la diferencia de temperatura y la distancia, Newton postuló que si se aplica una tensión en la superficie de un fluido, la deformación producida depende linealmente de ésta. En la figura 1.8 (a) se representa un volumen fluido que se desplaza a una velocidad u , al que sobre la superficie se aplica una cierta tensión τ . Para que el fluido esté en equilibrio, en la superficie superior deberá existir una tensión del mismo valor y sentido contrario. Esto provocará una deformación de la partícula fluida como se muestra en la figura 1.8 (b). El punto C se ha desplazado una distancia $u(x, y) dt$, y en la zona superior $u dt + \tan(\theta)\Delta y$. Si uno mide este desplazamiento y lo relaciona con la fuerza aplicada obtendrá que

$$\frac{\tau}{\tan(\theta)} \simeq \text{constante} = \mu, \quad (42)$$

y sabiendo que la derivada indica la tangente de una curva, se tiene que

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}. \quad (43)$$

A la constante μ se le llama viscosidad dinámica, y tiene unidades de $Pa \cdot s$. De la misma forma que con el problema térmico, se puede definir una difusividad de cantidad de movimiento o viscosidad cinemática, que se denota como $\nu = \mu/\rho$, que también tiene unidades de m^2/s .

1.2.7 Coeficiente de difusión másica

La última ecuación constitutiva tiene en cuenta la transferencia de masa. Dado un depósito que contiene un fluido con una mayor concentración de una sustancia que en otra zona del fluido, esto provocará un desplazamiento de la sustancia buscando igualar las concentraciones. Está regido por la ley de Fick, y ésta indica que

$$\rho_i \vec{v}_{di} = -D \nabla \rho_i, \quad (44)$$

donde ρ_i es la densidad de la especie i en la mezcla, y \vec{v}_{di} la velocidad de difusión de la especie i en la mezcla. El coeficiente D es la difusividad másica y tiene unidades de m^2/s .

Conceptos preliminares

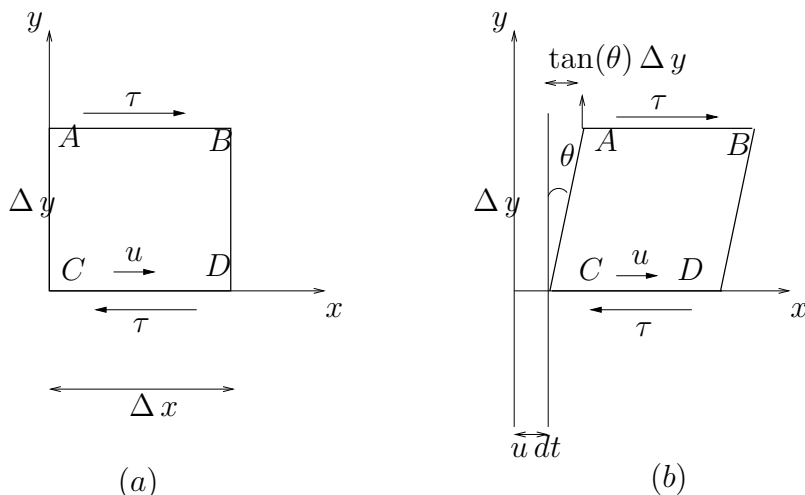


Figure 1.8: Esquema de una deformación viscosa de una partícula fluida sometida a una tensión tangencial: Esquema de fuerzas (a) y deformaciones producidas (b).

Velocidad del sonido

La velocidad del sonido es por definición la derivada de la presión frente a la densidad a entropía constante. Físicamente es la velocidad a la que se transmite la información dentro de los fluidos. Esto indica que

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right) \Big|_{s=cte} . \quad (45)$$

De la ecuación isoentrópica se tiene que

$$p = \rho^\gamma \frac{p_0}{\rho_0^\gamma}, \quad c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} = \gamma R_g T. \quad (46)$$

Presión de vapor

Es el valor de presión necesario para que un líquido comience a evaporarse. Corresponde con el primer punto de corte de la curva en trazo grueso de la figura 1.3. En general, la presión de vapor dependerá únicamente de la temperatura $p_v = p_v(T)$.

1.3 Cinemática

La cinemática es la parte de la Mecánica que se dedica al estudio del movimiento de las partículas o los sistemas de partículas. Para ello, a partir de las velocidades o las posiciones de éstas se podría determinar el movimiento de los sistemas. En contraposición a ésta está la dinámica, que tiene en cuenta la acción de las distintas fuerzas para determinar cuál es la velocidad de los sistemas de partículas. Básicamente se podría resumir de la siguiente forma:

- Conociendo las posiciones o velocidades de las partículas en función del tiempo, se puede determinar su movimiento y la resultante de las fuerzas que actúan sobre ellas → CINEMÁTICA.

- Conociendo las fuerzas que actúan sobre un cierto sistema, determinar las posiciones o velocidades de los sistemas de partículas → DINÁMICA.

Existen dos tipos de formulaciones para estudiar el movimiento de las partículas. A la primera de ellas se le llama formulación lagrangiana y es la usada en Mecánica clásica. Se conoce la posición de la partícula para una posición inicial en función del tiempo con respecto a un sistema de referencia lagrangiano fijo. Esto matemáticamente se expresa como

$$x = x(x_0, y_0, z_0, t), \quad y = y(x_0, y_0, z_0, t), \quad z = z(x_0, y_0, z_0, t). \quad (47)$$

De esta forma, por la definición de posición en función del tiempo se podría obtener tanto la velocidad, $\vec{v} = (u, v, w)$, como la aceleración, $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$,

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt}, \quad (48)$$

$$a_x = \frac{du}{dt}, \quad a_y = \frac{dv}{dt}, \quad a_z = \frac{dw}{dt}, \quad (49)$$

Caso de tener que determinar la suma de las fuerzas que actúan sobre una partícula se usa la segunda ley de Newton

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}, \quad (50)$$

con m la masa de la partícula que estamos tratando.

Ejemplo:

Para determinar la mejor trayectoria de una motocicleta en una curva de forma conocida se pretende calcular las fuerzas que actúan sobre ella para una trayectoria concreta bidimensional.

$$U = 10\text{m/s}, \quad (51)$$

$$x(t) = 18 \cos(U t), \quad (52)$$

$$y(t) = -8 + 19 \sin(U t). \quad (53)$$

Código

```

% Pinta la carretera
theta = linspace(0,pi,100);
r1 = 10;
r2 = 20;
plot(r1*cos(theta),r1*sin(theta),'k','LineWidth',2);
hold on;
plot(r2*cos(theta),r2*sin(theta),'k','LineWidth',2);
axis equal

% Pinta la trayectoria
U = 10;
h = 8;
x = (r1+h)*cos(U*t);
y = -h + (r1+h+1)*sin(U*t);
plot(x,y)
axis([-25 25 0 20])

```

El segundo tipo de formulaciones que se usa para analizar el movimiento de partículas es el que proviene del concepto de campo (funciones definidas que dependen en general de la posición del punto en el espacio y del tiempo) en un sistema de referencia anclado al experimento.

$$\vec{v} = u \vec{e}_x + v \vec{e}_y + w \vec{e}_z = (u, v, w), \quad (54)$$

con (u, v, w)

$$u = u(x, y, z, t), \quad v = v(x, y, z, t), \quad w = w(x, y, z, t). \quad (55)$$

Por cada punto (x, y, z) del espacio NO pasa siempre la misma partícula. Esta es la diferencia principal entre la formulación lagrangiana y la euleriana. En la lagrangiana se expresan las ecuaciones sobre una partícula que se desplaza en el espacio, y en la euleriana se expresan en todo el espacio, para todas las posibles partículas que pasen por todos los puntos del espacio. Existe una forma de relacionar ambas formulaciones que es mediante la derivada sustancial. Tomando el diferencial de la velocidad en x , u , se tiene que

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz. \quad (56)$$

Si consideramos movimientos diferenciales, se puede decir que los movimientos en las tres direcciones son $dx = u dt$, $dy = v dt$ y $dz = w dt$. Así, se puede definir la derivada total como

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (57)$$

Esto es lo que se denota como derivada sustancial de una propiedad (escalar o vectorial). En particular, de forma genérica se puede expresar como

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \quad (58)$$

La derivada sustancial con significado más directo es la aceleración. Ésta se puede escribir como

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\vec{v}. \quad (59)$$

1.3.1 Sistemas de referencia no inerciales

Todo lo que se ha discutido anteriormente es válido para aquellos sistemas de referencia estáticos o que se mueven con una velocidad uniforme. En el caso de que el sistema de referencia no sea como se ha indicado anteriormente, se llama no inercial y se caracteriza porque está sometido a aceleraciones y rotaciones. De esta forma, sea un sistema de referencia estático (x_1, y_1, z_1) y uno moviéndose (x_2, y_2, z_2) a lo largo de una trayectoria definida $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(t)$ y girando sobre sí mismo a una velocidad $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}(t)$. La velocidad resultante con respecto al sistema de referencia inercial será

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \frac{d\vec{r}_1}{dt} + \Omega \times \vec{r}_2, \quad (60)$$

es decir, la velocidad a la que se mueve la partícula con respecto al sistema inercial más la velocidad del propio sistema de referencia en movimiento con respecto al que está en reposo. Por otro lado su aceleración será

$$\vec{a}_1 = \frac{d\vec{v}_2}{dt} + \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_2 + \Omega \times (\Omega \times \vec{r}_2) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r}_2. \quad (61)$$

Los términos extra que aparecen en los sistemas no inerciales son

- $\frac{d\vec{v}_2}{dt}$ es la aceleración en el sistema de referencia no inercial.
- $\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2}$ es la aceleración de inercia.
- $2\Omega \times \vec{v}_2$ es la aceleración de Coriolis.
- $\Omega \times (\Omega \times \vec{r}_2)$ es la aceleración centrífuga.
- $\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r}_2$ es la aceleración provocada por la variación temporal de la velocidad de rotación del sistema no inercial.

1.3.2 Principales líneas fluidas en cinemática

Aquí describiremos las definiciones de las principales líneas fluidas que aparecen en el estudio de la cinemática.

Trayectoria

Es la línea que describe una partícula fluida en su movimiento. La definición matemática es

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(r, t), \quad (62)$$

$$t = 0, \quad \vec{r}(t = 0) = \vec{r}_0. \quad (63)$$

Por otro lado, la senda es la línea que une todas las posiciones por las que ha pasado una determinada partícula fluida.

Conceptos preliminares

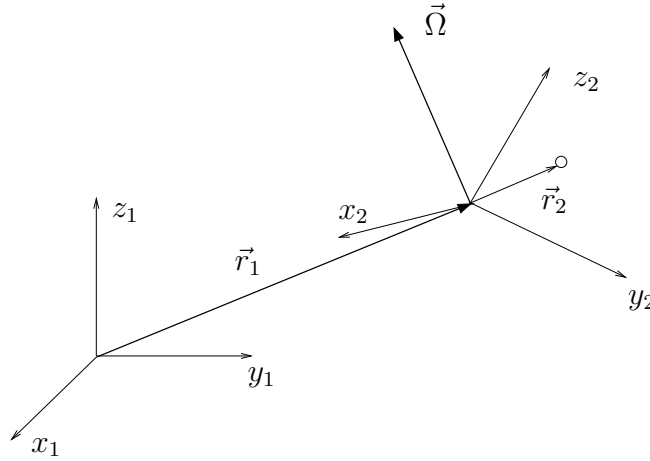


Figure 1.9: Sistema no inercial en movimiento y giro.

Traza

Es la línea que describen todas las partículas fluidas que pasan en cualquier instante por un punto del espacio. Estas son las líneas que se obtienen experimentalmente al inyectar colorante en ciertas posiciones de un experimento. Matemáticamente se describen como,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \quad (64)$$

$$t = 0, \quad \vec{r}(t = \tau) = \vec{r}_0. \quad (65)$$

Línea de corriente

Son las líneas que son paralelas a la velocidad en cada punto, para cada instante. Para flujos bidimensionales,

$$\frac{dx}{u(x, y, t)} = \frac{dy}{v(x, y, t)}. \quad (66)$$

1.3.3 Ejemplo:

Determinar la traza, trayectoria y senda del siguiente campo vectorial.

$$x_c = -5 + 5 \sin(t), \quad (67)$$

$$y_c = -5 + 5 \cos(t), \quad (68)$$

$$r = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}, \quad (69)$$

$$u = \frac{1 - e^{-r^2}}{r} \frac{y - y_c}{r}, \quad (70)$$

$$v = \frac{1 - e^{-r^2}}{r} \frac{x - x_c}{r}, \quad (71)$$

$$(72)$$

Código

```
close all
x=-10:1:10;
y = x;
[xx,yy] = meshgrid(x,y);
for t=0:0.1:10;
    x0 = -5+5*sin(t);
    y0 = -5+5*cos(t);
    r = sqrt((xx-x0).^2+(yy-y0).^2);
    V = (1-exp(-r.^2))./r;
    quiver(xx,yy,V.*(yy-y0)./r,-V.*(xx-x0)./r)
    hold on
    plot(x0,x0,'or')
    hold off
    pause(1)
end
```

Capítulo 2

Ecuaciones de conservación en Mecánica de Fluidos

En este capítulo se van a desarrollar las ecuaciones de conservación básicas para poder describir matemáticamente los problemas de Mecánica de Fluidos: conservación de la masa, de la cantidad de movimiento y de la energía. Antes se van a enunciar dos teoremas fundamentales que se necesitarán para poder demostrarlas, el teorema de Gauss y el del transporte de Reynolds.

2.1 Teorema de Gauss

El teorema de Gauss sirve para poder trasladar las ecuaciones de forma integral a forma diferencial. Básicamente indica que una integral de superficie definida en una superficie cerrada puede transformarse en una integral de volumen, cumpliendo la siguiente igualdad:

$$\int_S \phi \vec{n} dS = \int_V \nabla \phi dV. \quad (1)$$

2.2 Teorema del transporte de Reynolds

Considere un volumen de fluido arbitrario, fijo con respecto a un sistema de referencia que está sometido al campo de velocidad $\vec{v}(x, y, z, t)$ como se muestra en la figura 2.1. Sea ϕ una magnitud cualquiera (densidad, temperatura o momento lineal). Las variaciones de ϕ dentro de este volumen fluido a lo largo del tiempo serán debidas a que ϕ varía dentro del volumen y porque haya flujo de la variable ϕ a través de la superficie que engloba este volumen fluido, a la que llamaremos $S_f(t)$. Esto se puede expresar de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_f(t)} \phi dV &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{(\Phi_{II} + \Phi_{III})_{t+dt} - (\Phi_I + \Phi_{II})_t}{dt} = \\ \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{(\Phi_I + \Phi_{II})_{t+dt} - (\Phi_I + \Phi_{II})_t}{dt} &+ \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{(\Phi_{III})_{t+dt} - (\Phi_I)_{t+dt}}{dt}, \end{aligned} \quad (2)$$

donde Φ representa la cantidad completa de la propiedad ϕ en los volúmenes I, II y III ($\Phi = \int \phi dV$). El primer término es evidente que corresponde con la variación total de la cantidad ϕ en el volumen inicial suponiendo que V_f está anclado en el tiempo t . El segundo término será la cantidad de ϕ que se sale del volumen V_f anclado en t a través de la superficie S_2 (intersección del volumen II y III) y la cantidad de ϕ que entra por a través de la superficie

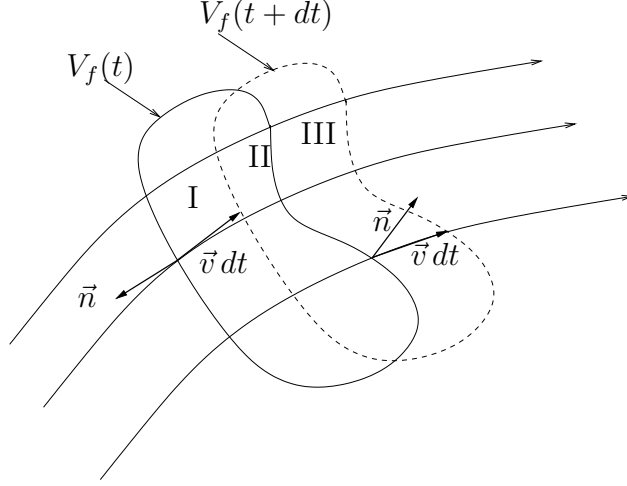


Figure 2.1: Partícula fluida dentro de un campo de velocidad \vec{v} conocido.

S_1 (la que engloba la zona izquierda de I, de tal forma que $S_f = S_1 + S_2$). Por tanto, sobre un volumen fluido se puede escribir,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f(t)} \phi dV = \int_{V_f(t)} \frac{d\phi}{dt} dV + \lim_{dt \rightarrow 0} \left(\int_{S_1} \phi \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_2} \phi \vec{v} \cdot \vec{n} dS \right) = \int_{V_f(t)} \frac{d\phi}{dt} dV + \int_{S_f} \phi \vec{v} \cdot \vec{n} dS. \quad (3)$$

Este teorema es muy útil cuando se aplica a volúmenes que no son volúmenes fluidos. Si se aplica a un volumen de control arbitrario que se desplaza a una velocidad conocida $\vec{v}_c(x, y, z, t)$, el teorema del transporte de Reynolds indica que

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \phi dV = \int_{V_c} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_{S_c} \phi \vec{v}_c \cdot \vec{n} dS. \quad (4)$$

Si en un instante ambos volúmenes coinciden (el de control y el de fluido),

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f} \phi dV = \int_{V_c} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_{S_c} \phi \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \frac{d}{dt} \int_{V_c} \phi dV + \int_{S_c} \phi (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} dS. \quad (5)$$

Se usará posteriormente esta forma de las ecuaciones para resolver posteriormente problemas de conservación en volúmenes de control.

2.3 Ecuación de conservación de la masa

Si se supone un volumen fluido cualquiera $V_f(t)$, la condición de que la masa se conserve implica que

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f(t)} \rho dV = 0, \quad (6)$$

donde $\rho(x, y, z, t)$ es la densidad del fluido. Esta ecuación puede ser aplicada a cualquier volumen de control, y por tanto,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV + \int_{S_c} \rho (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} dA = 0. \quad (7)$$

Para ver el significado físico de cada uno de los términos de la ecuación, supongan el caso del aire fluyendo a través de un tubo de área A como el mostrado en la figura 2.2. El aire es impulsado a una velocidad V_1 con una densidad ρ_1 y sale a una velocidad V_2 con una densidad ρ_2 . Como el volumen de control lo suponemos fijo, $\vec{v}_c = 0$, si se aplica la ecuación (7) quedaría obtener las integrales de superficie sobre las superficies que engloban el volumen.

$$\int_{S_1} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \rho_1 (V_1, 0) \cdot (-1, 0) A = -\rho_1 V_1 A \quad (8)$$

$$\int_{S_2} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \rho_2 (V_2, 0) \cdot (1, 0) A = \rho_2 V_2 A \quad (9)$$

$$\int_{S_i} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0. \quad (10)$$

La última integral es nula porque al no haber flujo, $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$. Por tanto queda que

$$\frac{d}{dt} (\rho A L) = \rho_1 V_1 A - \rho_2 V_2 A. \quad (11)$$

Físicamente, el término de la izquierda define variación de la cantidad de masa contenida en el volumen de control y los términos de la derecha corresponden con el flujo másico que entra y el que sale. Por lo tanto, si entra más flujo másico del que sale aumentará la masa que contiene el volumen de control. Es por esto que el primer término del teorema del transporte de Reynolds tiene el significado físico del almacenamiento de una propiedad en un volumen fluido, mientras que el segundo tiene en cuenta el flujo de esa cantidad debido a la velocidad del fluido a través de las paredes de éste. Por tanto, un fluido incompresible, cumplirá que toda la masa que entra es la misma que sale, y así el término de almacenamiento será nulo.

Aplicando el teorema del transporte de Reynolds a un volumen fluido se tiene que

$$\int_{V_f} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{S_f} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (12)$$

Usando el teorema de Gauss, se puede expresar todo en función de integrales de volumen,

$$\int_{V_f} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{V_f} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV = 0, \quad (13)$$

y de aquí se puede obtener la forma diferencial de la ecuación de conservación de la masa, que se conoce como ecuación de continuidad.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (14)$$

En caso de tener un fluido incompresible, $\rho = \text{constante}$, y la ecuación se simplifica a

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (15)$$

De la misma forma, usando la derivada sustancial se puede escribir como,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (16)$$

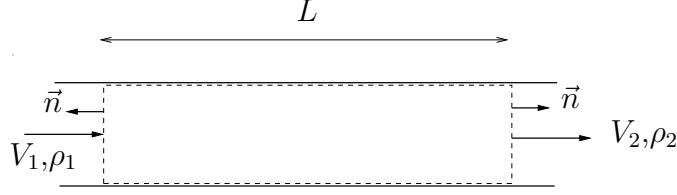


Figure 2.2: Volumen de control para analizar el flujo de gas a través de un tubo.

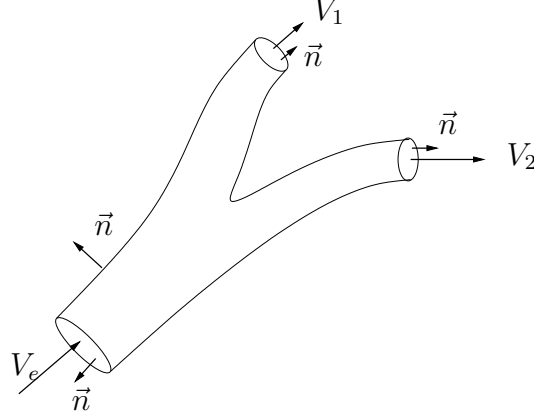


Figure 2.3: Volumen de control en una bifurcación.

2.3.1 Flujo en tubos de corriente o confinados

Supongan el flujo de un fluido incompresible a través de una bifurcación como la que se presenta en la figura 2.3. En esta bifurcación se pueden definir 4 superficies: La de entrada (e), las dos de salida (s_1 y s_2) y la superficie lateral. Como se ha discutido anteriormente, el flujo convectivo a través de la superficie lateral será nulo en dos casos concretos. Si la superficie lateral es una línea de corriente (línea tangente a la velocidad en todo momento), $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$. Otra posibilidad es que la superficie exterior sea una superficie sólida, y en este caso el flujo convectivo será nulo porque $\vec{v} = \vec{0}$ en dicha superficie. Por tanto, en este caso simplificado, la ecuación de continuidad quedará como

$$V_e s_e = V_1 s_1 + V_2 s_2. \quad (17)$$

Ejemplo: Aplicar la ecuación de conservación de la masa en forma integral para relacionar la altura $h(t)$ de líquido en el depósito de sección A con la velocidad de salida a través del orificio de sección A_s .

Para ello se usará en un principio el volumen estacionario ($\vec{v}_c = 0$) que se representa en la figura 2.4 (a). Lo descompondremos en 3 superficies, la superior (1), la de salida (s) y las laterales (l). La ecuación en el volumen de control quedará como,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV + \int_{S_c} \rho (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} dA = 0. \quad (18)$$

El primer término se puede integrar directamente obteniendo

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV = \rho A \frac{dh(t)}{dt}. \quad (19)$$

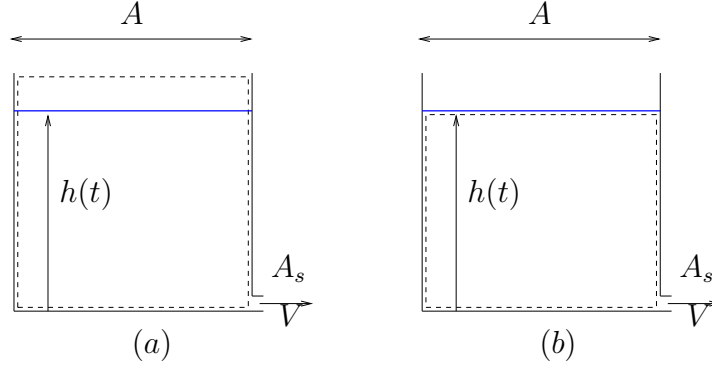


Figure 2.4: Vaciado de un depósito. Volumen de control fijo (a) o variable con el tiempo (b).

El segundo término se separa en las distintas superficies que componen el sistema.

$$\int_{S_1} \rho (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} dA = 0, \quad (20)$$

$$\int_{S_s} \rho (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} dA = \rho (V, 0) \cdot (1, 0) A_s = \rho V A_s. \quad (21)$$

$$\int_{S_i} \rho (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} dA = 0, \quad (22)$$

En la superficie 1 al no haber flujo la integral es nula y la de las superficies laterales será nula puesto que $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$. La ecuación que liga la altura y la velocidad de salida será por tanto,

$$A \frac{dh}{dt} = V A_s. \quad (23)$$

Otra forma de resolverlo sería tomar un volumen de control que se deformara con la misma velocidad que la superficie libre (ver figura 2.4). En este caso la integral sobre la superficie 1 sería nula también puesto que $\vec{v}_c = \vec{v} = \frac{dh}{dt}$ y el resultado final sería el mismo.

2.3.2 Ecuación de conservación de una especie química

En el caso de tener varias especies químicas u otras sustancias dentro del fluido, la ecuación de conservación de la masa pasa a ser

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f} \rho_i dV = \int_{V_f} \omega_i dV, \quad (24)$$

donde ρ_i es la densidad de la especie i y ω_i es la velocidad de producción de esta especie i . Generalmente se suele definir la fracción másica como

$$Y_i = \frac{\rho_i}{\rho}, \quad (25)$$

con ρ la densidad global de la mezcla. Claramente se verifica que

$$\sum_{i=1}^N Y_i = 1. \quad (26)$$

Utilizando Y_i en vez de ρ_i y aplicando el teorema del transporte de Reynolds se tiene que

$$\int_{V_f} \frac{d(\rho Y_i)}{dt} dV + \int_{S_f} \rho Y_i \vec{v}_i \vec{n} dS = \int_{V_f} \omega_i dV, \quad (27)$$

siend \vec{v}_i la velocidad macroscópica de la especie i en el medio. Definiendo la velocidad de difusión como $\vec{v}_{di} = \vec{v}_i - \vec{v}$ la ecuación anterior queda, una vez usado el teorema de Gauss como

$$\int_{V_f} \frac{d(\rho Y_i)}{dt} dV + \int_{V_f} \nabla \cdot (\rho Y_i \vec{v}_i) dV + \int_{V_f} \nabla \cdot (\rho Y_i \vec{v}_{di}) dV = \int_{V_f} \omega_i dV, \quad (28)$$

y por tanto la ecuación diferencial será

$$\frac{d(\rho Y_i)}{dt} + \nabla \cdot (\rho Y_i \vec{v}_i) + \nabla \cdot (\rho Y_i \vec{v}_{di}) = \omega_i. \quad (29)$$

Para determinar la velocidad de difusión se usa la ley fenomenológica conocida como ley de Fick, que indica que la velocidad de difusión másica de una especie en el seno de un fluido es proporcional al gradiente de concentraciones, y a la constante de proporcionalidad se le conoce como coeficiente de difusión másica D_i .

$$Y_i \vec{v}_{di} = -D_i \nabla Y_i. \quad (30)$$

Con esta definición final, la ecuación global queda como

$$\frac{d(\rho Y_i)}{dt} + \nabla \cdot (\rho Y_i \vec{v}_i) = \nabla \cdot (D_i \nabla Y_i) + \omega_i. \quad (31)$$

2.4 Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

Como se ha discutido en el capítulo anterior, la ecuación de cantidad de movimiento es el equivalente a la segunda ley de Newton para fluidos. De forma general, la variación del momento cinético en un volumen fluido será equivalente a la suma de las fuerzas que actúan sobre él,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f} \rho \vec{v} dV = \sum (\vec{F}_v + \vec{F}_s), \quad (32)$$

donde \vec{F}_v son las fuerzas de volumen y \vec{F}_s las fuerzas de superficie. Las primeras corresponden, como se discutió anteriormente, a las fuerzas que actúan sobre todas las partículas dentro del volumen fluido.

$$\vec{F}_v = \int_{V_f} \vec{f}_v dV. \quad (33)$$

Un ejemplo de ésta es la fuerza gravitatoria, que se define como

$$\vec{f}_v = \rho \vec{g}. \quad (34)$$

En caso de que el sistema de referencia fuera no inercial aparecerían las aceleraciones de inercia, que se representarán como unas fuerzas de volumen de expresadas de la siguiente forma,

$$\vec{f}_v = -\vec{a}_0 - \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}. \quad (35)$$

donde \vec{a}_0 y $\vec{\Omega}$ son la aceleración y velocidad de giro del sistema de referencia.

En el caso de las fuerzas de superficie se separarán aquellas que se ejerzan cuando el fluido está en reposo (presión) de aquellas que aparecen al moverse el fluido. Éstas se analizarán en más detalle en la siguiente sección.

2.4.1 *Relación entre tensiones y deformaciones*

Las partículas fluidas están sometidas a fuerzas en las superficies que provocarán deformaciones en ellas. Para el caso de las deformaciones, comenzaremos analizando el caso de un sólido deformable, para después extenderlo a un fluido. Supongamos que se pueden describir los desplazamientos de todos los puntos del medio como

$$\vec{\delta} = \xi(x, y, z, t)\vec{e}_x + \eta(x, y, z, t)\vec{e}_y. \quad (36)$$

Por tanto, conociendo los desplazamientos de un punto del volumen diferencial (el punto O que pasa a O') y suponiendo conocido el campo de desplazamientos (ξ y η) se puede determinar los desplazamientos de los puntos A' y C' . Al ser un problema lineal, se puede tomar como la descomposición de dos problemas, uno que provoca una variación de volumen, y otro que provoca una deformación de la partícula sin cambio de volumen (ver figura 2.5 (a) y (b)-(c)). Para el primer caso, el desplazamiento se puede obtener de la siguiente manera, suponiendo un desarrollo por Taylor en ambas direcciones,

$$O\vec{O}' = (\xi, \eta), \quad (37)$$

$$O\vec{C} = (\Delta x, 0) \quad (38)$$

$$(39)$$

Para determinar el movimiento de C a C' , habrá que obtener los desplazamientos ξ y η en C

$$\xi(x + \Delta x, y, z) = \xi(x, y, z) + \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x, \quad (40)$$

$$\eta(x + \Delta x, y, z) = \eta(x, y, z) + \frac{\partial \eta}{\partial x} \Delta x. \quad (41)$$

$$(42)$$

En esta última expresión η es constante y por tanto $\partial \eta / \partial x = 0$. Por tanto,

$$C\vec{C}' = (\xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x, \eta), \quad (43)$$

$$O'\vec{C}' = -O\vec{O}' + O\vec{C} + C\vec{C}' = (\frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x + \Delta x, 0). \quad (44)$$

De esta forma la deformación normal que determina el alargamiento en la dirección x quedará

$$\epsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x + \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (45)$$

y la deformación en y

$$\epsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y}. \quad (46)$$

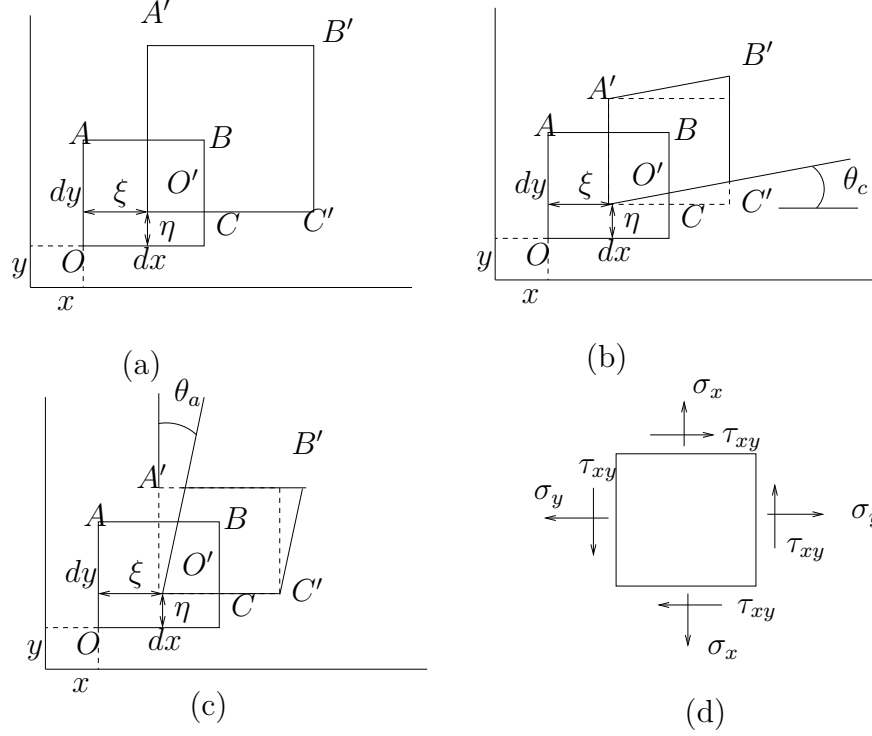


Figure 2.5: Deformación en un medio continuo que solo comporta un cambio de volumen (a), deformación en un medio continuo sin cambio de volumen (b) y equilibrio de fuerzas en este medio continuo (c).

El cambio de volumen será por tanto

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}. \quad (47)$$

Las deformaciones de cortadura se definen como la modificación angular que se produce entre dos lados inicialmente perpendiculares. En este caso será

$$\gamma_{xy} = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} (\theta_C + \theta_A). \quad (48)$$

Para calcular los ángulos se pueden obtener directamente de $O'\vec{C}'$ en la figura 2.5 (b) para una deformación en el ángulo θ_c . En este caso el valor de η no será constante y por tanto,

$$O'\vec{C}' = \left(\Delta x + \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x, \frac{\partial \eta}{\partial x} \Delta x \right). \quad (49)$$

El ángulo se podrá determinar como

$$\theta_c = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x} \Delta x}{\Delta x \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)} \simeq \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (50)$$

donde se ha hecho la hipótesis de pequeñas deformaciones. Haciendo lo mismo para θ_A [2.5 (c)] se tiene finalmente que

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}. \quad (51)$$

Ahora falta relacionar los esfuerzos normales con las deformaciones. Para ello, de la ley de Hooke sabemos que al aplicar una tensión normal en una probeta se produce una deformación lineal. La constante de proporcionalidad es el módulo de Young E (ver figura 2.5 (d)). Del mismo modo, al aplicar una deformación en la dirección y se produce una contracción en la dirección x que está controlada por el coeficiente de Poisson n .

$$\epsilon_x^0 = \frac{\sigma_x}{E}, \quad (52)$$

$$\epsilon_x' = -n \frac{\sigma_y}{E}, \quad (53)$$

$$\epsilon_x'' = -n \frac{\sigma_z}{E}. \quad (54)$$

La relación entre las deformaciones normales y las tensiones normales será por tanto,

$$\epsilon_x = \epsilon_x^0 + \epsilon_x' + \epsilon_x'' = \frac{1}{E}(\sigma_x - n(\sigma_y + \sigma_z)), \quad (55)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - n(\sigma_x + \sigma_z)), \quad (56)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - n(\sigma_x + \sigma_y)). \quad (57)$$

$$(58)$$

El módulo de Young, el de Poisson y el de cortadura se relacionan mediante el módulo de cortadura G ,

$$G = \frac{E}{2(1+n)}. \quad (59)$$

Esto proviene de relacionar las tensiones y las deformaciones en direcciones principales. Se deja la demostración al lector interesado. De esta forma, la deformación tangencial se relaciona con la tensión de cortadura mediante el módulo de deformación tangencial G ,

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}. \quad (60)$$

Usando las expresiones anteriores, la dilatación de volumen e se puede escribir como

$$e = \frac{1-2n}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (61)$$

Se define la media aritmética de las tensiones normales como

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3} \frac{E}{1-2n} e. \quad (62)$$

La tensión normal se puede escribir como

$$\sigma_x = E\epsilon_x + n(\sigma_y + \sigma_z) = E\epsilon_x + n \frac{E}{1-2n} e - n\sigma_x. \quad (63)$$

$$\sigma_x(1+n) = E \left(\epsilon_x + \frac{n}{1-2n} e \right). \quad (64)$$

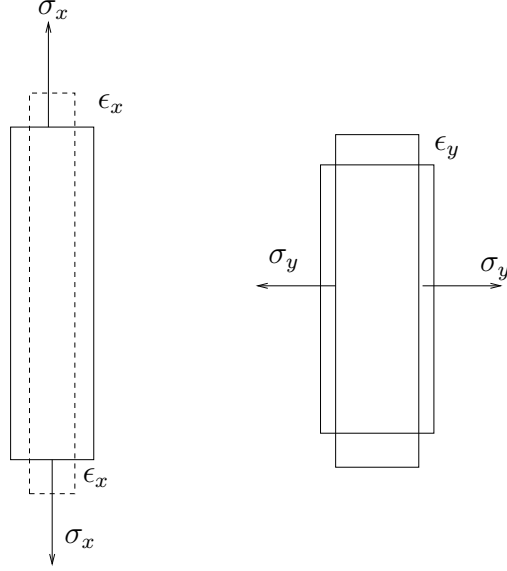


Figure 2.6: Efecto de los esfuerzos normales sobre las deformaciones.

Restando a ambos lados de la ecuación $\bar{\sigma}$ se obtiene

$$\sigma_x - \bar{\sigma} = 2G \left(\epsilon_x - \frac{e}{3} \right), \quad (65)$$

$$\sigma_y - \bar{\sigma} = 2G \left(\epsilon_y - \frac{e}{3} \right), \quad (66)$$

$$\sigma_z - \bar{\sigma} = 2G \left(\epsilon_z - \frac{e}{3} \right). \quad (67)$$

Estas son las relaciones para un sólido elástico. En el caso de los fluidos Newtonianos, cumplen las mismas relaciones, pero en vez de ser proporcionales a los campos de deformaciones lo son a los campos de velocidad de deformación (la derivada temporal del campo de deformación), y a esa constante de proporcionalidad se le llama viscosidad.

$$\sigma_x - \bar{\sigma} = 2\mu \frac{\partial \epsilon_x}{\partial t} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial e}{\partial t}. \quad (68)$$

El término $\partial \epsilon_x / \partial t$ se le denomina velocidad de deformación, y será

$$\frac{\partial \epsilon_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (69)$$

donde u es la velocidad en la dirección x . La cantidad $\partial e / \partial t$ es la variación de volumen en función del tiempo,

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{v}. \quad (70)$$

Por tanto, las componentes normales quedarán,

$$\sigma_x = \bar{\sigma} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{v}, \quad (71)$$

$$\sigma_y = \bar{\sigma} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{v}, \quad (72)$$

$$\sigma_z = \bar{\sigma} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{v}, \quad (73)$$

y para los esfuerzos tangenciales,

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (74)$$

Ahora queda saber cómo se relacionan la presión termodinámica p y $\bar{\sigma}$.

1. Una de las opciones, proveniente de la experimentación con fluidos incompresibles es que los efectos viscosos están completamente determinados por la viscosidad μ que relaciona el tensor de esfuerzos y el de deformaciones. En este caso se tiene una analogía completa con las leyes de Hooke y se puede tomar

$$\bar{\sigma} = -p, \quad (75)$$

donde el signo negativo se refiere a esfuerzos de compresión sobre el fluido, ya que por definición la normal sobre la partícula fluida es hacia fuera.

2. La segunda opción es usar la evidencia experimental de que los efectos de compresibilidad cambian esta relación. Aparece por tanto una nueva viscosidad volumétrica, μ_v que determina el valor de $\bar{\sigma}$,

$$\bar{\sigma} = -p + \mu_v \nabla \cdot \vec{v}. \quad (76)$$

Este último término sólo es importante cuando el la variación del volumen en función del tiempo es muy grande.

Por tanto la relación entre tensiones y deformaciones será, en formato vectorial

$$\vec{\tau} = -p\vec{I} + 2\mu\vec{\gamma}' + \left(\mu_v - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \cdot \vec{v}\vec{I}, \quad (77)$$

con el tensor de deformaciones definido en el capítulo anterior.

2.4.2 Ecuaciones de Navier Stokes

De esta forma, si se toman las expresiones anteriores, las ecuaciones completas quedarán,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f} \rho \vec{v} dV = - \int_{S_f} p \vec{n} dS + \int_{S_f} \vec{\tau}' \cdot \vec{n} dS + \int_{V_f} \rho \vec{f}_v dV. \quad (78)$$

Usando el teorema del transporte de Reynolds,

$$\int_{V_f} \frac{d\rho \vec{v}}{dt} dV + \int_{S_f} \rho \vec{v} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = - \int_{S_f} p \vec{n} dS + \int_{S_f} \vec{\tau}' \cdot \vec{n} dS + \int_{V_f} \rho \vec{f}_v dV. \quad (79)$$

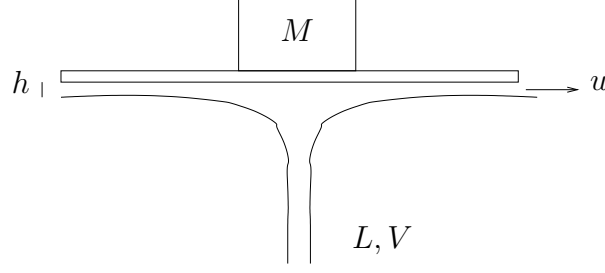


Figure 2.7: Peso sostenido por un chorro sobre una superficie.

Usando ahora el teorema de Gauss se puede escribir la ecuación integrada para un volumen fluido, quedando

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v} \vec{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \overline{\overline{\tau}} + \rho \vec{f}_v, \quad (80)$$

ecuación que se conoce como la ecuación de Navier-Stokes. Expresándola usando la derivada sustancial, se tiene que

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \overline{\overline{\tau}} + \rho \vec{f}_v, \quad (81)$$

Por último, en caso de querer usar las ecuaciones integrales sobre un volumen de control, estas quedan como,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \vec{v} dV + \int_{S_c} \rho \vec{v} (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} dS = - \int_{S_c} p \vec{n} dS + \int_{S_c} \overline{\overline{\tau}} \vec{n} dS + \int_{V_c} \rho \vec{f}_v dV. \quad (82)$$

A veces interesa tener la presión manométrica en lugar de la absoluta. Haciendo uso de que en un volumen cerrado,

$$\int_{S_c} p_a \vec{n} dS = 0, \quad (83)$$

se puede restar a la ecuación anterior obteniendo

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \vec{v} dV + \int_{S_c} \rho \vec{v} (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} dS = - \int_{S_c} (p - p_a) \vec{n} dS + \int_{S_c} \overline{\overline{\tau}} \vec{n} dS + \int_{V_c} \rho \vec{f}_v dV. \quad (84)$$

Ejemplo: Se soporta el peso de un objeto de masa M mediante un chorro de agua bidimensional de área de salida L que impacta con una superficie que lo sostiene (ver figura 2.7). Determinar el peso que se puede soportar en función de la velocidad de salida del chorro V .

El volumen de control será el formado por la entrada del chorro (superficie 1), la salida de los chorros (superficies 2 y 3) y el contacto del chorro con la placa (superficie 4). Al ser un fluido incompresible, y el volumen de control estar fijo ($\vec{v}_c = 0$), la ecuación de continuidad quedará como,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV + \int_{S_c} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0, \quad (85)$$

donde el primer término será nulo al ser la densidad constante y no variar la masa. Por tanto, habrá que hacer el balance en las cuatro superficies,

$$\int_{S_1} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \rho(0, V) \cdot (0, -1)A = -\rho V L, \quad (86)$$

$$\int_{S_2} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \rho(-u, 0) \cdot (-1, 0)A = \rho u h, \quad (87)$$

$$\int_{S_3} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \rho(u, 0) \cdot (1, 0)A = \rho u h, \quad (88)$$

$$\int_{S_4} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0, \quad (89)$$

donde la última integral es nula al no atravesar la superficie y por tanto $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$. Finalmente, queda que

$$V L = 2 u h. \quad (90)$$

Se puede aplicar la ecuación de cantidad de movimiento en forma integral, para el mismo volumen de control. El término de almacenamiento será nulo. Al ser un sistema abierto, la presión es aproximadamente constante e igual a la atmosférica. Del mismo modo, se desprecian las fuerzas de volumen (gravedad) y las fuerzas viscosas. La ecuación aplicada al volumen de control queda como

$$\int_{S_c} \rho \vec{v} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = - \int_{S_c} (p - p_a) \vec{n} dS. \quad (91)$$

Como se ha indicado, todas las integrales de presión son nulas en las superficies 1,2 y 3, puesto que $p \approx p_a$. La integral de la presión sobre la placa es la fuerza que se quiere calcular. Por tanto,

$$\vec{F} = \int_{S_c} (p - p_a) \vec{n} dS, \quad (92)$$

donde se le ha cambiado el signo, porque la expresión que aparece en las ecuaciones corresponde con la fuerza que la placa ejerce sobre el fluido, y nosotros queremos la contraria. De esta forma, habrá que realizar las integrales de la parte izquierda de la igualdad. La integral sobre la superficie 4 será nula puesto que $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$. Las demás serán,

$$\int_{S_1} \rho \vec{v} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \rho(0, V)(0, V) \cdot (0, -1)A = -\rho (0, V^2) L, \quad (93)$$

$$\int_{S_2} \rho \vec{v} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \rho(-u, 0)(-u, 0) \cdot (-1, 0)A = \rho (-u^2, 0) h, \quad (94)$$

$$\int_{S_3} \rho \vec{v} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \rho(u, 0)(u, 0) \cdot (1, 0)A = \rho (u^2, 0) h. \quad (95)$$

Finalmente se obtiene que

$$\vec{F} = \rho (0, V^2) L. \quad (96)$$

Como siempre, se comprueban las unidades que son de fuerza por unidad de longitud perpendicular, y la dirección es hacia arriba, que tiene el sentido físicamente esperado. Para saber qué velocidad hay que imponer para sostener una masa M , se iguala la fuerza al peso de ésta,

$$V = \sqrt{\frac{M g}{\rho L}}. \quad (97)$$

2.5 Conservación de la energía.

El principio de conservación de la energía se puede enunciar de la siguiente manera: La variación de la energía total sobre una partícula fluida (interna más la cinética) es igual al trabajo por unidad de tiempo de las fuerzas másicas y de fricción, más el calor que intercambia a través de sus superficies y al calor generado o absorbido en el volumen fluido. Esto se escribe matemáticamente como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_f} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV = \int_{V_f} \rho \vec{f}_v \cdot \vec{v} dV - \int_{S_f} p \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_f} \vec{v} \cdot \overline{\overline{\tau}} \cdot \vec{n} dS \\ - \int_{S_f} \vec{Q} \cdot \vec{n} ds + \int_{V_f} Q_v dV. \end{aligned} \quad (98)$$

En caso de utilizar un volumen de control, la parte izquierda de la igualdad quedaría como

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV + \int_{S_c} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} dS. \quad (99)$$

El calor evacuado a través de la superficie fluida se determina mediante la ley fenomenológica conocida como la ley de Fourier, que indica que el calor es proporcional a la diferencia de temperatura, con esta constante de proporcionalidad llamada k que es la conductividad térmica.

$$\vec{Q} = -k \nabla T. \quad (100)$$

El signo negativo es para tener en cuenta que la pendiente negativa proporciona calores positivos. El signo menos en el calor superficial es debido a que la normal es hacia afuera y hemos de determinar el calor que actúa sobre el fluido, y por tanto, que entra en la partícula fluida.

Usando el teorema del transporte de Reynolds junto con el teorema de Gauss se puede obtener la ecuación diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) + \nabla \cdot \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) \vec{v} \right] \quad (101)$$

$$= \rho \vec{f}_v \cdot \vec{v} + \nabla \cdot (-p \vec{v}) + \nabla \cdot (\overline{\overline{\tau}} \cdot \vec{v}) - \nabla \cdot \vec{Q} + Q_v. \quad (102)$$

Por último, se van a analizar una particularidad de las ecuaciones, que es la fricción viscosa. Para ello, se obtiene la ecuación de la energía mecánica multiplicando por \vec{v} la ecuación de Navier Stokes.

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = -\vec{v} \cdot \nabla p + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \overline{\overline{\tau}}) + \vec{v} \cdot \rho \vec{f}_v. \quad (103)$$

Una vez desarrollada esta ecuación se sustrae de la ecuación de la energía total y tendremos la ecuación que rige la energía interna.

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p \nabla \cdot \vec{v} + \overline{\overline{\tau}} : \nabla \vec{v} - \nabla \cdot \vec{Q} + Q_v. \quad (104)$$

Esta ecuación se puede ver como una generalización del primer principio de la termodinámica para volúmenes fluidos. La variación total de la energía cinética vista desde un observador lagrangiano es el calor que entra en la partícula debido a la generación de calor volumétrica, al calor que entra por las superficies o al calor generado por la fricción viscosa, que en general es muy pequeño, menos el trabajo generado por las fuerzas de expansión (el equivalente a $p dv$ o $p d(1/\rho)$). El doble producto tensorial marcado como dos puntos y definido como $\overline{\overline{\tau}} : \nabla \vec{v}$ se realiza haciendo la suma del producto elemento a elemento de ambos tensores y define la parte de la fricción viscosa que se convierte en calor y se le denomina función de disipación viscosa de Raileigh. Generalmente se desprecia puesto que es órdenes de magnitud más pequeña que los demás términos de la ecuación de conservación de la energía.

Ejemplo: La cámara de combustión de un cohete supersónico tiene a la salida una tobera convergente-divergente como se esquematiza en la figura 2.8 con area a la salida A_s . A la cámara entran un gasto G_c de combustible y un gasto G_o de oxígeno (ambos constantes) que reaccionan químicamente produciendo un calor total Q por unidad de tiempo. Como consecuencia se obtienen unos productos de combustión a una presión y temperatura elevadas que se aceleran en la tobera y salen de la misma a una velocidad supersónica V_s y a una presión p_s que, en general, no es igual a la presión atmosférica p_a .

Se supone que los gases producto de la combustión se comportan como un gas perfecto de constante R_g y relación de calores específicos γ .

Aplicando las leyes de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía en forma integral calculen el empuje del cohete en función de la presión a la salida p_s y de los datos del problema (Q, G_o, G_c, p_a, A_s y γ). Para ello hagan las siguientes aproximaciones: velocidad y temperatura de entrada de combustible y oxidante despreciables frente a V_s y T_s , respectivamente; fuerzas másicas y de viscosidad despreciables; cámara aislada térmicamente, y magnitudes fluidas uniformes a la salida.

Supongamos que a la entrada el combustible y el oxidante tienen unas velocidades V_1 y V_2 , unas densidades ρ_1 y ρ_2 y unas secciones de entrada A_1 y A_2 respectivamente. El sistema lo descompondremos en 4 superficies. La del entrada de combustible 1, la de entrada del oxidante 2, la de salida s y las laterales. Aplicando la ecuación de conservación de la masa en forma integral, suponiendo el problema estacionario y que las magnitudes son uniformes en todas las superficies de entrada y salida (para facilitar el cálculo de las integrales),

$$\int_{S_1} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \rho_c(0, -V_1) \cdot (0, 1)A_1 = -\rho_c V_1 A_1 = -G_c, \quad (105)$$

$$\int_{S_2} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \rho_o(0, V_2) \cdot (0, -1)A_2 = -\rho_o V_2 A_2 = -G_o, \quad (106)$$

$$\int_{S_s} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \rho_s(V_s, 0) \cdot (1, 0)A_s = \rho_s V_s A_s, \quad (107)$$

$$\int_{S_l} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0, \quad (108)$$

donde la última integral es nula por no haber flujo que atraviese. Finalmente queda que

$$G_c + G_o = \rho_s V_s A_s. \quad (109)$$

Aplicando la ecuación de cantidad de la energía, nos indican que todos los términos que no tienen flujo serán nulos $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$, las presiones a la entrada de combustible y oxidante son

despreciables, el flujo es estacionario, flujo ideal (viscosidad despreciable). Todo esto hace que la ecuación de la energía quede reducida a

$$\int_{S_c} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_c} p \vec{n} dS + Q, \quad (110)$$

donde se ha supuesto que el calor introducido en todo el volumen es tal que

$$\int_{V_c} Q_r dV = Q. \quad (111)$$

Pasando el término de la presión a la izquierda y haciendo uso de la definición de la entalpía $h = e + p/\rho$,

$$\int_{S_c} \rho (h + v^2) \vec{v} \cdot \vec{n} dS = Q. \quad (112)$$

Simplemente habrá que calcular estas integrales en todas las superficies fluidas. Como nos indican que las velocidades y temperaturas de entrada del combustible y del oxidante son despreciables y en las paredes laterales no hay flujo, la integral queda reducida sólo a una,

$$\int_{S_c} \rho (h + v^2) \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \rho_s \left(c_p T_s + \frac{V_s^2}{2} \right) (V_s, 0) \cdot (1, 0) A_s = \rho_s \left(c_p T_s + \frac{V_s^2}{2} \right) V_s A_s. \quad (113)$$

Haciendo uso de la ecuación de continuidad,

$$Q = (G_o + G_c) \left(c_p T_s + \frac{V_s^2}{2} \right). \quad (114)$$

Por último habrá que aplicar la ecuación de cantidad de movimiento para calcular el empuje. Suponemos flujo estacionario e ideal, las velocidades a la entrada y a la salida despreciables, por lo que sólo quedarán los términos convectivos en la salida (las paredes laterales son nulos por no existir flujo) y las integrales de presión en las paredes y la salida:

$$\int_{S_s} \rho \vec{v} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \rho_s (V_s, 0) ((V_s, 0) \cdot (1, 0)) A_s = (\rho_s V_s^2 A_s, 0), \quad (115)$$

$$\int_{S_s} (p - p_a) \vec{n} dS = ((p_s - p_a) A_s, 0), \quad (116)$$

$$\int_{S_s} (p - p_a) \vec{n} dS = \vec{E}. \quad (117)$$

La última integral indica que las fuerzas de presión integradas en todas las paredes laterales corresponden al empuje que se quiere calcular. Haciendo uso de nuevo de la ecuación de continuidad se tiene que

$$E_x = -(p_s - p_a) A_s - (G_o + G_c) V_s. \quad (118)$$

2.6 Ejercicios de Volúmenes de control

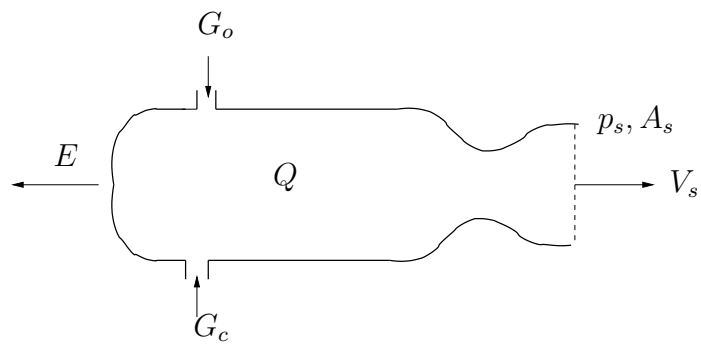


Figure 2.8: Empuje en un cohete supersónico.

Capítulo 3

Números adimensionales

Generalmente, las ecuaciones de mecánica de fluidos no se usan de forma dimensional. Se toma una serie de valores característicos, que adimensionalizan el problema. Supongamos por ejemplo que se usa una velocidad característica V_c , una longitud característica L_c , un tiempo característico t_c , una densidad característica ρ_c , una presión característica p_c y una temperatura característica T_c . Usaremos para la demostración las ecuaciones para un gas de parámetros constantes (difusividades y calores específicos constantes). Las nuevas variables adimensionales serán,

$$\vec{v}^* = \frac{\vec{v}}{V_c}, \quad \vec{r}^* = \frac{\vec{r}}{L_c}, \quad t^* = \frac{t}{t_c}, \quad (1)$$

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_c} \quad p^* = \frac{p}{p_c}, \quad T^* = \frac{T}{T_c}, \quad (2)$$

Para facilitar las deducciones, se supone que la única fuerza másica presente es la gravedad, de valor $\vec{f}_v = -g\vec{e}_x$, que el calor viene controlado por la ley de Fourier $\vec{q} = -k\nabla T$ y que el fluido se puede suponer incompresible (aunque sea un gas) y por tanto,

$$\vec{\tau} = \mu (\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^T), \quad \nabla \cdot \vec{\tau} = \mu \nabla^2 \vec{v} + \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) = \mu \nabla^2 \vec{v}. \quad (3)$$

De esta forma, las ecuaciones de conservación de masa, momento y energía quedarán como

$$\frac{\rho_c}{t_c} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_c V_c}{L_c} \nabla \cdot (\rho^* \vec{v}^*) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\rho_c V_c}{t_c} \frac{\partial (\rho^* \vec{v}^*)}{\partial t^*} + \frac{\rho_c V_c^2}{L_c} \nabla \cdot (\rho^* \vec{v}^* \vec{v}^*) = -\frac{p_c}{L_c} \nabla p^* + \frac{\mu V_c}{L_c^2} \nabla^2 \vec{v}^* - \rho_c g \vec{e}_z, \quad (5)$$

$$\frac{\rho_c c_v T_c}{t_c} \rho^* \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_c V_c c_v T_c}{L_c} \rho^* \vec{v}^* \nabla T^* = -\frac{p_0 V_c}{L_c} p^* \nabla \cdot \vec{v}^* + \frac{\mu V_c^2}{L_c^2} \Phi + \frac{k T_c}{L_c^2} \nabla^2 T^*. \quad (6)$$

Haciendo unitarios los términos convectivos (dividiendo todos los demás por el coeficiente que tienen delante $\rho V_c^2/L_c$), se tiene que

$$\frac{L_c}{V_c t_c} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla \cdot (\rho^* \vec{v}^*) = 0, \quad (7)$$

$$\frac{L_c}{V_c t_c} \frac{\partial (\rho^* \vec{v}^*)}{\partial t^*} + \nabla \cdot (\rho^* \vec{v}^* \vec{v}^*) = -\frac{p_c}{\rho_c V_c^2} \nabla p^* + \frac{\mu}{\rho_c V_c L_c} \nabla^2 \vec{v}^* + \frac{g L_c}{V_c^2} \rho^* \vec{e}_z, \quad (8)$$

$$\frac{L_c}{V_c t_c} \rho^* \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \rho^* \vec{v}^* \cdot \nabla T^* = -\frac{p_0}{\rho_c c_v T_c} p^* \nabla \cdot \vec{v}^* + \frac{\mu V_c}{\rho_c c_v T_c L_c} \Phi + \frac{k}{\rho_c c_v V_c L_c} \nabla^2 T^*. \quad (9)$$

Los parámetros que multiplican las ecuaciones tienen nombre propio y se detallan a continuación:

- **Strouhal:** Representa la relación entre el tiempo característico de variación de las magnitudes fluidas y el tiempo de residencia. Indica cuándo los términos temporales de las ecuaciones son importantes. Si $St \ll 1$, el flujo es estacionario.

$$St = \frac{L_c}{V_c t_c}. \quad (10)$$

- **Euler:** Representa la relación entre las fuerzas de presión y las fuerzas de inercia.

$$Eu = \frac{p_c}{\rho_c V_c^2}. \quad (11)$$

En el caso de que el fluido sea un gas ideal, $p_c/\rho_c = R_g T_c$ y por la definición de la velocidad del sonido $a_c = \sqrt{\gamma R_g T_c}$, se tiene que

$$Eu = \frac{p_c}{\rho_c V_c^2} = \frac{R_g T_c \gamma}{V_c^2 \gamma} = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{M^2}. \quad (12)$$

Esto nos lleva a definir un nuevo número adimensional,

- **Mach:** Relaciona la velocidad del flujo con respecto a la velocidad del sonido en el medio.

$$M = \frac{V_c}{a_c}, \quad (13)$$

de tal forma que si $M < 1$ al flujo se le llama subsónico y si $M > 1$ al flujo se le llama supersónico.

- **Reynolds:** Representa la importancia entre las fuerzas viscosas y las fuerzas de inercia. Para $Re \gg 1$ el flujo puede considerarse ideal, y para $Re \ll 1$ se pueden despreciar los términos de inercia.

$$Re = \frac{\rho_c V_c L_c}{\mu}. \quad (14)$$

- **Número de Froude:** Mide la importancia de las fuerzas de inercia frente a las gravitatorias. Es muy importante en flujos de ondas gravitatorias (ríos u océanos).

$$Fr^2 = \frac{V_c^2}{g L_c}. \quad (15)$$

- **Peclet:** Mide la relación entre la convección de energía interna y la conducción de ésta en el fluido.

$$Pe = \frac{\rho_c L_c V_c c_v}{K}. \quad (16)$$

Este número está relacionado con el número de Reynolds mediante el número de **Prandtl** ($Pe = Re Pr$) que mide la relación entre la difusividad térmica y la viscosa, $Pr = \nu/\alpha$. Estos parámetros se definen como

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \quad \alpha = \frac{K}{\rho c_v}, \quad (17)$$

y tienen unidades de m^2/s .

Para el caso de la difusión másica, al adimensionalizar se tiene que

$$\frac{L_c}{V_c t_c} \rho^* \frac{\partial Y_i}{\partial t^*} + \rho^* \bar{v} \nabla Y_i = \frac{D_i}{V_c L_c} \nabla^2 Y_i, \quad (18)$$

que permite definir los números adimensionales relacionados con el transporte másico.

- **Schmidt**: Relaciona la difusividad viscosa y la másica,

$$Sc_i = \frac{\nu}{D_i}. \quad (19)$$

Por tanto,

$$\frac{V_c L_c}{D_i} = Re Sc. \quad (20)$$

- **Lewis**: Número adimensional que relaciona la difusividad másica frente a la difusividad térmica.

$$Le = \frac{\alpha}{D_i}. \quad (21)$$

Para casi la totalidad de problemas se suele usar $p_c = \rho_c V_c^2$, y las ecuaciones de conservación adimensionales quedan,

$$St \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla \cdot (\rho^* \vec{v}^*) = 0, \quad (22)$$

$$St \frac{\partial(\rho^* \vec{v}^*)}{\partial t^*} + \nabla \cdot (\rho^* \vec{v}^* \vec{v}^*) = -\nabla p^* + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{v}^* + \frac{1}{Fr^2} \rho^* \vec{e}_z, \quad (23)$$

$$St \rho^* \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \rho^* \vec{v}^* \nabla T^* = -p^* \nabla \cdot \vec{v}^* + \frac{1}{Re Pr} \nabla^2 T^*. \quad (24)$$

Capítulo 4

Fluidostática

4.1 Introducción

La fluidostática consiste en el estudio de los fluidos que se encuentran en reposo o en movimiento uniforme. Para ello se simplifican las ecuaciones de cantidad de movimiento y se incluye la definición de potencial de fuerzas másicas.

4.2 Ecuaciones de fluidostática

El potencial de fuerzas másicas es un artefacto matemático que permite simplificar las ecuaciones de Navier-Stokes, incluyendo dichas fuerzas junto con la presión. Partimos de las ecuaciones de Navier-Stokes en las que hacemos que la velocidad sea nula, y por tanto,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$0 = -\nabla p + \rho \vec{f}_v. \quad (2)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \nabla(k\nabla T) + Q_r. \quad (3)$$

$$(4)$$

Junto con estas ecuaciones se necesitan ecuaciones de cierre para la energía interna $e = e(\rho, T)$ y una ecuación constitutiva del gas $p = p(\rho, T)$.

Se define el potencial de fuerzas másicas como $\vec{f}_v = -\nabla U$, teniendo en cuenta que las fuerzas que pueden derivar de un potencial son la gravedad y todas las fuerzas de inercia excepto la de Coriolis.

$$\vec{f}_v = \vec{g} - \vec{a}_0 - \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{x} - \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{x}. \quad (5)$$

donde no se ha incluido la fuerza de Coriolis puesto que su valor es $2\vec{\Omega} \cdot \vec{v}$ puesto que $\vec{v} = 0$.

De ahí se puede obtener por integración directamente el potencial de fuerzas másicas,

$$U = -\vec{g} \cdot \vec{x} + \vec{a}_0 \vec{x} + (\vec{\Omega} \times \vec{x})^2/2. \quad (6)$$

Suponiendo que no hay calor añadido al sistema y que por tanto la energía interna permanece constante, $e = \text{constante}$, se puede resolver la ecuación de conservación del momento

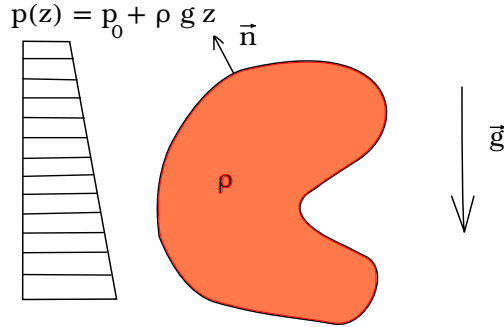


Figure 4.1: Cuerpo sumergido en un fluido en reposo, al que sólo afecta la gravedad.

mediante la definición de la función de barotropía,

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla w, \quad w = \int_p \frac{dp}{\rho(p)}. \quad (7)$$

Una vez definida esta ecuación se puede escribir

$$\nabla(w + U) = 0, \quad w + U = C(t), \quad (8)$$

donde C es una constante que puede depender de forma general del tiempo a través de las condiciones de contorno.

4.3 Hidrostática

En el caso de tener un líquido, ρ es constante por ser incompresible, y se puede integrar de forma simple.

$$\nabla(p + \rho U) = 0, \quad (9)$$

cuya solución es $p + \rho U = \text{constante}$.

4.4 Fuerza sobre un cuerpo sumergido. Principio de Arquímedes

Al tener un cuerpo sumergido en un fluido en reposo de densidad ρ , como el que se muestra en la figura 4.1, se puede calcular de forma sencilla mediante fluidostática. Las fuerzas que se ejercen sobre el objeto son debidas sólo a la presión, y si se define la normal hacia fuera del mismo, la fuerza ha de tener un signo negativo. Por la ecuación de fluidostática, la fuerza será la integral de volumen de las fuerzas másicas que actúan sobre el objeto,

$$\vec{F} = - \int_S p \vec{n} dS = - \int_V \nabla p dV = - \int_V \rho \vec{f}_v dV. \quad (10)$$

Si suponemos que la única fuerza másica es la gravedad, se puede escribir (suponiendo la gravedad constante),

$$\vec{F} = - \int_V \rho \vec{g} dV = -\rho V \vec{g}, \quad (11)$$

cuyo resultado se denomina *Empuje*, y es una fuerza dirigida en el sentido opuesto a la gravedad y de valor igual al peso del fluido desalojado.

Capítulo 5

Soluciones laminares a las ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones de Navier-Stokes junto con la de continuidad forman un sistema de ecuaciones en derivadas parciales no lineales cuya resolución generalmente necesita del uso de herramientas numéricas. Sin embargo, existen ciertos casos donde se pueden encontrar soluciones analíticas que permiten resolver ciertos problemas de forma sencilla. Estos son los flujos unidireccionales.

5.1 Flujos unidireccionales

Son flujos unidireccionales aquellos que se mueven en una dirección del espacio. Viendo el flujo de un líquido (incompresible) sobre una superficie que se muestra en la figura 5.1 se puede decir que $\vec{v} = u(x, y) \vec{e}_x$. Suponemos en todos los casos flujo estacionario para simplificar las ecuaciones. De la ecuación de continuidad se tiene

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

y por tanto $u = u(y)$. Para las ecuaciones de momento se suele usar la aproximación de que las fuerzas de volumen derivan de un potencial, que matemáticamente se escribe como

$$\vec{f}_v = -\nabla U, \quad (2)$$

donde U es la función potencial. Si la gravedad es $\vec{g} = -g\vec{e}_y$, su función potencial es $U = gy$. Así, la ecuación de cantidad de movimiento se escribe en forma vectorial como

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla(p + \rho U) + \mu \nabla^2 \vec{v}. \quad (3)$$

Aplicándola al caso concreto de la figura 5.1, suponiendo que el flujo es estacionario se tiene que

$$0 = -\frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (4)$$

$$0 = -\frac{\partial(p + \rho U)}{\partial y} \quad (5)$$

De la segunda ecuación se obtiene la dependencia de la presión en la vertical, y por tanto $p + \rho U \neq f(y)$. Se define la presión reducida como

$$Pr = -\frac{\partial p + \rho U}{\partial x}, \quad (6)$$

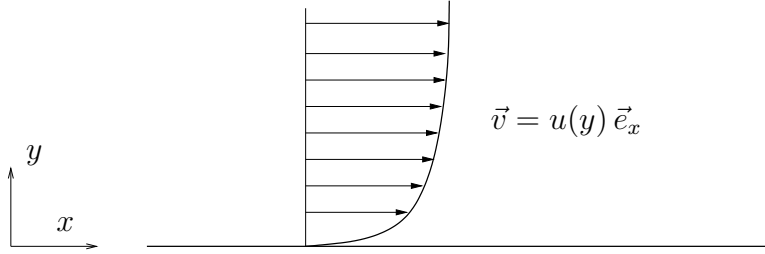


Figure 5.1: Flujo unidireccional sobre una superficie.

que no depende de y . La ecuación final a resolver será

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -Pr. \quad (7)$$

5.1.1 Flujo de Couette

El flujo de Couette es el flujo originado entre dos placas paralelas separadas una distancia h , cuando una de ellas se mueve a velocidad constante V como puede observarse en la figura 5.2. La presión reducida será nula puesto que el movimiento se origina por el desplazamiento de la placa superior ($Pr = 0$). Se resolverá la ecuación (7) junto con las condiciones de contorno,

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (8)$$

$$u(0) = 0, \quad (9)$$

$$u(h) = V. \quad (10)$$

La integral de la ecuación es

$$u(y) = Ay + B, \quad (11)$$

con A y B constantes de integración. Aplicando las condiciones de contorno se tiene que

$$A = \frac{V}{h}, \quad B = 0. \quad (12)$$

Esto hace que el perfil sea lineal desde la zona parada hasta la zona en movimiento. Un dato interesante desde el punto de vista de la aplicación de los resultados es el cálculo del caudal creado por este flujo. La definición de caudal es

$$Q = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS. \quad (13)$$

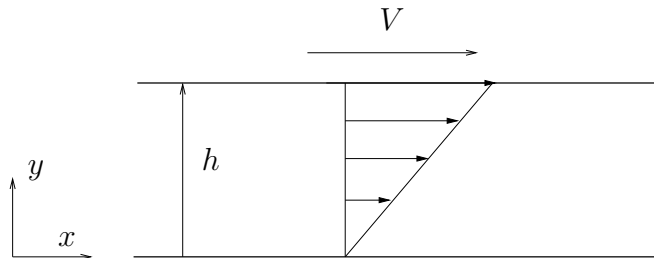


Figure 5.2: Flujo de Couette entre dos placas paralelas.

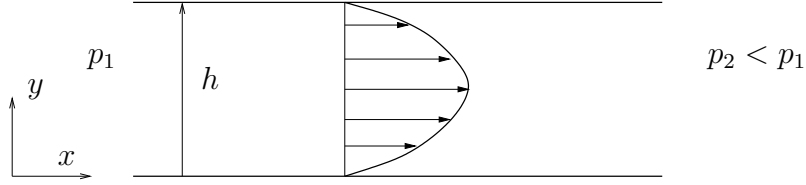


Figure 5.3: Flujo de Poiseuille entre dos placas paralelas.

En el caso que nos ocupa, al ser el problema bidimensional se usará el caudal por unidad de longitud perpendicular (unidades de m^2/s), calculado en una superficie perpendicular al movimiento

$$q = \int_0^h u(y)dy = \frac{Vh}{2}. \quad (14)$$

Si se quiere calcular el esfuerzo que el fluido ejerce sobre la pared inferior, se usa la definición del tensor de tensiones para fluidos newtonianos incompresibles. En este caso, al definir siempre la normal hacia el exterior del fluido cuando queremos representar las fuerzas sobre él se tomará $\vec{n} = (0, 1)$ dirigido hacia adentro, puesto que la fuerza que queremos calcular es la contraria.

$$\vec{\tau} = \vec{\bar{\tau}} \cdot \vec{n}, \quad \vec{\bar{\tau}} = 2\mu\vec{\bar{\gamma}}, \quad \vec{\bar{\gamma}} = \frac{1}{2}(\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^T), \quad \vec{\bar{\tau}} = \mu(\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^T). \quad (15)$$

Por tanto,

$$\vec{\tau} = \mu \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Por tanto el esfuerzo sobre la pared inferior es constante y positivo de valor $\tau = V/h$.

5.1.2 Flujo de Poiseuille

El flujo de Poiseuille es el flujo entre dos placas paralelas, que se someten a un gradiente de presión $Pr \neq 0$ como se muestra en la figura 5.3. Las ecuaciones a resolver y sus condiciones de contorno serán,

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -Pr, \quad (17)$$

$$u(0) = 0, \quad (18)$$

$$u(h) = 0. \quad (19)$$

La solución a la ecuación diferencial será

$$u(y) = -\frac{Pr}{2\mu}y^2 + Ay + B, \quad (20)$$

con A y B constantes de integración. Aplicando las condiciones de contorno, se tiene que

$$u(y) = \frac{-Pr}{2\mu} (y^2 - hy). \quad (21)$$

El caudal se calcula de la misma forma que en el flujo de Couette,

$$q = \int_0^h u(y)dy = \frac{Prh^3}{12}. \quad (22)$$

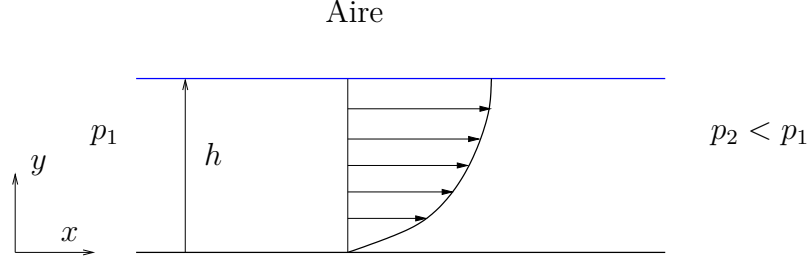


Figure 5.4: Flujo laminar sobre una superficie con superficie libre.

5.1.3 Flujo sobre de una lámina libre

Para el flujo sobre una lámina libre, sometida a una presión reducida, la diferencia fundamental estriba en la condición de contorno en la lámina libre. El flujo de agua interaccionará con el aire y lo arrastrará. Por esto, la velocidad del agua deberá ser la misma que la del aire y los esfuerzos deberán ser iguales también,

$$u_w(h) = u_a(h), \quad (23)$$

$$\mu_w \left. \frac{\partial u_w}{\partial y} \right|_{y=h} = \mu_a \left. \frac{\partial u_a}{\partial y} \right|_{y=h}. \quad (24)$$

Esta última condición implica que

$$\left. \frac{\partial u_w}{\partial y} \right|_{y=h} = \frac{\mu_a}{\mu_w} \left. \frac{\partial u_a}{\partial y} \right|_{y=h} \simeq 0, \quad (25)$$

puesto que la viscosidad del aire es mucho menor que la del agua. Por tanto, las ecuaciones y condiciones de contorno quedarán,

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -Pr, \quad (26)$$

$$u(0) = 0, \quad (27)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=h} = 0. \quad (28)$$

cuya solución será

$$u(y) = -\frac{Pr y}{2\mu} (2h - y). \quad (29)$$

5.2 Movimiento laminar de líquidos en conductos

En este capítulo se va a desarrollar la teoría necesaria para determinar el flujo a través de conductos que se mueven debido a un gradiente de presión reducida.

5.2.1 Corriente de Poiseuille en un conducto circular

Supongan un conducto circular de sección constante movido por un gradiente de presión. De las ecuaciones de continuidad y Navier Stokes en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , con z

en la dirección del eje del conducto, suponiendo que el flujo es unidireccional $\vec{v} = w(r, z) \vec{e}_z$, estacionario y axilsimétrico y por tanto las variables no dependen de la coordenada angular ($\partial/\partial\theta = 0$) se obtiene que

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (30)$$

y por tanto la velocidad sólo depende de r . Por otro lado, las otras dos ecuaciones se simplifican a

$$0 = -\frac{\partial(p + \rho U)}{\partial r}, \quad (31)$$

$$0 = -\frac{\partial(p + \rho U)p}{\partial z} + \rho f_x + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right). \quad (32)$$

De la primera de ella se tiene que la presión sólo depende de r y de la segunda, definiendo la presión reducida como

$$P_r = -\frac{\partial}{\partial x}(p + \rho U), \quad (33)$$

se puede integrar la ecuación obteniendo

$$w(r) = -\frac{P_r r^2}{4\mu} + C_1 \log(r) + C_2, \quad (34)$$

con C_1 y C_2 constantes de integración. Aplicando la condición de que la velocidad no sea singular en el eje $C_1 = 0$ y aplicando la condición de que la velocidad ha de ser nula en el contorno se obtiene el valor de C_2 . El perfil de velocidad será de tipo parabólico, de la forma

$$w(r) = \frac{P_r D^2}{16\mu} \left(1 - \left(\frac{2r}{D} \right)^2 \right). \quad (35)$$

El caudal que circula por el conducto es

$$Q = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{D/2} r u dr = -\frac{\pi D^4}{128\mu} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x}. \quad (36)$$

Esto es lo que se conoce como la ley de Hagen-Poiseuille, que indica que la caída de presión en un conducto circular es proporcional al caudal que circula sobre ella. Esta ley es válida siempre que el número de Reynolds basado en el diámetro y la velocidad media ($V = 4Q/(\pi D^2)$)

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu}, \quad (37)$$

sea menor que aproximadamente $Re \approx 2300$. Para valores mayores de este parámetro, el flujo se vuelve turbulento y la fricción aumenta, siendo en este caso la caída de presión proporcional al caudal al cuadrado. Esto se verá con detalle en capítulos posteriores.

5.3 Tubos de longitud finita

La solución de Hagen-Poiseuille es válida para tubos infinitos. Generalmente, el tamaño de los tubos no es infinito, y por tanto el flujo necesitará de un espacio para que le de tiempo a formar el flujo parabólico. Si se supone la salida de un depósito al que está conectado el conducto como se muestra en la figura 5.6, inicialmente el flujo será plano. Al entrar en contacto el fluido con el tubo, en las paredes el flujo ha de cumplir la condición de contorno de velocidad nula. Al seguir avanzando el fluido a lo largo del conducto, debido a la viscosidad (o difusión de cantidad de movimiento), las partículas cercanas a la pared sienten la presencia de estas, y van disminuyendo su velocidad. Esto forma dos capas límites en el conducto, que al unirse determinan el punto en el que todo el fluido se ha adaptado al contorno debido a la viscosidad. Esto es lo que determina la longitud de entrada L_e . Si se observa la presión a lo largo del tubo, se observa que en toda la región de entrada la presión no se comporta de manera lineal, sino que se va adaptando hasta llegar en $x = L_e$ a la ley de Hagen-Poiseuille. Para estimar esta longitud de entrada se puede hacer mediante análisis dimensional. Los términos a balancear son los términos de inercia, dominantes en la región no viscosa, y los términos viscosos. La región de entrada indicará el punto en los que ambos sean del mismo orden:

$$|\rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}| \simeq \rho V^2 / L_e \approx |\mu \nabla^2 \vec{v}| \approx \mu V / D^2. \quad (38)$$

Esto permite hacer una estimación de la longitud de entrada como

$$L_e \approx Re D. \quad (39)$$

De esta forma, si el diámetro es muy pequeño o el número de Reynolds muy bajo, la región de entrada es casi despreciable y casi todo el conducto puede ser modelado por la ley de Hagen-Poiseuille. En caso contrario habrá que hacer un estudio pormenorizado de la región de entrada si se pretende obtener una mejor aproximación.

Ejemplo: Determinar las ecuaciones que rigen el movimiento de la altura de fluido en la descarga del depósito de sección A que se muestra en la figura 5.6 a través de un conducto de longitud L y diámetro D siempre que las fuerzas viscosas sean dominantes. Para resolver este problema se separará en dos partes: El depósito y el conducto. Aplicando la ecuación de conservación de la masa en el depósito se obtiene que

$$A \frac{dh}{dt} = -Q, \quad (40)$$

donde el signo de Q se ha tomado negativo puesto que al salir el líquido por gravedad disminuye la altura $dh/dt < 0$. En este caso, la única fuerza másica que afecta al fluido es la gravedad, y por tanto podemos definir el potencial de fuerzas másicas de forma sencilla,

$$\vec{f}_m = -g \vec{e}_z = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad U = g z. \quad (41)$$

De la misma forma, suponiendo el flujo casi estacionario a bajo número de Reynolds, podemos aplicar la ecuación de Hagen-Poiseuille en el conducto tomando x como la coordenada a lo largo del tubo,

$$Q = -\frac{\pi D^4}{128 \mu} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x}. \quad (42)$$

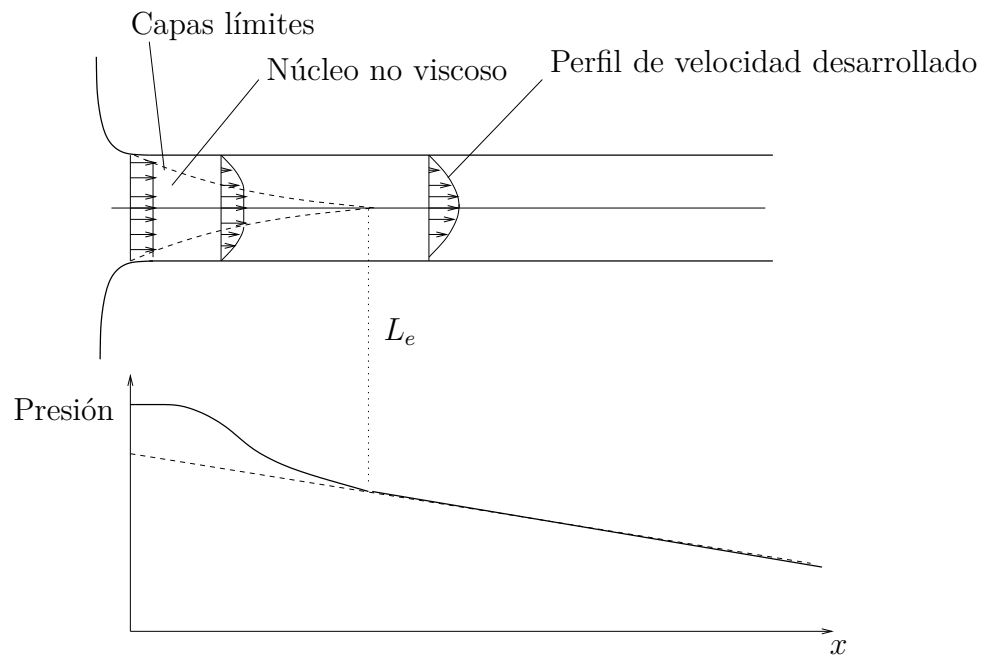


Figure 5.5: Perfil de velocidad en un conducto conectado a un depósito junto con la presión a lo largo de él.

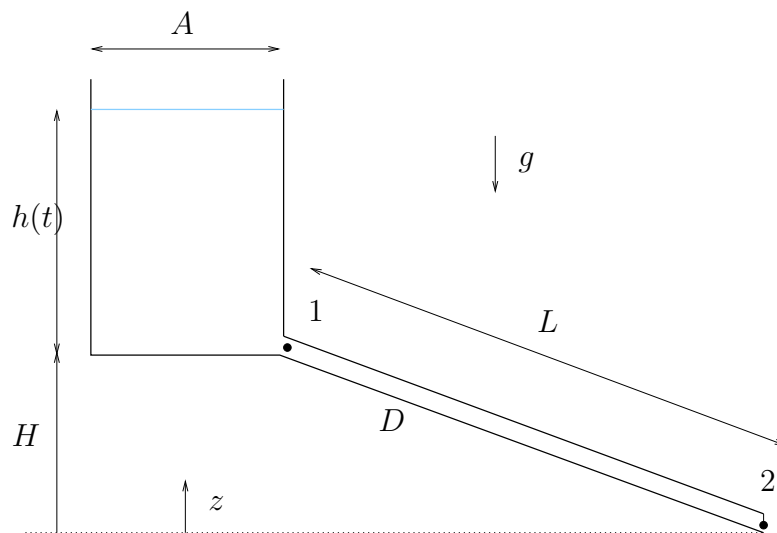


Figure 5.6: Problema de ejemplo de descarga de un depósito con $Re \ll 1$.

Integrando desde el punto 1 al punto 2,

$$(p_2 + \rho g z_2) - (p_1 + \rho g z_1) = -\frac{128 Q \mu}{\pi D^4}. \quad (43)$$

Ahora habrá que aplicar las condiciones de contorno en ambos extremos. En el depósito, si las velocidades son pequeñas, se puede aplicar fluidostática y en la salida la presión será la atmosférica:

$$p_2 = p_a + \rho g h, \quad (44)$$

$$p_1 = p_a. \quad (45)$$

Del mismo modo, con el origen de z determinado en la figura se tiene que $z_1 = 0$ y $z_2 = H$. Finalmente se tiene que

$$Q = \frac{\rho g \pi D^4}{128 \mu} (H + h). \quad (46)$$

La ecuación diferencial que rige el movimiento de la altura de la superficie libre del depósito será por tanto,

$$A \frac{dh}{dt} = -\frac{\rho g \pi D^4}{128 \mu} (H + h), \quad (47)$$

$$t = 0, h = h_0. \quad (48)$$

Para resolver esta ecuación diferencial, generalmente se prefiere adimensionalizar las ecuaciones. Se buscará una altura característica h_c tal que haga que la altura adimensional esté comprendida entre 0 y 1. Se define un tiempo característico t_c que en principio será libre. La altura característica apropiada será $h_c = h_0$, y se definen la altura y el tiempo adimensional como

$$\eta = \frac{h}{h_0}, \quad \tau = \frac{t}{t_c}. \quad (49)$$

Introduciendo estas variables en las ecuaciones se obtiene que

$$\frac{A h_0}{t_c} \frac{d\eta}{d\tau} = -\frac{\rho g \pi D^4}{128 \mu} (H + h_0 \eta). \quad (50)$$

Dividiendo todo por

$$\frac{\rho g \pi D^4 h_0}{128 \mu} \quad (51)$$

la ecuación queda

$$\frac{128 \mu A}{\rho g \pi D^4 t_c} \frac{d\eta}{d\tau} = -\left(\frac{H}{h_0} + \eta\right). \quad (52)$$

El tiempo característico se ha dejado libre y ahora se puede fijar para que nos proporcione una estimación del tiempo necesario para que la altura pase de h_0 a 0, es decir que η pase de 1 a 0. Imponemos que el término que multiplica a la derivada sea de orden unidad, y se tiene la estimación del tiempo característico.

$$t_c = \frac{128 \mu A h_0}{\rho g \pi D^4}, \quad (53)$$

y la ecuación se simplifica a

$$\frac{d\eta}{d\tau} = - \left(\frac{H}{h_0} + \eta \right), \quad (54)$$

$$\tau = 0, \eta = 1, \quad (55)$$

cuya solución es

$$\eta = \frac{(H + h_0)e^{-\tau} - H}{h_0}. \quad (56)$$

De aquí podríamos calcular el tiempo exacto de vaciado, es decir, aquel en el que la altura llega a $h = 0$ o $\eta = 0$. Igualando a cero la ecuación anterior y despejando el tiempo se tiene que:

$$\tau_{vaciado} = \log \left(\frac{H + h_0}{H} \right), \quad (57)$$

que en unidades dimensionales puede escribirse como

$$t_{vaciado} = t_c \tau_{vaciado} = \frac{128\mu Ah_0}{\rho g \pi D^4} \log \left(\frac{H + h_0}{H} \right). \quad (58)$$

Capítulo 6

Fluido ideal

En este capítulo se van a describir las ecuaciones simplificadas que verifican los fluidos con viscosidad despreciable o $Re \gg 1$. Esto hace que las ecuaciones se simplifiquen y los términos viscosos desaparezcan de ellas. Por tanto, al desaparecer estos términos que contienen las derivadas segundas con respecto al espacio, cambia también el carácter de las ecuaciones en derivadas parciales, pasando a ser ecuaciones hiperbólicas.

6.1 Ecuación de Bernoulli

La ecuación de cantidad de movimiento, despreciando los términos viscosos queda como

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \rho \vec{f}_v. \quad (1)$$

A partir de ahora se supondrá que las fuerzas másicas derivan de un potencial. Multiplicando la ecuación por \vec{v} se tiene que

$$\rho \frac{\partial v^2/2}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla v^2/2 = -\vec{v} \cdot \nabla p - \rho \vec{v} \cdot \nabla U. \quad (2)$$

Si se tiene en cuenta que se quiere obtener la ecuación a lo largo de la línea de corriente (donde la velocidad es tangente a dicha línea), los operadores $\vec{v} \cdot \nabla = v \partial / \partial l$, con l la longitud a lo largo de la trayectoria. De esta forma,

$$\rho v \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial \nabla v^2/2}{\partial l} = -v \frac{\partial p}{\partial l} - \rho \frac{\partial U}{\partial l}. \quad (3)$$

Uniendo todos los términos, y suponiendo que la función de barotropía se puede definir como $\omega = \int_P dp/\rho$,

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{v^2}{2} + \omega + U \right) = 0. \quad (4)$$

Si el flujo es estacionario esto proporciona que

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{v^2}{2} + \omega + U \right) = 0, \quad (5)$$

que indica que a lo largo de la línea de corriente, la cantidad de dentro del paréntesis es constante,

$$\frac{v^2}{2} + \omega + U = H(t), \quad (6)$$

donde esa magnitud se le suele denominar *constante de Bernoulli* o *Bernoulli*. Para un líquido $\omega = p/\rho$, y teniendo en cuenta el efecto de la gravedad se tiene que

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial l} \left(\rho \frac{v^2}{2} + p + \rho g z \right) = 0. \quad (7)$$

Por último, en ciertos casos se puede suponer el flujo casi-estacionario, que corresponde con un flujo en el que los términos temporales son despreciables, y variará por tanto la velocidad a través de las condiciones de contorno. En este caso,

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U = H = \text{constante}. \quad (8)$$

Para líquidos, se habla generalmente de la presión de remanso P , definida como

$$P = p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho U, \quad (9)$$

y la ecuación de Bernoulli completa para un flujo incompresible se puede escribir como

$$\rho \frac{dv}{dt} + \frac{\partial P}{\partial l} = 0. \quad (10)$$

6.1.1 Ecuaciones para gases ideales

En el caso de gases, si el flujo es isentrópico, $Ds/Dt = 0$. Por tanto,

$$T ds = dq = de + pd(1/\rho). \quad (11)$$

Usando la definición de la entalpía,

$$h = e + p/\rho, \quad dh = de + \frac{dp}{\rho} + pd(1/\rho), \quad (12)$$

y por tanto

$$dh = T ds + \frac{dp}{\rho}. \quad (13)$$

Por tanto, si el flujo es isentrópico, la función de barotropía corresponde a la entalpía.

$$dh = \frac{dp}{\rho}. \quad (14)$$

De esta forma, en gases es más apropiado el uso del número de Mach y relacionar todas las magnitudes con respecto a las magnitudes de remanso. Estas magnitudes son aquellas que tiene el flujo al estar parado. En general, debido a la baja densidad del aire, el efecto de las fuerzas másicas se puede despreciar y por tanto, podemos definir la entalpía de remanso como

$$h_0 = h + \frac{1}{2} v^2. \quad (15)$$

Sabiendo que la entalpía es $c_p T$, que $R_g = c_p - c_v$ y que $\gamma = c_p/c_v$ se puede deducir fácilmente que

$$\frac{h_0}{h} = \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{v^2}{2c_p T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2. \quad (16)$$

Usando las relaciones isoentrópicas y la ley de los gases ideales se puede tener la relación entre las presiones y densidades y la temperatura y sus valores de remanso, es decir, los valores que tienen en un punto de la línea de corriente donde el fluido se encuentra en reposo (p_0 , ρ_0 y T_0).

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^\gamma = \frac{\rho_0 T_0}{\rho T}, \quad (17)$$

y por tanto,

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{1/(\gamma-1)}, \quad (18)$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)}. \quad (19)$$

Todas estas expresiones son mucho más sencillas de utilizar en el caso de gases. De esta forma, conociendo las propiedades de remanso en un sitio en el que el gas esté aproximadamente parado, se tiene que estas propiedades se conservan a lo largo de las líneas de corriente.

6.1.2 Pérdidas de presión de remanso

Existen ciertos casos en los que no se conserva la presión de remanso: en caso de gases porque exista un intercambio de calor o pérdidas de presión de remanso en tuberías, pero esto queda fuera del alcance de este curso introductorio. En caso de líquidos, que existan pérdidas de presión de remanso debido a fricción, que se discutirá en temas posteriores. El caso que se estudiará en este tema serán las pérdidas por presión de remanso al entrar el flujo en un depósito. Cuando un flujo descarga en un depósito, se conserva la presión termodinámica y por tanto la del fluido que entra y la que se encuentra en el depósito han de ser la misma. Físicamente esto es debido que el fluido que lleva una cierta velocidad no puede frenarse isoentrópicamente (sin pérdida de energía) y se mezcla con el fluido del depósito perdiendo toda la energía debido a fricción entre las moléculas. Éstas pérdidas existen siempre en estos casos, independientemente de que el fluido sea ideal.

Ejemplo: Supongan el tubo de diámetro D en forma de U de la figura 6.1. Éste gira a una velocidad constante Ω respecto de un eje descentrado como se indica en la figura. Si inicialmente el tubo se encuentra relleno hasta una distancia h_0 , determinar:

- Usando fluidostática, la solución estacionaria final.
- Suponiendo un flujo ideal, la ecuación diferencial que rige la superficie libre $h(t)$ en función del tiempo.

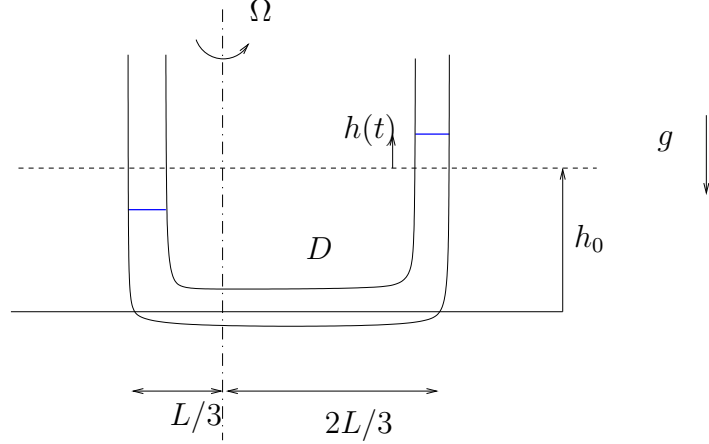


Figure 6.1: Figura de un tubo en forma de U que gira excéntricamente.

La ecuación de fluidostática nos indica que

$$p + \rho U = \text{constante}, \quad (20)$$

donde U es el potencial de fuerzas másicas. Las fuerzas másicas que aparecen son las debidas a la rotación y la gravedad. El término de Coriolis no se incluye porque esta fuerza se ejerce sobre las paredes del tubo, y no varía a lo largo de la línea de corriente. Las fuerzas que quedan son la gravitatoria y la centrífuga. De esta forma, por la definición de potencial de fuerzas másicas, $\vec{f}_m = -\nabla U$ y $\vec{f}_m = -g\vec{e}_z + \Omega^2 r\vec{e}_r$, donde se ha hecho uso que el operador $-\vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r}$ sólo tiene componente en la dirección radial. Queda para el primer caso que

$$\frac{\partial U}{\partial z} = g, \quad U = g z, \quad (21)$$

y para el segundo,

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -\Omega^2 r, \quad U = -\frac{1}{2}\Omega^2 r^2. \quad (22)$$

Por tanto el potencial completo quedará,

$$U = -g z + \frac{1}{2}\Omega^2 r^2. \quad (23)$$

De esta forma, una vez está en la posición final, h_f ,

$$p_a + \rho g(h_0 - h_f) - \frac{1}{2}\rho\Omega^2 \left(\frac{L}{3}\right)^2 = p_a + \rho g(h_0 + h_f) - \frac{1}{2}\rho\Omega^2 \left(\frac{2L}{3}\right)^2 \quad (24)$$

Por tanto la solución estacionaria final será,

$$h_f = \frac{\Omega^2 L^2}{36 g}. \quad (25)$$

Para el segundo caso, suponiendo que es un flujo ideal se tendrá que cumplir

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial l} \left(\rho \frac{v^2}{2} + p + \rho U \right) = 0. \quad (26)$$

Integrando desde el punto 1 hasta el punto 2 se tiene que

$$\int_s^{s+2h_0+L} \rho \frac{\partial v}{\partial t} dl + \left(\rho \frac{v^2}{2} + p_a + \rho g(h_0 + h) - \frac{1}{2} \rho \Omega^2 \left(\frac{L}{3} \right)^2 \right) \quad (27)$$

$$- \left(\rho \frac{v^2}{2} + p_a + \rho g(h_0 - h) - \frac{1}{2} \rho \Omega^2 \left(\frac{2L}{3} \right)^2 \right). \quad (28)$$

Esta ecuación diferencial queda finalmente al simplificar

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} (2h_0 + L) + 2\rho gh - \frac{1}{18} \rho \Omega^2 L^2. \quad (29)$$

Tan sólo falta expresar la velocidad en función de la altura, mediante continuidad,

$$v = \frac{dh}{dt}, \quad (30)$$

con signo positivo, porque al ser positiva la velocidad, crece la altura. Finalmente, el problema a resolver queda como

$$\rho \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} (2h_0 + L) = -2\rho gh + \frac{1}{18} \rho \Omega^2 L^2, \quad (31)$$

$$h(t=0) = 0. \quad (32)$$

Para resolver estas ecuaciones diferenciales se recomienda adimensionalizar para poder comparar los distintos términos. Para adimensionalizar la altura se usará la altura final, y para el tiempo, un tiempo característico indeterminado. De esta forma,

$$\eta = \frac{h}{h_f}, \quad \tau = \frac{t}{t_c}. \quad (33)$$

Introduciéndolo en la ecuación se tiene que

$$\frac{\rho h_f (2h_0 + L)}{t_c^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} = -2\rho g h_f \eta + \frac{1}{18} \rho \Omega^2 L^2. \quad (34)$$

Se hace la ecuación adimensional, dividiéndola por todo lo que multiplica a η en el lado derecho de la ecuación, y haciendo uso de la definición de h_f se simplifica a

$$\frac{2h_0 + L}{2g t_c^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} = -\eta + 1. \quad (35)$$

Por último, como no se ha definido todavía el tiempo característico, se toma de tal forma que haga unitario el término que multiplica a la derivada, lo cual nos proporciona el tiempo característico en el que el fluido llega desde la posición inicial a la final, sin tener que resolver la ecuación.

$$t_c = \left(\frac{2h_0 + L}{2g} \right)^{1/2}. \quad (36)$$

La ecuación se simplifica a

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -\eta + 1, \quad (37)$$

$$\eta(0) = 0. \quad (38)$$

Ejemplo: Supongan el depósito de agua de sección A de la figura 6.2 sobre el que se apoya un pistón de masa M . El movimiento del pistón desplaza el agua hacia un tubo de diámetro D como el que se indica en la figura. Este tubo descarga en la atmósfera. Determinar la ecuación diferencial que rige la altura del pistón. Supongan que la sección del depósito es mucho mayor que la del tubo, y por tanto $A \gg D^2$.

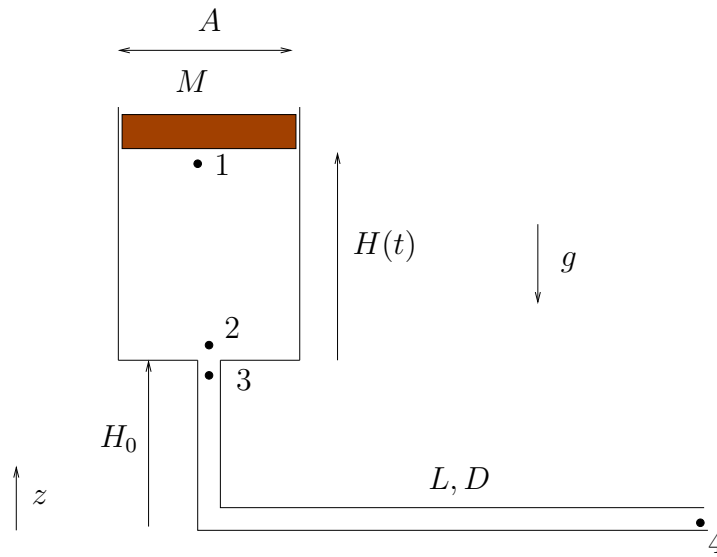


Figure 6.2: Figura de un inyector accionado por un pistón.

Para resolver el problema, se divide varias partes: pistón, depósito y tubería. En primer lugar se expresa la ecuación dinámica del pistón.

$$M \frac{d^2 H}{dt^2} = -M g + (p_1 - p_a) A. \quad (39)$$

Esta ecuación me relaciona la presión debajo del pistón con la atmosférica. Dentro del depósito, se conserva la presión de remanso (Bernoulli del flujo), y si no indican lo contrario, en la contracción no existen pérdidas de presión de remanso. Si existieran, simplemente se escribirían como

$$P_2 = P_3 + K \frac{1}{2} \rho v^2, \quad (40)$$

con K una constante. Integrando el Bernoulli desde la posición 1 a la posición 2,

$$\rho \frac{d^2 H}{dt^2} H + P_2 - P_1 = 0. \quad (41)$$

Si se supone que no hay pérdidas de presión de remanso en la contracción $P_2 = P_3$. Aplicando la ecuación de continuidad al depósito,

$$A \frac{dh}{dt} = -v \frac{\pi D^2}{4}, \quad v = -\frac{\pi D^2}{4A} \frac{dH}{dt}. \quad (42)$$

Ahora, se integra la ecuación de Bernoulli desde el punto 3 al punto 4,

$$\rho \frac{dv}{dt} (H_0 + L) + P_4 - P_3 = 0. \quad (43)$$

Usando las definiciones de presión de remanso, y suponiendo que las velocidades en 3 y 4 son iguales, y en 2 y 1 también, se tiene que,

$$\rho \frac{d^2 H}{dt^2} H + p_3 + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g H_0 - p_1 - \frac{1}{2} \rho \left(\frac{dH}{dt} \right)^2 - \rho g (H_0 + H) = 0, \quad (44)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} (H_0 + L) + p_4 - p_3 - \rho g H_0 = 0. \quad (45)$$

$$(46)$$

Tan sólo falta aplicar la condición de contorno en la salida $p_4 = p_a$. Siempre que hay una descarga de un depósito, en primera aproximación la presión de remanso se conserva, y siempre que hay una descarga hacia un depósito (la atmósfera es un depósito enorme), se pierde toda la energía cinética. Simplificando, las ecuaciones que rigen el sistema son:

$$p_1 = p_a + \frac{M}{A} g + \frac{M}{A} \frac{d^2 H}{dt^2}, \quad (47)$$

$$\rho \frac{d^2 H}{dt^2} H + p_3 + \frac{8A^2}{\pi^2 D^4} \rho \left(\frac{dH}{dt} \right)^2 - p_1 - \frac{1}{2} \rho \left(\frac{dH}{dt} \right)^2 - \rho g H = 0, \quad (48)$$

$$\rho \frac{4A}{\pi D^2} \frac{d^2 H}{dt^2} (H_0 + L) + p_a - p_3 - \rho g H_0 = 0. \quad (49)$$

$$(50)$$

Unificando todas las ecuaciones se tiene que

$$-\rho \frac{4A}{\pi D^2} (H_0 + L) \frac{d^2 H}{dt^2} = \rho g (H_0 + H) - \frac{1}{2} \rho \frac{16A^2}{\pi^2 D^4} \left(\frac{dH}{dt} \right)^2 + \frac{M g}{A}, \quad (51)$$

si se supone que

$$\frac{4A}{\pi D^2} (H_0 + L) \gg H_0, \text{ Inercia del líquido en los conductos despreciable,} \quad (52)$$

$$\frac{4A}{\pi D^2} (H_0 + L) \gg \frac{M}{A}, \text{ Inercia del pistón despreciable.} \quad (53)$$

6.2 Función de corriente

Para todo fluido incompresible, se puede definir una función de corriente como $\vec{v} = \nabla \times \vec{\psi}$. Esto es así porque se cumple siempre la igualdad $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{p}) = 0$, con \vec{p} un vector cualquiera

(comprobar para el lector interesado). Para el caso bidimensional, se tiene que $\vec{\psi} = \psi \vec{e}_z$, y por tanto para un campo de velocidad $\vec{v} = (u, v)$ la función de corriente cumple que,

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (54)$$

Ejemplo: Determinar si el flujo es incompresible, y posteriormente obtener la función de corriente 2D para el flujo siguiente

$$u = x, \quad v = -y. \quad (55)$$

Para ver si el flujo es incompresible habrá que verificar si $\nabla \cdot \vec{v} = 0$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 1 - 1 = 0. \quad (56)$$

Por tanto es incompresible. Ahora, para calcular la función de corriente,

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = x, \quad \psi = xy + f(x), \quad (57)$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} = -y, \quad \psi = xy + g(y), \quad (58)$$

$$(59)$$

Por tanto la solución buscada es $\psi = xy + K$, con K una constante arbitraria (generalmente se puede tomar como nula).

6.3 Función potencial

Del mismo modo, si el flujo es irrotacional $\nabla \times \vec{v} = 0$, siempre se puede definir una función potencial tal que $\vec{v} = \nabla \phi$. Esto es siempre posible puesto que $\nabla \times (\nabla g) = 0$ para todo campo g (comprobar el lector interesado). De esta forma, para un flujo bidimensional se puede definir

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (60)$$

Ejemplo: Determinar si el flujo es irrotacional y posteriormente obtener la función potencial 2D para el flujo siguiente

$$u = x, \quad v = -y. \quad (61)$$

Para ello, de la definición de flujo irrotacional se tiene que $\nabla \times \vec{v} = 0$ y por tanto, realizando el cálculo se tiene que

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x(-y) + \partial/\partial y(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (62)$$

Para calcular la función potencial se realiza lo mismo que en el caso anterior, y por tanto, por la definición,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = x, \quad \phi = x^2 + f(y), \quad (63)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -y, \quad \phi = -y^2 + g(x), \quad (64)$$

$$(65)$$

y por tanto $\phi = x^2 - y^2$. Dibujamos ahora las dos soluciones mediante el siguiente código, y se representa en la figura 6.3.

Código

```
[x,y]=meshgrid([-10:0.1:10],[-10:0.1:10]);
psi = x.*y;
phi = x.^2-y.^2;
contour(x,y,psi,20,'k');
hold on
contour(x,y,phi,20,'r—')
```

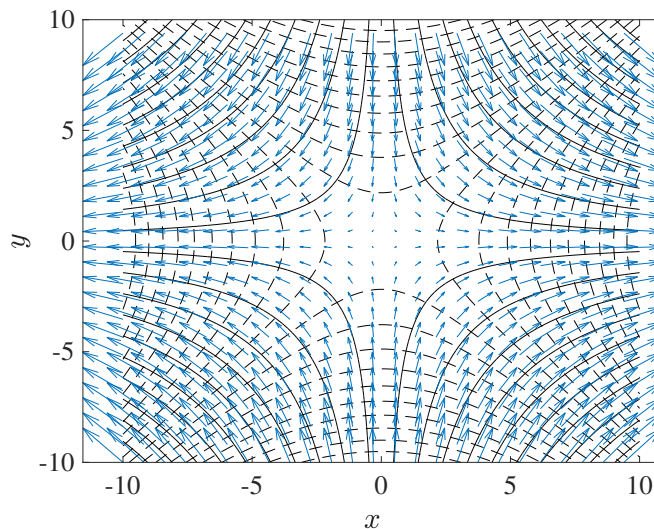


Figure 6.3: Líneas de corriente (línea continua) y de función potencial (línea discontinua) para el problema supuesto.

6.4 Flujo potencial

Por tanto, para todos aquellos problemas ideales, bidimensionales, irrotacionales e incompresibles se pueden obtener los campos de velocidad a partir de las funciones potencial y de corriente.

6.4.1 Corriente uniforme

Una corriente uniforme se caracteriza por un campo de velocidad determinado por $\vec{v} = U\vec{e}_x$. De esta forma su función de corriente y función potencial serán

$$U = -\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad (66)$$

$$0 = \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial y}. \quad (67)$$

Por tanto, las funciones potencial y de corriente serán

$$\phi = Ux, \quad \psi = Uy. \quad (68)$$

6.4.2 Fuente y sumidero

Una fuente o sumidero se caracteriza por un movimiento bidimensional de un cierto caudal Q que sale o entra de un punto del espacio. Por tanto su velocidad viene definida como

$$\vec{v} = v_r\vec{e}_r = \pm \frac{Q}{2\pi r}\vec{e}_r, \quad (69)$$

con el signo positivo si es una fuente y negativo si es un sumidero. Usando las coordenadas cilíndricas, se tiene que

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = v_r = \pm \frac{Q}{2\pi r} = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad (70)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = v_\theta = 0 = -\frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad (71)$$

$$(72)$$

de donde

$$\phi = \frac{\pm Q}{2\pi} \log(r), \quad \psi = \frac{\pm Q}{2\pi} \theta. \quad (73)$$

6.4.3 Torbellino potencial

Este movimiento fundamental está caracterizado por fluido que gira alrededor de un punto, de forma que su circulación permanece constante

$$\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l}. \quad (74)$$

Si se supone que la velocidad es constante para cada radio y de valor $\vec{v} = V(r)\vec{e}_\theta$ se tiene que

$$2\pi r V(r) = \Gamma, \quad V(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (75)$$

Fluido ideal

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 = \pm \frac{Q}{2 \pi r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad (76)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = v_{\theta} = \frac{\Gamma}{2 \pi r} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (77)$$

$$(78)$$

de donde

$$\phi = \frac{\pm \Gamma}{2 \pi} \theta, \quad \psi = \frac{\pm \Gamma}{2 \pi} \log(r). \quad (79)$$

De esta forma y como resumen, con el siguiente código se pueden representar los movimientos fundamentales desarrollados hasta ahora. Esto se hace en la figura 6.4.

Código

```

[x,y]=meshgrid([-10:0.1:10],[-10:0.1:10]);
subplot(3,1,1)
psi = y;
phi = x;
contour(x,y,psi,20,'k');
hold on
contour(x,y,phi,20,'r—')
xlabel('x');ylabel('y');
axis equal
axis([-10 10 -10 10])
subplot(3,1,2)
psi = atan(y./x);
phi = log(x.^2+y.^2);
i = find(phi==Inf); % Eliminamos la singularidad
phi(i)=0;
contour(x,y,psi,20,'k');
hold on
contour(x,y,phi,20,'r—')
xlabel('x');ylabel('y');
axis equal
axis([-10 10 -10 10])
subplot(3,1,3)
psi = log(x.^2+y.^2);
i = find(psi==Inf); % Eliminamos la singularidad
psi(i)=0;
phi = atan(y./x);
i = find(phi==Inf); % Eliminamos la singularidad
phi(i)=0;
contour(x,y,psi,20,'k');
hold on
contour(x,y,phi,20,'r—')
xlabel('x');ylabel('y');
axis equal
axis([-10 10 -10 10])

```

6.4.4 Superposición de movimientos elementales

Una vez se han visto los distintos movimientos elementales, se pueden ver ahora la superposición de varios de ellos. Como el operador ∇ es lineal, la suma de las funciones de corriente o potenciales de los movimientos elementales, provocarán resultados que serán el efecto combinado de todos ellos.

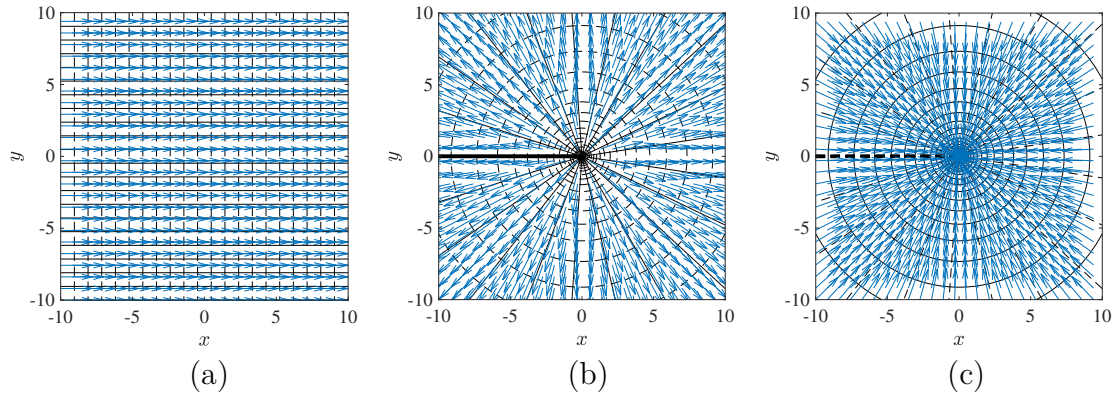


Figure 6.4: Función de corriente (negro) y potencial (rojo) para un movimiento uniforme (a), una fuente o sumidero (b) y un torbellino (c).

Corriente uniforme y fuente

La superposición de una corriente uniforme y de una fuente en el origen proporcionaría unas líneas de corriente y de potencial definidas por,

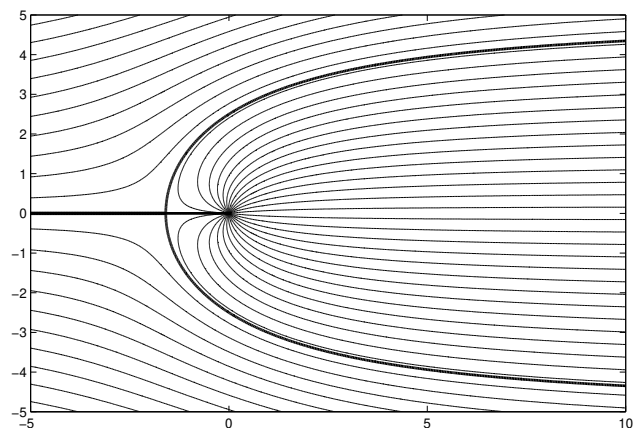
$$\Psi = U y + \frac{Q}{2\pi} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad (80)$$

$$\phi = U x + \frac{Q}{2\pi} \log(x^2 + y^2). \quad (81)$$

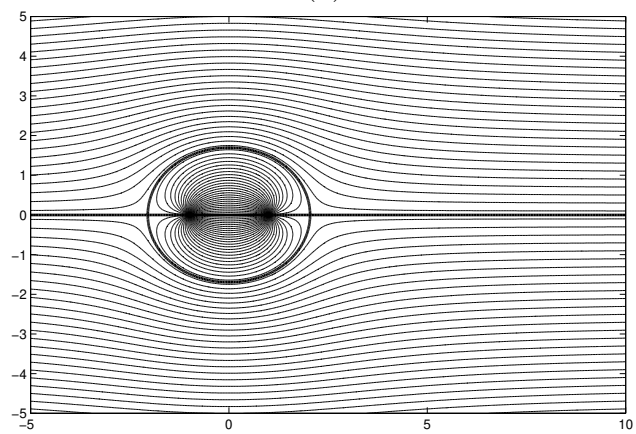
El resultado se muestra en la figura 6.5 (a).

Cuadro con código

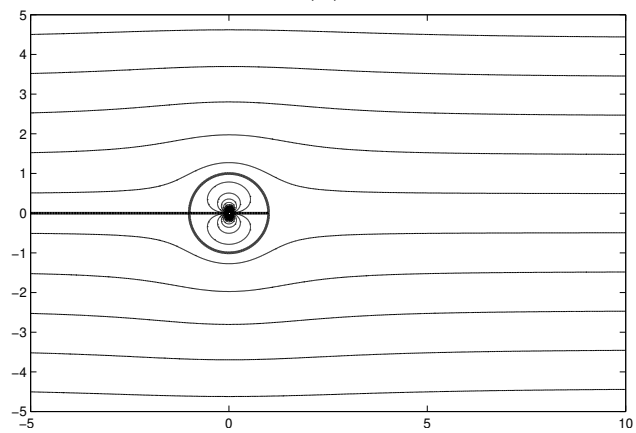
```
% Potential flow
close all
figure(1)
U=1;
Q = 10;
[x,y] = meshgrid(linspace(-10,10,501),linspace(-5,5,500));
psi = U*y+(Q/2/pi)*atan2(y,x);
contour(x,y,psi,50,'k')
axis equal
axis([-5 10 -5 5])
% Pintamos el contorno externo y->0, theta=+-pi
psiplus = (Q/2/pi)*pi;
psiminus = -(Q/2/pi)*pi;
hold on
contour(x,y,psi,[psiplus psiminus],'k','LineWidth',2)
hold off
print(gcf,'uniformFont','-deps')
```



(a)



(b)



(c)

Figure 6.5: Líneas de corriente para una corriente uniforme y una fuente (a), corriente uniforme, una fuente en $x = -a$ y un sumidero en $x = +a$ (b) y corriente uniforme con un dipolo (c).

Corriente uniforme, fuente en $x = -a$ y sumidero en $x = a$

Un dipolo es la unión de una fuente y un sumidero, colocados a una distancia a del origen. De esta forma habrá que desplazar la función sumidero y fuente para tener en cuenta este desplazamiento.

$$\Psi = U y + \frac{Q}{2\pi} \left(\arctan \left(\frac{y}{x+a} \right) - \arctan \left(\frac{y}{x-a} \right) \right), \quad (82)$$

$$\phi = U x + \frac{Q}{2\pi} \left(\log \left((x+a)^2 + y^2 \right) - \log \left((x-a)^2 + y^2 \right) \right). \quad (83)$$

El resultado se muestra en la figura 6.5 (b).

Cuadro con código

```

figure(2)
U=1;
Q = 10;
a=1;
% Para evitar la singularidad de la atan lo pintamos en polares
[x,y] = meshgrid(linspace(-10,10,501),linspace(-5,5,500));
psi = U*y+(Q/2/pi)*(atan2(y,x+a)-atan2(y,x-a));
contour(x,y,psi,50,'k')
axis equal
axis([-5 10 -5 5])
% Pintamos el contorno externo y->0, theta=+-pi
psiplus = 0;
psiminus = 0;
hold on
contour(x,y,psi,[psiplus psiminus],'k','LineWidth',2)
hold off
print(gcf,'uniformDipole1','-deps')

```

Corriente uniforme y dipolo. Paradoja de D'Alembert

Por último, y como caso particular del anterior, se incluye el caso de un dipolo en el que $a \rightarrow 0$ y cumpliendo que $Q a = M$ sea finito. Si se realiza este límite, y usando por ejemplo coordenadas cilíndricas se tiene que la función de corriente será,

$$\Psi = U r \sin(\theta) - \frac{M \sin(\theta)}{2\pi r} = U r \sin(\theta) \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right), \quad (84)$$

donde se ha hecho uso de

$$r_0 \equiv \sqrt{\frac{M}{2\pi U}}. \quad (85)$$

Las líneas de corriente se muestran en la figura 6.5 (c). De esta forma, se puede obtener el campo de velocidad a partir de ella, de la definición de la función de corriente

$$v_r = U \cos(\theta) \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right), \quad v_\theta = -U \sin(\theta) \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right). \quad (86)$$

Código

```
figure(3)
U=1;
r0 = 1;
% Para evitar la singularidad de la atan lo pintamos en polares
[r,theta] = meshgrid(linspace(0,20,501),linspace(0,2*pi,500));
x = r.*cos(theta);
y = r.*sin(theta);
psi = U*r.*sin(theta).*(1-(r0./r).^2);
contour(x,y,psi,50,'k')
axis equal
axis([-5 10 -5 5])
% Pintamos el contorno externo y->0, theta=+-pi
psiplus = 0
psiminus = 0;
hold on
contour(x,y,psi,[psiplus psiminus],'k','LineWidth',2)
hold off
print(gcf,'uniformDipole2','-deps')
```

Si queremos calcular la fuerza de la presión sobre el cilindro, habrá que usar la ecuación de Bernoulli. Esta indica que

$$p_a + \frac{1}{2}\rho U^2 = p + \frac{1}{2}\rho U^2 \left(1 + \frac{r_0^4}{r^4} - \frac{r_0^2}{r^2}(\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2)\right). \quad (87)$$

La presión será por tanto,

$$p = p_a - \frac{1}{2}\rho U^2 \left(\frac{r_0^4}{r^4} - \frac{2r_0^2}{r^2}(\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2)\right). \quad (88)$$

La normal sobre el radio r_0 será por tanto,

$$\vec{n} = \vec{e}_r, \quad (89)$$

y la fuerza será

$$\vec{F} = \int_0^{2\pi} p \cdot \vec{n} r_0 d\theta = 0. \quad (90)$$

Esto es lo que se conoce como la paradoja de D'Alembert. La fuerza ejercida por la presión sobre un objeto para un flujo ideal, incompresible e irrotacional será nula. En realidad esta

Fluido ideal

fuerza no será nula puesto que cerca de la superficie existirá una zona donde el número de Reynolds será del orden unidad, y por tanto no se podrá considerar ideal. Esta zona es lo que se conoce como **capa límite**.

Capítulo 7

Máquinas de fluido y aplicaciones de flujo ideal de gases

7.1 Introducción

En este capítulo se tratarán dos aplicaciones principales de la Mecánica de Fluidos aplicada. En primer lugar se describirán matemáticamente las máquinas de fluido, es decir, aquellas máquinas a las que, entregándole un trabajo mecánico mediante la rotación de una parte móvil, es capaz de aumentar la energía del fluido de trabajo. En segundo lugar se tratará el proceso de llenado y vaciado de un depósito, proceso importante en industrias y para instalaciones neumáticas e hidráulicas.

7.2 Máquinas de Fluido

Una máquina de fluido es un dispositivo en el que, al aplicar un trabajo mecánico a un rotor se le hace girar, y este giro es capaz de aumentar la energía del fluido de trabajo. En este caso, si hablamos de máquinas de fluido para líquidos estaremos hablando de bombas, y en el caso de que el fluido sea un gas serán compresores. De la misma manera podríamos tener una máquina fluida que realice el proceso contrario, es decir, que sea el fluido que al contener mucha energía se haga pasar por un rotor, y este rotor girar junto al fluido, extraiga un trabajo de él. En este caso, tanto para el caso de líquidos y gases se le denomina turbina.

Para realizar el modelado de este tipo de máquinas partamos de un modelo como el que

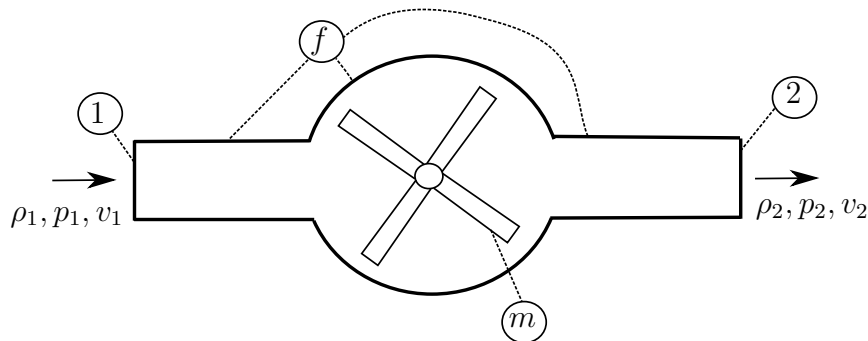


Figure 7.1: Esquema para el estudio del funcionamiento de una turbomáquina de fluido mediante las ecuaciones de conservación.

se presenta en la figura 7.1. En él se puede ver un rotor simplificado formado por cuatro palas móviles (superficie m), las superficies de entrada y de salida (1 y 2, de secciones A_1 y A_2 respectivamente) y el resto de superficies que no se mueven, f . Aplicando la ecuación de conservación de la energía, suponiendo que las fuerzas derivan de un potencial y por tanto $\vec{f}_v = -\nabla U$, que las fuerzas viscosas son despreciables y que no existe calor aportado ni por conducción a través de las paredes ni generado en el interior, tenemos que:

$$\int_{S_1, S_2} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} dS = - \int_{S_1, S_2, S_m} p \vec{v} \cdot \vec{n} dS - \int_{S_1, S_2, S_m} \rho \nabla U \vec{v} \cdot \vec{n} dS, \quad (1)$$

donde se ha supuesto que el problema es estacionario aunque realmente no lo sea. Esto se hace así porque como el problema es realmente cíclico puesto que depende de la posición de las palas, lo que se pretende es obtener un promediado de la energía que adquiere el dispositivo. Utilizando la definición de la entalpía $h = e + p/\rho$ para la entrada y la salida y sabiendo que el trabajo aplicado es justamente el valor de

$$W = - \int_{S_m} p \vec{v} \cdot \vec{n} dS, \quad (2)$$

se obtiene que

$$W = G \left(h_2 + \frac{v_2^2}{2} + U_2 - h_1 + \frac{v_1^2}{2} + U_1 \right). \quad (3)$$

En el caso general, la única fuerza másica que aparece en el análisis es la gravedad y el cambio de altura entre la entrada y salida de la máquina fluida suele ser despreciable y al estar hablando de gases podemos eliminar los términos de fuerzas másicas. Por tanto, el trabajo real que absorbe el fluido será:

$$W = G(h_{02} - h_{01}). \quad (4)$$

Además, al haber considerado que no hay transferencia de calor con las paredes y que la fricción genera calor, se puede suponer que el flujo es isoentrópico y por tanto,

$$\frac{p_1}{\rho_1^\gamma} = \frac{p_2}{\rho_2^\gamma}. \quad (5)$$

En el caso de que hubiera transferencia de calor, el coeficiente γ sería distinto y se modelaría con una ecuación como

$$\frac{p_1}{\rho_1^n} = \frac{p_2}{\rho_2^n}. \quad (6)$$

Una vez planteadas las ecuaciones, conocidos los valores de (ρ_1, v_1, p_1) , tenemos que poder obtener los valores de (ρ_2, v_2, p_2) . Suponiendo que la potencia se conoce, así como todos los parámetros geométricos,

$$h_{02} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} + \frac{W}{\rho_1 v_1 A_1}, \quad (7)$$

$$\frac{p_1}{\rho_1^n} = \frac{p_2}{\rho_2^n}. \quad (8)$$

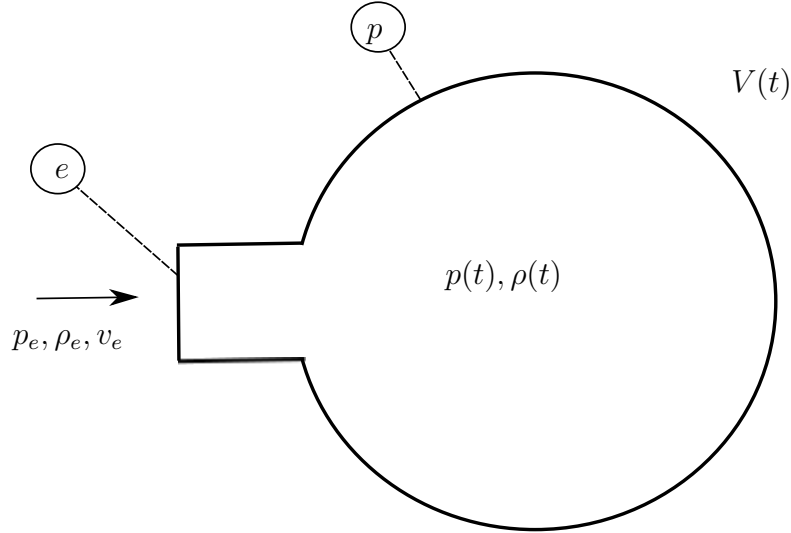


Figure 7.2: Esquema para el estudio del llenado de un depósito de gas de volumen variable mediante las ecuaciones de conservación.

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2, \quad (9)$$

de donde tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas. Estas se pueden simplificar en ciertos casos de interés, cuando el compresor toma el aire directamente de la atmósfera o cuando lo expulsa directamente a ella (ver figura ??). En el primer caso, la entalpía de remanso de entrada es la misma que la entalpía de remanso en la atmósfera y por tanto,

$$W = G \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_a}{\rho_a} \right) = G h_a \left[\left(\frac{p_2}{\rho_2} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2 \right) - 1 \right]. \quad (10)$$

Para el caso de tener una turbina en lugar de un compresor sólo habría que cambiar la dirección del flujo, o cambiar el signo al valor de W (porque en este caso la entalpía de remanso en la entrada es mayor que la entalpía de remanso en la salida).

Extrapolando los resultados a problemas con fluidos incompresibles, partiendo de se tiene que:

$$G = \rho Q, \quad h_0 = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + U = P \quad (11)$$

y por tanto, la potencia mecánica en una bomba se emplea en incrementar la presión de remanso:

$$W = Q(P_2 - P_1). \quad (12)$$

7.3 Llenado y vaciado de depósitos

Para el llenado y vaciado de depósitos hay que aplicar las ecuaciones de conservación de la masa y energía al depósito. Supongamos de forma general que el depósito pudiera cambiar de volumen mientras se llena. Las superficies que lo componen son la externa p y la de entrada e , de área A_e . Aplicando la ecuación de conservación de la masa se tiene que:

$$G = \frac{d(\rho V)}{dt}. \quad (13)$$

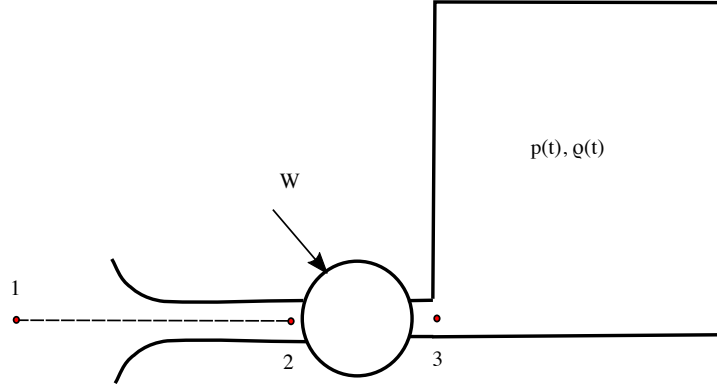


Figure 7.3: Esquema para el estudio del llenado de un depósito de gas de volumen constante introduciendo el aire mediante un compresor desde la atmósfera.

Al aplicar la ecuación de conservación de la energía y suponer que la energía cinética dentro del depósito es despreciable, que las fuerzas másicas y viscosas también lo son y existe calor sobre las paredes, se tiene que

$$\frac{d(\rho e V)}{dt} = Gh_{0i} - p \frac{dV}{dt} + Q, \quad (14)$$

que queda finalmente como

$$\frac{1}{\gamma - 1} \frac{d(pV)}{dt} = Gh_{0i} - p \frac{dV}{dt} + Q, \quad (15)$$

En el caso de que el calor transferido sea nulo, la ecuación anterior se puede simplificar

$$V \rho^\gamma \frac{d(p/\rho^\gamma)}{dt} = \gamma G \left(\frac{p_e}{\rho_e} - \frac{p}{\rho} \right). \quad (16)$$

Si el flujo de entrada es subsónico, $p_e = p$ y su el número de Mach a la entrada es pequeño, $\rho = \rho_e$ y por tanto se puede usar de forma aproximada

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = cte. \quad (17)$$

7.4 Ejemplo de problema de llenado de depósitos mediante compresores

Plantearémos en esta sección un problema aplicado que consiste en el llenado de aire de un depósito de volumen constante V que impulsa el aire directamente de la atmósfera. Para ello, usaremos todo lo aprendido en las secciones anteriores. Se han marcado distintos puntos en la línea de corriente a través de la cual seguiremos el fluido. Para facilitar los cálculos, supondremos que la energía cinética en 3 es mucho menor que su entalpía. Inicialmente, el fluido se encuentra en la atmósfera exterior, a presión p_a y densidad ρ_a , y prácticamente parado, con lo que la entalpía de remanso se puede calcular fácilmente:

$$h_{01} = h_a = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_a}{\rho_a}. \quad (18)$$

Desde el punto 1 al punto 2 se conserva la entalpía de remanso, $h_{01} = h_{02}$. Desde el punto 2 al punto 3, se tiene un salto de entalpía de remanso,

$$W = G(h_{03} - h_{02}) = G \left(h_3 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_3^2 \right) - h_{01} \right) = G h_a \left[\left(\frac{p_4}{p_a} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_3^2 \right) - 1 \right], \quad (19)$$

donde tendremos que imponer que $M_3 \ll 1$ puesto que la energía cinética es despreciable y que por condición de contorno $p_4 = p_d$. Ahora habría que aplicar las ecuaciones de llenado de un depósito. La ecuación de conservación de la masa será

$$V \frac{d\rho_d}{dt} = G, \quad (20)$$

y al suponer que la energía cinética de entrada en el depósito es despreciable y que no existe calor aplicado al depósito, la ecuación de conservación de la energía se puede simplificar a

$$\frac{p_d}{\rho_d^\gamma} = \frac{p_a}{\rho_a^\gamma}, \quad (21)$$

donde se ha supuesto que en el instante $t = 0$, el depósito se encuentra a presión y densidad atmosférica. De la ecuación (21) se puede determinar

$$\rho_d = \rho_a \left(\frac{p_d}{p_a} \right)^{1/\gamma}, \quad (22)$$

y por otro lado de la ecuación (19)

$$G = \frac{W}{h_a} \left(\left(\frac{p_d}{p_a} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right). \quad (23)$$

La ecuación diferencial a resolver queda finalmente,

$$\begin{cases} V \frac{d}{dt} \left(\rho_a \left(\frac{p_d}{p_a} \right)^{1/\gamma} \right) = \frac{W}{h_a} \left(\left(\frac{p_d}{p_a} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right), \\ t = 0, p_d = p_a. \end{cases} \quad (24)$$

Adimensionalizamos la ecuación tomando

$$\eta = \frac{p}{p_a}, \quad \tau = \frac{t}{t_c}, \quad (25)$$

y obtenemos un tiempo característico de

$$t_0 = \frac{V \rho_a h_a}{W}, \quad (26)$$

y la ecuación adimensional queda como

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{d\tau} = \frac{1}{1-\eta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}, \\ t = 0, \eta = 1. \end{cases} \quad (27)$$

Capítulo 8

Concepto de capa límite. Capa límite laminar.

8.1 Introducción

A finales del siglo XVII, Newton postuló la relación entre esfuerzos y velocidad de deformación. Las ecuaciones definitivas son debidas a Navier (1822), Poisson (1829), Saint-Venant (1843) y Stokes (1845). Éste último es el impulsor de la teoría a muy bajos números de Reynolds y el estudiante debe recordar los casos analizados. Como ya se vio y se analizó durante la primera mitad de la asignatura, la teoría de flujos viscosos predice razonablemente bien la tendencia experimental. Sin embargo, existe otra teoría a grandes números de Reynolds que también predice a la perfección el comportamiento de los fluidos. Esta teoría ideal se debe a otros grandes científicos como Euler (1755) y Helmholtz (1858) que enuncian los conceptos y las relaciones de la vorticidad, así como Kelvin (1869) que desarrolla el teorema de la circulación. Estos flujos no viscosos se han analizado mediante funciones potenciales. Gracias también a la teoría de flujos ideales, y aunque no se han descrito en profundidad en la asignatura, el estudiante puede reconocer cómo se describen con éxito aspectos relacionados con las ondas sonoras o las ondas superficiales en líquidos (resaltos hidráulicos, y su analogía con las ondas de choque). Gracias a esta teoría se puede medir por ejemplo el caudal que circula por una tobera convergente-divergente. En este caso particular, cuando la teoría ideal “fallaba”, se justificaba por la aparición del fenómeno de cavitación. Así pues, existen dos teorías que funcionan bien, pero que no son generales, esto es, dependen del caso particular de estudio que se pretende analizar.

Existe además una gran discrepancia en relación a la condición de contorno de la velocidad en la superficie de un objeto sólido sobre el que circula un fluido. En el caso de la teoría viscosa, la velocidad es idénticamente nula (es la condición real), mientras que en el caso de la teoría ideal es la componente normal la que debe ser nula, si bien el fluido puede *deslizar* sobre la superficie. Además, en el caso de la teoría viscosa, la resistencia que un fluido ejerce sobre un cuerpo sólido es considerada elevada. No ocurre lo mismo en el caso de la teoría ideal donde la resistencia es nula. Esto último puede ser *cierto*, según las observaciones experimentales, si el cuerpo es fuselado, pero nunca ocurre si el cuerpo es romo. Este concepto ya se conoce por parte del estudiante y se ha denominado “Paradoja de D’Alambert”.

El científico Ludwig Prandtl revolucionó la Mecánica de Fluidos con un artículo de tan solo ocho páginas, que expuso en un Congreso celebrado en Heidelberg, en el año 1904. En este artículo se explica cómo existen dos regiones bien diferenciadas: una región ex-

terna, donde el flujo es ideal (no viscoso); y otra interior, denominada **capa límite**, que es extremadamente delgada.¹ En la región interna, o capa límite, sí se puede imponer la condición real de un campo de velocidad nulo sobre la superficie del sólido. Además de explicar este concepto y unir por fin las dos Escuelas existentes hasta el momento, Prandtl predijo su espesor y propuso la variable de semejanza para derivar la teoría y la solución analítica sobre una placa plana. En este tema se pretende desarrollar matemáticamente la estimación del espesor de capa límite y se deriva así mismo la solución de la capa límite sobre una placa plana (solución de Blasius). Se comentarán las implicaciones y los aspectos prácticos y tecnológicos. Se ha de resaltar que Ludwig Prandtl es uno de los padres científicos de la aerodinámica subsónica básica, y las implicaciones de la teoría de capa límite en el vuelo de aviones, así como en el diseño de motores a reacción fueron muy importantes para el desarrollo de la aeronáutica militar y civil moderna.

Para finalizar se ha de destacar que, aunque la teoría de capa límite y la Mecánica de Fluidos Computacional son muy útiles para comprender los flujos exteriores, los cuerpos con geometrías complejas suelen requerir datos experimentales relativos a las fuerzas y momentos producidos por el flujo. Tales flujos son muy comunes en estudios ingenieriles como la Aerodinámica (aviones, cohetes, proyectiles), Hidrodinámica (barcos, submarinos, torpedos), Transporte (automóviles, trenes, camiones, ciclomotores, motocicletas), Ingeniería civil o eólica (edificios, puentes, torres de agua, aerogeneradores) o Ingeniería marina (boyas, rompeolas, tuberías, cables).

8.2 Ecuaciones y condiciones de contorno.

8.2.1 Desarrollo matemático. Hipótesis y orden de magnitud

En la figura 8.1 se representa el corte bidimensional de un cuerpo con una forma genérica $S(x)$ sobre el cual se pretende realizar el análisis a partir de las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento.

En el anterior esquema hay que tener presente que L y R representan la longitud característica en la dirección x y el radio característico de la superficie, respectivamente. Matemáticamente, la capa límite aparece cuando se eliminan los términos (viscosos) de mayor orden lejos del contorno, mientras que cerca de él se mantienen estos términos para imponer las condiciones de contorno sobre la superficie. En realidad sólo es necesaria la hipótesis de que el espesor de capa límite $\delta(x)$ (longitud característica en la dirección y) es mucho menor en comparación con la longitud característica que define el tamaño del obstáculo (L), es decir, lo que expresamos matemáticamente como $\delta(x) \ll L$.

Si suponemos que el flujo bidimensional es laminar, incompresible y estacionario, podemos plantear las ecuaciones de conservación y las condiciones de contorno. Consideramos también que las propiedades del fluido son constantes, de tal forma que los problemas mecánico y térmico se encuentran desacoplados.

Las ecuaciones originales y los órdenes de magnitud de cada uno de los términos se enuncian a continuación. Sabiendo que U_0 y V_0 van a ser las velocidades características en las direcciones x e y , respectivamente, se tiene:

¹Aunque la designación anglosajona es *boundary layer*, ésta no debe traducirse como *capa de contorno*, ya que está ampliamente aceptado el término *capa límite*.

Capa límite laminar

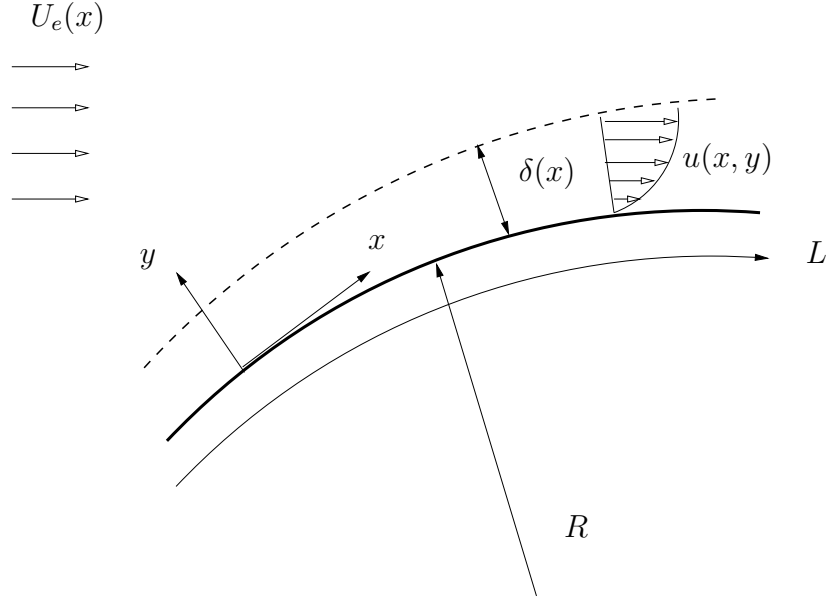


Figure 8.1: Esquema de la capa límite bidimensional sobre un cuerpo sólido. Se observan los ejes de coordenadas (x,y) sobre el que incide un flujo con velocidad $U_e(x)$. $\delta(x)$ representa el espesor de la capa límite y $u(x,y)$ es el campo de velocidad que se adapta desde cero a la velocidad exterior $U_e(x)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

$$\frac{\widehat{U_0}}{L} \quad \frac{\widehat{V_0}}{\delta}$$

Así pues, comparando el orden de magnitud, y teniendo en cuenta que $\delta \ll L$, se llega a:

$$V_0 \sim \frac{\delta}{L} U_0 \ll U_0, \quad (2)$$

de tal forma que la velocidad característica en el eje y es mucho menor que la del eje x . Por tanto, el flujo se puede considerar *casi* unidireccional.

Por otro lado, con las mismas hipótesis anteriores, podemos plantear la ecuación de conservación de cantidad de movimiento en la dirección x , junto con el orden de magnitud de cada uno de los términos:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\widehat{U_0^2}}{\rho L} \quad \frac{\widehat{U_0 V_0}}{\rho \delta} \quad \frac{\widehat{\Delta_L p}}{L} \quad \frac{\widehat{U_0}}{\mu L^2} \quad \frac{\widehat{U_0}}{\mu \delta^2}$$

del mismo modo, en la dirección y se tiene

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (4)$$

$$\overbrace{\frac{U_0 V_0}{\rho L}} \quad \overbrace{\frac{V_0^2}{\rho \delta}} \quad \overbrace{\frac{\Delta_{Tp}}{\delta}} \quad \overbrace{\frac{V_0}{\mu L^2}} \quad \overbrace{\frac{V_0}{\mu \delta^2}}$$

En las dos últimas ecuaciones Δ_{Lp} y Δ_{Tp} representan el orden de magnitud de la variación de presión en la direcciones longitudinal y transversal (subíndices L y T), respectivamente. Si nos fijamos en estas dos últimas ecuaciones, y teniendo en cuenta la ecuación (2), se deriva que los términos viscosos de mayor orden (multiplicados por μ en los que aparecen derivadas con respecto a x) son despreciables frente a la aquellos con respecto a y con errores del orden de $(\delta/L)^2 \ll 1$.

Por otro lado, si comparamos los términos de gradiente de presiones en la dirección transversal (y) y longitudinal (x) de las ecuaciones (3) y (4) se puede concluir claramente que

$$\frac{\Delta_{Tp}}{\Delta_{Lp}} \sim \frac{\rho V_0^2}{\rho U_0^2} \sim \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 \ll 1. \quad (5)$$

De esta forma, la variación de presión en la dirección transversal es mucho menor que en la longitudinal. Se puede decir entonces que la ecuación (4) se puede sustituir por

$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0, \quad (6)$$

es decir, la presión sólo es función de x . Esta última expresión indica que en el caso de una capa límite bidimensional, laminar y estacionaria, la presión es constante a lo largo de las líneas perpendiculares a la superficie del cuerpo, de tal forma que la presión es la misma tanto en un punto del obstáculo como en otro situado fuera de la capa límite, en la normal a la superficie del cuerpo que pasa por el primero. Esta es la razón por la que los modelos potenciales, en los que no aparece capa límite alguna, proporcionen excelentes resultados cuando lo que se quiere calcular es la sustentación, que depende solo de la distribución de la presión sobre el perfil.

Para calcular la función $p(x)$ es necesario plantear la ecuación del flujo ideal (no viscoso) en la región *externa*, es decir, particularizando la ecuación (3) lejos de la superficie, se tiene:

$$\rho U_e(x) \frac{\partial U_e(x)}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} \approx -\frac{dp}{dx}. \quad (7)$$

Por consiguiente, sólo con la simplificación que se refiere fundamentalmente al aspecto geométrico en el que el espesor de la capa límite $[\delta(x)]$ se supone mucho menor que la longitud característica en la dirección x (L), la capa límite laminar de un flujo incompresible (donde la densidad ρ es constante) se reduce a las ecuaciones que derivó Ludwig Prandtl:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (8)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e(x) \frac{dU_e(x)}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (9)$$

Obsérvese que la viscosidad dinámica se ha cambiado por la viscosidad cinemática. Las condiciones de contorno reales se refieren a la condición de no deslizamiento en la superficie

sólida, la condición de acople de las soluciones en la región interna y externa y, por último la condición de velocidad conocida en el origen de la superficie. Matemáticamente, éstas se expresan como:

$$\begin{aligned} u(x, y) = v(x, y) = 0 & \quad \text{en } y = 0, \\ u(x, y) \rightarrow U_e(x) & \quad \text{en } y/\delta \rightarrow \infty, \\ u(x, y) = u_0(x) & \quad \text{en } x = x_0. \end{aligned} \tag{10}$$

8.2.2 Estimación del espesor de la capa límite laminar e incompresible

De la ecuación simplificada (9) se pueden estimar los órdenes de magnitud de los términos convectivos y viscosos. Si igualamos ambos términos se tiene:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \sim v \frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{U_0^2}{L} \sim \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{\nu U_0}{\delta^2} \tag{11}$$

de forma que el espesor de la capa límite se relaciona con el número de Reynolds a través de la expresión

$$\frac{\delta}{L} \sim \sqrt{\frac{\nu}{U_0 L}} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}. \tag{12}$$

Así pues, se observa como a medida que el número de Reynolds aumenta, el espesor de la capa límite disminuye, de tal forma que en el caso de flujos ideales el espesor es prácticamente nulo.

De forma genérica se dice que la capa límite $\delta(x)$ es aquél punto que cumple que la velocidad $u(x, y)$ alcanza el 99% de la velocidad exterior $U_e(x)$. A esto nos referimos con la línea punteada de las figuras 8.1 y 8.2. Por otro lado, de la ecuación (12) se puede decir que este espesor de la capa límite crece con x mediante la relación

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}. \tag{13}$$

Esta última ecuación indica que en la solución de Blasius, tal y como se verá en la siguiente sección, la capa límite crece de modo parabólico con la distancia al borde de la placa.

Las implicaciones tecnológicas de la capa límite son muy importantes. Como se verá en temas posteriores los efectos de viscosidad son importantes para poder explicar la fricción que un objeto tiene al desplazarse. Por consiguiente, todo vehículo que se mueva en aire o agua (piénsese en aviones, coches o submarinos) ve aumentada o disminuida su fricción según el tipo de control que se realice sobre la capa límite. En el caso particular de un avión, existen fenómenos físicos relacionados con la capa límite que explican la generación de sustentación de los perfiles, el desprendimiento de la propia capa límite o la entrada en pérdidas de perfiles y alas. Por otro lado, es fundamental reiterar que la condición de contorno de no deslizamiento es fundamental para explicar la aparición de la resistencia de un objeto al estar en movimiento. Este aspecto se desarrollará a continuación.

8.3 Capa límite sobre una placa plana

En esta sección el análisis se ha limitado al caso de una capa límite bidimensional, incompresible y estacionaria que se desarrolla sobre una placa plana paralela a la corriente incidente de velocidad constante U_∞ (ver esquema en la figura 8.2) o cuya placa tenga un radio de curvatura mucho mayor que el espesor de la capa límite.

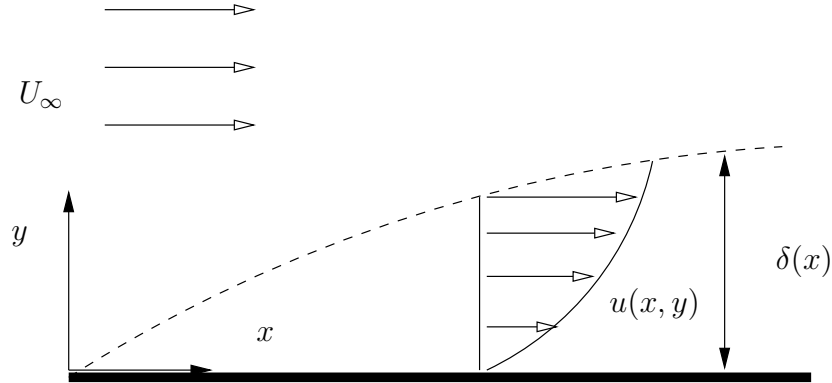


Figure 8.2: Esquema de la capa límite bidimensional sobre una placa plana. Se observan los ejes de coordenadas (x,y) en la superficie sobre la que incide un flujo con velocidad U_∞ . $\delta(x)$ representa el espesor de la capa límite y $u(x,y)$ es el campo de velocidad que se adapta desde cero a la velocidad exterior U_∞ .

Las ecuaciones y las condiciones de contorno que se van a utilizar son (8)-(10), por lo que se supone además que los efectos térmicos son inexistentes o despreciables, de modo que para estudiar el movimiento basta con las ecuaciones anteriores. No se conoce solución analítica para el sistema de ecuaciones diferenciales (8)-(10), aunque todavía se puede avanzar en la resolución del problema admitiendo alguna simplificación adicional respecto al campo de presiones en el exterior de la capa límite. En lo que sigue se supone que la velocidad sobre el objeto va a ser U_∞ y es constante, por lo que el campo de presiones, según (7), es constante, lo que da lugar a la solución de Blasius. El sistema y las condiciones de contorno con esta simplificación se expresa como:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (14)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (15)$$

$$u(x, y) = v(x, y) = 0 \quad \text{en } y = 0,$$

$$u(x, y) \rightarrow U_\infty \quad \text{en } y/\delta \rightarrow \infty,$$

$$u(x, y) = U_\infty \quad \text{en } x = x_0. \quad (16)$$

Este problema tiene solución de semejanza. Si bien este concepto se introduce en la asignatura que amplía la Mecánica de Fluidos, se comentará brevemente su origen y su implicación matemática. Básicamente, la variable de semejanza que soluciona el problema de

ecuaciones en derivadas parciales nace cuando no existe una longitud característica definida en el problema y sirve para pasar de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales a otro sistema de ecuaciones en derivadas ordinarias. La solución de semejanza se basa en la invariancia del problema diferencial frente a algún tipo de transformación de las variables. El proceso para obtener la variable de semejanza no se explica en este tema, al ser un curso introductorio de la Mecánica de Fluidos.

Se define la variable de semejanza η como

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{2}\delta(x)} = \frac{y}{\sqrt{2\nu x/U_\infty}}. \quad (17)$$

Usando la función de corriente Ψ (que obliga a cumplir idénticamente la incompresibilidad del flujo), se pueden obtener las velocidades como

$$u = \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}. \quad (18)$$

Finalmente, suponiendo que la solución de semejanza en la variable de la función de corriente se puede definir como

$$\Psi = \sqrt{2\nu U_\infty x} f(\eta), \quad (19)$$

se tiene que la velocidad longitudinal se expresa mediante

$$\frac{u}{U_\infty} = f'(\eta), \quad (20)$$

y el sistema de ecuaciones (14)-(16) se reduce a la ecuación diferencial

$$f''' + f'' f = 0, \quad (21)$$

con las condiciones de contorno

$$f(0) = f'(0) = 0,$$

$$f'(\infty) = 1, \quad (22)$$

donde la prima indica derivada con respecto a η , f es la función de Blasius y $f' = \frac{u}{U_\infty}$. A la ecuación (21) se le llama ecuación de Blasius. Paul Richard Heinrich Blasius fue uno de los primeros discípulos de Prandtl y derivó y resolvió el sistema (21)-(22) con tan sólo 25 años. La integración de la ecuación (21) ha de hacerse por un método iterativo y requiere un cierto ingenio. Cualquiera que sea el método de integración empleado (por ejemplo, el método de Runge-Kutta), como la ecuación (21) es de tercer orden, al iniciar la integración hacen falta tres condiciones de contorno. Obviamente interesa comenzar la integración en la pared de la placa ($\eta=0$), donde ya se disponen de dos condiciones de contorno [ver ecuación (22)], pero hace falta suponer el valor de una tercera condición para que el proceso pueda arrancar. Este problema aparece en otros muchos casos de integración numérica y su proceso de resolución se conoce como *método de disparo*: si se supone conocida la derivada segunda ($d^2 f/d\eta^2$) en la pared de la placa y se le asigna un valor a esta derivada, el proceso de integración puede

arrancar avanzando en la variable η . Procediendo así, lo más probable es que cuando η sea lo suficientemente grande no se cumpla la condición en $\eta \rightarrow \infty$, es decir, $f'(\infty) = 1$. Esto indica que no se ha escogido un valor correcto para la derivada segunda de f . Se ha de seleccionar por tanto un nuevo valor y repetir el proceso cuantas veces sea necesario hasta que se cumpla el criterio de convergencia. El valor definitivo es $f'' \approx 0.4696$. En la figura 8.3 se representa la solución $f'(\eta)$.²

Código:

```

close all
clear all
% Define the ODE
% q = [f'',
%      f',
%      f];
% dqdf = [f''', = [-f''*f = [-q(1)*q(3)
%              f'',   f'',   q(1)
%              f'],   f'],   q(2)]
dqdelta=@(eta ,q) [-q(1)*q(3);q(1);q(2)];
% Define the initial condition..
% f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(0) = f20
% f20 = 0.3;
filename = 'figura1.png';
% Solve the ODE between eta = 0 and eta = 10
[eta ,qf] = ode45(dqdelta ,[0 10],[f20 ,0 ,0]);
% Plot the results
plot(qf(:,2),eta , 'LineWidth',2);
hold on
plot([1 1],[0 10], '—r')
plot(f20*[0 5],[0 ,5])
hold off
axis([0 1.2 0 10])
xlabel('$f(\eta)$', 'Interpreter', 'LaTeX', 'FontSize',20)
ylabel('$\eta$', 'Interpreter', 'LaTeX', 'FontSize',20)
set(gca, 'FontSize',20, 'FontName', 'times')
print(gcf, ['../figures/',filename], '-dpng')

```

Tal y como se ha comentado el espesor de la capa límite $\delta(x)$ se puede definir de múltiples formas, siendo una de las más aceptadas, aquella distancia en la que la velocidad $u(x, y)$ es el 99% de la velocidad de la región externa U_∞ . Esto sucede para un valor de $\eta \approx 3.5$ (ver figura 8.3), es decir,

²Se puede proponer al estudiante el desarrollo de un código Matlab que calcule la solución del sistema (21)-(22).

Capa límite laminar

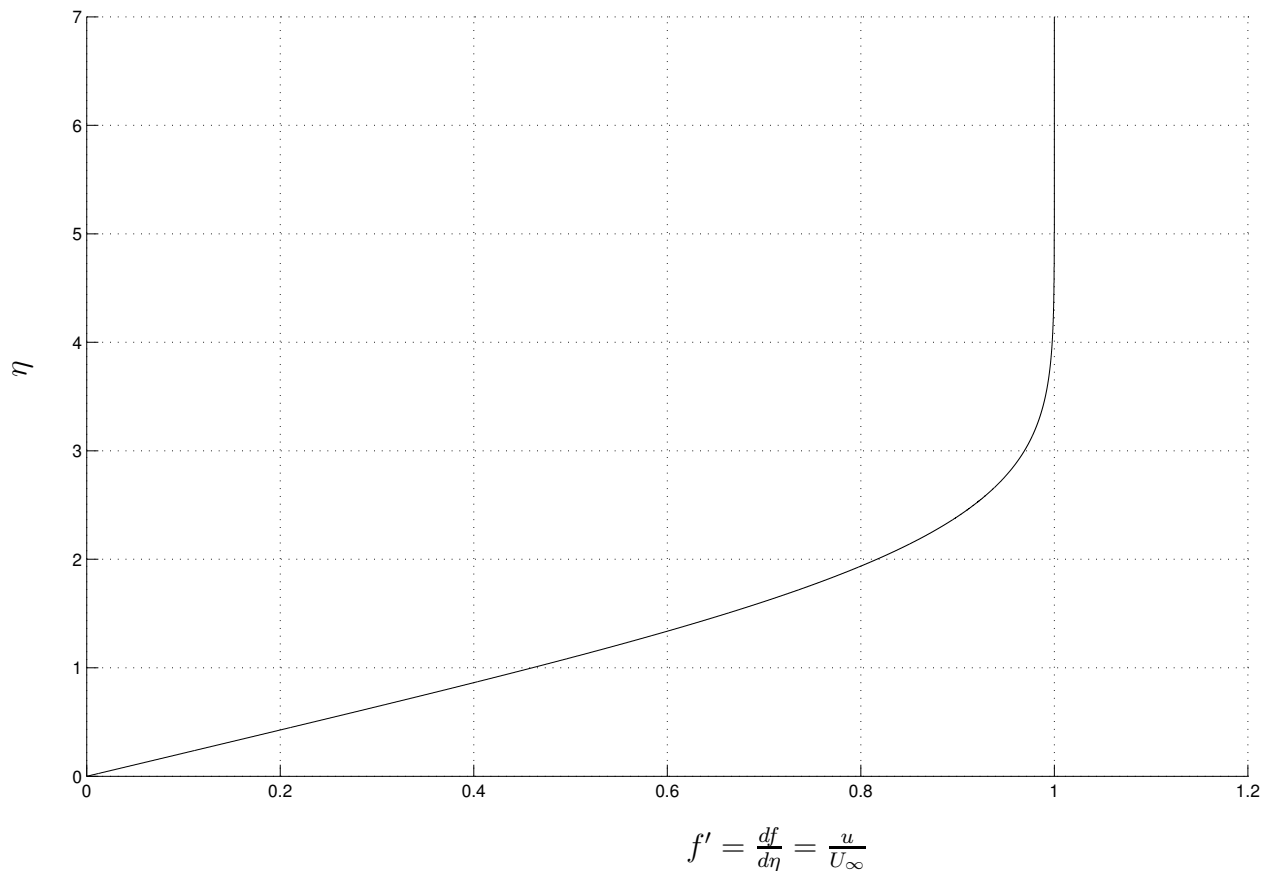


Figure 8.3: Solución de Blasius, $f'(\eta)$.

$$\delta(x) \approx 4.95 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}. \quad (23)$$

Así, por ejemplo, una placa plana de 10 cm de longitud colocada en un túnel de agua con una velocidad de 1 cm/s y una temperatura de 20 grados Celsius tiene un espesor la capa límite al final de la placa de aproximadamente 16 mm. La misma placa colocada en un túnel de aire tendría un espesor cercano a los 50 mm. Se observa como a medida que el flujo es más viscoso el espesor de la capa límite aumenta (compárese la viscosidad cinemática del aire, unos 10^{-5} m²/s, frente al valor típico del agua de 10^{-6} m²/s).

Otra definición que surge, una vez conocido el perfil de velocidad, es el denominado espesor de desplazamiento de la capa límite, definido como el espesor que hay que desplazar de la superficie la corriente exterior uniforme para que proporcione el mismo caudal:

$$\int_0^\infty u dy = \int_{\delta_1}^\infty U_\infty dy, \quad (24)$$

por lo que

$$\delta_1(x) \approx 1.72 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}. \quad (25)$$

Otra medida del espesor de la capa límite es el conocido como espesor de la cantidad de movimiento, θ , que es la altura del flujo potencial necesario para contrarrestar la carencia de cantidad de movimiento en la capa límite debido a la fricción con la superficie de la placa plana, es decir,

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dx = \frac{0.664x}{\sqrt{Re}}. \quad (26)$$

Para finalizar, es necesario conocer otro aspecto importante desde el punto de vista ingenieril como es el esfuerzo de fricción sobre la placa. Así pues, una vez conocido el perfil de velocidad sobre la placa mediante la función de Blasius ($f' = \frac{u}{U_\infty}$), se puede conocer el esfuerzo con la expresión

$$\tau_f \approx \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{2\nu x}} f''(0) = 0.332 \sqrt{\frac{\rho \mu U_\infty^3}{x}}. \quad (27)$$

Para un ángulo de ataque nulo, se puede conocer la fuerza de resistencia sobre los dos lados de una placa de longitud L:

$$F = 2 \int_0^L \tau_f dx = 1.328 \sqrt{\rho \mu U_\infty^3} L. \quad (28)$$

Resulta interesante hacer ver que la fuerza de resistencia es proporcional a $U^{3/2}$, ley potencial intermedia entre la lineal de flujos muy viscosos (ley de Stokes, ver tema 8) y la cuadrática de flujos turbulentos desarrollados (ver tema 15). Una vez conocida la fuerza de resistencia F , el coeficiente de fricción se expresa como

$$C_f = \frac{F}{\frac{\rho U_\infty^2 L}{2}} \approx \frac{2.656}{\sqrt{Re}}, \quad (29)$$

donde el número de Reynolds se define como $Re = LU_\infty/\nu$. Este resultado se puede incluso utilizar para estimar la resistencia de cuerpos fuselados, siempre que la capa límite no se separe.

Capítulo 9

Turbulencia

9.1 Introducción

Los flujos de fluidos presentan distintas configuraciones dependiendo de sus velocidades características y por tanto de sus números de Reynolds. El ejemplo más típico es el que se presenta en la figura 9.1, donde se muestra el flujo generado por una vela encendida. En ese problema tenemos un problema compresible, no estacionario y con diferencia de temperatura y flotabilidad. Inicialmente, el flujo en la zona inferior se calienta en contacto con la punta del cigarro encendida y comienza a subir de forma estacionaria. El humo sigue una trayectoria recta sin oscilaciones. En este caso, el flujo se le denomina laminar estacionario. Al seguir subiendo el aire, cada vez más caliente, aumenta su velocidad hasta que dicho flujo se destabiliza y comienza a oscilar y formar torbellinos. Este flujo es lo que se conoce como laminar no estacionario. Por último, este flujo sigue subiendo de forma desordenada y llega un momento en el que el humo desaparece completamente. Este es el punto en el que aparece la turbulencia. Una de las características más importantes de la turbulencia es que es capaz de difundir de forma muy eficiente todas las propiedades fluidas.

9.2 Escalas de la turbulencia

En un flujo turbulento cabe distinguir distintas escalas, que vienen determinadas por ciertas magnitudes características.

1. Macroescala. La escala mayor, del tamaño característico del experimento, cuyas magnitudes son L , T y U , y donde se define el número de Reynolds macroscópico del problema, $Re = UL/\nu$. En esta escala, los torbellinos tienen un carácter isótropo, es decir, que dependen de la dirección.
2. Escalas intermedias. Estas son escalas en las que todavía no se realiza disipación viscosa, con magnitudes características l , t y u .
3. Microescala. En esta escala se produce toda la disipación turbulenta, y el flujo es isótropo, es decir, que se comporta igual en todas las direcciones del espacio. Sus dimensiones características son λ , τ y v

Vamos a comparar la energía específica por unidad de tiempo que tiene el sistema, ϵ , con

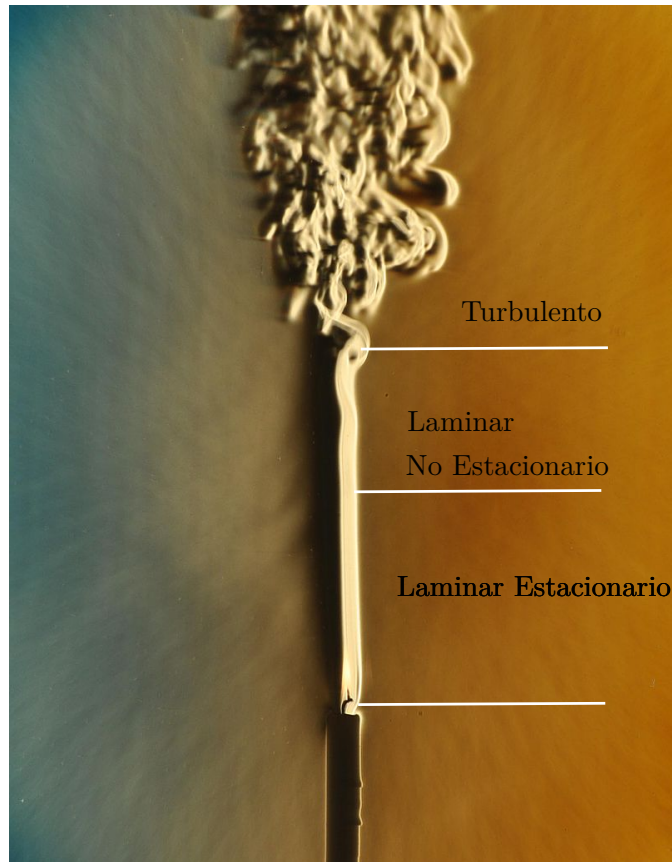


Figure 9.1: El flujo generado por una vela permite observar los distintos regímenes de flujo que aparecen en mecánica de fluidos: el flujo laminar estacionario, el flujo laminar no estacionario y el flujo turbulento (Dr. Gary Settles).

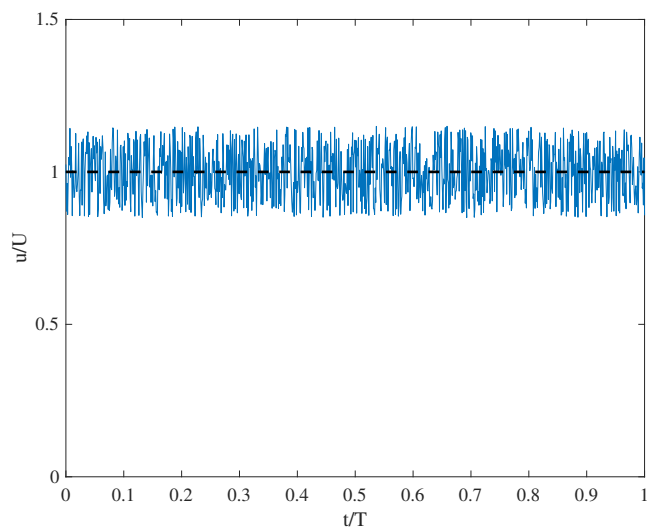


Figure 9.2: Medida instantánea de la velocidad turbulenta en un punto fijo de un experimento. Se incluye en línea discontinua el valor promedio del mismo.

la disipación viscosa Φ ,

$$\epsilon \approx \frac{1/2\rho v_c^2}{t_c} \approx \rho v_c^3 l_c^{-1}, \quad \Phi = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \approx \mu v_c^2 l_c^{-2}. \quad (1)$$

En la escala mayor,

$$\epsilon_L = \frac{\rho U^2}{T}, \quad \Phi_L = \frac{\mu U^2}{L^2}, \quad \frac{\epsilon_L}{\Phi_L} \approx \frac{UL}{\nu} = Re_L \gg 1. \quad (2)$$

En la escala intermedia, como la disipación es despreciable, se transfiere la energía de las grandes escalas y por tanto $e_L = e_l$,

$$\epsilon_l = \frac{\rho U^2}{T}, \quad \Phi_l = \frac{\mu l^2}{L^2}, \quad \frac{\epsilon_l}{\Phi_l} \approx \frac{Ul}{\nu} = Re_l \frac{l}{L} = Re_L \left(\frac{l}{L} \right)^{4/3} \gg 1. \quad (3)$$

Por último, la energía de la macroescala llega hasta la microescala y por tanto $e_L = e_l = e_\lambda$,

$$\epsilon_\lambda = \frac{\rho U^2}{T}, \quad \Phi_\lambda = \frac{\mu l^2}{L^2}, \quad \frac{\epsilon_\lambda}{\Phi_\lambda} \approx \frac{U\lambda}{\nu} = Re \left(\frac{\lambda}{L} \right) = 1. \quad (4)$$

En esta escala, que es la más pequeña a la que llega la turbulencia, la viscosidad es lo suficientemente importante como para disipar completamente los torbellinos. Por esto se impone que la energía contenida es del mismo orden que la disipación. Esto produce una relación de escalas, que da el orden de magnitud de lo que se conoce como la escala de Kolmogorov, que es la escala más pequeña que se ha de resolver para poder tener en cuenta todo el proceso de disipación turbulenta.

$$\frac{\lambda}{L} = Re_L^{-4/3}. \quad (5)$$

9.3 Modelado matemático de la turbulencia

Si fuéramos capaces de medir en un punto una variable como puede ser la velocidad en una dirección del espacio en un flujo turbulento durante un periodo de tiempo conocido T obtendríamos una señal como la que aparece en la figura 9.2. En ella, durante el tiempo T se tiene que la velocidad oscila de forma aleatoria alrededor de un valor promedio. Si definimos la velocidad como la suma de una velocidad promedio más las fluctuaciones,

$$u = U + u', v = V + v', p = P + p', \quad (6)$$

y definimos el promediado temporal como

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad (7)$$

se puede demostrar de forma sencilla que el promediado temporal de todos los términos lineales valen:

$$\bar{u} = U, \quad \overline{u'} = 0. \quad (8)$$

Sin embargo, todos los términos no lineales como $\overline{u'u'}$ o $\overline{u'v'}$ por ejemplo, no serán nulos.

Si se toma el promediado de las ecuaciones para un flujo incompresible y bidimensional se obtienen las ecuaciones turbulentas, que corresponden con

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(U^2) + \frac{\partial}{\partial y}(UV) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial U}{\partial x} - \overline{u'^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial U}{\partial y} - \overline{u'v'} \right) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(UV) + \frac{\partial}{\partial y}(V^2) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial V}{\partial x} - \overline{u'v'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial V}{\partial y} - \overline{v'^2} \right) = 0, \quad (11)$$

que escritas de forma vectorial tomando el vector promedio como $\vec{V} = (U, V)$, se puede escribir como

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0, \quad (12)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho \nabla \cdot (\vec{V} \vec{V}) = -\nabla P, + \nabla \cdot (\overline{\tau} + \overline{\tau}_t), \quad (13)$$

donde $\overline{\tau}_t$ es el tensor turbulento de Reynolds, que se puede definir en 2D como

$$\overline{\tau}_t = \begin{pmatrix} \overline{\rho u'^2} & \overline{\rho u'v'} \\ \overline{\rho u'v'} & \overline{\rho v'^2} \end{pmatrix} \quad (14)$$

Capítulo 10

Capa límite turbulenta y flujo de líquidos en conductos

10.1 Introducción

Los flujos turbulentos se caracterizan, como se ha visto con anterioridad, por tener una gran irregularidad y aleatoriedad, una gran difusión de las magnitudes fluidas y son siempre tridimensionales. Estos flujos al interactuar con una superficie sólida, presentan también una capa límite, pero en este caso tiene otra estructura diferente. En este capítulo vamos a discutir dicha estructura y la aplicaremos a los flujos de líquidos en conductos, que es la aplicación más típica en instalaciones industriales.

10.2 Estructura de la capa límite

Vamos a definir la estructura de la capa límite turbulenta en un caso bidimensional por simplicidad. Supongan que la velocidad promedio se puede definir como $\vec{V} = U\vec{e}_x$, y las fluctuaciones como $\vec{v} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y + w\vec{e}_z$. Las ecuaciones turbulentas de capa límite simplificadas quedan como:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$0 = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \right), \quad (2)$$

y

$$\tau = \mu \frac{\partial U}{\partial y} - \rho \overline{u'v'}, \quad (3)$$

es decir, que el esfuerzo es la suma del esfuerzo viscoso y del turbulento. De la ecuación (1) se puede observar que la velocidad promedio en primera aproximación no depende de la variable longitudinal y por tanto $U = U(y)$. Por otro lado, al no depender de x la velocidad, la presión externa es aproximadamente nula y por tanto la ecuación (2) se puede integrar

Al llegar a la pared las fluctuaciones son nulas y por tanto,

$$\tau = \rho u_\tau^2 = \mu \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (4)$$

donde u_τ es una velocidad definida a partir de la fricción sobre la pared. Suponiendo que dicho valor es constante, se tiene que

$$U = \frac{u_\tau^2}{\nu} y, \quad (5)$$

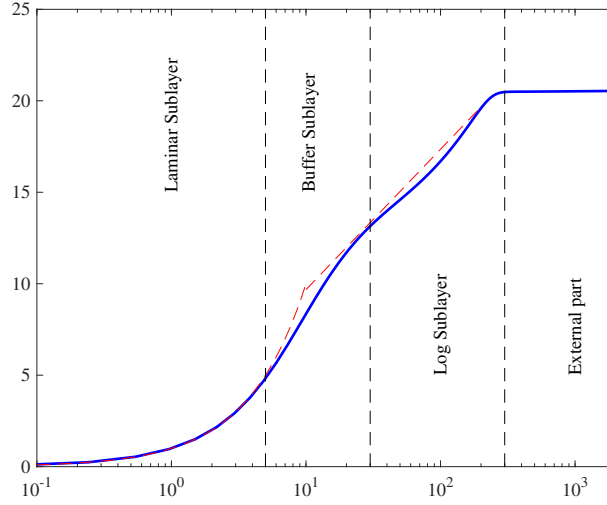


Figure 10.1: Capa límite turbulenta de una capa límite a gradiente de presión nula para $Re_\theta = 670.846$ obtenido de Schlatter et al., Phys. Fluids 21, 051702 (2009)

o

$$\frac{U}{u_\tau} = \frac{u_\tau y}{\nu}, \quad u^+ = y^+. \quad (6)$$

Esto es lo que se conoce como la subcapa laminar, y es válida muy cerca de la pared, es decir, en $y \ll \delta$ y de forma práctica para $y^+ < 5$.

Para la zona externa de la subcapa laminar, donde los esfuerzos turbulentos dominan sobre los laminares, que pueden considerarse despreciables y se puede definir la viscosidad turbulenta como

$$\mu_T = \rho l^2 \frac{dU}{dy}, \quad (7)$$

La longitud l sólo puede depender de la distancia y se define como proporcional a la distancia al pared, con una constante que se obtiene experimentalmente que es la constante de von Karman, κ

$$l = \kappa y, \quad (8)$$

Igualando fricción adimensional

$$\tau = \rho(u_\tau)^2 = \rho \kappa^2 y^2 \left(\frac{dU}{dy} \right)^2, \quad (9)$$

y por tanto

$$\frac{dU}{dy} = \frac{u_\tau}{\kappa y}, \quad (10)$$

cuya solución es

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{u_\tau y}{\nu} \right) + B, \quad u^+ = \frac{1}{\kappa} \log(u^+) + B, \quad (11)$$

donde B es una constante que depende típicamente de la viscosidad. Esta solución es la que se llama subcapa logarítmica, y típicamente comprende las distancias de $30 < y^+ < 300$.

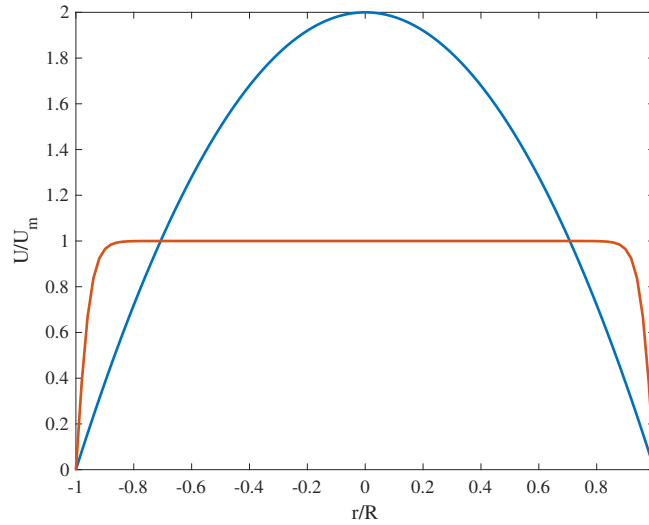


Figure 10.2: Velocidad adimensional laminar en un conducto y velocidad turbulenta en el mismo conducto.

Entre ambas capas descritas matemáticamente en el capítulo hay que incluir otra que se denomina subcapa buffer que adapta la velocidad de la subcapa laminar a la subcapa logarítmica. Pueden observarse estos resultados en la figura 10.1.

10.3 Pérdida de carga en conductos circulares

Una de las primeras consecuencias de la presencia de capas límites turbulentas es el aumento de la difusión de cantidad de movimiento, lo que hace que la energía contenida en el centro del conducto tiende a ir hacia las paredes a disiparse, provocando un achatamiento del perfil de velocidad (ver figura 10.2). Si se define la velocidad media como

$$V_m = \frac{4Q}{\pi D^2}, \quad (12)$$

y se representa la solución laminar de Poiseuille frente a la turbulenta, se observa que para el caso de flujos turbulentos la velocidad en todo el conducto es prácticamente constante e igual a V_m , y que sin embargo ésta tiende a cero en las paredes, provocando unas intensas capas límites que dan lugar a una fricción elevada.

Si tomamos un diferencial de conducto de radio R aplicando un balance de fuerzas en la dirección del flujo se tiene que

$$\frac{dP}{dx} \pi R^2 = \tau 2\pi R, \quad (13)$$

de donde

$$\tau = -\frac{R}{2} \frac{dP}{dx}, \quad (14)$$

y el valor de τ se puede obtener de forma experimental. Para eso se usa alternativamente los valores de los coeficientes C_f o λ definidos como coeficiente de fricción o factor de fricción

respectivamente:

$$C_f = \frac{\lambda}{4} = \frac{\tau}{1/2\rho U_m^2} = 2 \left(\frac{u^*}{U_m} \right)^2. \quad (15)$$

Aplicando el factor de fricción de Fanning, que es el más utilizado, se puede definir que

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{\lambda}{D} \frac{1}{2} \rho U_m^2, \quad (16)$$

Este coeficiente de Fanning se ha obtenido de forma experimental, y depende principalmente del número de Reynolds definido como

$$Re = \frac{vD}{\nu} = \frac{4Q}{\nu\pi D}, \quad (17)$$

y de la rugosidad relativa, ϵ/D . Su valor se suele representar gráficamente mediante el ábaco de Moody (figura 10.3) o se puede obtener de forma analítica con alguna de las expresiones aproximadas que se presentan en la literatura, como por ejemplo la de Colebrook-White

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}} \right) \quad (18)$$

Esta ecuación es implícita y por tanto se tiene que resolver de forma numérica.

10.4 Ecuación general de flujo turbulento en conductos

Para el modelado de flujo turbulento en conductos se usa la ecuación de Bernoulli no estacionaria, a la que se incluye el término de pérdidas por fricción turbulenta.

$$\rho \frac{dv}{dt} + \frac{d}{dx} \left(p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z \right) = -\frac{\lambda}{D} \frac{1}{2} \rho v^2, \quad (19)$$

con x definida en la dirección del flujo a través del conducto.

Recordemos que la energía total de un fluido en un conducto se puede calcular mediante la presión de remanso, definida como

$$P = p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z. \quad (20)$$

Integrando en la dirección del flujo se tiene que

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{\lambda}{D} \frac{1}{2} \rho v^2 - \rho \frac{dv}{dt}, \quad (21)$$

y por tanto

$$\int_1^2 dP = \int_0^L \left(-\frac{\lambda}{D} \frac{1}{2} \rho v^2 - \rho \frac{dv}{dt} \right) dx. \quad (22)$$

Si se supone el caso habitual en el que el diámetro de la tubería no cambia a lo largo del conducto y por tanto la velocidad es constante (por conservación de la masa lo que se conserva a lo largo de la tubería es el caudal Q , y $v = 4Q/(\pi D^2)$), se tiene que

$$P_2 - P_1 = -\frac{\lambda L}{D} \frac{1}{2} \rho v^2 - \rho L \frac{dv}{dt}. \quad (23)$$

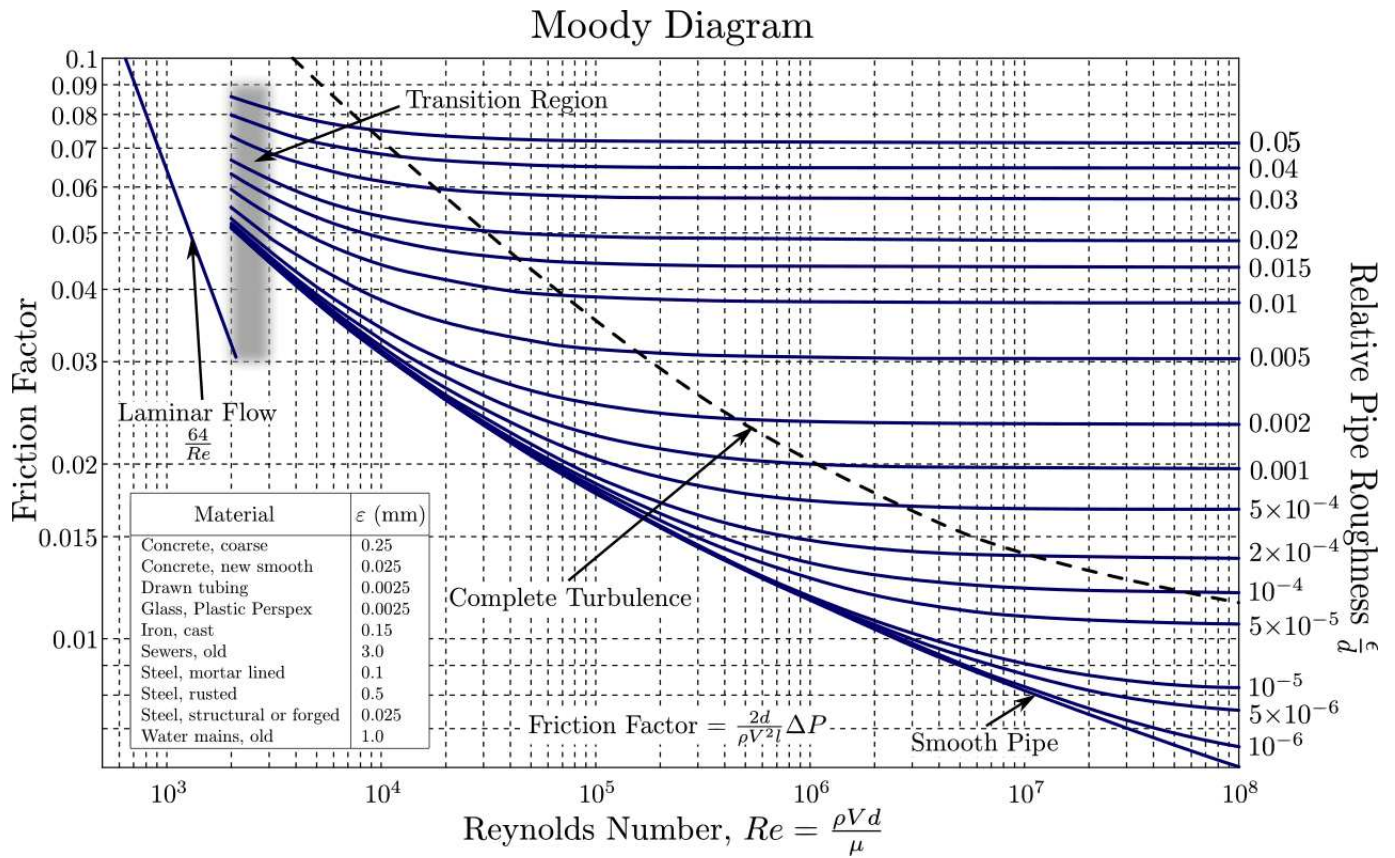


Figure 10.3: Diagrama de Moody. Representa el factor de fricción en función del número de Reynolds en el conducto y de la rugosidad relativa.

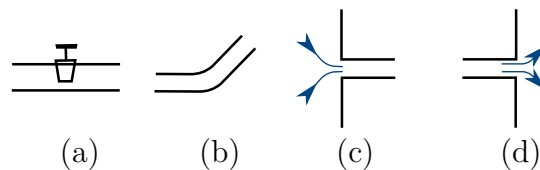


Figure 10.4: Típicos casos en sistemas de tuberías donde aparecen pérdidas de presión secundarias: (a) válvulas, (b) codos, (c) contracciones o (d) ensanchamientos.

Elemento	Constante de pérdidas K
Válvula de globo (completamente abierta)	10.0
Válvula de compuerta (completamente abierta)	0.19
Codo de 90°	0.90
Codo de 45°	0.42
Entrada afilada a un conducto circular	0.50
Entrada redondeada a un conducto circular	0.25
Expansión brusca	$(1 - A_1/A_2)$, A_1 área de entrada y A_2 área de salida

Table 10.1: Ejemplos de valores de la constante K en pérdidas secundarias en tuberías.

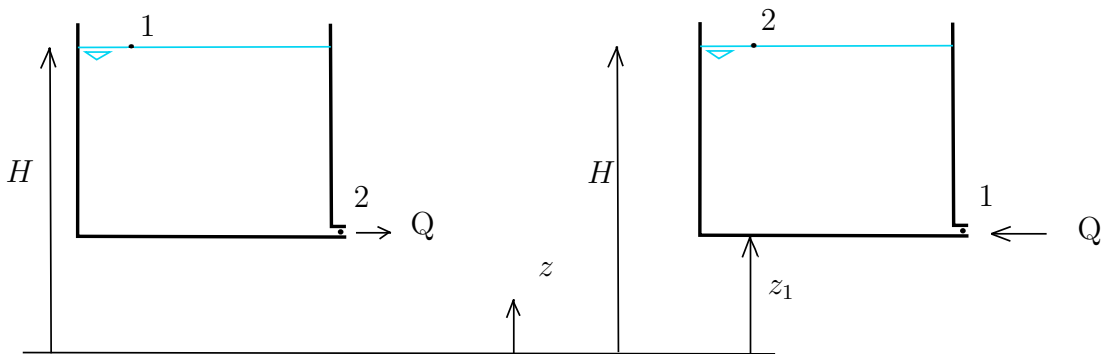


Figure 10.5: Esquema para la definición de condiciones de contorno en sistema de tuberías. A la izquierda un vaciado o descarga de depósito y a la derecha un llenado o carga de depósito.

10.5 Pérdidas secundarias en sistemas de tuberías

Aparte de las pérdidas primarias debido a la fricción con las paredes, en los circuitos pueden existir otras pérdidas secundarias debidas a válvulas, codos, contracciones o ensanchamientos (ver figura 10.4). En todos estos casos se tiene que la pérdida de presión se mide como una constante adimensional que multiplica a la energía cinética por unidad de volumen presente en la tubería, y se mide experimentalmente,

$$P_2 - P_1 = K \frac{1}{2} \rho v^2. \quad (24)$$

En la tabla 10.1 se representan algunos valores típicos para elementos usuales en instalaciones hidráulicas.

10.6 Condición de contorno en sistemas de tuberías

Típicamente existen dos condiciones de contorno en los problemas de modelado de instalaciones hidráulicas (ver figura 10.5): descarga y carga de depósitos. En la descarga de depósitos típicamente se conserva la presión de remanso:

$$P_1 = p_a + \rho g H = P_2. \quad (25)$$

En la carga de depósitos, se conserva la presión termodinámica. Esto quiere decir que la presión termodinámica dentro de la tubería, justo al llegar al depósito en el que descarga, vale igual que la presión en el fondo del depósito, y por tanto, la presión termodinámica a la salida será igual a la presión debida al peso del aire sobre el depósito (típicamente p_a) más el peso de la columna de agua:

$$P_1 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = (p_a + \rho g h) + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_a + \rho g H + \frac{1}{2}\rho v_1^2. \quad (26)$$

La principal diferencia es el término de energía cinética por unidad de volumen, que quiere decir que el fluido llega con una cierta velocidad v al depósito, y si la entrada no está perfectamente diseñada, de forma que su velocidad decrezca sin pérdida de energía, toda esa energía se pierde en turbulencia y rozamiento con el líquido del depósito. Es por esto que este término suponen pérdidas del sistema y aparecerán junto con las demás pérdidas de éste.

10.7 Ejemplos de problemas de flujo de líquidos en conductos

Partiremos de un sistema típico de impulsión de agua de un depósito inferior a un depósito superior. Para ello se usa una bomba de potencia conocida $W = C Q$, con C una constante. El depósito inferior tiene una altura de la superficie libre de H_1 medida desde el suelo. El fluido sale de él, pasa por la bomba y posteriormente por una tubería de longitud total L y diámetro D en la cual se puede suponer el flujo en régimen turbulento completamente desarrollado, y por tanto, con λ constante. Finalmente, antes de entrar en el depósito superior se encuentra una válvula con constante de pérdidas K_v conocida. El depósito superior tiene la superficie inferior una altura H_2 conocida, una sección A y un orificio de tamaño D en su parte inferior que vierte el agua hacia el exterior. Supongan que el depósito 1 es infinito. Nos piden:

1. Determinen las ecuaciones que rigen el problema para las variables $Q(t)$ y $H(t)$.
2. En el caso de que el problema sea estacionario, determinen el caudal que suministrará la bomba.

Para resolver el problema iremos calculando las ecuaciones en la dirección del flujo. Las incógnitas de un problema como este son tres, $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ y $H(t)$. Comenzamos con el primer circuito, que va desde una condición de contorno a otra (1–5). Primero determinamos el valor de la presión de remanso en 1, P_1 :

$$P_1 = p_a + \rho g H_1. \quad (27)$$

En la descarga del depósito se tiene que se conserva la presión de remanso, si no hay pérdidas localizadas (secundarias) en la contracción hacia 2:

$$P_2 = P_1. \quad (28)$$

Ahora tenemos la ganancia de presión de remanso debido a la bomba,

$$P_3 = P_2 + W/Q = P_2 + C, \quad W = Q(P_3 - P_2) = CQ. \quad (29)$$

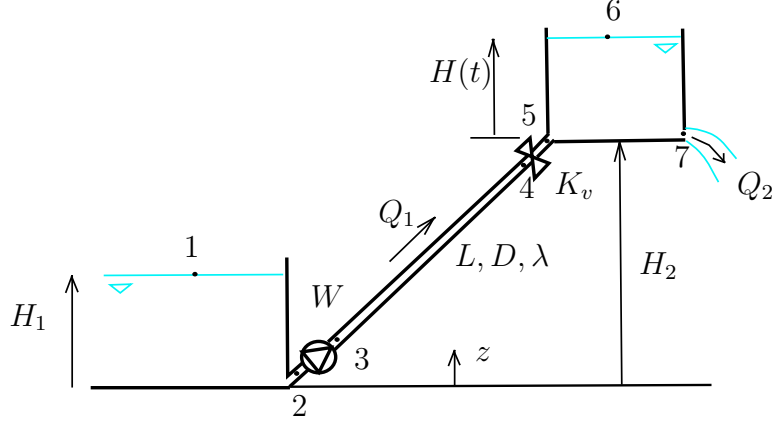


Figure 10.6: Ejemplo de instalación compleja de impulsión.

Posteriormente tenemos el conducto,

$$P_4 = P_3 - \frac{\lambda L}{D} \frac{1}{2} \rho v_1^2 - \rho L \frac{dv_1}{dt}. \quad (30)$$

Incluimos las pérdidas de la válvula,

$$P_5 = P_4 - K_v \frac{1}{2} \rho v_1^2. \quad (31)$$

Finalmente imponemos la condición de contorno en 5, dentro del tubo, que nos indica que la presión termodinámica en 5 es la del fondo del depósito, que corresponde con la presión debida al peso del aire, junto con el peso del agua hasta el fondo:

$$P_5 = p_5 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_5 = (p_a + \rho g H) + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g H_2. \quad (32)$$

Agrupando todos los pasos de 1 hasta 5 se tiene que

$$\rho L \frac{dv_1}{dt} = C + \rho g (H_1 - H - H_2) - \left(1 + \frac{\lambda L}{D} + K_v \right) \frac{1}{2} \rho v_1^2. \quad (33)$$

Si se quisiera expresar esta misma ecuación en función del caudal Q_1 se sabe que

$$Q_1 = \frac{\pi D^2}{4} v_1, \quad (34)$$

y por tanto

$$\frac{4\rho L}{\pi D^2} \frac{dQ_1}{dt} = C + \rho g (H_1 - H - H_2) - \left(1 + \frac{\lambda L}{D} + K_v \right) \frac{8\rho}{\pi^2 D^4} Q_1^2. \quad (35)$$

Pasamos al segundo circuito, que es el de descarga desde 6 hasta 7. Para ello imponemos que la presión de remanso en 6 se conoce y es igual que la de 7.

$$P_6 = p_a + \rho g (H_1 + H), \quad P_7 = P_6. \quad (36)$$

Imponemos la condición de contorno de descarga a la atmósfera. La presión termodinámica en 7 es el peso del aire en forma de presión, que corresponde con p_a , por tanto,

$$P_7 = p_7 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_7 = p_a + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g H_2. \quad (37)$$

Agrupando términos y expresándolo en función de Q_2 se tiene que

$$\rho g H = \frac{8\rho}{\pi^2 D^4} Q_2^2. \quad (38)$$

La tercera ecuación que hace falta para cerrar el problema se obtiene de conservación de la masa en el depósito:

$$A \frac{dH}{dt} = Q_1 - Q_2. \quad (39)$$

Si se quiere calcular el punto de funcionamiento estacionario se han de hacer nulos todos los términos de derivada temporal y por tanto:

$$A \frac{dH}{dt} = Q_1 - Q_2 = 0, \quad Q_1 = Q_2 = Q_s. \quad (40)$$

En la segunda ecuación se tiene que

$$H_s = \frac{8}{g\pi^2 D^4} Q_s^2. \quad (41)$$

y metiendo esta expresión en la ecuación del primer circuito se tiene que,

$$Q_s = \left(\frac{C + \rho g (H_1 - H_2)}{\left(2 + K_v + \frac{\lambda L}{D}\right) \frac{8\rho}{\pi^2 D^4}} \right)^{1/2}. \quad (42)$$