

Exploración dinámica de fronteras en entornos desconocidos basada en la entropía

Jaime Godoy-Calvo, Dahui Lin-Yang, Ricardo Vázquez-Martín*, Alfonso García-Cerezo

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática, Universidad de Málaga, C/ Dr. Ortiz Ramos, 29010, Málaga, España.

To cite this article: Godoy-Calvo, J., Lin-Yang, D., Vázquez-Martín, R., García-Cerezo, A. 2023. Dynamic entropy-based method for exploring frontiers in unknown environments. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial 20, 213-223. <https://doi.org/10.4995/riai.2023.18740>

Resumen

La exploración en entornos de catástrofes proporciona información valiosa de alta fidelidad al personal de los dispositivos de rescate ante situaciones de desastre, ofreciendo la posibilidad de reducir el tiempo de búsqueda y recuperación de víctimas. Este trabajo presenta un método de exploración que evalúa las fronteras del entorno conocido basado en la entropía mediante una función de expectativa, con el objetivo de maximizar la ganancia de información. De esta forma el método propuesto emplea esta métrica para planificar la exploración en base a la expectativa de ganancia de información futura, asegurando una estrategia que minimiza el tiempo de exploración al mismo tiempo que maximiza la incorporación de nueva información al mapa. Debido al enfoque empleado para resolver el problema se consigue evitar la dependencia del método de ganancia de información con los mapas de tamaño fijo, y se propone un modelo independiente del sensor utilizado en la exploración donde se considera la distribución de obstáculos en la cercanía de las fronteras. Para su evaluación, se presentan resultados en diferentes entornos con simulaciones que demuestran la mayor eficiencia en la planificación de la exploración de las zonas desconocidas hasta completar el conocimiento completo del entorno a explorar. El método propuesto está públicamente disponible en Godoy-Calvo et al. (2022).

Palabras clave: robótica móvil, robótica móvil autónoma, navegación de robots, entropía, teoría de la información.

Dynamic entropy-based method for exploring frontiers in unknown environments

Abstract

Exploration in disaster areas provides valuable, high-fidelity information to rescue personnel in disaster situations, with the potential to reduce the time for search and recovery of victims. This paper presents an exploration strategy based on entropy to evaluate the frontiers of the known part of the map using an expectation function. The proposed method employs this metric for exploration planning based on the expectation of future information gain, ensuring a strategy that minimises exploration time while maximising the inclusion of new information into the map. This approach avoids the dependency of the information gain method on fixed-size maps and proposes a sensor-independent model that considers the distribution of obstacles in the frontiers' surroundings. In the evaluation, results are presented in different environments with simulations that demonstrate the efficiency in the exploration planning of the unknown areas, until the complete knowledge of the environment to be explored is completed. The proposed method is publicly available at Godoy-Calvo et al. (2022).

Keywords: mobile robotics, autonomous mobile robotics, robot navigation, entropy, information theory.

1. Introducción

Actualmente, la robótica de rescate es un campo emergente que tiene como objetivo proveer de herramientas tecnológicas para la actuación de forma rápida y eficiente ante eventos

catastróficos, con el objetivo de reducir el tiempo de búsqueda y atención de potenciales víctimas, así como el tiempo de recuperación de los daños ocasionados tras un desastre (Delmerico et al., 2019). Uno de los principales retos de la robótica

*Autor para correspondencia: rvmartin@uma.es

Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

ca de rescate es la exploración de zonas desconocidas de forma autónoma, a partir de mapas o representaciones del entorno construidos mediante *SLAM* (*Simultaneous Localization And Mapping*) (Vázquez-Martín, 2009). El objetivo de la exploración es construir un mapa de la zona inexplorada y así establecer una buena localización en referencia al mapa construido. Los mapas de ocupación (*occupancy grid maps*) suelen emplearse en la construcción de mapas métricos derivados de métodos de *SLAM* (Cadena et al., 2016).

Una vez obtenida la construcción de un mapa mediante *SLAM*, es necesario planificar los movimientos del vehículo para resolver sus tareas de forma autónoma (Martínez et al., 2020). Habitualmente, la planificación de caminos en robótica autónoma se ha ocupado de encontrar el camino óptimo entre un origen y un destino, recibiendo menos atención la búsqueda de caminos óptimos con múltiples objetivos y menos aún la exploración de zonas desconocidas del entorno. En este trabajo se emplea la teoría de la información de Shannon (2001) para determinar los desplazamientos del robot que maximicen el conocimiento del entorno a partir de la expectativa de ganancia de información futura.

Una estrategia efectiva para la garantizar la ganancia de información en un mapa en construcción consiste en visitar las fronteras del entorno conocido. Las fronteras son los límites entre la zona conocida y la inmediata zona desconocida contigua a la anterior. Al visitar las fronteras, se garantiza que el robot tome lecturas de los sensores de zonas nuevas ampliando así el territorio conocido y generando futuras fronteras. Este proceso finaliza cuando el área a explorar se conoce por completo, es decir, no se generan nuevas fronteras (Yamauchi, 1997). La exploración basada en la frontera funciona empleando como métrica la distancia a la frontera y/o el tamaño de dicha frontera, pero no tiene en consideración las expectativas de lo que hay más allá de la frontera.

La determinación del futuro incierto de los mapas de ocupación es un punto clave y suele ser determinada a partir de varios enfoques. La forma más apropiada para aproximar esta incertidumbre consiste en emplear mapas probabilísticos de ocupación (Moravec and Elfes, 1985). La representación de estos mapas probabilísticos están basados en aproximaciones heurísticas. La ganancia de la información se determina con la entropía de Shannon, una medida de incertidumbre del valor de probabilidad de las celdas de ocupación. La entropía de Shannon está sujeta a errores debido a que se trabaja con aproximaciones y no con medidas reales. Además, la entropía futura o esperanza de una acción no se puede medir de una forma directa, por tanto se asume que dicha esperanza es equivalente a la que se obtendría con las medidas de los sensores una vez la acción es realizada. Esto induce a errores debido a la naturaleza no lineal de la entropía de Shannon.

En este trabajo se propone una nueva estrategia de exploración basada en la evaluación de fronteras en función de predicciones de las zonas inexploradas del entorno. El objetivo del método propuesto es la exploración eficiente de un entorno desconocido en función de la expectativa de ganancia de información futura. La forma de evaluar la ganancia de información permite eliminar la dependencia de los métodos basados en la entropía del conocimiento previo del tamaño del entorno a explorar y, además, ofrecer un método independiente del sensor

utilizado para la exploración. Como aportaciones del presente trabajo se pueden enumerar las siguientes:

- Estimar la ganancia de información en dichas fronteras para poder planificar la visita de las fronteras del mapa de forma eficiente con el objetivo de explorar una zona desconocida al completo en el menor tiempo posible y minimizando los desplazamientos necesarios.
- Se propone una solución que calcula la ganancia de información de forma directa basándose en un mapa de ocupación probabilístico dinámico en función de las lecturas de los sensores. Dicha solución se plantea como un problema de optimización donde el objetivo es maximizar la ganancia de la información y, por lo tanto, minimizar la entropía futura.
- La métrica propuesta para evaluar la entropía en las fronteras del mapa presenta como novedad la posibilidad de evaluar la ganancia de información en áreas de tamaño variable, sin necesidad de aplicarse a mapas de tamaño conocido, siendo apropiada para entornos completamente desconocidos.
- Esta métrica emplea un modelo independiente del sensor utilizado, ya que se basa en la definición de una función lineal gradiente para evaluar la expectativa de ganancia de información en las zonas desconocidas de las fronteras, con su correspondiente valor asociando en función de la distribución de obstáculos en la cercanía de la frontera.

Este artículo está organizado de la siguiente forma: en la Sección 2 se analiza el trabajo relacionado con la presente propuesta, pasando a describir los conceptos fundamentales para la formulación del problema en la Sección 3. En la Sección 4 se presenta la estrategia de exploración, describiéndose en la Sección 6 la metodología empleada para evaluar el método propuesto. Finalmente, en la Sección 7 se discuten los resultados obtenidos y se esbozan las líneas de trabajo futuro. El método propuesto está públicamente disponible en Godoy-Calvo et al. (2022).

2. Trabajo Relacionado

La exploración es un problema esencial de la navegación autónoma a la hora de crear mapas o representaciones de zonas desconocidas. Se han planteado varios métodos para resolver dicho problema con el fin de obtener mapas completos y precisos en el menor tiempo posible. La exploración basada en fronteras es una solución efectiva que obliga al robot a navegar a zonas del entorno que son desconocidas aún. En Yamauchi (1997) se propone enviar al robot a la frontera más cercana como objetivo hasta que no queden fronteras, lo que conlleva al conocimiento completo del entorno. Para mejorar la exploración, en Mobarhani et al. (2011) se propone agrupar las fronteras con un histograma polar con el fin de evaluar cada conjunto teniendo en cuenta la distancia y el número de fronteras que se encuentran contenidas en el área a explorar. Hörner (2016) realiza la exploración proporcionando un peso al tamaño de la frontera, de forma que se pueda seleccionar fronteras en función de su tamaño. Otra modificación del algoritmo clásico de

exploración de fronteras es el propuesto por Cieslewski et al. (2017) donde la elección de la frontera depende también de la velocidad del robot intentando siempre realizar la menor variación en su trayectoria. Otros métodos basados en generación de costes con fronteras para exploración autónoma pueden ser encontrados en da Silva Lubanco et al. (2020). En general, la exploración con fronteras permite plantear el problema como una selección de las zonas más relevantes a visitar según unos criterios o propiedades que se atribuyen a las fronteras.

Un enfoque concreto para evaluar las fronteras con respecto al mapa que se va generando es utilizando el concepto de ganancia de la información. Este enfoque permite aplicar una medida heurística a un mapa discreto basándose en teoría de la información como propone Stachniss et al. (2005). La cuestión principal de este tipo de aproximaciones es la forma de plantear una función de expectativa para evaluar la posible ganancia de información futura. En Deng et al. (2020) se modela la ganancia de la información obtenida por un sensor utilizando un filtro borroso, cuyo modelo y filtro debe adaptarse para cada sensor. En Kaufman et al. (2016) se propone un algoritmo puramente reactivo, basándose tan solo en las medidas de los sensores. Los métodos puramente reactivos, sin ningún tipo de planificación, presentan el inconveniente de explorar el entorno de forma aleatoria sin minimizar los desplazamientos del vehículo al no establecer un plan de acción con objetivos y poder cumplir la exploración del entorno al completo. Además, este tipo de métodos tienen el gran inconveniente de caer en mínimos locales, que provoca no poder salir de situaciones con muchos obstáculos.

Es posible obtener un mapa donde las fronteras no puedan localizarse de manera sencilla (por ejemplo un entorno 3D), siendo necesario recurrir a métodos de muestreo del espacio. Una de las estrategias más comunes son las basadas en árboles RRT (*Rapidly-exploring Random Tree*) para la detección de las fronteras (Umari and Mukhopadhyay, 2017a), siendo Perea Ström et al. (2017), Umari and Mukhopadhyay (2017b) y Dai et al. (2020) algunos ejemplos de este tipo de métodos. Estas soluciones basadas en la evaluación de la ganancia de información tienen la desventaja de requerir un tamaño de mapa fijo. Esto último supone un inconveniente en tareas de exploración debido a que se trata de descubrir entornos completamente desconocidos. En este artículo se propone una estrategia de exploración que soluciona el problema de mapa fijo combinando la teoría de la información con la búsqueda por fronteras.

Recientemente, se ha propuesto trabajos que aplican técnicas de aprendizaje profundo (*deep learning*) y aprendizaje por refuerzo (*reinforcement learning*) junto con la teoría de la información. Bai et al. (2017) proponen usar un algoritmo entrenado para recorrer laberintos y Shrestha et al. (2019) emplea un algoritmo que rellena los huecos del mapa a modo de predicción, también se pueden encontrar otros trabajos en los que se combinan estos métodos con algoritmos tradicionales (Li et al., 2020). Estos métodos están limitados a representaciones bidimensionales del entorno, la necesidad de tener gran cantidad de ejemplos para el entrenamiento, junto con las limitaciones del proceso de aprendizaje y la definición adecuada de funciones de utilidad para el aprendizaje por refuerzo suponen un incremento notable en su complejidad. También existen métodos que utilizan funciones de utilidad para la toma de decisiones en la

exploración, basándose en grafos (Chen et al., 2022) que aumentan la complejidad y por consiguiente el tiempo de cómputo, así como incluir la incertidumbre en la localización (Wang and Englot, 2020), cuestión que añade complejidad al problema de exploración cuando la incertidumbre en la localización y la creación del mapa debe ser resuelta empleando un método de SLAM adecuado para su construcción (Cadena et al., 2016).

3. Planteamiento del problema

3.1. Mapas de ocupación

Sea un mapa $\mathbf{M}$ descompuesto en n_j celdas de rejilla distribuidas uniformemente en un espacio 2-D, donde se asocia una variable aleatoria binaria $\mathbf{m}_i$ a la i -ésima celda de forma que para cada $i \in \{1, 2, \dots, n_j\}$, definiendo $\mathbf{m}_i = 1$ cuando dicha celda está ocupada; y $\mathbf{m}_i = 0$ cuando está libre. La localización y posición de cada celda se asume como conocida. Un mapa $\mathbf{M}$ está definido por $\{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \dots, \mathbf{m}_{n_j}\}$ y, por tanto, en un mapa existen 2^{n_j} posibles valores.

Otra variable aleatoria definida es $\bar{\mathbf{m}}_i = 1 - \mathbf{m}_i$ por conveniencia. La probabilidad de que la i -ésima celda esté ocupada se define como $P(\mathbf{m}_i)$, y la probabilidad de que esté libre se define como $P(\bar{\mathbf{m}}_i) = 1 - P(\mathbf{m}_i)$.

Sea t una variable de tiempo discreta y X una variable aleatoria, el valor de la variable aleatoria en un tiempo cualquiera t es $X_t = \{x_t, R_t\}$ donde $x_t \in \mathbb{R}^2$ y $R_t \in S^1 = \{q \in \mathbb{R}^2 \mid \|q\| = 1\}$. $X_{1:t}$ representa el historial de posiciones desde el tiempo inicial hasta el tiempo actual t . La construcción del mapa de ocupación se realiza a partir de las lecturas de los sensores, para determinar la distancia de los obstáculos al robot. Para cada posición x_t se recibe la lectura del sensor compuesto por n_z rayos 1D de dirección conocida cuyo valor representa la distancia entre la posición del robot y el obstáculo más cercano en dicha dirección $p(z_{t,l} | m, X_t)$ donde $z_{t,l}$ representa el l -ésimo valor de la t -ésima lectura de $Z_t = \{z_{t,1}, z_{t,2}, \dots, z_{t,n_z}\}$ y $Z_{1:t}$ representa el historial de lecturas.

3.2. Definición de entropía

Debido a que los mapas de ocupación son representaciones probabilísticas del espacio, existe una incertidumbre. La entropía de Shannon se emplea como medida de dicha incertidumbre. Conocidas las probabilidades de cada celda del mapa $\mathbf{M}$, la entropía de Shannon se define como la suma de la entropía de cada una de las celdas.

$$H(P(\mathbf{m})) = - \sum_{i=1}^{n_m} \{P(\mathbf{m}_i) \log(P(\mathbf{m}_i)) + P(\bar{\mathbf{m}}_i) \log(P(\bar{\mathbf{m}}_i))\} \quad (1)$$

La entropía de la i -ésima celda es máxima cuando $P(\mathbf{m}_i) = 0.5$ (incertidumbre máxima, totalmente desconocido) y mínima cuando $P(\mathbf{m}_i) \in \{0, 1\}$ (poca incertidumbre, conocida).

4. Estrategia de exploración dinámica de fronteras basada en la entropía

El objetivo de la exploración autónoma es determinar las posiciones futuras con el fin de maximizar la información del mapa o disminuir la entropía del mismo. Debido a que el mapa

está incompleto, existen dificultades para generar una trayectoria útil. Por ello, los puntos objetivo son posiciones intermedias de la zona conocida en los cuales se recibe información nueva.

El algoritmo consiste en una toma de decisiones para determinar el siguiente objetivo en la exploración del mapa. Para ello, se evalúa la entropía asociada a cada frontera según una serie de hipótesis recogidas en una función de expectativas. A continuación, se evalúa el coste de cada frontera empleando una función de coste que incluye la ganancia de información en base a la función de expectativas y la distancia de la frontera a la localización actual del robot. Finalmente, la frontera con menor coste es la seleccionada para continuar la exploración del entorno.

Para un tiempo t , $P(m|X_{1:t}, Z_{1:t})$ es conocido. Sea X_c la posición del robot después de la t -ésima iteración. La esperanza de la ganancia de información $I(X_c)$ se define como la diferencia entre ambas.

$$I(X_c) = H(P(m|X_{1:t}, Z_{1:t})) - E[H(P(m|X_{1:t}, Z_{1:t}, X_c, Z_c))] \quad (2)$$

Donde $H(P(m|X_{1:t}, Z_{1:t}))$ se puede calcular y $E[H(P(m|X_{1:t}, Z_{1:t}, X_c, Z_c))]$ representa la esperanza o expectativa de la entropía que se espera conocer en el desplazamiento a X_c y se adquieren Z_c lecturas. El objetivo de la exploración autónoma se basa en maximizar dicha ganancia I .

4.1. Función de coste

El algoritmo presentado en este trabajo es el encargado de escoger la próxima meta a visitar durante la exploración. Con el fin de limitar los puntos de interés, sólo se consideran candidatos los centroides de las fronteras que existan en el mapa de ocupación.

La función de coste mediante la cuál se determina el punto más interesante a visitar es la siguiente:

$$U(X_c) = C_d \cdot d(X_c) - C_i \cdot f \cdot I(X_c) \quad (3)$$

donde $C_d, C_i \in \mathbb{R}$ representan los pesos de la función y permiten modular el comportamiento de la exploración, $d(X_c)$ representa la distancia euclídea desde el sistema de referencia base del robot al punto objetivo, f es un factor de ponderación asociado a cada frontera que depende de la relación existente entre los obstáculos y las celdas libres y el término $I(X_c)$ hace referencia a la ganancia de información.

4.2. Función de expectativas

La función de expectativas define cómo se espera que sea la entropía futura en el mapa de forma anticipada. La definición de una función de expectativas es fundamental para moldear el espacio desconocido y establecer una expectativa sobre su ganancia de información. En este trabajo se ha propuesto que actúe en dos partes, la primera como una función lineal que modifica las probabilidades de las celdas desconocidas en torno a las fronteras. La segunda es el coeficiente f , que penaliza la ganancia de información en función de los obstáculos presentes en las cercanías de las fronteras. De esta forma, el producto $f \cdot I(X_c)$ de la Ecuación 3 hace referencia a las expectativas de ganancia de información para cada frontera.

4.2.1. Función lineal gradiente

La función lineal pretende modificar la probabilidad de las celdas en torno a las fronteras en función de su distancia normal a las mismas. Se ha supuesto que si una celda está libre y forma parte de una frontera, $P(\mathbf{m}_i) = 0$, la probabilidad de que las celdas de su alrededor sean celdas libres es elevada. La probabilidad de que las celdas desconocidas sean celdas ocupadas aumenta hasta la incertidumbre máxima, $P(\mathbf{m}_i) = 0.5$, conforme se aleja de la celda libre. En la Figura 1 se muestra cómo se modifica la probabilidad de las celdas en torno a la frontera (línea roja) según una distancia Manhattan o D_4 para reducir el coste computacional.

Se ha empleado un algoritmo de búsqueda en anchura de grafos o Breadth-First Search (BFS) (Russel and Norvig, 2021), como se muestra en el Algoritmo 1, en cada una de las fronteras objetivo que localiza las celdas desconocidas cuya distancia normal a la frontera es inferior a un parámetro D y modifica su probabilidad de ocupación según la siguiente ecuación:

$$P(\mathbf{m}_{m_i}) = \min\left(\frac{\text{distance}_{\min}}{2 \cdot D}, 0.5\right) \quad (4)$$

En la Figura 2 se muestra visualmente el efecto de modificar las probabilidades de las celdas con el BFS expuesto anteriormente en la herramienta RViz de ROS.

0	0	0.1	0.2
0	0.1	0.2	0.3
0.1	0.2	0.3	0.4
0.2	0.3	0.4	0.5

Figura 1: Modificación de las probabilidades de ocupación

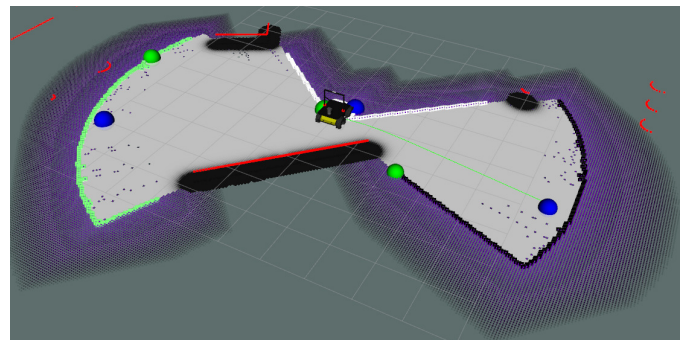


Figura 2: Efecto del gradiente de probabilidades en las fronteras.

Algoritmo 1 Modificación de probabilidad y cálculo del factor de ocupación

Input: Vector de celdas frontera, $distancia_\mu, m$
Output: $m', Free, Occupied$

$Free \leftarrow 0$ ▷ N° de celdas libres
 $Occupied \leftarrow 0$ ▷ N° de celdas ocupadas
 $Visited \leftarrow False$ ▷ Matriz de visita
 $D \leftarrow distancia_\mu$ ▷ Distancia normal a la frontera
 $bfs.push(frontera[0])$ ▷ Se inicia el BFS
while bfs **not empty** **do**
 $m_i \leftarrow bfs.front$
 $bfs.pop$
 for $n \leftarrow 8neighbor(m_i)$ **do**
 if not $Visited(n)$ **then**
 $(X_n, Y_n) \leftarrow Coordinates(n)$
 for f **in** $frontera$ **do**
 $(X_f, Y_f) \leftarrow Coordinates(f)$
 $distance \leftarrow D_4(n, f)$ ▷ Distancia Manhattan
 if $distance \leq distance_{min}$ **then**
 $distance_{min} \leftarrow distance$
 end if
 end for
 if $(distance_{min} \leq D)$ **then** ▷ Dentro del rango
 if n **is unknown** **then**
 $P(n) \leftarrow \min\left(\frac{distance_{min}}{2 \cdot D}, 0.5\right)$
 else if n **is free** **then** ▷ Celda es libre
 $Free++$
 else if n **is occupied** **then** ▷ Celda es ocupada
 $Occupied++$
 end if
 end if
 $Visited(n) \leftarrow True$ ▷ Se establece como visitada
 end if
 $bfs.push(n)$ ▷ Se añade la celda 8-vecina al BFS
 end for
end while

4.2.2. Penalización por obstáculos

La otra parte de la función de expectativas propuesta en este trabajo consiste en un factor de ponderación encargado de penalizar la ganancia de información de la frontera debido a los posibles obstáculos que se encuentren a su alrededor. Los obstáculos pueden provocar mínimos locales irresolubles durante la exploración.

Es intuitivo pensar que una celda con mucha incertidumbre cerca de una libre, sea también una celda libre. Siguiendo el mismo razonamiento, las fronteras que tengan zonas con obstáculos a su alrededor son susceptibles a tenerlos en su zona desconocida. Por ello, se aplica un coeficiente minorativo que penalice una frontera por la cantidad de obstáculos que le rodean.

Para la estimación del valor de f se ha propuesto duplicar el espacio conocido de la frontera en la zona desconocida. Es decir, se ha supuesto que la relación entre las celdas libres frente a las ocupadas se conserva. De este modo, f se calcula como:

$$f = 1 - \frac{k_f \cdot Occupied}{Known} \quad (5)$$

donde $Known$ representa la suma de las celdas libres ($Free$) y ocupadas ($Occupied$) y $k_f \in \mathbb{R}$ es un parámetro que permite modificar el peso de la penalización. El recuento de las celdas se realiza con el Algoritmo 1 expuesto en el punto anterior.

De esta manera, f es máximo cuando no hay obstáculos en torno a las fronteras y decrementa conforme van apareciendo obstáculos llegando incluso a hacerse negativo para $k_f > 1$. Un valor negativo se traduce en aumentar el coste de la frontera en lugar de disminuirlo, favoreciendo así que las fronteras con menor cantidad de obstáculos sean prioritarias durante la exploración.

4.3. Simplificaciones

Para poder evaluar la entropía es necesario determinar los límites del mapa que se van a evaluar. En este trabajo se propone generar un mapa $\mathbf{M}$ con n_j celdas el cual se inicializa con valores con mucha incertidumbre $P(m_i) = 0.5$. Este mapa $\mathbf{M}$ es dinámico, es decir, no tiene un tamaño fijo definido previamente, ya que el entorno a explorar es desconocido. Por tanto, el mapa $\mathbf{M}$ crece conforme se explora el entorno desconocido, sin necesidad de ponderaciones de entropía.

La medida de la incertidumbre según la entropía de Shannon (ver Ecuación 1) en un mapa de probabilidades es máxima cuando $P(m_i) = 0.5$ y es nula para valores conocidos $P(m_i) = \{0, 1\}$, corresponda a un espacio ocupado o libre. De esta manera la entropía del mapa $\mathbf{M}$ sin expectativas se traduce en el número de celdas que quedan por conocer. Sea $C = \{n_m | P(n_j) = \{0, 1\}\}$ el conjunto de celdas conocidas del mapa, $D = \{n_m | P(n_j) = 0.5\}$ el conjunto de celdas desconocidas en el mapa y $F = \{n_m | 0 < P(n_j) < 1 - \{D\}\}$ el conjunto de celdas frontera donde actúa la función de expectativas explicada previamente. En la Figura 4 se muestra gráficamente cómo se clasifican las distintas áreas del mapa según los conjuntos enunciados anteriormente. En general, la entropía para un conjunto genérico Q se define como:

$$H_{\{Q\}} = - \sum_{i=1}^{\{Q\}} \{P(\mathbf{m}_i) \log(P(\mathbf{m}_i)) + P(\overline{\mathbf{m}}_i) \log(P(\overline{\mathbf{m}}_i))\} \quad (6)$$

De forma que, si se evalúa la entropía para cada uno de los conjuntos definidos anteriormente la entropía del mapa completo queda como:

$$H(P(m)) = H_{\{C\}} + H_{\{D\}} + H_{\{F\}} \quad (7)$$

Como simplificación para la esperanza se asume que cuando se visita una frontera se disminuirá la incertidumbre de las celdas evaluadas en la frontera y únicamente las celdas que conforman el conjunto frontera. Sea $F'_k \subset F$ las n_j celdas que conforman el k -ésimo conjunto frontera. La esperanza o expectativa de entropía sujeta a las condiciones propuestas se define como:

$$E_k [H(P(m) | X_{1:D}, Z_{1:D}, X_c, Z_c))] = H_{\{C\} + \{F'_k\}} + H_{\{D\}} + H_{\{F\} - \{F'_k\}} \quad (8)$$

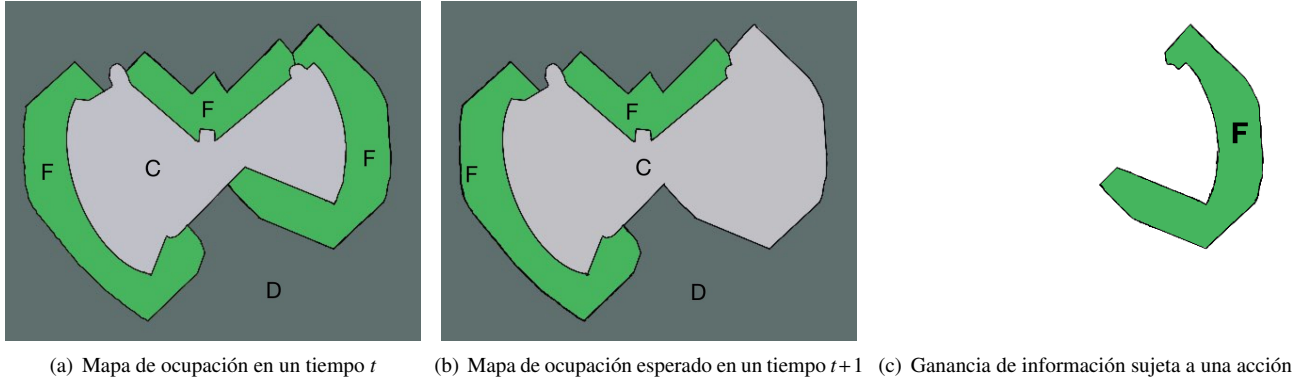
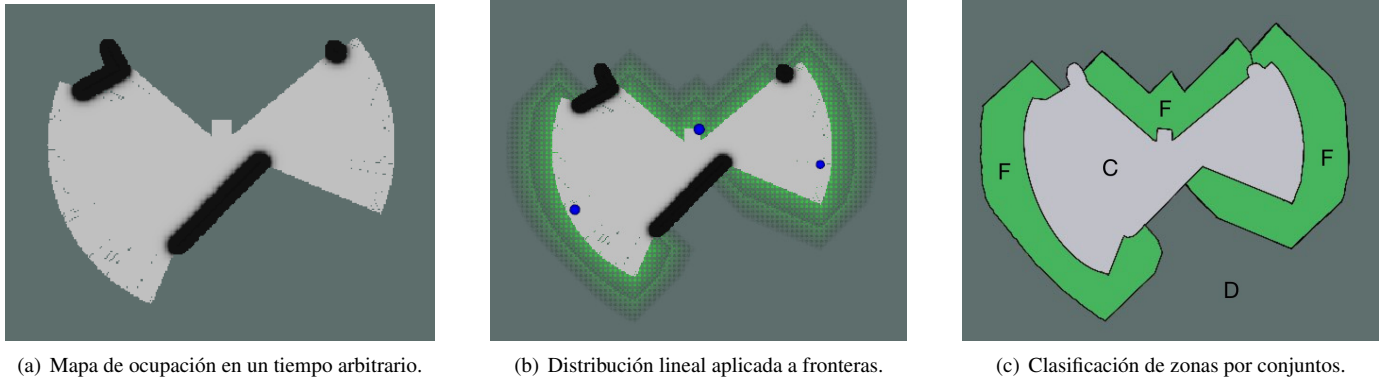


Figura 3: Representación del cálculo de la ganancia de información.

Figura 4: Representación de los conjuntos $\{C\}$, $\{F\}$, y $\{D\}$.Tabla 1: Rango de oscilación de los términos d e I en 100 casos

	d	I
Media	5.81	4956.59
Máximo	11.71	1142.91
Mínimo	0.36	69.84

Tabla 2: Parámetros de la simulación

Algoritmo	C_d	C_i	k_f
Frontera (Frt)	10	1	—
Propuesto (IG)	10	0.01	10

Las celdas pertenecientes a la frontera visitada $\{F'_k\}$ dejan de ser parte del conjunto $\{F\}$ y pasan a ser del conjunto $\{C\}$, como se muestra en la Figura 3. Sabiendo que el conjunto $\{C\}$ evaluado a través de la entropía de Shannon, Ecuación 1, es nulo debido a la baja incertidumbre del conjunto, la ganancia de información se reduce a lo siguiente:

$$I(X_c) = H_{\{F'_k\}} \quad (9)$$

De esta forma, se reduce el coste computacional del método en cada instante de tiempo, ya que solo es necesario evaluar la expectativa de ganancia de información en las fronteras. Además, solo es necesario evaluar las nuevas fronteras, es decir, las que se descubren y se incorporan por primera vez al mapa.

El interés de estudiar la ganancia de la información I en lugar de la entropía es la simplificación en los cálculos, debido

a que sólo allí donde se supongan expectativas, cambios en el mapa de probabilidad, es donde no se anula. Por esta razón es importante definir una buena función de expectativa para la entropía como la propuesta en este trabajo. Una ventaja que ofrece aplicar la entropía de esta forma es la posibilidad de calcularla en entornos de tamaño variable, ya que los métodos convencionales basados en la teoría de la información implican emplear mapas de ocupación de tamaño fijo definido previamente. Este es un aspecto no deseable cuando se trata de explorar un entorno desconocido del que no se tiene ninguna información sobre su extensión.

5. Evaluación de parámetros

Los parámetros empleados en la experimentación se recogen en la Tabla 2, y han sido escogidos empíricamente. Para ello, se han utilizado los mismos entornos empleados en la experimentación en la Sección 6, ya que el objetivo es analizar el orden de magnitud de los parámetros. Se ha evaluado entre que valores oscilan los términos asociados a la ganancia de información I y la distancia euclídea d (ver Tabla 1) de las funciones de coste (Ecuación 3 y Ecuación 12).

Para estimar los parámetros C_i , C_d se ha propuesto que la relación entre los términos de la función de coste sea aproximadamente uno, es decir

$$\frac{C_d \cdot d(X_c)}{C_i \cdot I(X_c)} \approx 1 \quad (10)$$

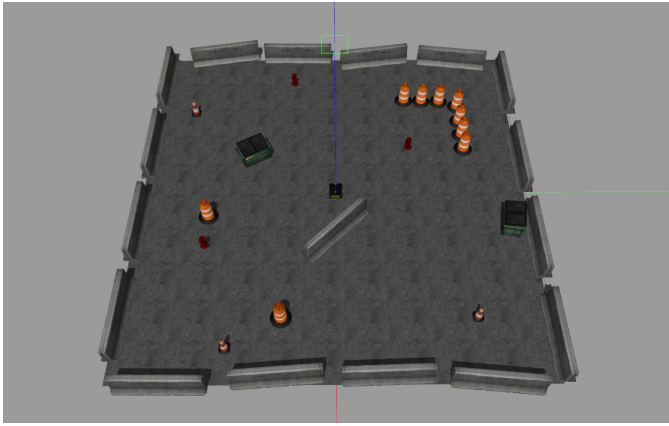


Figura 5: Entorno abierto. Simulador: Gazebo

De esta forma, se consigue que tanto la ganancia de información como la distancia al objetivo tengan la misma importancia en la función de coste.

Para estimar la ganancia k_f , se ha seguido un procedimiento similar al anterior. Se ha evaluado cómo varía el cociente de celdas libres (*Free*) y el total del celdas conocidas (*Known*) en torno a las fronteras para obtener un rango de valores y ajustar dicho rango para que en los casos más desfavorables, con una gran cantidad de obstáculos, el factor de penalización de obstáculos f sea significativo.

$$f' = 1 - \frac{Occupied}{Known} \quad (11)$$

Sin aplicar la ganancia k_f se ha observado como el cociente $f' \in [0.97, 1]$, siendo 0.97 en los casos con más obstáculos y 1 cuando no hay obstáculos. Esto no supone cambios significativos en la ganancia de información. Para conseguir que la penalización de obstáculos sea más significativa, se ha introducido el valor de k_f de forma que $f \in [0.6, 1]$ (Ecuación 5), siendo 0.6 en los casos de mayor cantidad de obstáculos y 1 cuando no hay. De esta forma la penalización de obstáculos influye en el término de la ganancia de información I de una forma adecuada, es decir, penaliza hasta un 40 % la ganancia de información ante la presencia de obstáculos. Resumiendo, la selección parámetros se obtienen balanceando su peso según la Ecuación 10 y la ganancia k_f se obtiene del valor de f seleccionado anteriormente.

6. Experimentación y resultados

6.1. Metodología

El método propuesto ha sido evaluado empleando Ubuntu 18.04.6 LTS con ROS en su versión *melodic* en un computador con procesador AMD Ryzen 7 3750H con Radeon Vega Mobile Gfx, una tarjeta gráfica NVIDIA GeForce GTX 1050 y 8GB de RAM. Se ha simulado en Gazebo con la ayuda de los paquetes *Navigation* (Open Source Robotics Foundation, 2018), *Husky* (Open Source Robotics Foundation, 2019) y *Turtlebot* (Open Source Robotics Foundation, 2020), que contienen las herramientas necesarias para la localización, planificación y navegación evitando obstáculos, SLAM, los modelos de los robots móviles además de los mapas empleados para las simulaciones, respectivamente. Como planificadores se han

empleado los que incluyen el paquete de *Navigation* por defecto, siendo *navfn*, basado en el algoritmo de Dijkstra, como planificador global y *dwa* (*Dynamic Window Approach*) como planificador local.

En la experimentación se ha comparado el algoritmo propuesto con un buscador de fronteras clásico con una función de coste similar a la propuesta en este trabajo, que premia el tamaño de las fronteras (número de celdas que la componen) y penaliza la distancia euclídea desde el sistema de referencia base del robot al objetivo. La decisión de comparar el método propuesto con el basado en fronteras se debe a que ambos métodos de exploración son clasificados como exploraciones basadas en fronteras y, por tanto, la comparación de ambos resultados es apropiada. No se ha incluido en la comparación otros métodos de exploración empleando fronteras más actuales debido a que no están públicamente disponibles. Con esta comparativa se puede mostrar claramente las ventajas del método propuesto, basado en el concepto de frontera pero maximizando el descubrimiento de zonas inexploradas y minimizando las trayectorias del robot. Los pesos del algoritmo de búsqueda de fronteras clásico corresponden a la siguiente expresión:

$$U'(X_c) = C_d \cdot d(X_c) - C_i \cdot A \quad (12)$$

donde A es el número de celdas que componen la frontera (tamaño) y el valor de los parámetros de la Tabla 2 correspondiente al algoritmo de búsqueda de fronteras clásico se han calculado de forma equivalente a lo explicado en la Sección 5.

Se han empleado como robots móviles tanto el modelo *Husky*, equipado con un sensor LiDAR 2D plano SICK LMS1XX, con un rango de 5.5m y con un ángulo de apertura de 270°, como el modelo *turtlebot3* en su versión *burger*, equipado con un sensor LiDAR 2D modelo LDS-01 con un rango de 5m y un ángulo de apertura de 360°. Ambos son considerados sensores de bajo coste.

Por último, en esta evaluación también se ha tenido en cuenta la topología del entorno a explorar, seleccionando dos entornos completamente diferentes que recogen características complementarias. Por un lado, se ha utilizado el entorno representado por *Clearpath.playpen*, en el paquete *Husky*, que ofrece amplias posibilidades para la toma de decisiones del robot durante la exploración debido a que consiste en una geometría abierta, con pocos obstáculos y con elevada accesibilidad a cada punto del mapa (ver Figura 5). Se trata, por tanto, de un entorno abierto que ofrece gran libertad de movimientos. El segundo entorno empleado es el *Office_world*, que se encuentra en el paquete *cpr_gazebo*. Este entorno presenta mayores restricciones al movimiento del robot debido a su geometría con habitaciones y pasillos, reduciéndose notablemente la toma de decisiones (ver Figura 8). En este caso se trata de un entorno con una topología más compleja, típica de un entorno interior, que ofrece más restricciones en los movimientos para visitar las distintas áreas o habitaciones que lo componen, en contraposición al primer entorno empleado. El robot *Husky* se ha utilizado en el entorno abierto, mientras que el modelo *turtlebot3* se ha utilizado en el entorno tipo oficina. No existe ninguna influencia en el resultado el uso indistinto de modelo de robot y/o sensor. Empleando dos entornos para la exploración se pretende estudiar el rendimiento del método propuesto en entornos de diferentes características que dan la posibilidad de resaltar aspectos comple-

mentarios en los resultados. Cada entorno ha sido simulado 30 veces con cada algoritmo, con el fin de extraer datos estadísticos significativos en el comportamiento de cada método. Como coeficientes de ponderación se han empleado los expresados en la Tabla 2.

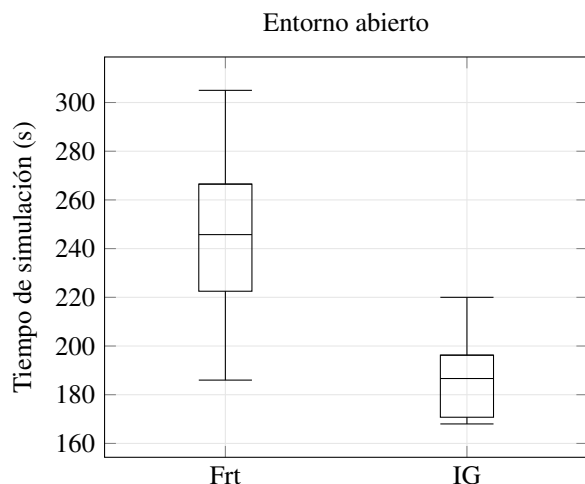


Figura 6: Tiempo de exploración de ambos algoritmos en 30 simulaciones en entorno abierto.

Tabla 3: Resultados tras 30 simulaciones en entorno abierto. **Frt**: búsqueda de fronteras. **IG**: método propuesto.

Alg.	$\bar{t}(s)$	$\sigma(s)$	$t_{min}(s)$	$t_{max}(s)$	$Q_1(s)$	$Q_3(s)$
Frt	238.4	25.8	186.0	305.0	223.0	258.7
IG	193.8	18.8	146.0	227.0	177.8	210.3

6.2. Entorno abierto

En primer lugar, como se ha comentado anteriormente, se ha realizado la evaluación del método propuesto y el basado en fronteras en un entorno abierto con baja densidad de obstáculos. Este entorno es el denominado *Clearpath_playpen* en el paquete de ROS *Husky*. Como se puede observar en la Figura 5, se trata de un entorno de un tamaño de $20m \times 20m$ en el simulador Gazebo, donde se ha utilizado el modelo de robot *Husky*. En los experimentos se han evaluado variables utilizadas habitualmente para medir el desempeño de métodos de exploración, como es el tiempo de exploración y sus variaciones sobre los experimentos realizados. Los resultados obtenidos tras 30 simulaciones para cada algoritmo en este entorno, cantidad de experimentos suficientes para conseguir estabilizar los valores de la desviación típica de las exploraciones, se recogen en la Tabla 3 y en la Figura 6, donde se muestran los resultados con el método basado en fronteras (Frt) y el método propuesto de ganancia de información (IG). Como puede observarse, emplear la entropía en la forma propuesta requiere menos tiempo para completar la tarea de exploración. Por otro lado, no solo el tiempo medio en realizar la exploración completa del entorno es menor con el método propuesto, también la desviación típica es inferior. Esto se debe a que el método propuesto planifica el orden de visita de las fronteras en función de la expectativa de ganancia de información, minimizando el recorrido para explorar el entorno al completo.

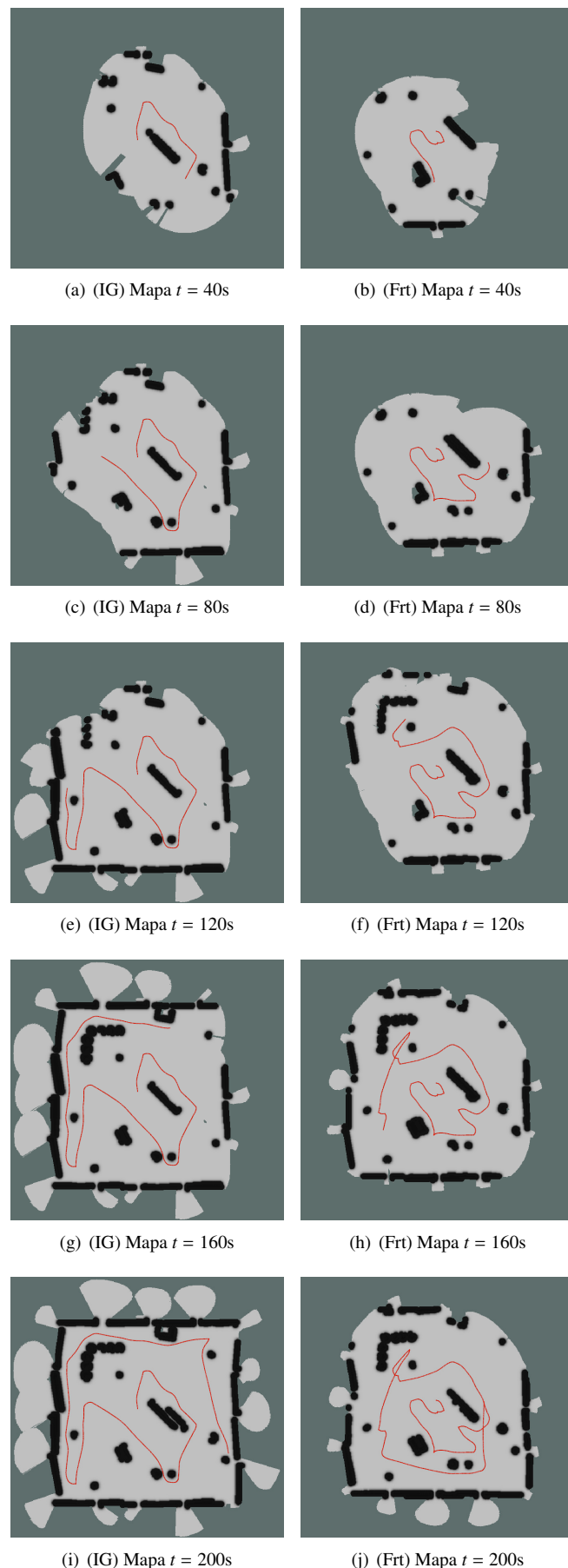


Figura 7: Evolución del mapa en entorno abierto y trayectoria: (IG) Algoritmo propuesto; (Frt) Algoritmo búsqueda fronteras.

En la Figura 7 se muestra un experimento arbitrario de cómo se desarrolla la exploración con cada uno de los algoritmos. En esta secuencia de imágenes se ilustra la evolución de la exploración y la trayectoria realizada por el robot. Se puede observar como la trayectoria realizada por el vehículo es más limpia con el método propuesto, dirigiéndose directamente a las zonas no exploradas. Por el contrario, con el algoritmo de búsqueda de fronteras, debido a que se centra únicamente en visitar fronteras sin evaluar su aportación al descubrimiento de las zonas no exploradas, el resultado son trayectorias más erráticas, con numerosos caminos de ida y vuelta que no redundan en un camino efectivo para la exploración del entorno. Este comportamiento conlleva tiempo de exploración que no se emplea en incorporar información nueva al mapa. Esto supone una amplia diferencia en el tiempo de exploración con el método propuesto, como puede observarse en la Tabla 3. En esta tabla se muestra, para ambos métodos, el tiempo medio de exploración y la varianza de las 30 simulaciones. También se muestran el tiempo mínimo y máximo, así como los cuartiles (primero y tercero) para ilustrar la variabilidad en los resultados. Se puede observar en la Figura 7 que para un tiempo $t = 160s$ se ha explorado prácticamente el entorno completo con el método propuesto, mientras que para un tiempo $t = 200s$ aún quedan zonas por explorar con el algoritmo de búsqueda de fronteras.

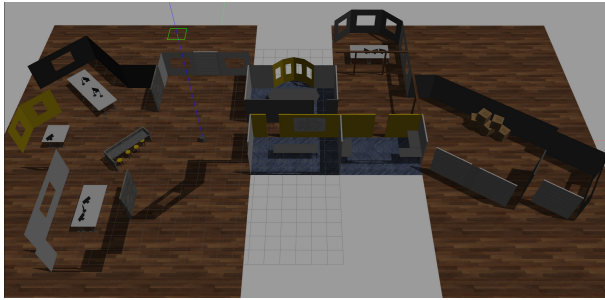


Figura 8: Entorno interior tipo oficina. Simulador: Gazebo

6.3. Entorno interior tipo oficina

El segundo entorno que se ha utilizado para evaluar el método propuesto es un entorno típico de interior, formado por habitaciones, pasillos y mayor densidad de obstáculos, que suponen una mayor restricción al movimiento del vehículo para realizar su tarea de exploración (ver Figura 8), en contraposición al entorno anterior. Se ha utilizado el entorno *office_world* que tiene un tamaño de $45m \times 25m$ con el modelo de robot *Turtlebot3*. Debido a las dimensiones del robot y las dificultades que presenta al explorar las habitaciones centrales, se ha decidido prohibir esas zonas durante la exploración para evitar colisiones y posibles mínimos locales generados por emplear el planificador local por defecto. Estos mínimos locales se pueden evitar con métodos más avanzados de planificación local, a la hora de evitar obstáculos, que quedan fuera del ámbito de este trabajo.

Al igual que con el entorno anterior, los resultados de los experimentos tras 30 simulaciones para que se establezca la desviación típica en la exploración para cada uno de los algoritmos descritos se recogen en la Tabla 4 y la Figura 9. Se puede observar que en este tipo de entornos más restringidos emplear la entropía sigue requiriendo menos tiempo para completar la

exploración. Comparativamente, la varianza entre ambos métodos en este entorno es mucho mayor que en el entorno abierto, debido a que los caminos son más largos y con mayores restricciones de movimiento. En un entorno con esta topología, las decisiones erráticas se penalizan con grandes pérdidas de tiempo durante la exploración.

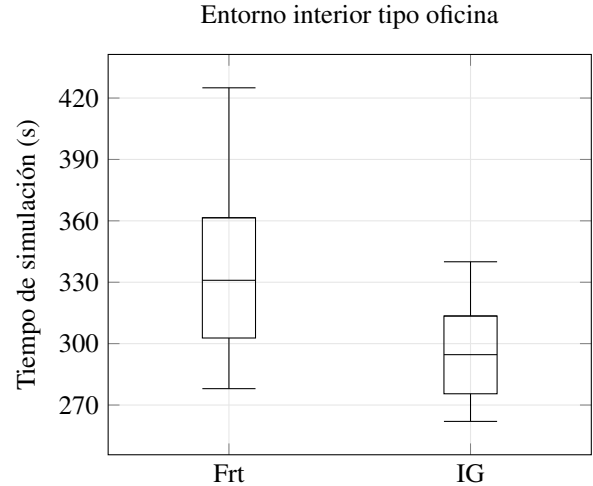


Figura 9: Comparación del tiempo de exploración en los experimentos en entorno interior tipo oficina.

Tabla 4: Resultados tras 30 simulación en entorno interior tipo oficina. **Frt**: búsqueda de fronteras. **IG**: método propuesto.

Alg.	$\bar{t}(s)$	$\sigma(s)$	$t_{min}(s)$	$t_{max}(s)$	$Q_1(s)$	$Q_3(s)$
Frt	331.0	37.2	278.0	425.0	302.8	361.5
IG	294.6	21.2	262.0	340.0	271.5	313.5

En la Figura 10 se muestra un experimento arbitrario de cómo se desarrolla la exploración con cada uno de los algoritmos en este entorno. Como en el entorno anterior, se muestra la evolución de la exploración y la trayectoria realizada por el robot. Debido a las mayores restricciones en la toma de decisiones en este entorno, por la reducida movilidad, la exploración con ambos algoritmos es más similar que en el entorno anterior, ya que en un entorno abierto hay muchas más posibilidades de movimiento. Aunque se reduce la cantidad de opciones en la toma de decisiones, el método propuesto continua realizando una elección de visita de fronteras adecuada superior a la aleatoriedad en la toma de decisiones del algoritmo de búsqueda de fronteras. El tiempo de exploración aumenta también de forma significativa debido a los largos trayectos sin incorporar información nueva en el mapa.

7. Conclusiones

En este trabajo se ha presentado un método dinámico de exploración de fronteras basado en la entropía de bajo coste computacional con una función de expectativas que actúa únicamente en las fronteras, evitando la dependencia de la ganancia de información de los mapas de tamaño fijo. Además, el método incorpora una evaluación independiente del modelo del sensor utilizado, que considera la distribución de obstáculos en

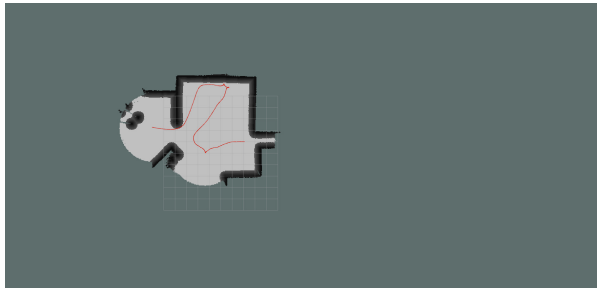
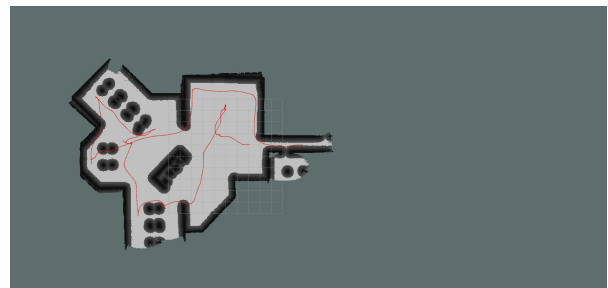
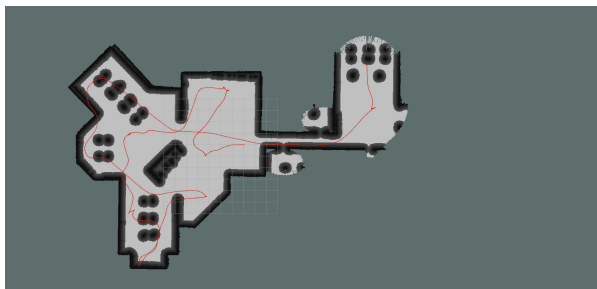
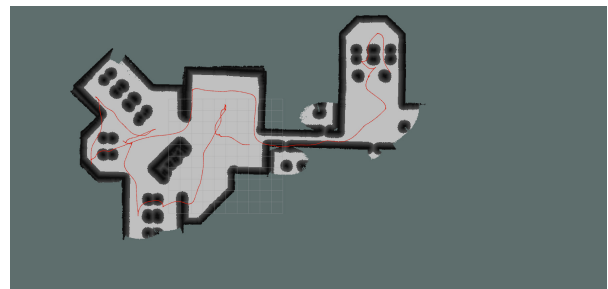
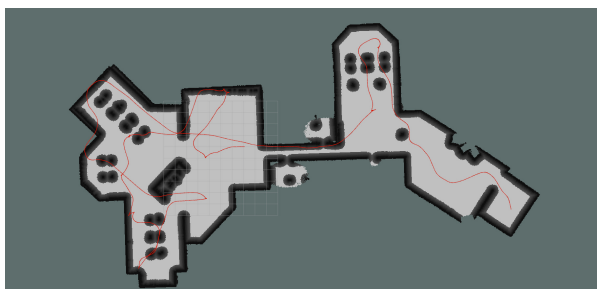
(a) (IG) Mapa $t = 60s$ (b) (Frt) Mapa $t = 60s$ (c) (IG) Mapa $t = 120s$ (d) (Frt) Mapa $t = 120s$ (e) (IG) Mapa $t = 180s$ (f) (Frt) Mapa $t = 180s$ (g) (IG) Mapa $t = 240s$ (h) (Frt) Mapa $t = 240s$ (i) (IG) Mapa $t = 300s$ (j) (Frt) Mapa $t = 300s$

Figura 10: Evolución del mapa en el entorno interior tipo oficina y trayectoria: (IG) Algoritmo propuesto; (Frt) Algoritmo basado en fronteras. Alguna trayectoria atraviesa zonas que aparecen como obstáculos debido a que en ese instante no se había actualizado el mapa con el cierre de bucle (SLAM), es decir, no está completamente optimizado para ese instante de tiempo.

la cercanía de las fronteras. En los experimentos mostrados, sobre dos tipos de entornos con diferentes características, se puede observar como generar una función de expectativas y su evaluación mejora la exploración con respecto a un algoritmo basado únicamente en búsqueda de fronteras. La estrategia de exploración propuesta permite planificar la exploración de forma óptima maximizando la ganancia de información en cada movimiento del robot y empleando menor tiempo en completar el conocimiento completo del entorno.

Como trabajo futuro se pretende incorporar un planificador óptimo OCP (*Optimal Control Problem*) para optimizar la trayectoria del robot y compararlo con otros algoritmos de exploración basados en la teoría de la información. También se considera extender el método propuesto a mapas tridimensionales, con una apropiada elección en el tipo de estructura para la representación del entorno y la incorporación de métodos para determinar zonas transitables, con el objetivo de eliminar los caminos no accesibles por el vehículo.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades, Gobierno de España, proyecto RTI2018-093421-B-I00 y PID2021-122944OB-I00.

Referencias

- Bai, S., Chen, F., Englot, B., 2017. Toward autonomous mapping and exploration for mobile robots through deep supervised learning. In: Proc. of the IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS). pp. 2379–2384.
DOI: 10.1109/IROS.2017.8206050
- Cadena, C., Carlone, L., Carrillo, H., Latif, Y., Scaramuzza, D., Neira, J., Reid, I., Leonard, J. J., 2016. Past, present, and future of simultaneous localization and mapping: Toward the robust-perception age. *IEEE Transactions on Robotics* 32 (6), 1309–1332.
DOI: 10.1109/TR0.2016.2624754
- Chen, F., Wang, J., Shan, T., Englot, B., 2022. Autonomous exploration under uncertainty via graph convolutional networks. In: Asfour, T., Yoshida, E., Park, J., Christensen, H., Khatib, O. (Eds.), *Robotics Research*. Springer International Publishing, Cham, pp. 676–691.
- Cieslewski, T., Kaufmann, E., Scaramuzza, D., 2017. Rapid exploration with multi-rotors: A frontier selection method for high speed flight. In: Proc. of the IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS). pp. 2135–2142.
DOI: 10.1109/IROS.2017.8206030
- da Silva Lubanco, D. L., Pichler-Scheder, M., Schlechter, T., Scherhäufl, M., Kastl, C., 2020. A review of utility and cost functions used in frontier-based exploration algorithms. In: 5th Int. Conf. on Robotics and Automation Engineering (ICRAE). pp. 187–191.
DOI: 10.1109/ICRAE50850.2020.9310862
- Dai, A., Papatheodorou, S., Funk, N., Tzoumanikas, D., Leutenegger, S., 2020. Fast frontier-based information-driven autonomous exploration with an mav. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. pp. 9570–9576.
DOI: 10.1109/ICRA40945.2020.9196707
- Delmerico, J., Mintchev, S., Giusti, A., Gromov, B., Melo, K., Horvat, T., Cadena, C., Hutter, M., Ijspeert, A., Floreano, D., Gambardella, L. M., Siegart, R., Scaramuzza, D., 2019. The current state and future outlook of rescue robotics. *Journal of Field Robotics* 36, 1171–1191.
DOI: 10.1002/R0B.21887
- Deng, D., Duan, R., Liu, J., Sheng, K., Shimada, K., 2020. Robotic exploration of unknown 2d environment using a frontier-based automatic-differentiable information gain measure. In: *Proc. of the IEEE/ASME Int. Conf. on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*. pp. 1497–1503.
DOI: 10.1109/IROS.2017.8202319
- Godoy-Calvo, J., Lin-Yang, D., Vázquez-Martín, R., 2022. Dynamic entropy exploration repository. Accessed: Nov 7, 2022. URL: <https://github.com/Jagoca98/DynamicEntropyExplore.git>.
- Hörner, J., 2016. Map-merging for multi-robot system. Master's thesis, Charles University in Prague, Faculty of Mathematics and Physics, Prague.
- Kaufman, E., Lee, T., Ai, Z., 2016. Autonomous exploration by expected information gain from probabilistic occupancy grid mapping. In: *Proc. of the Int. Conf. on Simulation, Modeling, and Programming for Autonomous Robots (SIMPAP)*. pp. 246–251.
DOI: 10.1109/SIMPAP.2016.7862403
- Li, H., Zhang, Q., Zhao, D., 2020. Deep reinforcement learning-based automatic exploration for navigation in unknown environment. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems* 31 (6), 2064–2076.
DOI: 10.1109/TNNLS.2019.2927869
- Martínez, J. L., Morales, J., Sánchez, M., Morán, M., Reina, A. J., Fernández-Lozano, J. J., 2020. Reactive navigation on natural environments by continuous classification of ground traversability. *Sensors* 20 (22), 6423.
DOI: 10.3390/s20226423
- Mobarhani, A., Nazari, S., Tamjidi, A. H., Taghirad, H. D., 2011. Histogram based frontier exploration. In: *Proc. of the IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. pp. 1128–1133.
DOI: 10.1109/IROS.2011.6095018
- Moravec, H., Elfes, A., 1985. High resolution maps from wide angle sonar. In: *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*. Vol. 2. pp. 116–121.
DOI: 10.1109/ROBOT.1985.1087316
- Open Source Robotics Foundation, I., 2018. *Ros/navigation/*. Last accessed on 9.11.2022. URL <http://wiki.ros.org/navigation/>.
- Open Source Robotics Foundation, I., 2019. *Ros/husky*. Last accessed on 9.11.2022. URL: <http://wiki.ros.org/Robots/Husky>.
- Open Source Robotics Foundation, I., 2020. *Turtlebot3*. Last accessed on 9.11.2022. URL: <http://wiki.ros.org/Robots/TurtleBot>.
- Perea Ström, D., Bogoslavskyi, I., Stachniss, C., 2017. Robust exploration and homing for autonomous robots. *Robotics and Autonomous Systems* 90, 125–135, special Issue on New Research Frontiers for Intelligent Autonomous Systems.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.robot.2016.08.015>
- Russel, S., Norvig, P., 2021. *Artificial Intelligence: A Modern Approach*, 4th Edition. Pearson.
- Shannon, C. E., 2001. A mathematical theory of communication. *ACM SIGMOBILE mobile computing and communications review* 5 (1), 3–55.
- Shrestha, R., Tian, F.-P., Feng, W., Tan, P., Vaughan, R., 2019. Learned map prediction for enhanced mobile robot exploration. In: *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*. pp. 1197–1204.
DOI: 10.1109/ICRA.2019.8793769
- Stachniss, C., Grisetti, G., Burgard, W., 2005. Information gain-based exploration using rao-blackwellized particle filters. In: *Robotics: Science and systems*. Vol. 2. pp. 65–72.
DOI: 10.15607/RSS.2005.I.009
- Umari, H., Mukhopadhyay, S., 2017a. Autonomous robotic exploration based on multiple rapidly-exploring randomized trees. In: *Proc. of the IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. pp. 1396–1402.
DOI: 10.1109/IROS.2017.8202319
- Umari, H., Mukhopadhyay, S., 2017b. Autonomous robotic exploration based on multiple rapidly-exploring randomized trees. In: *Proc. of the IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. pp. 1396–1402.
DOI: 10.1109/IROS.2017.8202319
- Vázquez-Martín, R., 2009. *online environment segmentation based on spectral mapping (less-mapping)*. Ph.D. thesis, Universidad de Málaga.
- Wang, J., Englot, B., 2020. Autonomous exploration with expectation-maximization. In: Amato, N. M., Hager, G., Thomas, S., Torres-Torriti, M. (Eds.), *Robotics Research*. Springer International Publishing, Cham, pp. 759–774.
- Yamauchi, B., 1997. A frontier-based approach for autonomous exploration. In: *Proc. of the IEEE Int. Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation*. pp. 146–151.
DOI: 10.1109/CIRA.1997.613851