

Didáctica de la Aritmética en Educación Primaria:

Fundamentos, estrategias y
recursos para el Desarrollo del
Pensamiento Numérico



UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

José María Sánchez Sáez
Isabel Duarte Toso

Área de Didáctica de las Matemáticas

2019-2025 Versión inicial del documento y sucesivas modificaciones por José María Sánchez Sáez a partir de los apuntes proporcionados por Isabel María Duarte y Juan Antonio Macías y de los materiales desarrollados por los componentes del área de Didáctica de la Matemática de la Facultad de Educación de la Universidad de Málaga, al menos, y sin prevalencia de orden: Cristina Sánchez Cruzado, Teresa Sánchez Campaña, José Luis González Mori, Antonio Ortiz, y muchos otros que nos han precedido.

Versión: 2025-12-18 09:47



Estimado futuro maestro, estimada futura maestra:

El manual que tienes en tus manos ha sido concebido como un viaje. No es un simple compendio de temas, sino una hoja de ruta diseñada para guiarte en el fascinante y complejo proceso de aprender a enseñar aritmética. Como en todo gran viaje, es fundamental tener un mapa que nos oriente, que nos muestre de dónde partimos, qué territorios exploraremos y cuál es nuestro destino final: convertirnos en arquitectos de experiencias de aprendizaje matemático significativas y eficaces.

El siguiente diagrama es nuestro mapa. Representa las cinco grandes etapas de este recorrido. Comenzaremos sentando los cimientos de nuestra práctica (Parte I), comprendiendo cómo aprenden los niños y qué nos exige el currículo. A continuación, exploraremos en profundidad la materia prima de la aritmética: el número (Parte II). Con esta base, nos equiparemos con las herramientas fundamentales (Parte III) y avanzadas (Parte IV) para operar y razonar con dichos números. Finalmente, en la última etapa, integraremos todo lo aprendido para dedicarnos a la práctica arquitectónica (Parte V), el arte de planificar, evaluar y gestionar una enseñanza reflexiva y adaptada a la diversidad.

Te invitamos a consultar este mapa a menudo. Te ayudará a comprender la conexión entre las distintas partes del manual y a mantener siempre la vista en el horizonte de nuestro objetivo común: formar a pensadores matemáticos competentes, críticos y seguros de sí mismos.

¡Que comience el viaje!

Mapa de Nuestro Viaje Didáctico



A lo largo de este documento encontrarás unas “cajas” que, esperamos, sea de mucha utilidad en tu camino. Cada tipo de caja se pretende utilizar para un propósito para el que se ha diseñado.

Cajas de Contenido Fundamental. Este grupo de cajas contiene los elementos esenciales para ilustrar y reforzar los conceptos didácticos y matemáticos del manual.

Clave Didáctica: Título descriptivo de la idea clave

Esta caja es el corazón pedagógico del manual. Se utiliza para resaltar las *ideas, principios o consejos didácticos más importantes*. Su contenido debe ser una síntesis potente y directamente aplicable a la práctica docente. Debe responder a la pregunta: ¿Cuál es la conclusión o el consejo más importante que un futuro docente debe llevarse de esta sección?

Mini-Caso de Aula: Un título narrativo que resuma la situación

Se utiliza para presentar *escenarios de aula, diálogos o situaciones de aprendizaje breves y realistas*. Su propósito es dar vida a la teoría, mostrando cómo los conceptos didácticos se manifiestan en las interacciones reales entre docentes y alumnado. Es ideal para ilustrar estrategias de intervención, errores comunes o debates en clase.

Ejemplo: Título del concepto que se ejemplifica

Se reserva para *ejemplos concretos y directos* que ilustran un procedimiento, un cálculo, una definición o una estrategia. Su contenido es típicamente más técnico y menos narrativo que el de un mini-caso.

Ejemplo práctico: Título de la situación práctica

Se utiliza para mostrar la aplicación de conceptos en *problemas o situaciones más elaboradas y contextualizadas*. Es un paso intermedio entre el ejemplo conciso y el mini-caso narrativo.

Cajas de Contextualización y Profundización. Estas cajas sirven para enriquecer el contenido principal, conectándolo con su historia, con el currículo oficial, o explorando ideas a un nivel más profundo.

Anclaje Histórico: Un hito o personaje histórico relevante

Tiene como objetivo *conectar los conceptos matemáticos y didácticos con su desarrollo histórico*. Se utiliza para presentar anécdotas, biografías breves o la evolución de una idea, fomentando una visión de las matemáticas como una construcción humana y proporcionando lecciones de empatía pedagógica.

Profundizando: Un tema para expandir el conocimiento

Está diseñada para *ir un paso más allá del contenido esencial*. Se usa para presentar justificaciones matemáticas más formales, debates teóricos, o conexiones

con conceptos más avanzados. Está dirigida al lector que desea una comprensión más profunda de la materia.

Del Currículo al Aula: El mandato normativo

Establece el *punto explícito entre la teoría didáctica y la normativa vigente* (LOMLOE y su desarrollo en Andalucía). Se utiliza para citar o analizar extractos del currículo, mostrando cómo las propuestas del manual se alinean con las exigencias legales y competenciales.

Recurso: Nombre del recurso o material

Se emplea para sugerir *materiales, herramientas o fuentes de información externas* que complementan el contenido del manual. Puede incluir enlaces web, software, materiales manipulativos, o referencias a bibliografía específica.

Cajas de Aplicación Pedagógica y Reflexión Este conjunto de cajas se centra en la práctica docente: cómo aplicar las ideas, cómo diagnosticar problemas y qué implicaciones tienen los conceptos para la enseñanza.

Implicación didáctica: Título del concepto y su implicación

Es una de las más importantes. Su función es *traducir un concepto teórico o un mandato curricular en acciones docentes concretas*. Responde a la pregunta: “Y esto, ¿qué significa para mi clase?”. Su contenido debe ser práctico, directo y orientado a la planificación o intervención en el aula.

Dificultad Común: Descripción del error o dificultad

Se utiliza para *identificar y analizar los errores y dificultades más comunes* que el alumnado encuentra. Sirve como una herramienta de diagnóstico para el futuro docente, ayudándole a anticipar y comprender la lógica que subyace a los fallos de sus estudiantes.

Diagnóstico e intervención: Título del error o situación a analizar

Es una herramienta avanzada para el docente. Se utiliza para modelar el *ciclo de actuación profesional ante un error*: desde la observación de la evidencia, pasando por la formulación de una hipótesis diagnóstica, hasta el diseño de una intervención didáctica.

Para el futuro o la futura docente: Un consejo o pregunta para la reflexión

Se dirige directamente al lector (futuro docente). Se utiliza para ofrecer *consejos directos, preguntas para la reflexión o síntesis finales* que conectan el contenido con su futura identidad y práctica profesional.

Índice general

La Docencia en la Enseñanza de la Aritmética	1
I Bases psicopedagógicas y curriculares de la Didáctica de la Aritmética	
1 Teorías y etapas en el Aprendizaje Matemático	9
1.1 Lecciones Aprendidas de la Historia: La Necesidad de una Didáctica Fundamentalada	9
1.1.1 Las “Matemáticas Modernas”	10
1.1.2 El Mito del “Buen Profesor” Innato.	11
1.1.3 Hacia una Pedagogía Fundamentalada.	12
1.2 El origen: Etapas del Desarrollo Cognitivo de Jean Piaget	12
1.2.1 Características Generales del Modelo de Piaget.	13
1.2.2 Los Períodos del Desarrollo Cognitivo y el aprendizaje de la Aritmética.	14
1.2.2.1 Período Sensoriomotor (aproximadamente 0-2 años)	14
1.2.2.2 Período Preoperacional (aproximadamente 2-7 años)	14
1.2.2.3 Período de las Operaciones Concretas (aproximadamente 7-11 años)	16
1.2.2.4 Período de las Operaciones Formales (final de la Primaria, aproximadamente 10-12 años, y adolescencia)	17
1.2.3 Conclusiones	18
1.3 Teorías Fundamentales del Aprendizaje y su Aplicación en Matemáticas	19
1.3.1 Constructivismo: El Aprendiz como Protagonista de su Aprendizaje	19
1.3.2 Aprendizaje Significativo	20
1.3.3 Interacción Social y Lenguaje	21
1.3.4 Modos de Representación	23
1.3.5 Comprensión Instrumental vs. Relacional	25
1.3.6 Principios de la Variabilidad Perceptual y Matemática	25
1.3.7 La Dimensión Afectiva en el Aprendizaje de la Aritmética	27
1.3.7.1 La Ansiedad Matemática como Mecanismo de Autoprotección: El «Bloqueo»	27
1.3.7.2 Actitudes y Creencias: El Poder de la «Mentalidad de Crecimiento»	28
1.3.7.3 Metas de Logro: El Motor de la Motivación en el Aula	28
1.3.7.4 Implicaciones Didácticas: El Docente como Arquitecto Motivacional	29
1.4 Conclusión del Capítulo	33
1.5 Para la Reflexión y el Portfolio Docente	34
2 La Competencia Matemática y su Desarrollo en Primaria	37
2.1 Introducción	37

2.2	Contexto Histórico y Curricular: De los Contenidos a las Competencias . . .	37
2.2.1	El Enfoque Tradicional: El Paradigma del Contenido	38
2.2.2	El Surgimiento del Enfoque Competencial	39
2.2.3	La Conexión con las Teorías del Aprendizaje	40
2.3	Definición y Componentes Esenciales de la Competencia Matemática . .	40
2.4	El Marco Curricular Andalúz: Competencias, Sentidos, Saberes y Crite- rios de Evaluación	44
2.4.1	Los Componentes de la Normativa Andaluza	44
2.4.1.1	Las Competencias Específicas	44
2.4.1.2	Los Criterios de Evaluación: Un Itinerario Cognitivo	46
2.4.1.3	Los Sentidos Matemáticos y los Saberes Básicos en el Currículum An- dalúz	49
2.4.2	La Aritmética en el Currículo de Andalucía	51
2.4.2.1	Principios Metodológicos y Enfoque del Currículo Andalúz	51
2.4.2.2	El Sentido Numérico como Eje Vertebrador a lo Largo de los Ciclos .	52
2.4.3	Análisis de la Evolución de la Aritmética por Ciclos	52
2.5	El Lenguaje y Registro Matemático: Clave y Desafío para el desarrollo de las Competencias	54
2.5.1	Dificultades Asociadas al Registro Matemático	54
2.5.2	Estrategias Didácticas para Desarrollar el Registro Matemático	57
2.6	La Finalidad de las Matemáticas en la Educación Primaria	59
2.6.1	Finalidad Instrumental	60
2.6.2	Finalidad Funcional	61
2.6.3	Finalidad Formativa	62
2.7	Conclusión del Capítulo	64
2.8	Para la Reflexión y el Portfolio Docente	65
3	Diseño de Propuestas Didácticas en Aritmética	67
3.1	Introducción: Del Qué y Porqué al Cómo	67
3.2	Los Componentes Fundamentales del Diseño Didáctico: Tareas y recursos	67
3.2.1	La Tarea Matemática como Núcleo del Aprendizaje	68
3.2.1.1	La Centralidad de la Tarea: ¿Qué Pensamiento Exigimos?	68
3.2.1.2	Otras Perspectivas para la Clasificación de Tareas	69
3.2.2	Recursos para la Construcción del Conocimiento: El Puente hacia lo Abs- tracto	70
3.2.3	Conclusiones sobre la Selección y Orquestación de Tareas y Recursos . . .	70
3.3	El Marco Teórico para el Diseño: La Teoría de Situaciones Didácticas . .	71
3.3.1	La Anatomía de una Situación Didáctica	72
3.3.2	Tipología de las Situaciones A-didácticas	73
3.3.2.1	La Situación de Acción	73
3.3.2.2	La Situación de Formulación	74
3.3.2.3	La Situación de Validación	74
3.3.3	El Rol del Docente: Devolución e Institucionalización	75
3.4	El Proceso de Diseño: Construyendo una Situación de Aprendizaje (SdA)	76
3.4.1	Definición y Fases del Diseño de una Secuencia Didáctica	77
3.4.2	El Error como Oportunidad y Guía para el Diseño	80
3.4.3	Atención a la Diversidad: El Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA)	81

3.4.3.1	Principio I: Proporcionar Múltiples Formas de Implicación	81
3.4.3.2	Principio II: Proporcionar Múltiples Formas de Representación	81
3.4.3.3	Principio III: Proporcionar Múltiples Formas de Acción y Expresión	82
3.4.4	Herramienta para la Planificación: Plantilla de Diseño de SdA	82
3.5	Puesta en Práctica: Ejemplos de Situaciones de Aprendizaje por Ciclos	84
3.5.1	Ejemplo para el Primer Ciclo (1º y 2º de Primaria): “El Misterio de las Cajas del Mago”	84
3.5.1.1	Fases de diseño	85
3.5.1.2	Especificación y diseño de la propuesta	86
3.5.2	Ejemplo para el Segundo Ciclo (3º y 4º de Primaria): “El Gran Inventario de la Juguetería”	90
3.5.2.1	Fases de diseño	90
3.5.2.2	Especificación y diseño de la propuesta	92
3.5.3	Ejemplo para el Tercer Ciclo (5º y 6º de Primaria): “Repartiendo la riqueza del mundo en nuestra clase”	96
3.5.3.1	Fases de diseño	96
3.5.3.2	Especificación y diseño de la propuesta	98
3.6	Conclusión del Capítulo	102
3.7	Para la Reflexión y el Portfolio Docente	103
	Bitácora de la Parte I	105

II El número natural: construcción y sistemas de numeración

4	El Concepto de Número Natural	111
4.1	Introducción: La Complejidad de lo Aparentemente Simple	111
4.2	Aspectos Epistemológicos y Formales: ¿Qué es el Número Natural?	114
4.2.1	La Génesis Histórica: El Número como Invención Humana	114
4.2.1.1	Fase 1: Agrupar (La Percepción de la Cantidad)	114
4.2.1.2	Fase 2: Emparejar (La Correspondencia uno a uno)	114
4.2.1.3	Fase 3: Nombrar (La Creación de Numerales)	115
4.2.1.4	Fase 4: Simbolizar (La Invención de las Cifras)	116
4.2.2	La Naturaleza Formal: Las Dos Caras del Número	117
4.2.2.1	Aspecto Cardinal: El número como cantidad	118
4.2.2.2	Aspecto Ordinal: El número como posición	118
4.2.2.3	El Pilar de la Estabilidad: El Principio de Invarianza del Número	118
4.2.3	La Riqueza Semántica: Funciones y Contextos de Uso	119
4.2.3.1	La Secuencia: El número como cantinela	120
4.2.3.2	El Cardinal: El número como cantidad	120
4.2.3.3	Subitización: El Ojo Matemático	120
4.2.3.4	El Ordinal: El número como posición	121
4.2.3.5	La Medida: El número como cuantificador de lo continuo	121
4.2.3.6	El Código o Etiqueta: El número como nombre	122
4.3	Aspectos Psicopedagógicos y Didácticos: ¿Cómo se Construye el Número?	123
4.3.1	La Construcción del Concepto la Infancia	123
4.3.1.1	El Enfoque Constructivista de Piaget: La Conservación de la Cantidad	123
4.3.1.2	El Proceso de Contar: Los Principios Lógicos de Gelman y Gallistel	127
4.3.1.3	El Dominio de la Secuencia: Los Niveles de Desarrollo de Fuson	130

4.3.2	El Número en el Currículo: Marco Normativo (LOMLOE - Andalucía)	132
4.3.2.1	Análisis general de la normativa vigente	133
4.3.2.2	Progresión del Sentido Numérico en el Currículo de Andalucía	134
4.3.3	Diseño de Situaciones de Aprendizaje: Problemas de Referencia	136
4.3.3.1	Situaciones para Construir el Cardinal	137
4.3.3.2	Situaciones para Construir el Ordinal	137
4.3.3.3	Situaciones para la Iniciación a las Operaciones	138
4.3.3.4	Situaciones para la Iniciación al Valor Posicional	139
4.3.4	Herramientas para Construir el Número: Materiales Manipulativos y Recursos	140
4.3.4.1	Criterios para la Clasificación y Selección de Materiales	141
4.3.4.2	Catálogo de Recursos Fundamentales	141
4.3.4.3	Dificultades y Errores Típicos: Diagnóstico e Intervención	146
4.4	Conclusión: Hacia un Sentido Numérico Sólido	148
4.5	Para la Reflexión y el Portfolio Docente	149
5	Sistemas de Numeración	151
5.1	Introducción: La Invención que Ordenó el Mundo	151
5.2	Aspectos Matemáticos y Epistemológicos: El ADN de los Números Escritos	152
5.2.1	Número vs. Numeración: La Idea y su Representación	152
5.2.2	Génesis Histórica: El Eco del Pasado en el Aula del Presente	153
5.2.2.1	Los Primeros Sistemas y el Principio Aditivo	154
5.2.2.2	La Revolución del Pensamiento: El Principio Posicional y el Cero	158
5.2.3	Anatomía de Nuestro Sistema de Numeración Decimal (SND)	164
5.2.3.1	Regla 1: El Principio de Agrupamiento en Base 10	165
5.2.3.2	Regla 2: El Principio del Valor Multiplicativo de la Posición	165
5.2.3.3	Regla 3: El Principio de las Diez Cifras (0-9)	165
5.3	Aspectos Psicopedagógicos y Didácticos: El Docente como Guía en la Reinención	166
5.3.1	La Construcción Mental del SND: Un Proceso de la Acción al Símbolo	167
5.3.2	Recursos y Materiales: Puentes Didácticos hacia la Abstracción	168
5.3.2.1	Materiales Proporcionales (Para construir el significado)	169
5.3.2.2	Materiales No Proporcionales (Para consolidar la abstracción)	169
5.3.3	Funciones del SND y su Conexión Curricular (LOMLOE - Andalucía)	170
5.3.4	Dificultades y Errores Típicos: El Docente como Detective Cognitivo	172
5.4	Conclusión: Habilitando el Pensamiento Numérico	175
5.5	Para la Reflexión y el Portfolio Docente	176
	Bitácora de la Parte II	179
	III Operaciones aritméticas: sentido, algoritmos y resolución de problemas	
6	Campo Aditivo: Suma y Resta con Números Naturales	185
6.1	Introducción: El Primer Gran Viaje Operatorio	185
6.1.1	Más Allá de Juntar y Quitar: El Pensamiento Aditivo	185
6.1.2	La Doble Cara del Desafío Didáctico	186
6.1.3	Conexión Curricular Explícita: El Sentido Numérico en Acción	187

6.2 Aspectos Epistemológicos y Matemáticos: La Estructura Oculta de la Suma y la Resta	188
6.2.1 El Campo Conceptual de las Estructuras Aditivas (G. Vergnaud)	188
6.2.2 La Riqueza Semántica: Tipologías de Problemas Aditivos	189
6.2.2.1 Problemas de Cambio (Transformación)	190
6.2.2.2 Problemas de Combinación (Parte-Parte-Todo)	191
6.2.2.3 Problemas de Comparación	191
6.2.3 La Lógica Interna de los Problemas: La Incógnita como Clave	192
6.2.4 Propiedades Matemáticas como Fundamento del Cálculo Flexible	194
6.2.5 El Algoritmo como Objeto Matemático e Histórico	197
6.2.5.1 Qué es un algoritmo	197
6.2.5.2 El ADN del Algoritmo: La Conexión con el Sistema de Numeración	198
6.3 Aspectos Psicopedagógicos y Didácticos: Guiando la Construcción del Pensamiento Aditivo	199
6.3.1 El Punto de Partida: La Evolución Natural de las Estrategias Infantiles	200
6.3.1.1 Contar vs. Calcular: Una Distinción Crucial	200
6.3.1.2 La Secuencia Evolutiva de Estrategias	201
6.3.2 Trabajos Previos al Algoritmo: Construyendo el Andamiaje	204
6.3.2.1 Construcción y Composición de los Primeros Números	204
6.3.2.2 Estrategias de Cálculo Mental Basadas en la Composición	205
6.3.3 Un Abanico de Algoritmos para la Suma: Comprensión Antes que Mecanización	206
6.3.3.1 Algoritmo Tradicional (ATOA - Algoritmo Tradicional de las Operaciones Aritméticas).	207
6.3.3.2 Algoritmos por Descomposición (OAOA - Otros Algoritmos para las Operaciones Aritméticas).	208
6.3.3.3 Algoritmo ABN (Abierto Basado en Números).	209
6.3.3.4 Algoritmo Holandés (o por Descomposición de Sumandos Parciales)	210
6.3.4 El Desafío de la Resta: Didáctica de sus Algoritmos	211
6.3.4.1 Algoritmo por Descomposición (“Pedir Prestado”)	212
6.3.4.2 Técnica de Izquierda a Derecha o de la Diferencia Sucesiva	212
6.3.4.3 Algoritmo por Compensación (o de la llevada en la resta)	213
6.3.4.4 Algoritmos Alternativos y Estrategias Flexibles	214
6.3.5 La Didáctica de la Resolución de Problemas: De la Palabra Clave a la Estructura	215
6.3.5.1 La Trampa de las Palabras Clave: Un Atajo que Lleva al Fracaso.	217
6.3.5.2 El Antídoto: Enseñar a Ver la Estructura mediante la Representación	217
6.3.6 El Docente como Detective Cognitivo: Errores Comunes e Intervención	219
6.4 Conclusión: Hacia un Razonamiento Aditivo Flexible y con Sentido	221
6.5 Para la Reflexión y el Portfolio Docente	222
7 Números Enteros: Ampliando el Horizonte Numérico	225
7.1 Introducción: Cruzando el Cero, un Nuevo Universo Numérico	225
7.1.1 El Reto Cognitivo: La Ruptura con lo Contable	225
7.1.1.1 El marco curricular: Una introducción conceptual en el Tercer Ciclo	226
7.1.1.2 Hoja de Ruta del Capítulo: De la Teoría a la Práctica	227

7.2	Fundamentos para el Docente: Perspectivas Histórica, Matemática y Epistemológica	228
7.2.1	La Lenta Génesis Histórica: Una Lección de Empatía Pedagógica	229
7.2.2	Fundamento Matemático: El «Saber Sabio» que Sustenta la Práctica	229
7.2.2.1	La Necesidad Formal de los Números Enteros: La Clausura de la Sustracción	230
7.2.2.2	Definición y Estructura del Conjunto $\mathbb{Z}$	231
7.2.2.3	Propiedades Clave y su Traducción Didáctica	231
7.2.2.4	Ampliando la Estructura: Opuesto y Valor Absoluto	233
7.2.3	El Obstáculo Epistemológico: ¿Dónde Radica la Dificultad?	234
7.3	Didáctica en el Aula: De lo Concreto a lo Simbólico	236
7.3.1	El Principio Fundamental: Anclaje en la Realidad como Único Punto de Partida	237
7.3.1.1	Temperaturas: El termómetro como recta numérica vertical	238
7.3.1.2	Finanzas: El modelo de “debo/tengo”	238
7.3.1.3	Geografía y Topografía: Altitudes y profundidades	239
7.3.1.4	Movimiento y Desplazamiento: El ascensor y los juegos de tablero	239
7.3.1.5	Modelos de Dualidad: Cargas eléctricas y objetos opuestos	240
7.3.2	Visualizar para Comprender: Modelos Matemáticos y Materiales	240
7.3.2.1	El poder de la recta numérica	240
7.3.2.2	El modelo de cancelación y otros recursos manipulativos	242
7.3.3	Introducción a las Operaciones: Siempre con Significado	244
7.3.3.1	La Adición como Composición de Movimientos o de Estados	244
7.3.3.2	La Sustracción como Búsqueda de una Diferencia Dirigida	245
7.3.3.3	El Juego como Herramienta Didáctica	247
7.3.3.4	Propuesta de Secuencia Didáctica: Un Itinerario de Aprendizaje	250
7.4	Conclusiones: Decálogo Didáctico para una Enseñanza Eficaz	254
7.5	Para la Reflexión y el Portfolio Docente	256
8	Campo Multiplicativo: Multiplicación y División con Números Naturales	259
8.1	Introducción: Un Salto Conceptual Más Allá de la Suma	259
8.1.1	De la Adición a la Multiplicación: Una Nueva Lente para Ver el Mundo	259
8.1.2	La Doble Cara del Desafío Didáctico: Sentido y Algoritmos	260
8.1.2.1	La Construcción del Significado (El Para Qué)	261
8.1.2.2	El Desarrollo de los Procedimientos (El Cómo)	261
8.1.3	Hoja de Ruta del Capítulo: De los Fundamentos a la Práctica en el Aula	262
8.2	Aspectos Epistemológicos y Matemáticos: La Estructura del Pensamiento Multiplicativo	263
8.2.1	¿Qué es la Multiplicación? Múltiples Significados y Contextos Fundacionales	264
8.2.1.1	Suma Repetida (Modelo de Grupos Iguales): El Punto de Partida Natural	264
8.2.1.2	Modelo Rectangular (Modelo de Área): La Clave para la Propiedad Distributiva	265
8.2.1.3	Comparación Multiplicativa (Factor de Escala): La Idea de «Veces Más Que»	266
8.2.1.4	Producto Cartesiano (Contexto Combinatorio): El Salto a la Abstracción	266
8.2.2	La Multiplicación: Definición Formal y Propiedades	267

8.2.2.1	Definición Formal de la Multiplicación	269
8.2.2.2	Propiedades de la Multiplicación	269
8.2.3	¿Qué es la División? El Desafío de los Múltiples Significados	272
8.2.3.1	División Partitiva (Reparto Equitativo): ¿Cuánto para cada uno? . . .	272
8.2.3.2	División Cuotitiva (Agrupamiento o Medida): ¿Cuántos grupos forma- mos?	273
8.2.4	La Relación de Divisibilidad y la División Exacta	274
8.2.4.1	Definiciones en el contexto de la división exacta	274
8.2.4.2	Propiedades de la División Exacta	277
8.2.4.3	Números Primos y Compuestos: Los Ladrillos de la Aritmética	278
8.2.4.4	Máximo Común Divisor (MCD) y Mínimo Común Múltiplo (mcm) . .	279
8.2.5	La Operación de División Entera	281
8.2.5.1	Definición de la división entera: El Teorema Fundamental de la División.	281
8.2.5.2	Propiedades de la División Entera	282
8.2.6	La Riqueza Semántica: Clasificación de Problemas Multiplicativos	283
8.2.7	Un Abanico de Algoritmos: De la Historia a la Práctica	289
8.2.7.1	Algoritmos para la Multiplicación	290
8.2.7.2	Algoritmos para la División	296
8.3	Aspectos Psicopedagógicos y Didácticos: Guiando la Construcción del Campo Multiplicativo	303
8.3.1	Progresión de las Estrategias de Resolución: Del Conteo al Cálculo Flexible	305
8.3.1.1	Fase 1: Modelización Directa (Acción y Conteo Total)	305
8.3.1.2	Fase 2: Estrategias de Conteo (Ritmo y Suma Repetida)	305
8.3.1.3	Fase 3: Hechos Numéricos y Estrategias Derivadas (El Cálculo Flexible)	306
8.3.2	Construyendo el Sentido y los Procedimientos	307
8.3.2.1	La Didáctica de las Tablas de Multiplicar: Hacia una Memorización Comprensiva	307
8.3.2.2	La Didáctica de la División: Progresión desde Experiencias Informales	310
8.3.2.3	La Didáctica de los Algoritmos: De la Transparencia a la Eficiencia . .	311
8.3.2.4	La Didáctica del Resto: El Tratamiento de sus Interpretaciones	312
8.3.3	El Docente como Detective Cognitivo: Errores y Dificultades Comunes . .	312
8.3.3.1	Errores Conceptuales: Confusión Aditivo-Multiplicativo	313
8.3.3.2	Errores en las Tablas de Multiplicar	313
8.3.3.3	Errores Algorítmicos Comunes	313
8.3.3.4	Errores en la Resolución de Problemas: La Interpretación del Resto . .	314
8.3.4	El Campo Multiplicativo en el Currículo de Andalucía	315
8.4	Conclusión: Hacia un Razonamiento Multiplicativo Flexible y con Sentido	318
8.5	Para la Reflexión y el Portfolio Docente	319
9	Más Allá de la Multiplicación: Potencias, Raíces y Jerarquía de Operaciones	321
9.1	Introducción: La Necesidad de un Nuevo Lenguaje Matemático	321
9.1.1	El Hilo Conductor: La Evolución del Pensamiento Aritmético	321
9.1.1.1	El Problema como Motor del Aprendizaje: Necesidad y Comunicación	322
9.1.1.2	Conexión Curricular y Hoja de Ruta del Capítulo	324
9.2	Fundamentos para el Docente: Perspectivas Histórica, Matemática y Epis- temológica	326

9.2.1	Génesis Histórica: Una Lección de Empatía Pedagógica	327
9.2.1.1	La Lenta Evolución de la Potenciación: De Babilonia a Descartes . . .	327
9.2.1.2	La Raíz Cuadrada y la Crisis Filosófica de los Inconmensurables: El Legado de Hipaso	329
9.2.1.3	La Jerarquía de Operaciones: Una Convención Moderna para un Len- guaje Universal	330
9.2.2	Estructura Matemática y Obstáculos Epistemológicos	331
9.2.2.1	El Obstáculo Epistemológico: Por qué $3^2 = 6$ es un error “lógico” . . .	331
9.2.2.2	El Fundamento Geométrico en Primaria: El Vínculo con Área y Volumen	332
9.2.2.3	La Raíz como Búsqueda del “Factor Perdido”	333
9.3	Didáctica en el Aula: La Transposición al Alumnado de Primaria	335
9.3.1	Principios Didácticos Rectores	336
9.3.1.1	La Secuencia de Bruner (Enactivo-Icónico-Simbólico) como Columna Vertebral	336
9.3.2	Itinerario de Aprendizaje: Secuencias, Recursos y Situaciones Clave	337
9.4	Conclusiones y Orientaciones para la Práctica Docente	341
9.4.1	Síntesis de Ideas Clave: El Salto a la Abstracción Estructurada	341
9.4.2	Enfoque en Primaria: Lo Esencial y lo Accesorio (Lo que SÍ y lo que NO)	341
9.4.3	El Docente como Detective Cognitivo: Análisis de Errores Comunes e In- tervención	343
9.4.4	La Evaluación Formativa como Herramienta de Regulación	343
9.5	Para la Reflexión y el Portfolio Docente	344

IV Profundizando en el campo numérico: fracciones y decimales

10 Las Fracciones: Un Mundo de Relaciones y Cantidades	351
10.1 Introducción: La Gran Ruptura con lo Contable	351
10.1.1 El Salto Conceptual	351
10.1.2 La Necesidad Hecha Número	352
10.1.3 Hoja de Ruta del Capítulo	354
10.2 ¿Qué es una Fracción? Fundamentos para el Docente	355
10.2.1 El Concepto de Fracción y su Polisemia	355
10.2.2 Significados Fundamentales de la Fracción (Los “Cuatro Rostros”)	356
10.2.2.1 Fracción como Parte-Todo	357
10.2.2.2 Fracción como Cociente	357
10.2.2.3 Fracción como Razón	358
10.2.2.4 Fracción como Operador	358
10.2.3 Nociones Elementales Clave (La «Caja de Herramientas» del Docente) . .	360
10.2.3.1 Fracciones Unitarias	361
10.2.3.2 Fracciones Propias, Impropias y Número Mixto	361
10.2.3.3 Equivalencia de Fracciones	361
10.3 Didáctica de las Fracciones: De los Principios a la Práctica Curricular (El <i>Saber Enseñado</i>)	362
10.3.1 Principios Pedagógicos y Modelos Visuales	363
10.3.1.1 La Secuencia de Bruner como Hoja de Ruta	363
10.3.2 Construyendo la Noción de Cantidad Fraccionaria	363

10.3.2.1	Descubriendo la Equivalencia: “Distintos Nombres para la Misma Cantidad”	364
10.3.2.2	Comparando Fracciones: La necesidad del denominador común	365
10.3.3	Secuencias para la Comprensión de las Operaciones	366
10.3.3.1	Suma y Resta: La necesidad de un «apellido» común	366
10.3.3.2	Multiplicación: Visualizando el «de»	367
10.3.3.3	División: Del reparto al agrupamiento	368
10.3.4	Tejiendo Conexiones: El Puente hacia el Porcentaje	370
10.3.4.1	El Porcentaje como «Fracción con Apellido 100»	370
10.3.4.2	La «Piedra de Rosetta» Didáctica: La Rejilla de 100	370
10.3.5	El Docente como Detective Cognitivo: Errores y Dificultades Comunes . .	372
10.3.5.1	Obstáculo 1: La Tiranía de los Números Naturales	372
10.3.5.2	Obstáculo 2: La Fracción como Dos Números Aislados	372
10.3.5.3	Obstáculo 3: La Elusiva Unidad de Referencia (El “Todo”)	373
10.3.6	Las Fracciones en el Currículo de Andalucía (LOMLOE)	374
10.3.6.1	Progresión de los Saberes Básicos por Ciclos	374
10.3.6.2	El Desarrollo de las Competencias Específicas	376
10.4	Conclusión del Capítulo: Hacia un Pensamiento Relacional con Fracciones	376
10.5	Para la Reflexión y el Portfolio Docente	377
11	Los Números Decimales: Continuidad y Precisión	379
11.1	Introducción: La Búsqueda de un Universo Denso	379
11.1.1	El Salto Conceptual: De Contar a Medir con Precisión	379
11.1.2	El Reto Didáctico: La Tiranía de los Números Naturales	380
11.1.3	Hoja de Ruta del Capítulo	381
11.2	Fundamentos para el Docente: Perspectivas Histórica, Matemática y Epistemológica	382
11.2.1	Génesis Histórica: La Invención de la Precisión	383
11.2.2	Estructura Matemática: El ADN del Número Decimal	384
11.2.2.1	Definición y Conexión con el Sistema de Numeración Decimal	384
11.2.2.2	La Expresión Polinómica Extendida	384
11.2.2.3	La Relación Indisoluble con Fracciones y Porcentajes	385
11.2.2.4	Clasificación de los Números Decimales	385
11.2.2.5	La Propiedad de Densidad: Rellenando los Huecos de la Recta	386
11.3	Didáctica de los Números Decimales: Construyendo el Significado	387
11.3.1	Obstáculos Epistemológicos y Errores Típicos: El Docente como Detective Cognitivo	387
11.3.1.1	Obstáculo 1: Revisitando La Tiranía de los Números Naturales	387
11.3.1.2	Obstáculo 2: El Cero Fantasma y el Cero Transparente	388
11.3.2	Secuencia de Enseñanza y Modelos Visuales (La Ruta de Bruner)	389
11.3.2.1	Fase Enactiva: Experimentar la Décima Parte	390
11.3.2.2	Fase Icónica: Visualizar la Estructura	390
11.3.2.3	Fase Simbólica: Nombrar y Registrar	391
11.3.3	Didáctica de las Operaciones con Decimales: Más Allá de las Reglas . . .	391
11.3.3.1	Suma y Resta: El porqué de “alinear las comas”	391
11.3.3.2	Multiplicación: El secreto de “contar los decimales”	392
11.3.3.3	División: La lógica de “quitar la coma del divisor”	393

11.3.3.4 El Rol Fundamental de la Estimación: La Brújula del Sentido Numérico	394
11.3.4 Los Números Decimales en el Currículo de Andalucía (LOMLOE)	395
11.3.4.1 Progresión de los Saberes Básicos por Ciclos	395
11.3.5 El Desarrollo de las Competencias Específicas a través de los Decimales	397
11.4 Conclusión del Capítulo: Habilitando el Pensamiento Preciso y Relacional	397
11.5 Para la Reflexión y el Portfolio Docente	398

V Construyendo una práctica docente eficaz y reflexiva

12 El Cálculo Mental Estratégico y la Estimación 405

12.1 Más Allá de “Hacer Cuentas de Cabeza”	405
12.2 Cálculo Mental Estratégico: La Arquitectura del Pensamiento Numérico	406
12.2.1 El Motor Secreto del Cálculo: Las Propiedades de las Operaciones	407
12.2.2 Estrategias Comunes de Cálculo Mental para la Adición y Sustracción	408
12.2.3 Visualizando el Pensamiento: Un Análisis Comparativo de Estrategias	410
12.2.4 Estrategias para el Campo Multiplicativo (Multiplicación y División)	412
12.2.4.1 Uso de la Propiedad Distributiva: La Estrategia Maestra	412
12.2.4.2 Doblar y Mitad (Halving and Doubling)	413
12.2.4.3 Factorización	413
12.2.4.4 Uso de la Relación Inversa (para la División)	413
12.2.5 El Aula como Laboratorio de Estrategias: Fomentando el Diálogo Matemático	415
12.3 La Estimación: Calculando con Sentido y Propósito	417
12.3.1 Importancia y Funciones: ¿Por qué estimar?	418
12.3.2 Tipos y Técnicas de Estimación en Operaciones Aritméticas	419
12.3.2.1 Estimación por Redondeo: La Estrategia Universal	420
12.3.2.2 Estimación por Truncamiento (o de Cifras Delanteras): La Vía Rápida	420
12.3.2.3 Estimación con Números Compatibles: La Estrategia del Experto	420
12.3.2.4 Agrupamiento (Clustering): Encontrando el Promedio en la Multitud	421
12.3.3 Didáctica en el Aula: Fomentando la Cultura de la Estimación	421
12.3.3.1 Integrar la Estimación en la Resolución de Problemas	422
12.3.3.2 Utilizar Contextos Reales y Cotidianos	423
12.3.3.3 El Juego como Herramienta de Práctica Sistemática	424
12.4 Del Saber a la Competencia: Alineación con el Currículo Andaluz	424
12.5 Conclusión: Habilitando un Pensamiento Numérico Flexible y Autónomo	426
12.6 Para la Reflexión y el Portfolio Docente	426

13 La Resolución de Problemas como Corazón del Aprendizaje Matemático 429

13.1 Introducción: Aprender Aritmética para Resolver, no solo para Calcular	429
13.1.1 De la aplicación a la construcción: un cambio de paradigma	429
13.1.2 Conexión curricular (LOMLOE - Andalucía)	430
13.1.2.1 La resolución de problemas como motor de las competencias	431
13.1.2.2 La resolución de problemas como integradora de los sentidos matemáticos	431
13.1.3 ¿Qué es realmente un «problema»? La distinción clave	432
13.2 El Mapa del Viaje: Las Cuatro Fases del Modelo de George Pólya	433
13.2.1 Fase 1: Comprender el Problema	435
13.2.2 Fase 2: Concebir un Plan (Diseñar una Estrategia)	436
13.2.3 Fase 3: Ejecutar el Plan (Llevar a cabo la Estrategia)	438

13.2.4 Fase 4: Examinar la Solución Obtenida (Mirar hacia atrás)	440
13.3 Heurísticas y Estrategias Generales para la Resolución de Problemas	441
13.3.1 Empezar por lo Sencillo: El Arte de Quitarse el Miedo	442
13.3.1.1 Ensayo y Error Organizado: Explorar con Brújula	443
13.3.1.2 Resolver un Problema más Sencillo: La Estrategia de Gauss	444
13.3.2 El Poder de la Visualización: Hacer Visible el Pensamiento	446
13.3.3 El Poder de la Visualización: Traducir Palabras a Imágenes	448
13.3.3.1 Hacer un Dibujo o Esquema Libre	448
13.3.3.2 El Diagrama de Barras (Modelo de Singapur)	449
13.3.4 Cambiar la Perspectiva: La Estrategia de Trabajar Hacia Atrás	450
13.4 El Papel del Docente como Facilitador	452
13.4.1 Antes de la resolución: El Diseño de Tareas Potentes	453
13.4.2 Durante la resolución: La Gestión del Proceso	454
13.4.2.1 El Andamiaje Cognitivo en Acción: El Arte de la Intervención Mínima	454
13.4.2.2 El Error como Brújula: Del Juicio a la Oportunidad	455
13.4.3 Orquestrar la Puesta en Común y la Discusión	456
13.5 La Verbalización y la Discusión de Estrategias	459
13.5.1 El Diario de Matemáticas como Herramienta de Reflexión	461
13.5.2 La Verbalización y la Discusión de Estrategias	462
13.6 La Resolución de Problemas y el Currículo Andaluz	464
13.6.1 El Vehículo de las Competencias	464
13.6.2 El Punto de Encuentro de los Sentidos: Un Problema, Múltiples Competencias	467
13.7 Conclusión del Capítulo: Formar Pensadores, no solo Calculistas	469
13.8 Para la Reflexión y el Portfolio Docente	469
14 Evaluación para el Aprendizaje en Aritmética	471
14.1 Introducción: La Evaluación como Brújula del Aprendizaje	471
14.2 La Evaluación en el Marco Normativo (LOMLOE - Andalucía)	472
14.2.1 El Mandato Curricular: ¿Qué nos exige la ley?	473
14.2.2 El Carácter de la Evaluación	473
14.2.3 Los Referentes de la Evaluación: Un Cambio de Foco Crucial	473
14.3 Principios de la Evaluación para el Aprendizaje	474
14.4 Instrumentos y Estrategias: La Caja de Herramientas del Docente Detective	476
14.4.1 Evaluación Formativa Continua: Mirando Dentro de la Caja Negra	476
14.4.1.1 Observación Sistemática y Listas de Cotejo	476
14.4.1.2 El Diálogo y la Entrevista Clínica	477
14.4.1.3 Rúbricas: Más Allá del «Bien» o «Mal»	478
14.4.1.4 Portfolio y Diario de Matemáticas: La Historia del Aprendizaje	478
14.4.2 El Arte del Feedback Efectivo	478
14.4.3 Evaluación Sumativa: Certificar y Reorientar	482
14.5 El Análisis de Errores como Fuente de Información Pedagógica	484
14.5.1 El Obstáculo Epistemológico: La Lógica detrás del Error	484
14.5.2 El Ciclo de Actuación del Docente como Detective Cognitivo	485
14.5.3 El Error y el Sentido Socioafectivo	486
14.6 Conclusión: Evaluar es Enseñar	487
14.7 Para la Reflexión y el Portfolio Docente	489

15 Planificación Didáctica en Aritmética	491
15.1 Principios de una Planificación Didáctica Eficaz en Aritmética	491
15.1.1 Coherencia Curricular: La Planificación como Traducción Inteligente del Mandato Normativo	492
15.1.2 Constructivismo: El Alumnado como Protagonista de su Aprendizaje . . .	493
15.1.3 Aprendizaje Significativo: Planificar para la Comprensión Relacional . . .	495
15.1.4 Progresión y Secuenciación Lógica: La Arquitectura del Aprendizaje . . .	496
15.1.5 Flexibilidad y Atención a la Diversidad: El Diseño Universal para el Apre- ndizaje (DUA) como Marco	497
15.2 Fases en el Diseño de Secuencias Didácticas y Situaciones de Aprendizaje	499
15.2.1 Fase 1: Análisis Previo y Definición de Objetivos (El Diagnóstico)	500
15.2.2 Fase 2: Diseño de la Evaluación y del Producto Final (El Destino)	501
15.2.3 Fase 3: Diseño de la Secuencia de Tareas y Recursos (El Viaje)	501
15.2.4 Fase 4: Planificación de la Atención a la Diversidad (El Mapa para Todos)	502
15.3 El Corazón de la Planificación: Selección y Adaptación de Tareas y Recursos	502
15.3.1 Criterios para la Selección de Tareas	503
15.3.2 Adaptación de Tareas: El Arte de la Sastrería Pedagógica	504
15.4 Gestión del Aula y Atención a los Diferentes Ritmos de Aprendizaje . . .	506
15.5 Poniéndolo todo Junto: De la Teoría a la Situación de Aprendizaje	508
15.5.1 Plantilla Comentada de SdA para Aritmética: El Guion del Arquitecto . .	508
15.5.2 Ejemplo Práctico Desarrollado: «El Gran Inventario de la Juguetería» . .	509
15.5.3 La Planificación como Práctica Reflexiva: De Arquitecto a Artista del Aula	511
15.6 Para la Reflexión y el Portfolio Docente	513
Epílogo: El Desafío Continuo: Aprender a Enseñar Matemáticas	517
Bibliografía	519
A Glosario de Teorías	525

La Docencia en la Enseñanza de la Aritmética

EN clase: «Maestro, me ha dado 27, ¿está bien?». Un estudiante acaba de resolver en su cuaderno la operación $72-45$. A su lado, otra compañera también ha llegado al mismo resultado, 27, pero lo ha hecho siguiendo un camino completamente distinto, descomponiendo los números de una forma que el maestro no esperaba. ¿Han aprendido lo mismo? ¿Comprenden lo mismo? La respuesta a estas preguntas es el corazón de la Didáctica de la Aritmética y el viaje que inicia este manual.

Más allá de la mera transmisión de algoritmos y conceptos numéricos, su estudio invita a una profunda reflexión sobre la naturaleza del conocimiento matemático y las estrategias pedagógicas más idóneas para su desarrollo. La aritmética no puede consistir en una colección de reglas y operaciones, sino constituir el cimiento sobre el cual se construye el pensamiento lógico-matemático, una herramienta esencial para la comprensión del mundo y la participación activa y crítica en la sociedad (Kilpatrick et al., 2001; National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Comprender los números y sus relaciones, así como dotar de sentido las operaciones básicas y manejarlas con fluidez, capacita al alumnado no solo para enfrentar desafíos académicos futuros, sino también para desenvolverse con confianza en innumerables situaciones de la vida cotidiana. Al fin y al cabo, las matemáticas son una representación de la realidad.

En este proceso de aprendizaje, el rol docente trasciende la figura de la mera transmisión de información, convirtiéndose en un arquitecto de experiencias de aprendizaje, un mediador entre el universo matemático y la mente en desarrollo del discente. Este manual se concibe bajo la premisa de que enseñar aritmética eficazmente requiere no solo un sólido dominio del contenido matemático, sino también una profunda comprensión de cómo los niños y niñas aprenden, cuáles son sus intuiciones iniciales, sus posibles dificultades y las trayectorias de aprendizaje que suelen seguir (Piaget, 1941/1967; Vygotsky, 1978/2009). El docente, como facilitador, debe ser capaz de diseñar situaciones didácticas que sean simultáneamente desafiantes y accesibles, que promuevan la exploración, el descubrimiento y la construcción activa del conocimiento por parte del alumnado, fomentando así una comprensión relacional y no meramente instrumental de los conceptos aritméticos (Skemp, 1978).

En esta guía se pretende fundamentar la conexión entre el saber matemático disciplinar, el saber didáctico específico de la aritmética, y la realidad concreta del aula de Educación Primaria. Se busca presentar una visión integrada que permita al futuro docente no solo “saber matemáticas”, sino también “saber cómo enseñar matemáticas” y, fundamentalmente, “saber por qué se enseña de una determinada manera”, adaptando esa enseñanza a las necesidades y contextos de sus estudiantes. Este enfoque se conoce como Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK, por sus siglas en inglés), un concepto clave para la profesionalización docente (Ball et al., 2008; Shulman, 1986/2019).

A lo largo de estas páginas, se explorarán los fundamentos epistemológicos de los principales bloques de contenido aritmético —el número natural, entero, los sistemas de numeración, las operaciones aditivas y multiplicativas, las fracciones y los números

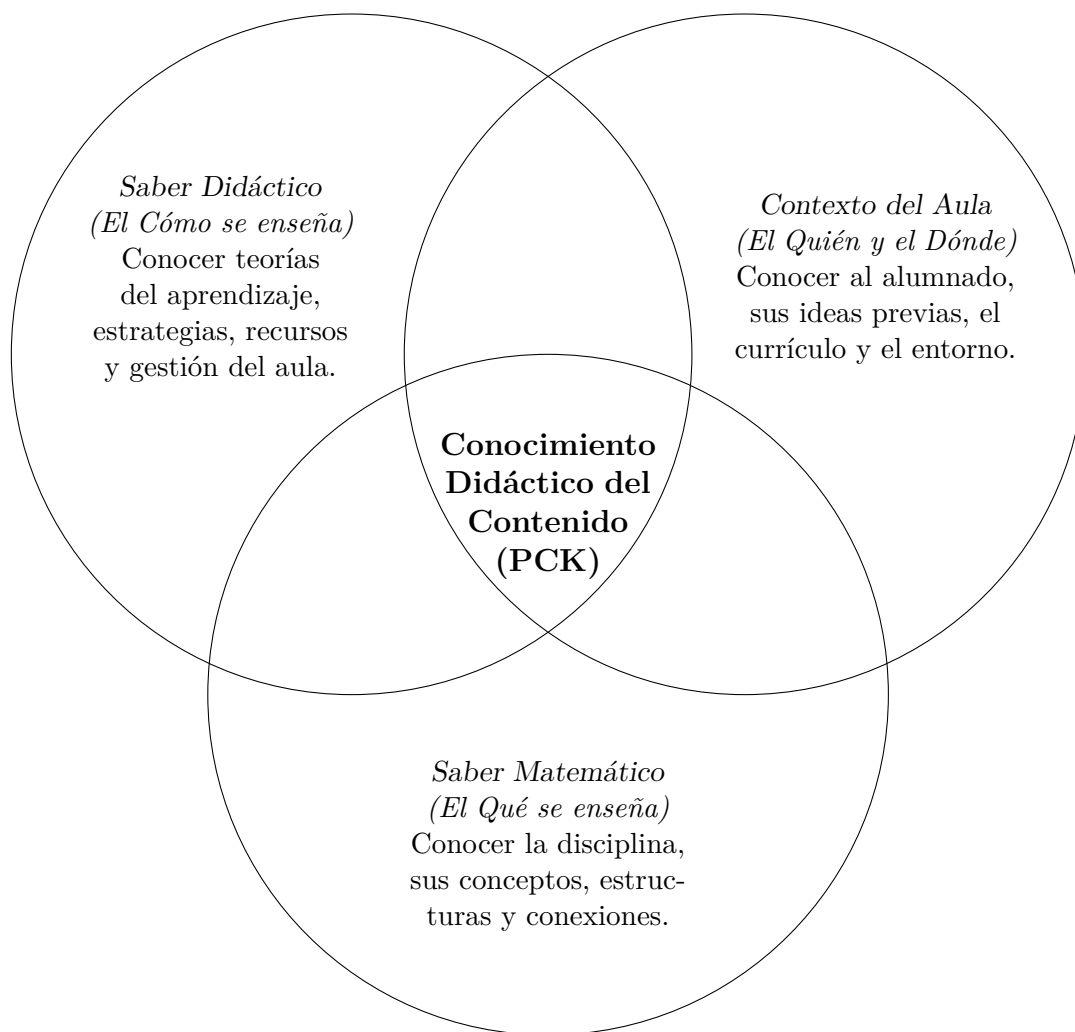


Figura 1: La triple perspectiva del conocimiento docente en la Didáctica de la Aritmética.

decimales–, siempre desde esta doble perspectiva: la del contenido matemático en sí mismo y la de su transposición didáctica al aula de Primaria. Se prestará especial atención a las etapas evolutivas del aprendizaje infantil, al análisis de errores comunes como fuente de información pedagógica, y al uso de recursos manipulativos y tecnológicos como herramientas para favorecer una comprensión profunda y significativa.

Este texto aspira a ser una guía práctica y reflexiva que acompañe al futuro docente en su formación inicial y, esperamos, también en sus primeros pasos profesionales. Deseamos que encuentren en él no solo respuestas, sino también nuevas preguntas que impulsen una práctica docente en constante mejora, capaz de despertar en su alumnado la curiosidad, el gusto y la confianza en su propia capacidad para hacer matemáticas. *Al final de este volumen, encontrarás un glosario con las definiciones de los términos clave que te acompañarán en tu formación como especialista en la enseñanza de la aritmética.*

El desafío es grande, pero la recompensa –contribuir al desarrollo del pensamiento, en general, y el pensamiento numérico, en particular, de las futuras generaciones– es,

sin duda, una labor gratificante e imprescindible.

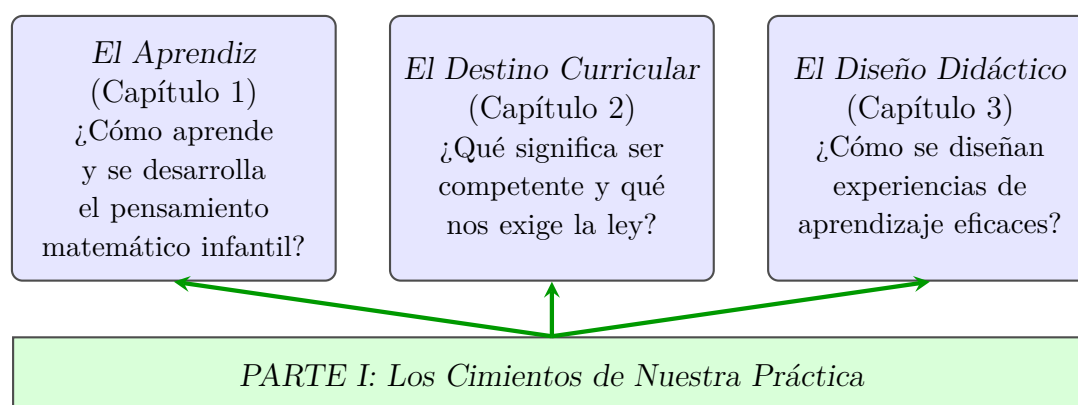
I Bases psicopedagógicas y curriculares de la Didáctica de la Aritmética

No hay nada tan práctico como una buena teoría.

Kurt Lewin

EN este primer módulo establecemos los cimientos sobre los cuales se asienta una práctica docente reflexiva y eficaz. Antes de aprender a construir el edificio de la aritmética, un buen arquitecto debe dominar los fundamentos: las características del terreno, la naturaleza de los materiales y el propósito de la estructura.

Este viaje inicial a través de los fundamentos de nuestra disciplina se asienta sobre tres pilares interconectados, que exploraremos en los próximos tres capítulos:



Dominar estos tres pilares nos proporcionará el mapa y la brújula necesarios para navegar con seguridad por los territorios específicos de la aritmética en los siguientes módulos. Comprender *quién* aprende, *para qué* enseñamos y *cómo* se estructura el aprendizaje, son los cimientos indispensables para transformar la enseñanza de la aritmética en una auténtica aventura de descubrimiento y construcción de significado.

1 Teorías y etapas en el Aprendizaje Matemático

NUESTRO primer paso para asentar los cimientos de la práctica docente consiste en dirigir la mirada hacia el protagonista principal del aprendizaje: el niño y la niña. Durante décadas, la enseñanza de las matemáticas ignoró esta perspectiva, asumiendo que bastaba con dominar el contenido para poder transmitirlo. Sin embargo, la historia nos ha ofrecido valiosas lecciones sobre los peligros de este enfoque. Experiencias como las “Matemáticas Modernas” demostraron que presentar una estructura matemática lógica, pero alejada del desarrollo cognitivo del alumnado, genera más frustración que comprensión.

Este capítulo responde a esa lección histórica, ofreciendo al futuro docente un marco teórico esencial para diseñar prácticas de aula que realmente conecten con la mente del aprendiz. Para ello, nuestro recorrido se asentará sobre varios pilares:

- *Aprender de la historia:* Analizaremos brevemente enfoques pedagógicos pasados para comprender la necesidad de una didáctica fundamentada en la psicología y el desarrollo infantil.
- *Comprender el desarrollo cognitivo:* Exploraremos las etapas del desarrollo cognitivo de Jean Piaget, un mapa fundamental para entender las capacidades y limitaciones del pensamiento infantil en cada fase de la Educación Primaria.
- *Integrar las grandes teorías del aprendizaje:* Iremos más allá de Piaget para incorporar las ideas clave de teóricos como Vygotsky, Bruner, Skemp o Dienes, cuyas aportaciones sobre la interacción social, la representación, la comprensión relacional o el papel de los materiales manipulativos son cruciales para la didáctica de la aritmética.
- *Atender a la dimensión afectiva:* Reconoceremos que el aprendizaje no es un acto puramente cognitivo. Analizaremos cómo las emociones, las actitudes y las creencias, como la ansiedad matemática o la mentalidad de crecimiento, juegan un papel determinante en el éxito y el disfrute del aprendizaje.

En definitiva, este capítulo le equipará con las “gafas de psicólogo y pedagogo” que todo docente de matemáticas necesita para poder interpretar lo que ocurre en el aula, no como una colección de aciertos y errores, sino como un fascinante proceso de construcción del pensamiento.

1.1 Lecciones Aprendidas de la Historia: La Necesidad de una Didáctica Fundamentada

Antes de explorar los modelos contemporáneos sobre cómo aprenden los niños y niñas y cómo se deben enseñar las matemáticas, es pertinente reflexionar sobre ciertas concepciones históricas que, a pesar de su influencia, se revelaron con graves limitaciones y crearon desafíos para el aprendizaje. La comprensión de estos “conceptos previos” en la didáctica es crucial para apreciar la evolución de la disciplina y justificar la necesidad de un enfoque pedagógico profundamente fundamentado.

1.1.1 Las “Matemáticas Modernas”

En el contexto de la reforma educativa de mediados del siglo XX, impulsada por la era espacial (post-Sputnik), surgió el movimiento de las “*Matemáticas Modernas*” (también conocido como *New Math*). Su objetivo era modernizar el currículo, introduciendo un mayor *rigor deductivo*, el *lenguaje de conjuntos* y las *estructuras abstractas* desde edades tempranas. La premisa subyacente era que, al enseñar los conceptos matemáticos en su forma más pura y abstracta, se garantizaría una comprensión más profunda y una asimilación automática de las propiedades fundamentales. Se asumía que una vez que el alumnado comprendiera la estructura lógica (ej., la teoría de conjuntos como base de los números), la aplicación y el significado emergerían de forma natural, como por ósmosis.

Esta aproximación, a pesar de sus nobles intenciones, generó problemas significativos en la práctica, especialmente en la aritmética de la Educación Primaria:

- **Disociación del Significado:** El excesivo énfasis en la formalidad y la abstracción temprana llevó a una *desconexión entre los símbolos y su significado concreto*. Los alumnos podían manipular conjuntos o escribir operaciones abstractas, pero carecían de una comprensión intuitiva de la cantidad, la magnitud o la aplicación real de lo que hacían. El conocimiento se volvía frágil y descontextualizado.
- **Aprendizaje Mecánico:** Lejos de la asimilación automática por inducción, muchos discentes recurrieron a la *memorización de reglas y procedimientos* presentados formalmente, sin una verdadera comprensión conceptual. La instrucción a menudo se basaba en la transmisión de conceptos que estaban por encima de las capacidades cognitivas de los niños y niñas en esas edades, lo que resultaba en una *falta de asimilación significativa*.
- **Aumento de la Frustración y la Ansiedad:** La dificultad para comprender conceptos abstractos sin una base experiencial sólida, junto con la presión por el rigor formal, contribuyó a un aumento de la *frustración y la ansiedad matemática* en muchos discentes y docentes (Ashcraft, 2002).

Esta experiencia histórica evidenció que la mera exposición a contenidos estructurados, por muy lógicos que sean, no garantiza su comprensión y asimilación efectiva por parte del aprendiz.

Ejemplo: Lógica formal vs. Significado en la suma

Para ilustrar la disociación del significado, comparemos dos formas de abordar la suma $2 + 3 = 5$:

- **Enfoque Tradicional/Manipulativo:** Un discente junta un grupo de 2 bloques con otro de 3 bloques y cuenta el total, viendo que son 5. La operación tiene un referente concreto.
- **Enfoque de “Matemáticas Modernas”:** Se podría pedir al alumnado que definiera la operación a través de la teoría de conjuntos. Por ejemplo: «Sea A un conjunto con cardinalidad 2, y B un conjunto disjunto con cardinalidad 3. La suma $2 + 3$ es la cardinalidad de la unión de A y B».

$(|A \cup B|)$ ». Para un discente de 7 años, el símbolo “+” se vacía de su significado intuitivo de “juntar” y se convierte en una definición formal y abstracta, difícil de conectar con sus experiencias.

La lección aprendida es que la estructura lógica de las matemáticas no es, por sí misma, un buen punto de partida para la enseñanza en Primaria.

1.1.2 El Mito del “Buen Profesor” Innato.

Otra concepción problemática, persistente en diversas épocas y contextos, es la asunción de que la enseñanza, y en particular la de las matemáticas, es una *habilidad innata* o un “arte” que algunos docentes poseen de forma natural. Bajo esta visión, se creía que lo fundamental era el *dominio del saber disciplinar* (ser un “buen matemático”), y que la capacidad de *comunicar y transformar* ese conocimiento para que otros lo aprendieran era una cuestión de talento intrínseco, no de formación o conocimiento didáctico específico. En esta perspectiva, la importancia de saber comunicar o de entender cómo se produce el aprendizaje en el alumnado era relegada a un segundo plano o se daba por sentada.

El *saber disciplinar* (conocimiento del contenido) es necesario, pero no suficiente. Se requiere un *saber didáctico* específico. Esta es la esencia del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK, por sus siglas en inglés), un concepto fundamental desarrollado por Shulman (1986/2019) y posteriormente refinado para las matemáticas por autores como Ball et al. (2008).

Esta creencia ha tenido consecuencias negativas para la profesionalización docente y la calidad de la enseñanza de las matemáticas:

- *Brecha entre Saber y Enseñar*: Un excelente matemático no es, por definición, un excelente profesor de matemáticas. El *saber disciplinar* (conocimiento del contenido) es necesario, pero no suficiente. Se requiere un *saber didáctico* específico, es decir, el conocimiento de *cómo* se enseña ese contenido particular, cómo el alumnado lo aprende, qué dificultades enfrenta y qué estrategias pedagógicas son más efectivas para facilitar ese aprendizaje (Shulman, 1986/2019). Esta es la esencia del *Conocimiento Pedagógico del Contenido*.
- *Enfoque en el Contenido, no en el Aprendiz*: Si el énfasis está solo en el “saber”, la enseñanza tiende a centrarse en la materia a impartir, más que en el sujeto que aprende. Las metodologías no se adaptan a las intuiciones, preconcepciones o estilos de aprendizaje de los niños, y se desaprovechan las oportunidades de construir sobre sus conocimientos informales.
- *Dificultad para el Desarrollo Profesional*: Si la enseñanza es vista como una cualidad innata, se desincentiva la reflexión crítica sobre la propia práctica, el análisis de errores (más allá de considerarlos fallos) y la búsqueda de nuevas estrategias pedagógicas. Esto limita el desarrollo profesional continuo del docente.

La constatación de esta falacia llevó a la fundación, a mediados de los años 70 del siglo XX, de los departamentos específicos de Didáctica de las Matemáticas en las universidades, llevando un gran avance en la percepción y práctica de la enseñanza de

las Matemáticas.

1.1.3 Hacia una Pedagogía Fundamentada.

Las lecciones aprendidas de estos enfoques históricos subrayan una verdad fundamental: la enseñanza eficaz de la aritmética requiere una *pedagogía profundamente fundamentada*. No basta con saber qué enseñar (el contenido matemático), sino que es indispensable saber *cómo* aprenden los niños y niñas ese contenido particular, *por qué* lo aprenden de una determinada manera, y *cómo* diseñar experiencias que promuevan una comprensión significativa, flexible y duradera.

Esta es la razón de ser de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina, y el propósito central de esta guía. Se trata de construir un marco de conocimientos que capacite al futuro docente para:

- *Comprender al Aprendiz:* A través de teorías del desarrollo cognitivo (como la de Piaget) y del aprendizaje constructivo (Ausubel, Vygotsky, Bruner, Skemp, Dienes).
- *Diseñar Experiencias Significativas:* Seleccionar y adaptar actividades y recursos (manipulativos, tecnológicos) que conecten con las intuiciones del discente y le permitan construir activamente el conocimiento.
- *Atender la Dimensión Afectiva:* Crear un clima de aula que fomente la curiosidad, la perseverancia y la confianza, mitigando la ansiedad y transformando las creencias limitantes.
- *Reflexionar Críticamente sobre la Práctica:* Analizar los errores del alumnado como fuente de información pedagógica y ajustar la enseñanza en consecuencia.

Los siguientes apartados de este capítulo profundizarán en la fundamentación teórica de estas perspectivas para proporcionar al futuro docente las herramientas conceptuales necesarias para convertirse en un arquitecto de experiencias de aprendizaje que verdaderamente ayude a su alumnado en el universo de la aritmética.

En definitiva, la historia nos ha proporcionado dos lecciones cruciales que fundamentan la necesidad de la Didáctica de la Matemática: en primer lugar, que la lógica interna de la matemática no es suficiente para garantizar su aprendizaje, siendo indispensable una transposición didáctica adaptada al desarrollo cognitivo del niño y niña. Y en segundo lugar, que la enseñanza eficaz no es un arte innato, sino una ciencia que requiere un conocimiento profesional específico sobre cómo se enseña y se aprende. Estas dos lecciones justifican el enfoque que se desarrollará en las siguientes secciones.

1.2 El origen: Etapas del Desarrollo Cognitivo de Jean Piaget

La teoría del desarrollo cognitivo de Jean Piaget (Piaget, 1941/1967; Piaget & Inhelder, 1969/1997) representa un pilar fundamental en la psicología del desarrollo y ha ejercido una influencia profunda en la educación matemática. Su trabajo revolucionó la forma en que entendemos cómo los niños y niñas construyen el conocimiento, al alejarse de las perspectivas que los veían como “mini-adultos” o como receptores pasivos de información. Piaget propuso una visión del desarrollo como un proceso activo de reorganización de las estructuras mentales que, bajo sus premisas, ocurre en una secuencia universal e invariante de etapas.

1.2.1 Características Generales del Modelo de Piaget.

A continuación se desarrollan algunas de las características clave sobre las que se sustenta el modelo de Piaget:

- *Constructivismo*. Para Piaget, el conocimiento no se adquiere por la mera recepción de información del entorno, sino que es construido activamente por el niño o niña a través de la interacción directa con los objetos y las personas. El discente es un “pequeño científico” que experimenta, observa y elabora sus propias teorías sobre el mundo. Esta construcción activa implica que el aprendizaje de la aritmética no es simplemente la memorización de hechos o procedimientos, sino la comprensión profunda que surge de la propia actividad del infante.
- *Esquemas y Adaptación*. La unidad básica de la organización cognitiva en Piaget son los *esquemas*, que pueden entenderse como patrones organizados de pensamiento o acción que el aprendiz utiliza para interpretar o interactuar con el mundo. El desarrollo ocurre a través de la *adaptación*, un proceso continuo de ajuste entre los esquemas existentes y las nuevas experiencias. La adaptación, a su vez, se compone de dos procesos complementarios: la *asimilación*, donde el discente incorpora nueva información a sus esquemas preexistentes (por ejemplo, ver un grupo de manzanas y asimilarlo al esquema de “cantidad”); y la *acomodación*, donde crean o modifican esquemas para integrar información que no encaja en los esquemas previos (por ejemplo, al comprender que un solo número puede representar cantidades de múltiples tipos de objetos, se acomodan los esquemas de conteo).
- *Equilibración*. Este es el mecanismo de autorregulación que impulsa el desarrollo cognitivo. Cuando el niño o niña se enfrenta a un *desequilibrio cognitivo* (una discrepancia entre lo que sabe y una nueva experiencia, o una inconsistencia interna), se activa una *necesidad intrínseca de coherencia y resolución*. Esta *necesidad de cierre cognoscitivo*, o el impulso por alcanzar una comprensión clara y estable ante la incertidumbre, motiva al discente a restaurar el equilibrio. Esto lo lleva a asimilar o acomodar la nueva información, reorganizando así sus esquemas mentales e impulsando el progreso de una etapa a otra. Los desequilibrios, por tanto, no son meros problemas, sino *oportunidades para el aprendizaje* y el avance cognitivo.
- *Etapas del Desarrollo*. Piaget propuso que el desarrollo ocurre en una secuencia fija de cuatro etapas cualitativamente distintas, por las que todos los niños y niñas transitan en el mismo orden, aunque la edad de inicio y duración pueda variar ligeramente. Cada etapa se caracteriza por una forma particular de pensar y de interactuar con el mundo, y los logros de una etapa son prerequisites para el desarrollo de la siguiente.

La relevancia de la teoría de Piaget para la didáctica de la aritmética radica en que proporciona un mapa general de las capacidades cognitivas esperables en diferentes edades. Esto permite al maestro adaptar las tareas de enseñanza a las posibilidades reales del pensamiento infantil, anticipar las dificultades que surgen de las limitaciones propias de cada etapa, y diseñar experiencias que fomenten la construcción activa del conocimiento numérico y operacional.

1.2.2 Los Períodos del Desarrollo Cognitivo y el aprendizaje de la Aritmética.

Para poder establecer un marco de la evolución en la psicología del discente propuesta por Piaget se hace indispensable un análisis de las etapas que propone. A continuación, se describen los cuatro períodos propuestos, destacando sus características y las implicaciones directas para la enseñanza y el aprendizaje de la Aritmética en la Educación Primaria.

1.2.2.1 Período Sensoriomotor (aproximadamente 0-2 años)

Durante esta etapa inicial, los bebés construyen una comprensión del mundo principalmente a través de la interacción directa y física con su entorno, utilizando sus sentidos y acciones motoras. El conocimiento se basa en la experiencia directa y en la coordinación de esquemas sensoriomotores.

Características Relevantes. Aunque no hay una comprensión numérica formal, se desarrollan habilidades pre-numéricas fundamentales. La *permanencia del objeto* sienta las bases para entender que los objetos existen incluso cuando no se ven, lo que es vital para el conteo mental o la comprensión de cantidades no visibles. La manipulación de objetos y la experiencia con la acción de juntar y separar elementos contribuyen a la formación de esquemas de acción que, posteriormente, serán interiorizados y servirán como base para las operaciones aritméticas de adición y sustracción. Las primeras percepciones de “muchos” o “pocos” se gestan en este período.

Implicación didáctica: Fundamentos pre-numéricos en la Etapa Infantil

Si bien el docente de Educación Primaria no trabaja directamente con este grupo de edad, es importante reconocer que las experiencias en Educación Infantil deben promover un ambiente rico en *exploración libre con objetos, juego con materiales manipulables* y situaciones que impliquen *agrupamiento, separación y comparación* intuitiva de cantidades. Estas actividades pre-numéricas constituyen el cimiento sobre el cual se construirá un sentido numérico sólido.

1.2.2.2 Período Preoperacional (aproximadamente 2-7 años)

Esta etapa abarca la edad preescolar y los primeros años de la Educación Primaria. Se caracteriza por el surgimiento y la consolidación de la función simbólica, lo que permite el uso del lenguaje, la simulación y las representaciones mentales. Sin embargo, el pensamiento preoperacional es aún *intuitivo, ilógico y no operacional*, y se ve limitado.

Uno de los rasgos más distintivos de esta etapa es la ausencia de *Conservación de la Cantidad*. La comprensión de que el número de elementos es invariante a pesar de los cambios perceptuales es un hito relevante para el desarrollo del sentido numérico y las operaciones (Kamii, 1985/2003).

Características Relevantes. El pensamiento preoperacional se ve afectado por:

- **Egocentrismo:** La tendencia a ver el mundo desde la propia perspectiva sin considerar la de otros. En aritmética, esto puede manifestarse en dificultades para resolver problemas de reparto equitativo o para comprender situaciones

que implican múltiples puntos de vista sobre una cantidad.

- *Centración*: La focalización en un único aspecto sobresaliente de una situación, ignorando otros igualmente relevantes. Por ejemplo, al comparar dos hileras de objetos con el mismo número de elementos pero con diferente longitud, el infante puede afirmar que la hilera más larga tiene “más” objetos, sin considerar la cantidad real. La apariencia perceptual domina sobre la lógica cuantitativa.
- *Irreversibilidad*: La incapacidad de realizar mentalmente una acción y luego revertirla a su estado original. Esta limitación dificulta la comprensión de las relaciones inversas entre operaciones, como la adición y la sustracción. Si se aprende $5 + 3 = 8$, puede costar entender $8 - 3 = 5$ sin una reconceptualización o apoyo concreto.
- *Ausencia de Conservación de la Cantidad*: Uno de los rasgos más distintivos. Los niños preoperacionales a menudo creen que la cantidad de una colección cambia si su disposición espacial se modifica (ej., separación o agrupamiento). La comprensión de que el número de elementos es invariante a pesar de los cambios perceptuales es un hito relevante para el desarrollo del sentido numérico y las operaciones (Kamii, 1985/2003).
- *Dificultad con la Inclusión de Clases*: La incapacidad de entender que una subclase puede estar contenida dentro de una clase más amplia y al mismo tiempo mantener su identidad de subclase. Esto impacta la comprensión de la estructura jerárquica del sistema de numeración decimal, donde las unidades de un orden (por ejemplo, decenas) están compuestas por unidades de un orden inferior (unidades simples).

Implicación didáctica: La construcción de la conservación del número

Esta etapa, que coincide con la Educación Infantil y el inicio del Primer Ciclo de Primaria, es fundamental para asentar las bases del pensamiento numérico. El currículo andaluz se centra aquí en los saberes básicos de conteo y cardinalidad (Saber Básico A.1. y A.2.), y la teoría de Piaget nos ayuda a entender por qué. La *centración* explica el motivo por el que un niño puede contar correctamente una fila de 10 fichas y, sin embargo, creer que hay “más” si las separamos, ya que se fija en la longitud y no en el número. La *irreversibilidad* nos muestra su dificultad para comprender que si $5 + 2 = 7$, entonces $7 - 2 = 5$. Por tanto, toda Situación de Aprendizaje en este nivel debe incluir una intensa manipulación de material, priorizando la correspondencia uno a uno y la exploración de cantidades para construir la noción de conservación del número, un prerequisite indispensable para la operatoria.

Mini-Caso de Aula: El desafío de la conservación

Docente (presenta dos filas con 7 fichas cada una, perfectamente alineadas): ¿En qué fila hay más fichas, o hay las mismas?

Alumno/a: ¡Hay las mismas!

Docente (separa las fichas de una de las filas, haciéndola más larga): Y ahora, ¿dónde hay más?

Alumno/a (preoperacional): ¡En esa! (señalando la fila más larga). Porque es más larga.

Este diálogo ilustra perfectamente la *centración*: el discente se fija en la longitud e ignora la cantidad numérica, demostrando por qué las experiencias de correspondencia uno a uno son cruciales antes de poder avanzar.

1.2.2.3 Período de las Operaciones Concretas (aproximadamente 7-11 años)

Coincide con la mayor parte de la Educación Primaria. Los niños y niñas desarrollan la capacidad de realizar *operaciones mentales*, que son acciones interiorizadas, reversibles y organizadas en estructuras lógicas. Esto les permite pensar de manera más flexible y lógica, aunque su razonamiento sigue fuertemente ligado a objetos y situaciones *concretas y tangibles*. La manipulación de objetos sigue siendo importante para anclar el pensamiento.

Características Relevantes. Los logros cognitivos clave de esta etapa son muy importantes:

- *Conservación de la Cantidad:* Un logro consolidado. El discente comprende la invariabilidad del número de elementos de un conjunto, independientemente de su reorganización espacial. Esto es esencial para las operaciones aritméticas, ya que la cantidad total no se altera por la disposición de los elementos representados como operandos. Esto da lugar a la posibilidad de desarrollar múltiples representaciones que llevan a equivalencias.
- *Seriación:* La capacidad de ordenar elementos de forma lógica según una cualidad (ej., tamaño, altura, cantidad). Esta habilidad es fundamental para comprender la *secuencia numérica* de los números naturales, su *orden* ($<$ y $>$), y para organizar datos en tablas o gráficos.
- *Clasificación:* La habilidad de agrupar objetos según criterios comunes y de comprender las *relaciones jerárquicas* entre clases. Es directamente relevante para la comprensión del *sistema de numeración decimal* (unidades, decenas, centenas) como un sistema de agrupamiento jerárquico de base diez.
- *Reversibilidad del Pensamiento:* La capacidad de realizar mentalmente una acción y luego revertirla, fundamental para comprender las *relaciones entre operaciones inversas* (adición/sustracción, multiplicación/división). Permite al alumnado verificar sus resultados y comprender la lógica de los algoritmos de cálculo.
- *Transitividad:* La capacidad de inferir una relación entre dos elementos a partir de su relación con un tercero (ej., si $A > B$ y $B > C$, entonces $A > C$). En aritmética, es útil para comparar números y comprender las relaciones de orden entre ellos.

Implicación didáctica: Del Pensamiento Concreto a los Algoritmos con Sentido

Este período abarca la mayor parte de la Educación Primaria y sus logros cognitivos son la base sobre la que se construye toda la aritmética formal. En el *Primer y Segundo Ciclo*, la consolidación de la *conservación de la cantidad* permite introducir los algoritmos de suma y resta. Es importante que esta introducción sea siempre comprensiva, conectando los pasos simbólicos con la manipulación de materiales como los bloques multibase, que visualizan la lógica de la *reversibilidad* (sumar/restar) y la *clasificación jerárquica* (unidades, decenas, centenas). En el *Tercer Ciclo*, las capacidades de seriación y transitividad permiten trabajar con mayor profundidad la recta numérica y las relaciones de orden con fracciones y decimales. Aunque el pensamiento sigue siendo concreto, es el momento de introducir problemas que requieran una organización sistemática de la información, preparando al alumnado para la generalización y el pensamiento formal.

1.2.2.4 Período de las Operaciones Formales (final de la Primaria, aproximadamente 10-12 años, y adolescencia)

Esta etapa se consolida plenamente en la adolescencia, pero sus primeras manifestaciones pueden observarse en los últimos cursos de Educación Primaria. Se caracteriza por la capacidad de *razonar de forma abstracta*, manipular ideas mentalmente sin necesidad de apoyo concreto, y emplear el *razonamiento hipotético-deductivo* (pensar en posibilidades y probar hipótesis).

Características Relevantes. La emergencia de este pensamiento permite al alumnado:

- Razonar sobre proposiciones verbales y conceptos abstractos, más allá de la experiencia directa y manipulable.
- Comprender las propiedades de los números y operaciones de forma más generalizada y formal.
- Abordar problemas que requieren la consideración de múltiples variables, la formulación y verificación de hipótesis, y la inferencia de relaciones complejas.
- Desarrollar un pensamiento algebraico rudimentario, al comprender la generalización de patrones y relaciones numéricas.

Implicación didáctica: Hacia el Pensamiento Abstracto

Aunque el dominio pleno de esta etapa se reserva para la Educación Secundaria, la Educación Primaria sienta las bases al fomentar el *razonamiento lógico*, la *generalización* y la *argumentación* en el contexto de la aritmética. La introducción de nuevos conjuntos numéricos como los *números enteros* (con sus propiedades abstractas de signo y opuesto), las *fracciones* (en sus múltiples interpretaciones) y los *números decimales* (con su densidad) en los últimos ciclos de Primaria, así como problemas que requieren más de un paso o que involucran la abstracción de propiedades, contribuyen a esta transición. El docente puede comenzar a desafiar al alumnado con preguntas que promuevan la reflexión sobre *lo posible*, *lo*

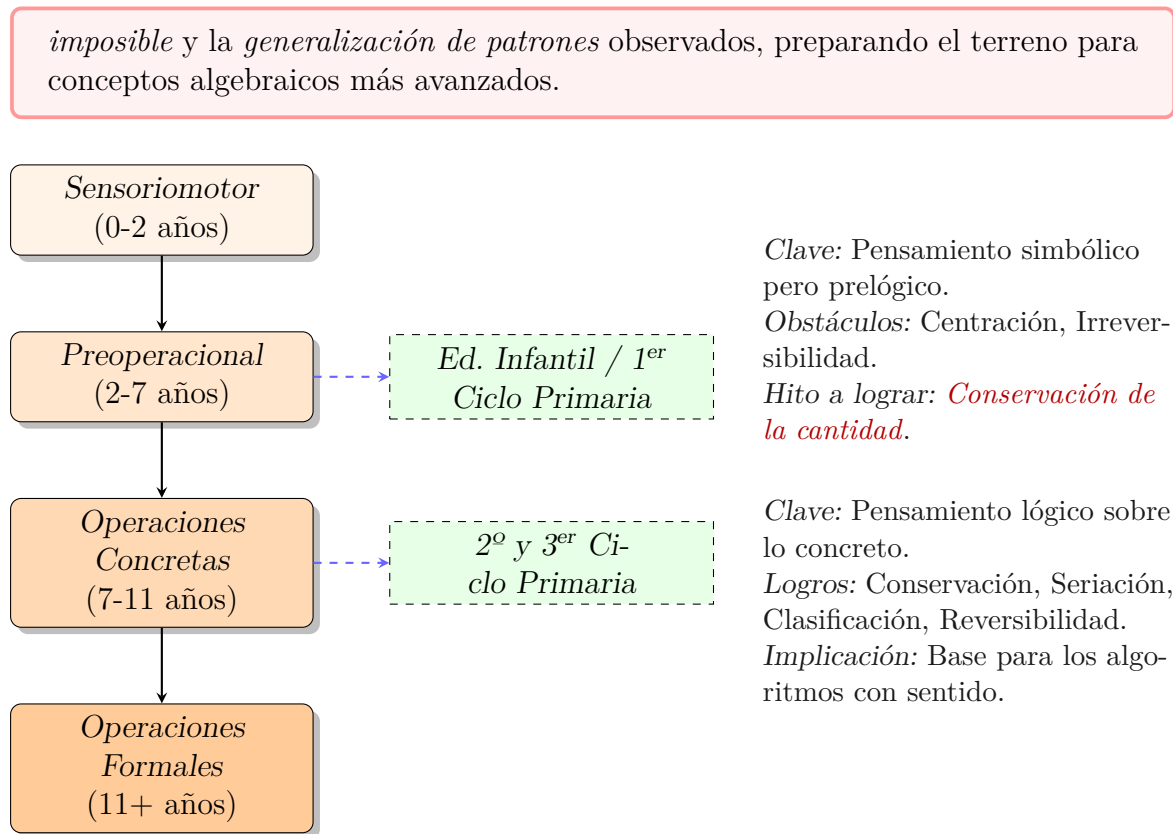


Figura 1.1: Etapas del Desarrollo Cognitivo de Piaget y su Vinculación con la Educación Primaria.

1.2.3 Conclusiones

La teoría de Jean Piaget ha sido y sigue siendo una referencia indispensable para comprender el desarrollo cognitivo infantil y sus implicaciones para la educación matemática. Sus aportaciones, como la idea del niño y niña como constructor activo de su conocimiento y la descripción de etapas cualitativamente distintas en el pensamiento, transformaron la pedagogía.

Sin embargo, investigaciones posteriores han *matizado y complementado* algunos de sus postulados. Entre los avances más significativos se encuentran:

- **La Influencia de la Instrucción y la Experiencia:** A diferencia de la visión inicial de Piaget, que enfatizaba la maduración biológica como el motor principal del desarrollo, estudios posteriores, influenciados por Lev Vygotsky (1978/2009) y por modelos como el de van Hiele (1986) en Didáctica de la Geometría, han mostrado que la *progresión a través de las etapas no es puramente cronológica*, sino que puede ser acelerada o facilitada por la *calidad y la pertinencia de las experiencias didácticas*. Es decir, el desarrollo cognitivo puede ser *moldeado por una enseñanza intencionada y estructurada*. Esto implica que el docente no espera pasivamente la “maduración” del discente, sino que diseña activamente situaciones de aprendizaje para promover el avance cognitivo.
- **Subestimación de las Capacidades Infantiles:** Algunas investigaciones han sugerido que Piaget subestimó las capacidades de los niños y niñas en ciertas etapas,

especialmente cuando las tareas se presentaban de forma más familiar o simplificada, o cuando se utilizaban métodos de evaluación menos dependientes del lenguaje (Kamii, 1985/2003).

- *Énfasis en el Contexto Social y Cultural:* Mientras Piaget se centró en el individuo, teóricos como Vygotsky (1978/2009) destacaron la importancia del contexto social, la interacción con otros (pares y adultos más capaces) y el lenguaje como mediadores fundamentales del desarrollo cognitivo y mediante procesos de andamiaje. El aprendizaje es, en gran medida, un proceso colaborativo.
- *Variabilidad en el Ritmo y Recurrencia:* Aunque las etapas de Piaget describen una secuencia general, la investigación ha mostrado una mayor variabilidad individual en el ritmo de desarrollo y, a veces, una “recuperación” de ciertas características de etapas previas en contextos más complejos. De esta forma, el aprendizaje se configura más como una espiral que como una línea recta.

En síntesis, si bien la teoría de Piaget sigue siendo una base sólida para entender el pensamiento infantil, la didáctica moderna de la aritmética integra esta perspectiva con los hallazgos de otras teorías que subrayan la *maleabilidad del desarrollo cognitivo* ante una *instrucción bien diseñada y sensible al discente*, que valora la interacción, la contextualización y la experiencia activa. Para el futuro docente, esto significa que su rol es proactivo en la creación de las condiciones para que el discente no solo aprenda, sino que desarrolle su pensamiento matemático de manera profunda y flexible.

1.3 Teorías Fundamentales del Aprendizaje y su Aplicación en Matemáticas

La visión constructivista de Piaget, centrada en el individuo, fue el punto de partida de una revolución pedagógica. Sin embargo, otras teorías han enriquecido y complementado esta visión, añadiendo capas de complejidad social, cultural y representacional que son vitales para la didáctica de la aritmética. La comprensión de estos modelos permite al futuro docente adoptar un enfoque multifacético que fomente una comprensión matemática profunda, flexible y duradera.

1.3.1 Constructivismo: El Aprendiz como Protagonista de su Aprendizaje

Ampliando las ideas de Piaget, el constructivismo postula que el aprendizaje ocurre cuando los individuos interpretan y organizan sus experiencias, creando sus propios significados y estructuras mentales. Vygotsky (1978/2009) añade la dimensión social a este proceso.

Así, el constructivismo, como paradigma de aprendizaje, se erige sobre la premisa de que el conocimiento no es una entidad preexistente que se transfiere pasivamente, sino que es *construido activamente por el sujeto* a través de su interacción con el mundo físico y social (Von Glasersfeld, 1995/2012). Ampliando las ideas de Piaget, el constructivismo postula que el aprendizaje ocurre cuando los individuos interpretan y organizan sus experiencias, creando sus propios significados y estructuras mentales. Desde esta perspectiva, los “errores” no son fallos a penalizar, sino ventanas al pensamiento del alumnado, proporcionando información valiosa sobre cómo están construyendo su comprensión.

En la didáctica de la aritmética, el enfoque constructivista implica un cambio de rol para el docente, que pasa de ser un transmisor a un *facilitador y diseñador de experiencias*. Se deben proponer tareas que:

- *Promuevan la exploración y el descubrimiento*: En lugar de presentar directamente una regla para sumar números pares, el docente podría proponer al alumnado que sumen varios pares y observen qué tipo de número resulta, formulando preguntas como “¿Siempre es un número par? ¿Por qué?”. De esta forma se invita a la construcción de la generalización por sí mismos.
- *Valoren los errores como oportunidades de aprendizaje*: Si un discente, al sumar $25+18$, escribe 313 (lo que sugiere una suma de unidades con unidades y decenas con decenas sin reagrupación), el docente no solo corrige, sino que indaga en el razonamiento subyacente (por ejemplo, una falta de comprensión del valor posicional o la reagrupación) para ofrecer una intervención dirigida.
- *Fomenten la reflexión y la metacognición*: Animar al alumnado a pensar sobre su propio proceso de resolución de problemas. Después de resolver un problema, preguntar: “¿Cómo lo resolviste? ¿Qué estrategias probaste? ¿Qué aprendiste de este problema que te puede servir para otro?”. Esto ayuda al discente a ser más conscientes de su propio aprendizaje y a regular sus estrategias.

Como se puede observar, el objetivo pasa de una transmisión vertical del conocimiento a procesos constructivos, a reconocer que es el alumnado el que aprende y el docente es un guía. Lejos de relegar la labor docente a un plano secundario, su importancia y dificultad se multiplica, al hacer patente la acción del docente como investigador de los procesos que se están desarrollando bajo su tutela.

Mini-Caso de Aula: Construyendo la propiedad conmutativa

Un docente de Primer Ciclo quiere que su alumnado descubra la propiedad conmutativa de la suma. En lugar de enunciar la regla “el orden de los sumandos no altera el producto”, propone una tarea exploratoria. Entrega a cada pareja de alumnos fichas de dos colores y les pide que representen la suma $3 + 5$. La mayoría crea un grupo de 3 fichas rojas y otro de 5 fichas azules, concluyendo que el total es 8. A continuación, el docente no da una respuesta, sino que lanza una pregunta: «¿Y qué pasaría si juntamos primero las 5 fichas azules y luego las 3 rojas?». Al manipular el material, el propio alumnado observa que el resultado sigue siendo 8. Es a través de esta acción y de la posterior discusión guiada («¿Creéis que esto pasará siempre?») que los estudiantes *construyen* por sí mismos el significado de la propiedad, en lugar de recibirlo pasivamente.

1.3.2 Aprendizaje Significativo

La teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel et al. (1983/1991) sostiene que el conocimiento se adquiere de manera duradera y aplicable cuando la nueva información se relaciona de forma *sustantiva y no arbitraria* con la estructura cognitiva preexistente del discente, es decir, con lo que el discente ya sabe. Contrasta con el aprendizaje memorístico o “por repetición”, donde la información se almacena sin conexión con el conocimiento previo y, por tanto, se puede olvidar fácilmente y es poco

transferible. Para que el aprendizaje sea significativo, se requieren dos condiciones: que el material de aprendizaje sea potencialmente significativo (lógico y organizado) y que el aprendiz tenga una disposición favorable para aprender significativamente.

Para promover el aprendizaje significativo en aritmética, el docente debe:

- *Activar los conocimientos previos del alumnado:* Antes de introducir la multiplicación, recordar y explorar con el alumnado la *suma repetida* (3×4 es lo mismo que $4 + 4 + 4$). Esto conecta la nueva operación con una que ya dominan, dándole sentido. Para introducir fracciones, se puede partir de experiencias cotidianas de reparto equitativo.
- *Utilizar organizadores previos:* Introducir conceptos o ideas amplias antes de sumergirse en detalles. Por ejemplo, antes de trabajar con números enteros, se puede discutir sobre situaciones de “ganancias y pérdidas” o “temperaturas bajo cero” para activar un marco conceptual que dé sentido a los números negativos.
- *Asegurar que el material de aprendizaje sea potencialmente significativo y relevante:* Presentar los conceptos aritméticos dentro de *contextos de la vida real* donde su utilidad sea evidente. Introducir los números decimales a través de problemas de compras, mediciones (longitud, peso), o precios, mostrando su funcionalidad directa y conectándolos con las fracciones decimales.

Como un resumen, posiblemente en exceso simple, establecer conexiones entre los elementos a aprehender, aquellos que ya existen en el alumnado y aquellos que pueden proporcionar el entorno. De esta forma, los conocimientos adquiridos se integran en una red que le da soporte, los integra y facilita su permanencia.

Mini-Caso de Aula: Anclando la multiplicación en la suma

Un docente de Segundo Ciclo quiere introducir el concepto de multiplicación. Sabe que su alumnado ya domina la suma. Para asegurar un aprendizaje significativo, *activa sus conocimientos previos* planteando un problema: «En la clase hay 4 equipos, y he dado 6 rotuladores a cada equipo. ¿Cuántos rotuladores he repartido en total?». El alumnado, de forma natural, resuelve el problema usando su conocimiento preexistente: la suma repetida ($6 + 6 + 6 + 6 = 24$). Una vez que varias soluciones basadas en la suma están en la pizarra, el docente establece el *anclaje* al nuevo concepto: «¡Perfecto! Lo que habéis hecho es correcto. En matemáticas, existe una forma más corta y rápida de escribir esta suma cuando el número se repite. Se escribe así: $4 \times 6 = 24$, y se lee 'cuatro veces el seis'». De este modo, la multiplicación no se presenta como una idea nueva y arbitraria, sino como una extensión lógica y eficiente de un conocimiento ya consolidado, haciendo el aprendizaje mucho más duradero.

1.3.3 Interacción Social y Lenguaje

Lev Vygotsky (1978/2009) postuló que el desarrollo cognitivo es inseparable del contexto social y cultural. Su teoría sociocultural enfatiza el papel crucial de la *interacción social* y el *lenguaje* como herramientas fundamentales para la mediación y construcción del pensamiento. Para Vygotsky, el aprendizaje a menudo precede al desarrollo, y la interacción con individuos más capaces permite al discente internalizar

herramientas culturales y formas de pensar.

Los conceptos clave para Didáctica de la Aritmética pueden ser:

- *Zona de Desarrollo Próximo (ZDP)*: Es la distancia entre el nivel de desarrollo “real” del discente (lo que puede hacer de forma independiente) y su nivel de desarrollo “potencial” (lo que puede hacer con la ayuda). La enseñanza efectiva debe situarse en esta zona, ofreciendo desafíos que son alcanzables con el apoyo adecuado.

Por ejemplo, un discente puede no ser capaz de resolver un problema de dos pasos por sí solo (ej., “Tengo 5 manzanas y me dan 3, luego se comen 2. ¿Cuántas quedan?”). Sin embargo, con la guía del docente, quien formula preguntas clave (“¿Cuántas tienes al principio?”, “¿Qué pasa después?”, “¿Qué operación necesitas para eso?”), o con un compañero o compañera que le ayuda a desglosar el problema en partes más sencillas, puede lograrlo.

- *Andamiaje (Scaffolding)*: Se refiere al apoyo temporal y ajustado que el docente (u otro discente) proporciona al aprendiz para ayudarlo a realizar una tarea que está más allá de sus capacidades actuales. Este apoyo se retira progresivamente a medida que el discente internaliza la habilidad o el concepto.

Por ejemplo, al introducir la suma con llevadas, el docente puede empezar dando un “andamio” completo usando bloques multibase, verbalizando cada paso y modelando el proceso. A medida que el aprendiz asimila, el apoyo se reduce, pasando a solo dar una pista, hasta que pueden realizar el algoritmo de forma autónoma.

- *El Lenguaje como Herramienta de Pensamiento*: El lenguaje no es sólo un medio de comunicación, sino que es fundamental para la organización del pensamiento y la autorregulación. La *verbalización* y el *diálogo* en el aula ayudan a los discentes a clarificar ideas, interiorizar conceptos y regular su propio proceso de aprendizaje.

Por ejemplo, promover debates en el aula sobre diferentes formas de resolver un mismo problema (“¿Cómo lo hiciste tú?”). Animar al discente a explicar “por qué” su método funciona, no solo “cómo” lo hicieron. Esto no solo mejora la comunicación matemática, sino que también afina su propio razonamiento lógico.

En resumen, el aprendizaje no es una labor individual sino colectiva, de soporte continuo entre los participantes durante el proceso, y con un fuerte apoyo en el lenguaje, que constituye un vehículo de formalización de los contenidos apprehendidos.

Mini-Caso de Aula: Guiando la estrategia de división

Un discente de 3° de Primaria se enfrenta a la división $92 \div 4$. Por sí solo, no sabe cómo empezar. El docente le proporciona un andamiaje a través de preguntas: “¿Sabes cuánto es 10 por 4? ¿Y 20 por 4?”. El discente responde “40 y 80”. El docente continúa: “Perfecto. De los 92 caramelos que tienes que repartir, ya sabes repartir 80. ¿Cuántos te quedan por repartir?”. Esta interacción en la Zona de Desarrollo Próximo permite al discente construir una estrategia de restas

sucesivas que no podría haber alcanzado de forma independiente.

Profundizando: Conflicto Cognitivo y Conflicto Sociocognitivo

Mientras que Piaget se centró en el *conflicto cognitivo* como un desequilibrio interno que surge cuando un individuo contrasta sus esquemas con la realidad física (ej., contar las fichas de la fila larga y ver que el resultado contradice su percepción), los teóricos de la escuela sociocultural, como Vygotsky, destacan el poder del *conflicto socio-cognitivo*.

Este conflicto no surge de la contradicción entre la idea del niño y un objeto, sino de la *confrontación entre los diferentes puntos de vista* de los miembros de un grupo que colaboran en una tarea. Cuando, en un debate sobre la conservación, un alumno afirma «hay más porque es más larga» y otro replica «¡pero si no has añadido ni quitado ninguna, tienen que ser las mismas!», se produce un conflicto socio-cognitivo. La necesidad de *comprender la lógica del otro* y de *defender la propia postura con argumentos* se convierte en un motor potentísimo para la reestructuración cognitiva.

El rol del docente, desde esta perspectiva, no es solo ser un generador de desequilibrios con el material, sino un *mediador de desequilibrios sociales* a través del diálogo y la colaboración.

1.3.4 Modos de Representación

Jerome Bruner (1966/1972) propuso que el conocimiento, y en particular los conceptos matemáticos, puede representarse y comprenderse de tres modos principales, que a menudo (aunque no siempre rígidamente) siguen una secuencia en el desarrollo, y que deben ser promovidos durante la instrucción para asegurar una comprensión profunda y flexible. La capacidad de transitar entre estas representaciones es un indicador de comprensión.

En aplicación a la Didáctica de la Aritmética, estos modos se podrían representar como:

- *Modo Enactivo (acción)*: El conocimiento se representa a través de la *acción y la manipulación directa de objetos*. Es la forma más concreta de interacción y comprensión, especialmente relevante en las primeras etapas evolutivas.

Por ejemplo, para introducir el concepto de decena, los niños agrupan 10 palillos y los atan con una goma. Para sumar $3 + 2$, usan tres fichas y luego añaden dos más, contando el total. El “hacer” matemático es central aquí.

- *Modo Icónico (imagen)*: El conocimiento se representa mediante *imágenes, gráficos o esquemas visuales*. El niño ya no necesita manipular los objetos físicamente, pero puede visualizarlos o dibujarlos para razonar.

Por ejemplo, dibujar conjuntos de 10 círculos para representar una decena, o usar un diagrama de barras para representar la suma $3 + 2 = 5$. Las tiras de fracciones o los gráficos de área para la multiplicación son ejemplos icónicos.

- *Modo Simbólico (lenguaje/símbolos)*: El conocimiento se representa a través de *símbolos arbitrarios*, como números, palabras o signos operatorios. Es el nivel

	<i>Motor del desarrollo</i>	<i>Papel del lenguaje</i>	<i>Rol de la interacción social</i>	<i>Unidad de análisis</i>
Piaget	El <i>desequilibrio cognitivo</i> y la equilibración. Proceso interno de adaptación del individuo.	Es un <i>reflejo</i> del nivel de desarrollo cognitivo, no su causa. El pensamiento precede al lenguaje.	Puede generar conflictos cognitivos, pero el foco es la <i>construcción individual</i> .	El <i>sujeto epistémico</i> . Las estructuras mentales individuales (esquemas).
Vygotsky	La <i>interacción social</i> y la mediación a través de herramientas culturales (especialmente el lenguaje) y la interacción social a través del andamiaje (scaffolding).	Es la <i>herramienta fundamental</i> del pensamiento; lo organiza y lo posibilita. El lenguaje tira del pensamiento.	Es el <i>origen</i> de los procesos psicológicos superiores (ley de doble formación).	La <i>actividad mediada</i> . La diada o el grupo social en interacción.
Bruner	El <i>descubrimiento guiado</i> . A través de diferentes formas de representación.	Crucial para la transición al <i>modo simbólico</i> . Permite la abstracción y la conceptualización.	Contexto <i>esencial</i> para el andamiaje y la construcción de significados compartidos culturalmente.	El <i>aprendiz en su contexto</i> , interactuando con el conocimiento a través de los modos de representación.

Tabla 1.1: Tabla comparativa de las teorías de Piaget, Vygotsky y Bruner.

más abstracto y convencional de representación matemática.

Por ejemplo, escribir el número “10” o la expresión “ $3 + 2 = 5$ ”. La comprensión de los algoritmos escritos y las fórmulas algebraicas corresponden a este modo.

Una enseñanza efectiva de la aritmética debe facilitar la *transición fluida y la conexión entre estos modos*, permitiendo al alumnado construir significados sólidos para los símbolos matemáticos a partir de experiencias concretas y visuales. No se trata de “pasar de fase” y abandonar la anterior, sino de *integrar y conectar las diferentes representaciones* para una comprensión robusta y adaptable.

Mini-Caso de Aula: De la acción al símbolo con fracciones

Para enseñar la fracción $1/3$, un docente propone una secuencia que transita por los tres modos de representación. Primero, la fase *enactiva*: el alumnado pliega una tira de papel en tres partes iguales. Segundo, la fase *icónica*: dibujan un rectángulo en su cuaderno y colorean una de las tres partes. Finalmente, la fase *simbólica*: el docente introduce la notación formal “ $\frac{1}{3}$ ” como la manera matemática de escribir lo que acaban de hacer y dibujar.

1.3.5 Comprensión Instrumental vs. Relacional

Richard Skemp (1978) distinguió entre dos tipos fundamentales de comprensión matemática, con implicaciones directas y profundas para la didáctica y los resultados del aprendizaje. Esta distinción es uno de los pilares conceptuales de este manual, vital para definir los objetivos de la enseñanza de la aritmética:

- *Comprensión Instrumental* (“saber cómo”): Se caracteriza por el conocimiento de reglas, algoritmos y procedimientos sin entender por qué funcionan. Permite obtener respuestas correctas en contextos limitados y bien definidos, pero carece de flexibilidad, es difícil de adaptar a nuevas situaciones y se olvida fácilmente.

Por ejemplo, un discente que “lleva uno” en la suma sin entender que está reagrupando 10 unidades en una decena, o que aplica la regla de “multiplicar en cruz” para la división de fracciones sin comprender la lógica subyacente. Puede resolver problemas, pero si se le cambia ligeramente el formato o el contexto, es bastante posible que tenga problemas.

- *Comprensión Relacional* (“saber cómo y por qué”): Implica el conocimiento de las reglas y procedimientos, junto con una *comprensión profunda de las relaciones y estructuras matemáticas subyacentes*. Es flexible, adaptable a nuevas situaciones, más fácil de recordar y más potente para la resolución de problemas no rutinarios.

Por ejemplo, considérese un discente que entiende la reagrupación en la suma utilizando bloques multibase y puede explicar por qué “se lleva 1” a la siguiente columna, o que puede derivar la regla de división de fracciones a partir de un modelo de reparto. Este discente dispondrá de herramientas para adaptar sus estrategias y comprender el significado de la operación en diversos contextos, incluso construyendo nuevas aproximaciones ante situaciones que le produzcan conflictos o disonancias con las que ya conoce.

El objetivo primordial en la enseñanza de la aritmética debe ser promover la *comprensión relacional*, ayudando al alumnado a construir el significado profundo de los algoritmos y conceptos. Esto se logra a través de la exploración, la discusión y la conexión de los nuevos conocimientos con los ya existentes y con su significado inherente.

1.3.6 Principios de la Variabilidad Perceptual y Matemática

Zoltan Dienes (1960/1967) fue un destacado promotor del aprendizaje matemático a través del juego y los materiales manipulativos, enfatizando la importancia de la experiencia concreta y la abstracción gradual. Sus principios didácticos son altamente relevantes para el diseño de actividades que fomentan la comprensión conceptual en aritmética, especialmente en las etapas iniciales donde el conocimiento se construye a partir de la interacción con la realidad.

Plantea cuatro principios fundamentales, que también son de aplicación en la Didáctica de la Aritmética:

- *Principio Dinámico*: El aprendizaje es un *proceso activo* que requiere la participación del discente en actividades y juegos. Los discentes aprenden mejor haciendo y experimentando, lo que lleva a un descubrimiento y construcción de conceptos.

Por ejemplo, en lugar de explicar la definición de fracción, el alumnado debe experimentar repartiendo una pizza o un pastel en partes iguales, doblando papeles para crear mitades o cuartos, y luego discuten sus hallazgos.

- *Principio de Constructividad*: La construcción de conceptos precede al análisis. El alumnado debe *construir su propio conocimiento* a través de la manipulación y la interacción con los materiales y las ideas, antes de que se les presenten reglas formales.

Por ejemplo, permitir a los discentes construir diferentes números con bloques multibase, agrupar y desagrupar, y luego analizar las reglas del valor posicional o la reagrupación, en lugar de presentar el algoritmo directamente.

- *Principio de Variabilidad Perceptual (o Múltiple Concreción)*: Un mismo concepto matemático debe presentarse a través de una *variedad de materiales y contextos perceptualmente diferentes* para ayudar al alumnado a abstraer la estructura común que subyace a ellos. Esto evita que el concepto quede ligado a una representación específica.

Por ejemplo, el concepto de la decena puede ser representado con los dedos de las manos, un paquete de 10 palillos, una barra de bloques multibase, una fila de 10 unidades en el ábaco, o 10 céntimos. Esto ayuda al discente a abstraer la idea de “diez” como una cantidad, más allá de una representación particular.

- *Principio de Variabilidad Matemática*: Para abstraer un concepto, se deben *variar sistemáticamente todas las variables irrelevantes* (contexto, números específicos) mientras se mantiene constante la estructura matemática esencial del concepto.

Por ejemplo, para enseñar el concepto de suma, se presentan problemas con diferentes cantidades, diferentes contextos (juguetes, frutas, dinero, etc.) y diferentes estructuras semánticas (añadir, juntar, comparar), pero siempre manteniendo la operación subyacente de adición. Esto ayuda al discente a identificar la estructura matemática profunda que se mantiene a través de las variaciones superficiales.

Estos principios guían al docente en la selección y el uso intencionado de materiales y actividades para asegurar que los conceptos aritméticos se construyan de forma profunda, generalizable y con sentido.

Mini-Caso de Aula: Comprensión instrumental vs. relacional en la resta

Al corregir una resta, dos discentes han llegado a la respuesta correcta. El docente pregunta por qué funciona el algoritmo. El primer alumno da una respuesta *instrumental*: “Tacho el 7, le pongo un 6 arriba y le paso un 1 al 2”. El segundo alumno muestra una comprensión *relacional*: “Como a 2 no le puedo quitar 5, descompongo una de las siete decenas en diez unidades. Ahora tengo 6 decenas y 12 unidades, y ya puedo restar”. El objetivo del docente es promover este segundo tipo de razonamiento.

1.3.7 La Dimensión Afectiva en el Aprendizaje de la Aritmética

El aprendizaje de la aritmética no se limita a un proceso puramente cognitivo, sino que está profundamente entrelazado con el *dominio afectivo* del discente. Este abarca una compleja red de emociones, actitudes, creencias y motivaciones que no solo influyen en el rendimiento, sino que pueden determinar la relación del individuo con las matemáticas a lo largo de su vida. Como señala McLeod (1992), las emociones pueden facilitar o inhibir el pensamiento, mientras que las actitudes y creencias actúan como filtros que determinan cómo el discente se acerca a la información matemática. Para un docente eficaz, comprender y gestionar esta dimensión es tan esencial como dominar el contenido disciplinar.

1.3.7.1 La Ansiedad Matemática como Mecanismo de Autoprotección: El «Bloqueo»

La *ansiedad matemática* es una reacción emocional intensa (Richardson & Suinn, 1972) que consume recursos de la memoria de trabajo (Ashcraft, 2002). Investigaciones como las de Beilock et al. (2010) han demostrado que la ansiedad matemática de los docentes puede influir en el rendimiento de su alumnado.

Va más allá de una simple aversión; para muchos alumnos, se manifiesta como un verdadero *bloqueo mental*. Desde una perspectiva psicológica, este bloqueo puede interpretarse como un *mecanismo de autoprotección*, una respuesta de defensa ante una percepción de amenaza.

El cerebro humano, ante una amenaza percibida, activa el sistema de «lucha, huida o parálisis» (*fight-flight-freeze response*). Cuando una tarea matemática es percibida como una amenaza (al ego, a la autoestima o al estatus social), se activa una respuesta de estrés que desvía recursos cognitivos. Sus efectos son directos:

- **Impacto en la Memoria de Trabajo:** La ansiedad consume una parte significativa de la *memoria de trabajo* (*working memory*), el espacio cognitivo donde procesamos información en tiempo real (Ashcraft, 2002). Cuando la memoria se satura con pensamientos intrusivos de preocupación («¿Y si fallo?», «No soy capaz»), quedan menos recursos para la tarea matemática. Esta *interferencia cognitiva* es el “bloqueo”, incluso si se poseen los conocimientos.
- **Condicionamiento Negativo:** Experiencias repetidas de fracaso pueden llevar a un condicionamiento donde la mera presencia de números desencadena ansiedad anticipatoria. Esto puede desembocar en una *indefensión aprendida*, donde el discente cree que sus esfuerzos serán inútiles, alimentando un ciclo de evitación y bajo rendimiento.

El docente debe reconocer que el “bloqueo” no es falta de inteligencia, sino una respuesta psicológica. La prioridad es desactivar esta percepción de amenaza creando un ambiente de seguridad donde el error no tenga una carga negativa. Como demuestra la literatura, la ansiedad matemática puede incluso transmitirse de docentes a discentes, por lo que es vital tomar medidas para romper este ciclo (Beilock et al., 2010; Foley et al., 2017).

1.3.7.2 Actitudes y Creencias: El Poder de la «Mentalidad de Crecimiento»

Las *actitudes* son predisposiciones afectivas (positivas o negativas) hacia las matemáticas, mientras que las *creencias* son las convicciones sobre la naturaleza de las matemáticas (ej., su utilidad), sobre uno mismo como aprendiz (autoeficacia) y sobre su enseñanza (Pehkonen, 1995). Estas creencias actúan como un filtro que moldea el aprendizaje:

- *Creencias Limitantes*: Ideas como «las matemáticas son solo para los que tienen un don» o «no soy bueno/a en esto» conducen a una baja autoeficacia. Un alumno con estas creencias se autolimitará para protegerse del posible fracaso, creando un ciclo de evitación que impide la práctica.
- *Creencias Empoderadoras*: Por el contrario, creencias como «con esfuerzo puedo mejorar» o «los errores son oportunidades para aprender» fomentan una *mentalidad de crecimiento* (*growth mindset*), concepto desarrollado por Dweck (2016), que impulsa la curiosidad, la resiliencia y un aprendizaje profundo.

Mini-Caso de Aula: Fomentando la Mentalidad de Crecimiento

Un discente se enfrenta a un problema y dice frustrado: «No sé hacerlo. Soy malo para las mates» (declaración de mentalidad fija).

Intervención del docente orientada a proceso: «*Todavía* no sabes hacerlo, y es normal, es un problema nuevo. ¿Qué has intentado hasta ahora? [...] Bien, esa estrategia no funcionó, pero pensar en ella ya es un paso. ¿Qué otra cosa podríamos probar? Recuerda que tu cerebro es como un músculo, y ahora mismo lo estás entrenando.»

Este tipo de lenguaje cambia el foco del resultado (ser listo/tonto) al *proceso* (esforzarse, probar estrategias, aprender), que es el núcleo de la mentalidad de crecimiento.

1.3.7.3 Metas de Logro: El Motor de la Motivación en el Aula

Para comprender cómo el docente puede influir activamente en estas creencias y actitudes, recurrimos a una de las aportaciones más robustas de la psicología de la motivación: la *Teoría de las Metas de Logro* (TML). Este marco, estudiado extensamente tanto en contextos académicos como deportivos, distingue dos orientaciones motivacionales fundamentales (Ames, 1992; Duda & Nicholls, 1992):

Orientación a la Tarea (Metas de Maestría): Un discente con esta orientación se centra en el proceso de aprendizaje en sí mismo. Su principal objetivo es comprender, mejorar sus habilidades y dominar el contenido. El éxito se define por el esfuerzo, el progreso personal y el aprendizaje. Los errores son vistos como una parte natural del proceso, una oportunidad para obtener información y mejorar. Este enfoque se alinea con la búsqueda de una *comprensión relacional* (Skemp, 1978) y con la *mentalidad de crecimiento*.

Orientación al Ego (Metas de Rendimiento): Un estudiante con esta orientación se centra en demostrar su capacidad en comparación con los demás. Su objetivo es parecer competente, superar a otros o evitar parecer incompetente. El éxito se define

Tabla 1.2: Paralelismo entre el modelo TARGET desarrollado por Ames (1992) y adaptado por Darren Treasure y Roberts (1995) para el deporte y la gestión de la motivación en la clase de Matemáticas.

<i>Elemento</i>	<i>En el Aula de Matemáticas (Clima de Maestría)</i>	<i>En el Entrenamiento Deportivo (Clima de Tarea)</i>
Task	Presentar problemas variados, interesantes y con un nivel de desafío adecuado. Enfocarse en el proceso de resolución.	Diseñar ejercicios variados y desafiantes. Enfocarse en el desarrollo de la habilidad y la táctica.
Authority	Dar a los estudiantes oportunidades para tomar decisiones en su aprendizaje, como elegir un método para resolver un problema.	Involucrar a los atletas en la toma de decisiones, dándoles responsabilidades y fomentando su autonomía.
Recognition	Reconocer el esfuerzo, la mejora y el progreso individual de forma privada o centrada en el proceso.	Reconocer el esfuerzo, la mejora personal y el buen espíritu deportivo. Elogiar a los jugadores por su trabajo.
Grouping	Fomentar el aprendizaje cooperativo y la colaboración en grupos heterogéneos para resolver problemas.	Usar agrupamientos flexibles que promuevan la cooperación y el aprendizaje entre compañeros.
Evaluation	Evaluar basándose en el progreso y el dominio personal. Los errores son vistos como parte del aprendizaje.	La evaluación se centra en el esfuerzo y la mejora personal. Los errores se utilizan como oportunidades de enseñanza.
Time	Dar tiempo flexible para completar las tareas y para que los estudiantes puedan trabajar a su propio ritmo.	Dar tiempo suficiente para practicar y dominar nuevas habilidades sin la presión constante de la competición.

por obtener la respuesta correcta (especialmente si es rápido) o recibir elogios por su «inteligencia». Los errores son vistos como un fracaso, una evidencia de falta de habilidad, lo que genera una amenaza directa a su autoestima y fomenta una *comprensión instrumental*.

1.3.7.4 Implicaciones Didácticas: El Docente como Arquitecto Motivacional

Es vital entender que estas orientaciones no son rasgos fijos de la personalidad, sino que son enormemente influenciadas por el *clima motivacional* que el docente, como un entrenador, crea en el aula. La investigación ha cristalizado estos principios en el marco *TARGET* (Ames, 1992; Treasure & Roberts, 1995), un acrónimo que describe las seis dimensiones clave que un educador puede gestionar para fomentar una sistemática *orientación a la tarea*. El paralelismo es asombrosamente directo con la gestión de la motivación en el aula de matemáticas, como se puede observar en la Tabla 1.2.

Task (Tarea): Diseñar tareas ricas, significativas y con un nivel de desafío adecuado, que permitan múltiples vías de resolución. El interés se centra en el proceso y en las estrategias. Esto contrasta con hojas de ejercicios repetitivos donde solo importa la respuesta final.

Authority (Autoridad/Autonomía): Dar al alumnado oportunidades para tomar decisiones en su aprendizaje: elegir qué material usar, qué estrategia seguir, o cómo presentar una solución. Esto fomenta la responsabilidad y la implicación personal.

Recognition (Reconocimiento): Elogiar y reconocer el esfuerzo, la perseverancia, la creatividad y la mejora personal. El reconocimiento debe ser privado o centrado en el proceso («Me ha gustado cómo has usado los bloques para resolverlo») en lugar de público y centrado en la persona («Qué lista eres»).

Grouping (Agrupamiento): Fomentar el trabajo cooperativo en grupos heterogéneos. La colaboración reduce el aislamiento, permite que los alumnos verbalicen sus ideas y aprendan unos de otros, promoviendo el respeto por la diversidad de pensamiento.

Evaluation (Evaluación): La evaluación debe basarse en el progreso individual y la comprensión profunda. Los errores deben ser vistos y utilizados como una valiosa fuente de información para seguir aprendiendo, no como fallos a penalizar. La retroalimentación debe ser específica y orientada a la mejora.

Time (Tiempo): Otorgar tiempo flexible para la resolución de problemas, permitiendo que cada estudiante pueda reflexionar y trabajar a su propio ritmo sin la presión de la velocidad. Minimizar las actividades contrarreloj, que son un conocido detonante de la ansiedad matemática.

Como futuros docentes, nuestra práctica debe promover sistemáticamente este «clima de tarea», pues es la vía más eficaz para cultivar estudiantes resilientes, curiosos y con una confianza duradera en su capacidad para hacer matemáticas.

Implicación didáctica: Del Clima Motivacional al Sentido Socioafectivo

Las teorías sobre la motivación y la dimensión afectiva en el aprendizaje, como la Teoría de las Metas de Logro que hemos analizado, no son meras construcciones académicas. Cristalizan y se convierten en un pilar fundamental del marco normativo vigente en nuestra comunidad.

La *ORDEN de 30 de mayo de 2023*, que desarrolla el currículo de Educación Primaria en Andalucía, establece el *Sentido Socioafectivo* como uno de los seis organizadores clave del área de Matemáticas. Este sentido busca explícitamente «fomentar el bienestar del alumnado y el desarrollo de habilidades para la gestión emocional y las relaciones sociales, valorando la diversidad y promoviendo la inclusión».

La conexión entre la teoría y la práctica curricular es directa y evidente:

- *Orientación a la Tarea vs. Ego*: El fomento de una *orientación a la tarea* (metas de maestría) es el vehículo principal para desarrollar el sentido socioafectivo. Al valorar el esfuerzo, la estrategia personal y el progreso

individual por encima de la comparación social o la rapidez en la respuesta (propias de la orientación al ego), estamos construyendo la *autoconfianza*, la *perseverancia* y una *actitud positiva* hacia las matemáticas, todos ellos objetivos explícitos del currículo andaluz.

- *El Error como Oportunidad*: La concepción del error no como un fracaso, sino como una fuente de aprendizaje, es un pilar tanto de la orientación a la tarea como del sentido socioafectivo. Gestionar el error de forma constructiva en el aula ayuda a *gestionar la ansiedad* y a desarrollar la *resiliencia* ante los desafíos.
- *Aprendizaje Cooperativo*: El currículo promueve el trabajo en equipo y el diálogo. Estas prácticas no solo son herramientas de aprendizaje cognitivo (como vimos con Vygotsky), sino que también son esenciales para el desarrollo socioafectivo, al fomentar el *respeto por las ideas ajenas* y la *valoración de la diversidad* de enfoques.

Para el futuro o la futura docente: Conectando Teoría y Práctica Curricular

Comprender esta conexión es fundamental. Cuando diseñas una actividad que valora más el proceso que el resultado final, cuando gestionas un error preguntando «¿Qué podemos aprender de esto?» en lugar de simplemente corregirlo, o cuando fomentas el trabajo en parejas para resolver un problema, no solo estás aplicando una buena práctica pedagógica: estás *cumpliendo con un objetivo curricular explícito*. Estás enseñando matemáticas a través del Sentido Socioafectivo.

Mini-Caso de Aula: Múltiples lentes teóricas para un mismo caso

Retomemos la situación que abría este manual. Un docente plantea la resta $72 - 45$. Dos estudiantes, tras trabajar individualmente, llegan al mismo resultado correcto: 27.

Un análisis superficial podría concluir que ambos han aprendido lo mismo. Sin embargo, un docente eficaz sabe que la respuesta correcta es solo el punto de partida. Esta única interacción de aula es un microcosmos que puede y debe ser analizado desde múltiples perspectivas teóricas, revelando la profunda complejidad de la enseñanza.

1. La Lente de la Comprensión (Skemp, 1978): ¿Qué se sabe?

El docente pide a ambos estudiantes que expliquen su razonamiento.

- *Estudiante A (Comprensión Instrumental)*: «Como a 2 no le puedo quitar 5, el 7 le presta uno y el 2 se convierte en 12. El 7, como ha prestado uno, ahora es un 6. Entonces digo, 12 menos 5 son 7, y 6 menos 4 son 2. Por eso da 27». Este estudiante conoce la regla, el “cómo” del algoritmo, pero no el fundamento matemático que la sustenta.
- *Estudiante B (Comprensión Relacional)*: «Como no tengo suficien-

tes unidades para quitar 5, necesito descomponer una de las siete decenas. Así que ahora tengo 6 decenas y 12 unidades, que sigue siendo 72. A las 12 unidades sí le puedo quitar 5, y me quedan 7. Y de las 6 decenas que me quedaban, quito 4 decenas y me quedan 2. Por eso el resultado es 2 decenas y 7 unidades, 27». Este estudiante comprende el porqué, conectando el algoritmo con el valor posicional del sistema de numeración.

2. *La Lente del Clima Motivacional* (Ames, 1992): ¿Cómo se valora?

La respuesta del docente a estas dos explicaciones define el clima del aula.

- *Respuesta orientada al Ego*: El docente podría decir: «¡Muy bien, los dos lo tenéis bien!». Esta respuesta valora únicamente el resultado, reforzando la idea de que lo único que importa es la corrección.
- *Respuesta orientada a la Tarea*: El docente pregunta: «¿Cómo lo habéis pensado?». Al escuchar ambas explicaciones, las valora y las utiliza como una oportunidad para que toda la clase construya un significado más profundo, contrastando el “truco” con el “significado”. Se valora el razonamiento, no solo la respuesta.

3. *La Lente de la Representación* (Bruner, 1966/1972) Bruner, 1966/1972): ¿Cómo se ha aprendido?

El Estudiante B, que muestra una comprensión relacional, probablemente no llegó a esa estrategia de forma espontánea. Su razonamiento flexible es el resultado de una enseñanza que ha seguido la secuencia de Bruner.

- *Fase Enactiva*: En cursos anteriores, ha descompuesto y canjeado físicamente bloques multibase para interiorizar el significado de la reagrupación.
- *Fase Icónica*: Ha utilizado modelos visuales, como el ábaco o dibujos, para representar esa acción de canje.
- *Fase Simbólica*: Ahora, el algoritmo no es un truco, sino el registro eficiente de un proceso (la acción y la imagen) que ya ha comprendido.

El Estudiante A, en cambio, parece operar únicamente en la fase simbólica, desconectada de las anteriores.

4. *Síntesis Didáctica*: El Rol del Docente como Arquitecto

Esta situación demuestra que la labor docente no consiste en verificar respuestas, sino en diagnosticar la comprensión y construir un clima de aprendizaje. Al validar ambas estrategias y usar el razonamiento del Estudiante B para iluminar la regla del Estudiante A, el docente no solo enseña un algoritmo, sino que cultiva el Sentido Numérico (conectando procedimiento y significado) y el Sentido Socioafectivo (valorando el proceso y la diversidad de pensamiento).

1.4 Conclusión del Capítulo

A modo de recapitulación, en la Tabla 1.3 se sintetizan las contribuciones fundamentales de los teóricos presentados en este capítulo y su implicación más directa para la práctica docente en el aula de aritmética de Primaria.

Tabla 1.3: Tabla Sinóptica de Fundamentos Psicopedagógicos.

<i>Teórico Clave</i>	<i>Idea Principal</i>	<i>Implicación Directa en el Aula de Aritmética</i>
<i>Piaget</i>	El conocimiento se construye a través de la acción y el pensamiento evolucionan en etapas cualitativamente distintas.	Adaptar las tareas al nivel de desarrollo del alumno. Usar la manipulación como base para la construcción de conceptos.
<i>Vygotsky</i>	El aprendizaje es un proceso social mediado por el lenguaje y la interacción en la Zona de Desarrollo Próximo.	Fomentar el trabajo cooperativo y la discusión. Usar el diálogo y las preguntas como herramienta de andamiaje.
<i>Bruner</i>	El conocimiento se representa de tres modos: enactivo (acción), icónico (imagen) y simbólico (lenguaje).	Secuenciar la enseñanza pasando de la manipulación concreta al dibujo y, finalmente, a la notación matemática formal.
<i>Skemp</i>	Distinción entre comprensión instrumental (saber reglas sin saber por qué) y relacional (saber reglas y por qué funcionan).	Priorizar siempre el significado sobre la mecanización. Preguntar constantemente “¿por qué?” para asegurar una comprensión profunda.
<i>Dienes</i>	La abstracción se logra a través de la exposición a múltiples representaciones de un mismo concepto (variabilidad perceptual).	Utilizar diversos materiales para enseñar un único concepto (ej. la decena con bloques multibase, ábacos, regletas) para facilitar la generalización.

En este primer capítulo se ha emprendido un viaje a través de los fundamentos que sostienen una enseñanza eficaz de la aritmética. Hemos aprendido de los errores históricos para valorar la necesidad de una pedagogía fundamentada, y hemos explorado cómo el desarrollo cognitivo del niño y niña, según Piaget, marca el ritmo y las posibilidades del aprendizaje en cada etapa.

Más allá de un único modelo, hemos visto cómo las grandes teorías del aprendizaje (constructivismo, aprendizaje significativo, sociocultural) se complementan, ofreciéndonos una visión del aprendiz como un ser activo, social y que construye significado conectando lo nuevo con lo que ya sabe. Finalmente, hemos subrayado que este aprendiz no es solo un ser cognitivo, sino también emocional. Comprender y gestionar el dominio afectivo —mitigando la ansiedad y fomentando creencias positivas— no es un complemento, sino una condición indispensable para el éxito.

Ahora que hemos establecido un profundo conocimiento del protagonista de nuestra labor —el niño y la niña que aprenden—, es el momento de dirigir nuestra mirada

hacia el horizonte de nuestro viaje: *¿qué significa ser competente en matemáticas?* ¿Qué nos exige el currículo oficial que cultivemos en nuestro alumnado? El siguiente capítulo nos servirá de mapa y brújula, desgranando la naturaleza de la competencia matemática y su concreción en la normativa que guiará nuestra práctica docente.

1.5 Para la Reflexión y el Portfolio Docente

El estudio de la didáctica no culmina al terminar de leer un capítulo, sino cuando sus ideas comienzan a dialogar con nuestra propia experiencia y a transformar nuestra futura práctica profesional. Este apartado te invita a realizar precisamente ese ejercicio: conectar la teoría con la acción, la observación y el diseño. Las siguientes actividades están pensadas para ser el núcleo de tu portfolio docente, una colección de evidencias que demuestre tu crecimiento y competencia en la didáctica de la aritmética.

1. Conexión con la Propia Historia: Tu Biografía Matemática.

Consigna: Reflexiona sobre tu trayectoria como estudiante de matemáticas. Anota un recuerdo específico (positivo o negativo) y analízalo desde la perspectiva de la dimensión afectiva y las metas de logro vistas en este capítulo.

- ¿Crees que tu aprendizaje se basó más en una comprensión *instrumental* (memorizar reglas) o *relacional* (entender el porqué)?
- En ese recuerdo, ¿qué tipo de metas de logro crees que se promovían en el aula: de *Tarea* (centradas en el proceso y la mejora) o de *Ego* (centradas en el resultado y la comparación)?
- ¿Cómo crees que esa experiencia pudo influir en tu confianza o ansiedad hacia las matemáticas?

2. Análisis de Práctica Docente: La Mentalidad de Crecimiento en Acción.

Consigna: Busca en una plataforma de vídeo una clase de matemáticas en Primaria (real o simulada). Presta especial atención a cómo el/la docente gestiona el error y ofrece feedback.

- Selecciona y describe una interacción breve donde un/a estudiante comete un error.
- Analiza el lenguaje que utiliza el/la docente. ¿Corrige simplemente el resultado o utiliza el error como una oportunidad para aprender?
- ¿El feedback fomenta una *mentalidad fija* («eso está mal») o una *mentalidad de crecimiento* («veamos qué podemos aprender de esto»)? Justifica tu respuesta con las palabras exactas del docente.

3. Diseño de un Micro-Recurso: Fomentando la Resiliencia.

Consigna: Crea un recurso para el aula (un póster, una colección de frases o «scripts» para el docente) destinado a fomentar una *mentalidad de crecimiento*, basándote en el modelo TARGET.

- Opción A: Diseña un «Muro de los Errores Famosos» donde se muestren errores históricos que llevaron a grandes descubrimientos.
- Opción B: Crea una lista de frases alternativas al «muy bien» o «eso está mal» que se centren en el *proceso* y el *esfuerzo*, en lugar del resultado.

4. Diseño de un micro-recurso: Crea un recurso para el aula (un póster, una colec-

ción de frases o “scripts” para el docente) destinado a fomentar una *mentalidad de crecimiento*. Por ejemplo, podrías diseñar un “Muro de los Errores Famosos” donde se muestren errores que llevaron a grandes descubrimientos, o una lista de frases alternativas al “muy bien” o “eso está mal” que se centren en el proceso y el esfuerzo, siguiendo el modelo TARGET.

2 La Competencia Matemática y su Desarrollo en Primaria

IMAGINEMOS a dos infantes en un supermercado. Uno sabe calcular mecánicamente $3 \times 1,50$ euros, pero el otro, además de eso, es capaz de estimar rápidamente que con un billete de 5 euros tendrá suficiente, comparar si es mejor la oferta de “ 3×2 ” o la de “segunda unidad al 50%”, y explicar a su progenitor por qué ha elegido una opción. El primer infante sabe hacer un algoritmo. El segundo está desarrollando su competencia matemática. Este capítulo se dedica a explorar qué es y cómo se cultiva esta capacidad integral, que es el verdadero objetivo de la enseñanza de la aritmética en la Educación Primaria.

2.1 Introducción

Una vez hemos explorado en el capítulo anterior los fundamentos psicopedagógicos del aprendizaje, comprendiendo que el niño y la niña son seres cognitivos en desarrollo, constructores activos de su propio conocimiento e individuos con una rica dimensión afectiva, es esencial ahora desplazar nuestra atención hacia el *qué* y el *para qué* de la enseñanza de las matemáticas. Si el primer capítulo nos proporcionó las “gafas de psicólogo y pedagogo” para entender a nuestro alumnado, este capítulo nos proporcionará el “mapa y la brújula” para navegar el territorio que debemos explorar juntos.

La aritmética en la Educación Primaria no debe concebirse como un fin en sí misma, sino como un medio fundamental para el desarrollo integral de una capacidad más amplia y esencial: la *competencia matemática*.

Como ya se ha referido en el comienzo de este manual varias veces, esta competencia trasciende la mera memorización de hechos numéricos y la ejecución mecánica de algoritmos. Implica la capacidad de pensar, razonar, modelizar y comunicar matemáticamente para interpretar y actuar con solvencia en el mundo cuantitativo que nos rodea.

El presente capítulo es un viaje desde la idea abstracta de competencia hasta su materialización en el aula. Iniciaremos explorando el contexto histórico y psicopedagógico que dio lugar al enfoque por competencias. A continuación, desgranaremos sus componentes teóricos esenciales, desde el marco internacional de Mogens Niss hasta su concreción en la *arquitectura curricular andaluza*, analizando la interacción entre competencias, criterios, saberes y sentidos. Finalmente, exploraremos las finalidades de la enseñanza de las matemáticas y cómo el currículo de Primaria articula la progresión de la aritmética a lo largo de sus tres ciclos. Este recorrido te proporcionará el mapa y la brújula para navegar la normativa con un propósito didáctico claro.

2.2 Contexto Histórico y Curricular: De los Contenidos a las Competencias

El enfoque educativo centrado en el desarrollo de competencias no es un capricho pedagógico, sino el resultado de una profunda evolución en la forma de entender los

objetivos de la educación, impulsada por las necesidades de la sociedad contemporánea y los avances en la psicología del aprendizaje.

2.2.1 El Enfoque Tradicional: El Paradigma del Contenido

El modelo educativo tradicional, predominante durante gran parte del siglo XX, se centraba en la transmisión de un cuerpo de conocimientos bien definido y estructurado. En el ámbito de las matemáticas, esto se traducía en un currículo centrado en los contenidos: dominar la numeración, memorizar las tablas de multiplicar y ejecutar con precisión los algoritmos de las cuatro operaciones básicas. Este enfoque, aunque eficaz en la formación de calculistas, a menudo promovía una *comprensión instrumental* (Skemp, 1978), donde el alumnado “sabía cómo” realizar una operación, pero no “sabía por qué” funcionaba.

Esta desvinculación del significado y la funcionalidad del conocimiento matemático era, en muchos casos, el germen de la ansiedad y las actitudes negativas hacia la disciplina, como se analizó en la sección 1.3.7. Al presentar la aritmética como un conjunto de reglas abstractas y descontextualizadas, se privaba a muchos alumnos y alumnas de la oportunidad de construir una relación significativa y positiva con los números.

Ejemplo práctico: Del Ejercicio Rutinario al Problema Competencial

Contenido: La tabla de multiplicar del 4.

Se puede observar una clara progresión en la demanda cognitiva y el potencial de aprendizaje:

- *Nivel 1: Tarea Mecánica.* “Realiza las siguientes 30 operaciones: $4 \times 2 =$, $4 \times 7 =$, $4 \times 5 = \dots$ ”
 - *Objetivo:* Automatización y memorización.
 - *Enfoque:* Se centra en la corrección y la velocidad. El conocimiento es un fin en sí mismo. No hay contexto.
- *Nivel 2: Ejercicio Contextualizado.* “En nuestra clase, las mesas se organizan en grupos de 4. Si hoy han venido 7 grupos, ¿cuántas sillas necesitamos en total?”
 - *Objetivo:* Aplicar un procedimiento conocido a una situación simple.
 - *Enfoque:* Se centra en usar el conocimiento como una herramienta. El contexto le da un propósito al cálculo.
- *Nivel 3: Problema Competencial.* “Queremos organizar una fiesta para 27 personas. Las mesas son de 4 personas. ¿Cuántas mesas necesitamos? Si cada menú cuesta 4 euros, ¿cuánto pagaremos? ¿Y si encontramos una oferta de ‘paga 3 y come 4’, cuántos menús tendríamos que pedir?”
 - *Objetivo:* Movilizar diferentes saberes (multiplicación, división con resto, interpretación del resultado), tomar decisiones y comunicar el razonamiento.

- *Enfoque*: Se centra en pensar con las matemáticas. El problema requiere interpretar, conectar ideas y justificar las decisiones.

Una enseñanza competencial busca transitar desde las tareas mecánicas, que tienen su lugar para la consolidación, hacia los problemas competenciales, que son el verdadero motor del desarrollo del pensamiento matemático.

2.2.2 El Surgimiento del Enfoque Competencial

A finales del siglo XX y principios del XXI, se comenzó a consolidar un cambio de paradigma, impulsado por varios factores interrelacionados:

- *Necesidades Sociales y Económicas*: Una sociedad globalizada, tecnológica y en constante cambio ya no demanda principalmente individuos capaces de ejecutar tareas repetitivas, sino ciudadanos y ciudadanas con pensamiento crítico, capacidad de resolución de problemas complejos y habilidades de comunicación. Las matemáticas, en este contexto, no son solo un fin, sino una herramienta para desarrollar una *competencia matemática* (*mathematical proficiency*) que integra la comprensión conceptual, la fluidez procedimental, la competencia estratégica, el razonamiento adaptativo y una disposición productiva hacia la disciplina (Kilpatrick et al., 2001).
- *Influencia de Informes Internacionales*: Evaluaciones a gran escala como PISA (Programme for International Student Assessment), promovidas por la OCDE, comenzaron a evaluar no solo lo que los y las estudiantes sabían, sino lo que *podían hacer con su conocimiento* en situaciones reales. Los marcos de referencia de estos estudios, que definían la «literacidad matemática» (*mathematical literacy*) como la capacidad de un individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos, influyeron decisivamente en las reformas curriculares a nivel europeo y mundial (Niss & Jensen, 2011/2002; Organisation for Economic Co-operation and Development, 2019), incluyendo la LOE y la actual LOMLOE en España.
- *Avances en la Didáctica de las Matemáticas*: Organizaciones influyentes como el NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) en Estados Unidos publicaron sus influyentes *Principios y Estándares para la Educación Matemática*, que abogaban por un cambio de enfoque. Se pasó de una enseñanza centrada en la ejecución de procedimientos a una que prioriza el razonamiento y la demostración, la comunicación, la conexión de ideas y, fundamentalmente, la resolución de problemas como eje vertebrador de toda la actividad matemática (National Council of Teachers of Mathematics, 2000).

Este cambio de paradigma se potenció también como reacción al análisis de los efectos del movimiento denominado «matemáticas modernas». Este enfoque, con un marcado énfasis en la estructura abstracta y el contenido formal, a menudo falló en su objetivo de que la adquisición de ese conocimiento abstracto se tradujera automáticamente en la capacidad para aplicarlo. La constatación de esta brecha entre el conocimiento formal y su uso funcional fue uno de los catalizadores que impulsó a la comunidad de educación matemática a buscar enfoques más integradores y centrados en el desarrollo de competencias aplicables (Kilpatrick et al., 2001).

Además, se cristaliza en la legislación educativa actual. La *Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre (LOMLOE)*, establece un enfoque curricular orientado al desarrollo de competencias clave. Para nuestra área, esto se concreta en la *ORDEN de 30 de mayo de 2023*, que desarrolla el currículo de Primaria en Andalucía. Esta orden no solo menciona la competencia matemática, sino que la desglosa en una serie de competencias específicas y organiza los saberes básicos en torno a seis sentidos, como veremos a continuación.

2.2.3 La Conexión con las Teorías del Aprendizaje

Este cambio hacia un enfoque competencial no es una mera respuesta a demandas externas, sino una consecuencia lógica de lo que las teorías del aprendizaje (Capítulo 1) nos han enseñado sobre cómo los niños y niñas aprenden de manera efectiva. El desarrollo de competencias requiere una pedagogía que sea coherente con estos principios:

- El *constructivismo (Piaget)* (apartado 1.3.1) exige un rol activo del alumnado que va más allá de la simple recepción y repetición de algoritmos. Desarrollar la competencia de “resolver problemas” o “razonar matemáticamente” es, por definición, un acto constructivo.
- La *interacción social y el andamiaje (Vygotsky)* (apartado 1.3.3) son fundamentales para construir competencias como la “comunicación” y la “argumentación”. Estas no se desarrollan en solitario, sino en el diálogo y la colaboración con otros.
- La *comprensión relacional (Skemp)* (apartado 1.3.5) es el núcleo de una verdadera competencia. Un alumno competente no solo aplica una fórmula, sino que entiende sus fundamentos y puede adaptarla o elegir otra si el contexto cambia.
- Los *modos de representación de Bruner* (apartado 1.3.4) y la *variabilidad perceptual de Dienes* (apartado 1.3.6) nos enseñan que la competencia matemática se construye a través de la conexión entre lo concreto y lo abstracto, y la exposición a múltiples representaciones y contextos.

En definitiva, el enfoque por competencias es la materialización curricular de una visión del aprendizaje que es activa, constructiva, social y significativa, superando así las limitaciones del modelo tradicional.

2.3 Definición y Componentes Esenciales de la Competencia Matemática

La *competencia matemática* puede definirse como la capacidad de un individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos (Niss & Jensen, 2011/2002; Organisation for Economic Co-operation and Development, 2019). Va más allá del conocimiento procedimental (“saber hacer”) para incluir una comprensión conceptual profunda (“saber por qué”) y la habilidad de aplicar este conocimiento de manera flexible para resolver problemas en situaciones variadas. No se trata simplemente de una acumulación de conocimientos, sino de la *habilidad para usar esos conocimientos* de forma efectiva y con sentido.

Esta competencia es un constructo multifacético que se sustenta en una serie

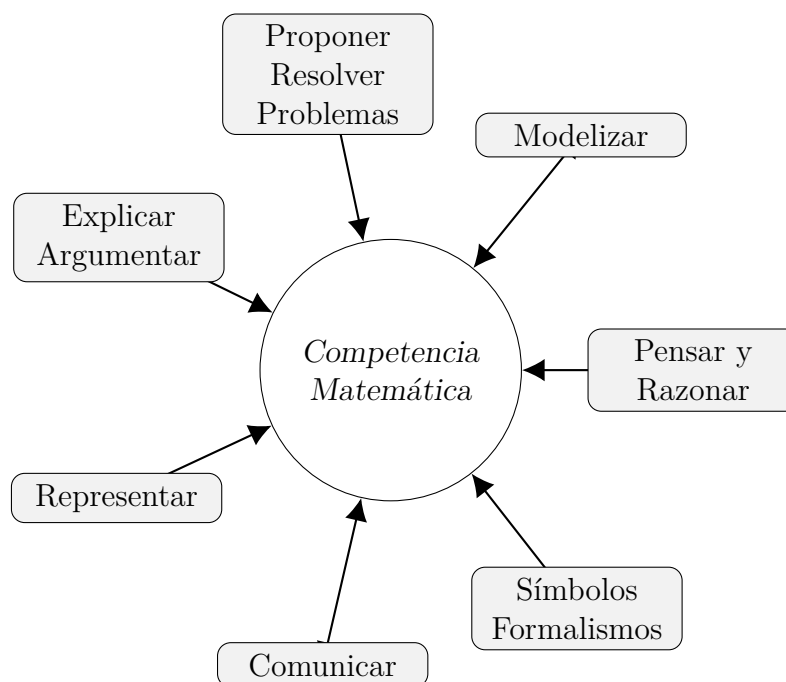


Figura 2.1: Componentes interconectados de la Competencia Matemática.

de *capacidades o subcompetencias interrelacionadas*. El marco teórico más influyente para su definición es el desarrollado por Mogens Niss y sus colaboradores en el proyecto danés *KOM* (Competencias y Aprendizaje Matemático), que propone una clasificación basada en un criterio funcional y procesual. En lugar de centrarse en los contenidos, este modelo define la competencia a través de los procesos y acciones implicados en “hacer matemáticas”. Siguiendo esta línea, que ha influido en marcos como PISA y la LOMLOE, identificamos los siguientes elementos clave:

1. *Pensar y Razonar Matemáticamente (PR)*. Esta subcompetencia implica la habilidad fundamental para involucrarse en el pensamiento lógico y la deducción. Incluye la capacidad de identificar patrones y regularidades, formular conjeturas, seguir y evaluar cadenas de argumentos lógicos, y comprender la estructura de los enunciados y cuestiones propias de las matemáticas (definiciones, teoremas, problemas). Es la capacidad de ir más allá de la observación directa para generalizar, inferir y justificar los resultados obtenidos.

Ejemplo: Justificación de un patrón numérico

En Aritmética, se puede observar esta competencia cuando un discente observa que la suma de dos números pares siempre da un resultado par, y luego puede *generalizar* esta observación y *justificar* por qué ocurre (ej., “porque si tenemos grupos de dos, al juntarlos seguimos teniendo grupos de dos”). Está pensando y razonando matemáticamente. Otro ejemplo es la *justificación* de por qué el algoritmo de la suma con reagrupación funciona, conectando el “llevar uno” con la idea de agrupar 10 unidades en una decena.

2. *Modelizar Matemáticamente (MO)*. La modelización matemática es la capacidad de *traducir problemas del mundo real a un formato matemático*, resolverlos utilizando herramientas matemáticas y, viceversa, *interpretar los resultados matemáticos en términos de la realidad* original. Involucra estructurar el campo de estudio, trabajar con modelos existentes, validarlos y comunicar los resultados derivados de ellos. Es un puente esencial entre el mundo abstracto de las matemáticas y las situaciones concretas.

Ejemplo: Modelización de una situación de compra

En Aritmética, se puede observar esta competencia cuando, ante un problema como “María compró 3 manzanas a 0.50 euros cada una y 2 naranjas a 0.75 euros cada una. ¿Cuánto gastó en total?”, el alumno debe *modelizarlo* con operaciones aritméticas ($3 \times 0,50 + 2 \times 0,75$). Después de obtener el resultado, debe *interpretarlos* en el contexto del dinero y responder si tiene sentido (“¡Son 3.00 euros! ¿Es razonable?”).

3. *Proponer y Resolver Problemas (PRP)*. Considerada a menudo el corazón de la actividad matemática, esta subcompetencia se refiere a la habilidad para *identificar, formular y resolver diferentes tipos de problemas*, ya sean de carácter puramente matemático o aplicados a la vida real, abiertos o cerrados. Implica la selección y aplicación de estrategias adecuadas, la supervisión del progreso y la evaluación crítica de la solución.

Ejemplo: Identificación y formulación de un problema aditivo

En Aritmética, se puede encontrar esta competencia cuando, dado un escenario como “En el autobús van 15 niños y se suben 7 más”, el discente debe *identificar* que es un problema aditivo de cambio, *formular* la operación ($15 + 7$) y *resolverla* utilizando una estrategia apropiada (conteo, cálculo mental, algoritmo). Es también la capacidad de *proponer* un problema original a partir de una operación dada (ej., a partir de $12 \times 4 = 48$, inventar un problema de grupos iguales).

4. *Explicar Matemáticamente y Argumentar (ARG)*. Esta capacidad implica la habilidad de *seguir y valorar cadenas de argumentos*, comprender demostraciones (intuitivas en Primaria) y, crucialmente, *comunicar razonamientos de forma clara, precisa y coherente*. Requiere distinguir entre ideas básicas y detalles técnicos, y construir una narrativa lógica sobre los procesos matemáticos.

Ejemplo: Argumentación de la propiedad conmutativa

En Aritmética, esta competencia se presenta cuando se pide a un alumno que *explique* por qué la resta con reagrupación funciona, o que *argumente* cuál de dos estrategias de cálculo mental es más eficiente para una suma particular. También incluye la *justificación* de la propiedad conmutativa de la suma (“da igual sumar $3 + 5$ que $5 + 3$, porque es la misma cantidad total”).

5. *Representar Objetos y Situaciones Matemáticas (REP)*. Atañe a la habilidad para *comprender, utilizar, decodificar e interpretar diferentes clases de representaciones* de objetos y situaciones matemáticas. Esto incluye el uso de tablas, gráficos, diagramas, esquemas, lenguaje algebraico (rudimentario), así como la capacidad de *traducir entre ellas* (ej., de un gráfico a una tabla, o de un dibujo a una expresión numérica).

Ejemplo: Múltiples representaciones de una fracción

En Aritmética, esta competencia permite representar una fracción utilizando un dibujo de una pizza (parte-todo), un punto en la recta numérica y el símbolo numérico ($1/2$), o convertir un problema verbal en un diagrama de barras (ej., para problemas de comparación aditiva) y luego en una operación numérica.

6. *Comunicar en, con y sobre las Matemáticas (CO)*. Esta subcompetencia se relaciona con la capacidad de *comprender y expresar ideas matemáticas de forma oral, escrita y visual*, utilizando el lenguaje matemático con precisión y adecuándolo a la audiencia y al contexto. Va de la mano con la argumentación y la representación, ya que el lenguaje es el vehículo para el pensamiento matemático.

Ejemplo: Comunicación de estrategias de cálculo

Esta competencia se refleja en la Aritmética cuando se participa en una *discusión* en clase sobre las diferentes estrategias para resolver un problema y se *explica* verbalmente el proceso de cálculo mental a un compañero, o se *escribe* una solución clara y organizada a un problema de división.

7. *Utilizar Símbolos y Formalismos Matemáticos (SFO)*. Aunque intrínsecamente ligado a la representación y la comunicación, merece destacarse la capacidad de comprender y manejar el lenguaje simbólico y formal de las matemáticas, incluyendo su sintaxis y semántica, y su relación con el lenguaje natural. Es la transición del pensamiento concreto y las representaciones a la abstracción matemática.

Ejemplo: Uso de la simbología y notación posicional

Esta competencia se refleja al leer y escribir correctamente números grandes y decimales, comprender y utilizar los símbolos de las operaciones ($+$, $-$, $\times$, $\div$), y entender la notación posicional de nuestro sistema numérico. Es la base para la comprensión de los algoritmos escritos.

Es importante recalcar que estos componentes no son compartimentos estancos, sino que se *entrelazan y se desarrollan conjuntamente* a través de la actividad matemática en el aula. Un problema bien diseñado puede exigir modelización, razonamiento, representación, comunicación y el uso de símbolos simultáneamente. La tarea del docente es fomentar el desarrollo integrado de estas capacidades para que el alumno no solo “sepa matemáticas”, sino que “sea matemáticamente competente”.

2.4 El Marco Curricular Andaluz: Competencias, Sentidos, Saberes y Criterios de Evaluación

Para que estos componentes teóricos no queden en el plano abstracto, es fundamental conectarlos directamente con el marco normativo que guiará vuestra práctica docente. La *ORDEN de 30 de mayo de 2023* traduce este enfoque competencial en una estructura curricular clara y funcional. Comprender esta estructura no es un mero trámite administrativo, sino la clave para una planificación didáctica coherente y eficaz.

Implicación didáctica: Del Marco Normativo a la Brújula Docente

Comprender este marco normativo es liberador. No nos limita, sino que nos *autoriza* a ir más allá del examen tradicional. Nos da el respaldo legal para dedicar tiempo a la observación en el aula, al diálogo con el alumnado, al análisis de sus producciones y a la utilización de rúbricas. El currículo no es un listado de contenidos que cubrir, sino un mapa de competencias que desarrollar, y la evaluación criterial y formativa es la brújula que nos guía en ese viaje, indicándonos en cada momento si vamos en la dirección correcta y qué ajustes necesitamos hacer en nuestra ruta.

2.4.1 Los Componentes de la Normativa Andaluza

El currículo andaluz articula el área de Matemáticas en torno a cuatro elementos jerárquicos clave, tal y como se muestra en la Figura 2.2:

- *Competencias Específicas (CE)*: Son el destino final de nuestro viaje. Definen el *para qué* de la enseñanza, describiendo las actuaciones complejas que el alumnado debe ser capaz de realizar al final de la etapa. Por ejemplo, la *CE.MAT.1* se centra en interpretar situaciones y modelizarlas matemáticamente.
- *Criterios de Evaluación (CE)*: Son el *REFERENTE* para la evaluación. Hacen observable la competencia, describiendo qué debe hacer el alumnado para demostrar su nivel de desarrollo. Son el puente entre la meta abstracta y la evidencia concreta en el aula.
- *Saberes Básicos*: Son los contenidos y herramientas. Definen el *qué* necesitamos para desarrollar las competencias. Incluyen conceptos (número, operación), procedimientos (algoritmos) y actitudes.
- *Sentidos Matemáticos*: Son los organizadores de los saberes, los grandes ejes vertebradores. Definen el *cómo* se estructuran y conectan los saberes para darles significado. Son las grandes ideas que subyacen al pensamiento matemático.

2.4.1.1 Las Competencias Específicas

La *ORDEN de 30 de mayo de 2023* establece ocho competencias específicas para el área de Matemáticas en Educación Primaria. Definen las actuaciones que se espera que el alumnado sea capaz de realizar al finalizar la etapa, integrando saberes de manera eficaz. Son el horizonte de nuestra planificación. A continuación, se enuncian tal y como aparecen en la normativa:

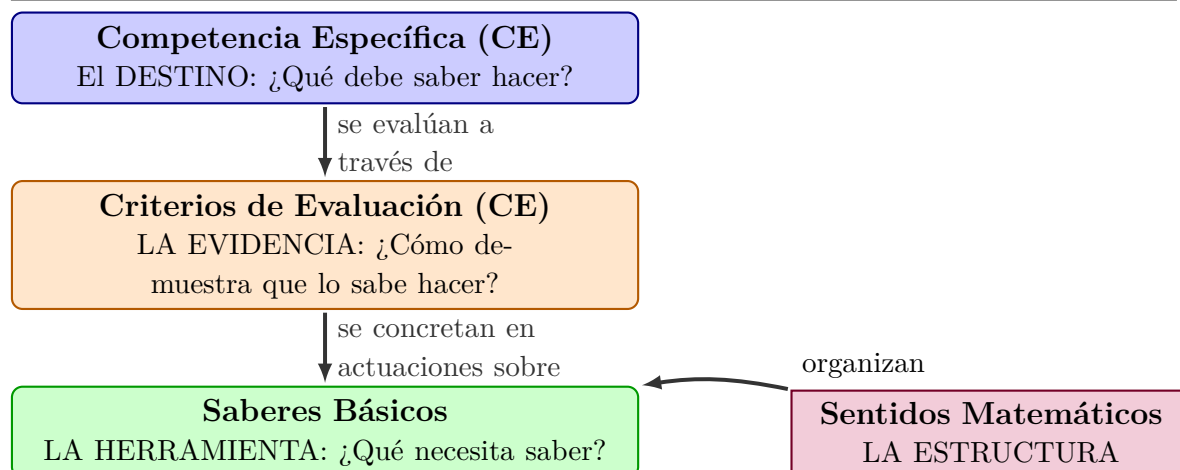


Figura 2.2: Arquitectura del currículo andaluz de Matemáticas, mostrando la relación jerárquica entre sus cuatro elementos fundamentales.

1. *CE.MAT.1.* Interpretar situaciones de la vida cotidiana, proporcionando una representación matemática de las mismas mediante conceptos, herramientas y estrategias, para analizar la información más relevante.
2. *CE.MAT.2.* Resolver situaciones problematizadas, aplicando diferentes técnicas, estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder, obtener soluciones y asegurar su validez desde un punto de vista formal y en relación con el contexto planteado.
3. *CE.MAT.3.* Explorar, formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de tipo matemático en situaciones basadas en la vida cotidiana, de forma guiada, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para contrastar su validez, adquirir e integrar nuevo conocimiento.
4. *CE.MAT.4.* Utilizar el pensamiento computacional, organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, generalizando e interpretando, modificando y creando algoritmos de forma guiada, para modelizar y automatizar situaciones de la vida cotidiana.
5. *CE.MAT.5.* Reconocer y utilizar conexiones entre las diferentes ideas matemáticas, así como identificar las matemáticas implicadas en otras áreas o en la vida cotidiana, interrelacionando conceptos y procedimientos, para interpretar situaciones y contextos diversos.
6. *CE.MAT.6.* Comunicar y representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos y resultados matemáticos, utilizando el lenguaje oral, escrito, gráfico, multimodal y la terminología apropiados, para dar significado y permanencia a las ideas matemáticas.
7. *CE.MAT.7.* Desarrollar destrezas personales que ayuden a identificar y gestionar emociones al enfrentarse a retos matemáticos, fomentando la confianza en las propias posibilidades, aceptando el error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose a las situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia y disfrutar en el aprendizaje de las matemáticas.

8. *CE.MAT.8*. Desarrollar destrezas sociales, reconociendo y respetando las emociones, las experiencias de los demás y el valor de la diversidad y participando activamente en equipos de trabajo heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y crear relaciones saludables.

Profundizando: La Tabla como Traductor Curricular

La *Tabla 2.2* actúa como una herramienta de traducción, mostrando cómo los procesos clave del “hacer matemáticas” (según Niss) se reflejan y desarrollan a través de las competencias específicas que el currículo andaluz nos exige cultivar en el alumnado. Comprender esta conexión es vital para diseñar Situaciones de Aprendizaje que sean, a la vez, didácticamente potentes y curricularmente pertinentes.

2.4.1.2 Los Criterios de Evaluación: Un Itinerario Cognitivo

Al analizar los Criterios de Evaluación para las distintas Competencias Específicas a lo largo de los ciclos, emerge un patrón claro, una meta-estructura. Los criterios no son una lista plana de acciones, sino que suelen describir una progresión de la demanda cognitiva. Esta progresión, a menudo implícita, puede desglosarse en tres grandes niveles:

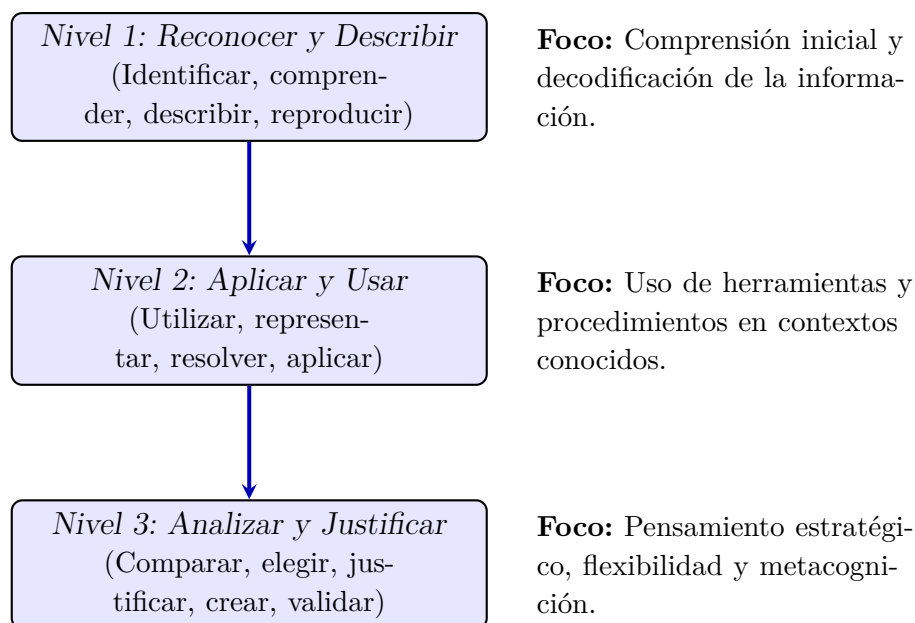


Figura 2.3: El itinerario cognitivo implícito en la progresión de los Criterios de Evaluación.

Clave Didáctica: La Anatomía de un Criterio de Evaluación

Esta progresión de tres niveles nos proporciona una potente lente para planificar y evaluar.

Proceso/ Subcompetencia (Niss)	Competencia Específica (LOMLOE - Andalucía)	Descripción de la Conexión
Pensar y Razonar	CE.MAT.2: Resolver situaciones problematizadas, aplicando diferentes técnicas, estrategias y formas de razonamiento[...].	El corazón de esta competencia es el razonamiento. Exige al alumnado ir más allá de la aplicación mecánica para analizar, inferir, deducir y justificar sus argumentos.
Modelizar y Representar	CE.MAT.1: Interpretar situaciones de la vida cotidiana, proporcionando una representación matemática de las mismas[...]	Estas dos acciones (interpretar y representar) son el núcleo de la modelización. La competencia pide explícitamente traducir una situación real a un formato matemático (modelizar) y usar diferentes lenguajes y esquemas para ello (representar).
Proponer y Resolver Problemas	CE.MAT.3: Explorar, formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de tipo matemático [...]	Esta competencia se centra en el ciclo completo de la resolución de problemas: no solo resolver lo que se plantea, sino también identificar y formular nuevas preguntas y problemas, una característica clave del pensamiento matemático avanzado.
Argumentar y Comunicar	CE.MAT.6: Comunicar y representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos y resultados matemáticos [...]	La argumentación (“por qué”) y la comunicación (“cómo lo explico”) son inseparables. Esta competencia se enfoca en la capacidad de verbalizar el pensamiento, justificar los pasos y hacer comprensibles los resultados a otros.
Utilizar Símbolos y Formalismos	CE.MAT.6: ...utilizando el lenguaje oral, escrito, gráfico, multimodal y la terminología apropiados, para dar significado y permanencia a las ideas matemáticas.	El uso correcto de la notación (+, −, ×, ÷, =), los símbolos y la terminología específica del área es una parte fundamental de la comunicación matemática. Es el vehículo que permite expresar el pensamiento de forma precisa y universal.

Tabla 2.2: Conexión entre las Competencias de Niss y las Competencias Específicas en la LOMLOE

- **Nivel 1: Comprensión y Reconocimiento.** El primer escalón es siempre entender la situación y reconocer los elementos matemáticos implicados. Un criterio de este nivel evaluará si el alumnado puede *identificar* los datos de un problema, *describir* una situación con lenguaje matemático o *reconocer* un patrón.
- **Nivel 2: Aplicación y Uso.** Una vez comprendida la situación, el siguiente paso es actuar sobre ella. Los criterios de este nivel evalúan si el alumnado es capaz de *utilizar* una herramienta (ej. la recta numérica), *aplicar* un algoritmo o *resolver* un problema sencillo usando una estrategia conocida.
- **Nivel 3: Análisis, Justificación y Creación.** Este es el nivel más alto de la competencia. El foco se desplaza del “qué” al “porqué” y al “¿cuál es mejor?”. Los criterios de este nivel evalúan si el alumnado puede *comparar* diferentes estrategias, *justificar* su elección, *validar* un resultado o *crear* un nuevo problema.

Implicación didáctica: Implicaciones para la Práctica Docente

Conocer esta meta-estructura es fundamental para el diseño de la enseñanza y la evaluación:

- **Al Planificar:** Nos ayuda a secuenciar las actividades de forma lógica. No podemos pedir al alumnado que *justifique* una estrategia (Nivel 3) si aún no ha tenido la oportunidad de *aplicarla* (Nivel 2) en un contexto que *comprende* (Nivel 1).
- **Al Evaluar:** Nos permite diseñar rúbricas mucho más precisas. Los niveles de desempeño de una rúbrica (ej. “En desarrollo”, “Conseguido”, “Experto”) pueden alinearse directamente con esta progresión cognitiva, evaluando no solo la corrección del resultado, sino la profundidad del razonamiento.
- **Al dar Feedback:** Nos permite diagnosticar con mayor precisión dónde se encuentra la dificultad de un alumno. ¿El problema es que no comprende el enunciado (Nivel 1), que no sabe aplicar el procedimiento (Nivel 2) o que no es capaz de reflexionar sobre su propio trabajo (Nivel 3)?

Esta visión transforma los Criterios de Evaluación de una lista de control en un verdadero mapa del desarrollo del pensamiento matemático.

Ejemplo práctico: La Resolución de Problemas a través de los Ciclos

Para ilustrar cómo esta progresión se materializa en el currículo, analicemos la evolución de los *Criterios de Evaluación* asociados a la *Competencia Específica 2 (CE.MAT.2)*, centrada en la resolución de problemas, a lo largo de la Educación Primaria.

Competencia Específica Clave: CE.MAT.2. Resolver situaciones problematizadas, aplicando diferentes técnicas, estrategias y formas de razonamiento...

- **Primer Ciclo - Nivel 1 (Aplicación Guiada):** El criterio clave es el 2.2.b, que evalúa si el alumnado es capaz de: «Obtener posibles soluciones a problemas, de forma guiada, aplicando estrategias básicas de resolución, manipulando materiales en un proceso de ensayo y error.»
 - **Análisis:** El foco está en la *aplicación inicial y con apoyo*. Las palabras clave son «guiada» y «básicas». No se espera autonomía ni un repertorio amplio, sino la capacidad de iniciar la resolución con el andamiaje del docente y de los materiales.
- **Segundo Ciclo - Nivel 2 (Uso de Estrategias Variadas):** El criterio evoluciona hacia el CE.MAT.2.1.a: «Comenzar a comparar y a emplear diferentes estrategias para resolver un problema de forma pautada, implicándose en la resolución.»
 - **Análisis:** El salto cognitivo reside en la *comparación y diversificación*. Ya no se trata solo de aplicar una estrategia, sino de ser consciente de que existen varias y empezar a compararlas. El alumnado comienza a construir un repertorio estratégico personal.
- **Tercer Ciclo - Nivel 3 (Análisis y Justificación):** El criterio culmina en el CE.MAT.2.1.a: «Comparar, seleccionar y emplear entre diferentes estrategias para resolver un problema tomando decisiones, aplicándose en la resolución y justificando la estrategia seleccionada.»
 - **Análisis:** La demanda cognitiva es máxima. Las palabras clave son «seleccionar», «tomando decisiones» y, fundamentalmente, «justificando». Ya no basta con aplicar o comparar; el alumnado debe *analizar* las opciones, *elegir* la que considera más eficiente o adecuada y, lo más importante, *argumentar* el porqué de su elección.

Como se puede observar, el núcleo competencial es el mismo (resolver problemas), pero la acción que se exige al alumnado transita desde una aplicación guiada y básica hasta la selección autónoma y justificada de estrategias. Este es el verdadero itinerario de aprendizaje que la evaluación criterial nos marca.

2.4.1.3 Los Sentidos Matemáticos y los Saberes Básicos en el Currículum Andaluz

Los saberes básicos, a su vez, se organizan internamente en torno a los seis grandes *sentidos matemáticos*:

- **Sentido Numérico:** Es el corazón de la aritmética y el pilar de este manual. Engloba la comprensión de los números, sus relaciones y las operaciones. Implica la habilidad para calcular con fluidez y flexibilidad (tanto de forma escrita como mental), realizar estimaciones razonables y aplicar el conocimiento numérico para resolver problemas.
- **Sentido de la Medida:** Se centra en la comprensión y comparación de atributos de objetos del mundo real. Incluye el conocimiento de las principales magnitudes (longitud, masa, capacidad, tiempo, etc.), el uso de unidades e instrumentos de medida adecuados y la capacidad de estimar y calcular medidas en contextos

funcionales.

- *Sentido Espacial*: Relacionado con la geometría, va más allá de reconocer figuras. Implica la capacidad de visualizar, describir y razonar sobre las propiedades de formas y objetos, así como entender sus posiciones, direcciones y movimientos en el espacio.
- *Sentido Algebraico*: En Primaria, se enfoca en el *pensamiento relacional*. Su objetivo es identificar patrones y regularidades, describir relaciones entre cantidades que cambian y comprender el signo igual no como una orden para “calcular”, sino como una expresión de equivalencia. Sienta las bases del pensamiento abstracto.
- *Sentido Estocástico*: Es el sentido que nos permite desenvolvernó en un mundo lleno de datos e incertidumbre. Se ocupa de la recogida, organización e interpretación de datos (estadística) y del razonamiento sobre situaciones de azar (probabilidad), desarrollando el pensamiento crítico ante la información.
- *Sentido Socioafectivo*: Como vimos en profundidad en el *apartado 1.3.7* del capítulo anterior, este sentido reconoce que las matemáticas se aprenden en un contexto emocional y social. Busca fomentar la autoconfianza, la perseverancia, la gestión de la ansiedad, el trabajo en equipo y una visión de las matemáticas como una actividad humana, creativa y valiosa.

Implicación didáctica: Integración de los Sentidos Matemáticos

Consideremos una tarea en la que se propone que una clase de 24 alumnos y alumnas de 3º de Primaria quiere organizar una excursión de un día a un parque natural cercano. Para ello, deben elaborar un plan completo que incluya un presupuesto, un horario y un itinerario dentro del parque, asegurándose de que el coste total no exceda la ayuda de 350 € que ofrece el colegio.

En esta única tarea, aparentemente centrada en la aritmética, se activan y desarrollan de forma interconectada los seis sentidos matemáticos, materializando el verdadero significado de un enfoque competencial.

- Se calcula el coste total (*Sentido Numérico*).
- Se estiman tiempos y distancias (*Sentido de la Medida*).
- Se interpreta un mapa del parque (*Sentido Espacial*).
- Se descubre la relación entre el número de alumnos y el coste (*Sentido Algebraico*).
- Se recogen datos sobre preferencias (*Sentido Estocástico*).
- Se planifica en grupo, gestionando acuerdos y valorando el error (*Sentido Socioafectivo*).

Ejemplo: El Itinerario Cognitivo en Acción para la Comparación de Números

Para ilustrar cómo esta progresión se materializa en el currículo, veamos cómo podría evolucionar la evaluación de un saber básico fundamental a lo largo de la

Primaria, en línea con el itinerario cognitivo. *Saber Básico Implicado*: Comparación y ordenación de números.

- *Primer Ciclo - Nivel 1 (Reconocer y Describir)*: Un criterio podría ser: «Comparar y ordenar números hasta el 999 en contextos de la vida cotidiana, utilizando los símbolos $>$ y $<$ y representándolos en la recta numérica.» Aquí, el foco está en *identificar* la relación de orden y *usar* una representación y simbología dadas.
- *Segundo Ciclo - Nivel 2 (Aplicar y Usar)*: El criterio podría evolucionar a: «Resolver problemas sencillos que impliquen la comparación y ordenación de números naturales, fracciones y decimales, explicando oralmente el procedimiento seguido.» El foco se desplaza a la *aplicación* del conocimiento para *resolver* una situación y a una comunicación simple del proceso.
- *Tercer Ciclo - Nivel 3 (Analizar y Justificar)*: El criterio podría ser: «Seleccionar la estrategia más eficiente para comparar y ordenar conjuntos de datos con números de distinto tipo (naturales, fracciones, decimales y enteros), justificando la elección y validando la solución en el contexto del problema.» Aquí, la demanda cognitiva es máxima: se pide *analizar* diferentes estrategias, *elegir* la más adecuada, *justificar* la decisión y *validar* el resultado.

Como se puede observar, el contenido subyacente es el mismo (la comparación de números), pero la acción que se exige al alumnado (y que por tanto evaluamos) transita desde el reconocimiento y la representación hasta el análisis estratégico y la justificación.

Aunque nuestro manual se centra de manera explícita en el desarrollo del *Sentido Numérico*, es fundamental comprender que una enseñanza competencial no los aísla, sino que los integra constantemente. Una buena tarea de aritmética es aquella que moviliza varios sentidos a la vez.

2.4.2 La Aritmética en el Currículo de Andalucía

El currículo andaluz, en consonancia con la LOMLOE, materializa el enfoque competencial en una estructura que promueve el desarrollo progresivo del pensamiento matemático. La *ORDEN de 30 de mayo de 2023, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Andalucía*, establece en su *Anexo I* los saberes básicos para el área de Matemáticas. Un análisis detallado de esta normativa nos permite trazar la evolución de la aritmética a lo largo de los tres ciclos, observando cómo se construye el conocimiento numérico de forma gradual y coherente.

2.4.2.1 Principios Metodológicos y Enfoque del Currículo Andaluz

Antes de analizar los contenidos, es importante destacar los principios metodológicos que impregnan la Orden. En su artículo 7, se establece que las metodologías didácticas deben ser activas y participativas, favoreciendo el trabajo individual, cooperativo y el aprendizaje entre iguales. Se promueve el diseño de *situaciones de aprendizaje* que

contextualicen los saberes, permitiendo al alumnado movilizar sus conocimientos para resolver problemas de la vida cotidiana. Este enfoque es plenamente coherente con las teorías del aprendizaje constructivistas y socioculturales expuestas en este manual y con el objetivo de desarrollar una competencia matemática funcional y significativa.

2.4.2.2 El Sentido Numérico como Eje Vertebrador a lo Largo de los Ciclos

Como hemos establecido, la normativa andaluza organiza los saberes básicos en torno a seis sentidos. De ellos, el *Sentido Numérico* es el pilar sobre el que se construye la mayor parte del conocimiento aritmético en la Educación Primaria. Su progresión a lo largo de los tres ciclos refleja una cuidadosa secuenciación que va desde la construcción del concepto de número hasta la aplicación de operaciones en contextos complejos, nutriendo a su vez al resto de sentidos.

2.4.3 Análisis de la Evolución de la Aritmética por Ciclos

El *Anexo I* de la Orden de 30 de mayo de 2023 detalla los saberes básicos para cada ciclo, mostrando una progresión cuidadosa y en, en cierto aspecto, en forma espiral. Analicemos cómo evoluciona la aritmética del Sentido Numérico a través de ellos (en la Tabla 2.3 podrás encontrar un resumen).

Primer Ciclo (1º y 2º de Primaria): La Construcción de los Cimientos El objetivo de esta etapa es asentar las bases del pensamiento numérico. Los saberes se centran en el dominio de los números hasta el 999 y en el desarrollo de un sentido profundo para la adición y la sustracción.

- *Conteo y Cantidad (Saberes MAT.1.A.1 y MAT.1.A.2):* Se busca la comprensión y utilidad de los números naturales hasta el 999. El foco está en la comprensión del Sistema de Numeración Decimal (valor posicional, composición y descomposición) y en el uso de representaciones diversas (manipulativa, gráfica, numérica).
- *Sentido de las Operaciones (Saber MAT.1.A.3):* El currículo se centra explícitamente en la *suma y la resta*, que deben trabajarse «con flexibilidad y sentido». Se desarrollan estrategias de cálculo mental y se exploran las propiedades de estas dos operaciones mediante el uso de *materiales manipulativos y recursos lúdicos*. Aunque se trabajan los agrupamientos, base del pensamiento multiplicativo, las operaciones de multiplicación y división no se introducen formalmente.

La didáctica en este ciclo debe respetar la transición del período preoperacional al de operaciones concretas (Piaget), utilizando la manipulación como puente indispensable hacia la comprensión.

Segundo Ciclo (3º y 4º de Primaria): Consolidación y Expansión Este ciclo es clave para la consolidación del SND y la expansión formal del campo operatorio a la multiplicación y la división.

- *Cantidad y Numeración (Saberes MAT.2.A.1 y MAT.2.A.2):* Se amplía el dominio de los números naturales hasta el 9999. Se introducen de forma conceptual las *fracciones propias* con denominador hasta 12 y su conexión con los números decimales hasta las centésimas, especialmente en contextos de la vida cotidiana.
- *Sentido de las Operaciones (Saber MAT.2.A.3):* Es el período para la introduc-

Tabla 2.3: Evolución de los Saberes Aritméticos del Sentido Numérico y sus Implicaciones Didácticas por Ciclos (ORDEN 30/05/2023).

Ciclo	Saberes Básicos Clave (Sentido Numérico - Anexo I)	Conexión con las Etapas de Piaget (Apartado 1.2)	Implicaciones Didácticas y Ejemplo de Tarea
Primer Ciclo (1º y 2º)	MAT.1.A.1 y MAT.1.A.2 (Conteo y Cantidad): Significado y utilidad de los números naturales hasta el 999. Sistema de numeración decimal (valor posicional, composición, descomposición). MAT.1.A.3 (Sentido de las operaciones): Suma y resta de números naturales resueltas con flexibilidad y sentido, usando estrategias de cálculo mental y materiales manipulativos.	Transición del período <i>Pre-operacional</i> al de <i>Operaciones Concretas</i>. Necesidad de manipulación para superar la centración y construir la conservación de la cantidad, base para la reversibilidad de la suma y la resta.	La enseñanza debe ser eminentemente <i>manipulativa y vivencial</i>. El foco está en construir el sentido de la adición y la sustracción. <i>Ejemplo:</i> Utilizar regletas de Cuisenaire para explorar las descomposiciones del número 8 (“amigos del 8”), sentando las bases del cálculo mental para la suma y la resta (Saber MAT.1.A.3.1).
Segundo Ciclo (3º y 4º)	MAT.2.A.2 (Cantidad): Números naturales hasta 9999. Introducción a fracciones propias (denominador hasta 12) y decimales (hasta las centésimas) en contextos cotidianos. MAT.2.A.3 (Sentido de las operaciones): Construcción de las tablas de multiplicar apoyándose en suma repetida o disposición en cuadrículas. Estrategias para las cuatro operaciones.	Consolidación de las <i>Operaciones Concretas</i>. El pensamiento es lógico y reversible, lo que permite abordar la relación inversa entre multiplicación y división, pero siempre anclado a modelos concretos y visuales.	Se introducen formalmente la multiplicación y la división, conectándolas siempre con su significado. Es el momento de la memorización comprensiva de las tablas. <i>Ejemplo:</i> Usar un <i>array</i> de fichas de 3x4 para “ver” que es lo mismo que 4x3 y que se puede calcular como 4+4+4, construyendo así la propiedad conmutativa y el sentido de la tabla del 3 (Saber MAT.2.A.3.3).
Tercer Ciclo (5º y 6º)	MAT.3.A.1 (Conteo): Diferencias entre números naturales, enteros, racionales y reales. MAT.3.A.3 (Sentido de las operaciones): Estrategias de resolución con las cuatro operaciones con naturales, decimales y fracciones. Potencia como producto de factores iguales (cuadrados y cubos). MAT.3.A.4 y MAT.3.A.5 (Relaciones y Proporcionalidad): Relación de divisibilidad. Razónamiento proporcional.	Inicio de la transición hacia las <i>Operaciones Formales</i>. Emerge la capacidad para razonar sobre conceptos abstractos (números negativos, propiedades de los números) y pensar de forma hipotética.	Se amplía el universo numérico y se introducen conceptos más estructurales. La didáctica debe usar contextos significativos para que estas nuevas ideas abstractas cobren sentido. <i>Ejemplo:</i> Usar el modelo de un termómetro para ordenar temperaturas como -8°C y -3°C y discutir cuál es mayor, introduciendo el orden en el conjunto de los números enteros (Saber MAT.3.A.1.1).

ción y construcción formal de los significados de la multiplicación y la división. Se aborda la «*Construcción de las tablas de multiplicar* apoyándose en número de veces, suma repetida o disposición en cuadrículas» (MAT.2.A.3.3). Se desarrollan y aplican algoritmos para las cuatro operaciones, conectándolos con su significado.

Con el pensamiento operacional concreto de Piaget ya consolidado, se puede trabajar la reversibilidad (multiplicación/división) y usar múltiples representaciones (Dienes, Bruner) para dotar de significado a los nuevos conceptos y algoritmos.

Tercer Ciclo (5º y 6º de Primaria): Hacia la Abstracción y la Conexión

El tercer ciclo busca la consolidación de todas las operaciones y la profundización en nuevos conjuntos numéricos, preparando la transición a la Educación Secundaria.

- *Ampliación del Conjunto Numérico (Saber MAT.3.A.1)*: Se produce una expansión fundamental del universo numérico del alumnado con la introducción de los *números enteros* y los *números racionales*, estableciendo las diferencias entre ellos, además de los *números reales*, incluyendo, por ejemplo, al número irracional π .
- *Operaciones y Proporcionalidad (Saberes MAT.3.A.3 y MAT.3.A.4)*: Se sistematizan y afianzan las operaciones con fracciones y números decimales. Se introducen nuevos conceptos como las *potencias* (cuadrados y cubos) y las relaciones de *divisibilidad* (múltiplos y divisores). Además, se trabaja de forma explícita el *razonamiento proporcional* y los porcentajes (Saber MAT.3.A.5).

La enseñanza en este ciclo debe fomentar la transición hacia las operaciones formales (Piaget), promoviendo la generalización de patrones (sentido algebraico), el razonamiento con conceptos abstractos (números enteros) y un dominio creciente del modo simbólico (Bruner). En la tabla 2.4 se puede encontrar un resumen esquemático de esta progresión y de sus relaciones con la teoría de Piaget.

2.5 El Lenguaje y Registro Matemático: Clave y Desafío para el desarrollo de las Competencias

Dentro de los componentes de la competencia matemática, la comunicación y el uso de símbolos y formalismos ocupan un lugar primordial. Sin embargo, es importante entender que el lenguaje matemático no es simplemente un nuevo vocabulario, sino un *registro lingüístico* específico y complejo (Lee, 2006). Un registro es una variedad del lenguaje adaptada a un contexto particular, con su propia terminología, estructuras sintácticas y modos de argumentación. No enseñar explícitamente este registro es una de las principales causas de dificultad y bloqueo en el alumnado, quienes a menudo se enfrentan a la doble tarea de aprender un concepto matemático y, simultáneamente, un “idioma” nuevo y desconocido para expresarlo.

2.5.1 Dificultades Asociadas al Registro Matemático

El paso del lenguaje natural al registro matemático está plagado de obstáculos que el docente debe conocer para poder anticiparlos y abordarlos didácticamente:

- *Polisemia y Vocabulario Técnico*: Muchas palabras del lenguaje matemático tie-

Tabla 2.4: Evolución de los Saberes Aritméticos del Sentido Numérico y sus Implicaciones Didácticas por Ciclos (ORDEN 30/05/2023).

Ciclo	Saberes Básicos Clave	Conexión Psicopedagógica (Piaget)	Implicaciones Didácticas y Ejemplo de Tarea
Primer (1º y 2º)	<i>Conteo y Cantidad:</i> Números hasta el 999. Comprensión del SND (valor posicional, composición). <i>Operaciones:</i> Suma y resta con flexibilidad y sentido. Estrategias de cálculo mental.	Transición del <i>Periodo Preoperacional</i> al de <i>Operaciones Concretas</i> . Necesidad de manipulación para construir la conservación de la cantidad, base para la reversibilidad de la suma y la resta.	La enseñanza debe ser eminentemente <i>manipulativa y vivencial</i>. El foco está en construir el sentido de la adición y la sustracción. <i>Ejemplo:</i> Usar regletas de Cuisenaire para explorar las descomposiciones del 8 (“amigos del 8”), sentando las bases del cálculo mental.
Segundo (3º y 4º)	<i>Cantidad:</i> Números hasta 9999. Introducción a <i>fracciones propias y decimales</i> (hasta centésimas) en contextos cotidianos. <i>Operaciones:</i> Construcción de las tablas de multiplicar. Estrategias para las cuatro operaciones.	Consolidación de las <i>Operaciones Concretas</i> . El pensamiento es lógico y reversible, lo que permite abordar la relación inversa entre multiplicación y división, pero siempre anclado a modelos concretos y visuales.	Se introducen formalmente la multiplicación y la división, conectándolas siempre con su <i>significado</i>. Es el momento de la memorización <i>comprensiva</i> de las tablas. <i>Ejemplo:</i> Usar un array de fichas de 3×4 para “ver” que es lo mismo que 4×3, construyendo la propiedad conmutativa.
Tercer (5º y 6º)	<i>Cantidad:</i> Números enteros, racionales. Profundización en fracciones y decimales. <i>Operaciones y Relaciones:</i> Estrategias con las cuatro operaciones con naturales, decimales y fracciones. <i>Potencia</i> (cuadrados y cubos). Relación de divisibilidad. Razonamiento <i>proporcional</i>.	Inicio de la transición hacia las <i>Operaciones Formales</i> . Emerge la capacidad para razonar sobre conceptos abstractos (números negativos, propiedades) y pensar de forma hipotética.	Se amplía el universo numérico y se introducen conceptos más estructurales. La didáctica debe usar <i>contextos significativos</i> para que estas nuevas ideas abstractas cobren sentido. <i>Ejemplo:</i> Usar el termómetro para ordenar temperaturas como -8°C y -3°C, introduciendo el orden en los números enteros.

nen un significado diferente en el lenguaje cotidiano, lo que genera confusión. Por ejemplo, la palabra “diferencia” en un contexto coloquial significa “distinción”, mientras que en aritmética se refiere al resultado de una sustracción. Otros ejemplos incluyen “producto”, “raíz”, “cociente” o “agrupar”. Además, hay términos puramente técnicos (ej., “minuendo”, “dividendo”) que carecen de referente en la vida diaria.

Dificultad Común: Polisemia entre Lenguaje Natural y Matemático

La polisemia es una de las mayores barreras en el aprendizaje. El alumnado oye una palabra conocida y asume un significado que es incorrecto en el contexto matemático. Es tarea del docente hacer visibles estas diferencias.

Término	Significado en Lenguaje Natural (Cotidiano)	Significado en el Registro Matemático (Preciso)
Diferencia	Cualidad que distingue una cosa de otra. <i>Ej: “La diferencia entre una manzana y una pera es el sabor.”</i>	Resultado que se obtiene al realizar una operación de resta o sustracción. <i>Ej: “La diferencia entre 8 y 5 es 3.”</i>
Producto	Objeto o artículo que se fabrica, se obtiene de la naturaleza o se compra. <i>Ej: “He comprado varios productos en el supermercado.”</i>	Resultado que se obtiene al realizar una operación de multiplicación. <i>Ej: “El producto de 4 y 5 es 20.”</i>
Razón	Capacidad de pensar y argumentar lógicamente; motivo o causa de algo. <i>Ej: “Tienes razón en lo que dices.”</i>	Comparación entre dos cantidades mediante un cociente. Expresa cuántas veces una cantidad contiene a otra. <i>Ej: “La razón entre 20 y 10 es 2.”</i>
Repartir	Distribuir algo entre varias personas, no necesariamente de forma igualitaria. <i>Ej: “Repartió las cartas entre los jugadores.”</i>	Distribuir una cantidad en partes <i>estrictamente iguales</i> . Es el fundamento del significado partitivo de la división.
Agrupar	Juntar varios elementos en un conjunto, sin un criterio de cantidad fijo. <i>Ej: “Agrupar todos los lápices en el estuche.”</i>	Formar un conjunto de un tamaño específico (generalmente 10) para canjearlo por una unidad de orden superior (ej. 10 unidades = 1 decena).

- **Sintaxis y Estructura Gramatical:** El registro matemático utiliza estructuras gramaticales que a menudo invierten el orden del lenguaje natural, requiriendo una “traducción” precisa. La posición de las palabras es muy relevante. Por

ejemplo, “el doble de 5 más 3” ($2 \times 5 + 3$) no es lo mismo que “el doble de la suma de 5 y 3” ($2 \times (5 + 3)$). Los conectores lógicos (“si... entonces”, “y”, “o”) y las preposiciones adquieren un significado de alta precisión.

- *Alta Densidad Conceptual y Simbolismo:* El lenguaje matemático es extremadamente denso y conciso. Un simple enunciado como $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$ contiene una gran cantidad de información conceptual (fracción como parte-todo, relación de orden, significado del numerador y denominador). El uso de símbolos abstractos (+, −, ×, ÷, =) requiere que el discente los dote de significado, ya que no tienen un referente icónico directo.
- *Modo de Discurso y Argumentación:* El discurso matemático valora la precisión, la generalización y la justificación lógica, mientras que el discurso narrativo o cotidiano es a menudo contextual y personal. Se espera que el alumnado pase de contar “lo que han hecho” a explicar “por qué su procedimiento es válido”.

Al ser el registro matemático una forma de representación propia, es necesario un trabajo ingente que derribe las barreras comunicativas con las que se va a encontrar gran parte del alumnado (Lee, 2006). La superación de esa barrera suele conducir a una mejora sustancial en la relación afectiva con las matemáticas y a mejores desempeños.

2.5.2 Estrategias Didácticas para Desarrollar el Registro Matemático

Superar estas dificultades no ocurre de forma espontánea; requiere una docencia intencionalmente dirigida y sistemática del registro matemático como parte integral de la enseñanza de la aritmética.

- *Enseñanza Explícita del Vocabulario:* El docente debe tratar el vocabulario matemático como lo haría un profesor o profesora de idiomas. Esto incluye presentar explícitamente los nuevos términos, discutir sus significados (tanto el matemático como el coloquial, en caso de polisemia) y crear oportunidades para su uso.

Ejemplo: Enseñanza Explícita del Vocabulario

Crear un “diccionario matemático” o un mural en el aula con los términos clave de cada tema (ej., “sumandos”, “suma o total”), su definición y un ejemplo visual.

- *Construir Puentes entre el Lenguaje Natural y el Matemático:* La transición debe ser gradual. Es fundamental partir de la expresión de ideas en lenguaje natural para, progresivamente, introducir la terminología y la simbología matemática como una forma más precisa y eficiente de comunicar esas mismas ideas.

Ejemplo: Puente del Lenguaje Natural al Matemático

Ante un problema, pedir primero al alumnado que explique con sus propias palabras lo que hay que hacer (“juntar todas las canicas”) antes de introducir la palabra “suma” y el símbolo “+”.

- *Priorizar la Comunicación Oral:* Siguiendo los principios de Vygotsky, la verbali-

zación es una herramienta clave para la construcción del pensamiento. Fomentar el diálogo, los debates y las puestas en común permite al alumnado *ensayar el lenguaje matemático* en un entorno de bajo riesgo, clarificar sus ideas y aprender de sus compañeros. El “pensar en voz alta” debe ser una práctica habitual.

- **Conectar el Lenguaje con Múltiples Representaciones:** Como sugiere Bruner, el lenguaje simbólico debe anclarse en experiencias concretas (enactivas) y visuales (icónicas). Un símbolo como “ $1/2$ ” adquiere significado cuando se conecta con la acción de doblar un papel por la mitad o con el dibujo de media pizza. El uso de materiales manipulativos y representaciones gráficas es fundamental para dar sentido al lenguaje abstracto.
- **Modelado y Uso Consistente por parte del Docente:** El docente es el principal modelo lingüístico en el aula. Debe utilizar el registro matemático de forma precisa, clara y consistente, explicando los términos a medida que los introduce y animando al alumnado a hacer lo mismo. Se debe corregir el lenguaje impreciso de manera constructiva, no punitiva.

Ejemplo: Modelado del Lenguaje por el Docente

Si un discente dice “el número de arriba” de una fracción, el docente puede reformular positivamente: “Muy bien, te refieres al *numerador*, ¿verdad? El numerador nos indica...”.

Al abordar el lenguaje matemático como una competencia específica que debe ser enseñada, el docente equipa a los discentes con las herramientas necesarias no solo para resolver problemas, sino para pensar, comunicar y participar plenamente en la cultura matemática.

Ejemplo práctico: Traducción de Lenguaje Natural a Matemático

Para ilustrar cómo estas dificultades se manifiestan en la práctica, analicemos el proceso de “traducción” de una frase aparentemente sencilla. La sintaxis del lenguaje matemático, a diferencia del lenguaje natural, no siempre sigue un orden lineal.

Frase en Lenguaje Natural: “El doble de la suma de 5 y 3”

<i>Paso 1: Identificar la estructura principal</i>	La frase nos pide calcular “el doble de” <i>algo</i> . Ese “algo” es la unidad principal sobre la que se opera.

<i>Paso 2: Analizar la unidad principal</i>	El “algo” es “la suma de 5 y 3”. Esto indica que la suma debe realizarse <i>primero</i> para formar una única cantidad. En lenguaje matemático, agrupamos esta operación prioritaria con paréntesis: $(5 + 3)$.

<i>Paso 3: Aplicar la operación principal</i>	Ahora aplicamos “el doble de” a la unidad que hemos identificado. “El doble” significa multiplicar por 2. Por tanto, la expresión completa es $2 \times (5 + 3)$.

<i>Expresión Correcta</i>	<i>Matemática</i>	$2 \times (5 + 3) = 2 \times 8 = 16$

Possible Error (Interpretación Literal) Un alumno que lee de izquierda a derecha sin analizar la estructura podría traducir: “El doble de 5” (2×5) “más 3” ($+3$). Esto le llevaría a la expresión incorrecta $2 \times 5 + 3 = 10 + 3 = 13$.

Este ejemplo demuestra que enseñar el registro matemático implica enseñar a *analizar la estructura lógica de una frase*, en lugar de simplemente traducir palabras en el orden en que aparecen.

Clave Didáctica: Reformulación como Puente al Lenguaje Matemático

Una de las herramientas más potentes para enseñar el registro matemático es la *reformulación* o *modelado*. No se trata de corregir al alumno/a, sino de tomar su expresión natural y valiosa y construir un puente hacia el lenguaje matemático, mostrando cómo se pueden expresar las mismas ideas con mayor precisión.

Veamos algunos ejemplos:

Verbalización del Alumno/a (Lenguaje Natural)	Reformulación del Docente (Puente al Registro Matemático)
“Puse el 5 y le junté el 3, y me dio 8.”	“¡Entendido! Has combinado los dos sumandos, 5 y 3, para calcular la suma o total, que es 8.”
“El número de arriba de la fracción es el 1 y el de abajo es el 4.”	“Exacto. El numerador es 1, que nos dice cuántas partes cogemos, y el denominador es 4, que nos indica en cuántas partes iguales se ha dividido la unidad.”
“Tenía 10, me quitaron 4, así que conté para atrás... 9, 8, 7, 6.”	“¡Qué buena estrategia! Al minuendo, que era 10, le has restado el sustraendo, 4, y has encontrado que la diferencia es 6.”

Esta técnica, usada de forma consistente, enriquece el vocabulario del alumnado de manera natural, respeta sus aportaciones y conecta sus ideas intuitivas con los conceptos formales sin crear una barrera.

2.6 La Finalidad de las Matemáticas en la Educación Primaria

La enseñanza de la aritmética en la Educación Primaria, y de las matemáticas en un sentido más amplio, no persigue únicamente el dominio de contenidos como un fin en sí mismo, sino que se concibe como un medio para alcanzar propósitos educativos de mayor alcance. Esta enseñanza se articula en torno a una *triple finalidad* –instrumental,

funcional y formativa— que, si bien son fundamentalmente distintas, se interrelacionan y se complementan. Comprender estas finalidades es esencial para que el futuro docente pueda justificar su práctica pedagógica, diseñar actividades significativas y orientar el aprendizaje del alumnado hacia el desarrollo de una competencia matemática integral y adaptable.

2.6.1 Finalidad Instrumental

La *finalidad instrumental* concibe las matemáticas como un conjunto de *herramientas, conceptos, lenguajes, procedimientos, habilidades, técnicas, definiciones, propiedades, algoritmos y métodos* que son necesarios para abordar y resolver problemas en otras disciplinas del conocimiento o en diversas esferas de la vida. Desde esta perspectiva, la aritmética dota al individuo de los instrumentos básicos de cálculo y numeración indispensables para desenvolverse en el mundo y para acceder a conocimientos más complejos. Se centra en el “saber hacer” matemático, en la capacidad de ejecutar procedimientos y utilizar conceptos de forma eficaz.

En el contexto de la aritmética, esta finalidad se manifiesta en la adquisición y el dominio de:

- **Cálculo Básico y Algoritmos:** La habilidad para realizar operaciones de suma, resta, multiplicación y división con números naturales, enteros, fracciones y decimales, utilizando tanto el cálculo mental como los algoritmos escritos (tradicionales y alternativos).

Ejemplo: Cálculo Básico y Algoritmos

Un alumno es capaz de calcular $345 + 178$ con fluidez, o de multiplicar 25×4 mentalmente.

- **Representación Numérica:** La capacidad de leer, escribir y representar números en diferentes formatos (cifras, palabras, recta numérica, descomposiciones), así como comprender el valor posicional del sistema de numeración decimal.

Ejemplo: Representación Numérica

Escribir correctamente el número “doscientos tres” como 203, o situar una fracción como $1/4$ en la recta numérica.

- **Medida y Magnitudes:** El manejo de unidades de medida (longitud, masa, capacidad, tiempo, dinero) y la realización de operaciones con ellas.

Ejemplo: Medidas y Magnitudes

Saber medir 1,5 metros de tela para un proyecto, o calcular el coste total de 3 kilos de manzanas a un precio dado por kilo.

El dominio instrumental es necesario. Sin estas herramientas básicas, el discente no puede avanzar hacia aplicaciones más complejas ni desarrollar un pensamiento matemático de alto nivel. Es una de las finalidades que se han potenciado en la enseñanza tradicional.

2.6.2 Finalidad Funcional

La *finalidad funcional* de las matemáticas se centra en su *utilidad práctica* y su *relevancia para interpretar y actuar en el mundo*. Va más allá de la mera posesión de herramientas (finalidad instrumental) para enfatizar la capacidad de aplicar esas herramientas en una variedad de contextos significativos y resolver problemas de la vida cotidiana. Se busca que el alumnado perciba las matemáticas como una disciplina viva, útil y conectada con su realidad. Esta finalidad responde a la pregunta de “¿para qué sirven las matemáticas?”.

Esta finalidad se evidencia en la capacidad del alumnado para:

- *Resolución de Problemas Cotidianos*: Aplicar conceptos aritméticos para resolver situaciones problemáticas que surgen en su entorno familiar, social o escolar.

Ejemplo: Resolución de Problemas Cotidianos

Calcular cuánto dinero necesita para comprar un juguete, repartir caramelos entre amigos de forma equitativa, o entender la duración de un viaje.

- *Interpretación de Información Cuantitativa*: Leer e interpretar datos numéricos presentes en gráficos, tablas, noticias o publicidad.

Ejemplo: Interpretación de Información Cuantitativa

Comprender que un descuento del 20 % en una tienda significa que se paga menos, o interpretar las estadísticas de una encuesta simple.

- *Toma de Decisiones Informadas*: Utilizar el razonamiento aritmético para sopesar opciones y tomar decisiones lógicas en situaciones que implican cantidades.

Ejemplo: Toma de Decisiones Informadas

Decidir qué oferta es más ventajosa al comparar precios de diferentes productos.

- *Comprensión de Fenómenos Sociales y Científicos Simplificados*: Entender cómo los números se utilizan para describir el mundo, aunque sea en un nivel básico.

Ejemplo: Comprensión de Fenómenos Sociales y Científicos Simplificados

Comprender cómo se representa la temperatura bajo cero en un termómetro, o interpretar el número de votos en una elección escolar.

La finalidad funcional dota de sentido a los contenidos aritméticos, fomentando que los alumnos vean las matemáticas como una disciplina relevante y no como un mero ejercicio académico descontextualizado. Esta finalidad ha sido ampliamente contemplada en la enseñanza de las matemáticas, puesto que representa su utilidad como herramienta en otras muchas disciplinas.

2.6.3 Finalidad Formativa

La *finalidad formativa* es quizás la más trascendente y profunda, ya que se centra en el desarrollo de *capacidades cognitivas, habilidades metacognitivas y valores personales* intrínsecamente ligados al quehacer matemático. Va más allá de la utilidad directa para enfocarse en cómo el proceso de aprender y hacer matemáticas contribuye al desarrollo integral del individuo. Responde a la pregunta de “¿qué tipo de pensador y persona queremos formar?”. Esta finalidad se conecta directamente con el desarrollo cognitivo (sección 1.3) y el dominio afectivo (sección 1.3.7), ya que la mejora de estas capacidades contribuye a la maduración intelectual y a la construcción de una relación positiva con la disciplina.

La enseñanza de la aritmética, con un enfoque formativo, busca cultivar en el alumnado habilidades y valores como:

- *Desarrollo del Razonamiento Lógico y el Pensamiento Crítico*: La resolución de problemas aritméticos complejos y la justificación de estrategias exigen al alumnado analizar, inferir, deducir y evaluar la validez de sus argumentos.

Ejemplo: Desarrollo del Razonamiento Lógico y el Pensamiento Crítico

Un problema que pide no solo una respuesta, sino una explicación del “por qué” de la solución, o una discusión en clase sobre la lógica de diferentes métodos de cálculo.

- *Fomento de la Autonomía y la Iniciativa Personal*: La necesidad de tomar decisiones al resolver problemas, explorar diferentes caminos y verificar resultados promueve la independencia y la confianza en las propias capacidades.

Ejemplo: Fomento de la Autonomía y la Iniciativa Personal

Animar al alumnado a elegir su propia estrategia para sumar, en lugar de imponer un único algoritmo.

- *Estimulación de la Creatividad y la Curiosidad*: La búsqueda de patrones, la formulación de conjeturas y la invención de problemas propios nutren la imaginación y el interés por descubrir nuevas relaciones matemáticas.

Ejemplo: Estimulación de la Creatividad y la Curiosidad

Pedir a los discentes que inventen un problema que se resuelva con una multiplicación dada, o que busquen patrones en las tablas de multiplicar.

- *Desarrollo de la Persistencia y la Resiliencia*: Enfrentarse a problemas desafiantes y superar las dificultades inherentes al proceso de aprendizaje matemático cultiva la tenacidad y la capacidad de no rendirse ante el primer obstáculo.

Ejemplo: Desarrollo de la Persistencia y la Resiliencia

Trabajar problemas abiertos que requieran varios intentos y una actitud de “no pasa nada por equivocarse, lo importante es seguir intentándolo”.

- *Promoción de la Precisión, Rigurosidad y Sistemática:* La naturaleza precisa de las matemáticas exige atención al detalle, orden y coherencia en el pensamiento.

Ejemplo: Promoción de la Precisión, Rigurosidad y Sistemática

La necesidad de colocar correctamente las cifras en los algoritmos, o de seguir una secuencia lógica al descomponer un problema.

- *Capacidad de Comunicación y Argumentación Matemática:* Expresar ideas numéricas de forma clara y coherente, tanto oralmente como por escrito, utilizando el lenguaje matemático apropiado.

Ejemplo: Capacidad de Comunicación y Argumentación Matemática

Presentar y defender una solución a un problema ante la clase, explicando los pasos y las razones.

En definitiva, la finalidad formativa busca educar ciudadanos y ciudadanas reflexivos, críticos, creativos y perseverantes, capaces de enfrentarse a nuevos desafíos con una mente analítica y estructurada, habilidades que son transferibles a cualquier ámbito de la vida.

Profundizando: La Tabla del 3 a través de las Tres Finalidades

Para clarificar cómo estas tres finalidades, aunque interrelacionadas, guían la práctica docente de formas distintas, veamos un ejemplo concreto con un contenido clásico: *la tabla de multiplicar del 3*.

Finalidad	Enfoque Didáctico y Objetivo	Ejemplo de Tarea en el Aula
<i>Instrumental</i>	Enfoque: Eficiencia y automatización del cálculo. Objetivo: Que el alumnado memorice y aplique de forma rápida y correcta los hechos numéricos de la tabla del 3.	Realizar una ficha con 30 multiplicaciones variadas de la tabla del 3 (ej. 3×7 , 8×3 , 3×5 ...). Se valora la corrección y la velocidad.
<i>Funcional</i>	Enfoque: Utilidad y aplicación en contextos reales. Objetivo: Que el alumnado utilice la multiplicación por 3 para resolver un problema práctico y relevante.	Problema: “Vamos a organizar los triciclos del patio. Hay 7 triciclos. Si cada triciclo tiene 3 ruedas, ¿cuántas ruedas tenemos que revisar en total para asegurarnos de que están todas bien hinchadas?”

<i>Formativa</i>	<i>Enfoque:</i> Razonamiento, descubrimiento de patrones y desarrollo del pensamiento crítico. <i>Objetivo:</i> Que el alumnado descubra patrones en la tabla del 3, justifique sus propiedades y desarrolle el razonamiento lógico.	<i>Investigación:</i> “Colorea en una tabla 100 todos los resultados de la tabla del 3. ¿Qué patrón observas en los números? ¿Y en la suma de sus cifras? ¿Por qué crees que ocurre esto? Discútelos con tu compañero.”

Una práctica docente rica y completa no se decanta por una única finalidad, sino que busca un equilibrio, asegurando que el alumnado adquiriera las *herramientas* (instrumental), sepa *usarlas* en la vida real (funcional) y, sobre todo, *piense y razone* con ellas (formativa).

2.7 Conclusión del Capítulo

Este capítulo ha establecido que el objetivo fundamental de la enseñanza de la aritmética en la Educación Primaria es el desarrollo de una *competencia matemática integral y funcional*. Hemos recorrido un camino que nos ha llevado desde el *porqué* de este enfoque (su contexto histórico y su conexión con las teorías del aprendizaje) hasta el *qué* (sus componentes esenciales y sus finalidades) y, finalmente, al *cómo* se implementa en la práctica a través de la progresión del currículo andaluz.

Hemos desgranado la competencia matemática en sus *componentes esenciales* –el pensamiento y razonamiento, la modelización, la resolución de problemas, la argumentación, la representación, la comunicación y el uso de símbolos–, subrayando que ser competente matemáticamente no es solo saber calcular, sino saber *pensar, interpretar y comunicar* con y sobre las matemáticas. Además, hemos profundizado en el *registro lingüístico matemático* como una herramienta clave y un desafío didáctico que requiere una enseñanza explícita para evitar bloqueos en el aprendizaje.

Asimismo, hemos explorado la *triple finalidad* que guía esta labor:

- La *finalidad instrumental*, que proporciona a los alumnos la “caja de herramientas” del cálculo y la numeración.
- La *finalidad funcional*, que les permite aplicar esas herramientas para resolver problemas cotidianos e interpretar el mundo.
- Y la *finalidad formativa*, creemos que la más trascendente, que utiliza las matemáticas como un vehículo para cultivar el razonamiento lógico, el pensamiento crítico, la creatividad y la perseverancia.

Finalmente, hemos analizado cómo el *currículo oficial de Andalucía* articula el desarrollo de esta competencia a través de una progresión en espiral, con el sentido numérico como eje vertebrador, estableciendo un camino claro desde los cimientos en el primer ciclo hasta la abstracción y conexión en el tercero.

En síntesis, este capítulo equipa al futuro docente con las herramientas conceptuales para diseñar una enseñanza de la aritmética que sea verdaderamente *competencial*. Al integrar la visión del niño que aprende (Capítulo 1) con la comprensión de lo que

significa ser matemáticamente competente y lo que el currículo persigue, el docente está en una posición sólida para transformar su práctica pedagógica. Su rol trasciende así el de un mero aplicador de la ley curricular para convertirse en un *intérprete reflexivo* de la misma, un arquitecto de experiencias de aprendizaje que empodere genuinamente a las futuras generaciones. Esta base conceptual es imprescindible para las propuestas didácticas concretas que se abordarán en los capítulos subsiguientes.

Con este mapa curricular en mano, que define el destino de nuestro viaje, estamos listos para adentrarnos en el taller del arquitecto pedagógico. Ya no nos preguntamos “qué” enseñar, sino “cómo” diseñarlo. El siguiente capítulo nos proporcionará los planos y las herramientas para construir Situaciones de Aprendizaje potentes, coherentes y significativas, transformando la teoría en práctica de aula.

2.8 Para la Reflexión y el Portfolio Docente

1. *Análisis Histórico-Personal: Mi Viaje Competencial.*

Consigna: Revisa los apuntes y libros de texto que usabas en Primaria, si aún los conservas. Reflexiona sobre cómo las tres finalidades de las matemáticas se manifestaron (o no) en tu educación.

- ¿El enfoque estaba centrado en el contenido (finalidad *instrumental*) o en la aplicación a problemas reales (finalidad *funcional*)?
- ¿Recuerdas haber tenido oportunidades para desarrollar la finalidad *formativa* (razonar, crear, comunicar tus ideas)?
- Escribe una breve reflexión sobre cómo crees que esa experiencia modeló tu visión de lo que significa «ser bueno/a en matemáticas».

2. *Análisis de Recurso Didáctico: Los Sentidos en Acción.*

Consigna: Analiza una doble página de un libro de texto de matemáticas de Primaria actual. Identifica una tarea principal y evalúa cómo integra los seis sentidos matemáticos del currículo andaluz.

- ¿La tarea moviliza únicamente el *Sentido Numérico*?
- ¿Integra otros sentidos como el de la *Medida*, el *Espacial*, el *Algebraico*, el *Estocástico* o el *Socioafectivo*? Describe cómo.
- Justifica si la tarea está planteada como un ejercicio (finalidad instrumental) o como un problema competencial (finalidad funcional/formativa).

3. *Diseño de una Micro-Actividad Competencial.*

Consigna: Toma un saber básico puramente aritmético del currículo andaluz del Segundo Ciclo (ej., «Construcción de las tablas de multiplicar», MAT.2.A.3.3). Diseña una pequeña tarea o problema contextualizado que, para ser resuelto, requiera movilizar no solo ese saber, sino también al menos otros dos sentidos del currículo (ej., Sentido de la Medida y Sentido Socioafectivo). Inspírate en el ejemplo de «Planificamos una excursión al parque natural» de la página 50 del manual.

3 Diseño de Propuestas Didácticas en Aritmética

3.1 Introducción: Del Qué y Porqué al Cómo

EN los capítulos anteriores hemos establecido los cimientos de nuestra práctica. Como un arquitecto que se prepara para construir un edificio, primero hemos estudiado las características del terreno —el desarrollo cognitivo y afectivo del niño y la niña (Capítulo 1)— y luego hemos analizado el propósito de la estructura y los requisitos normativos —la naturaleza de la competencia matemática y el mandato curricular (Capítulo 2)—. Conocemos el *quién* aprende y el *para qué* enseñamos. Ahora, nos adentramos en el corazón de la labor del arquitecto: el *cómo*.

Este capítulo es el taller de diseño. Nos equipará con los planos, las herramientas y las técnicas para pasar de la teoría a la práctica, para transformar los objetivos de aprendizaje en experiencias de aula coherentes, significativas y eficaces. Nuestro itinerario será lógico y progresivo:

1. *Los ingredientes del diseño*: Analizaremos los componentes fundamentales de cualquier propuesta didáctica: la selección de *tareas matemáticas* potentes y el uso inteligente de *recursos manipulativos*.
2. *El marco teórico*: Profundizaremos en la *Teoría de Situaciones Didácticas* de Guy Brousseau, el andamiaje teórico que nos permite concebir el aprendizaje no como una transmisión, sino como una construcción en respuesta a un problema.
3. *La herramienta curricular*: Traduciremos la teoría a la práctica a través del instrumento que nos proporciona la LOMLOE: la *Situación de Aprendizaje (SdA)*. Desgranaremos sus fases de diseño y las herramientas para planificarla de forma inclusiva, atendiendo a la diversidad a través del *Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA)*.
4. *La puesta en práctica*: Ilustraremos todo el proceso con *ejemplos prácticos* para cada ciclo de Primaria, que servirán como modelos del proceso de diseño. Deliberadamente, se ha mantenido un desarrollo esquemático de estos ejemplos, prefiriendo mostrar el *proceso de construcción* antes que el resultado definitivo. Estamos convencidos de que este enfoque os será más útil.

Este capítulo, en definitiva, busca transformar nuestro rol de meros aplicadores de actividades a verdaderos *arquitectos de experiencias de aprendizaje*.

3.2 Los Componentes Fundamentales del Diseño Didáctico: Tareas y recursos

Para construir una Situación de Aprendizaje potente, el docente debe conocer y saber combinar intencionadamente una serie de elementos metodológicos. Estos son los «ingredientes» fundamentales de nuestra planificación, los pilares sobre los que se asienta una práctica docente reflexiva y eficaz. En esta sección, analizaremos dos componentes imprescindibles: la selección de tareas matemáticas y el uso de recursos didácticos.

3.2.1 La Tarea Matemática como Núcleo del Aprendizaje

En el contexto de la didáctica de la matemática, entendemos por *tarea matemática* cualquier propuesta de actividad que se presenta al alumnado con el propósito de que desarrollen su pensamiento matemático y construyan nuevos aprendizajes. Esta definición es deliberadamente amplia: una tarea puede ir desde un ejercicio de cálculo hasta un proyecto de investigación. Lo que define a una propuesta como “tarea matemática” no es su formato, sino su *intencionalidad pedagógica*: la de generar una actividad intelectual en el discente centrada en ideas y procesos matemáticos.

3.2.1.1 La Centralidad de la Tarea: ¿Qué Pensamiento Exigimos?

El tipo de tarea que un docente propone en el aula no es un elemento neutro; define el horizonte de lo que es posible aprender y establece qué significa «hacer matemáticas». Como afirman autores de referencia como Stein et al. (2000/2009), el nivel y tipo de pensamiento que el alumnado desarrolla está directamente determinado por la *demanda cognitiva* de las tareas con las que se comprometen. Por ello, el futuro docente necesita disponer de marcos de análisis que le permitan seleccionar y diseñar tareas con un propósito claro.

Un marco de análisis de gran influencia (Stein et al., 2000/2009) es el que clasifica las tareas según la *demanda cognitiva* que exigen al discente. Este modelo distingue dos grandes categorías:

- *Tareas de Baja Demanda Cognitiva*. Estas tareas se centran en la reproducción de conocimientos o la aplicación de procedimientos de forma rutinaria.
 - *Nivel 1: Memorización*. Son tareas que implican la evocación de hechos, reglas, fórmulas o definiciones. No requieren explicación ni conexión entre ideas. Su objetivo didáctico es la automatización de hechos numéricos básicos.

Ejemplo: Memorización de la tabla del 7

Recita la tabla de multiplicar del 7.

- *Nivel 2: Procedimientos sin Conexiones*. Son tareas puramente algorítmicas, donde el procedimiento a seguir es claro y está previamente establecido. El énfasis recae en producir respuestas correctas de manera eficiente, no en desarrollar una comprensión de los conceptos subyacentes. Suelen ser útiles para afianzar y agilizar un algoritmo ya comprendido.

Ejemplo: Aplicación rutinaria de un algoritmo de resta

Resuelve las siguientes 20 restas con llevadas.

- *Tareas de Alta Demanda Cognitiva*. Estas tareas exigen un pensamiento complejo, requiriendo que el alumnado explore, comprenda y conecte conceptos y procedimientos.
 - *Nivel 3: Procedimientos con Conexiones*. Estas tareas, aunque siguen requiriendo el uso de procedimientos, lo hacen de una manera que construye conexiones con los conceptos que los sustentan. A menudo se pre-

sentan a través de múltiples representaciones (visuales, manipulativas, simbólicas) y exigen que el alumno justifique o explique el porqué del procedimiento, fomentando una comprensión relacional (Skemp, 1978).

Ejemplo: Visualización de la reagrupación en la suma

Usa los bloques multibase para representar la suma $147 + 65$. Dibuja el proceso de agrupación y explica con tus palabras qué significa la «llevada».

- **Nivel 4: «Hacer Matemáticas» (Doing Mathematics).** Son tareas no algorítmicas por naturaleza, donde no existe un camino de solución predeterminado. Requieren que el discente explore, descubra patrones, formule conjeturas y justifique sus conclusiones. Son las que mejor encarnan la resolución de problemas en su sentido más puro y desarrollan las competencias de más alto nivel.

Ejemplo: Resolución de un problema abierto con dos variables

Un granjero tiene gallinas y conejos. En total, hay 10 cabezas y 26 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay? Explica cómo lo has descubierto.

3.2.1.2 Otras Perspectivas para la Clasificación de Tareas

El marco de análisis de las tareas basado en la demanda cognitiva presentado arriba se puede complementar con otras perspectivas que enriquecen la capacidad de decisión del docente. Una distinción fundamental en la didáctica de la resolución de problemas, popularizada por autores como Schoenfeld (2016), es la que diferencia las tareas según el reto cognitivo que suponen para el alumno. Esta visión distingue entre:

- **Ejercicios:** Son tareas para las cuales el discente ya conoce un procedimiento o algoritmo que le lleva a la solución. Su finalidad es la práctica, la consolidación y la automatización de una técnica ya aprendida. Se corresponden con los niveles 1 y 2 de baja demanda cognitiva. Un ejemplo claro es una ficha con varias sumas de fracciones con el mismo denominador, una vez ya se ha explicado el procedimiento.
- **Problemas:** Son tareas para las cuales el discente no dispone de un método de resolución inmediato. Para resolver un problema, el alumno debe explorar, diseñar una estrategia y tomar decisiones, movilizandolos conocimientos de forma flexible. Los problemas genuinos se alinean con los niveles 3 y 4 de alta demanda cognitiva y son el verdadero motor del desarrollo de la competencia matemática.

Por su parte, un enfoque eminentemente práctico, fundamental para secuenciar las tareas dentro de una Situación de Aprendizaje, las clasifica según su *función didáctica* principal en el aula. Enfoques como la *Educación Matemática Realista* (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2020) o los estándares curriculares del *NCTM* (National Council of Teachers of Mathematics, 2000) fundamentan la necesidad de utilizar una

variedad de contextos, cada uno con un propósito claro:

- *Tareas conectadas a la vida cotidiana*: Para dotar de funcionalidad al aprendizaje y motivar, actuando como punto de partida del conocimiento.
- *Tareas en un contexto lúdico*: Para practicar destrezas en un ambiente de baja ansiedad.
- *Tareas para manipular y representar*: Para facilitar la construcción de conceptos abstractos.
- *Tareas para comunicar y argumentar*: Para fomentar la metacognición y la verbalización del pensamiento.

Y estas son sólo algunas de las posibilidades de clasificación de las tareas que se pueden incluir como actividades matemáticas. En resumen, el docente debe ser consciente de la gran cantidad de aspectos a tener en cuenta a la hora de diseñar la práctica docente, disponer de una bolsa de recursos grande y variada y usarla de la forma que perciba más adecuada a la Situación de Aprendizaje que pretende desarrollar.

3.2.2 Recursos para la Construcción del Conocimiento: El Puente hacia lo Abstracto

La aritmética es, por naturaleza, abstracta. Para que un niño o niña pueda construir significados profundos, necesita puentes que conecten su mundo físico y concreto con el mundo simbólico de los números. Los *recursos manipulativos* son el principal puente del que dispone el docente de Primaria.

Su intencionalidad pedagógica se fundamenta en las teorías del aprendizaje vistas en el Capítulo 1. Permiten construir el conocimiento a través de la acción (Piaget), facilitan el modo de representación *enactivo* (Bruner), y su uso variado materializa el principio de *variabilidad perceptual* (Dienes), ayudando al discente a abstraer la estructura matemática común.

Para que este potencial se despliegue, el uso de recursos debe seguir una progresión didáctica intencionada (Bruner, 1966/1972, apartado 1.3.4) dentro de la Situación de Aprendizaje: *Fase Enactiva (Acción)*, *Fase Icónica (Imagen)* y *Fase Simbólica (Símbolo)*. El material no es, por tanto, un fin en sí mismo, sino un *andamio* (Vygotsky, 1978/2009) para construir el conocimiento abstracto, que debe ser retirado progresivamente.

3.2.3 Conclusiones sobre la Selección y Orquestación de Tareas y Recursos

De este análisis se desprende que la selección de tareas no es una cuestión de gusto personal, sino una decisión didáctica de primer orden. El futuro docente debe concebirse como un *arquitecto de experiencias de aprendizaje*, cuya principal herramienta es el diseño y secuenciación de tareas. Una práctica docente eficaz en aritmética se sustentará en una «dieta de tareas» rica y equilibrada, que promueva mayoritariamente una alta demanda cognitiva. Se proporciona un esquema “reducido” de los tipos de tarea que se puede encontrar, su función y el rol que induce en el discente en la Tabla 3.1.

Una Situación de Aprendizaje robusta, por lo general, se iniciará con una tarea de alta demanda cognitiva (un problema contextualizado o una investigación) que

actúe como motor. Para abordarla, se apoyará en tareas manipulativas que permitan construir los conceptos necesarios. A lo largo del proceso, se intercalarán tareas lúdicas y de comunicación para afianzar y compartir ideas y, finalmente, se podrán proponer tareas instrumentales para consolidar y agilizar los procedimientos aprendidos. La Situación de Aprendizaje, como veremos en la siguiente sección, va a erigirse como el marco organizador que da coherencia y propósito a esta orquestación de tareas y recursos.

Tabla 3.1: Tabla Sinóptica de Tipos de Tareas en Aritmética.

<i>Tipo de Tarea (Síntesis)</i>	<i>Objetivo Didáctico Principal</i>	<i>Rol del Alumno</i>	<i>Ejemplo</i>
<i>Ejercicio de Rutina</i>	Automatizar un procedimiento o hecho numérico.	Reproductor, ejecutor.	Realizar una ficha con 30 divisiones.
<i>Problema Contextualizado</i>	Aplicar un concepto para modelizar y resolver una situación.	Intérprete, estratega.	Calcular el cambio al hacer una compra.
<i>Tarea Manipulativa</i>	Construir un concepto abstracto a través de la acción.	Explorador, constructor.	Formar el nº 342 con bloques multibase.
<i>Investigación</i>	Explorar patrones, formular conjeturas y argumentar.	Creador, descubridor.	Investigar la suma de tres números consecutivos.

3.3 El Marco Teórico para el Diseño: La Teoría de Situaciones Didácticas

La legislación educativa actual, a través de la LOMLOE, nos insta a adoptar un enfoque competencial cuyo elemento central es la *Situación de Aprendizaje (SdA)*. Este enfoque no es una mera formalidad administrativa, sino que representa un cambio de paradigma con profundas raíces en la investigación en Didáctica de la Matemática, bebiendo directamente de la *Teoría de Situaciones Didácticas (TSD)* de Guy Brousseau (Brousseau, 2007).

La premisa fundamental de Brousseau es revolucionaria: el objetivo del docente no es «explicar» un saber para que el alumnado lo «aplique», sino *crear las condiciones para que el saber aparezca como la herramienta óptima y necesaria para resolver un problema*. El aprendizaje no se produce por escuchar una explicación, sino por la *adaptación* del estudiante a un problema que lo requiere. Este proceso, de clara inspiración piagetiana (Piaget, 1941/1967), se produce cuando el discente, al interactuar con el *medio*, encuentra un desequilibrio y necesita modificar sus esquemas de conocimiento para resolverlo.

3.3.1 La Anatomía de una Situación Didáctica

Para comprender este enfoque, es esencial diseccionar la estructura que propone Brousseau, dominando sus conceptos fundamentales:

- *Situación Didáctica*: Es el escenario global que el docente diseña intencionadamente para enseñar un conocimiento específico. Incluye al docente, al alumnado y al saber matemático en juego.

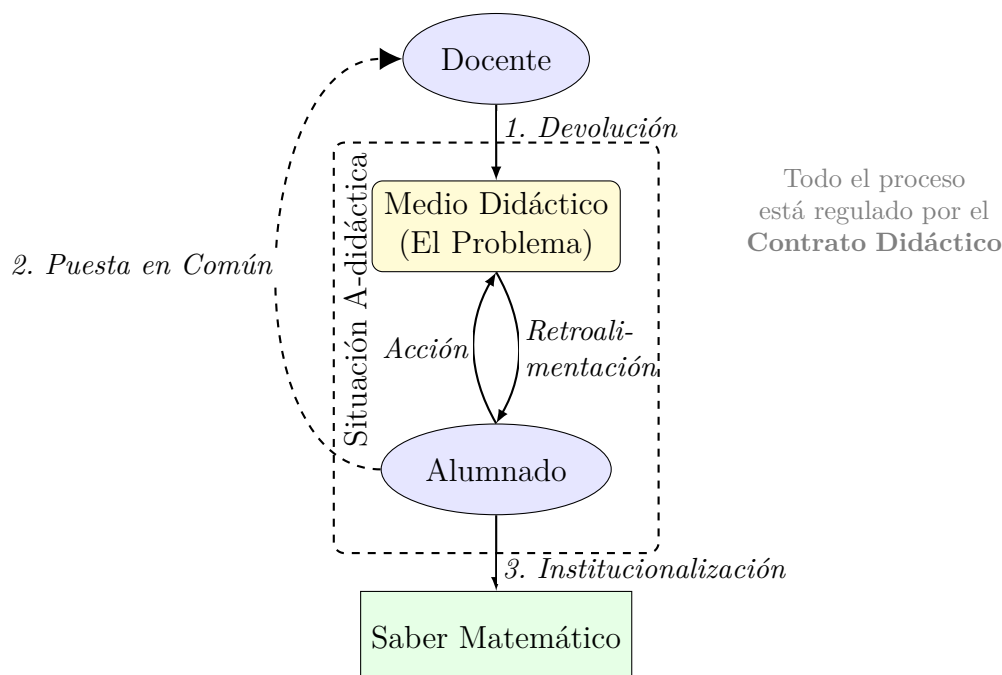


Figura 3.1: Representación dinámica de la Teoría de Situaciones Didácticas.

- *Contrato Didáctico*: Es el conjunto de reglas, expectativas y hábitos implícitos que rigen la relación entre docente y alumnado con respecto al saber. Por ejemplo, el alumnado espera que el docente plantee problemas que se pueden resolver con lo que acaban de estudiar, y el docente espera que el alumnado intente resolverlos. La TSD busca, de forma controlada, *romper* temporalmente este contrato para que el aprendizaje genuino ocurra.

Profundizando: La Devolución y la Ruptura del Contrato Didáctico

La idea de “romper el contrato” puede sonar disruptiva, pero es el corazón de la TSD. El contrato didáctico tradicional a menudo posiciona al docente como la única fuente de validación y al alumno como un receptor pasivo que espera la aprobación.

Cuando el docente, durante la fase de acción, se niega a responder a la pregunta «¿voy bien, profe?», está rompiendo deliberadamente la expectativa del alumnado (el contrato implícito) de que el profesor es quien valida. Esta ruptura controlada es lo que Brousseau denomina *devolución*: el acto de transferir la responsabilidad del problema al estudiante. Esta ruptura

fuerza al alumnado a buscar la validación en el propio *medio* (¿la torre se cae?, ¿la estrategia convence a mi compañero?), generando un aprendizaje autónomo y una construcción de significado mucho más robusta.

- **Medio Didáctico (o Milieu):** Es el entorno con el que el discente interactúa. Es todo aquello que actúa sobre el discente y sobre lo que el discente actúa. No es solo el material físico (fichas, bloques), sino también el problema mismo, las consignas, las restricciones y los conocimientos previos del alumnado. Su característica esencial es que debe ser capaz de proporcionar *retroalimentación* (sanciones) sin la intervención del docente. El propio medio “informa” al estudiante si su estrategia funciona o no (ej. si una torre se cae, si una respuesta no abre el candado, si una estrategia no convence a un compañero).
- **Situación A-didáctica:** Es el corazón del aprendizaje, el momento en que el alumnado se apropia del problema y lo intenta resolver interactuando con el medio, usando sus propios conocimientos y sin la intervención directa del docente. Se llama “a-didáctica” porque la intencionalidad de enseñar del docente se pone en pausa temporalmente para que el aprendizaje autónomo pueda ocurrir.

3.3.2 Tipología de las Situaciones A-didácticas

La situación a-didáctica no es un todo monolítico. Brousseau la descompone en diferentes tipos de situaciones, cada una con un objetivo cognitivo distinto, que pueden (y suelen) darse de forma secuenciada.

3.3.2.1 La Situación de Acción

Es el momento en que el discente se enfrenta al problema y explora diferentes estrategias de forma implícita, actuando directamente sobre el medio didáctico.

- **Objetivo:** Que el alumnado genere un modelo, una estrategia o un conjunto de decisiones para resolver el problema. El conocimiento aquí es *implícito*, está en el “saber hacer”.
- **Interacción Principal:** Discente $\longleftrightarrow$ Medio.
- **Función del Medio:** Proporcionar retroalimentación directa a las acciones del discente.

Ejemplo: Exploración de las descomposiciones del 10

Un docente de 1º de Primaria entrega a cada pareja cubos y una plantilla con dos cajas. La consigna es: “*El Mago siempre guarda sus 10 monedas en dos cofres. Encontrad todas las formas en que puede guardarlas*”. El alumnado, mediante el ensayo y error, mueve los cubos de una caja a otra. Si al contar el total obtienen 9 o 11, el propio medio (los cubos) les informa de que su acción fue incorrecta, obligándoles a ajustarla. El conocimiento sobre las descomposiciones del 10 se construye a través de esta manipulación.

3.3.2.2 La Situación de Formulación

En esta fase, se necesita comunicar las ideas, estrategias o modelos encontrados en la fase de acción.

- *Objetivo:* Hacer *explícito* el conocimiento implícito. El alumnado debe crear un lenguaje (oral, escrito, gráfico o simbólico) que sea lo suficientemente claro y preciso para que otro (un compañero o compañera, otro grupo) pueda comprender el mensaje y reconstruir la estrategia.
- *Interacción Principal:* Emisor (discente) $\longleftrightarrow$ Receptor (otro discente).
- *Función del Medio:* El receptor forma parte del medio. Si no entiende el mensaje o lo interpreta de forma errónea, el medio está “sancionando” la formulación, obligando al emisor a refinar su lenguaje.

Ejemplo: Comunicación de una descomposición numérica

Continuando con el ejemplo anterior, el docente pide a cada pareja que escriba un “mensaje secreto” para otro equipo, explicándole una de las combinaciones que encontraron, pero sin poder dibujarla. Un mensaje como “pon muchos en un lado y pocos en otro” sería ambiguo (una formulación pobre). Un mensaje como “pon 8 en la primera caja y 2 en la segunda” es preciso y eficaz. El éxito de la comunicación valida la calidad de la formulación.

3.3.2.3 La Situación de Validación

Aquí, el objetivo ya no es solo comunicar, sino convencer. Se trata de justificar por qué una afirmación o estrategia es verdadera y universalmente válida para el problema planteado.

- *Objetivo:* Establecer la *verdad* de un conocimiento. El alumnado debe generar pruebas y argumentos para defender su solución frente a las objeciones de sus compañeros, quienes a su vez intentan encontrar contraejemplos.
- *Interacción Principal:* Proponente (defiende la solución) $\longleftrightarrow$ Oponente (intenta refutarla).
- *Función del Medio:* Las argumentaciones de los compañeros forman el medio. Una refutación exitosa invalida la propuesta y obliga a revisarla.

Ejemplo: Justificación de una búsqueda sistemática

El docente reúne las soluciones y se genera una controversia: un grupo afirma que hay 5 combinaciones posibles para el 10, otro dice que hay 6. Se inicia un debate: ‘¿Cómo podemos estar seguros de que las hemos encontrado todas y de que no hemos repetido ninguna?’. Los equipos deben presentar su sistema (ej. “empezamos con 9 y 1, luego bajamos uno...”) y argumentar por qué es un método exhaustivo. La validación no la da el docente, sino la fuerza de los argumentos que convencen a la clase.

Clave Didáctica: La Retirada Estratégica en la Situación A-didáctica

Durante la situación a-didáctica, el éxito del aprendizaje depende de que el docente sepa “retirarse” para permitir que el medio actúe y el alumnado construya. La siguiente tabla resume qué se espera del docente en cada fase.

<i>Fase didáctica</i>	<i>El docente HACE...</i>	<i>El docente EVITA...</i>
<i>Acción</i>	Observa atentamente, registra estrategias diversas, escucha las conversaciones entre el alumnado.	Dar pistas, sugerir procedimientos, corregir errores, validar respuestas, responder «¿así está bien?».
<i>Formulación</i>	Facilita la comunicación entre equipos, pide aclaraciones («¿qué quieres decir con ‘el de arriba’?»), fomenta el uso de un lenguaje preciso.	Juzgar el contenido del mensaje, proporcionar el vocabulario “correcto” antes de que surja la necesidad, traducir por ellos.
<i>Validación</i>	Organiza el debate, modera los turnos de palabra, asegura que los argumentos se dirijan al problema y no a las personas.	Actuar como juez final, ser él mismo la fuente de la verdad, validar una solución porque es la que él esperaba.

Clave Didáctica: De la Teoría (TSD) a la Práctica (SdA)

Es fundamental comprender la relación entre la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) y la Situación de Aprendizaje (SdA):

- La *TSD de Brousseau* es el *motor teórico*. Nos proporciona la filosofía de cómo se produce el aprendizaje: a través de la adaptación del alumnado a un problema, en una interacción con un medio que le devuelve información sin la intervención constante del docente.
- La *SdA de la LOMLOE* es el *vehículo curricular*. Es la herramienta de planificación que nos permite diseñar y organizar ese medio, anticipar la devolución del problema y planificar la institucionalización final.

Cuando planificamos una SdA, no estamos simplemente rellenando un formulario administrativo; estamos siendo arquitectos de una auténtica situación didáctica. La SdA es el guion que escribimos para que la obra del aprendizaje, descrita por Brousseau, pueda tener lugar en nuestra aula.

3.3.3 El Rol del Docente: Devolución e Institucionalización

Aunque el docente se retira durante la situación a-didáctica, su papel es crucial en los momentos que la enmarcan.

- *Devolución*: Es el acto, al inicio de la secuencia, por el cual el docente logra que el alumnado acepte el problema como un desafío propio y se sienta responsable de encontrar una solución. Transfiere la responsabilidad del aprendizaje al estudiante, condición indispensable para que comience la situación a-didáctica.

Una buena devolución es clave para que el alumnado no espere pasivamente la solución.

- **Institucionalización:** Es la etapa final. Después de que el alumnado ha construido y validado una solución, el docente interviene para darle un estatus oficial al nuevo conocimiento. Conecta el saber “del aula” (las estrategias y el lenguaje creados por el alumnado) con el saber “oficial” (el conocimiento matemático universal, con sus nombres y notaciones convencionales). Por ejemplo: “*Esta idea de separar un número en dos partes se llama ‘descomposición aditiva’ y es una herramienta muy poderosa para sumar y restar.*”

Clave Didáctica: De Explicador a Arquitecto del Aprendizaje

La Teoría de Brousseau implica un cambio fundamental en el rol del docente y la naturaleza del conocimiento matemático en el aula:

<i>Enfoque Tradicional</i>	<i>Enfoque de Situaciones Didácticas</i>
El docente <i>explica</i> el saber.	El docente <i>diseña un medio</i> que hace necesario el saber.
El conocimiento es un objeto a <i>transmitir</i> .	El conocimiento es una herramienta para <i>resolver</i> .
El discente <i>recibe y aplica</i> la lección.	El discente <i>actúa y construye</i> la solución.
El error es un <i>fracaso</i> a corregir.	El error es <i>información</i> que el medio proporciona para reorientar la acción.

Adoptar este enfoque es pasar de ser un “explicador” a un “arquitecto de experiencias de aprendizaje”.

3.4 El Proceso de Diseño: Construyendo una Situación de Aprendizaje (SdA)

Clave Didáctica: De la Teoría a la Herramienta Curricular

La Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau (2007) nos proporciona la *filosofía pedagógica*: un aprendizaje basado en la adaptación del alumnado a un problema. La Situación de Aprendizaje (SdA), exigida por la LOMLOE y desarrollada en la normativa andaluza, es la *herramienta de planificación* que nos permite diseñar y estructurar esas experiencias en el aula. No son conceptos contrapuestos. La SdA es el instrumento curricular para llevar a la práctica la visión de la TSD. Al diseñar una SdA, estamos creando el *medio*, planificando la *devolución* y anticipando la *institucionalización*.

Conocidos los «ingredientes» metodológicos (tareas y recursos), el siguiente paso es aprender a combinarlos en una «receta» coherente y con propósito. Diseñar una Situación de Aprendizaje no es un acto espontáneo, sino un proceso reflexivo y estructurado que requiere anticipación, toma de decisiones y un profundo conocimiento tanto del contenido como del aprendiz.

Aunque la normativa andaluza no describe el proceso de diseño de una situación didáctica, sí define qué es y describe los elementos esenciales que deben formarla. Se va a proponer un proceso para desarrollar las situaciones de aprendizaje organizado como una progresión lógica. Pero es una propuesta particular en este manual y no está obligado por la ley, que refleja el qué debe incorporarse en la SdA pero deja libertad en el cómo. En su Artículo 7, la *ORDEN de 30 de mayo de 2023 de la Junta de Andalucía* establece los principios metodológicos que deben inspirar el diseño de las SdA, tales como:

- El alumnado como agente de su propio aprendizaje.
- El fomento de metodologías activas, participativas y cooperativas.
- La importancia de la contextualización y el respeto a las experiencias del alumnado.
- El enfoque en el desarrollo de la competencia matemática de forma integral.

Y también especifica los Elementos Mínimos, exigiendo que la planificación de las SdA conecte y estructure una serie de elementos curriculares, clarificando que las SdA son el instrumento para vincular:

- Los Objetivos de la etapa.
- Las Competencias Específicas del área.
- Los Criterios de Evaluación.
- Los Saberes Básicos.
- Las actividades que se llevarán a cabo.

3.4.1 Definición y Fases del Diseño de una Secuencia Didáctica

Antes de detallar las fases, es fundamental consolidar nuestra definición de SdA. Más allá de una simple actividad, una Situación de Aprendizaje es una *herramienta de planificación didáctica* que articula un conjunto de tareas en torno a un reto, con el fin de promover el desarrollo de competencias. La *ORDEN de 30 de mayo de 2023* subraya que estas situaciones deben ser «bien contextualizadas y respetuosas con las experiencias del alumnado».

Del Currículo al Aula: La Situación de Aprendizaje según la Normativa Andaluza

La *ORDEN de 30 de mayo de 2023*, en su Artículo 2, define la Situación de Aprendizaje como *aquellas situaciones y actividades que implican el despliegue por parte del alumnado de actuaciones asociadas a competencias específicas y que contribuyen a la adquisición y desarrollo de las mismas*. La normativa enfatiza que estas situaciones deben ser:

- *Contextualizadas y respetuosas* con las experiencias del alumnado.
- *Claras y precisas* en los objetivos que se persiguen.
- *Coherentes* en la conexión entre los saberes básicos, los criterios de evaluación y las competencias específicas.

Para asegurar esta coherencia y su potencial de aprendizaje, el diseño de una SdA

sigue un proceso cíclico y reflexivo, donde cada fase informa a las demás. La Figura 3.2 ilustra este proceso.

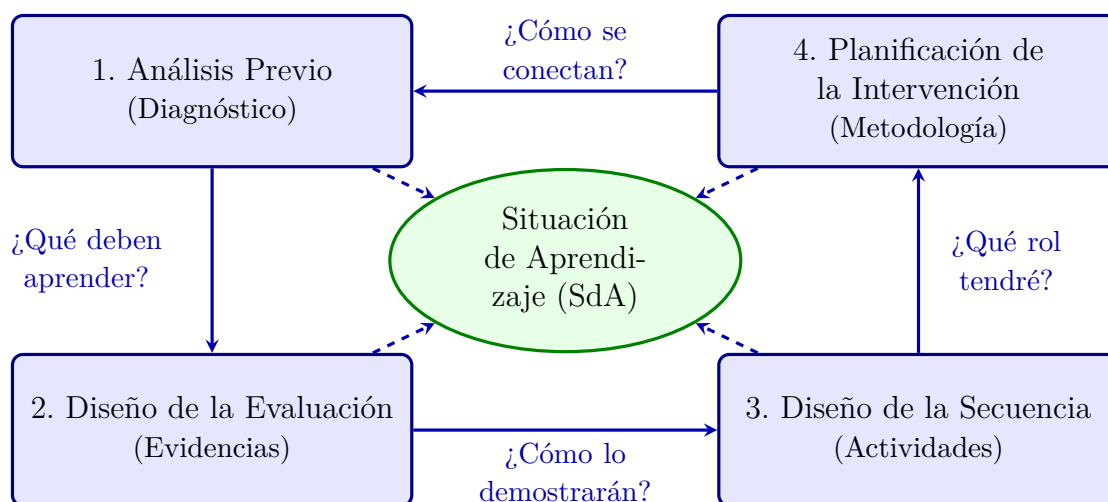


Figura 3.2: Proceso cíclico del diseño de una Situación de Aprendizaje.

Para asegurar esta coherencia y su potencial de aprendizaje, el diseño de una SdA puede seguir una serie de fases lógicas:

1. *Análisis Previo y Definición de Objetivos*: Es el punto de partida y el cimiento de toda la planificación. Consiste en responder a las preguntas: ¿Qué quiero que aprenda mi alumnado y por qué? Para ello, el docente debe realizar un triple análisis: del *Contenido Matemático*, del *Currículo* oficial y del *Alumnado* (sus conocimientos previos, dificultades e intereses). A partir de aquí, se definen los objetivos de aprendizaje de forma clara y evaluable.
2. *Selección del Contexto y Diseño del Reto*: Se elige la situación o problema que servirá como motor de la SdA. Debe ser motivador, relevante y estar estrechamente alineado con los objetivos. El reto debe ser lo suficientemente abierto para permitir múltiples vías de resolución, pero lo bastante acotado para ser abordable.
3. *Secuenciación de Tareas y Actividades*: Se planifica la secuencia de tareas que los discentes realizarán para superar el reto. Esta progresión debe ser lógica, avanzando de lo concreto a lo abstracto, y combinando de forma equilibrada los diferentes tipos de tareas (manipulativas, lúdicas, de discusión, etc.).
4. *Planificación de la Evaluación y la Institucionalización*: La evaluación debe ser continua y formativa. Se deben diseñar instrumentos (rúbricas, listas de cotejo) para recoger evidencias durante el proceso. Finalmente, se debe prever el momento de *institucionalización*, donde el docente recoge los aprendizajes construidos, los clarifica, los conecta con el lenguaje matemático formal y los consolida como un nuevo saber para toda la clase.

La *Teoría de Situaciones Didácticas (TSD)* de Brousseau (2007), como se expuso en el apartado 3.3, y las *fases de diseño de una Situación de Aprendizaje (SdA)* no son dos modelos paralelos, sino dos caras de la misma moneda. La TSD describe la

dinámica viva del aprendizaje en el aula, mientras que las fases de diseño de la SdA nos proporcionan el *proceso estructurado para planificar y crear las condiciones* que permitan que esa dinámica ocurra.

Dicho de otro modo, el docente, en su rol de planificador, sigue las fases de la SdA para construir una «arquitectura» pedagógica. El objetivo de esa arquitectura es que, una vez en el aula, el alumnado pueda vivir una auténtica Situación a-didáctica, construir su conocimiento y, finalmente, el docente pueda institucionalizarlo.

Es posible construir una alineación directa entre la planificación (lo que el docente hace *antes* de la clase) y la teoría (lo que se busca que suceda *durante* la clase), como se refleja en la Tabla 3.3

Tabla 3.3: Alineación entre el Diseño de la SdA y la Teoría de Situaciones de Brousseau.

Fase del Diseño de la SdA	Alineación con la TSD de Brousseau	Explicación de la Conexión
1. <i>Análisis Previo y Definición de Objetivos</i>	(Prerrequisito para el diseño)	Esta fase es el trabajo fundamental del docente <i>antes</i> de diseñar. En términos de Brousseau, es donde se analiza el saber, se identifican obstáculos y se conoce al alumnado para poder construir un <i>Medio Didáctico</i> que sea a la vez desafiante y resoluble.
2. <i>Selección del Contexto y Diseño del Reto</i>	Diseño del <i>Medio Didáctico</i> y preparación para la <i>Devolución</i>	Aquí se crea el corazón del <i>Medio</i> : el problema o reto. La elección de un contexto significativo y un desafío motivador es lo que hará posible la <i>Devolución</i> , es decir, que el alumnado acepte el problema como propio y se sienta responsable de resolverlo.
3. <i>Secuenciación de Tareas y Actividades</i>	Diseño de la <i>Situación A-didáctica</i> (Fases de Acción, Formulación y Validación)	Esta fase es la planificación detallada de lo que ocurrirá en la <i>Situación a-didáctica</i> . El docente diseña las tareas que permitirán al alumnado <i>actuar</i> sobre el medio, <i>formular</i> sus ideas y <i>validar</i> sus estrategias, sin una intervención directiva.
4. <i>Planificación de la Evaluación y la Institucionalización</i>	<i>Institucionalización</i> y Contrato Didáctico	Esta es la conexión más explícita. El docente planifica el momento y la forma en que realizará la <i>Institucionalización</i> : recogerá los descubrimientos del alumnado, les dará un estatus formal y los conectará con el saber matemático oficial. La evaluación formativa es la herramienta para observar la situación a-didáctica y guiar este proceso.

La planificación de una SdA es el acto de construir un guion para una obra de

teatro. La Teoría de Brousseau nos describe lo que sucede en el escenario cuando los actores (el alumnado) interactúan de verdad con el decorado y la trama (el medio didáctico). El docente es, a la vez, el *guionista*, el *director* y, al final, el *crítico* que ayuda a entender el significado de la obra (institucionalización).

3.4.2 El Error como Oportunidad y Guía para el Diseño

Un cambio de paradigma fundamental que acompaña a las SdA es la concepción del error. En la didáctica moderna, el error no es un fracaso a penalizar, sino una *valiosa fuente de información pedagógica*: una ventana a los procesos de pensamiento del discente y a sus concepciones alternativas (Borasi, 1987). El diseño de SdA debe tener en cuenta el error de forma proactiva:

- **Anticipación de Errores Comunes:** Al planificar una SdA sobre la resta con llevadas, el docente debe anticipar el error típico de «restar siempre el menor del mayor». Sabiendo esto, puede diseñar tareas iniciales con bloques multibase que hagan evidente la imposibilidad de esa acción y la necesidad de «desagrupar» la decena.

Profundizando: El Error como Guía para el Diseño Proactivo

Al planificar la SdA del «Gran Inventario de la Juguetería» (ver epígrafe 3.5.2) para el Segundo Ciclo, el docente debe anticipar un error común al introducir la división.

Error Anticipado: Ante el problema «Tenemos 27 coches sueltos y cajas de 5, ¿cuántas cajas llenamos?», es probable que algún discente, si se le enseña el algoritmo prematuramente, intente aplicar una lógica incorrecta basada en las cifras, como «2 entre 5 no cabe, cojo el 7. 7 entre 5 a 1 y me sobran 2». Este es un error conceptual grave, derivado de no comprender el significado de la operación.

Diseño Proactivo: Para anticipar y prevenir este error, el docente diseña la secuencia de tareas de forma que el algoritmo sea la *conclusión*, no el punto de partida. La Tarea 2 no es «divide 27 entre 5», sino «averigua cuántas cajas completas podemos llenar». Se proporciona material manipulativo (contadores) para que el alumnado *haga* el problema. Al formar grupos de 5, experimentan físicamente que pueden hacer 5 grupos y les sobran 2 coches. Esta acción concreta (enactiva) hace que el error algorítmico sea imposible de cometer y construye un significado profundo para la división como agrupamiento, antes de introducir cualquier simbología. El error, por tanto, no solo se prevé, sino que se utiliza como guía para diseñar una secuencia didáctica más robusta.

- **Diseño de Tareas que Generen Conflicto Cognitivo:** A veces, es útil plantear un problema que probablemente induzca a un error conceptual conocido para hacerlo emerger y poder tratarlo. Por ejemplo, al comparar fracciones, preguntar «¿Qué prefieres, $\frac{1}{4}$ de una tarta o $\frac{1}{2}$?». La respuesta impulsiva basada en los números naturales (« $\frac{1}{4}$ porque 4 es más grande que 2») genera una discrepancia que se convierte en el motor del aprendizaje.

- **Planificación Flexible para la Intervención:** La SdA no debe ser un guion rígido. El docente debe estar preparado para, a partir de un error observado en el aula, reconducir la actividad, proponer una nueva pregunta o introducir un material de apoyo que ayude a los discentes a reflexionar sobre su propio razonamiento.

Es importante, por tanto, tener en cuenta los posibles errores previsibles que puedan acontecer en el aula durante la implementación de una SdA y, en caso de ser posible, preparadas herramientas para subsanarlos. Por supuesto, la realidad siempre nos sorprende y siempre acontecerán situaciones inesperadas. Aquí también toma especial relevancia la capacidad del docente para adaptarse a nuevas situaciones y de que disponga de una bolsa de recursos lo suficientemente grande que permita responder a los imprevistos, ya sea por la aplicación o adaptación de sus recursos disponibles.

3.4.3 Atención a la Diversidad: El Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA)

Una planificación eficaz debe ser inclusiva desde su concepción. El *Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA)* es el marco que la normativa andaluza establece para este fin. Lejos de ser un conjunto de adaptaciones puntuales, el DUA es una filosofía de diseño que busca eliminar barreras creando entornos de aprendizaje flexibles desde el inicio. Se articula en torno a tres principios basados en la neurociencia del aprendizaje.

3.4.3.1 Principio I: Proporcionar Múltiples Formas de Implicación

Este principio se centra en el «*porqué*» del aprendizaje: las redes afectivas del cerebro. Busca generar y mantener la motivación y el compromiso de los y las estudiantes, ya que sin un motor afectivo, el aprendizaje significativo es casi imposible. Para ello, el DUA nos insta a ofrecer diversas opciones para:

- **Captar el interés:** La forma más eficaz de implicar al alumnado es conectar el aprendizaje con sus intereses y su realidad. En nuestra planificación, esto se traduce en la búsqueda de un «*Contexto*» relevante y un «*Reto o Desafío*» auténtico que les interpele directamente. Permitir que elijan sobre algún aspecto de la tarea (ej. el tema de un problema, el material a usar) es también una poderosa herramienta.
- **Mantener el esfuerzo y la persistencia:** Los desafíos matemáticos requieren resiliencia. Debemos diseñar experiencias con metas claras, fomentar la *colaboración* en distintos «*Agrupamientos*» y, crucialmente, crear un clima de aula donde el error se gestione como una valiosa oportunidad de aprendizaje.
- **Fomentar la autorregulación:** Ayudar al alumnado a ser consciente de su propio proceso de aprendizaje es clave. Esto se logra ofreciendo momentos explícitos para la *reflexión* y facilitando herramientas como rúbricas sencillas o listas de cotejo que les permitan autoevaluarse.

3.4.3.2 Principio II: Proporcionar Múltiples Formas de Representación

Este principio aborda el «*qué*» del aprendizaje: las redes de reconocimiento del cerebro. Dado que no hay dos alumnos que perciban y comprendan la información de la misma manera, es fundamental presentar los conceptos y contenidos en múltiples formatos. En la enseñanza de la aritmética, esto implica:

- *Variar las opciones para la percepción:* Debemos superar la dependencia del texto escrito. Al planificar nuestros '*Recursos y Materiales*', es vital incluir apoyos visuales (diagramas, vídeos), auditivos y, sobre todo, *manipulativos* (bloques multibase, regletas, etc.).
- *Clarificar el lenguaje y los símbolos:* El lenguaje matemático es una barrera frecuente. Es necesario aclarar explícitamente el *vocabulario* clave y, fundamentalmente, conectar los *símbolos* abstractos (+, −, ×) con las acciones y conceptos que representan (juntar, quitar, repetir), siguiendo la progresión enactiva-icónica-simbólica que planificamos en la '*Secuencia de Tareas*'.
- *Facilitar la comprensión:* Para que el nuevo conocimiento se asiente, debemos ayudar al alumnado a procesarlo. Esto se consigue activando sus *conocimientos previos* al inicio de la SdA, utilizando organizadores gráficos para estructurar la información y destacando patrones y las ideas principales de los conceptos aritméticos.

3.4.3.3 Principio III: Proporcionar Múltiples Formas de Acción y Expresión

Este principio se enfoca en el «*cómo*» *del aprendizaje*: las redes estratégicas del cerebro. El alumnado necesita diversas vías para interactuar con el material y para demostrar lo que ha aprendido. Un enfoque único para la acción y la evaluación creará barreras para muchos. Por ello, debemos ofrecer:

- *Variar las opciones para la acción física:* La aritmética en Primaria debe poder «tocarse». La planificación debe incluir oportunidades claras para usar *materiales manipulativos* y para que el alumnado se mueva por el aula o el patio al realizar las tareas.
- *Variar las opciones de expresión y comunicación:* La forma en que pedimos al alumnado que demuestre su aprendizaje debe ser flexible. El diseño de un '*Producto Final*' versátil (permitiendo dibujar, escribir, hablar, construir, etc.) y la facilitación de herramientas de apoyo (como plantillas de trabajo o calculadoras para la comprobación) son estrategias DUA esenciales.
- *Apoyar las funciones ejecutivas:* Resolver problemas complejos requiere planificación y estrategia. El docente puede andamiar este proceso ayudando al alumnado a *planificar los pasos* a seguir, ofreciendo recordatorios de la meta final o proporcionando listas de verificación (*checklists*) que guíen su trabajo de forma autónoma.

3.4.4 Herramienta para la Planificación: Plantilla de Diseño de SdA

Diseñar una Situación de Aprendizaje (SdA) eficaz es un acto complejo que requiere integrar múltiples elementos curriculares y pedagógicos. Para facilitar y sistematizar este proceso, y alinearlos con las directrices de la administración educativa andalza, se propone la plantilla de la Tabla 3.4 como una herramienta práctica para organizar y estructurar la planificación en el área de aritmética.

El diseño de esta plantilla no es arbitrario, sino que responde a una triple necesidad:

Tabla 3.4: Plantilla de Diseño de Situación de Aprendizaje (SdA)

<i>Elemento de Planificación</i>	<i>Descripción y Preguntas Guía</i>
Título	Un nombre motivador que resuma la esencia de la situación.
Justificación y Contexto	Descripción del escenario de partida y su relevancia. <i>¿Por qué es importante esta SdA para mi alumnado? ¿Qué conecta con sus intereses o con otras áreas?</i>
Reto o Desafío	¿Cuál es la pregunta o problema principal que deben resolver?
Producto Final	¿Qué producto tangible o intangible crearán para demostrar su aprendizaje? <i>(Ej: un informe, un mural, un podcast, una maqueta, una dramatización...)</i>
Concreción Curricular	<i>Competencias Específicas (Matemáticas):</i> ¿Qué competencias del área se desarrollan? <i>Criterios de Evaluación:</i> ¿Qué criterios del currículo andaluz me permitirán valorar el progreso? <i>Saberes Básicos:</i> ¿Qué contenidos del Sentido Numérico (y otros) son necesarios o se van a construir?
Secuencia de Tareas	Descripción de las actividades (1, 2, 3...) que realizará el alumnado, detallando el tipo de tarea (demanda cognitiva), agrupamiento, y qué se espera en cada paso.
Recursos y Materiales	Listado de materiales manipulativos, digitales, fichas, etc., necesarios. <i>¿He previsto variedad de recursos para las distintas tareas y alumnado?</i>
Atención a la Diversidad (Diseño Universal para el Aprendizaje - DUA)	<i>I. Múltiples formas de IMPLICACIÓN (el «porqué»):</i> ▪ <i>Captar interés:</i> Conectar con la vida real, permitir elecciones. ▪ <i>Mantener esfuerzo:</i> Metas claras, fomentar colaboración, ver el error como oportunidad. ▪ <i>Autorregulación:</i> Ofrecer pautas de autoevaluación y momentos de reflexión. <i>II. Múltiples formas de REPRESENTACIÓN (el «qué»):</i> ▪ <i>Percepción:</i> Usar apoyos visuales, auditivos y manipulativos. ▪ <i>Lenguaje y símbolos:</i> Aclarar vocabulario, conectar símbolos con acciones. ▪ <i>Comprensión:</i> Activar conocimientos previos, usar organizadores gráficos, destacar patrones. <i>III. Múltiples formas de ACCIÓN Y EXPRESIÓN (el «cómo»):</i> ▪ <i>Acción física:</i> Fomentar el uso de materiales manipulativos y el movimiento. ▪ <i>Expresión y comunicación:</i> Flexibilizar el producto final (dibujar, hablar, construir), facilitar herramientas de apoyo. ▪ <i>Funciones ejecutivas:</i> Ayudar a planificar los pasos, ofrecer listas de verificación (<i>checklists</i>).
Evaluación del Aprendizaje	¿Qué instrumentos y técnicas se usarán y cuándo para valorar el progreso? <i>(Ej.: Rúbrica para el producto final, lista de cotejo para la observación, diario de clase, portfolio...)</i>

1. *Dar Cumplimiento a la Normativa*: La estructura recoge y organiza los elementos curriculares que la *ORDEN de 30 de mayo de 2023* exige conectar en toda propuesta pedagógica (Competencias Específicas, Criterios de Evaluación, Saberes Básicos).
2. *Seguir un Modelo Pedagógico Sólido*: La secuencia de los apartados sigue una lógica inspirada en el Diseño Inverso (Wiggins & McTighe, 2005), comenzando por la definición de los objetivos de aprendizaje y las evidencias de evaluación antes de planificar las actividades concretas. Esto asegura que la enseñanza sea intencional y esté enfocada en la comprensión profunda.
3. *Integrar el Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA)*: La normativa andaluza establece el DUA como el modelo para una atención a la diversidad inclusiva y eficaz. La plantilla está deliberadamente estructurada para que el docente, al completarla, esté aplicando de forma natural los principios del DUA. Su diseño obliga a reflexionar sobre cómo ofrecer múltiples formas de implicación, representación y acción.

Esperamos que esta plantilla sea una herramienta de diseño pedagógico que guíe al futuro docente para crear Situaciones de Aprendizaje que sean, por diseño, *coherentes, significativas e inclusivas*, y que os facilite el trabajo.

3.5 Puesta en Práctica: Ejemplos de Situaciones de Aprendizaje por Ciclos

Para ilustrar cómo los principios y herramientas descritos se articulan en la práctica, esta sección presenta tres ejemplos de Situaciones de Aprendizaje, uno para cada ciclo de la Educación Primaria. Cada ejemplo se estructura siguiendo la plantilla de diseño propuesta, mostrando una progresión en la complejidad de los saberes aritméticos y en la autonomía requerida del alumnado.

Antes de abordarlos, es importante tener en cuenta las siguientes claves de lectura:

- *Foco en el Proceso, no en el Producto*: Nuestro objetivo principal es mostrar el *proceso de diseño* de una SdA. Por ello, se ha priorizado la justificación de las decisiones pedagógicas sobre el detalle exhaustivo de cada apartado.
- *Síntesis Deliberada*: Para limitar la extensión y mantener la claridad, los análisis de alumnado, currículo y contenido, así como las descripciones de las tareas y los instrumentos de evaluación, se presentan de forma esquemática. Son los “apuntes” del arquitecto, no el plano final detallado.
- *Modelos Flexibles y Adaptables*: Lejos de ser plantillas rígidas, deben considerarse puntos de partida. Le animamos a tomar estos ejemplos como un andamiaje sobre el que construir, adaptar y, en definitiva, desarrollar su propio estilo como diseñador de experiencias de aprendizaje matemático.

3.5.1 Ejemplo para el Primer Ciclo (1º y 2º de Primaria): “El Misterio de las Cajas del Mago”

Esta sección detalla el proceso que un docente podría seguir para diseñar la SdA «El Misterio de las Cajas del Mago». El objetivo es mostrar cómo las decisiones de planificación se fundamentan en las teorías y marcos curriculares expuestos en este

manual, transformando los requisitos normativos en una experiencia de aprendizaje coherente, significativa e inclusiva.

3.5.1.1 Fases de diseño

Fase 1: Análisis Previo y Definición de Objetivos El punto de partida es un análisis riguroso de nuestro contexto de enseñanza.

- **Análisis del Alumnado:** El alumnado del Primer Ciclo, según Piaget (Capítulo 1), se encuentra en la transición al *período de las operaciones concretas*. Necesita imperativamente de la manipulación para construir el significado. El concepto de *conservación de la cantidad* es clave aquí: deben interiorizar que un total (ej. 10) sigue siendo el mismo aunque se separe en dos partes (ej. 7 y 3). Esta SdA trabaja directamente sobre esa idea.
- **Análisis del Currículo (ORDEN de 30 de mayo de 2023):** Para el Primer Ciclo, los saberes clave son la base del pensamiento aditivo. Identificamos:
 - **MAT.1.A.2.2:** Que menciona explícitamente la «composición, descomposición y recomposición» de números. Este es el corazón de nuestra SdA.
 - **MAT.1.A.3.2:** Que pide que la suma y la resta se trabajen «con flexibilidad y sentido». Explorar las descomposiciones del 10 es la base de todo el cálculo mental flexible posterior.
 - **MAT.1.A.4.3:** Que establece la necesidad de trabajar las «Relaciones entre la suma y la resta». Nuestra SdA aborda esto de la manera más fundamental: entendiendo la resta como la búsqueda de una parte desconocida en una suma.
- **Análisis del Contenido Matemático:** El concepto matemático central es la *descomposición aditiva de un número* (los “amigos del 10” o de cualquier otro número) y el *modelo parte-todo*. Este modelo (Todo = Parte 1 + Parte 2) es la estructura conceptual que unifica la suma (conocer las partes, buscar el todo) y la resta (conocer el todo y una parte, buscar la otra parte).
- **Definición de Objetivos:** El objetivo principal es que el alumnado explore y represente sistemáticamente todas las descomposiciones aditivas de un número (el 10 como base inicial), comprendiendo la relación parte-todo y sentando las bases para la comprensión de la resta como operación inversa a la suma.

Fase 2: Selección del Contexto, Diseño del Reto y Producto Final

- **Contexto:** Un contexto de *magia y misterio* es altamente motivador para este ciclo (Principio I del DUA: Implicación). La figura de un mago o maga que deja un acertijo crea un hilo narrativo que da sentido a la actividad.
- **Reto:** El reto «¡Descubrid todos los secretos del mago! ¿De cuántas formas diferentes pueden estar escondidas las 10 joyas en las dos cajas?» convierte una tarea de práctica en una de investigación. Es una *tarea de alta demanda cognitiva*, ya que requiere una búsqueda sistemática y no una simple respuesta.
- **Producto Final:** La creación de un «Libro de los Secretos del Mago» es un producto final creativo y que permite múltiples formas de expresión (Principio

III del DUA). No es una ficha, es un objeto con significado que recoge los descubrimientos del alumnado.

Fase 3: Secuenciación de Tareas y Actividades La secuencia sigue la progresión de Bruner (Apartado 1.3.4): de la acción a la abstracción.

1. *Tarea 1 (Manipulativa - Modo Enactivo)*: La SdA se inicia con la manipulación. Con un “cofre” (caja) y 10 “joyas” (contadores), el alumnado explora físicamente el problema. Esta fase de acción les permite construir las relaciones parte-todo de forma concreta.
2. *Tarea 2 (Gráfica - Modo Icónico)*: Para registrar sus hallazgos, se les proporciona una plantilla con dos “cajas” dibujadas. Deben dibujar las joyas en cada caja. Este paso es vital para transitar de la acción física a la representación mental.
3. *Tarea 3 (Simbólica)*: Es el puente final. Debajo de cada dibujo, se les guía para que escriban la *suma* correspondiente (ej. $7 + 3 = 10$). Aquí, el símbolo ‘+’ adquiere un significado construido, no impuesto.
4. *Tarea 4 (Comunicación e Institucionalización)*: Al crear el libro y poner en común los “secretos”, la clase entera construye el conocimiento completo. El docente *institucionaliza* (Brousseau, 2007, apartado 3.3) las ideas clave: “Hemos descubierto que el 10 se puede formar de muchas maneras” y “Si sabemos el total y una de las partes, ¡podemos adivinar la otra parte!”. Se ha sentado la base conceptual de la resta.

Fase 4: Planificación de la Evaluación y Atención a la Diversidad (DUA)

- *Evaluación*: La evaluación será eminentemente formativa, a través de la *observación directa* (con una lista de cotejo) para ver si el alumnado es sistemático en su búsqueda. El “Libro de los Secretos” servirá como evidencia de aprendizaje (evaluación sumativa del proceso).
- *Atención a la Diversidad (DUA)*: La SdA está diseñada desde el DUA. El contexto de misterio (*Implicación*), la transición manipulativo-gráfico-simbólico (*Representación*) y la flexibilidad del producto final (*Acción y Expresión*) atienden a los tres principios. Se puede adaptar fácilmente: para alumnado con dificultades, se puede reducir el número total a 5 o 6. Para alumnado con mayor capacidad, se puede proponer el mismo reto con un número mayor (ej. 12) o incluso con tres cajas.

3.5.1.2 Especificación y diseño de la propuesta

- *Título*: El Misterio de las Cajas del Mago
- *Justificación y Contexto*: Esta SdA se enmarca en un contexto narrativo de misterio, altamente motivador para el *Primer Ciclo*. Su objetivo es que el alumnado explore de forma manipulativa y sistemática la *composición y descomposición aditiva de los números* (especialmente el 10), un saber básico fundamental para el desarrollo del sentido numérico. La SdA construye el modelo parte-todo, sentando las bases para una comprensión profunda de la relación inversa entre la suma y la resta.
- *Reto o Desafío*: Un mago ha dejado en clase un cofre que contiene 10 joyas y

dos cajas vacías. Siempre esconde las 10 joyas repartidas entre las dos cajas. El reto para la clase es: «¡Descubrid todos los secretos del mago! ¿De cuántas formas diferentes pueden estar escondidas las 10 joyas en las dos cajas?»

- *Producto Final:* Creación de un «Libro de los Secretos del Mago». Por parejas, elaborarán una o varias páginas del libro. Cada página mostrará una de las combinaciones secretas mediante un dibujo de las dos cajas con sus joyas y la suma correspondiente (ej. $8 + 2 = 10$). Al final, se juntarán todas las páginas para crear el libro completo de la clase.
- *Concreción Curricular:* A continuación se presenta la relación entre las competencias específicas del área, los criterios de evaluación y los saberes básicos implicados para el *Primer Ciclo*, extraídos de la *ORDEN de 30 de mayo de 2023*.

Competencia Específica	Criterio de Evaluación	Saberes Básicos
1 Interpretar situaciones de la vida cotidiana proporcionando una representación matemática de las mismas mediante conceptos, herramientas y estrategias para analizar la información más relevante.	1.1.b Comprender las preguntas planteadas a través de diferentes estrategias o herramientas, entendiendo mensajes verbales, escritos y visuales.	MAT.1.A.3.4 Desarrollo de estrategias personales para resolver problemas, investigaciones y pequeños proyectos de trabajo.
	1.2.b Proporcionar ejemplos de representaciones de situaciones problematizadas sencillas, con recursos manipulativos y gráficos que ayuden en la resolución de un problema de la vida cotidiana, individualmente y cooperando...	MAT.1.A.3.2 Suma y resta de números naturales resueltas con flexibilidad y sentido: utilidad en situaciones contextualizadas, estrategias y herramientas de resolución y propiedades, mediante el uso de materiales y recurso...
2 Resolver situaciones problematizadas, aplicando diferentes técnicas, estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder, obtener soluciones y asegurar su validez desde un punto de vista fo...	2.1.b Emplear algunas estrategias adecuadas en la resolución de problemas, mostrando interés e implicación en la resolución.	MAT.1.A.3.4 Desarrollo de estrategias personales para resolver problemas, investigaciones y pequeños proyectos de trabajo.
	2.2.b Obtener posibles soluciones a problemas, de forma guiada, aplicando estrategias básicas de resolución, manipulando materiales en un proceso de ensayo y error.	MAT.1.A.1.2 Estrategias variadas de conteo y recuento sistemático en situaciones de la vida cotidiana en cantidades hasta el 999.
	2.3.b Describir verbalmente la idoneidad de las soluciones de un problema a partir de las preguntas previamente planteadas, argumentando la respuesta.	MAT.1.A.4.4 Explicación de la solución de un problema y su relación con la pregunta planteada.

3. Diseño de Propuestas Didácticas en Aritmética

3 Explorar, formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de tipo matemático en situaciones basadas en la vida cotidiana, de forma guiada, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación para co...

3.2.b Dar ejemplos de problemas a partir de situaciones cotidianas que se resuelven matemáticamente, planteando preguntas y exponiendo ideas sobre situaciones matemáticas.

MAT.1.A.1.1 Significado y utilidad de los números naturales en la vida cotidiana.

MAT.1.A.4.3 Relaciones entre la suma y la resta: aplicación en contextos cotidianos y en la resolución de problemas.

4 Utilizar el pensamiento computacional, organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, generalizando e interpretando, modificando y creando algoritmos de forma guiada, para modelizar y automatizar si...

4.2.b Emplear herramientas tecnológicas adecuadas, de forma guiada, en el proceso de resolución de problemas.

MAT.1.A.3.2 Suma y resta de números naturales resueltas con flexibilidad y sentido: utilidad en situaciones contextualizadas, estrategias y herramientas de resolución y propiedades, mediante el uso de materiales y recurso...

MAT.1.A.3.4 Desarrollo de estrategias personales para resolver problemas, investigaciones y pequeños proyectos de trabajo.

6 Comunicar y representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos y resultados matemáticos, utilizando el lenguaje oral, escrito, gráfico, multimodal y la terminología matemática apropiada, para dar si...

6.2.b Explicar, de forma verbal o gráfica, ideas y procesos matemáticos sencillos, los pasos seguidos en la resolución de un problema o los resultados matemáticos, comenzando a utilizar distintos lenguajes a través de med...

MAT.1.A.2.2 Sistema de numeración decimal: lectura, escritura, grafía, representación (incluida la recta numérica), el valor posicional, composición, descomposición y recomposición, comparación y ordenación de números nat...

MAT.1.A.2.3 Representación de una misma cantidad de distintas formas (manipulativa, gráfica o numérica) y estrategias de elección de la representación adecuada para cada situación o problema.

7 Desarrollar destrezas personales que ayuden a identificar y gestionar emociones al enfrentarse a retos matemáticos, fomentando la confianza en las propias posibilidades, aceptando el error como parte del proceso de apre...

7.1.b Reconocer las emociones básicas propias al abordar retos matemáticos, pidiendo ayuda solo cuando sea necesario, siendo perseverante, manifestando y controlando sus emociones.

MAT.1.F.1.1 Gestión emocional: estrategias de identificación y expresión de las propias emociones ante las matemáticas. Curiosidad e iniciativa en el aprendizaje de las matemáticas.

MAT.1.F.1.2 Superación frente a la frustración, los retos, dificultades y errores propios del proceso de aprendizaje matemático. Autoconfianza en las propias posibilidades.

8 Desarrollar destrezas sociales, reconociendo y respetando las emociones, las experiencias de los demás y el valor de la diversidad y participando activamente en equipos de trabajo heterogéneos con roles asignados, para ...

8.1.b Participar respetuosamente en el trabajo en equipo, estableciendo relaciones saludables basadas en el respeto, la igualdad y la resolución pacífica de conflictos, mostrando autoconfianza y viviendo situaciones de ig...

MAT.1.F.1.3 Desarrollo de estrategias personales para resolver problemas, investigaciones y pequeños proyectos de trabajo cooperativo.

MAT.1.F.2.2 Participación activa en el trabajo en equipo: interacción positiva, colaboración activa y respeto por el trabajo de los demás.

8.2.b Aceptar la tarea y rol asignado en el trabajo en equipo, cumpliendo con las responsabilidades individuales, contribuyendo a la consecución de los objetivos del grupo y estableciendo relaciones saludables.

MAT.1.F.2.4 Iniciativa, participación respetuosa y colaboración activa en el trabajo cooperativo para investigar y resolver problemas.

■ *Secuencia de Tareas:*

1. *Tarea de Exploración (Manipulativa):* Por parejas, cada equipo recibe su “cofre” (una caja con 10 contadores) y dos “cajas secretas” (cajas más pequeñas o espacios dibujados). El docente modela el reto una vez: «Si en esta caja hay 6 joyas, ¿cuántas habrá en la otra para que en total siga habiendo 10?». Luego, las parejas exploran libremente para encontrar otras combinaciones.
2. *Tarea de Registro (Gráfica):* Se entrega a cada pareja una plantilla de página para el “Libro de los Secretos”. Por cada combinación que descubren, deben dibujarla en la plantilla.
3. *Tarea de Simbolización (Conexión):* Junto a cada dibujo, el docente les guía para que escriban la *suma* que representa esa descomposición (ej. ‘ $6 + 4 = 10$ ’).
4. *Tarea de Puesta en Común (Comunicación):* Cada pareja aporta una de sus páginas al libro de la clase. Se leen todos los “secretos” en voz alta para comprobar que están todos y no se repite ninguno. El docente institucionaliza la idea de que «si sabes el total y una parte, puedes averiguar la otra».

■ *Recursos y Materiales:* Cajas o bolsas, 10 contadores por pareja (fichas, gemas de colores, bloques...), plantillas para el “Libro de los Secretos”, lápices de colores, pizarra.

■ *Atención a la Diversidad (DUA):*

• I. Múltiples formas de IMPLICACIÓN (el «porqué»):

- *Captar interés:* Contexto narrativo de magia y misterio. Objetivo claro y motivador (crear un libro).
- *Mantener esfuerzo:* Trabajo en parejas para la colaboración. Tarea exploratoria de baja presión.

- *Autorregulación*: La propia tarea de encontrar “todos” los secretos fomenta la auto-revisión y la búsqueda sistemática.
- *II. Múltiples formas de REPRESENTACIÓN (el «qué»)*:
 - *Percepción*: Se usan objetos concretos (contadores) y representaciones visuales (dibujos).
 - *Lenguaje y símbolos*: Se conecta la acción de repartir con el dibujo y con el símbolo de la suma.
 - *Comprensión*: Se trabaja la relación parte-todo de forma explícita y manipulativa.
- *III. Múltiples formas de ACCIÓN Y EXPRESIÓN (el «cómo»)*:
 - *Acción física*: La actividad es fundamentalmente manipulativa.
 - *Expresión y comunicación*: El alumnado puede expresar sus descubrimientos manipulando, dibujando, escribiendo números o hablando. El producto final es creativo.
 - *Funciones ejecutivas*: Para alumnado con *dificultades*, se puede reducir el total a 5 joyas. Para alumnado con *mayor capacidad*, se puede introducir una tercera caja, aumentando la complejidad de la descomposición.
- *Evaluación del Aprendizaje*: Instrumentos y Técnicas:
 - *Observación directa* (con lista de cotejo) durante el trabajo en parejas, enfocándose en: ¿El alumnado mantiene la conservación del número 10? ¿Utiliza alguna estrategia sistemática para encontrar las combinaciones? (Evaluación formativa).
 - *Análisis de las páginas* del “Libro de los Secretos” para evaluar la correcta representación gráfica y simbólica de las descomposiciones. (Evaluación sumativa).

3.5.2 Ejemplo para el Segundo Ciclo (3º y 4º de Primaria): “El Gran Inventario de la Juguetería”

Esta sección detalla el proceso reflexivo para planificar la SdA «El Gran Inventario de la Juguetería». El objetivo es que nuestro alumnado del Grado de Magisterio comprenda cómo, a partir de un análisis riguroso del currículo del Segundo Ciclo, se puede diseñar una experiencia de aprendizaje que construya el sentido de la multiplicación y la división de forma coherente, competencial e inclusiva.

3.5.2.1 Fases de diseño

Fase 1: Análisis Previo y Definición de Objetivos El diseño comienza con una reflexión profunda sobre nuestro punto de partida.

- *Análisis del Alumnado*: En el Segundo Ciclo, el alumnado ha consolidado el pensamiento aditivo y está preparado para dar el salto al pensamiento multiplicativo. Según las teorías de aprendizaje (Capítulo 1), este salto debe ser un *aprendizaje significativo*, conectando la nueva operación (multiplicación) con un conocimiento ya asentado (la suma). Su pensamiento, aunque lógico, sigue

necesitando de la manipulación y la visualización para construir nuevos conceptos.

- **Análisis del Currículo (ORDEN de 30 de mayo de 2023):** La normativa para el Segundo Ciclo es explícita en este punto. Los saberes clave son:
 - **MAT.2.A.3.3:** Indica la «Construcción de las tablas de multiplicar *apoyándose en número de veces, suma repetida o disposición en cuadrículas*». Este es el corazón de la primera parte de nuestra SdA.
 - **MAT.2.A.3.4:** Menciona la resolución de problemas de multiplicación y división «con flexibilidad y sentido». Nuestra SdA aborda ambos significados: la multiplicación como suma repetida y la división como agrupamiento (cuántas veces cabe un número en otro).
- **Análisis del Contenido Matemático:** Los conceptos clave son: el *significado de la multiplicación como suma de sumandos iguales* y el *significado de la división-agrupamiento (o cuotitiva)* como la búsqueda del número de grupos que se pueden formar. Este segundo significado se conecta directamente con las restas sucesivas o las sumas sucesivas (aproximaciones).
- **Definición de Objetivos:** El objetivo es que el alumnado, en un contexto de inventario, utilice la suma repetida para calcular totales y la represente con la multiplicación, y que resuelva problemas de agrupamiento mediante estrategias de suma o resta repetida como paso previo a la división formal.

Fase 2: Selección del Contexto, Diseño del Reto y Producto Final

- **Contexto:** Una *juguetería* es un escenario universalmente motivador para estas edades. La idea de “hacer un inventario” y “organizar el almacén” proporciona un propósito claro y funcional a las operaciones matemáticas.
- **Reto:** Se diseña un reto en dos partes que aborda directamente los dos objetivos. *Parte 1 (Multiplicación):* «¿Cuántos juguetes tenemos de cada tipo si vienen en cajas iguales?». *Parte 2 (División):* «Si nos llegan juguetes sueltos, ¿cuántas cajas completas podemos llenar?». Este diseño convierte los algoritmos en herramientas necesarias para resolver un problema de logística real.
- **Producto Final:** La elaboración de una “*Hoja de Inventario del Almacén*” es un producto final que requiere registrar información de forma organizada y sistemática. Es una tarea de desempeño que exige aplicar los conocimientos y comunicarlos por escrito.

Fase 3: Secuenciación de Tareas y Actividades La secuencia está diseñada para construir primero el concepto de multiplicación y luego usarlo para introducir la división.

1. **Actividad 1 (De la Suma a la Multiplicación):** Se parte de lo concreto (dibujos de cajas con juguetes). El alumnado primero resuelve el total sumando (ej. $6+6+6+6$). El docente entonces *institucionaliza* la multiplicación como una forma más rápida y eficaz de escribir esa suma repetida (4×6). Esta tarea es de Nivel 3 (Procedimiento con Conexiones), ya que conecta el nuevo procedimiento (multiplicar) con un concepto ya conocido (sumar).
2. **Actividad 2 (De la Resta/Suma a la División):** Se plantea el problema inverso:

tenemos 27 coches sueltos y cajas de 5. El reto no se presenta como «divide 27 entre 5», sino como «¿cuántas cajas llenamos?». Se deja al alumnado explorar estrategias informales, que serán mayoritariamente aditivas ($5 + 5 = 10$, $+5 = 15...$) o sustractivas ($27 - 5 = 22$, $-5 = 17...$).

3. *Actividad 3 (Comunicación y Registro)*: En la puesta en común, se comparan las estrategias de la Actividad 2. El docente guía la discusión para mostrar que todas esas sumas o restas son una forma de ver «cuántas veces cabe el 5 en el 27». Se formaliza el resultado (5 cajas y sobran 2) y se registra en la Hoja de Inventario.

Fase 4: Planificación de la Evaluación y Atención a la Diversidad (DUA)

- *Evaluación*: La “Hoja de Inventario” es el principal instrumento de evaluación sumativa. La observación del docente durante el trabajo en parejas, fijándose en las estrategias que usan para resolver la segunda parte del reto, será la evaluación formativa clave.
- *Atención a la Diversidad (DUA)*: La SdA es muy flexible. El uso de contadores y dibujos permite múltiples formas de *representación* y *acción*. El contexto de juguetería busca la *implicación*. Para el alumnado con *dificultades*, se puede trabajar con números más pequeños (ej. 15 coches en cajas de 3). Para alumnado con *mayor capacidad*, se puede plantear un problema con dos tipos de cajas (ej. cajas de 5 y cajas de 3), introduciendo un problema más complejo de optimización.

3.5.2.2 Especificación y diseño de la propuesta

- *Título*: El Gran Inventario de la Juguetería
- *Justificación y Contexto*: Esta SdA utiliza un contexto lúdico y funcional (organizar el almacén de una juguetería) para el alumnado de *Segundo Ciclo*. Su objetivo es construir el significado de la *multiplicación como suma repetida* y de la *división como agrupamiento (restas sucesivas)*, saberes fundamentales de este ciclo. Se fomenta el trabajo cooperativo y se conecta la aritmética con la resolución de problemas de organización y logística.
- *Reto o Desafío*: Somos los encargados del almacén de una juguetería. Tenemos un reto en dos partes: *Parte 1 (Multiplicación)*: Calcular cuántos juguetes tenemos en total si nos llegan en cajas iguales (ej. 4 cajas de 6 coches). *Parte 2 (División)*: Organizar los juguetes que han llegado sueltos en cajas nuevas (ej. ¿cuántas cajas de 5 coches podemos llenar si tenemos 27 coches sueltos?).
- *Producto Final*: Rellenar una “*Hoja de Inventario del Almacén*”. Este documento, por parejas, deberá registrar: 1) El cálculo del total de juguetes que hay en cajas, expresando la operación como suma y como multiplicación. 2) El cálculo de cuántas cajas nuevas se pueden llenar con los juguetes sueltos y cuántos sobran, explicando cómo lo han averiguado.
- *Concreción Curricular*: A continuación se presenta la relación entre las competencias específicas del área, los criterios de evaluación y los saberes básicos implicados para el *Segundo Ciclo*, extraídos de la *ORDEN de 30 de mayo de 2023*.

3.5. Puesta en Práctica: Ejemplos de Situaciones de Aprendizaje por Ciclos

<i>Competencia Específica</i>	<i>Criterio de Evaluación</i>	<i>Saberes Básicos</i>
1 Interpretar situaciones de la vida cotidiana proporcionando una representación matemática de las mismas mediante conceptos, herramientas y estrategias para analizar la información más relevante.	1.2.a Comprender y comenzar a producir representaciones matemáticas, con recursos manipulativos y a través de esquemas o diagramas, que ayuden en la resolución de una situación problematizada, individualmente y cooperando...	MAT.2.A.3.4 Suma, resta, multiplicación y división de números naturales resueltas con flexibilidad y sentido: utilidad en situaciones contextualizadas, estrategias y herramientas de resolución y propiedades, mediante mate...
2 Resolver situaciones problematizadas, aplicando diferentes técnicas, estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder, obtener soluciones y asegurar su validez desde un punto de vista fo...	2.1.a Comenzar a comparar y a emplear diferentes estrategias para resolver un problema de forma pauta-da, implicándose en la resolución. 2.2.a Obtener posibles soluciones de un problema siguiendo alguna estrategia conocida, manipulando y tanteando analogías sencillas.	MAT.2.A.3.2 Estrategias de reconocimiento de qué operaciones simples (suma, resta, multiplicación, división como reparto y partición) son útiles para resolver situaciones contextualizadas. MAT.2.A.3.5 Fases de resolución de un problema: comprensión del enunciado; elaboración de un plan de resolución; ejecución del plan siguiendo las estrategias más adecuadas; comprobación de la solución.
3 Explorar, formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de tipo matemático en situaciones basadas en la vida cotidiana, de forma guiada, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación para co...	3.2.a Ejemplificar problemas sobre situaciones cotidianas que se resuelven matemáticamente, comenzando a plantear preguntas y avanzando posibles conclusiones.	MAT.2.A.1.1 Estrategias variadas de conteo, recuento sistemático y adaptación del conteo al tamaño de los números en situaciones de la vida cotidiana en cantidades hasta el 9999. MAT.2.A.3.6 Resolución de problemas referidos a situaciones abiertas e investigaciones matemáticas sencillas sobre números, cálculos, medidas y geometría. MAT.2.A.4.3 Relaciones entre la suma y la resta; y la multiplicación y la división: aplicación en contextos cotidianos y en la resolución de problemas.
4 Utilizar el pensamiento computacional, organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, generalizando e interpretando, modificando y creando algoritmos de forma guiada, para modelizar y automatizar si...	4.2.a Iniciarse en el manejo de las herramientas adecuadas en el proceso de resolución de problemas.	MAT.2.A.3.2 Estrategias de reconocimiento de qué operaciones simples (suma, resta, multiplicación, división como reparto y partición) son útiles para resolver situaciones contextualizadas.

		<i>MAT.2.A.3.4</i> Suma, resta, multiplicación y división de números naturales resueltas con flexibilidad y sentido: utilidad en situaciones contextualizadas, estrategias y herramientas de resolución y propiedades, mediante mate...
6 Comunicar y representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos y resultados matemáticos, utilizando el lenguaje oral, escrito, gráfico, multimodal y la terminología matemática apropiada, para dar si...	6.2.a Comenzar a analizar y explicar, de forma verbal o gráfica, ideas y procesos matemáticos sencillos, los pasos seguidos en la resolución de un problema o los resultados matemáticos, empleando el lenguaje verbal a trav...	<i>MAT.2.A.2.3</i> Lectura, representación (incluida la recta numérica y con materiales manipulativos), composición, descomposición y recomposición de números naturales hasta 9999. <i>MAT.2.A.3.3</i> Construcción de las tablas de multiplicar apoyándose en número de veces, suma repetida o disposición en cuadrículas.
7 Desarrollar destrezas personales que ayuden a identificar y gestionar emociones al enfrentarse a retos matemáticos, fomentando la confianza en las propias posibilidades, aceptando el error como parte del proceso de apre...	7.1.a Reconocer y comenzar a identificar las emociones propias al abordar nuevos retos matemáticos, pidiendo ayuda solo cuando sea necesario y mostrando autoconfianza y perseverancia en el control de sus emociones.	<i>MAT.2.F.1.1</i> Gestión emocional: estrategias de identificación y manifestación de las propias emociones ante las matemáticas. Iniciativa y tolerancia ante la frustración en el aprendizaje de las matemáticas. <i>MAT.2.F.1.3</i> Espíritu de superación frente a la frustración, los retos, dificultades y errores propios del proceso de aprendizaje matemático. Autoconfianza en las propias posibilidades.
	7.2.a Expresar y mostrar actitudes positivas ante nuevos retos matemáticos tales como el esfuerzo y la flexibilidad, valorando el error como una oportunidad de aprendizaje, superando la frustración y desarrollando actitud...	<i>MAT.2.F.1.2</i> Fomento de la autonomía y estrategias para la toma de decisiones en situaciones de resolución de problemas.
8 Desarrollar destrezas sociales, reconociendo y respetando las emociones, las experiencias de los demás y el valor de la diversidad y participando activamente en equipos de trabajo heterogéneos con roles asignados, para ...	8.1.a Participar y comenzar a colaborar respetuosamente en el trabajo en equipo, comunicándose adecuadamente, respetando la diversidad del grupo y estableciendo relaciones saludables basadas en la igualdad y la resolución...	<i>MAT.2.F.2.1</i> Sensibilidad y respeto ante las diferencias individuales presentes en el aula: identificación y rechazo de actitudes discriminatorias.

MAT.2.F.2.2 Participación activa en el trabajo en equipo, escucha activa y respeto por el trabajo de los demás.

8.2.a Adoptar alguna decisión en el reparto de tareas, respetando las responsabilidades individuales asignadas y comenzando a emplear estrategias sencillas de trabajo en equipo dirigidas a la consecución de objetivos comp...

MAT.2.F.2.5 Desarrollo de estrategias personales para resolver problemas, investigaciones y pequeños proyectos de trabajo.

■ *Secuencia de Tareas:*

1. *Tarea de Agrupamiento y Suma (Multiplicación):* Se presentan varias situaciones con dibujos de cajas de juguetes (ej. 4 cajas de 6 coches). Por parejas, primero calculan el total mediante una *suma repetida* ($6+6+6+6=24$). Después, el docente institucionaliza la *multiplicación* ($4 \times 6 = 24$) como la “forma rápida de los matemáticos” de escribirlo. Rellenan la primera parte de la hoja de inventario.
2. *Tarea de Reparto y Agrupamiento (División):* Se plantea el segundo reto (ej. 27 coches sueltos en cajas de 5). Por parejas y usando contadores, deben averiguar cuántas cajas completas pueden formar y cuántos coches sobran. Se les da libertad para que usen su propia estrategia (restar de 5 en 5, sumar de 5 en 5 hasta llegar cerca del 27, etc.).
3. *Tarea de Comunicación y Registro:* En una puesta en común, varias parejas explican cómo resolvieron el problema de los coches sueltos. El docente guía la discusión para que vean que todas las estrategias son válidas. Se formaliza el resultado (5 cajas y sobran 2) y se completa la segunda parte de la hoja de inventario, explicando el método usado.

- *Recursos y Materiales:* Fichas con ilustraciones de juguetes, contadores (poli-cubos, fichas...), plantillas de la “Hoja de Inventario”, pizarra, papel continuo para la puesta en común.

■ *Atención a la Diversidad (DUA) :*

- *I. Múltiples formas de IMPLICACIÓN (el «porqué»):*
 - *Captar interés:* Contexto de juguetería. Tareas manipulativas y con un objetivo claro y funcional.
 - *Mantener esfuerzo:* Trabajo en parejas. El reto de la división es abierto, valorando la estrategia personal por encima de un único método correcto.
 - *Autorregulación:* La hoja de inventario sirve como guía del proceso y autoevaluación de las tareas completadas.
- *II. Múltiples formas de REPRESENTACIÓN (el «qué»):*

- *Percepción*: Se usa información visual (dibujos), manipulativa (contadores) y numérica (hoja de inventario).
- *Lenguaje y símbolos*: Se conecta explícitamente la suma repetida con la nueva simbología de la multiplicación.
- *Comprensión*: Se activan conocimientos previos de suma y resta para abordar la división.
- *III. Múltiples formas de ACCIÓN Y EXPRESIÓN (el «cómo»)*:
 - *Acción física*: El uso de contadores es central en la SdA.
 - *Expresión y comunicación*: El alumnado puede explicar sus estrategias para la división de forma oral, con material o por escrito en la hoja de inventario.
 - *Funciones ejecutivas*: Para alumnado con *dificultades*, se puede trabajar con números más pequeños y usar material estructurado (ej. regletas de Cuisenaire). Para alumnado con *mayor capacidad*, se pueden plantear problemas de inventario con dos variables (ej. «tenemos 30 ruedas, ¿cuántas bicicletas y cuántos triciclos podemos montar?»).
- *Evaluación del Aprendizaje*: Instrumentos y Técnicas
 - *Observación directa* (con lista de cotejo) durante el trabajo en parejas, enfocándose en: ¿Conectan la suma repetida con la multiplicación? ¿Qué estrategia informal usan para el problema de agrupamiento?
 - *Análisis de la “Hoja de Inventario”* (evaluación sumativa) para valorar la correcta aplicación de la multiplicación y la resolución del problema de división, así como la claridad en la explicación.

3.5.3 Ejemplo para el Tercer Ciclo (5º y 6º de Primaria): “Repartiendo la riqueza del mundo en nuestra clase”

Esta sección detalla el itinerario reflexivo para planificar la SdA «Repartiendo la riqueza del mundo en nuestra clase». El objetivo es que nuestro alumnado del Grado de Magisterio comprenda cómo una SdA en el Tercer Ciclo puede y debe integrar saberes aritméticos complejos (como la proporcionalidad y los porcentajes) con el desarrollo de competencias transversales como la competencia ciudadana y el pensamiento crítico.

3.5.3.1 Fases de diseño

Fase 1: Análisis Previo y Definición de Objetivos El diseño parte de las características del alumnado de final de etapa y las exigencias del currículo.

- *Análisis del Alumnado*: En el Tercer Ciclo, el alumnado se encuentra en la transición hacia el *período de las operaciones formales* de Piaget (Capítulo 1). Son capaces de razonar de forma más abstracta y de manejar problemas con múltiples pasos. Es una etapa ideal para introducir problemas socialmente relevantes que requieran el uso de las matemáticas para su interpretación y análisis, fomentando el pensamiento crítico.
- *Análisis del Currículo (ORDEN de 30 de mayo de 2023)*: La normativa para el Tercer Ciclo pone un fuerte énfasis en la consolidación del sentido numérico y

su aplicación en contextos variados. Identificamos como saberes clave:

- *MAT.3.A.5. Razonamiento proporcional*: Es uno de los grandes objetivos del ciclo. Esta SdA aborda de lleno la resolución de problemas de proporcionalidad.
- *MAT.3.A.4.5. Relación entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes*: Este saber es la herramienta fundamental para resolver el reto.
- *MAT.3.A.3.4. Estrategias de resolución de operaciones aritméticas [...]* con flexibilidad y sentido.
- *Sentido Socioafectivo y Estocástico*: La SdA integra de forma natural saberes de otros bloques, al trabajar con datos reales (sentido estocástico) y generar un debate sobre justicia y equidad (sentido socioafectivo).
- *Análisis del Contenido Matemático*: El concepto central es la *proporcionalidad* aplicada a través del *cálculo de porcentajes*. La SdA exige al alumnado moverse con fluidez entre datos brutos, porcentajes y la aplicación de esos porcentajes a cantidades concretas (el número de alumnos y de galletas).
- *Definición de Objetivos*: El objetivo es que el alumnado modele una situación social compleja utilizando porcentajes y razonamiento proporcional, para analizar datos, tomar conciencia de las desigualdades y comunicar sus conclusiones de forma argumentada.

Fase 2: Selección del Contexto, Diseño del Reto y Producto Final

- *Contexto*: El contexto es el *análisis de un problema sociocientífico real*: la distribución de la población y la riqueza en el mundo. Inspirado en propuestas como las de Jo Boaler (2020), este enfoque muestra las matemáticas como una herramienta poderosa para comprender el mundo y desarrollar la competencia ciudadana.
- *Reto*: El reto de *modelizar el mundo en el aula* («Si nuestra clase fuera el mundo...») es una estrategia didáctica de gran impacto. Hace que un problema global y abstracto se convierta en una experiencia concreta y tangible (los discentes y las galletas). Es una *tarea de alta demanda cognitiva* que implica análisis, modelización, cálculo y reflexión crítica.
- *Producto Final*: La combinación de una *simulación vivencial* con un *podcast* es un producto final muy completo y actual. La simulación genera la experiencia emocional y la comprensión profunda del problema. El podcast desarrolla la competencia comunicativa y digital, exigiendo al alumnado sintetizar sus cálculos y reflexiones de forma argumentada.

Fase 3: Secuenciación de Tareas y Actividades La secuencia está diseñada para ir del análisis de datos a la vivencia y la reflexión final.

1. *Actividad 1 (Análisis de Datos)*: La primera fase se centra en la herramienta matemática. Los grupos deben traducir los datos brutos de población y riqueza en porcentajes. Es un trabajo procedimental con conexión, ya que deben comprender qué significa cada porcentaje.
2. *Actividad 2 (Modelización)*: En esta fase, aplican los porcentajes calculados a las cantidades concretas de la clase (25 alumnos y 100 galletas). Aquí surgirán

problemas prácticos como el redondeo, lo que exige una toma de decisiones razonada.

3. *Actividad 3 (Representación Vivencial y Debate)*: Es el corazón de la SdA. La simulación física transforma los números en una experiencia. Al ver que unos pocos alumnos tienen la mayoría de las galletas, el concepto de desigualdad deja de ser un número y se convierte en una vivencia. El debate posterior es crucial para desarrollar el pensamiento crítico y la competencia socioafectiva.
4. *Actividad 4 (Comunicación y Síntesis)*: La creación del podcast obliga a los grupos a estructurar sus ideas, revisar sus cálculos y comunicar sus conclusiones de forma clara y concisa, desarrollando competencias comunicativas clave.

Fase 4: Planificación de la Evaluación y Atención a la Diversidad (DUA)

- *Evaluación*: La evaluación es multifacética. Se evalúan los cálculos (corrección matemática), pero sobre todo el producto final (el podcast), para el que se usará una *rúbrica* que valore el rigor, la argumentación y la reflexión. La *coevaluación* y la *autoevaluación* (informe de reflexión) son también claves en una tarea de este tipo.
- *Atención a la Diversidad (DUA)*: La SdA es altamente inclusiva. El trabajo en grupo permite la colaboración (*Implicación*). El uso de tablas, calculadoras, galletas y debate oral ofrece múltiples formas de *Representación*. El producto final (podcast) es una forma de *Acción y Expresión* alternativa a la tradicional prueba escrita. Para alumnado con *dificultades*, se puede proporcionar la tabla con los porcentajes ya calculados. Para alumnado con *mayor capacidad*, la extensión de buscar datos más actuales o investigar otros indicadores (huella ecológica, etc.) abre la puerta a proyectos de investigación más profundos.

3.5.3.2 Especificación y diseño de la propuesta

- *Título*: Repartiendo la riqueza del mundo en nuestra clase
- *Justificación y Contexto*: Esta SdA, inspirada en una propuesta de Jo Boaler, conecta la aritmética de los *porcentajes y la proporcionalidad* con la *competencia ciudadana*. Se utiliza la modelización matemática para hacer tangible un problema social complejo, mostrando las matemáticas como una herramienta para comprender críticamente el mundo. Es una propuesta de alto nivel cognitivo y socioafectivo, ideal para el *Tercer Ciclo*.
- *Reto o Desafío*: Se presenta una tabla con datos reales simplificados sobre población y riqueza (PIB) por continentes. El reto es: «*Si nuestra clase de 25 alumnos fuera el mundo, y tuviéramos 100 galletas para representar la riqueza, ¿cuántos alumnos representarían a cada continente y cuántas galletas le tocarían a cada grupo?*»
- *Producto Final*: Realización de una *simulación-debate* en el aula. El producto final evaluable será la grabación de un *podcast de 5 minutos* por grupo («continente»), donde expongan sus cálculos, su experiencia en la simulación y sus conclusiones sobre la distribución de la riqueza.
- *Concreción Curricular*: A continuación se presenta la relación entre las competencias específicas del área, los criterios de evaluación y los saberes básicos

implicados para el *Tercer Ciclo*, extraídos de la *ORDEN de 30 de mayo de 2023*.

Competencia Específica	Criterio de Evaluación	Saberes Básicos
1 Interpretar situaciones de la vida cotidiana proporcionando una representación matemática de las mismas mediante conceptos, herramientas y estrategias para analizar la información más relevante.	1.1.a Reconocer, interpretar e iniciarse en la comprensión de los problemas de la vida cotidiana a través de la reformulación de la pregunta, de forma verbal y gráfica, comprendiendo y describiendo mensajes verbales, escr...	MAT.3.D.2.1 Proceso de modelización a partir de problemas de la vida cotidiana, usando representaciones matemáticas.
	1.2.a Comenzar a elaborar y mostrar representaciones matemáticas que ayuden en la búsqueda y elección de estrategias y herramientas, incluidas las tecnológicas, para la resolución de una situación problematizada medioambi...	MAT.3.A.3.4 Estrategias de resolución de operaciones aritméticas (con números naturales, decimales y fracciones) con flexibilidad y sentido: mentalmente, de manera escrita o con calculadora; utilidad en situaciones contex...
2 Resolver situaciones problematizadas, aplicando diferentes técnicas, estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder, obtener soluciones y asegurar su validez desde un punto de vista fo...	2.1.a Comparar, comenzar a seleccionar y emplear entre diferentes estrategias para resolver un problema tomando decisiones, aplicándose en la resolución y justificando la estrategia seleccionada.	MAT.3.A.3.5 Fases de resolución de un problema dado o elaborado por el alumnado: comprensión del enunciado, identificando los datos relevantes y relacionándolos con la pregunta; elaboración de un plan de resolución; ejecu...
	2.3.a Comprobar y demostrar la corrección matemática de las soluciones de un problema y su coherencia en el contexto planteado, revisando durante la resolución la respuesta.	MAT.3.A.2.6 Comunicación y explicación oral de forma razonada del proceso de resolución y resultado.
3 Explorar, formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de tipo matemático en situaciones basadas en la vida cotidiana, de forma guiada, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación para co...	3.1.a Comenzar a formular conjeturas matemáticas sencillas, investigando patrones, propiedades y relaciones de forma guiada, desarrollando ideas con sentido, argumentando conclusiones y saber comunicarlo.	MAT.3.A.3.8 Elaboración de conjeturas y búsqueda de argumentos que las validen o las refuten, en situaciones problematizadas.

3. Diseño de Propuestas Didácticas en Aritmética

4 Utilizar el pensamiento computacional, organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, generalizando e interpretando, modificando y creando algoritmos de forma guiada, para modelizar y automatizar si...

4.1.a Comenzar a modelizar situaciones de la vida cotidiana, utilizando de forma pautada, principios básicos del pensamiento computacional, realizando procesos simples en formato digital y describiendo las tareas en pasos...

MAT.3.A.5.1 Situaciones proporcionales y no proporcionales en problemas de la vida cotidiana: identificación como comparación multiplicativa entre magnitudes, usando herramientas informáticas de cálculo.

4.2.a Comenzar a emplear herramientas tecnológicas adecuadas en la investigación y resolución de problemas.

MAT.3.A.3.4 Estrategias de resolución de operaciones aritméticas (con números naturales, decimales y fracciones) con flexibilidad y sentido: mentalmente, de manera escrita o con calculadora; utilidad en situaciones context...

MAT.3.A.3.5 Fases de resolución de un problema dado o elaborado por el alumnado: comprensión del enunciado, identificando los datos relevantes y relacionándolos con la pregunta; elaboración de un plan de resolución; ejecu...

5 Reconocer y utilizar conexiones entre las diferentes ideas matemáticas, así como identificar las matemáticas implicadas en otras áreas o en la vida cotidiana, interrelacionando conceptos y procedimientos, para interpretar...

5.1.a Comenzar a utilizar conexiones entre diferentes elementos matemáticos, movilizandolos conocimientos y experiencias propias, aplicando las matemáticas en otras áreas y contextos cotidianos.

MAT.3.B.3.1 Estrategias de comparación y ordenación de medidas de la misma magnitud, aplicando las equivalencias entre unidades (sistema métrico decimal) en problemas de la vida cotidiana.

6 Comunicar y representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos y resultados matemáticos, utilizando el lenguaje oral, escrito, gráfico, multimodal y la terminología matemática apropiada, para dar si...

6.1.a Comenzar a interpretar el lenguaje matemático sencillo presente en la vida cotidiana en diferentes formatos, adquiriendo vocabulario apropiado, utilizando este lenguaje para expresar ideas matemáticas, mostrando com...

MAT.3.A.2.4 Fracciones y decimales para expresar cantidades en contextos de la vida cotidiana y elección de la mejor representación para cada situación o problema.

MAT.3.A.2.6 Comunicación y explicación oral de forma razonada del proceso de resolución y resultado.

7 Desarrollar destrezas personales que ayuden a identificar y gestionar emociones al enfrentarse a retos matemáticos, fomentando la confianza en las propias posibilidades, aceptando el error como parte del proceso de apre...

7.1.a Identificar y autorregular las emociones propias, comenzando a reconocer algunas fortalezas y debilidades propias y desarrollando así la autoconfianza al abordar nuevos retos matemáticos, valorando y reconociendo la...

MAT.3.F.1.1 Autorregulación emocional: autoconcepto y aprendizaje de las matemáticas a través de proyectos cooperativos de investigación sobre mujeres matemáticas de Andalucía.

7.2.a Identificar en uno mismo actitudes positivas, colaborativas, comenzando a desarrollar la crítica ante nuevos retos matemáticos tales como la perseverancia y la responsabilidad, valorando el error como una oportunidad...

MAT.3.F.1.4 Acercamiento al método de trabajo científico mediante planteamientos de hipótesis, recogida y registro de datos en contextos numéricos, geométricos o funcionales, y elaboración de conclusiones. Confianza en la...

8 Desarrollar destrezas sociales, reconociendo y respetando las emociones, las experiencias de los demás y el valor de la diversidad y participando activamente en equipos de trabajo heterogéneos con roles asignados, para ...

8.1.a Participar, colaborar y ayudar respetuosa y responsablemente en el trabajo individual o colectivo, implicándose en retos matemáticos propuestos, comunicándose de forma efectiva, valorando la diversidad, mostrando em...

MAT.3.F.1.1 Autorregulación emocional: autoconcepto y aprendizaje de las matemáticas a través de proyectos cooperativos de investigación sobre mujeres matemáticas de Andalucía.

MAT.3.F.2.1 Respeto por las emociones y experiencias de los demás ante las matemáticas. Valoración del esfuerzo del resto de miembros del grupo.

■ Secuencia de Tareas :

1. *Tarea de Análisis de Datos (Grupo cooperativo)*: Los grupos reciben la tabla de datos brutos. Su primera tarea es calcular el porcentaje de población y de riqueza que corresponde a cada continente.
2. *Tarea de Modelización (Grupo cooperativo)*: Aplican esos porcentajes al total de la clase (25 alumnos) y al total de "riqueza" (100 galletas). Deben tomar decisiones razonadas sobre cómo redondear los resultados para que el reparto sea posible.
3. *Tarea de Simulación y Debate (Gran grupo)*: Se realiza la simulación física: los alumnos se agrupan por "continentes" y reciben sus galletas. Se genera un debate guiado por el docente sobre la justicia, la equidad y las sensaciones experimentadas.
4. *Tarea de Síntesis y Comunicación (Grupo cooperativo)*: Los grupos preparan un guion, graban y editan un podcast de 5 minutos resumiendo el proceso: sus cálculos, su experiencia y sus reflexiones finales.

- *Recursos y Materiales*: Tabla de datos impresa, calculadoras, 100 galletas (o fichas/bloques), pizarra o proyector, dispositivo de grabación de audio (móvil, tablet u ordenador con micrófono).

- *Atención a la Diversidad (DUA):*
 - *I. Múltiples formas de IMPLICACIÓN (el «porqué»):*
 - *Captar interés:* Tema de alta relevancia social. Reto vivencial y colaborativo.
 - *Mantener esfuerzo:* El producto final (podcast) es motivador y actual. El trabajo en equipo es esencial.
 - *Autorregulación:* Se les puede dar una rúbrica de evaluación del podcast para que guíen su propio trabajo. El informe de reflexión final fomenta la metacognición.
 - *II. Múltiples formas de REPRESENTACIÓN (el «qué»):*
 - *Percepción:* La información se presenta en tablas, de forma oral en el debate y de forma kinestésica en la simulación.
 - *Lenguaje y símbolos:* Se trabaja la conexión entre número, fracción, decimal y porcentaje.
 - *Comprensión:* La simulación es un potente andamio para comprender el significado real de los porcentajes calculados.
 - *III. Múltiples formas de ACCIÓN Y EXPRESIÓN (el «cómo»):*
 - *Acción física:* La simulación implica movimiento y reparto físico de objetos.
 - *Expresión y comunicación:* El alumnado expresa su aprendizaje mediante cálculos escritos, debate oral y un producto final auditivo (podcast).
 - *Funciones ejecutivas:* Para alumnado con *dificultades*, se puede proporcionar la tabla con los porcentajes ya calculados. Para alumnado con *mayor capacidad*, pueden investigar datos más actuales o comparar la distribución de otros indicadores (emisiones de CO₂, consumo de agua, etc.).
- *Evaluación del Aprendizaje: Instrumentos y Técnicas*
 - *Revisión de los cálculos de porcentajes y repartos (corrección matemática).*
 - *Rúbrica para evaluar el podcast (evaluación sumativa), que valore: rigor matemático en los datos, calidad de la argumentación, claridad en la comunicación y profundidad de la reflexión.*
 - *Lista de cotejo para observar la participación y argumentación durante el debate (evaluación formativa).*
 - *Coevaluación y autoevaluación (breve informe de reflexión) sobre el trabajo en grupo y el aprendizaje personal.*

3.6 Conclusión del Capítulo

El diseño de propuestas didácticas en aritmética es una de las competencias profesionales más complejas y, a la vez, más creativas del futuro docente de Educación Primaria. Este capítulo ha presentado un recorrido que va desde los cimientos meto-

dológicos hasta su aplicación práctica, con el fin de dotar al docente de un marco de trabajo reflexivo y estructurado.

Hemos comenzado por identificar los *ingredientes esenciales* de una buena práctica didáctica: la selección intencionada de tareas ricas, el uso inteligente de recursos manipulativos y la concepción de la resolución de problemas como el corazón de la actividad. Posteriormente, hemos articulado estos elementos en el marco de la *Situación de Aprendizaje*, entendida como un enfoque pedagógico integral que nos permite transformar el rol docente de mero transmisor a *arquitecto de experiencias de aprendizaje*.

Armados con esta caja de herramientas para el diseño didáctico, estamos preparados para aplicar estos principios en los contenidos aritméticos específicos que abordaremos en las próximas partes. Es importante mantener estos fundamentos en mente, ya que volveremos a ellos de forma integrada en la última etapa de nuestro viaje, la *Parte V: Construyendo una práctica docente eficaz y reflexiva*, donde, en el *Capítulo 15*, construiremos paso a paso una Situación de Aprendizaje completa, convirtiendo definitivamente la teoría en práctica.

Pero antes, en los capítulos que siguen, aplicaremos estos principios de diseño al primer y más fundamental de todos los conceptos matemáticos: *el número natural*. Exploraremos su asombrosa complejidad y descubriremos cómo guiar a nuestro alumnado en su personal proceso de reinención.

3.7 Para la Reflexión y el Portfolio Docente

1. Conexión con la Propia Historia: El Arquitecto o el Explicador.

Consigna: Piensa en la clase de matemáticas más memorable (positiva o negativamente) de tu etapa escolar. Analízala ahora con las herramientas de la Teoría de Situaciones Didácticas.

- ¿Fue una sucesión de ejercicios o un verdadero problema a resolver?
- ¿El/la docente actuó como un «explicador» (que transmite el saber) o como un «arquitecto» (que diseña el medio)?
- ¿Hubo algún momento que ahora identificarías como una «situación a-didáctica» donde la responsabilidad de validar la solución recayó sobre ti o tus compañeros? Descríbelo.

2. Análisis de Práctica Docente: El Arte de la Devolución.

Consigna: Observa una sesión de resolución de problemas en un aula de Primaria (real o simulada). Centra tu atención en el rol del docente durante la fase de trabajo autónomo del alumnado.

- Documenta un diálogo en el que un/a estudiante pide validación al docente («¿así está bien?»).
- ¿Qué responde el docente? ¿Valida la respuesta, rompiendo la situación a-didáctica?
- ¿O devuelve la responsabilidad al alumnado con otra pregunta («¿cómo puedes estar seguro?», «¿puedes comprobarlo de otra manera?»)? Analiza el efecto de la respuesta del docente.

3. Diseño de una Secuencia A-didáctica de Brousseau.

Consigna: Elige un concepto aritmético simple, como «las descomposiciones aditivas del número 10». Diseña una secuencia de tres mini-tareas que sigan las fases de una situación a-didáctica de Brousseau.

- *Tarea de Acción:* Describe un juego manipulativo donde el objetivo sea encontrar todas las combinaciones (ej., usando un «cofre» y 10 «joyas»).
- *Tarea de Formulación:* Describe cómo pedirías a un equipo que cree un «mensaje secreto» (sin dibujos) para que otro equipo pueda reproducir una de las combinaciones encontradas.
- *Tarea de Validación:* Describe cómo generarías un debate si dos equipos afirman haber encontrado un número diferente de combinaciones. ¿Qué pregunta clave harías para que argumenten por qué su método es exhaustivo?

Bitácora de la Parte I

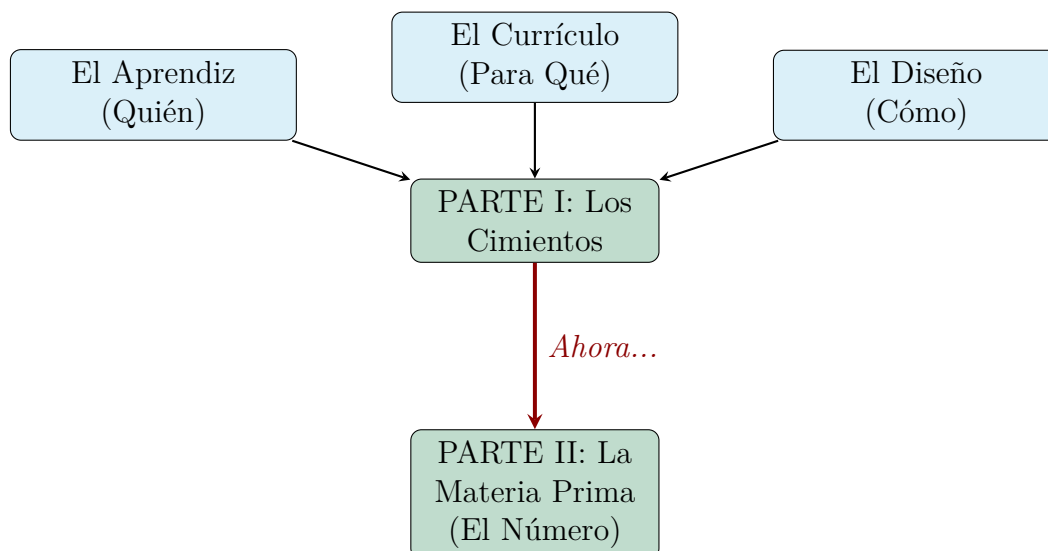
Lo que llevamos en la mochila

En esta primera etapa de nuestro viaje hemos sentado los *cimientos de nuestra práctica*. Hemos llenado nuestra mochila con tres herramientas indispensables:

- La comprensión del *aprendiz*: Sabemos que el niño y la niña construyen activamente su conocimiento, pasando por etapas definidas (Piaget) y apoyándose en la interacción social y el lenguaje (Vygotsky).
- El mapa del *currículo*: Entendemos que nuestro destino no es enseñar contenidos aislados, sino desarrollar una *competencia matemática* integral, tal y como nos mandata la LOMLOE.
- Los planos del *diseño didáctico*: Conocemos los ingredientes de una buena enseñanza (tareas y recursos) y el marco teórico para combinarlos (Teoría de Situaciones Didácticas) en una *Situación de Aprendizaje*.

Nuestra próxima etapa: La Materia Prima

Con los cimientos firmes, un buen arquitecto debe ahora conocer a fondo los materiales con los que va a construir. Antes de enseñar a operar, sumar o restar, debemos sumergirnos en la esencia misma de la aritmética: *el número natural*. En la Parte II, exploraremos la fascinante complejidad del acto de contar y la genialidad de nuestro sistema de numeración. Pasamos de los fundamentos de *cómo se enseña* a la materia prima de *lo que se enseña*.



II El número natural: construcción y sistemas de numeración

SUPERADOS los fundamentos psicopedagógicos y curriculares de la Parte I, este segundo módulo, *El Número Natural: Construcción y Sistemas de Numeración*, constituye el pilar fundamental sobre el que se edifica todo el conocimiento aritmético. Nos adentramos ahora en el corazón de la aritmética elemental para explorar el concepto de número natural y los ingeniosos sistemas que la humanidad ha desarrollado para representarlo. La aparente simplicidad del acto de contar esconde una profunda evolución histórica y un complejo desarrollo cognitivo en el alumnado, dos dimensiones que, como futuros docentes, debemos comprender para guiar con eficacia este aprendizaje.

El número natural es la primera gran abstracción matemática a la que se enfrenta el ser humano. Su construcción, tanto en la historia de la civilización como en la mente de cada niño o niña, representa un viaje fascinante desde lo concreto hacia lo simbólico. Este módulo explora ese doble viaje: por un lado, el desarrollo cognitivo que permite superar el recitado memorístico para consolidar los principios del conteo y la comprensión de la cardinalidad y la ordinalidad; por otro, la necesidad histórica de representar y operar con cantidades crecientes, que impulsó la invención de los sistemas de numeración y culminó en la revolucionaria eficiencia de nuestro sistema decimal posicional. Comprender la lógica de la base diez y el valor de posición es un requisito indispensable para todo aprendizaje posterior, desde los algoritmos hasta la extensión a otros conjuntos numéricos.

Nuestro recorrido a lo largo de este módulo se articula en dos capítulos esenciales:

- En el primer capítulo, *El Concepto de Número Natural* (Capítulo 4), nos adentraremos en la naturaleza y epistemología del número, analizando su génesis, sus múltiples funciones y las etapas clave que sigue el alumnado para su adquisición.
- Posteriormente, en el capítulo sobre *Sistemas de Numeración* (Capítulo 5), exploraremos la evolución histórica de la representación numérica para valorar las ventajas de nuestro sistema decimal y abordaremos la didáctica específica para enseñar el valor posicional.

En ambos capítulos, se mantendrá un enfoque práctico, prestando especial atención al papel crucial de los recursos manipulativos y a la identificación y tratamiento de las dificultades de aprendizaje más comunes.

El propósito de este módulo es, por tanto, dotar al futuro personal docente de las herramientas y perspectivas necesarias para transformar la enseñanza de los primeros conceptos numéricos. El objetivo final es la construcción de un *sólido sentido numérico* en el alumnado, cimiento indispensable sobre el cual se edificarán todas sus competencias matemáticas futuras, permitiéndoles no solo operar con números, sino comprender verdaderamente su significado y su poder.

4 El Concepto de Número Natural

EL número natural constituye la piedra angular sobre la que se edifica gran parte del conocimiento matemático en la Educación Primaria y en las etapas posteriores. Su aparente simplicidad, encapsulada en el acto cotidiano de contar, esconde una notable complejidad conceptual y didáctica. Como futuro personal docente, es fundamental comprender que el concepto de número no es, en absoluto, elemental; es, de hecho, una de las primeras grandes abstracciones a las que se enfrenta la mente humana y su construcción es un proceso activo, personal y no exento de dificultades.

4.1 Introducción: La Complejidad de lo Aparentemente Simple

La subestimación de esta complejidad es un riesgo pedagógico que puede llevar a prácticas educativas superficiales, centradas en la memorización de la secuencia numérica o en la ejecución mecánica de algoritmos. Para evitarlo, debemos analizar las tres facetas interconectadas que definen el desafío de su enseñanza y aprendizaje (Figura 4.1):

- *Es una potente abstracción.* El número «tres» no es una propiedad inherente a los objetos, como pueden serlo el color rojo o la forma redonda. No reside en tres lápices, ni es el símbolo «3» o la palabra «tres». El número es la propiedad común que comparten todas las colecciones de objetos que se pueden poner en correspondencia uno a uno entre sí: una colección de tres lápices, un conjunto de tres aplausos o una secuencia de tres ideas. Su adquisición requiere un salto cognitivo crucial: la *abstracción reflexiva*. El infante no «extrae» el número de los objetos, sino que lo construye mentalmente al coordinar sus propias acciones de agrupar, ordenar y comparar (Piaget, 1941/1967).
- *Posee una rica diversidad semántica.* Un mismo símbolo numérico, como el «5», adquiere significados radicalmente diferentes según el contexto en el que se utilice. Puede representar la cantidad de dedos en una mano (aspecto *cardinal*), indicar que alguien ha llegado en quinto lugar en una carrera (aspecto *ordinal*), ser el dorsal de un jugador de baloncesto (un *código* o etiqueta nominal) o nombrar una línea de autobús. Esta polisemia, que un adulto maneja de forma automática, es una fuente potencial de confusión para el infante, que debe aprender a interpretar el significado correcto en cada situación (Fuson, 1988).
- *Su aprendizaje es un proceso gradual y multifásico.* La comprensión del número no se adquiere de una vez por todas. El alumnado transita por una serie de etapas bien definidas que el docente debe conocer para poder diagnosticar e intervenir. Este viaje va desde el recitado de la secuencia numérica como una mera cantinela memorizada («unodostres...»), pasando por el dominio progresivo de los principios lógicos que rigen el conteo (como la correspondencia uno a uno), hasta alcanzar una comprensión flexible de la cardinalidad y de las relaciones numéricas que permite el cálculo mental (Fuson, 1988; Gelman & Gallistel, 1978). Como afirma Kamii, el alumnado «reinventa la aritmética» a través de la resolución de problemas y la interacción social (Kamii, 1985/2003).

Tomar conciencia de esta triple complejidad transforma radicalmente la visión sobre

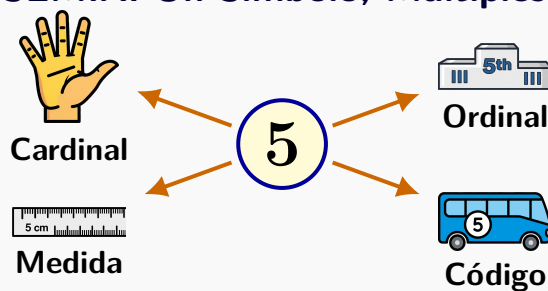
Figura 4.1: Las tres facetas de la complejidad del número.

1. LA ABSTRACCIÓN: De lo Concreto a lo Mental



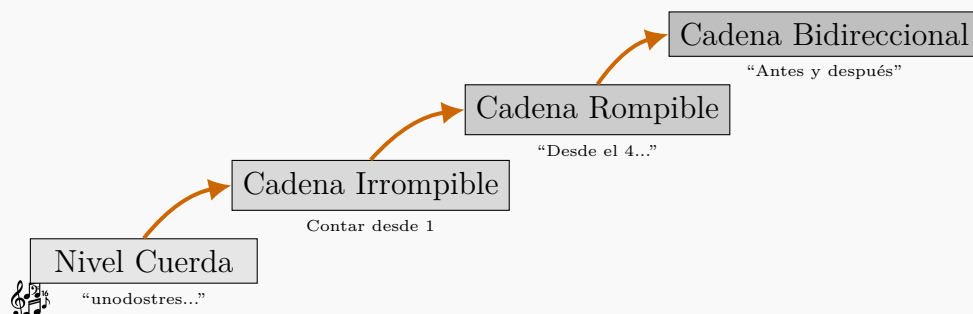
El número no está en los objetos, sino que se construye en la mente al relacionarlos.

2. LA POLISEMIA: Un Símbolo, Múltiples Significados



Un mismo símbolo adquiere significados distintos según el contexto en el que se utilice.

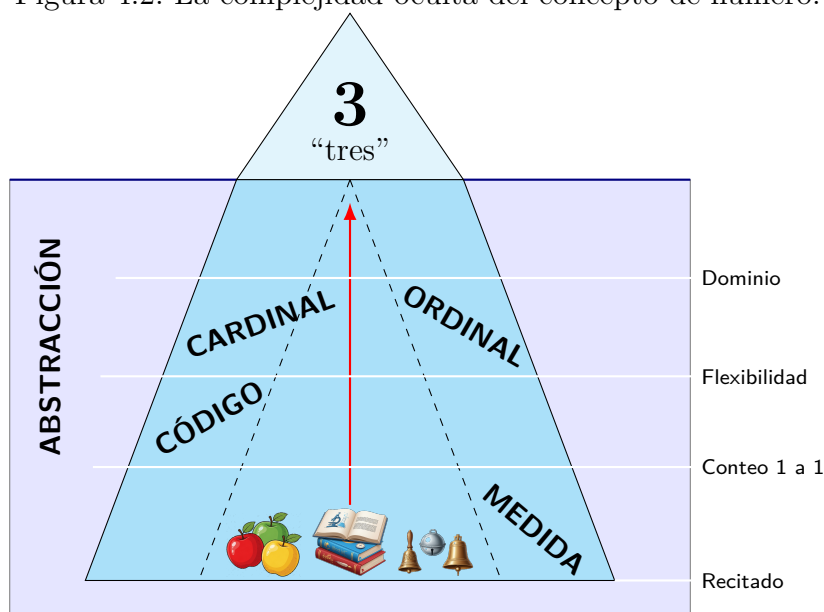
3. EL PROCESO GRADUAL: Un Camino de Aprendizaje



La comprensión del número no es instantánea, sino que se desarrolla a través de etapas progresivas.

la enseñanza de la aritmética. El rol del docente de Primaria trasciende al de un mero «transmisor» de hechos numéricos para convertirse en el de un *arquitecto de experiencias de aprendizaje*. Su labor consiste en diseñar situaciones y problemas significativos que permitan al alumnado actuar, reflexionar y, en última instancia, construir su propio conocimiento numérico, creando la consciencia y comprensión de los aspectos que forman parte del trabajo numérico, que suelen quedar ocultos bajo la parte visible, como un iceberg (Figura 4.2).

Figura 4.2: La complejidad oculta del concepto de número.



Este capítulo está diseñado para proporcionar las herramientas conceptuales y didácticas necesarias para afrontar esta tarea. Para ello, hemos estructurado nuestro estudio en dos grandes bloques que responden a dos preguntas fundamentales:

1. *¿Qué es el número?* En la primera parte (Sección 4.2), exploraremos los aspectos epistemológicos y formales. Viajaremos desde su génesis histórica en la civilización hasta su definición matemática, analizando sus diferentes significados y contextos de uso.
2. *¿Cómo se enseña y aprende?* En la segunda parte (Sección 4.3), nos adentraremos en los aspectos psicopedagógicos y didácticos. Estudiaremos cómo se construye el concepto en la mente infantil, cómo se refleja en el currículo oficial, qué materiales y problemas son los más adecuados para su enseñanza y qué dificultades comunes podemos encontrar en el aula.

Este doble enfoque, que va del objeto de conocimiento al sujeto que aprende, nos permitirá transformar un aprendizaje aparentemente mecánico en un aprendizaje verdaderamente *significativo* y duradero.

4.2 Aspectos Epistemológicos y Formales: ¿Qué es el Número Natural?

Para enseñar un concepto con profundidad, primero debemos comprender su naturaleza. Preguntarnos «¿qué es un número?» no es una cuestión trivial, sino el punto de partida para una enseñanza fundamentada. En esta sección, emprenderemos un doble viaje para desentrañar la esencia del número natural. Primero, exploraremos su *génesis histórica*, descubriendo cómo la humanidad lo construyó a partir de necesidades concretas. Segundo, analizaremos su *naturaleza formal* y la *riqueza semántica* de sus usos. Este conocimiento epistemológico es la base sobre la que se asienta toda buena práctica didáctica.

4.2.1 La Génesis Histórica: El Número como Invención Humana

El concepto de número no ha existido siempre; no es una verdad revelada, sino una de las invenciones más extraordinarias y abstractas del intelecto humano. Su historia revela un proceso gradual de abstracción que presenta un fascinante y poderoso paralelismo con la forma en que cada niño y niña construye su propio conocimiento numérico (Ifrah, 1997). Comprender las fases de esta génesis nos proporciona un mapa para entender, y sobre todo para valorar, los logros cognitivos de nuestro alumnado. El aula, en cierto modo, se convierte en un laboratorio de paleo-matemática donde la historia de la civilización se revive en cada mente.

4.2.1.1 Fase 1: Agrupar (La Percepción de la Cantidad)

El primer paso, anterior a cualquier forma de conteo, es la percepción de una colección como una unidad. Es el acto de reconocer «un rebaño de ovejas» o «un montón de piedras» como un todo, sin saber aún cuántos elementos lo componen. Esta habilidad, conocida como *numerosidad aproximada*, es pre-lingüística e incluso pre-humana, y se basa en la capacidad de distinguir visualmente «muchos» de «pocos» (Dehaene, 1997). Para el ser humano primitivo, era una cuestión de supervivencia: diferenciar un árbol con mucha fruta de uno con poca, o un grupo de dos depredadores de una manada de diez. Esta acción implica una operación lógica fundamental: la *clasificación*, es decir, identificar una característica común que une a los elementos y los distingue del resto.

Ejemplo: Agrupación

Observamos esta fase primordial cuando un niño o niña, sin saber contar, agrupa sus bloques por colores. Al crear «el montón de los rojos» y «el montón de los azules», no está contando, pero sí está realizando la operación lógica de clasificación que es el cimiento indispensable para cualquier acción numérica posterior. Está creando los conjuntos que, más adelante, sentirá la necesidad de cuantificar.

4.2.1.2 Fase 2: Emparejar (La Correspondencia uno a uno)

Para resolver problemas prácticos de control y comparación, la humanidad desarrolló una herramienta de una potencia extraordinaria: la *correspondencia biunívoca* o término a término. Este método permite verificar si dos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos sin necesidad de tener palabras o símbolos para los números.

Anclaje Histórico: La Correspondencia Biunívoca en la Antigüedad

Un ejemplo clarificador y arquetípico puede ser el del pastor, con un comportamiento que se ha documentado en múltiples culturas. Al amanecer, el pastor hacía salir a sus ovejas una a una del redil. Por cada oveja que salía, metía una pequeña piedra en un zurrón. Al atardecer, realizaba la operación inversa: por cada oveja que entraba, sacaba una piedra del zurrón. Si al final no quedaban piedras, el rebaño estaba completo. Si sobraban piedras, se habían perdido ovejas. Este pastor no necesitaba saber «cuántas» ovejas tenía; solo necesitaba el principio de correspondencia para saber si la colección de la mañana era *equipotente* a la de la tarde (Ifrah, 1997).

Un ejemplo arqueológico fascinante son los *calculi* de Mesopotamia (8000 a.C.). Eran pequeñas fichas de arcilla de distintas formas (conos, esferas, discos) que representaban unidades de bienes: una esfera podía representar una fanega de grano, un cono un animal. Un productor enviaba un cargamento con una vasija sellada que contenía los *calculi* correspondientes a la mercancía. El receptor, al recibir el envío, rompía la vasija y emparejaba cada ficha con la mercancía recibida, verificando así que el envío estaba completo (Schmandt-Besserat, 1992).

Ejemplo: Emparejamiento

Este salto cognitivo se reproduce constantemente en el aula de Infantil y Primaria. Cuando un niño o niña reparte el material y pone «un lápiz para cada compañero», está usando la misma lógica que el pastor mesopotámico. No necesita saber cuántos son, solo necesita ejecutar la correspondencia. Una actividad clásica como «poner la mesa» en el rincón de juego simbólico, donde se coloca un plato, un vaso y un cubierto para cada muñeco, es una potentísima situación de aprendizaje de la correspondencia uno a uno.

4.2.1.3 Fase 3: Nombrar (La Creación de Numerales)

Una vez que la idea de equivalencia entre colecciones se asienta, las sociedades sienten la necesidad de comunicar estas cantidades de forma más eficiente. Así nacen las palabras-número o *numerales*. Inicialmente, estos nombres no eran abstractos, sino que estaban ligados a referentes concretos y universales, principalmente el cuerpo humano.

Anclaje Histórico: El Cuerpo como Primera Calculadora

En muchas lenguas, la etimología de los primeros números revela esta conexión corporal. La palabra para «cinco» suele estar relacionada con «mano», y «diez» con «dos manos». Sistemas de conteo más complejos, como el de los Oksapmin de Nueva Guinea, utilizan hasta 27 partes del cuerpo (dedos, muñeca, codo, hombro, ojo, nariz...) para contar, creando una secuencia numérica corporal y gestual (Dehaene, 1997). El cuerpo fue, literalmente, la primera calculadora.

Ejemplo: El uso de los dedos como referente numérico

El alumnado recorre exactamente este camino. Antes de dominar la secuencia oral abstracta, su primer y más fiable sistema de conteo son los dedos. Cuando un niño levanta tres dedos para pedir tres galletas, está haciendo lo mismo que nuestros ancestros: usar un conjunto de referencia corporal para comunicar una cantidad. Está uniendo la colección de dedos a la palabra-número «tres», forjando el vínculo entre lo concreto y lo verbal.

4.2.1.4 Fase 4: Simbolizar (La Invención de las Cifras)

El último paso es la creación de símbolos gráficos para registrar las cantidades de forma permanente. Esto permite comunicar números a través del tiempo y el espacio, y es el nacimiento de la matemática escrita. Los primeros sistemas eran, de nuevo, una extensión de la correspondencia.

Anclaje Histórico: Primeras Simbolizaciones Numéricas

Uno de los artefactos matemáticos más antiguos que se conocen es el *Hueso de Ishango* (20.000 a.C.), encontrado en la actual República Democrática del Congo. Es un peroné de babuino con una serie de muescas talladas en grupos. Cada muesca es una marca de conteo, una correspondencia uno a uno con un objeto o un evento. Los primeros numerales romanos (I, II, III) son una herencia directa de este sistema de tallado.

Más tarde, los *quipus* del Imperio Inca representaron un sistema de registro increíblemente sofisticado. Usando cuerdas de diferentes colores con nudos de distintos tipos y posiciones, podían registrar información numérica (censos, cosechas) con gran precisión, sin escribir un solo símbolo en una superficie plana (Ifrah, 1997).

Ejemplo: La evolución de la representación, del dibujo al símbolo

Cuando pedimos a un infante, que aún no conoce los símbolos numéricos convencionales, que anote cuántos coches de juguete hay en una caja, su primera estrategia suele ser pictórica o icónica: dibuja cinco palitos o cinco círculos. Está reinventando el sistema de muescas del Hueso de Ishango. Su «escritura» es una representación en correspondencia uno a uno con los objetos. Solo después de dominar esta fase, estará cognitivamente preparado para comprender que todo ese conjunto de palitos se puede representar de forma más eficiente con un único símbolo arbitrario: el «5».

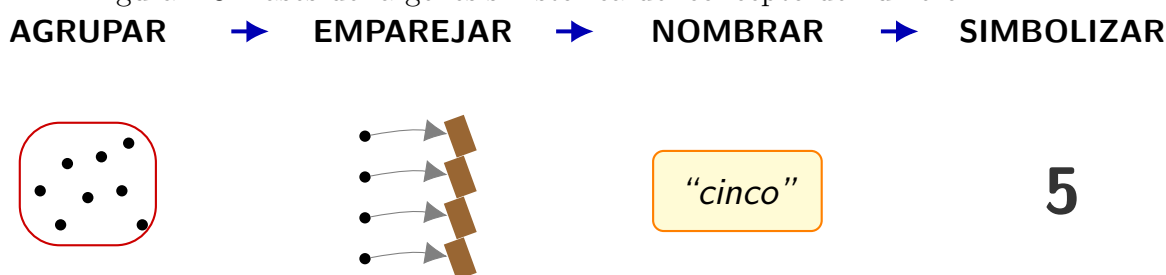
Para el futuro o la futura docente: La Historia como Herramienta Diagnóstica

El viaje desde la percepción de un grupo hasta el uso del símbolo «5» es un recorrido de miles de años para la humanidad, y un proceso de varios años para un niño. Comprender estas fases te permite:

- *Diagnosticar*: Si un discente falla al contar, puedes identificar si el problema está en la correspondencia, en la secuencia oral o en la simbolización.

- *Intervenir con sentido*: En lugar de corregir sin más, puedes proponer actividades que refuercen la fase en la que el alumno muestra dificultades (ej. juegos de emparejar si falla la correspondencia).
- *Valorar el error*: Un discente que dibuja 7 palitos en lugar del “7” no está cometiendo un error, sino demostrando que se encuentra en una fase de simbolización icónica, un paso necesario y valioso en su aprendizaje.

Figura 4.3: Fases de la génesis histórica del concepto de número.



Implicación didáctica: Fases del Desarrollo Numérico

Observa a un niño o niña en edad de Infantil jugando libremente. Verás reflejadas estas fases históricas: primero, agrupa sus bloques por colores (*agrupar*). Luego, pone un muñeco en cada coche de juguete que tiene (*emparejar*). Más tarde, al pedirle galletas, te dirá «dos» mientras levanta dos dedos (*nombrar*). Finalmente, en la escuela, aprenderá que eso se escribe con un «2» (*simbolizar*). La historia de la matemática reside en la mente de cada infante. Tu labor es acompañarle en este fascinante viaje de redescubrimiento.

Clave Didáctica: La Paciencia Docente ante el Desarrollo Numérico

Comprender que la humanidad necesitó miles de años para pasar del emparejamiento al símbolo nos debe hacer más pacientes y comprensivos con el alumnado que necesita tiempo para recorrer ese mismo camino. Tu aula es un microcosmos de esta historia.

4.2.2 La Naturaleza Formal: Las Dos Caras del Número

La intuición histórica de la correspondencia uno a uno, que vimos en la sección anterior, es el corazón lógico sobre el que se construye la definición matemática del número. Formalmente, decimos que dos conjuntos son *coordinables* o *equipotentes* cuando entre sus elementos se puede establecer una *correspondencia biunívoca*. Pensemos en ello como un baile: si en una sala todas las personas tienen una pareja de baile y nadie se queda sin pareja, los dos conjuntos de bailarines son equipotentes, sin necesidad de saber cuántas personas hay.

A partir de esta idea fundamental, el concepto de número natural se despliega en dos aspectos o «caras» que, aunque distintas, son inseparables, como las dos caras de una misma moneda (Chamorro, 2003/2006).

4.2.2.1 Aspecto Cardinal: El número como cantidad

El aspecto cardinal del número responde a la pregunta fundamental «¿cuántos hay?». Se refiere a la *propiedad global de una colección*, a su tamaño o numerosidad. El cardinal es, por tanto, la cualidad abstracta que comparten todos los conjuntos que son coordinables entre sí. Un conjunto de cinco manzanas, uno de cinco piedras y uno de cinco ideas tienen propiedades perceptuales muy diferentes, pero comparten una misma propiedad matemática: su cardinal es «cinco». La acción de determinar esta propiedad se llama *cardinación*. Cuando un niño o niña cuenta los lápices de su estuche y concluye que «hay ocho», está asignando un cardinal a esa colección.

4.2.2.2 Aspecto Ordinal: El número como posición

El aspecto ordinal, por su parte, responde a la pregunta «¿en qué posición está?» o «¿cuál le toca?». No se refiere a la colección entera, sino al *lugar que ocupa un elemento concreto dentro de una secuencia ordenada*. El ordinal es la «etiqueta» única que se asigna a cada elemento durante el proceso de conteo para distinguirlo de los demás y para llevar un registro de los elementos ya contados. Cuando decimos que un corredor ha llegado el *tercero*, o que vivimos en la *quinta* planta, estamos utilizando el número en su faceta ordinal.

Clave Didáctica: La Síntesis Mágica del Conteo: De la Etiqueta al Cardinal

Es vital entender que, aunque los hemos presentado por separado, ambos aspectos se construyen *simultáneamente* en cada acto de conteo significativo. Este es uno de los saltos cognitivos más importantes en el aprendizaje numérico.

Imaginemos a un discente contando 5 bloques:

1. Al tocar el primer bloque y decir «uno», está usando el número como *ordinal*: es la etiqueta de ese bloque.
2. Al tocar el segundo y decir «dos», asigna una nueva etiqueta *ordinal*.
3. ... y así sucesivamente hasta llegar al último bloque, que etiqueta como «cinco» (*ordinal*).

El momento mágico, el «clic» conceptual, ocurre cuando el discente comprende que esa última palabra-número, «cinco», tiene un doble significado: no solo etiqueta al último bloque que ha tocado, sino que representa la cantidad *total* de la colección. Es en ese instante cuando la secuencia de acciones ordinales culmina en la asignación de un *cardinal*.

Este logro es lo que Gelman y Gallistel denominaron el *Principio de Cardinalidad* (Gelman & Gallistel, 1978). Un discente que, tras contar hasta cinco, necesita volver a contar si le preguntamos cuántos hay, domina el aspecto ordinal (sabe etiquetar en orden) pero aún no ha consolidado el cardinal. Nuestra labor docente es, precisamente, ayudarle a construir ese puente.

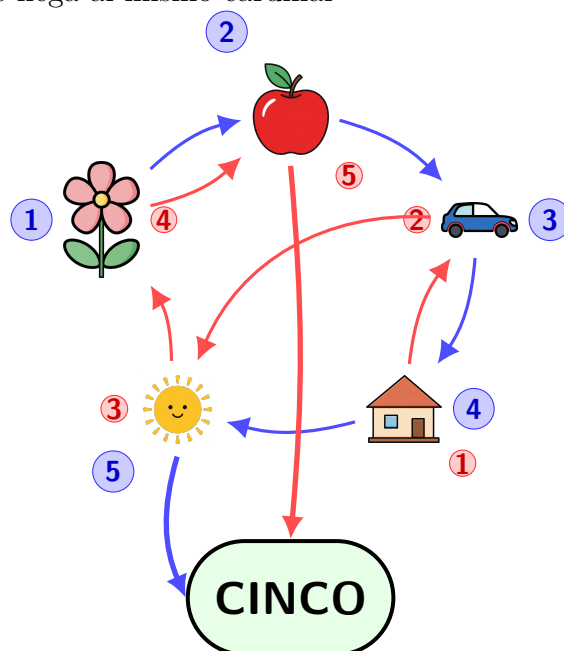
4.2.2.3 El Pilar de la Estabilidad: El Principio de Invarianza del Número

Toda esta construcción dual se apoya en un pilar lógico indispensable para que el concepto de número sea estable y fiable: el *Principio de Invarianza del Número*.

Este principio establece que el número cardinal de un conjunto finito es *independiente del orden* que se adopte para contar sus elementos. Un conjunto de 5 lápices seguirá teniendo 5 lápices, empecemos a contar por el de la izquierda, por el de la derecha o por el del medio (Figura 4.4).

Sin esta certeza lógica, la aritmética sería un castillo de naipes. Si el resultado de contar una colección pudiera cambiar con cada nuevo recuento, la operación $2 + 3$ no tendría un resultado estable. Esta idea, que a un adulto le parece evidente, está íntimamente ligada a la noción piagetiana de *conservación de la cantidad*. Un discente que no ha construido la conservación (que cree que hay más fichas si se separan) difícilmente podrá comprender en profundidad el principio de invarianza. Ambos son dos manifestaciones de la misma victoria de la lógica sobre la percepción. Por ello, es fundamental proponer actividades de conteo de colecciones desordenadas, animando al alumnado a contarlas de diferentes maneras para que, a través de la experiencia, descubran y validen por sí mismos esta propiedad fundamental.

Figura 4.4: Ilustración del Principio de Invarianza del Número: no importa el orden, para cada conjunto se llega al mismo cardinal



4.2.3 La Riqueza Semántica: Funciones y Contextos de Uso

Más allá de su definición formal, el poder del número reside en su increíble versatilidad. Un mismo símbolo numérico es como una navaja suiza conceptual: una herramienta polivalente cuyo significado y función cambian radicalmente según el contexto. Esta *polisemia* es una fuente de riqueza y potencia, pero también un desafío didáctico considerable. Para el alumnado, aprender a «leer» el significado correcto del número en cada situación es un paso crucial hacia el verdadero sentido numérico (Chamorro, 2003/2006). Como docentes, nuestra labor es ser guías en este paisaje semántico, diseñando actividades variadas que revelen al alumnado la utilidad y omnipresencia de los números en todas sus facetas.

A continuación, analizamos en profundidad cada uno de los principales contextos de uso.

4.2.3.1 La Secuencia: El número como cantinela

Este es el primer contacto que tiene el infante con los números. La secuencia numérica («uno, dos, tres, cuatro...») se aprende inicialmente como una *cadena de sonidos*, una canción o una retahíla. En este contexto, las palabras-número aún no están asociadas a cantidades. Su función es rítmica, de memorización y de ordenación de un recitado. Corresponde al *Nivel Cuerda* de Fuson (que veremos más adelante), donde la cadena es una unidad indivisible. Aunque pueda parecer un conocimiento superficial, es el andamio verbal indispensable sobre el que se construirán todos los demás significados.

4.2.3.2 El Cardinal: El número como cantidad

Este es el significado más fundamental del número y el que está más conectado con nuestra intuición. El aspecto cardinal responde a la pregunta «¿cuántos hay?» y se refiere a la propiedad de una colección. El neurocientífico Stanislas Dehaene (1997) argumenta que los seres humanos poseemos un «sentido numérico» innato, una capacidad para percibir y comparar pequeñas cantidades de forma aproximada, que es la base biológica del concepto de cardinal. En el aula, este contexto se desarrolla a través de varias habilidades:

- *Subitización*: El reconocimiento instantáneo de pequeñas cantidades (hasta 3 o 4) sin necesidad de contar. Es lo que hacemos al ver los puntos en un dado.
- *Conteo*: El procedimiento sistemático para determinar el cardinal exacto de una colección.
- *Estimación*: La valoración aproximada del cardinal de una colección grande.

4.2.3.3 Subitización: El Ojo Matemático

Una de las habilidades fundamentales para la construcción del cardinal es la *subitización* (del latín *subitus*, «de repente»), que es la capacidad de reconocer cantidades pequeñas de forma rápida y precisa sin necesidad de contar. Como docentes, es crucial entender que esta habilidad no es unitaria, sino que se manifiesta de dos formas cualitativamente distintas, cuya comprensión es clave para nuestra labor didáctica (Clements & Sarama, 2020).

1. *Subitización Perceptual*: Es el reconocimiento casi instantáneo y holístico de patrones muy pequeños (generalmente hasta 4 o 5 objetos). Es una habilidad innata que compartimos con otras especies. Cuando vemos los tres puntos en un dado y sabemos que es «tres» sin contar, estamos usando la subitización perceptual. Se basa en la percepción de un patrón visual como un todo.
2. *Subitización Conceptual*: Es la capacidad de reconocer un conjunto como la composición de otros grupos más pequeños que sí son perceptualmente subitizables. Es un proceso constructivo y fundamental para el desarrollo del sentido numérico. Por ejemplo, ver 7 puntos en un Marco de Diez y reconocerlo instantáneamente no es porque exista un patrón de «siete», sino porque se ve como «un grupo de 5 y un grupo de 2».

Ejemplo práctico: Descomposición Visual con el Marco de Diez

El docente muestra brevemente («flashea») un Marco de Diez con 7 fichas a su alumnado y lo oculta. Pregunta: «¿Cuántas fichas habéis visto? ¿Cómo lo sabéis?».

Un discente podría responder: «Vi siete». El docente insiste: «¿Pero cómo lo supiste tan rápido? ¿Contaste todas?».

La respuesta clave que buscamos es: «No, vi que la fila de arriba estaba llena, que son 5, y que había 2 más abajo. 5 y 2 son 7».

En esta interacción, el discente no solo ha determinado el cardinal 7. Gracias a la estructura del material, *ha visto* la descomposición $7 = 5 + 2$. Al mismo tiempo, también puede ver que «faltan 3 para llenar el marco», interiorizando la relación $7 + 3 = 10$. Fomentar la subitización conceptual con herramientas como el Marco de Diez es sembrar las bases de un cálculo mental estratégico y comprensivo.

Clave Didáctica: De la Percepción a la Estrategia

Mientras que la subitización perceptual es una base, nuestro objetivo didáctico es desarrollar la *subitización conceptual*. Esta habilidad es la que permite al alumnado dejar de ver los números como una colección de unidades y empezar a verlos en términos de sus partes. Fomentar esta habilidad, especialmente con herramientas como el Marco de Diez, es plantar la semilla de la composición y descomposición de números, la base de todo el cálculo mental flexible y estratégico.

4.2.3.4 El Ordinal: El número como posición

El aspecto ordinal responde a la pregunta «¿en qué posición está?» y se refiere al lugar de un elemento dentro de una serie ordenada. Mientras que el cardinal es una propiedad *global* del conjunto, el ordinal es una propiedad *individual* de uno de sus miembros. Este contexto es fundamental para la estructuración del tiempo y el espacio en la vida cotidiana: el primer día de la semana, la tercera fila de asientos, el segundo plato. Didácticamente, es crucial trabajar la diferencia entre «contar 3 objetos» (cardinal) y «señalar el 3er objeto» (ordinal).

4.2.3.5 La Medida: El número como cuantificador de lo continuo

Este contexto representa un salto cognitivo de gran importancia. Mientras que el cardinal se aplica a conjuntos de objetos *discretos* (que se pueden contar de uno en uno, como las ovejas), la medida se puede usar para cuantificar magnitudes *continuas* (longitud, peso, capacidad, tiempo). Para medir, no basta con contar; es necesario seleccionar una *unidad de referencia* e iterarla. No es lo mismo tener «5 manzanas» (cardinal) que tener «5 kilogramos de manzanas» (medida). El número «5» en el segundo caso no se refiere a 5 objetos, sino a 5 repeticiones de la unidad «kilogramo». Confundir estos dos contextos es una fuente de errores muy común, por ejemplo, cuando un discente cree que «un metro» es simplemente la etiqueta del final de la regla, en lugar de la cantidad de espacio que abarca.

4.2.3.6 El Código o Etiqueta: El número como nombre

En este contexto, el número pierde por completo su valor cuantitativo. Su única función es *identificar, nombrar o diferenciar* un elemento de otro. Es un uso nominal. El número de una línea de autobús, el dorsal de un futbolista, un código postal o un número de teléfono son ejemplos perfectos.

Ejemplo: Números como código

Una forma excelente de hacer que el alumnado tome conciencia de la naturaleza no cuantitativa del número como código es proponer una operación absurda. Pregúntales: «Si mi número de teléfono es 612345678 y el tuyo es 698765432, ¿qué sentido tiene sumar nuestros números de teléfono?». La respuesta es «ninguno». Sumar dorsales de jugadores tampoco nos da un nuevo jugador. Esta reflexión les ayuda a entender que, en estos casos, el «número» es solo un nombre y no una cantidad con la que se pueda operar.

Tabla 4.1: Síntesis de los contextos de uso del número en Educación Primaria.

Contexto de Uso	Pregunta Clave	Función Principal	Ejemplo de Aula
<i>Secuencia</i>	(No responde a objetos)	Recitar la serie ordenada	«Contamos hasta diez para guardar el material.»
<i>Cardinal</i>	¿Cuántos hay?	Medir una colección discreta	«Hay 23 estudiantes en clase hoy.»
<i>Ordinal</i>	¿En qué posición está?	Ordenar una colección	«Tu equipo es el 3º en exponer el trabajo.»
<i>Medida</i>	¿Cuánto mide/pesa?	Medir una magnitud continua	«Esta botella es de 2 litros.»
<i>Código / Etiqueta</i>	¿Cuál es?	Identificar o nombrar	«Mi casa es el número 7 de la calle.»

Ejemplo práctico: Las Múltiples Caras de un Número

En una misma mañana, un alumno o alumna de primero puede encontrarse con el número 4 en todas sus facetas:

- Cuenta que hay 4 rotuladores en su estuche (*Cardinal*).
- Es el 4º en la fila para ir al patio (*Ordinal*).
- Mide con la regla y dice que su goma mide 4 centímetros (*Medida*).
- Juega en el equipo número 4 de la clase (*Código*).
- Recita «...dos, tres, *cuatro*» en una canción numérica (*Secuencia*).

¿Cómo intervenimos como docentes? Nuestra labor no es solo presentar estas situaciones, sino hacerlas explícitas. Podemos:

- *Utilizar el diálogo socrático*: «Cuando decimos que eres el 4º de la fila, ¿significa que hay 4 niños en la fila? ¿Y el 4 de tu equipo, significa que tu

equipo tiene 4 jugadores? ¿Por qué sí o por qué no?».

- *Crear un «Mural de los Números»:* Un panel en clase con cinco columnas, una para cada contexto. A lo largo de la semana, el alumnado va pegando *post-its* o dibujos de situaciones en las que han encontrado números y los clasifican.
- *Aprovechar las rutinas:* Al pasar lista (ordinal y cardinal), al mirar el calendario (ordinal y medida de tiempo), al organizar los equipos (código), estamos constantemente inmersos en estos contextos. Basta con señalarlos y nombrarlos para construir un concepto de número flexible y potente.

4.3 Aspectos Psicopedagógicos y Didácticos: ¿Cómo se Construye el Número?

Si la sección anterior respondió a la pregunta «¿qué es el número?», esta se adentra en el corazón de la didáctica para responder a la pregunta «¿cómo llega a serlo en la mente del alumnado?». El foco se desplaza del objeto matemático al sujeto que aprende.

Lejos de la idea obsoleta de que la mente infantil es una «pizarra en blanco», hoy entendemos que el alumnado llega al aula con un bagaje de ideas intuitivas. Nuestra labor como docentes es conectar con esas ideas —a veces incompletas o erróneas— para ayudar a formalizarlas, enriquecerlas y, en ocasiones, desafiarlas.

4.3.1 La Construcción del Concepto la Infancia

Para guiar este proceso constructivo, nos apoyaremos en tres marcos teóricos que actúan como lentes indispensables para comprender el pensamiento numérico infantil: el enfoque constructivista de *Piaget*, los principios lógicos del conteo de *Gelman* y *Gallistel*, y los niveles de desarrollo de la secuencia de *Fuson*.

4.3.1.1 El Enfoque Constructivista de Piaget: La Conservación de la Cantidad

Como vimos en profundidad en el Capítulo 1, la teoría de Jean Piaget Piaget, 1941/1967 nos enseña que el conocimiento lógico-matemático no se transmite, sino que se *construye activamente*. El hito cognitivo que marca la transición del pensamiento preoperacional al de las operaciones concretas es la adquisición de la *conservación de la cantidad*. Este concepto, que describe la comprensión de que una cantidad no cambia aunque se modifique su apariencia perceptual, es la victoria de la lógica sobre la tiranía de la percepción y el pilar sobre el que se asienta la invarianza del número.

Comprender el mecanismo psicológico que subyace a la *no conservación* (la centración y la irreversibilidad del pensamiento) es crucial para diseñar intervenciones eficaces.

Clave Didáctica: Intervención ante la No Conservación de la Cantidad

La teoría de Piaget nos da una pista fundamental: la conservación no se puede «enseñar» verbalmente. Corregir al discente («¡Pero si hay las mismas, no he quitado ninguna!») es ineficaz, porque choca contra su estructura lógica. Nuestra

intervención debe ser indirecta, experiencial y centrada en la acción y la reflexión. El docente actúa como un *detective cognitivo* que, en lugar de dar respuestas, diseña situaciones que generan preguntas en la mente del discente.

1. *Generar Conflicto Cognitivo (La estrategia clave)*: La herramienta más potente es hacer que el propio discente *cuenta* las fichas en ambas situaciones. Al obtener el mismo número, se produce un conflicto entre su percepción («es más larga») y su acción de contar («da el mismo número»).
2. *Promover la Reversibilidad mediante la Acción*: Pedir al discente que revierta la acción: «¿Y qué pasaría si volvieras a juntar las fichas como estaban antes?». Hacer que él mismo sea el agente de la transformación y su inversa le ayuda a interiorizar la reversibilidad.
3. *Fomentar el Diálogo y la Argumentación (Vygotsky)*: Generar un debate entre discentes conservadores y no conservadores («Julia dice que hay más, pero Marcos dice que hay las mismas. ¿Quién tiene razón? ¿Por qué? ¡Convenced a vuestro compañero!»). La necesidad de verbalizar y defender el propio razonamiento (conflicto socio-cognitivo) es un motor de desarrollo muy poderoso.

La figura 4.5 integra las aportaciones de Piaget con las de otros teóricos clave para ofrecer una visión panorámica del desarrollo del pensamiento numérico en las primeras edades.

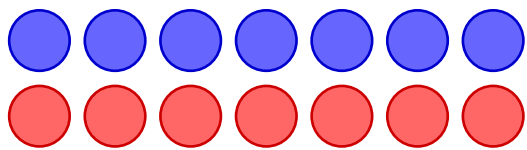
Para un docente, es crucial entender el mecanismo psicológico que subyace a esta respuesta aparentemente ilógica. No es un simple error de conteo, sino la manifestación de dos limitaciones cognitivas clave del pensamiento preoperacional:

- *La Centración*: La mente del infante queda «atrapada» por la característica perceptual más llamativa (en este caso, la longitud de la fila), siendo incapaz de considerar simultáneamente otras variables (como la densidad o el espacio entre las fichas). Su atención está *centrada* en una sola dimensión.
- *La Irreversibilidad*: El discente es incapaz de revertir mentalmente la acción. No puede «rebobinar la película» en su mente para comprender que si volviera a juntar las fichas, la fila sería idéntica a la original. La transformación es vista como un cambio de estado definitivo.

Comprender esto nos permite ver la respuesta del discente no como un fallo, sino como la conclusión lógica de una mente que opera con unas reglas diferentes a las del adulto. La adquisición de la conservación es, en esencia, la victoria de la lógica sobre la tiranía de la percepción. Es el momento en que el infante descubre una propiedad matemática fundamental: la *invarianza*. Sin esta noción estable de cantidad, la aritmética es un edificio sin cimientos: la operación $3 + 4 = 7$ carecería de sentido si el resultado pudiera cambiar con solo mover las fichas.

Figura 4.5: La tarea piagetiana de conservación de la cantidad.

A. Situación Inicial: Correspondencia

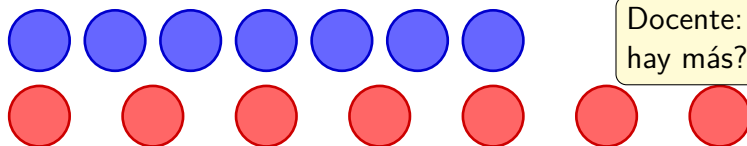


Docente: «¿En qué fila hay más fichas, o hay las mismas?»

Respuesta Típica:
«¡Hay las mismas!»

↓
Acción del Docente:
Sin añadir ni quitar fichas,
se separan las de la fila inferior.

B. Situación Transformada: Centración Perceptiva



Docente: «Y ahora, ¿dónde hay más?»

Respuesta No Conservadora:
«¡En la de abajo, porque es más larga!»

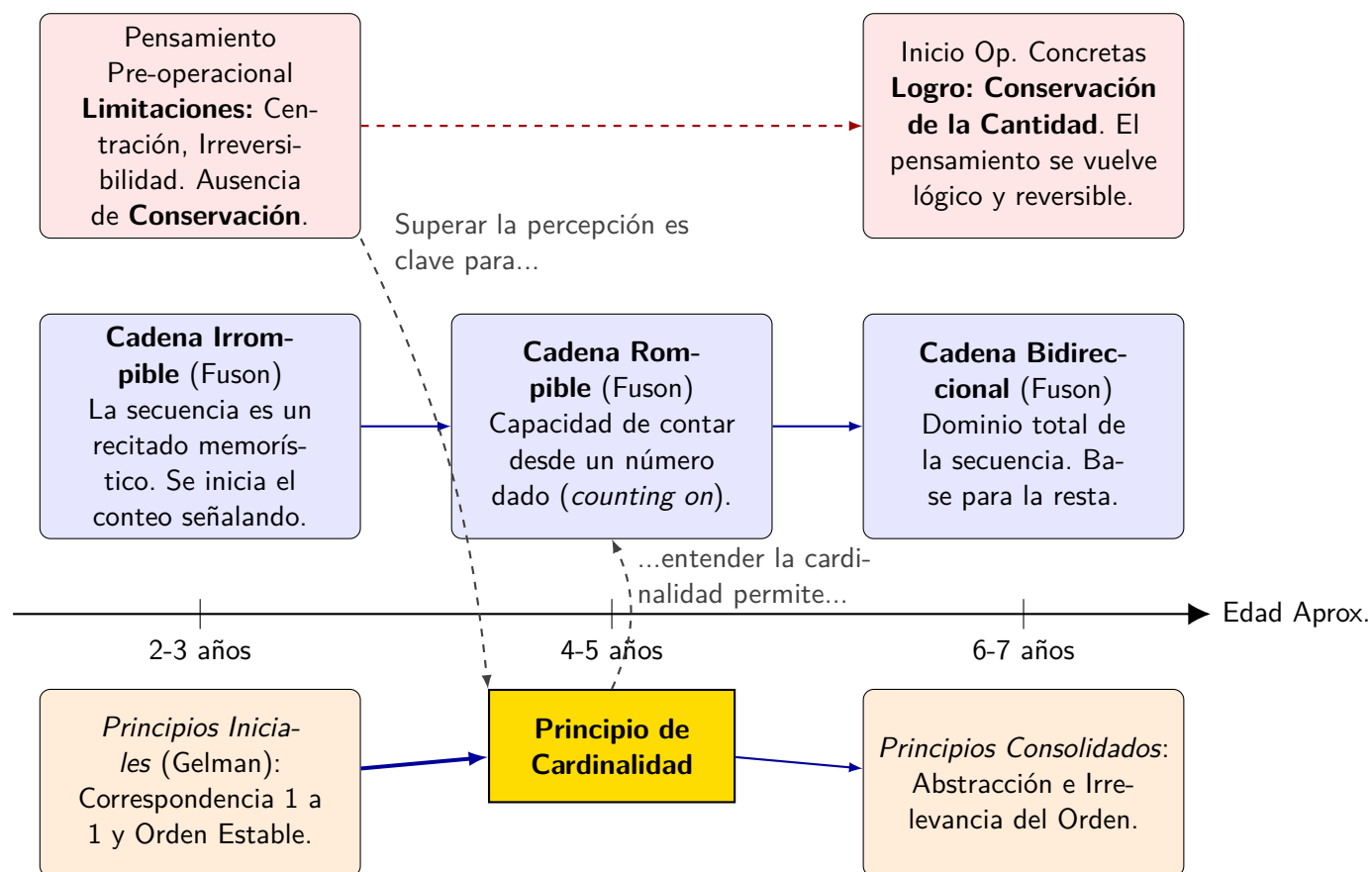


Figura 4.6: Mapa integrador del desarrollo del pensamiento numérico (2-7 años). El gráfico muestra la progresión y, más importante, la *interconexión* entre los hitos descritos por Piaget, los niveles de Fuson y los principios de Gelman y Gallistel.

Clave Didáctica: Intervención ante la No Conservación de la Cantidad

La teoría de Piaget nos da una pista fundamental: la conservación no se puede «enseñar» verbalmente. Corregir al discente («¡Pero si hay las mismas, no he quitado ninguna!») es ineficaz, porque choca contra su estructura lógica. Nuestra intervención debe ser indirecta, experiencial y centrada en la acción y la reflexión. El docente actúa como un *detective cognitivo* que, en lugar de dar respuestas, diseña situaciones que generan preguntas en la mente del discente.

1. *Generar Conflicto Cognitivo (La estrategia clave)*: La herramienta más potente es hacer que el propio discente *cuenta* las fichas en ambas situaciones. Al contar la fila larga y obtener «siete», y luego la corta y obtener también «siete», se produce un conflicto entre su percepción («es más larga») y su acción de contar («da el mismo número»). Es este desequilibrio, repetido en múltiples contextos, el que le impulsará a construir una lógica más potente para resolver la contradicción.
2. *Promover la Reversibilidad mediante la Acción*: En lugar de revertir la acción nosotros, le pedimos al discente que lo haga: «¿Y qué pasaría si volvieras a juntar las fichas como estaban antes? ¿Cuántas crees que habría? ¡Pruébalo!». Hacer que él mismo sea el agente de la transformación y su inversa le ayuda a conectar los estados y a interiorizar la reversibilidad.
3. *Fomentar el Diálogo y la Argumentación (Vygotsky)*: Si en un grupo hay discentes conservadores y no conservadores, podemos generar un debate: «Julia dice que hay más en la fila larga, pero Marcos dice que hay las mismas. ¿Quién tiene razón? ¿Por qué? ¡Convenced a vuestro compañero!». La necesidad de verbalizar y defender su propio razonamiento frente a otros puntos de vista (conflicto socio-cognitivo) es un motor de desarrollo muy poderoso.
4. *Ser Pacientes y Variar los Contextos*: La conservación es un hito del desarrollo, no una lección de un día. Nuestra labor es ofrecer múltiples y variadas experiencias (con líquidos, con plastilina, con colecciones de objetos) para que el discente pueda generalizar el principio de invarianza.

4.3.1.2 El Proceso de Contar: Los Principios Lógicos de Gelman y Gallistel

A primera vista, contar parece una tarea mecánica de recitación y señalamiento. Sin embargo, las investigaciones pioneras de Gelman y Gallistel (1978) revelaron que es una actividad de una gran complejidad cognitiva. Para que el conteo pase de ser un simple ritual a una herramienta matemática genuina, el alumnado debe llegar a dominar (la mayoría de las veces de forma implícita) cinco principios lógicos que constituyen la «gramática oculta» del acto de contar.

Como docentes, conocer estos principios nos convierte en *diagnosticadores precisos* de las dificultades del alumnado. Nos permite ir más allá del «lo ha hecho bien/mal» para entender *por qué* un discente comete un error determinado y cómo podemos ayudarlo a superarlo (Tabla 4.2).

Principio 1: Correspondencia uno a uno. «A cada objeto le corresponde una, y sólo una, palabra-número». Este es el principio más fundamental y visible del conteo. Requiere

Tabla 4.2: Principios del Conteo Significativo (Gelman & Gallistel, 1978)

<i>Principio y Definición</i>	<i>Pregunta Clave del Docente (Observación)</i>	<i>Error Típico (Síntoma de Dificultad)</i>
1. <i>Correspondencia</i> Asignar a cada objeto una, y solo una, palabra-número.	¿Sincroniza el gesto de señalar/tocar con la palabra que dice? ¿Cuenta cada objeto una sola vez?	El niño cuenta más rápido de lo que señala (o viceversa). Se salta objetos o cuenta el mismo objeto dos veces. El resultado final no se corresponde con la cantidad real.
2. <i>Orden estable</i> Recitar la secuencia numérica siempre en el mismo orden.	¿La secuencia que recita es la convencional? ¿Comete errores en los «nudos» del lenguaje (ej. al pasar del 19 al 20, o del 29 al 30)?	Omite números («...seis, ocho...»). Invierte el orden («...catorce, trece...»). Se estanca o inventa palabras en los cambios de decena («veintinueve, veintidiez...»).
3. <i>Cardinalidad</i> Comprender que la última palabra-número representa el total de la colección.	Después de contar, si le pregunto «¿cuántos hay?», ¿me da el último número que dijo o siente la necesidad de volver a contar?	El niño cuenta correctamente hasta 8. Al preguntarle cuántos hay, en lugar de responder «ocho», vuelve a contar la colección desde el principio. El conteo es un ritual, no una herramienta para cuantificar.
4. <i>Abstracción</i> Entender que el conteo se puede aplicar a cualquier tipo de colección.	¿Es capaz de contar objetos heterogéneos (un lápiz, una goma, un sacapuntas)? ¿Puede contar elementos no tangibles como aplausos o saltos?	El niño cuenta sin problema una fila de 5 bloques iguales, pero se muestra inseguro o se niega a contar una colección de juguetes variados. Se bloquea si se le pide que cuente sonidos.
5. <i>Irrelevancia del orden</i> Comprender que el resultado del conteo no depende del orden en que se cuenten los elementos.	Si cuenta una colección desordenada dos veces, empezando por objetos distintos, ¿se reafirma en el resultado o duda porque el procedimiento ha sido diferente?	El niño cuenta un grupo de 6 fichas y obtiene 6. Se le pide que vuelva a contar empezando por otra ficha. Lo hace, obtiene 6 de nuevo, pero muestra sorpresa o afirma que «ahora también da 6», como si fuera una coincidencia.

una compleja *sincronización* entre el proceso motor (señalar, tocar o mover objetos) y el proceso verbal (recitar la secuencia numérica). La dificultad no reside en conocer los números ni en señalar, sino en coordinar ambas acciones en un ritmo perfecto. Históricamente, es el principio que sustenta los sistemas de conteo más antiguos, como las muescas en un hueso: cada muesca correspondía a un elemento contado.

Ejemplo: Diagnóstico de la Correspondencia Uno a Uno

Observación en el aula: Un discente cuenta un grupo de coches de juguete. Su dedo se mueve más rápido que su voz, y al final dice un número mayor al de coches reales.

Interpretación: El problema no es que no sepa los números, sino una falta de dominio de este principio. Su «procesador motor» va a una velocidad distinta que su «procesador verbal».

Intervención: La corrección verbal («No, son cinco») es insuficiente. La intervención debe ser procedimental. Le pedimos: «Vamos a hacerlo de otra forma. Coge cada coche y pásalo a esta otra caja mientras dices el número». La acción motora gruesa de mover el objeto ralentiza el proceso y fuerza la sincronización, ayudando a construir el esquema de la correspondencia.

Principio 2: Orden estable. «Las palabras-número deben recitarse siempre en la misma secuencia». La secuencia numérica (uno, dos, tres...) es una lista ordenada y fija que debe ser recuperada de la memoria siempre de la misma manera. Este principio es el que dota de fiabilidad al conteo. Si la secuencia cambiara cada vez, sería imposible asignar un cardinal estable. Es el primer principio que los infantes suelen dominar, a menudo a través de canciones y rimas (en el *Nivel Cuerda* de Fuson), lo que a veces nos lleva al error de pensar que un discente que «recita» hasta veinte ya «sabe contar».

Principio 3: Cardinalidad. «La última palabra-número enunciada tiene un significado especial: representa el total de elementos de la colección». Este es, quizás, el salto conceptual más importante. El infante debe comprender que la última etiqueta (p. ej., «ocho») no solo nombra al octavo objeto (su función ordinal), sino que también resume una propiedad de toda la colección: su cantidad (su función cardinal). Es el puente que conecta el proceso de contar con su resultado y propósito, uniendo las dos caras del número que vimos en la sección anterior.

Clave Didáctica: La Pregunta Clave para Construir la Cardinalidad

La consolidación de este principio no es un proceso de maduración automática; es un aprendizaje mediado en gran parte por el lenguaje. El motor que impulsa al discente a cruzar el puente entre lo ordinal y lo cardinal es la *interacción verbal con un adulto* que, tras la finalización del conteo, formula la pregunta clave: «Entonces, ¿cuántos hay?».

Esta pregunta, aparentemente simple, es una potente intervención didáctica. Obliga al discente a reflexionar sobre el propósito de la acción que acaba de realizar. Le hace notar que el objetivo final del conteo no era simplemente recitar una lista de nombres, sino responder a una pregunta sobre la cantidad total.

Es a través de la repetición de este ciclo *acción (contar) ->pregunta (¿cuántos?) ->reflexión* que el discente descubre que la última palabra de su conteo es, precisamente, la respuesta que se le está pidiendo. El diálogo es el verdadero catalizador de esta transición conceptual.

Ejemplo: Diagnóstico del Principio de Cardinalidad

Observación el aula: Un discente cuenta correctamente una fila de 8 fichas. Inmediatamente después le preguntamos: «Entonces, ¿cuántas fichas hay?». Ella nos mira y... ¡vuelve a empezar a contar desde el uno!

Interpretación: Ha realizado el procedimiento de etiquetado correctamente, pero no ha consolidado este principio. Para ella, «ocho» es solo el nombre del último objeto, no la respuesta a la pregunta «¿cuántos hay?».

Intervención: Debemos enfatizar verbalmente la conclusión («...siete, ¡ocho! ¡Hay OCHO fichas!»). Una estrategia muy potente es invertir la tarea: «Por favor, dame ocho fichas». Esta acción la obliga a usar el cardinal como objetivo, dotando de significado al final del conteo.

Principio 4: Abstracción. «Se puede contar cualquier cosa». Este principio establece que los principios anteriores se pueden aplicar a cualquier colección de entidades, sean del tipo que sean. El desarrollo de este principio es un proceso en sí mismo. Al principio, los niños pueden pensar que contar solo se aplica a objetos físicos, tangibles y homogéneos (p.ej., una fila de bloques iguales). El dominio de este principio implica entender que también se pueden contar colecciones heterogéneas (un coche, una muñeca y un lápiz, Fig 4.4), objetos no tangibles (aplausos, saltos, campanadas) e incluso entidades mentales (ideas, deseos, los días que faltan para su cumpleaños). Es el principio que libera al número de sus ataduras concretas y lo convierte en una herramienta universal del pensamiento.

Principio 5: Irrelevancia del orden. «El resultado final del conteo no depende de por dónde empezamos a contar». Este principio es la culminación lógica del proceso y reafirma la idea de *invarianza* que vimos con Piaget. El discente debe comprender que el cardinal de un conjunto es una propiedad intrínseca de ese conjunto, y no del procedimiento que él o ella elija para contarlos. Dominar este principio otorga una gran flexibilidad al conteo y demuestra una comprensión profunda de que el orden es una herramienta del proceso, pero no afecta al resultado final (Figura 4.4). Didácticamente, es un principio que no se enseña, sino que se *descubre*. Animando al alumnado a contar la misma colección desordenada empezando por diferentes objetos, y a compartir sus resultados, les permitimos construir por sí mismos esta certeza lógica fundamental.

4.3.1.3 El Dominio de la Secuencia: Los Niveles de Desarrollo de Fuson

La propia secuencia numérica oral, que a los adultos nos parece una lista simple y automática, es para el infante un objeto mental complejo que se construye y se refina a lo largo de varios años. La investigadora Karen Fuson (1988), en su trabajo seminal, describió cinco niveles que nos permiten, como docentes, diagnosticar con gran precisión la madurez del pensamiento numérico de un alumno y qué tipo de actividades

necesita para avanzar.

Comprender estos niveles es fundamental, ya que el dominio de la cadena numérica es la *columna vertebral del cálculo mental*. Sin una secuencia numérica flexible y bien estructurada, las operaciones aritméticas quedan ancladas en el conteo físico y manipulativo. Por ejemplo, un alumno no podrá desarrollar estrategias eficientes de suma (como «contar a partir de» o *counting on*) si no ha alcanzado, como mínimo, el Nivel de Cadena Rompible.

Tabla 4.3: Niveles de dominio de la cadena numérica de Fuson y actividades de aula.

Nivel de Fuson	Descripción	Actividad de Aula Sugerida
1. Nivel Cuerda	La secuencia es una cadena de sonidos indivisible («unodostres...»), recitada de memoria. Las palabras-número no están diferenciadas como unidades. Es una pura cantinela.	Cantar canciones numéricas («Un elefante...»), recitar rimas, juegos de corro con conteo.
2. Nivel Cadena Irrompible	<i>Salto cognitivo</i> : Los términos se distinguen. El niño sabe que «tres» y «cuatro» son palabras distintas. Sin embargo, solo puede acceder a la secuencia desde el principio. <i>No puede empezar a contar desde 4</i> . Ya permite establecer correspondencia uno a uno.	Contar los alumnos de la clase. Contar los pasos hasta la pizarra. Repartir un objeto por persona. Juegos de mesa sencillos como la Oca.
3. Nivel Cadena Rompible	<i>Salto cognitivo</i> : Adquiere la habilidad de <i>acceder a la secuencia desde cualquier punto</i> . Puede empezar a contar desde un número distinto de uno si se le indica. Esto demuestra que la secuencia empieza a ser una lista mental flexible.	«¿Qué número viene después del 7?». «Empecemos a contar desde el 12». Juegos como «La Gallinita Ciega» donde se empieza a contar desde un número pactado.
4. Nivel Cadena Numerable	<i>Salto cognitivo</i> : La secuencia se convierte en un objeto mental que se puede «recorrer». El niño puede contar un número <i>determinado</i> de términos. Ya no solo recita, sino que <i>opera con la propia secuencia</i> . Es la base del cálculo mental aditivo.	Juego del parchís: «Estás en la casilla 8 y sacas un 5. ¿A qué casilla vas?». «Tengo 6 caramelos y me dan 3 más, ¿cuántos tengo? (contando con los dedos 7, 8, 9)».
5. Nivel Cadena Bidireccional	<i>Salto cognitivo</i> : El dominio es total. La secuencia se puede recorrer con agilidad hacia adelante y hacia atrás. Esto permite no solo la suma, sino también la resta por «descontado» y la comparación de números por su posición relativa en la serie.	«¿Qué número está justo antes del 37?». «¿Cuántos números hay entre el 45 y el 51?». Juegos de cuenta atrás para el lanzamiento de un cohete.

En la Tabla 4.3, se detalla cada nivel, el salto cognitivo que representa y las implicaciones didácticas, y corresponde solo una clasificación teórica, sino una *herramienta de planificación y evaluación formativa*. Al observar a un discente, podemos situarlo en

uno de los niveles y proponerle actividades específicas del siguiente nivel para promover su avance, personalizando así la enseñanza y respetando su ritmo de desarrollo.

Clave Didáctica: Los Errores en el Conteo como Diagnóstico de Nivel

Los errores que cometen los niños son una ventana a su pensamiento y nos indican su nivel de dominio.

- *El error del «reinicio»*: Si pedimos a un niño que cuente 3 más a partir de 5 y él empieza «uno, dos, tres...» hasta llegar a ocho, nos está mostrando que, aunque puede resolver la tarea, su cadena es aún *irrompible*. No puede iniciar el conteo desde el 5.
- *El error en los «nudos» del lenguaje*: Es muy común que niños en los niveles de Cadena Irrompible y Rompible tropiecen en las transiciones de decena (ej. «veintinueve, veintidiez...» o «treinta y nueve, treinta y diez...»). Esta dificultad no es casual, sino que, como señala Fuson (1992), está directamente relacionada con la estructura lingüística de las palabras-número en idiomas como el español.

Justificación Psicopedagógica: Las palabras para los números del 1 al 10, y en español también del 11 al 15, son irregulares y deben aprenderse de memoria (como en el *Nivel Cuerda*). A partir de dieciséis y, de forma más clara, a partir de veintiuno, la secuencia adquiere una estructura regular basada en la decena (treinta-y-uno, treinta-y-dos...). Sin embargo, el discente que aún no ha interiorizado la estructura de la base diez, trata de continuar la secuencia de forma memorística, aplicando patrones incorrectos en los puntos de transición o «nudos». El error «veintinueve, veintidiez» revela que el alumno está intentando seguir el patrón de las unidades («...ocho, nueve, diez») dentro de la década del veinte, demostrando que su aprendizaje en ese tramo es aún superficial y no se apoya en la comprensión de la estructura decimal.

Implicación Didáctica: Por ello, la *Tabla 100* es una herramienta visual excelente para ayudarles a superar este obstáculo. Al observar la tabla, el discente puede *ver* la regularidad: todos los números de una columna acaban igual, y al llegar al final de una fila (al 19, al 29, al 39...) se produce un salto a la fila de abajo que inicia una nueva decena. La estructura visual de la tabla ayuda a construir la estructura mental del sistema de numeración que el lenguaje a veces oculta.

Identificar estos patrones nos permite diseñar intervenciones mucho más precisas que una simple corrección del resultado.

4.3.2 El Número en el Currículo: Marco Normativo (LOMLOE - Andalucía)

Las teorías psicopedagógicas que hemos explorado no son meras recomendaciones académicas; encuentran su reflejo, su validación y su mandato de aplicación en el currículo oficial. El currículo es el contrato que establece la sociedad con la escuela, y en él se definen no solo los contenidos a enseñar, sino, y más importante aún, el

enfoque pedagógico con el que deben abordarse.

4.3.2.1 Análisis general de la normativa vigente

La *ORDEN de 30 de mayo de 2023*, que desarrolla el currículo de Educación Primaria en Andalucía bajo el paraguas de la LOMLOE, sitúa el desarrollo del *sentido numérico* como un pilar fundamental de la competencia matemática. Este concepto, promovido internacionalmente por organizaciones como el NCTM (National Council of Teachers of Mathematics, 2014), va mucho más allá de la simple capacidad de contar o calcular. Implica una comprensión profunda y flexible de los números y las operaciones, la habilidad para usar este conocimiento en la resolución de problemas y la capacidad de razonar cuantitativamente en diversas situaciones.

Para el *Primer Ciclo de Educación Primaria*, el *Bloque A. Sentido Numérico* establece los siguientes saberes básicos como el horizonte de nuestro trabajo. Analicemos su lenguaje para conectarlo con las teorías vistas:

- *MAT.1.A.1. Conteo*: El currículo nos pide desarrollar «estrategias variadas de conteo, recuento sistemático y comparación de cantidades» en situaciones de la vida cotidiana.
 - *Traducción pedagógica*: Esta directriz nos aleja de una enseñanza del conteo como un procedimiento único y memorístico. «Estrategias variadas» significa trabajar explícitamente los *principios de Gelman y Gallistel* (como la irrelevancia del orden) y guiar al alumnado a través de los *niveles de Fuson* para que su cadena numérica se vuelva flexible. «Recuento sistemático» implica enseñar a organizar los objetos para no perderse, aplicando la correspondencia uno a uno de forma rigurosa.
- *MAT.1.A.2. Cantidad*: Se pretende que el alumnado comprenda el «valor posicional de los números», utilice «diferentes representaciones» (manipulativas, gráficas, simbólicas) y aplique el conocimiento de los números para «realizar estimaciones y resolver problemas».
 - *Traducción pedagógica*: Esta es una clara alusión al modelo de aprendizaje de *Bruner*. La exigencia de usar «diferentes representaciones» es un mandato para que el aprendizaje transite desde lo concreto (fase enactiva, con materiales manipulativos), pasando por lo visual (fase icónica, con dibujos o esquemas), hasta llegar a lo abstracto (fase simbólica, con los numerales). Además, al enfatizar la «resolución de problemas», el currículo nos invita a adoptar un enfoque constructivista, donde el conocimiento se construye como herramienta para dar respuesta a situaciones significativas.

Del Currículo al Aula: Principios para una Enseñanza Competencial

El mensaje del currículo es inequívoco: se debe superar un modelo de enseñanza centrado en la transmisión de algoritmos y en la repetición de ejercicios descontextualizados. En su lugar, se nos prescribe un enfoque que:

- *Prioriza la Comprensión sobre la Mecanización*: El objetivo no es que el alumnado «haga» matemáticas, sino que las «entienda».

- *Fomenta la Flexibilidad y la Estrategia:* Se valora que un alumno tenga varios caminos para resolver un problema, no solo el que el docente le ha enseñado.
- *Conecta con la Realidad:* Las «situaciones de la vida cotidiana» son el punto de partida y de llegada del aprendizaje matemático.

Por tanto, como futuros docentes, el currículo no debe ser visto como una limitación, sino como un *aliado que nos ampara y nos impulsa* a aplicar las teorías psicopedagógicas más sólidas en nuestra práctica diaria. Justifica y legitima el uso de materiales manipulativos, el trabajo por proyectos, el aprendizaje basado en problemas y la atención a los procesos de razonamiento del alumnado por encima de la simple corrección de resultados.

4.3.2.2 Progresión del Sentido Numérico en el Currículo de Andalucía

El currículo oficial es el mapa que guía nuestra práctica docente. La *ORDEN de 30 de mayo de 2023* estructura los saberes matemáticos en seis sentidos, siendo el *Sentido Numérico* el pilar sobre el que se construyen los demás. Analizar su progresión a lo largo de los tres ciclos de Primaria nos permite comprender la lógica del aprendizaje en espiral que propone la ley: los conceptos se retoman y amplían, ganando en profundidad y abstracción.

A continuación, se desglosan los saberes básicos del bloque *A. Sentido Numérico* para cada ciclo, conectándolos con las implicaciones pedagógicas que hemos estudiado.

Primer Ciclo (1º y 2º de Primaria): La Construcción de los Cimientos. El foco de esta etapa es la construcción de un concepto robusto de número hasta el 999, anclado en la manipulación, la representación y la resolución de problemas aditivos sencillos.

- *A.1. Conteo (MAT.1.A.1)* El currículo enfatiza el «significado y utilidad de los números» y las «estrategias variadas de conteo».
 - *Implicación didáctica:* Se nos pide ir más allá del recitado. Debemos asegurar el dominio de los *principios de Gelman y Gallistel* (correspondencia, cardinalidad, etc.) y guiar al alumnado a través de los *niveles de Fuson*, desde la *Cadena Irrompible* hacia la *Rompible*.
 - *Ejemplo de tarea:* Juegos de parchís o de la oca para desarrollar la habilidad de contar a partir de un número (Nivel Cadena Numerable).
- *A.2. Cantidad (MAT.1.A.2)* Se centra en el «sistema de numeración decimal» hasta el 999 (valor posicional, composición, descomposición) y en la «representación de una misma cantidad de distintas formas».
 - *Implicación didáctica:* Es el momento clave para el uso de materiales manipulativos como los *bloques multibase* para que el alumnado *vea y toque* la estructura de la decena. La exigencia de múltiples representaciones entronca directamente con la teoría de *Bruner* (enactiva, icónica, simbólica).
 - *Ejemplo de tarea:* Representar el número 235 de tres formas: con bloques multibase, dibujándolo (2 placas, 3 barras, 5 cubos) y simbólicamente

$(200 + 30 + 5)$.

- **A.3. Sentido de las operaciones (MAT.1.A.3)** Se introduce la «suma y resta» con flexibilidad y sentido, mediante «estrategias de cálculo mental» y el uso de materiales.
 - *Implicación didáctica:* El énfasis en la flexibilidad y el cálculo mental nos aleja de la dependencia exclusiva del algoritmo tradicional. Se deben potenciar estrategias como «los amigos del 10», «dobles» o «descomponer para sumar».
 - *Ejemplo de tarea:* Para calcular $9 + 7$, animar al alumnado a explicar su pensamiento: «Le quito 1 al 7 y se lo doy al 9 para hacer 10. Luego $10 + 6$ es 16».

Segundo Ciclo (3º y 4º de Primaria): Estructuración y Conexión. En este ciclo se amplía el dominio numérico hasta el 9.999, se introducen las fracciones como nuevo conjunto numérico y se formalizan las operaciones de multiplicación y división.

- **A.1 y A.2 Conteo y Cantidad (MAT.2.A.1, MAT.2.A.2)** Se amplía el dominio de los números naturales y se introducen las «fracciones propias con denominador hasta 12» en contextos cotidianos.
 - *Implicación didáctica:* La ampliación del rango numérico requiere consolidar el valor posicional. La introducción de la fracción debe ser eminentemente manipulativa (regletas de Cuisenaire, círculos de fracciones) para construir la noción de *relación parte-todo*.
 - *Ejemplo de tarea:* Dada una tableta de chocolate de 12 onzas, representar $\frac{1}{3}$ y $\frac{3}{4}$ de la tableta y comparar qué fracción es mayor.
- **A.3. Sentido de las operaciones (MAT.2.A.3)** Se desarrollan estrategias para reconocer qué operación (suma, resta, multiplicación, «división como reparto y partición») es útil para resolver un problema. Se construyen las tablas de multiplicar.
 - *Implicación didáctica:* Es crucial no enseñar las tablas de multiplicar como una simple memorización. Se deben construir a partir de la suma repetida y de la disposición en cuadrículas (*arrays*), conectando el concepto con su representación visual y sus propiedades (ej. conmutativa). Diferenciar los dos significados de la división (partitivo y cuotitivo) a través de problemas de referencia es fundamental.
 - *Ejemplo de tarea:* Para construir la tabla del 3, pedir a los alumnos que creen «trenes» con regletas del 3 y anoten el resultado. Luego, observar los patrones en la Tabla 100.

Tercer Ciclo (5º y 6º de Primaria): Abstracción y Aplicación. Se culmina el desarrollo del sentido numérico con la integración de los números naturales, las fracciones y los decimales, y su aplicación en contextos complejos como la proporcionalidad y la educación financiera.

- **A.1 y A.2. Conteo y Cantidad (MAT.3.A.1, MAT.3.A.2)** Se extiende el estudio a los «números naturales y decimales hasta las milésimas», se profundiza en las fracciones y se establece la «diferencia entre números naturales, enteros,

racionales...».

- *Implicación didáctica:* El gran reto es conectar los diferentes conjuntos numéricos. El alumnado debe comprender que $\frac{1}{2}$, 0,5 y 50 % son tres formas de expresar la misma cantidad. La recta numérica es una herramienta potentísima para visualizar estas equivalencias.
- *Ejemplo de tarea:* Ubicar en una misma recta numérica los números 1, 25; $\frac{3}{2}$ y 1, 7.
- **A.3, A.4 y A.5. Sentido de las operaciones, Relaciones y Razonamiento proporcional (MAT.3.A.3 a MAT.3.A.5)** Se avanza hacia conceptos más abstractos como la «potencia», la «relación de divisibilidad (múltiplos y divisores)» y el «razonamiento proporcional».
 - *Implicación didáctica:* Estos saberes exigen un pensamiento relacional. La divisibilidad se debe explorar de forma manipulativa (ej. buscando todos los rectángulos que se pueden formar con 24 fichas para encontrar sus divisores). La proporcionalidad debe nacer de problemas de la vida real (recetas de cocina, escalas en mapas) antes de formalizarse en la regla de tres.
 - *Ejemplo de tarea:* «Una receta de bizcocho para 4 personas necesita 200g de harina. Si queremos hacer un bizcocho para 6 personas, ¿cuánta harina necesitaremos?». Fomentar estrategias de reducción a la unidad o de construcción escalar.
- **A.6. Educación Financiera (MAT.3.A.6)** Se aplica el sentido numérico a la resolución de problemas relacionados con el «consumo responsable», el dinero, «precios, intereses y rebajas».
 - *Implicación didáctica:* Este saber es la culminación del enfoque competencial. Permite al alumnado usar las matemáticas como una herramienta para la ciudadanía crítica.
 - *Ejemplo de tarea:* Analizar catálogos de supermercados con ofertas del tipo «3x2» o «la segunda unidad al 70 %» para determinar cuál es la mejor oferta y calcular el precio final de una compra.

Del Currículo al Aula: El Sentido Numérico como Saber Actuado

Esta progresión curricular muestra cómo el sentido numérico se construye capa a capa. Empezamos con el conteo concreto y terminamos con la capacidad de analizar críticamente una oferta comercial. El objetivo final no es que el alumnado «sepa números», sino que sea capaz de *usar los números para pensar*. Un alumno que finaliza la Educación Primaria con estas capacidades bien asentadas no solo está preparado para la Educación Secundaria, sino que ha desarrollado una herramienta fundamental para desenvolverse como un ciudadano crítico y competente en el siglo XXI.

4.3.3 Diseño de Situaciones de Aprendizaje: Problemas de Referencia

La mejor manera de enseñar el número no es a través de la instrucción directa seguida de fichas de repetición, sino creando un entorno donde el conocimiento numérico

surja como la *herramienta óptima para resolver un problema*. Este enfoque, fundamentado en la *Teoría de Situaciones Didácticas* de Guy Brousseau (2007), sostiene que el aprendizaje es más profundo cuando el alumno se apropia de un problema y moviliza sus propios recursos para resolverlo.

En este marco, los *problemas de referencia* (o situaciones fundamentales) son situaciones-problema cuidadosamente diseñadas que, por su propia estructura, «obligan» al alumnado a usar y, por tanto, a construir un conocimiento matemático específico. No son meros ejercicios de aplicación, sino verdaderos generadores de aprendizaje. A continuación, se detalla un repertorio de estas situaciones clave.

4.3.3.1 Situaciones para Construir el Cardinal

El objetivo es crear una necesidad real de contar para cuantificar, recordar o comparar.

Ejemplo práctico: Recordar una cantidad (El juego de los recados)

- *Puesta en escena*: El docente (o un alumno) es el «tendero». Otro alumno es el «recadero». El tendero le muestra una colección de objetos (ej. 7 fichas en un plato) y le dice: «Necesito que vayas al almacén (su mesa) y me traigas exactamente la misma cantidad de rotuladores». La colección original se tapa.
- *Conocimiento movilizado*: La distancia física y la ocultación de la colección original hacen que la correspondencia uno a uno sea imposible. La estrategia más eficiente es *contar las fichas, memorizar el cardinal (7) y usar ese número como objetivo* para construir la nueva colección. El número se convierte en una herramienta para transportar la cantidad en la memoria.
- *Observación docente*: ¿Qué estrategia usa el alumno? ¿Cuenta? ¿Intenta memorizar visualmente la configuración? ¿Usa sus dedos como apoyo para recordar?

Ejemplo práctico: Comparar dos colecciones (¿Quién tiene más cromos?)

- *Puesta en escena*: Se presentan dos colecciones de objetos que no pueden ser comparadas por correspondencia directa (ej. dos montones de cromos desordenados). Se pregunta: «¿Qué montón tiene más cromos? ¿Cuántos más?».
- *Conocimiento movilizado*: La tarea impulsa al alumnado a ir más allá de la simple estimación visual. Necesitan contar ambos montones (asignar dos cardinales) y luego comparar esos números. La segunda pregunta («¿cuántos más?») les introduce de forma intuitiva en la *estructura aditiva de comparación*, sentando las bases para la resta.

4.3.3.2 Situaciones para Construir el Ordinal

El objetivo es crear contextos donde la posición sea la información relevante.

Ejemplo práctico: Ubicar en una serie (La carrera de coches)

- *Puesta en escena:* Se crea una fila con coches de juguete de distintos colores. Se plantean preguntas: «¿De qué color es el tercer coche?», «Si el coche azul, que es el quinto, adelanta al rojo, ¿en qué posición se queda ahora el coche rojo?».
- *Conocimiento movilizado:* A diferencia de los problemas anteriores, la cantidad total de coches es irrelevante. Lo importante es la *posición relativa* de cada uno. La segunda pregunta introduce dinamismo y obliga a re-evaluar los ordinales, demostrando que la posición no es una propiedad fija, sino que depende de la estructura de la serie.

4.3.3.3 Situaciones para la Iniciación a las Operaciones

El objetivo es que las operaciones (división, multiplicación) surjan como modelos para resolver problemas de reparto, agrupamiento o combinación.

Ejemplo práctico: Reparto y agrupamiento (Repartir las cartas)

- *Puesta en escena:* Se plantean dos problemas aparentemente similares pero estructuralmente distintos.
 1. *Reparto (Partitivo):* «Tenemos 12 cartas y somos 4 jugadores. ¿Cuántas cartas le tocan a cada uno?». Aquí se conoce el total y el número de grupos; se pregunta por el tamaño de cada grupo.
 2. *Agrupamiento (Cuotitivo):* «Tenemos 12 cartas y queremos hacer montones de 3 cartas cada uno. ¿Cuántos montones podemos hacer?». Aquí se conoce el total y el tamaño de cada grupo; se pregunta por el número de grupos.
- *Conocimiento movilizado:* Estas dos situaciones son la base de los dos significados de la división. Es fundamental que el alumnado las resuelva de forma manipulativa (repartiendo una a una, o haciendo grupos) mucho antes de conocer el algoritmo. Así, cuando se introduzca el símbolo $12 \div 4$, tendrá una base de experiencias concretas a la que anclar su significado.

Profundizando: Pensamiento Algebraico Temprano

Cuando presentamos al alumnado problemas de reparto (partitivo) y de agrupamiento (cuotitivo), no solo estamos enseñando los dos significados de la división. Estamos, en esencia, introduciéndolos en el *pensamiento algebraico temprano*.

El álgebra, en su núcleo, no trata sobre la «x», sino sobre el estudio de *estructuras y relaciones*. Al analizar un problema para decidir qué operación lo resuelve, el alumnado está pasando de un enfoque puramente computacional («¿qué cálculo tengo que hacer?») a uno relacional («¿qué relación hay entre las cantidades que conozco y la que busco?»).

Identificar que un problema tiene la estructura fundamental $Total = número\ de\ grupos \times tamaño\ del\ grupo$ y que, dependiendo de la incógnita, se resuelve

con una multiplicación o una división, es una forma temprana de trabajar con funciones y relaciones inversas (Carpenter et al., 2003). Este enfoque, conocido como *pensamiento funcional*, se centra en las relaciones entre cantidades que varían juntas.

Como docentes, ser conscientes de esta conexión nos permite:

- *Valorar el razonamiento del alumnado*: Damos más importancia a cómo el discente interpreta la estructura del problema que a la simple corrección del cálculo.
- *Enfatizar las propiedades fundamentales*: La propiedad conmutativa ($a \times b = b \times a$) no es un truco, sino una verdad estructural sobre la relación entre factores y producto.
- *Construir cimientos sólidos*: Sentamos las bases para el álgebra formal futura. Un discente que entiende las relaciones inversas entre la multiplicación y la división no tendrá dificultades en comprender el despeje de una incógnita.

Al enfocar la enseñanza de las operaciones en su estructura subyacente, transformamos la aritmética en una auténtica aventura de descubrimiento de patrones y relaciones, el verdadero corazón del pensamiento matemático.

4.3.3.4 Situaciones para la Iniciación al Valor Posicional

El objetivo es crear la necesidad de agrupar y de entender que el valor de una ficha puede depender de algo más que de sí misma.

Ejemplo práctico: Problemas de valor y transacción (El banco de la clase)

- *Puesta en escena*: Se crea un sistema monetario simple: hay fichas azules (que valen 1) y fichas rojas. Se establece una regla de cambio: «En el banco, te cambian 10 fichas azules por 1 ficha roja». Los alumnos tienen que pagar cantidades (ej. 14 fichas azules) usando el menor número de fichas posible.
- *Conocimiento movilizado*: Para ser eficientes, los alumnos deben descubrir que es mejor usar 1 ficha roja y 4 azules. Esta situación les obliga a *agrupar de 10 en 10* y a comprender la idea de *canje*, que es el corazón de nuestro sistema de numeración decimal y del algoritmo de la «llevada». El valor de la ficha roja no es intrínseco, sino que se lo da la regla del sistema, una primera aproximación a la idea de valor posicional.

Clave Didáctica: El Puente hacia los Sistemas de Numeración

Estas situaciones de iniciación al valor posicional son de una importancia capital. No solo asientan la comprensión de la estructura de nuestro sistema de numeración, sino que actúan como el *punte conceptual* que conecta este capítulo con el siguiente. Al experimentar la necesidad de agrupar y el poder del canje, el alum-

nado no está simplemente resolviendo un problema: está reinventando la lógica que subyace a los *Sistemas de Numeración* que exploraremos en el Capítulo 5.

4.3.4 Herramientas para Construir el Número: Materiales Manipulativos y Recursos

El pensamiento del alumnado en Primaria, especialmente en el primer ciclo, es eminentemente concreto. Como afirmó Jerome Bruner (1966/1972), el aprendizaje progresa a través de la acción (*fase enactiva*), la imagen (*fase icónica*) y finalmente el símbolo (*fase simbólica*). Los materiales manipulativos no son, por tanto, un mero entretenimiento o un complemento, sino *herramientas cognitivas indispensables* que actúan como el puente necesario entre la experiencia concreta del niño y la abstracción de los símbolos matemáticos.

Su uso se fundamenta en sólidas teorías del aprendizaje. Para Zoltán Dienes (1960/1967), el uso de *diferentes* materiales para un mismo concepto (ej. representar el 10 con regletas, bloques y en un ábaco) es vital. Este *principio de variabilidad perceptual* ayuda al alumnado a abstraer la estructura matemática común, evitando que el concepto quede anclado a un único material.

Clave Didáctica: Gestión de Materiales Manipulativos en el Aula

Es vital entender que *el simple hecho de usar materiales no garantiza el aprendizaje*. Un material, por muy bien diseñado que esté, es pedagógicamente inerte si no va acompañado de una gestión del aula intencionada. Para que la manipulación se transforme en una verdadera construcción de conocimiento, el docente debe orquestar una serie de elementos clave:

- **Normas y Rutinas Claras:** El uso eficaz de los materiales empieza con una buena organización. Deben existir normas claras sobre cómo se recogen, se utilizan y se guardan. Esto minimiza el tiempo de gestión y maximiza el tiempo de aprendizaje, evitando que el material se convierta en una fuente de distracción.
- **Equilibrio entre Exploración y Guía:** El aprendizaje con materiales a menudo sigue una secuencia. Primero, un tiempo de *exploración libre* donde el alumnado se familiariza con las propiedades físicas del material. Después, una fase de *actividad guiada*, donde el docente plantea un reto o problema concreto que enfoca la acción hacia un objetivo de aprendizaje.
- **El Rol del Lenguaje: Verbalizar la Acción:** La manipulación por sí sola no es suficiente. El verdadero aprendizaje ocurre cuando se conecta la acción con el lenguaje. El docente debe fomentar constantemente la verbalización: «¿Qué estás haciendo?», «¿Por qué has puesto esa pieza ahí?», «Explícame cómo lo has conseguido». Es el lenguaje el que eleva la acción a la categoría de pensamiento matemático.
- **La Pregunta como Puente a la Abstracción:** El objetivo final es que el alumno trascienda el material. El docente debe usar preguntas que conecten la manipulación con los conceptos y símbolos. Después de canjear

10 cubitos por una barra (con los bloques multibase), la pregunta clave es: «Y esto que acabas de hacer, ¿cómo lo escribimos en el papel? ¿Qué significa ese “1” que ponemos arriba?».

Sin esta orquestación, los materiales corren el riesgo de quedarse en un simple juego. Con ella, se convierten en la herramienta más poderosa para construir un aprendizaje matemático significativo y duradero.

4.3.4.1 Criterios para la Clasificación y Selección de Materiales

No todos los materiales sirven para lo mismo. Un docente debe saber seleccionarlos en función del concepto que quiere enseñar y del nivel de abstracción de su alumnado. Una clasificación didáctica muy potente se basa en dos ejes: la estructura y la proporcionalidad (Chamorro, 2003/2006).

- *Material no estructurado*: Objetos cotidianos sin un valor matemático predefinido (botones, conchas, legumbres). Son ideales para las primeras fases del conteo, la clasificación y la correspondencia.
- *Material estructurado*: Objetos diseñados para encarnar un concepto matemático. A su vez, se dividen en:
 - *Proporcionales*: Aquellos donde la representación de una cantidad es físicamente proporcional a su valor (ej. la regleta del 10 es 10 veces más larga que la del 1). Son cruciales para *construir* la noción de cantidad y valor posicional.
 - *No proporcionales*: Aquellos donde el valor viene dado por la posición, el color o forma, pero no por el tamaño (ej. una cuenta en la varilla de las decenas en un ábaco). Representan un mayor nivel de abstracción y son ideales para *consolidar y agilizar* la comprensión.
- *Modelos visuales y espaciales*: Representaciones gráficas del sistema numérico (recta numérica, tabla 100) que ayudan a visualizar relaciones y patrones.

La secuencia pedagógica ideal suele progresar desde lo no estructurado hacia lo estructurado proporcional, luego a lo no proporcional y, finalmente, al uso flexible de los modelos visuales para el cálculo mental.

4.3.4.2 Catálogo de Recursos Fundamentales

Material No Estructurado

- *Descripción*: Cualquier objeto cotidiano y de fácil acceso que se pueda contar: botones, chapas, garbanzos, palillos, conchas, piedras pequeñas, etc.
- *Conceptos Clave*: Clasificación por atributos (color, forma, tamaño), seriación, y sobre todo, es el material por excelencia para establecer la *correspondencia uno a uno*, pilar del conteo.
- *Caso de Uso en el Aula*: En 1º de Primaria, para trabajar la comparación de conjuntos, se le da a cada pareja un puñado de garbanzos y otro de lentejas. La pregunta es: «¿De qué hay más? ¿Cómo podemos estar seguros?». Los alumnos desarrollan estrategias como ponerlos en dos filas y emparejarlos uno a uno,

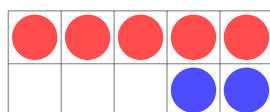
descubriendo la correspondencia como método de comparación.

- *DIY y Consideraciones:* Su mayor ventaja es su coste casi nulo y su disponibilidad. Fomentar que los discentes traigan sus propias «colecciones de tesoros» (piedras, cromos) los involucra activamente.



Marcos de Diez (Ten-Frames)

- *Descripción:* Un recurso estructurado simple que consiste en una rejilla de 2x5.
- *Conceptos Clave:* Composición y descomposición del número 10, relaciones numéricas con el 5 y el 10, subitización. Es una herramienta potentísima para sentar las bases del cálculo mental.
- *Caso de Uso en el Aula:* El docente dice un número, por ejemplo, el 8. El alumnado, con fichas de dos colores, lo representa en su marco de diez. Inmediatamente *ven* que 8 es «5 y 3 más», y que «le faltan 2 para llegar a 10». Esta estructura visual de los «amigos del 10» es la base de estrategias de cálculo como $8 + 6 = 8 + 2 + 4 = 10 + 4 = 14$.
- *DIY y Consideraciones:* Se pueden construir fácilmente dibujando la rejilla en una cartulina o incluso en una huevera de 10 huevos. Son un paso intermedio perfecto entre el material no estructurado y otros más complejos.



$$5 \text{ (rojas)} + 2 \text{ (azules)} = 7$$

Regletas de Cuisenaire

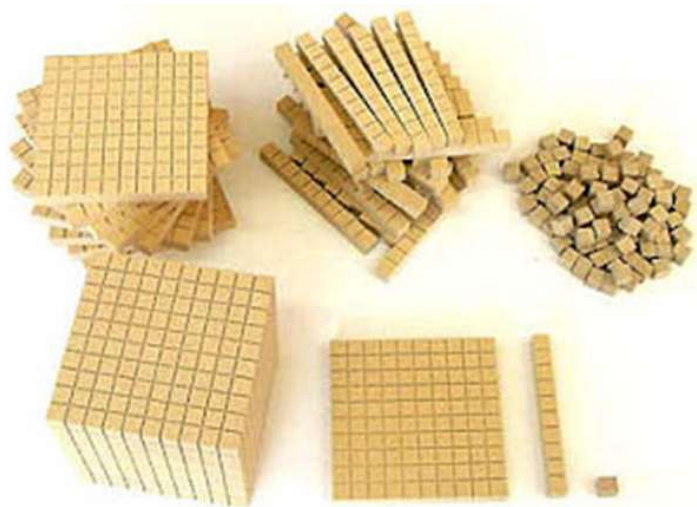
- *Descripción:* Material estructurado y proporcional. Conjunto de prismas de 10 longitudes (de 1 a 10 cm) y colores distintos.
- *Conceptos Clave:* Descomposición aditiva (relación parte-todo), relaciones de orden, propiedades de las operaciones (conmutativa), iniciación a las fracciones.
- *Caso de Uso en el Aula:* Para explorar la descomposición del 8, el docente pide a los alumnos que encuentren todos los «trenes» de dos regletas que midan lo mismo que la regleta marrón (el 8). Los alumnos descubren manipulativamente las parejas $7 + 1$, $6 + 2$, $5 + 3$ y $4 + 4$, construyendo un conocimiento profundo de la estructura aditiva del número.

- *DIY y Consideraciones:* Se pueden hacer versiones en cartulina o madera, pero es importante respetar la proporcionalidad de las longitudes. Una clave didáctica es no fijar prematuramente la asociación color-número (ej. «el rojo es el 2»), sino enfatizar la relación de longitud («el rojo es el doble de largo que el blanco»).



Bloques Multibase (o de Base Diez)

- *Descripción:* Material estructurado y proporcional por excelencia para el sistema de numeración decimal. Consiste en cubitos (unidades), barras (decenas), placas (centenas) y bloques (millares).
- *Conceptos Clave:* Sistema de numeración decimal, valor posicional, composición y descomposición, y la comprensión profunda de los algoritmos de las operaciones (especialmente la «llevada»).
- *Caso de Uso en el Aula:* Para enseñar la suma $147 + 85$, el alumno representa ambas cantidades con los bloques. Al juntar las unidades ($7+5$), obtiene 12 cubitos. El docente guía la reflexión: «¿Podemos tener 12 cubitos en la casa de las unidades?». El alumno descubre la regla del sistema: agrupa 10 cubitos y los *canjea* por una barra de decena, que «se lleva» a la columna de las decenas. El algoritmo deja de ser un truco mágico para convertirse en la representación de una acción concreta.
- *DIY y Consideraciones:* Se pueden construir versiones recortables en cartulina (disponibles en muchas webs de recursos educativos) que son muy funcionales.



Ábaco Vertical y Horizontal

- *Descripción:* Material estructurado y *no proporcional*. Consiste en varillas verticales donde se insertan cuentas o anillas. El valor de cada cuenta depende exclusivamente de la varilla en la que se encuentra.
- *Conceptos Clave:* Consolidación del valor posicional, agilidad en el cálculo de las operaciones.
- *Caso de Uso en el Aula:* Se pide a un alumno que represente el número 22 con bloques multibase y, justo al lado, en un ábaco. Con los bloques, verá dos barras y dos cubitos (piezas de distinto tamaño). En el ábaco, verá dos cuentas en la varilla de las unidades y dos cuentas idénticas en la varilla de las decenas. Esta comparación es una actividad potentísima para que verbalice: «Aunque las cuentas son iguales, las de esta varilla valen diez veces más». Es el paso crucial de la proporcionalidad física a la abstracción posicional.
- *DIY y Consideraciones:* Se puede construir con una base de madera o plastilina y unos palos de brocheta, usando anillas de colores o incluso pasta (macarrones).



Recta Numérica y Tabla 100

- *Descripción:* Dos modelos visuales y espaciales del sistema de números. La recta es un modelo continuo y unidimensional, mientras que la Tabla 100 es un modelo tabular y bidimensional.
- *Conceptos Clave:* Secuencia, orden, relaciones entre números (anterior/posterior, $+1/-1$, $+10/-10$), patrones numéricos y, sobre todo, como apoyo visual para el cálculo mental.
- *Caso de Uso en el Aula:* En la Tabla 100, para calcular $34 + 23$, el docente guía: «Sitúate en el 34. Sumar 23 es sumar 20 y luego 3. ¿Qué movimiento en la tabla es sumar 20?». El alumno descubre que es «bajar dos casillas» ($34 \rightarrow 44 \rightarrow 54$). «¿Y ahora cómo sumamos 3?». «Moviéndonos tres casillas a la derecha» ($54 \rightarrow 55 \rightarrow 56 \rightarrow 57$). La operación se convierte en un movimiento en un mapa.
- *DIY y Consideraciones:* Es fundamental tener una Tabla 100 grande en la pared del aula y que cada alumno tenga una plastificada en su mesa. Se pueden crear rectas numéricas en el suelo del pasillo para que los alumnos «salten» sobre ellas.



Recurso Lúdicos

- *Descripción:* Se pueden considerar juegos y objetos que no son inherentemente matemáticos, pero que proporcionan un contexto ideal para la práctica: dados, cartas (baraja española o de póker), dominós, juegos de tablero como el parchís o la oca.
- *Conceptos clave:* Subitización (dados, dominós), conteo, cálculo mental rápido, probabilidad, resolución de problemas en un contexto motivador.
- *Caso de Uso en el Aula:* En parejas, los alumnos reparten una baraja. A la vez, cada uno levanta una carta. El que tiene la carta más alta se queda las dos. Para hacerlo más complejo, se pueden levantar dos cartas cada vez y el ganador es el que tiene la suma más alta. Esto automatiza la comparación de números y el cálculo mental de sumas sencillas en un entorno de juego competitivo y divertido.
- *DIY y Consideraciones:* Los juegos se pueden adaptar o crear. El juego es el contexto natural de aprendizaje en la infancia. Usar estos recursos no es «perder el tiempo», sino aprovechar la motivación intrínseca del alumnado para que practiquen habilidades matemáticas de forma repetida, contextualizada y significativa.



4.3.4.3 Dificultades y Errores Típicos: Diagnóstico e Intervención

Para abordar de forma profesional estas dificultades, nuestra labor como docentes se asemeja a la de un detective cognitivo. En lugar de simplemente corregir, nuestro objetivo es diagnosticar la lógica detrás del error para poder intervenir eficazmente. A continuación, aplicaremos este ciclo de actuación, cuyo fundamento se desarrolla en profundidad en el Apartado 14.5.2, a las dificultades más comunes.

Dificultades Vinculadas al Procedimiento de Contar

Diagnóstico e intervención: Errores en la secuencia de conteo oral

Evidencia: El alumnado omite números, los repite, o altera el orden, especialmente en los «nudos» del lenguaje (ej. «veintinueve, veintidiez»).

Diagnóstico: El alumno se encuentra en los primeros niveles de Fuson (*Nivel Cuerda o Cadena Irrompible*), donde la secuencia aún no está consolidada como una lista mental flexible.

Intervención: La intervención busca fortalecer la estructura mental de la secuencia. El uso de la *Tabla 100* permite al alumno *ver* la regularidad que su oído aún no ha captado, conectando la secuencia oral con un modelo icónico (Bruner) que revela la estructura de la base diez.

Diagnóstico e intervención: Fallos en la correspondencia uno a uno

Evidencia: El niño o la niña no sincroniza el recitado de la palabra-número con el señalamiento o toque de cada objeto.

Diagnóstico: Falta de dominio del principio de correspondencia uno a uno (Gelman y Gallistel). El problema no es conceptual, sino de coordinación entre esquemas (motor y verbal).

Intervención: Debe centrarse en la *acción*. Al pedir al alumnado que *mueva* los objetos de un lugar a otro mientras los cuenta, estamos forzando una acción *enactiva* (Bruner) mucho más deliberada y pausada. Este acto motor

grueso ayuda a construir e interiorizar el esquema de la correspondencia que el simple señalamiento no lograba consolidar.

Dificultades Vinculadas a la Construcción del Significado

Diagnóstico e intervención: No aplicación del principio de cardinalidad

Evidencia: Tras contar correctamente 8 objetos, si se le pregunta «Entonces, ¿cuántos hay?», el alumno vuelve a contar.

Diagnóstico: No ha consolidado el principio de *cardinalidad* (Gelman y Gallistel). El conteo es una secuencia de acciones ordinales, pero la última palabra no ha adquirido aún el significado global de cantidad.

Intervención: La inversión de la tarea («Dame 8 fichas») es una intervención de inspiración *constructivista* (Piaget). No le damos la respuesta, sino que creamos un problema que, para ser resuelto, le obliga a usar el número 8 como un objetivo cardinal. Es la necesidad de resolver la tarea la que le ayuda a construir el significado del cardinal.

Diagnóstico e intervención: Ausencia de la conservación de la cantidad

Evidencia: El alumnado cree que la cantidad cambia si cambia la disposición espacial de los objetos.

Diagnóstico: El alumno se encuentra en el período preoperacional de Piaget, donde el juicio está dominado por la percepción (*centración*).

Intervención: La estrategia clave es generar un *conflicto cognitivo* (Piaget). Al pedirle que cuente ambas filas (la corta y la larga) y descubra que el resultado numérico es el mismo, creamos una contradicción entre lo que ve y lo que obtiene al contar. Es la necesidad de resolver este conflicto la que le impulsará a construir una estructura lógica superior, la de la conservación.

Dificultades Vinculadas al Sistema de Numeración Decimal

Profundizando: Conectando Capítulos

Los errores que se describen a continuación están íntimamente ligados a la comprensión del *Sistema de Numeración Decimal (SND)*. Aunque su raíz se encuentra en una comprensión incompleta del concepto de número, su desarrollo completo es el tema central del *Capítulo 5*. Presentarlos aquí sirve como puente y diagnóstico inicial.

Diagnóstico e intervención: Errores de valor posicional en la escritura y lectura

Evidencia: Un discente, al oír «ciento veintitrés», escribe «10023». O al ver «24», lo lee como «un dos y un cuatro».

Diagnóstico: El discente aún no ha comprendido la naturaleza *posicional* y

multiplicativa de nuestro sistema. Trata los símbolos numéricos como si fueran un código aditivo simple. El problema de fondo es una abstracción prematura, un salto a la *fase simbólica* (Bruner) sin haber consolidado las fases previas.

Intervención: La intervención debe «retroceder» en la secuencia de Bruner para reconstruir el significado.

- *Volver a la fase enactiva:* Es indispensable el uso intensivo de *bloques multibase*. El alumno debe ver, tocar y construir el número 24 como 2 barras de decena y 4 cubitos.
- *Conectar con la fase icónica:* Tras construirlo, debe dibujarlo. La representación pictórica actúa como puente.
- *Reconstruir lo simbólico:* Finalmente, se le pregunta cómo esa acción y ese dibujo se conectan con el símbolo «24». Al hacer este recorrido, el alumno reconstruye el significado que en la fase simbólica se había perdido.

4.4 Conclusión: Hacia un Sentido Numérico Sólido

A lo largo de este capítulo, hemos desgranado la aparente simplicidad del número natural para revelar la profunda complejidad que subyace en su construcción. Hemos viajado desde las primeras muescas en un hueso hasta el complejo andamiaje de nuestro sistema de numeración, descubriendo que el número es mucho más que el simple recitado de una secuencia. Es una sofisticada abstracción, una de las mayores invenciones de la mente humana, que el alumnado debe reconstruir gradualmente. Este proceso no ocurre por ósmosis, sino a través de la interacción con un entorno rico en experiencias, siempre guiado por una pedagogía intencionada y reflexiva: un desafiante pero profundamente gratificante oficio profesional.

El viaje que hemos emprendido ha sido doble. Por un lado, hemos explorado la naturaleza del número en la Sección 4.2, comprendiendo su origen histórico, su dualidad cardinal-ordinal y la riqueza de sus contextos de uso. Por otro lado, en la Sección 4.3, hemos analizado cómo esa abstracción toma forma en la mente infantil, recorriendo las etapas de su desarrollo cognitivo, los dictados del currículo, y las herramientas didácticas –problemas, materiales y estrategias de intervención– que tenemos a nuestro alcance.

La principal conclusión de este recorrido es que la labor docente no puede ser la de un mero transmisor de numerales y algoritmos, sino la de un *arquitecto de experiencias de aprendizaje*. Como afirma Constance Kamii (1985/2003), el niño debe «reinventar la aritmética», y nuestra tarea es crear las condiciones para que esa reinención sea posible y significativa. Este rol profesional implica dominar e integrar de forma coherente cuatro oficios clave:

Implicación didáctica: Arquitectura del Sentido Numérico

- *Ser un conocedor del contenido:* El docente debe dominar la epistemología y la semántica del número (Apartado 4.2). Este conocimiento profundo

le permite enseñar matemáticas con significado, evitando transmitir «reglas sin razón». Comprende que el número tiene una historia humana y que sus múltiples usos (cardinal, ordinal, código) deben ser explorados explícitamente.

- *Ser un conocedor del aprendizaje:* Debe comprender las fases del desarrollo psicocognitivo (Apartado 4.3.1). Conocer las etapas de Fuson le permite diagnosticar el dominio de la secuencia; entender los principios de Gelman y Gallistel le ayuda a identificar la lógica (o la falta de ella) en el conteo. Sabe que, como defendía Piaget, el conocimiento nace de la acción, y que su rol, como sugería Vygotsky, es escuchar más que decir, para poder guiar al alumno en su Zona de Desarrollo Próximo.
- *Ser un diseñador de instrucción:* Su labor es crear un ecosistema de aprendizaje rico y estimulante (Apartados 4.3.3 y 4.3.4). Esto implica seleccionar problemas de referencia donde el número sea la solución, no la tarea, y proveer los materiales manipulativos adecuados para construir el puente de Bruner entre la acción concreta y la abstracción simbólica.
- *Ser un diagnosticador sensible:* Debe ser capaz de observar atentamente los procesos y errores de su alumnado, viéndolos no como fracasos, sino como valiosas «ventanas a su pensamiento» (Apartado 4.3.4.3) que informan y reorientan la intervención pedagógica (Borasi, 1987). Su feedback no es un juicio («bien» o «mal»), sino una pregunta que invita a la reflexión y al avance.

En definitiva, sentar unas *bases numéricas sólidas* durante la Educación Primaria es una de las mayores responsabilidades y uno de los mayores privilegios de un maestro o maestra. Un «sentido numérico» bien construido trasciende el área de matemáticas: es el cimiento del pensamiento crítico, de la capacidad para resolver problemas y de una ciudadanía activa y competente, capaz de interpretar la información cuantitativa que nos rodea. Sin una comprensión profunda y flexible del concepto de número, los sistemas de numeración se convierten en reglas vacías y los algoritmos operatorios en procedimientos mecánicos sin sentido.

Este capítulo ha buscado proporcionar el andamiaje conceptual y didáctico para construir el primer y más importante pilar del edificio matemático. Sobre este cimiento se podrán abordar con garantías los siguientes desafíos: la estructura de nuestro sistema de numeración decimal y el fascinante universo de las operaciones aritméticas.

Una vez que hemos comprendido la naturaleza profunda de la *idea* de número, el siguiente desafío es entender cómo la humanidad logró capturar, comunicar y operar con esta idea abstracta. En el próximo capítulo, exploraremos la genial invención de los *Sistemas de Numeración*, las tecnologías del intelecto que nos permiten escribir los números y que constituyen el ADN de todos los algoritmos que conocemos.

4.5 Para la Reflexión y el Portfolio Docente

1. Conexión con la Propia Historia: La Complejidad de lo Simple.

Consigna: Reflexiona sobre la idea de la «complejidad de lo aparentemente

simple».

- ¿Eras consciente de la diferencia entre el aspecto cardinal, ordinal o de código de un número antes de leer este capítulo?
- Intenta recordar si, de niño o niña, tenías dificultades con los «nudos» del lenguaje al contar (ej., pasar del 19 al 20) o si te costó entender el principio de cardinalidad. Esta reflexión te ayudará a empatizar con las dificultades del alumnado.

2. Diagnóstico en Acción: Observando el Conteo.

Consigna: Si tienes la oportunidad, pide a un niño o niña del Primer Ciclo de Primaria que cuente una colección de unos 15 objetos desordenados. Observa y toma notas intentando diagnosticar su nivel de dominio de los cinco principios de Gelman y Gallistel y su nivel en la secuencia de Fuson.

- ¿Sincroniza el gesto y la palabra? ¿Recita la secuencia de forma estable?
- Tras contar, si le preguntas «¿cuántos hay?», ¿repite el último número o vuelve a contar?
- ¿Qué nivel de la secuencia de Fuson parece dominar (Cuerda, Irrompible, Rompible, etc.)?

3. Diseño de una Situación-Problema de Referencia.

Consigna: Basándote en los «problemas de referencia» del epígrafe 4.3.3, diseña una situación-problema breve y sencilla cuyo objetivo sea crear en el alumnado la necesidad de usar el número en su aspecto *ordinal*. No se trata de un ejercicio de «rodea el tercero», sino de un contexto lúdico (una carrera, una fila para un juego, etc.) donde la posición, y no la cantidad total, sea la información clave para resolver el reto. Describe la puesta en escena y el conocimiento que se moviliza.

5 Sistemas de Numeración

5.1 Introducción: La Invención que Ordenó el Mundo

Si observamos las formas en las que se expresan cantidades a lo largo del mundo, podemos preguntarnos, ¿qué tienen en común un complejo nudo en una cuerda inca (un *quipu*), una serie de muescas talladas en un hueso prehistórico y el número ‘247’ que aparece en esta página? A simple vista, parecen objetos de mundos distintos. Sin embargo, todos comparten una misma y profunda aspiración humana: son intentos de capturar una idea abstracta y etérea, la cantidad, con una herramienta tangible y visible. Son, en esencia, *tecnologías del intelecto*.

Clave Didáctica: El ADN de los Algoritmos

Este capítulo es el “manual de anatomía” de la aritmética. Así como no podemos entender cómo funciona el cuerpo humano sin conocer el esqueleto, no podemos comprender por qué los algoritmos de suma, resta, multiplicación y división funcionan sin entender la estructura de nuestro Sistema de Numeración Decimal.

- En el Capítulo 4 exploramos la idea de número (*qué es*).
- En este Capítulo 5 exploramos su representación (*cómo se escribe*).
- En los capítulos siguientes exploraremos las operaciones (*cómo se usa*).

Comprender este capítulo es la clave para dejar de enseñar “trucos” y empezar a enseñar matemáticas con sentido.

Aquí es donde entra en juego la magia de los *Sistemas de Numeración*. Son mucho más que una simple lista de símbolos; son el lenguaje secreto de los números, un conjunto de reglas e invenciones geniales que nos permiten nombrar, registrar, comunicar y, lo que es más revolucionario, operar con cantidades que nuestra mente no podría manejar de forma intuitiva.

Desde la perspectiva de la psicología sociocultural de Lev Vygotsky (1978/2009), los sistemas de numeración son una de las *herramientas simbólicas* o *herramientas culturales* más potentes que hemos creado. Al igual que un martillo extiende la fuerza de nuestro brazo, un sistema de numeración extiende el poder de nuestra mente. Nos permite superar las limitaciones de nuestra memoria de trabajo y de nuestro sentido numérico innato para construir catedrales, explorar el universo o gestionar la economía global.

Como futuros docentes, nuestro privilegio y nuestra responsabilidad no consisten en enseñar a usar esta herramienta, sino en guiar a cada niño y niña en el fascinante proceso de *reinventarla*. Este capítulo nos proporcionará los planos de esa reinvención.

El recorrido se concibe como un viaje en dos etapas fundamentales. Primero, en la sección 5.2, actuaremos como matemáticos, historiadores y epistemólogos para explorar la naturaleza profunda de este objeto de conocimiento. Desmontaremos su estructura y viajaremos a sus orígenes para entender por qué es como es. Después, en la sección 5.3, nos pondremos nuestro traje de psicólogos y pedagogos para abordar el núcleo de nuestra labor: cómo guiar al alumnado en el fascinante y complejo proceso

de construir y dar sentido a esta invención en el aula de Primaria.

5.2 Aspectos Matemáticos y Epistemológicos: El ADN de los Números Escritos

Antes de poder enseñar un concepto con profundidad, un docente debe comprender su naturaleza fundamental. No basta con saber *usar* nuestro sistema de numeración; es preciso entender *por qué* es como es, qué principios lo sustentan y por qué representa una ventaja tan extraordinaria frente a otros sistemas a lo largo de la historia. Esta sección se adentra en el «código genético» de la numeración.

Este conocimiento profundo del contenido, que va más allá de la mera ejecución, es una de las piedras angulares del *Conocimiento Pedagógico del Contenido* (Shulman, 1986/2019). Nos permitirá, como veremos en la sección 5.3, anticipar las dificultades del alumnado, dar sentido a sus errores y seleccionar los recursos y tareas más potentes para guiar su aprendizaje.

5.2.1 Número vs. Numeración: La Idea y su Representación

Como establecimos en el capítulo anterior, el *número* es una propiedad abstracta, una construcción mental que nos permite referirnos a la cardinalidad de un conjunto. Es la «cinquidad» que comparten una mano, un grupo de cinco manzanas y una secuencia de cinco notas musicales. Es una idea, y por tanto, invisible e intangible.

Entonces, ¿cómo podemos trabajar con algo que no podemos ver ni tocar? Aquí surge la *numeración*: el sistema de símbolos y reglas que una cultura acuerda para representar esas ideas de número. La numeración es la parte visible. Es el modo *simbólico* de representación en el modelo de Bruner (1966/1972), el último eslabón de una cadena que debe comenzar en la acción y la imagen para poder construirse con significado.

Clave Didáctica: El Sistema de Numeración como Herramienta Cognitiva

La elección de un sistema de numeración no es un acto neutral o meramente estético; *condiciona radicalmente el pensamiento matemático y las operaciones que son posibles o eficientes*. Un sistema como el romano, por ejemplo, es adecuado para registrar cantidades en monumentos, pero hace que una multiplicación como $CXXIII \times XLVII$ (123×47) sea una tarea de una complejidad extraordinaria. Nuestro sistema posicional, en cambio, está diseñado para la eficiencia operativa. La herramienta no solo representa el pensamiento, sino que lo moldea. Comprender esto es fundamental para valorar la potencia de nuestro sistema y entender por qué su aprendizaje es tan crucial y, a veces, tan poco intuitivo para el alumnado.

Clave Didáctica: La Metáfora de “La Idea y sus Trajes”

Una de las primeras y más importantes tareas del docente en los primeros ciclos es ayudar al alumnado a diferenciar entre la idea y su símbolo. Una metáfora poderosa es la de los “trajes”. La idea de «siete» es siempre la misma, pero puede

vestirse con diferentes trajes según la ocasión: la palabra “siete”, el gesto con los dedos, el símbolo “7”, el numeral romano “VII”, una carta del siete de oros, o un dominó con 7 puntos.

El objetivo didáctico es que el alumnado alcance la flexibilidad de reconocer la misma idea (el número) debajo de todos sus posibles trajes (sus representaciones). Un niño que domina esto ha dado un paso de gigante hacia la comprensión abstracta.

Mini-Caso de Aula: El Museo del Número Cinco

Contexto: Aula de 1º de Educación Primaria.

Actividad: Se dedica un rincón del aula a crear el “Museo del Número Cinco”. Durante una semana, se invita al alumnado a convertirse en “exploradores de números” y a traer o crear “artefactos” para el museo que representen la idea de cinco.

Posibles Artefactos: Una mano dibujada, la palabra “cinco” recortada de una revista, el número de un portal, una ficha de parchís con el 5, el numeral romano “V” hecho con palillos, una colección de cinco conchas, una carta de la baraja, etc.

Objetivo Pedagógico: La puesta en común y la clasificación de los artefactos, guiada por el docente con preguntas como «¿Por qué todas estas cosas tan diferentes están en el mismo museo?», permite al alumnado verbalizar y construir la distinción fundamental: el número es la idea constante, mientras que la numeración (el símbolo, el “traje”) es una convención que puede cambiar. Es una forma puramente constructivista de abordar un concepto profundamente abstracto.

5.2.2 Génesis Histórica: El Eco del Pasado en el Aula del Presente

¿Por qué un futuro docente de Primaria debería emprender un viaje a través de la historia de los números? La respuesta es sencilla y profunda: porque la historia de la numeración es un espejo del desarrollo cognitivo de nuestros alumnos y alumnas. Como afirma la influyente investigadora Constance Kamii (1985/2003), basándose en la obra de Piaget, el alumnado no aprende la aritmética por simple transmisión, sino que la *reinventa*. En este proceso de reinvención, los obstáculos conceptuales que la humanidad tardó siglos en superar (como la idea de un valor posicional o la invención del cero) son, precisamente, los grandes desafíos cognitivos que un niño o niña enfrenta en el aula.

Conocer esta historia nos permite, como docentes, cambiar nuestra mirada sobre el error. Un alumno que interpreta el ‘3’ en ‘36’ como un simple tres no está cometiendo un error «ilógico»; está pensando de forma coherente dentro de un sistema conceptual más primitivo, un sistema aditivo. Nuestra labor no es meramente corregirle, sino proporcionarle las experiencias necesarias para que su pensamiento evolucione, al igual que lo hizo el pensamiento humano.

5.2.2.1 Los Primeros Sistemas y el Principio Aditivo

Los primeros intentos de registrar grandes cantidades se basaron en un principio de una simplicidad aplastante: la *adición*. La idea central de un sistema aditivo es que cada símbolo tiene un valor fijo e intrínseco, y el valor total de una cantidad se obtiene simplemente sumando los valores de todos los símbolos representados. La posición de los símbolos, en general, no altera su valor.

Referentes Históricos.El sistema de numeración *egipcio jeroglífico* (c. 3000 a.C.) es un ejemplo paradigmático. Utilizaban un símbolo para cada potencia de diez: un trazo vertical para el 1, un arco para el 10, una espiral para el 100, etc. (Tabla 5.1). Para escribir el número 324, simplemente dibujaban tres espirales, dos arcos y cuatro trazos. El orden no era estricto, aunque solían agruparlos por estética. Su función era eminentemente registral, perfecta para inscripciones monumentales.

Tabla 5.1: Sistema de numeración jeroglífico egipcio (aditivo no posicional).

Valor	Jeroglífico	Descripción
1	I	Un trazo vertical. Representa la unidad.
10	↷	Un grillete o asa de cesto.
100	⌚	Una cuerda enrollada.
1.000	🪷	Una flor de loto, símbolo del Nilo y la abundancia.
10.000	👉	Un dedo levantado.
100.000	🐸	Un renacuajo, por su abundancia en las crecidas del río.
1.000.000	👑	El dios Heh, arrodillado y con los brazos alzados, sujetando el cielo. Representa la eternidad o un número inmenso.

Imágenes tomadas de la Wikipedia

Clave Didáctica: El Principio Aditivo como Concepción Natural

El principio aditivo es la concepción más natural e intuitiva para el ser humano. Cuando un niño pequeño empieza a comprender el valor de las cifras, su primer impulso es tratarlas de forma aditiva. Este es el origen de muchos de los errores que observaremos en el aula, y entender su lógica histórica nos ayudará a diagnosticarlos con mayor precisión.

El sistema de numeración romano, aunque más complejo que el egipcio, es predominantemente aditivo. Sin embargo, introduce una innovación crucial que lo convierte en un sistema híbrido y en un paso intermedio hacia la idea de que la posición de un símbolo puede alterar una operación: el *principio sustractivo*.

La originalidad del sistema no está en los símbolos en sí, sino en las reglas para

Tabla 5.2: Símbolos básicos del sistema de numeración romano.

Símbolo	I	V	X	L	C	D	M
Valor	1	5	10	50	100	500	1.000

combinarlos. A diferencia del sistema egipcio, donde la posición era irrelevante, en el sistema romano la posición de un símbolo respecto a otro es fundamental para determinar si su valor se suma o se resta.

Profundizando: Principios de Construcción del Sistema Romano

Para escribir un número, los romanos seguían un conjunto de reglas precisas que combinaban dos principios fundamentales.

Principio	Reglas y Ejemplos
1. Principio Aditivo	Un símbolo escrito a la derecha de otro de igual o mayor valor, suma. Es la regla por defecto. <i>Ejemplo:</i> $XVI = 10 + 5 + 1 = 16$. <i>Ejemplo:</i> $CLXX = 100 + 50 + 10 + 10 = 170$.
2. Principio Sustractivo	Los símbolos <i>I</i>, <i>X</i> y <i>C</i> pueden escribirse a la izquierda de los dos símbolos de mayor valor que les siguen para restar. Esta fue una innovación al limitar la posición de ciertos símbolos. <i>Reglas de sustracción:</i> ▪ <i>I</i> solo resta a <i>V</i> y <i>X</i> (ej: $IV = 4$, $IX = 9$). ▪ <i>X</i> solo resta a <i>L</i> y <i>C</i> (ej: $XL = 40$, $XC = 90$). ▪ <i>C</i> solo resta a <i>D</i> y <i>M</i> (ej: $CD = 400$, $CM = 900$). <i>Importante:</i> Los símbolos <i>V</i>, <i>L</i> y <i>D</i> nunca se utilizan para restar.

Clave Didáctica: El Sistema Romano como Puente entre lo Aditivo y lo Posicional

El sistema romano es una herramienta didáctica excepcional para el aula de Primaria, precisamente por ser un sistema intermedio. Nos permite construir la idea de que la *posición importa*, sin llegar todavía a la complejidad del valor posicional.

- *De la Adición a la Posición:* Es el puente perfecto entre el sistema egipcio (donde la posición no importa) y nuestro sistema decimal (donde la posición lo es todo). Al analizar por qué *IV* no es lo mismo que *VI*, el alumnado descubre que el orden de los símbolos cambia la operación (resta vs. suma), una idea revolucionaria que prepara el terreno para el valor posicional.
- *Ventana a los Errores Lógicos:* Es muy probable que un alumno, al intentar escribir 99, proponga la forma *IC* (100 - 1). Este no es un error trivial, es una *sobre-generalización lógica* del principio sustractivo. Esta hipótesis, aunque incorrecta según las reglas romanas, es una muestra de razonamiento. Nos da la oportunidad de discutir la importancia de las *convenciones y reglas* en los sistemas matemáticos.
- *Valorar Nuestro Propio Sistema:* Una actividad clave es pedir al alumnado que intente sumar dos números complejos en notación romana (ej. *CXXIII + XLVII*) sin traducirlos. La dificultad que experimentarán les hará *descubrir por necesidad* la inmensa potencia y eficiencia de nuestro sistema posicional y de los algoritmos que este permite. El SND deja de ser “la forma normal” para convertirse en una invención ingeniosa.

Estos primeros sistemas, basados en el principio aditivo, fueron herramientas increíblemente potentes para registrar cantidades, pero mostraban limitaciones significativas a la hora de realizar cálculos complejos. La rigidez de sus símbolos, cuyo valor era intrínseco e independiente de su posición, hacía que operaciones como la multiplicación o la división fueran tareas hercúleas, reservadas a escribas expertos (Ifrah, 1997).

Para apreciar el salto conceptual que representa nuestro propio sistema, resulta sumamente revelador comparar sus estructuras fundamentales. La siguiente Tabla 5.3 analiza la representación del número 324 en tres sistemas clave, destacando no solo sus símbolos, sino, sobre todo, su lógica interna.

Como se observa en la tabla, la diferencia fundamental no reside en la forma de los símbolos, sino en las reglas que los gobiernan. El paso de un valor fijo a un valor dependiente de la posición fue una de las mayores revoluciones intelectuales de la humanidad. Esta innovación, junto a la invención de un símbolo para representar la nada —el cero—, es la piedra angular de la siguiente etapa de nuestra historia.

Tabla 5.3: Comparativa estructural de sistemas de numeración.

Característica	Sistema Egipcio Je-rogífico	Sistema Romano	Sistema Decimal-Posicional
Principio	Aditivo Puro	Aditivo-Sustractivo (Híbrido)	Posicional y Multiplicativo
Representación de 324		CCCXXIV	324
Significado del '3'	3 símbolos de 100	3 símbolos 'C' (100 cada uno)	El dígito '3' en la 3ª posición (3×10^2)
¿Importa el orden?	No. El valor es la suma de los símbolos.	Parcialmente. Es clave en la resta (ej. IV vs. VI).	<i>Absolutamente.</i> El orden define el valor.
¿Necesita el cero?	No. La ausencia de un orden se representa no dibujando el símbolo.	No. No existe un símbolo para la ausencia.	<i>Sí, es indispensable.</i> Actúa como marcador de posición vacía.
Ideal para...	Registrar cantidades.	Registrar cantidades.	<i>Calcular</i> con eficiencia.

Mini-Caso de Aula: La ineficacia del sistema aditivo para el cálculo algorítmico

Propongamos a una clase de 4º de Primaria la siguiente tarea:

$$\text{CXXIII} + \text{XLVII} = ?$$

La única regla es: «*Está prohibido traducir los números al sistema decimal. Debéis operar directamente con los símbolos romanos*».

El Proceso en el Aula:

- *El Caos Inicial:* El alumnado se siente desconcertado. Algunos intentarán aplicar el algoritmo de la suma vertical, alineando las “letras”, lo cual lleva al absurdo y a errores ($\text{¿III} + \text{VII} = \text{X?}$, $\text{¿XX} + \text{XL} = \text{LX?}$).
- *El Descubrimiento:* A través de la discusión, descubren que la única estrategia posible es *juntar todos los símbolos* (C, XX, III, X, L, V, II) y luego aplicar las reglas de la numeración romana para *reagrupar y simplificar*.

Juntar: C XX III XL V II *text* CXXIIILVII – X
 Reordenar: = C L XX V III II – X
 Simplificar: C L XX V V – X $\rightarrow$ C L XX X – X $\rightarrow$ C L XX

El resultado final es 190.

- *La Reflexión Guiada (Institucionalización)*: El docente guía la puesta en común: «¿Por qué no ha funcionado nuestro método de la “llevada”? ¿Qué tiene nuestro sistema que sí nos permite hacer eso?».

El Aprendizaje Profundo: El alumnado no “aprende” que nuestro sistema es posicional; lo *descubre* como una necesidad. La experiencia vivida de la ineficiencia del sistema romano eleva el algoritmo de una simple receta a una conquista intelectual.

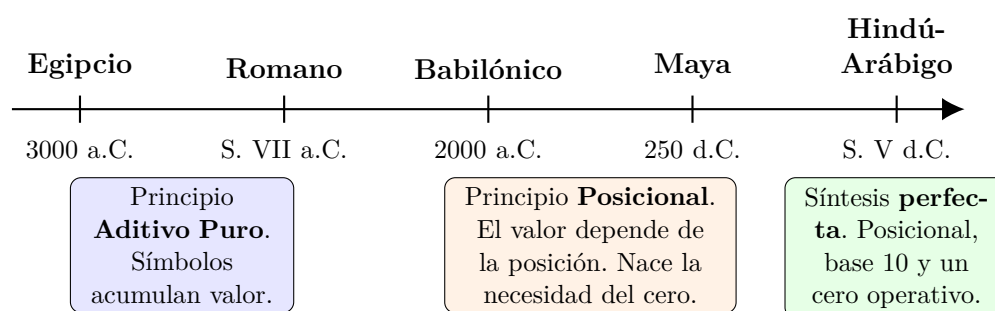


Figura 5.1: Cronología simplificada de la invención de los sistemas de numeración, mostrando el gran salto del principio aditivo al posicional.

5.2.2.2 La Revolución del Pensamiento: El Principio Posicional y el Cero

El mayor salto cualitativo en la historia del pensamiento matemático no fue la invención de nuevos símbolos, sino un cambio radical en las reglas del juego: el nacimiento del principio posicional.

El Salto Conceptual. En un sistema posicional, los símbolos (cifras) pierden su valor fijo. Su valor pasa a ser relativo y depende fuertemente de la *posición* que ocupan dentro del número. Esto introduce un principio multiplicativo subyacente: el valor de una cifra se obtiene multiplicando esa cifra por el valor asignado a su posición. Así, el '5' en '57' significa 5×10 , mientras que en '75' significa 5×1 . Esta idea, que hoy nos parece trivial, es una de las abstracciones más extraordinarias y potentes de la historia humana.

Referentes Históricos Clave. Esta revolución no ocurrió de una sola vez. Los *babilonios* (c. 2000 a.C.) fueron pioneros al desarrollar un sistema posicional de *base 60* (sexagesimal). Para facilitar la escritura, utilizaban un principio aditivo de *sub-base 10* para los números del 1 al 59. Es decir, agrupaban de 10 en 10 con un símbolo, y las unidades con otro. Sin embargo, en sus inicios carecían de un símbolo para una posición vacía, lo que generaba una enorme ambigüedad: la escritura para '2' y '62' (que en base 60 se descompone como $1 \times 60 + 2$) podía ser idéntica. Para resolverlo, más tarde (c. 300 a.C.) inventaron un *marcador de posición* —dos cuñas inclinadas—, aunque, como veremos, no era un cero completo.

Tabla 5.4: Símbolos cuneiformes básicos del sistema babilónico.

Valor	Símbolo Cuneiforme	Descripción
1		Cuña vertical. Se usaba aditivamente para los números del 1 al 9.
10		Cuña horizontal. Se usaba aditivamente para las decenas (10, 20, 30, 40, 50).
0		Marcador de posición interno. Dos cuñas inclinadas para indicar una posición vacía.

Profundizando: Interpretación de la Escritura Babilónica

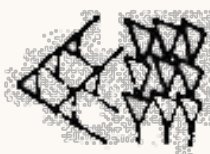
La combinación de la sub-base 10 y la base posicional 60 se entiende mejor a través de ejemplos.



$$= 20 + 5 = 25$$



$$= 40 + 7 = 37$$



$$= 50 + 9 = 59$$



$$= 1 \cdot 60 + 5 = 65$$



$$= 1 \cdot 60 + 23 = 83$$



$$= 5 \cdot 60 + 2 = 302$$



$$= 12 \cdot 60 + 34 = 754$$

Ejemplo 1: El número 25

Lectura y Descomposición: Se observan dos símbolos de '10' y cinco símbolos de '1'. Como es un número menor de 60, todos los símbolos están en la misma posición (la de las unidades) y se leen de forma puramente aditiva. Esto ilustra el uso de la *sub-base 10*.

$$2 \times 10 + 5 \times 1 = 25$$

Ejemplo 2: El número 302

Lectura y Descomposición: Aquí vemos el *principio posicional*. Hay dos grupos de símbolos separados por un espacio. El grupo de la izquierda (cinco cuñas de

'1') está en la posición de las sesentenas (60^1). El grupo de la derecha (dos cuñas de '1') está en la posición de las unidades (60^0).

$$(5) \times 60 + (2) \times 1 = 300 + 2 = 302$$

Ejemplo 3: El número 754

Lectura y Descomposición: Este ejemplo profundiza en la posicionalidad y en la sub-base 10. Se puede ver que en la posición de las sesentenas (60^1) hay un símbolo de '10' y dos de '1', con lo que hace '12'. Y en la posición de las unidades (60^0) hay tres símbolos de '10' y cuatro de '1', haciendo '34'. Por tanto queda:

$$12 \cdot 60 + 34 \cdot 1 = 720 + 34 = 754$$

Ejemplo 4: El número 3623

$$1 \cdot 60 \cdot 60 + 0 \cdot 60 + 23 = 3623$$

Lectura y Descomposición: Este ejemplo muestra el uso del *marcador de posición*. El '1' de la izquierda está en la posición de los 60^2 (3600). El símbolo del marcador indica que hay 'cero' sesentenas. El '23' de la derecha está en la posición de las unidades.

$$(1) \times 60^2 + (0) \times 60 + (23) \times 1 = 3600 + 0 + 23 = 3623$$

Sin el marcador de posición, este número podría confundirse fácilmente con el '83' ($1 \times 60 + 23$).

Estos ejemplos están extraídos de la obra "Aritmética Creativa" de Yakov Perelmann

Clave Didáctica: Del Agrupamiento Babilónico al Aula de Primaria

El sistema babilónico es una herramienta pedagógica para que el alumnado *construya* la lógica de nuestro propio sistema.

- *La Sub-base 10 es Universal:* La idea babilónica de agrupar de 10 en 10 para formar números hasta 59 es un espejo de nuestro sistema. Nos enseña que el *agrupamiento* es una idea humana fundamental para manejar cantidades. Podemos mostrar a al alumnado cómo ellos y ellas, al formar decenas, están redescubriendo una estrategia inventada hace milenios.
- *La Necesidad del Cero:* Al presentar al alumnado el problema de la ambigüedad (¿cómo distinguimos '3602' de '62' en babilonio?), no les estamos dando la regla del cero, sino que les estamos creando la *necesidad* de inventar una solución. El cero deja de ser un símbolo arbitrario para convertirse en una herramienta funcional que resuelve un problema real.

De forma independiente, los *mayas* (c. 250 d.C.) crearon un sofisticado sistema

posicional de *base 20* (vigesimal) con sub-base 5, muy probablemente inspirado en contar con los dedos de las manos y de los pies. Su sistema es único por tres características clave: el uso de solo tres símbolos, su escritura vertical ascendente y la inclusión de un símbolo para el cero con un uso conceptualmente muy avanzado. Se puede ver los “dígitos” de forman los primero 20 números en la Tabla 5.5.

Tabla 5.5: Los tres símbolos básicos del sistema de numeración maya.

Valor	Símbolo	Descripción
1	•	Un punto. Se usaba aditivamente hasta cuatro veces para representar del 1 al 4.
5	—	Una barra horizontal. Se usaba aditivamente para agrupar los puntos. Esto crea una <i>sub-base 5</i> .
0		Una concha estilizada. Funcionaba como marcador de posición y también como un número con entidad propia.

Tabla 5.6: Los 20 “dígitos” del sistema Maya

	•	••	•••	••••
0	1	2	3	4
—	—•	—••	—•••	—••••
5	6	7	8	9
==	==•	==••	==•••	==••••
10	11	12	13	14
===	===•	===••	===•••	===••••
15	16	17	18	19

Profundizando: El Calendario Maya y la Lógica Posicional

El sistema maya es posicional y se escribe de *abajo hacia arriba*. Cada nivel o posición representa un orden de magnitud. Mientras que un sistema vigesimal puro usaría potencias de 20 ($20^0, 20^1, 20^2, \dots$).

Valor de las posiciones (de abajo hacia arriba):

- Nivel 1 (*inferior*): Unidades (1).
- Nivel 2: Veintenas (20).

- *Nivel 3:* Esta posición vale $20^2 = 400$. Pero, si se usaba para contar fechas, este nivel se tomaba como $18 \times 20 = 360$, más conveniente para contar años por su cercanía a la longitud de un año (Schreiber, 2007).
- Y, sucesivamente, volvemos a potencias de 20.

Ejemplo 1: El número 17

Lectura y Descomposición: Al ser menor de 20, se representa en un solo nivel (el de las unidades). Se combina el principio aditivo con la sub-base 5: tres barras (15) y dos puntos (2).

$$(3 \times 5 + 2 \times 1) \times 1 = 17$$

Ejemplo 2: El número 45

Lectura y Descomposición: Aquí se observan dos niveles.

- *Nivel inferior (unidades):* Una barra, que vale 5.
- *Nivel superior (veintenas):* Dos puntos, que valen 2.

El cálculo es: $(2 \times 20) + (5 \times 1) = 40 + 5 = 45$.

Ejemplo 3: El número 400

Lectura y Descomposición: Este ejemplo ilustra el uso del “cero”.

- *Nivel 1 (unidades):* Una concha, valor 0.
- *Nivel 2 (veintenas):* Una concha, valor 0.
- *Nivel 3 (400s):* Un punto, valor 1.

El cálculo es:

$$(1 \times 400) + (0 \times 20) + (0 \times 1) = 400 + 0 + 0 = 400.$$

El cero es indispensable para indicar que no hay unidades y que los otros símbolos ocupan posiciones de valor superior.

Como se indica arriba, Este sistema se modificaba para el cálculo de fechas (Cuenta Larga), pasando la tercera posición a corresponder a un múltiplo de 18×20 , más conveniente para cálculos con el periodo de tiempo anual, de 365 días, con lo que, si se usara para contar fechas, habría correspondido a

$$(1 \times 360) + (0 \times 20) + (0 \times 1) = 360 + 0 + 0 = 360.$$

Clave Didáctica: Lecciones del Sistema Maya para el Aula

El sistema maya, lejos de ser una simple curiosidad, es una fuente de profundas reflexiones pedagógicas.

- *Las matemáticas son una invención humana contextualizada:* La anomalía del $18 \times 20 = 360$ es quizás el mejor ejemplo para demostrar al alumnado que los sistemas matemáticos no son "verdades caídas del cielo", sino *herramientas ingeniosas diseñadas por personas para resolver problemas de su tiempo* (en este caso, astronómicos y agrícolas). Esto humaniza las matemáticas y combate la idea de que son un conjunto de reglas abstractas y arbitrarias.
- *La universalidad de la base 10 no es absoluta:* Estudiar un sistema de base 20 (vigesimal) ayuda a los estudiantes a comprender que nuestro sistema de base 10 es una convención, no la única posible. Esto profundiza la comprensión del concepto de *base* y del valor posicional, al obligarles a pensar en una lógica diferente.
- *La evolución del Cero:* El cero maya, representado por la concha, no solo era un marcador de posición (como el babilónico tardío), sino que también representaba el resultado de una resta (por ejemplo, en los cálculos de fechas). Es un paso conceptual más cercano a nuestro cero moderno, mostrando que la idea de "nada como cantidad es una de las abstracciones más complejas y potentes del pensamiento humano.

Sin embargo, la síntesis que conquistó el mundo fue el sistema *hindú-arábigo*. Nacido en la India alrededor del siglo V d.C., combinaba tres ideas de una manera perfecta: una sistema de base 10, el principio posicional y un símbolo para el cero que funcionaba no solo como marcador de posición, sino como un número con entidad propia. Este sistema no solo simplificó la escritura de números; provocó una auténtica *democratización del cálculo*. Sistemas como el romano requerían de expertos con ábacos para realizar operaciones complejas. La eficiencia de los algoritmos derivados del SND permitió que el cálculo se extendiera por la sociedad, transformando el comercio, la ciencia y la administración para siempre (Ifrah, 1997).

Profundizando: El Cero Babilónico, Un Marcador de Posición Incompleto

El marcador de posición babilónico fue un hito, pero es importante entender sus limitaciones para apreciar la genialidad del cero hindú-arábigo:

1. *Era un marcador interno, no terminal:* Solo se usaba para posiciones vacías entre otras cifras. Por ejemplo, les permitía diferenciar 3601 ($1 \times 60^2 + 0 \times 60 + 1$) de 61 ($1 \times 60 + 1$). Sin embargo, nunca lo usaban al final de un número. Esto significa que la ambigüedad entre 2, 120 (2×60) y 7200 (2×60^2) persistía, y el valor absoluto de un número seguía dependiendo del contexto.
2. *No era un número:* Era una marca sintáctica, un separador, no una can-

tividad. No se podía operar con él. La idea de que el resultado de una operación como $5 - 5$ fuera un número (cero) era conceptualmente ajena a su sistema.

Este “casi-cero” resuelve un problema práctico (la ambigüedad interna), pero no alcanza la abstracción de concebir la nada como un número.

La Invención de la Nada: El Cero El cero hindú-arábigo es la pieza que completa el rompecabezas posicional. Sin un símbolo para marcar una posición vacía, sería imposible diferenciar '32' de '302' o '320'. El cero es el ancla que asegura que cada cifra ocupe su lugar correcto. Su invención no fue el descubrimiento del vacío, sino la creación de un símbolo funcional para representarlo y, más importante aún, para operar con él, un hito de la abstracción humana.

Clave Didáctica: El Error del Cero Ausente

La historia del cero babilónico es un espejo perfecto del desarrollo cognitivo del alumnado. Cuando un estudiante, al oír «doscientos cinco», escribe «25», está teniendo un *«momento babilónico»*: su mente aún no ha consolidado la necesidad de un marcador para la posición vacía de las decenas. Entiende los símbolos '2' y '5', pero no la función estructural del '0' como guardián de un lugar.

Como futuros docentes, esta conexión histórica nos enseña dos lecciones:

- *Empatía Cognitiva*: El concepto de cero no es obvio. A la humanidad le costó milenios desarrollarlo. Debemos ser pacientes con el alumnado que lucha con esta abstracción.
- *Diagnóstico e Intervención*: Un error con el cero no es un despiste, sino un síntoma de una concepción incompleta. Nuestra intervención no debe ser simplemente corregir («No, se escribe 205»), sino crear una situación que revele la *necesidad* de ese símbolo. Por ejemplo, pedirle que represente «25» y «205» con bloques multibase o en un ábaco. La comparación visual de ambas representaciones le obligará a confrontar el problema de la columna de las decenas vacía, construyendo así un significado duradero para el cero.

5.2.3 Anatomía de Nuestro Sistema de Numeración Decimal (SND)

Tras nuestro viaje por la historia, hemos llegado a casa: a nuestro Sistema de Numeración Decimal (SND). Lo usamos tan a menudo que su estructura se ha vuelto invisible para nosotros. Sin embargo, como futuros docentes, nuestra tarea es precisamente hacer visible esa arquitectura oculta, tanto para nosotros mismos como para nuestro alumnado. Desmontar el SND y comprender sus reglas de juego es el paso previo indispensable para poder guiar su construcción en el aula.

La genialidad del SND reside en que, con tan solo tres reglas fundamentales, es capaz de representar cualquier cantidad, por grande que sea, de una forma unívoca y operativamente eficaz.

5.2.3.1 Regla 1: El Principio de Agrupamiento en Base 10

La regla fundamental sobre la que se edifica todo el sistema es el principio de *agrupamiento regular y recursivo*. En nuestro sistema, la base de este agrupamiento es el número *diez*.

- *Agrupamiento*: Las unidades no se acumulan indefinidamente. Cada vez que reunimos diez elementos de un determinado valor (orden), los agrupamos para formar una nueva unidad de un valor superior.
- *Recursividad*: Esta regla se aplica una y otra vez, de forma infinita. Diez unidades forman una decena. Diez de esas decenas forman una centena. Diez centenas forman un millar, y así sucesivamente. Es una idea de una simplicidad y una potencia extraordinarias.

Anclaje Histórico y Biológico. ¿Por qué base 10? La respuesta no es matemática, sino biológica. Como señala Georges Ifrah (1997), el origen de la base diez está en el primer instrumento de cálculo de la humanidad: los diez dedos de nuestras manos. El sistema decimal es, en cierto modo, una sofisticación de la acción primigenia de contar con los dedos. Recordar esta conexión humana y corporal es una poderosa herramienta pedagógica para hacer que la base 10 parezca menos abstracta y arbitraria en el aula.

5.2.3.2 Regla 2: El Principio del Valor Multiplicativo de la Posición

Esta es la regla revolucionaria que ya encontramos en la historia. Una vez que hemos agrupado, la forma de representar esos grupos es mediante el *valor posicional*.

- El valor de una cifra no es absoluto, sino *relativo a su posición* dentro del número.
- Esta relación es *multiplicativa*. El valor real de una cifra se obtiene al multiplicar el valor de la cifra por el valor asignado a su posición (que es siempre una potencia de 10).

Así, en el número 333, aunque el símbolo '3' es el mismo, su valor es radicalmente diferente en cada posición: el primero por la derecha representa 3 unidades (3×1), el segundo representa 3 decenas (3×10), y el tercero representa 3 centenas (3×100). Este principio es el mayor obstáculo cognitivo para el alumnado, cuya intuición inicial es aditiva, no multiplicativa, como se ilustra en la Tabla 5.7.

Tabla 5.7: Comparativa de la concepción aditiva vs. multiplicativa para el número 36.

Número 36	Concepción Aditiva (Errónea)	Concepción Multiplicativa (Correcta)
Significado del '3'	3	3 grupos de 10 ($3 \times 10 = 30$)
Significado del '6'	6	6 unidades ($6 \times 1 = 6$)
Valor Total	$3 + 6 = 9$	$30 + 6 = 36$

5.2.3.3 Regla 3: El Principio de las Diez Cifras (0-9)

La tercera regla es la de la *economía simbólica*. Para hacer funcionar esta compleja arquitectura de agrupamientos y posiciones, el SND solo necesita un conjunto de diez

símbolos, también llamados cifras o guarismos:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

La inclusión del *cero* es la piedra angular de esta regla. El cero es el símbolo que nos permite marcar la ausencia de un agrupamiento en una posición determinada, garantizando que el sistema sea inequívoco y que el valor posicional de las demás cifras se mantenga.

La Síntesis Matemática: La Descomposición Polinómica. Estas tres reglas – agrupamiento en base 10, valor posicional y uso de diez cifras – no son ideas aisladas. Se fusionan y se expresan de forma precisa y elegante en la *descomposición polinómica* de un número. Esta descomposición es la expresión matemática del ADN de nuestro sistema.

Tomemos el número 345. Su descomposición polinómica revela su estructura interna:

$$345 = 300 + 40 + 5$$

$$345 = (3 \times 100) + (4 \times 10) + (5 \times 1)$$

$$345 = (3 \times 10^2) + (4 \times 10^1) + (5 \times 10^0)$$

Clave Didáctica: La Descomposición Polinómica y el Sentido del Algoritmo

La descomposición polinómica puede parecer una formalidad matemática lejana a la realidad del aula. Nada más lejos de la verdad. Comprender esta estructura es *la clave para poder enseñar los algoritmos de las operaciones de forma relacional y no meramente instrumental* (en términos de Skemp (1978)).

El algoritmo de la *suma con llevadas*, por ejemplo, no es un truco mágico. Es una aplicación directa y eficiente de la descomposición polinómica y el principio de agrupamiento. La “llevada” no es un “uno que se pasa arriba”, sino la representación simbólica de que hemos formado una nueva decena que debe ser sumada con las otras decenas.

Un docente que comprende la estructura polinómica del SND puede ir más allá de enseñar una receta y puede guiar al alumnado a comprender el *porqué* de los pasos del algoritmo. Esa comprensión es la base de un sentido numérico sólido y flexible.

5.3 Aspectos Psicopedagógicos y Didácticos: El Docente como Guía en la Reinención

Una vez desentrañada la elegante arquitectura matemática de nuestro Sistema de Numeración Decimal, nos enfrentamos a la pregunta verdaderamente vital para nuestra labor: ¿cómo llega un niño o una niña a comprender esta compleja estructura? Si la sección anterior se centró en el *objeto de conocimiento*, esta se adentra en el *sujeto que aprende*.

Abandonamos aquí la idea obsoleta de que el SND se puede enseñar por simple transmisión o memorización. Comprender el valor posicional es un proceso de *cons-*

trucción activa, un formidable logro cognitivo que el alumnado debe realizar por sí mismo. Nuestra función como docentes no es la de un transmisor de reglas, sino la de un *arquitecto de experiencias de aprendizaje*; un guía que, conociendo el camino y los posibles obstáculos, diseña un entorno rico en materiales y problemas que hagan necesaria y significativa la *reinvención* del sistema en la mente de cada estudiante (Kamii, 1985/2003).

5.3.1 La Construcción Mental del SND: Un Proceso de la Acción al Símbolo

El alumnado no capta la estructura del SND de una vez, sino que transita por una serie de fases que, como docentes, debemos conocer, respetar y guiar. Este viaje cognitivo tiene un punto de partida y una secuencia bien definidos por la investigación psicopedagógica.

El Hito Cognitivo Esencial: La Construcción de la Decena. El verdadero salto conceptual, la piedra angular sobre la que se edificará toda la comprensión del SND, es la construcción de la *decena como una nueva unidad de orden superior*. Para un niño o niña que se inicia en el conteo, «diez» es simplemente el final de una colección de diez objetos individuales. El hito se alcanza cuando, a través de la acción de agrupar, esa colección de diez «unos» se re-conceptualiza y pasa a ser «una» *cosa nueva*: una decena.

Este proceso, de clara inspiración piagetiana, es un ejemplo perfecto de *abstracción reflexiva*: el conocimiento no se extrae del objeto (los diez palillos), sino de la coordinación de las acciones que el sujeto realiza sobre los objetos (la acción de agruparlos y considerarlos como un nuevo todo) (Piaget, 1941/1967). Sin esta construcción de la decena como una unidad contable, el número 23 nunca podrá ser entendido como «dos decenas y tres unidades», sino que permanecerá como una cadena irrompible de 23 «unos».

La Secuencia Pedagógica de Bruner como Guía. ¿Cómo guiamos este proceso constructivo? La teoría de los modos de representación de Jerome Bruner (1966/1972) nos ofrece el mapa pedagógico más fiable para construir un concepto abstracto con significado. Siguiendo su secuencia (apartado 1.3.4), el aprendizaje debe transitar por tres fases conectadas: La *fase enactiva*, donde el alumnado agrupa y canjea objetos físicos (policubos, bloques multibase); la *fase icónica*, un puente hacia la abstracción donde se representa gráficamente esa acción (ej. en tablas de valor posicional); y finalmente, la *fase simbólica*, donde la escritura convencional (ej. «34») se introduce para registrar lo que ya se ha comprendido a través de la acción y la imagen.

Clave Didáctica: El Peligro de la Abstracción Prematura

La causa de la mayoría de las dificultades en la comprensión del valor posicional es la *abstracción prematura*. Ocurre cuando, por prisas o por desconocimiento de este proceso, se introduce la fase simbólica sin haber consolidado suficientemente las fases enactiva e icónica.

Cuando a un infante se le enseña el algoritmo de la «llevada» sin que haya experimentado físicamente el canje de 10 unidades por una decena cientos de veces,

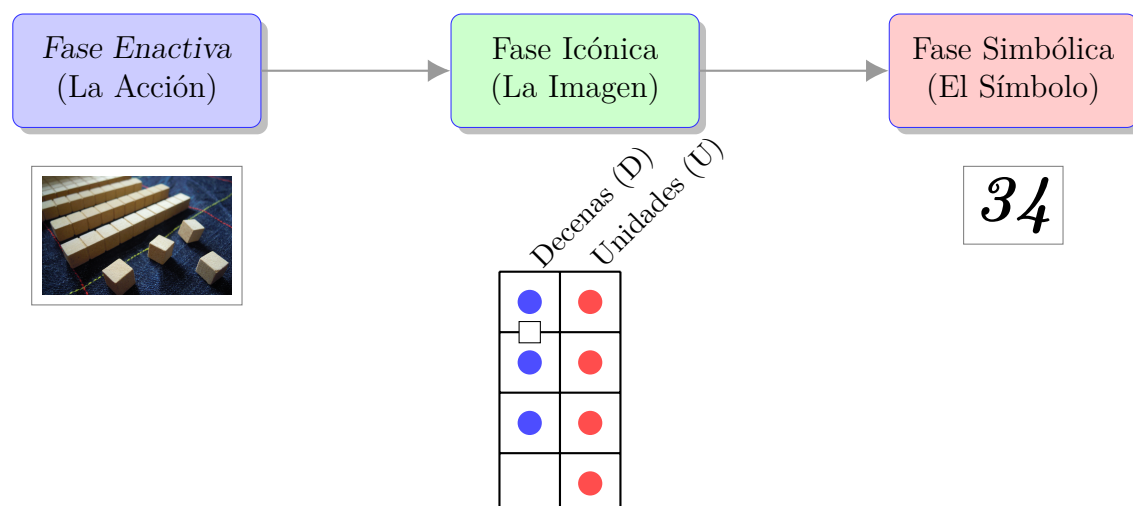


Figura 5.2: La secuencia pedagógica de Bruner para la construcción del SND. La comprensión del símbolo nace de la acción y su representación.

la «llevada» se convierte en un truco mágico, una regla arbitraria sin significado. Es un aprendizaje instrumental y frágil. La secuencia de Bruner (Acción → Imagen → Símbolo) no es una opción pedagógica, es una condición necesaria para la construcción de un conocimiento relacional y duradero.

El Conflicto Psicolingüístico. Un obstáculo particular en el aprendizaje del SND en lenguas como el español es la falta de transparencia del lenguaje oral. Como demostró la investigadora Karen Fuson (1988), las palabras que usamos para nombrar los números, especialmente entre el 11 y el 15 («once», «doce», «quince»), son irregulares y opacas: no revelan la estructura de «diez y uno», «diez y dos» que sí es explícita en algunas lenguas asiáticas y que facilita enormemente la comprensión de la base 10.

Esto genera un *conflicto cognitivo* entre la estructura regular y perfecta del sistema escrito (11, 12, 13...) y la irregularidad del sistema oral que el niño aprende primero. Para superar este obstáculo, la *Tabla 100* es un recurso icónico insustituible. Al visualizarla, el alumnado puede *ver* los patrones que su oído no percibe: todas las filas tienen diez números, todos los números de una columna acaban en la misma cifra, bajar una fila es siempre sumar diez, etc. La Tabla 100 hace visible la arquitectura decimal que el lenguaje a veces oculta.

5.3.2 Recursos y Materiales: Puentes Didácticos hacia la Abstracción

Si la construcción del SND es un viaje de la acción al símbolo, los materiales manipulativos no son un mero entretenimiento en el camino: son los puentes indispensables que permiten al alumnado cruzar de la orilla de la experiencia concreta a la de la comprensión abstracta. Como ya hemos establecido, la secuencia de Bruner (1966/1972) nos dicta que el aprendizaje debe nacer de la acción, y los materiales son el terreno donde esa acción se vuelve matemáticamente significativa.

La selección de un material, sin embargo, no debe ser arbitraria. Un docente eficaz no elige un recurso porque sea «bonito» o «entretenido», sino por la *estructura*

matemática que encarna y por el *nivel de abstracción* que exige. En este sentido, es fundamental aplicar el *Principio de Variabilidad Perceptual* de Zoltán Dienes (1960/1967): para que el alumnado abstraiga el concepto de decena, debe experimentarlo a través de múltiples representaciones y materiales (bloques, ábacos, dinero...). Esto evita que el concepto quede «anclado» a un único material y promueve una comprensión más profunda y generalizable.

A continuación, clasificaremos los recursos fundamentales según su función didáctica en la progresión del aprendizaje.

5.3.2.1 Materiales Proporcionales (Para construir el significado)

Un material es proporcional cuando la representación física de una cantidad es proporcional a su valor. Es decir, la pieza que representa la decena es, visible y tangiblemente, diez veces más grande que la pieza que representa la unidad.

Función Didáctica. Son *imprescindibles en las fases iniciales*. Su función es hacer concreta y verificable la estructura de la base 10. Permiten al alumnado *ver y tocar* que diez unidades *son* una decena, y que una centena *está formada* por diez decenas. Son el anclaje perceptual del sistema.

Ejemplos Clave.

- *Bloques Multibase (o Bloques de Dienes)*: Son el material por excelencia para este fin. Consisten en cubitos (unidades), barras (decenas), placas (centenas) y bloques (millares). Su mayor virtud es que la composición es explícita: el alumnado puede coger una barra de decena y comprobar por sí mismo que está formada por diez cubitos-unidad. Son la herramienta fundamental para dar sentido al *canje* en los algoritmos.
- *Regletas de Cuisenaire*: Aunque su uso principal es la descomposición aditiva, también son un material proporcional. La regleta naranja (10) mide lo mismo que diez regletas blancas (1). Permiten visualizar la decena como una longitud.
- *Palillos o Policubos agrupados*: Son alternativas de bajo coste y de un altísimo valor didáctico, ya que enfatizan la *acción de agrupar*. El acto físico de contar diez palillos y unirlos con una goma elástica es la encarnación perfecta de la fase enactiva de Bruner.

5.3.2.2 Materiales No Proporcionales (Para consolidar la abstracción)

En estos materiales, el valor de una pieza no viene determinado por su tamaño, sino por una convención, como su *posición* o su color. La ficha que representa la decena es idéntica a la que representa la unidad.

Función Didáctica. Son ideales para una *fase de consolidación*, una vez que el concepto de agrupamiento ya se ha construido con materiales proporcionales. Su función es ayudar al alumnado a dar el salto desde la dependencia del tamaño físico hacia la comprensión del *valor puramente posicional*. Exigen un mayor nivel de abstracción.

Ejemplos Clave.

- *El Ábaco Vertical*: Es el material posicional por antonomasia. Todas las cuentas o anillas son idénticas. Su valor cambia drásticamente dependiendo de la varilla

en la que se insertan. Una cuenta en la segunda varilla «vale» 10, no porque sea más grande, sino simplemente porque *está ahí*. Es la herramienta perfecta para hacer visible el significado del cero como marcador de una posición vacía.

- **Dinero Didáctico:** Es un recurso potentísimo por su *contexto funcional*. Un billete de 10 euros no es diez veces más grande que una moneda de 1 euro, pero todo el alumnado comprende, por su experiencia social, que su valor es diez veces mayor. El dinero permite trabajar el canje y el valor posicional en un contexto realista y altamente motivador.

Clave Didáctica: Los Materiales como Puente hacia la Abstracción

Una de las actividades más potentes para guiar al alumnado en la transición de lo proporcional a lo posicional es la comparación directa y explícita.

Contexto: Aula de 2º de Primaria. El alumnado ya ha trabajado con ambos tipos de materiales por separado.

La Tarea: El docente pide a las parejas de alumnos que representen el número, por ejemplo, 44, de dos formas simultáneamente, una al lado de la otra:

1. Con los bloques multibase (4 barras y 4 cubitos).
2. Con el ábaco vertical (4 cuentas en la varilla de las decenas y 4 en la de las unidades).

La Pregunta Clave del Docente: «Mirad las dos representaciones. Ambas valen 44. Pero, ¿por qué en los bloques las piezas de las decenas son mucho más grandes que las de las unidades, y en el ábaco todas las cuentas son iguales? ¿Qué es lo que hace que estas cuatro cuentas valgan más que estas otras cuatro?»

El Aprendizaje: Este diálogo guiado genera un *conflicto socio-cognitivo* (en el sentido de Vygotsky). Obliga al alumnado a verbalizar la idea abstracta del valor posicional. La conclusión a la que deben llegar, guiados por el docente, es que en el ábaco «lo que manda no es la ficha, sino la casa (la varilla) donde vive». Esta actividad no enseña el valor posicional; crea las condiciones para que el alumnado lo descubra y lo enuncie por sí mismo.

5.3.3 Funciones del SND y su Conexión Curricular (LOMLOE - Andalucía)

Una vez que el alumnado, guiado por el docente y apoyado en los materiales, comienza a construir la estructura de nuestro sistema de numeración, es el momento de responder a la pregunta fundamental: *¿para qué sirve todo esto?* La enseñanza del SND no es un fin en sí misma; es un medio para dotar al alumnado de una de las herramientas de pensamiento más potentes que existen.

Un enfoque competencial, como el que prescribe la *LOMLOE* y desarrolla el currículo andaluz, exige que el aprendizaje esté orientado a la acción, a la aplicación del conocimiento para interpretar el mundo y resolver problemas. Por tanto, no basta con que el alumnado sepa «cómo funciona» el sistema; debe descubrir y utilizar sus *funciones* en contextos significativos.

Ejemplo práctico: De la Regla a la Necesidad

La enseñanza más eficaz del SND no es la que presenta el sistema como un conjunto de reglas a memorizar, sino la que crea *situaciones donde el sistema se vuelve necesario*. En lugar de explicar el valor posicional de forma abstracta, podemos diseñar problemas que lo hagan emerger como la estrategia más eficiente.

Ejemplo de Situación-Problema (“El Almacén de Tornillos”): El alumado es “trabajador” de un almacén. Reciben un pedido de 34 tornillos. Disponen de tornillos sueltos, cajas que almacenan exactamente 10 tornillos, y cajones que almacenan exactamente 10 de esas cajas. El reto es preparar el pedido para su envío de la forma más organizada y que ocupe menos espacio.

En esta *Situación de Aprendizaje*, inspirada en la *Teoría de Situaciones Didácticas* de Brousseau (2007), la necesidad de agrupar en base 10 no es una orden del docente, sino la *estrategia óptima para resolver el problema*. El conocimiento emerge como una herramienta funcional, no como una regla arbitraria. El número “34” deja de ser un símbolo y se convierte en la solución: “3 cajas y 4 tornillos sueltos”.

Función 1: Registro y Comunicación. Es la función más básica. El SND nos proporciona una forma increíblemente eficiente de *recordar y comunicar* cantidades.

- *Ejemplo*: Es inmensamente más práctico y fiable escribir «Hay 128 alumnos en el patio» que dibujar 128 figuras. El número escrito se convierte en una herramienta de memoria externa.

Función 2: Comparación y Ordenación. La estructura posicional del SND nos dota de un algoritmo simple y potente para comparar números.

- *Ejemplo*: Sabemos que 125 es mayor que 98 no por intuición, sino porque la regla «a más cifras, mayor es el número» es una consecuencia directa del valor posicional. Si tienen las mismas cifras, empezamos a comparar por la izquierda.

Función 3: Operatoria y Predictiva. Esta es la función más avanzada. La arquitectura del SND es lo que permite la existencia de nuestros algoritmos de cálculo.

- *Operatoria*: Los algoritmos no son más que reglas que se aprovechan de la base 10 (agrupamiento y canje) y del valor posicional. La “llevada” es una notación eficiente para un canje.
- *Predictiva*: Esta es la base de la modelización. Nos permite anticipar el resultado de una acción en el mundo real. Antes de repartir 24 galletas entre 6 personas, usamos $24 \div 6 = 4$ para *predecir* que a cada persona le corresponderán 4.

Clave Didáctica: Anclaje Curricular Explícito (ORDEN de 30 de mayo de 2023)

Estas funciones no son meras ideas teóricas, sino que están directamente reflejadas en los saberes básicos que prescribe el currículo de Educación Primaria en Andalucía. La tarea del docente es diseñar actividades que permitan al alumnado ejercer estas funciones. Por ejemplo, en el *Primer Ciclo*, el *Bloque A. Sentido Numérico* establece:

- **Saber Básico MAT.1.A.2.2:** Este saber básico exige explícitamente trabajar la «lectura, escritura, [...] representación (incluida la recta numérica), el valor posicional, composición, descomposición y recomposición, comparación y ordenación de números naturales hasta el 999». Como se puede ver, el currículo nos pide directamente que enseñemos las funciones de registro, comparación y ordenación a través del trabajo con la estructura del sistema.
- **Saber Básico MAT.1.A.3.4:** Cuando se pide desarrollar estrategias para la resolución de problemas, basándose en las operaciones indicadas en el Saber Básico MAT.1.A.3.2, de suma y resta, se está demandando que el alumnado utilice la numeración en su función operatoria y predictiva.

En definitiva, una enseñanza competencial del SND no se centra en que el alumnado aprenda a escribir números, sino en que descubra, a través de la resolución de problemas, que el sistema de numeración es una herramienta indispensable para registrar, comparar, comunicar y, sobre todo, para pensar y anticipar.

5.3.4 Dificultades y Errores Típicos: El Docente como Detective Cognitivo

El camino hacia la comprensión del Sistema de Numeración Decimal está jalonado de dificultades y errores previsibles. Nuestra labor como docentes se asemeja a la de un *detective cognitivo*: en lugar de simplemente corregir, nuestro objetivo es diagnosticar la lógica detrás del error para poder intervenir eficazmente.

Clave Didáctica: El Ciclo de Actuación Profesional ante el Error

Ante un error en la escritura, lectura u operación con números, la primera tentación es simplemente corregir: «No, 104 no se escribe '14', se escribe así». Este enfoque es poco eficaz porque solo ataca el síntoma, no la causa subyacente.

Un enfoque profesional, en cambio, se asemeja al de un detective que, ante el “crimen” (el error), sigue un proceso de investigación en tres fases:

1. **Evidencia:** ¿Qué error concreto comete el alumno? ¿Es sistemático? ¿Ocurre al leer, al escribir, al dictado, al operar? Por ejemplo: «Observo que el alumno omite sistemáticamente los ceros intermedios al escribir números dictados».
2. **Diagnóstico:** ¿Qué concepción alternativa podría explicar este error de forma lógica? «Mi hipótesis es que el alumno no ha comprendido la función del cero como marcador de una posición vacía. Su mente aún opera en una

lógica donde solo se anota lo que 'suena' o lo que representa una cantidad tangible».

3. *Intervención: ¿Qué tarea, pregunta o material puedo presentar al alumno para generar un conflicto cognitivo que ponga a prueba su hipótesis errónea y le muestre la necesidad de un modelo más potente? «Le pediré que represente con el ábaco el '14' que ha escrito y el '104' que yo le he dictado. La comparación visual de ambas representaciones le obligará a confrontar el problema de la columna de las decenas vacía».*

Este ciclo transforma al docente de un “corrector de fallos” a un “reconstructor de significados”, que es la esencia de nuestra profesión.

Profundizando: Dificultades con el Número vs. la Numeración

Los errores que se describen a continuación están íntimamente ligados a la comprensión del Sistema de Numeración Decimal (SND). Aunque su raíz puede estar en una comprensión incompleta del *concepto de número* (Capítulo 4), su manifestación más clara ocurre al trabajar con la *representación del número*.

Como docentes, debemos diagnosticar con precisión: ¿el problema del alumnado es que no ha consolidado los principios del conteo (p.ej., la cardinalidad), o es que no ha comprendido la lógica del agrupamiento en base 10 (el valor posicional)? Presentar estos errores aquí sirve como puente y diagnóstico inicial para los desafíos que aborda este capítulo.

A continuación, se analizan algunos de los errores más comunes relacionados con el SND, siguiendo este marco de actuación.

Dificultad Común: El Cero “Invisible”

- *Evidencia (¿Qué observamos?):* El alumnado omite el cero al escribir números dictados (ej. escribe «27» para “doscientos siete”) o lo ignora al leer (lee «42» para el número 402).
- *Diagnóstico (¿Por qué ocurre?):* La causa raíz es una comprensión incompleta del cero como *marcador de posición*. El cero no representa una cantidad tangible de objetos (“no hay decenas”), y esta abstracción choca con la idea inicial de que los números sirven para contar “cosas que están ahí”.
- *Intervención (¿Cómo intervenimos?):* La clave es hacer visible la posición vacía.
 - *Uso del Ábaco o Tablas de Valor Posicional (C-D-U):* Al representar “doscientos siete”, el alumnado colocará dos cuentas en la varilla de las centenas y siete en la de las unidades. La varilla de las decenas, visiblemente *vacía*, evidencia la necesidad de un símbolo que marque ese lugar.
 - *Comparación de Pares Mínimos:* Trabajar comparando la representación (con bloques, ábaco y símbolos) de números como 27, 207 y

270 para discutir explícitamente cómo el cero cambia radicalmente el valor del número al “guardar el sitio”.

Dificultad Común: Concepción Aditiva del Valor Posicional

- *Evidencia (¿Qué observamos?):* El alumno piensa que el '3' en '36' vale simplemente '3', no '30'. Al descomponer el número, escribe $3 + 6$ en lugar de $30 + 6$. Ven el número como una yuxtaposición de cifras, no como una suma de valores posicionales.
- *Diagnóstico (¿Por qué ocurre?):* Es una manifestación clara de la persistencia de un modelo conceptual más primitivo, el de los sistemas aditivos (como el egipcio). La estructura *multiplicativa* de nuestro sistema (3×10) no es intuitiva y debe ser construida.
- *Intervención (¿Cómo intervenimos?):* La intervención debe enfocarse en hacer explícito el valor real de cada cifra.
 - *Uso de Dinero Didáctico:* Es el recurso más potente para este error. Pedir a un alumno que forme 36 euros. Naturalmente, cogerá 3 billetes de 10 euros y 6 monedas de 1 euro. La pregunta clave del docente es: «Entonces, este '3' del número 36, ¿cuántos euros vale en realidad? ¿Vale 3 euros o vale 30 euros?». La conexión con el valor real y funcional del dinero es un ancla de significado muy poderosa.
 - *Tarjetas de Descomposición:* Fomentar juegos de “formar el número” con tarjetas de valor posicional (ej. una tarjeta con '30' y otra con '6' que se superponen para formar '36').

Dificultad Común: La “Llevada” Mágica en los Algoritmos

- *Evidencia (¿Qué observamos?):* En la suma, el alumnado olvida o gestiona incorrectamente la “llevada”. En la resta, tienen dificultades conceptuales con el “pedir prestado”.
- *Diagnóstico (¿Por qué ocurre?):* Este error, aunque se manifiesta en la operación, tiene su raíz en una débil comprensión del *principio de agrupamiento y canje*. Si no se comprende que 10 unidades *equivalen* y se pueden *canjear* por 1 decena, la “llevada” se convierte en un truco memorístico sin sentido (“pongo un uno arriba”).
- *Intervención (¿Cómo intervenimos?):* La intervención debe retroceder en la secuencia de Bruner y prohibir la abstracción prematura.

Clave Didáctica: La Regla de Oro del Canje

Para evitar que los algoritmos se conviertan en “magia negra”, debemos seguir un principio didáctico inquebrantable:

No se anota en el papel ninguna acción (como una “llevada”) que no se haya realizado primero físicamente con el material.

Esto significa que la enseñanza del algoritmo de la suma con llevadas debe realizarse en dos fases inseparables:

1. *La Acción (Fase Enactiva)*: El alumnado representa los sumandos con bloques multibase. Al juntar las unidades, obtiene (por ejemplo) 12 cubitos. Experimenta la necesidad de *canjear* 10 de esos cubitos por 1 barra de decena, que es *físicamente llevada* a la columna de las decenas.
2. *El Registro (Fase Simbólica)*: Solo después de haber realizado la acción anterior, se procede al registro en el algoritmo escrito. El “1” que se anota arriba no es un número mágico, es la *memoria en el papel* de la barra que acabamos de canjear y mover.

La mano debe ir siempre antes que el lápiz. Esta es la única garantía de que el algoritmo se construye sobre una base de comprensión relacional.

5.4 Conclusión: Habilitando el Pensamiento Numérico

El viaje a través del universo de los sistemas de numeración nos devuelve al punto de partida, pero con una mirada transformada. Hemos desgranado la aparente simplicidad de escribir un número para descubrir una arquitectura conceptual de una elegancia y una potencia extraordinarias. Este capítulo ha buscado proporcionar al futuro maestro y maestra las claves para comprender y, sobre todo, para enseñar esta formidable invención humana.

Hemos recorrido un camino en dos etapas. Primero, nos hemos sumergido en la *naturaleza del objeto matemático*. Hemos viajado desde los sistemas aditivos de la antigüedad hasta la revolución posicional del sistema hindú-arábigo, no como una mera anécdota, sino como una herramienta didáctica para valorar la ingeniosa eficiencia de nuestro sistema y para comprender las raíces profundas de las dificultades de nuestro alumnado. Hemos diseccionado la anatomía del SND, comprendiendo que sus reglas de agrupamiento y valor posicional son el fundamento lógico sobre el que se construirán todos los algoritmos operatorios.

En la segunda etapa, nos hemos centrado en el *sujeto que aprende* y en las *implicaciones para la enseñanza*. Hemos entendido que la comprensión del SND no se transmite, sino que se *construye* a través de una secuencia pedagógica que debe, ineludiblemente, partir de la acción concreta para llegar al símbolo abstracto. Hemos visto cómo los materiales manipulativos no son un complemento, sino puentes cognitivos, y cómo los errores no son fracasos, sino valiosas guías para nuestra intervención.

Clave Didáctica: El Rol del Futuro Docente

Este capítulo subraya una idea central que redefine el rol docente: no se puede enseñar el SND de forma eficaz si no se comprende su lógica interna y el camino que recorre la mente infantil para asimilarla. La conclusión de este recorrido nos aleja de la visión de un docente como mero *transmisor* de cifras y reglas, y nos acerca a la de un *arquitecto de experiencias de aprendizaje*.

Nuestra labor consiste en diseñar un ecosistema de aula donde:

- Los *problemas* (como el del almacén) creen la *necesidad* del agrupamiento.
- Los *materiales* (como los bloques multibase o el ábaco) sirvan de *andamio* para construir el significado.
- Las *preguntas* y el *diálogo* actúen como el *cemento* que conecta la acción con la abstracción.

Guiar al alumnado en la reinención del sistema de numeración es uno de los actos pedagógicos más complejos y, a la vez, más gratificantes de la Educación Primaria.

Una sólida comprensión del Sistema de Numeración Decimal es mucho más que un tema del currículo. Es el *prerrequisito cognitivo indispensable* para todo el edificio de la aritmética. Sin este cimiento:

- Los *algoritmos de las operaciones* (que abordaremos en los siguientes capítulos) se convierten en trucos de magia, en recetas memorísticas sin sentido, frágiles y propensas al error.
- El *cálculo mental* carece de flexibilidad, pues se fundamenta en la capacidad de componer y descomponer números con agilidad, una habilidad que nace directamente de la comprensión de la estructura decimal.
- Conceptos posteriores como los *números decimales* o los *porcentajes* resultan incomprensibles, ya que no son más que una extensión de la lógica de la base 10 a valores inferiores a la unidad.

En definitiva, enseñar el sistema de numeración no es solo enseñar a escribir números; es proporcionar al alumnado una de las herramientas más poderosas del pensamiento humano para organizar, comunicar y transformar la realidad. Es entregarles la llave que les permitirá abrir las puertas a un universo matemático lleno de significado, estructura y belleza.

Ahora que hemos comprendido la arquitectura de los números que escribimos, estamos listos para explorar cómo esta estructura da poder y sentido a las primeras y más fundamentales operaciones que realizamos con ellos. Iniciamos así nuestro viaje por el *campo aditivo*, descubriendo la estructura oculta de la suma y la resta en el siguiente capítulo.

5.5 Para la Reflexión y el Portfolio Docente

1. Conexión con la Propia Historia: El Misterio de la «Llevada».

Consigna: Reflexiona sobre tu aprendizaje del sistema de numeración y los algoritmos.

- ¿Recuerdas haber tenido alguna de las dificultades descritas en la sección 5.3.4 (ej., el cero invisible, la concepción aditiva)?
- La «llevada», ¿fue para ti un truco memorístico o una acción con significado (un canje)? ¿Eras consciente de que el '2' en '25' valía veinte?
- Escribe un breve párrafo sobre cómo tu experiencia como escolar podría influir (positiva o negativamente) en tu forma de enseñar este concepto.

2. *Análisis de Recurso Didáctico (El Ojo Didáctico): La Decena.*

Consigna: Busca en un libro de texto de 1º o 2º de Primaria el tema de la decena o la centena. Analiza la secuencia de actividades que propone.

- ¿Respetar la secuencia de Bruner (acción $\rightarrow$ imagen $\rightarrow$ símbolo)? ¿O introduce la notación simbólica de forma prematura?
- ¿Qué tipo de materiales (proporcionales, no proporcionales) se sugieren o se muestran? ¿Es adecuada la elección para el objetivo?
- ¿Las actividades plantean el agrupamiento como una regla a seguir o como una necesidad para resolver un problema?

3. *Diseño de una Micro-Situación Didáctica: La Necesidad del Cero.*

Consigna: Basándote en el Mini-Caso de Aula «La ineficacia del sistema aditivo para el cálculo algorítmico» de la página 156, diseña una pequeña tarea para alumnado de 3º de Primaria cuyo objetivo sea que tomen conciencia de la importancia del cero como marcador de posición. Debe ser un problema o un juego que genere un conflicto cognitivo si el cero es ignorado (inspirado en la ambigüedad del sistema babilónico). Describe la puesta en escena, la tarea y, sobre todo, la pregunta clave que harías para institucionalizar el aprendizaje.

Bitácora de la Parte II

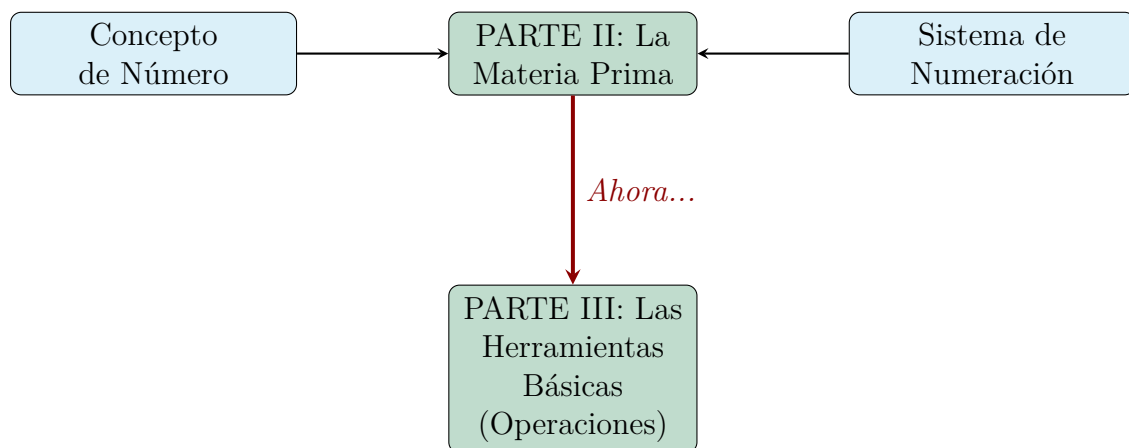
Lo que llevamos en la mochila (Resumen de la Parte II)

En esta segunda etapa hemos explorado la *materia prima* de la aritmética. Ya no vemos el número como algo simple, sino como una construcción intelectual profunda. Llevamos en nuestra mochila dos ideas clave:

- El *Concepto de Número Natural*: Hemos desentrañado su doble naturaleza (cardinal y ordinal), su rica polisemia (medida, código, secuencia) y, crucialmente, el fascinante proceso por el cual la mente infantil lo construye, desde los principios de Gelman y Gallistel hasta los niveles de la secuencia de Fuson.
- El *Sistema de Numeración Decimal*: Hemos viajado por la historia para apreciar la genialidad del principio posicional y la invención del cero. Comprendemos que nuestro sistema es el ADN de los algoritmos y la base para una comprensión profunda del valor de cada cifra.

Nuestra próxima etapa: Las Herramientas Básicas

Ahora que dominamos la materia prima (el número), es el momento de equiparnos con las *herramientas fundamentales* para trabajar con ella. En la Parte III, nos adentraremos en el universo de las *operaciones aritméticas*. Descubriremos que sumar, restar, multiplicar y dividir no son meras recetas, sino complejos y ricos campos conceptuales que modelizan una enorme variedad de situaciones del mundo real. Pasamos de entender *qué son* los números a comprender *qué podemos hacer con ellos*.



III Operaciones aritméticas: sentido, algoritmos y resolución de problemas

UNA vez que el alumnado ha comenzado a construir el concepto de número y a comprender la estructura de nuestro sistema de numeración, se abre la puerta a uno de los territorios más fascinantes y esenciales del aprendizaje: el de las operaciones aritméticas. Este tercer módulo, *Operaciones Aritméticas: Sentido, Algoritmos y Resolución de Problemas*, se adentra en el corazón del “hacer matemáticas”. El viaje que iniciamos aquí no consiste en aprender a ejecutar cálculos, sino en aprender a interpretar, modelizar y transformar la realidad a través de ellos.

Las operaciones de suma, resta, multiplicación y división no son meras técnicas aisladas. Son los *verbos del lenguaje matemático*; las acciones que nos permiten contar las historias del mundo cuantitativo que nos rodea: historias de juntar, separar, comparar, repetir y repartir. Por ello, la enseñanza de estas operaciones debe trascender la simple mecanización de algoritmos. Nuestro objetivo primordial es construir su *sentido*, explorando la rica variedad de contextos y significados que cada una encierra. El desarrollo de un cálculo mental flexible, la comprensión de las propiedades matemáticas y la capacidad de reflexionar sobre qué estrategia es más útil en cada caso, son las verdaderas metas de este módulo.

Este camino de construcción nos llevará a expandir nuestro universo numérico. Veremos cómo las limitaciones de la resta con números naturales nos empujan a cruzar una nueva frontera, dando la bienvenida a los *números enteros* y a un nuevo mundo de significados donde los números no solo cuentan, sino que también dirigen y posicionan.

Los capítulos que componen este módulo están diseñados como un itinerario guiado a través de la didáctica de cada campo operatorio:

- Iniciaremos nuestro viaje en el *Campo Aditivo* (Capítulo 6), descubriendo que la suma y la resta son dos caras de la misma moneda y explorando la gran diversidad de problemas que modelizan.
- A continuación, afrontaremos la primera gran “ruptura” conceptual al introducir los *Números Enteros* (Capítulo 7), aprendiendo a dotar de significado a los números negativos y a operar con ellos a través de modelos concretos.
- Seguiremos explorando el *Campo Multiplicativo* (Capítulo 8 y 9), y otros conceptos posteriores, desgranando los múltiples significados de la multiplicación y la división y sus complejos algoritmos.

En cada capítulo, mantendremos un énfasis constante en la secuencia didáctica que va de la acción concreta al símbolo abstracto, en el uso inteligente de los recursos y en el análisis de las dificultades del alumnado como ventanas a su pensamiento.

Este módulo busca equipar al futuro docente para transformar la clase de aritmética. El objetivo no es enseñar a obtener respuestas correctas, sino a hacer las preguntas adecuadas; no es entrenar calculistas, sino cultivar pensadores matemáticos que vean las operaciones como lo que realmente son: herramientas poderosas para comprender el mundo y darle sentido.

6 Campo Aditivo: Suma y Resta con Números Naturales

UNA vez que el alumnado ha comenzado a construir los cimientos del pensamiento numérico (Capítulo 4) y de la estructura de nuestro sistema de numeración (Capítulo 5), se abre ante nosotros la puerta a un universo fascinante y esencial: el de las operaciones aritméticas. Este capítulo se adentra en el corazón del «hacer matemáticas» en la Educación Primaria, explorando el primer gran bloque conceptual al que se enfrentan los niños y niñas: el *campo de las estructuras aditivas*, que engloba la suma y la resta.

6.1 Introducción: El Primer Gran Viaje Operatorio

A primera vista, estas operaciones pueden parecer sencillas, casi triviales para la mente adulta. Sin embargo, bajo la aparente simplicidad de «juntar» y «quitar» se esconde un vasto y rico territorio conceptual. La enseñanza de la suma y la resta no consiste en la mera transmisión de procedimientos para obtener resultados correctos; consiste en guiar al alumnado en la construcción de un sistema de pensamiento lógico y flexible que le permita modelizar y resolver una amplísima gama de situaciones problemáticas. Como demostró Gérard Vergnaud, no se trata de dos operaciones aisladas, sino de una compleja red de situaciones, conceptos y relaciones que constituyen un único campo conceptual (Vergnaud, 1982).

6.1.1 Más Allá de Juntar y Quitar: El Pensamiento Aditivo

Nuestra labor como futuros docentes comienza por desmontar nuestra propia visión simplista. Si bien la suma se asocia intuitivamente a la acción de «juntar» y la resta a la de «quitar», esta visión es radicalmente insuficiente.

Mini-Caso de Aula: La Semántica Oculta de la Suma y la Resta

Consideremos estas dos situaciones:

1. «En una estantería hay 12 libros en total. 5 son de aventuras y el resto son de misterio. ¿Cuántos libros de misterio hay?». Aquí no se quita nada, sin embargo, la operación que resuelve el problema es una resta.
2. «Tengo 7 cromos y mi amiga Ana tiene 11. ¿Cuántos cromos le faltan para tener los mismos que Ana?». Esta situación no es de juntar ni de quitar, sino de comparar o igualar.

Todas estas situaciones, y muchas otras, pertenecen al *campo de las estructuras aditivas*. El objetivo fundamental de este capítulo es aprender a ver más allá de las operaciones para comprender las estructuras subyacentes. El fin último no es que el alumnado aprenda a sumar y a restar, sino que desarrolle un *pensamiento aditivo*: la capacidad de analizar una situación, identificar las relaciones entre las partes y el todo, y elegir o crear una estrategia eficiente para encontrar la información desconocida.

Clave Didáctica: Saber Sumar vs. Saber Hacer Sumas

Como señala el profesor Marcos Marrero Cárdenas, es fundamental distinguir entre *saber hacer sumas* y *saber sumar*.

- *Saber hacer sumas* implica dominar un algoritmo de forma mecánica. Quien solo sabe esto, dependerá de un lápiz y un papel, tendrá un sentido numérico pobre y, en consecuencia, una baja competencia matemática. Los algoritmos tradicionales, enseñados de forma instrumental, fomentan este limitado saber.
- *Saber sumar*, en cambio, implica comprender las relaciones numéricas, tener flexibilidad para usar diversas estrategias y algoritmos, y determinar cuál es el más eficiente en cada caso. Es la manifestación del pensamiento aditivo.

Un buen indicador de que un estudiante «sabe sumar» es que, a medida que avanza en la práctica, necesita escribir cada vez menos los pasos intermedios, hasta llegar a resolver muchas operaciones directamente. Nuestro objetivo como docentes es cultivar este saber profundo.

6.1.2 La Doble Cara del Desafío Didáctico

Para guiar al alumnado en este viaje, debemos abordar simultáneamente dos frentes que, aunque interconectados, son conceptualmente distintos. Una enseñanza eficaz del campo aditivo requiere equilibrar constantemente:

- *La Construcción del Significado (El Para Qué)*: Este es el pilar fundamental. Se centra en la capacidad de conectar las operaciones aritméticas con el mundo real. Implica que el alumnado comprenda la gran variedad de situaciones que pueden ser modelizadas por una suma o una resta (problemas de cambio, combinación, comparación, etc.). Es el trabajo que dota de propósito al cálculo y responde a la pregunta eterna del alumnado: «¿Y esto para qué sirve?».
- *La Construcción del Procedimiento (El Cómo)*: Se refiere al desarrollo de estrategias de cálculo. Este camino es una fascinante progresión que va desde las estrategias más tempranas e informales, basadas en el conteo con los dedos, hasta el desarrollo de un cálculo mental flexible y estratégico, culminando en el dominio comprensivo de los algoritmos formales.

Clave Didáctica: Conectando Significado y Procedimiento

Un procedimiento sin significado es una regla vacía; un significado sin un procedimiento eficiente es un saber impracticable. La clave de nuestra labor docente, como ya se analizó en la distinción fundamental de Richard Skemp (1978) (ver apartado 1.3.5), es asegurar que la construcción del significado (comprensión relacional) y la del procedimiento (comprensión instrumental) vayan siempre de la mano.

6.1.3 Conexión Curricular Explícita: El Sentido Numérico en Acción

Este enfoque, centrado en el significado y la flexibilidad, no es una mera preferencia pedagógica, sino un mandato directo de nuestro marco normativo. La *ORDEN de 30 de mayo de 2023*, por la que se desarrolla el currículo de Primaria en Andalucía, es inequívoca al respecto. Dentro del *Bloque A. Sentido Numérico*, saberes básicos como el *MAT.1.A.3.2* o el *MAT.2.A.3.4* establecen que la suma y la resta deben trabajarse «*con flexibilidad y sentido*», haciendo hincapié en la «*utilidad en situaciones contextualizadas*» y en las «*estrategias y herramientas de resolución*».

Implicación didáctica: El Mandato Curricular de la Flexibilidad y el Sentido

La normativa vigente nos aleja de una enseñanza mecánica y nos impulsa a adoptar un enfoque competencial. Cuando dedicamos tiempo a que el alumnado explore diferentes formas de resolver un problema, cuando valoramos una estrategia personal aunque no sea la estándar, o cuando usamos material manipulativo para que se comprenda la lógica de un algoritmo, no estamos haciendo algo opcional. Estamos aplicando el núcleo de lo que el currículo nos exige: construir el *Sentido Numérico*. Además, al explorar problemas que involucren relaciones como «¿cuánto falta para...?», estamos sentando las bases del *Sentido Algebraico*, que se fundamenta en el pensamiento relacional. Este capítulo es, por tanto, el manual de instrucciones para materializar estos objetivos curriculares en el aula.

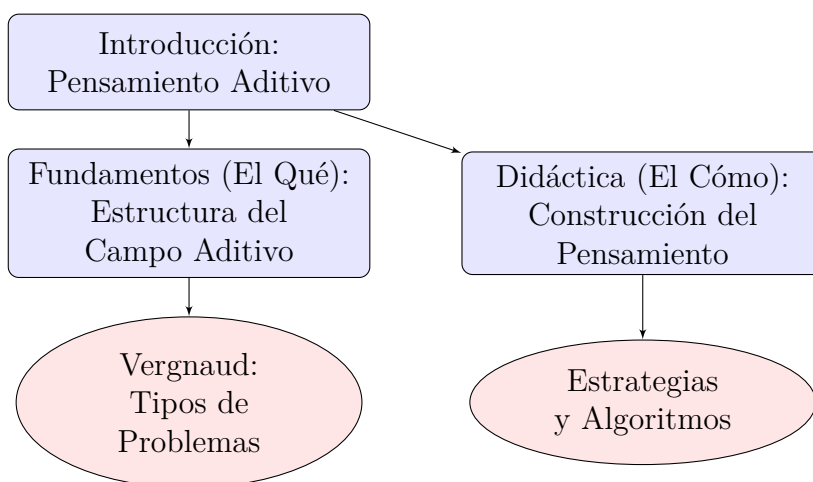


Figura 6.1: Hoja de ruta visual para el capítulo sobre el Campo Aditivo.

A lo largo de las siguientes secciones, desglosaremos este apasionante campo. Primero, analizaremos la estructura matemática que se esconde tras la suma y la resta. Después, nos sumergiremos en el corazón de la didáctica: cómo aprenden los niños y niñas estas ideas y cómo podemos, como docentes, guiar este proceso de forma eficaz, comprensiva y significativa.

6.2 Aspectos Epistemológicos y Matemáticos: La Estructura Oculta de la Suma y la Resta

Antes de sumergirnos en cómo enseñar la suma y la resta, es indispensable dar un paso atrás y actuar como matemáticos y epistemólogos. Debemos preguntarnos: ¿Qué *son* realmente estas operaciones? ¿Cuál es su naturaleza profunda, más allá de los procedimientos que aprendimos en la escuela? La enseñanza tradicional a menudo presenta las operaciones como una colección de recetas para obtener respuestas. Nuestro objetivo en esta sección es radicalmente distinto: vamos a desentrañar la *estructura conceptual* que se esconde bajo la superficie del cálculo.

Comprender esta estructura oculta no es un mero ejercicio académico. Es la piedra angular sobre la que se construye una enseñanza eficaz. Un docente que comprende la lógica interna del campo aditivo puede diseñar problemas más ricos, interpretar los errores de su alumnado con mayor profundidad y, en definitiva, guiarles hacia una comprensión relacional y duradera.

6.2.1 El Campo Conceptual de las Estructuras Aditivas (G. Vergnaud)

El psicólogo y matemático francés Gérard Vergnaud (1982) revolucionó la didáctica de las matemáticas al proponer la idea de *campo conceptual*. Esta teoría nos proporciona el marco más potente para entender la complejidad de las operaciones aritméticas.

Clave Didáctica: Definición de Campo Conceptual

Un campo conceptual es un conjunto de *situaciones y problemas* para cuyo tratamiento se requiere una variedad de conceptos, procedimientos y representaciones simbólicas que están interconectados.

Analicemos esta definición. Vergnaud nos dice que para entender de verdad un concepto matemático (como la suma) no basta con conocer su definición. Es necesario dominar el *conjunto de situaciones* en las que ese concepto es útil y las relaciones que tiene con otros conceptos.

Aplicado a nuestro tema, esto significa que la suma y la resta no son dos ideas separadas que se aprenden una después de la otra. Forman un único y cohesionado *campo conceptual de las estructuras aditivas*. La razón fundamental de esta unión inseparable es que una operación se define a partir de la otra: son operaciones inversas. Matemáticamente, la relación se expresa así:

$$a - b = c \iff a = b + c$$

Esta equivalencia no es una simple fórmula, es el ADN del campo aditivo. Nos dice que cualquier problema de resta puede ser reformulado como un problema de suma con una incógnita. Por ejemplo, resolver $12 - 5 = ?$ es equivalente a buscar la respuesta a $5 + ? = 12$. Esta dualidad es la que el alumnado debe llegar a construir y dominar para poder moverse con flexibilidad por todo el “territorio” aditivo.

Clave Didáctica: Enseñar por Campos Conceptuales, no por Operaciones Aisladas

La teoría de Vergnaud tiene una implicación práctica radical para nuestra labor docente. Nos obliga a superar la visión tradicional de enseñar primero “todo sobre la suma” y después “todo sobre la resta”.

Visión Tradicional (Incorrecta):

- Se enseña la suma como “juntar”.
- Se practican muchas sumas.
- Se enseña la resta como “quitar”.
- Se practican muchas restas.

Visión por Campo Conceptual (Correcta):

- Se presentan *situaciones problemáticas* variadas.
- El alumnado explora y descubre que algunas situaciones de “buscar una parte” (combinación), de “retroceder” (cambio) o de “comparar” se pueden resolver tanto con una resta como con una suma incompleta.
- Se trabaja explícitamente la conexión entre las dos operaciones usando modelos como el *esquema Parte-Parte-Todo*. Un mismo diagrama visualiza que si P_1 y P_2 forman el Todo (T), entonces $P_1 + P_2 = T$, $T - P_1 = P_2$ y $T - P_2 = P_1$.

Nuestra misión no es enseñar dos caminos separados, sino entregar al alumnado un mapa completo del territorio y las conexiones entre todos sus lugares.

6.2.2 La Riqueza Semántica: Tipologías de Problemas Aditivos

Los problemas aditivos, lejos de ser simplemente de “juntar” o “quitar”, presentan una gran riqueza de situaciones. La investigación didáctica, basándose en los trabajos pioneros de Vergnaud (1982) y Carpenter y Moser (1982), ha logrado crear un “mapa” de este territorio semántico. Este mapa, hoy canónico, clasifica los problemas aditivos en tres grandes familias según la estructura de relaciones que presentan: problemas de *Cambio*, de *Combinación* y de *Comparación*. Comprender esta clasificación es fundamental para el futuro docente, pues permite diseñar una enseñanza que aborde toda la riqueza del campo aditivo y diagnosticar con precisión las dificultades del alumnado.

Clave Didáctica: La Riqueza Semántica en el Currículo Andaluz

La clasificación de problemas de Vergnaud (cambio, combinación, comparación) no es un mero ejercicio teórico, sino la base para una enseñanza competencial de la suma y la resta. La *ORDEN de 30 de mayo de 2023* refleja esta necesidad al demandar una comprensión profunda de las situaciones aditivas. Por ejemplo:

- *Saber Básico MAT.1.A.3.2.*: Para el Primer Ciclo, se pide trabajar la «*Suma y resta de números naturales resueltas con flexibilidad y sentido: utilidad en situaciones contextualizadas*». Las “situaciones contextualizadas” son, precisamente, los problemas de cambio, combinación y comparación.

- **Saber Básico MAT.2.A.4.3.:** Para el Segundo Ciclo, se profundiza en las «Relaciones entre la suma y la resta [...] aplicación en contextos cotidianos y en la resolución de problemas». La comprensión de que un problema de parte desconocida (combinación) o de comparación se puede resolver con una resta es el núcleo de esta relación.

Nuestra labor docente es asegurar que el alumnado se expone a esta diversidad de problemas, construyendo así un significado robusto y flexible de la suma y la resta.

6.2.2.1 Problemas de Cambio (Transformación)

Son los problemas más intuitivos y los primeros que el alumnado resuelve de manera informal. Su característica principal es que son *dinámicos*: describen una acción que ocurre en el tiempo y que modifica una cantidad inicial. Involucran siempre tres elementos: una *Cantidad Inicial*, una *Transformación* (de aumento o disminución) y una *Cantidad Final*. La dificultad varía enormemente según cuál de estos tres elementos sea la incógnita, generando 6 subtipos.

Subtipo	Estructura / Incógnita	Ejemplo	Dificultad
<i>Transformación de Aumento (+)</i>			
Cambio 1	Resultado desconocido	Ana tenía 8 cromos y ganó 5. ¿Cuántos tiene ahora? ' $8+5=?$ '	Baja
Cambio 2	Transformación desconocida	Ana tenía 8 cromos. Ahora tiene 13. ¿Cuántos ha ganado? ' $8+?=13$ '	Media
Cambio 3	Inicio desconocido	Ana tenía algunos cromos. Ganó 5 y ahora tiene 13. ¿Cuántos tenía? ' $?+5=13$ '	Alta
<i>Transformación de Disminución (-)</i>			
Cambio 4	Resultado desconocido	Ana tenía 12 cromos y perdió 4. ¿Cuántos le quedan? ' $12-4=?$ '	Baja
Cambio 5	Transformación desconocida	Ana tenía 12 cromos. Ahora tiene 8. ¿Cuántos ha perdido? ' $12-?=8$ '	Media
Cambio 6	Inicio desconocido	Ana tenía algunos cromos. Perdió 4 y ahora tiene 8. ¿Cuántos tenía? ' $?-4=8$ '	Muy Alta

Clave Didáctica: La naturaleza dinámica de los problemas de cambio

La naturaleza dinámica de los problemas de cambio los hace ideales para ser representados o dramatizados en el aula. La dificultad cognitiva aumenta drásticamente cuando la cantidad inicial es la desconocida (Cambio 3 y 6), ya que el alumnado debe “rebobinar” mentalmente la acción, una tarea que entra en conflicto con la secuencia temporal del enunciado.

6.2.2.2 Problemas de Combinación (Parte-Parte-Todo)

A diferencia de los problemas de cambio, estos son *estáticos*. No describen una acción en el tiempo, sino una relación entre dos o más subconjuntos (las partes) y un conjunto total (el todo).

Subtipo	Estructura / Incógnita	Ejemplo	Dificultad
Combinación 1	Todo desconocido	Hay 7 manzanas rojas y 4 verdes. ¿Cuántas hay en total? $7+4=?$	Baja
Combinación 2	Parte desconocida	Hay 11 manzanas en total. Si 7 son rojas, ¿cuántas son verdes? $7+?=11$	Media

Clave Didáctica: El significado estático de la resta en problemas de combinación

Los problemas de Combinación 2 son fundamentales porque proporcionan el primer contexto en el que la resta no significa “quitar” o “perder”. La resta adquiere un nuevo significado: “buscar una parte que falta”. Herramientas visuales como los diagramas Parte-Parte-Todo son extremadamente útiles para modelizar esta estructura estática.

6.2.2.3 Problemas de Comparación

Estos problemas también son *estáticos*, pero su estructura es más compleja. Involucran la comparación de dos cantidades distintas y la relación de diferencia que existe entre ellas. Sus tres elementos son: una *Cantidad de Referencia* (con la que se compara), una *Cantidad Comparada* y la *Diferencia*. Son, con frecuencia, los más difíciles para el alumnado.

La relación de comparación puede, como en el caso de los problemas de Cambio o Transformación, se por comparación por incremento o decremento, en función de cómo se establezca la relación entre la referencia y el valor comparado.

Subtipo	Estructura / Incógnita	Ejemplo	Dificultad
Comparación de Aumento (+)			
Comparación 1	Diferencia desconocida	Luis tiene 12 años y Ana tiene 9. ¿Cuántos años más tiene Luis? $12-9=?$	Media
Comparación 3	Cantidad Comparada desc.	Luis tiene 9 años. Ana tiene 3 años más que él. ¿Cuántos tiene Ana? $9+3=?$	Media
Comparación 5	Cantidad de Referencia desc.	Ana tiene 12 años, que son 3 más que Luis. ¿Cuántos tiene Luis? $?+3=12$	Alta
Comparación de Disminución (-)			

Comparación 2	Diferencia desconocida	<i>Luis tiene 9 años y Ana tiene 12. ¿Cuántos años menos tiene Luis?</i> ' $12-9=?$ '	Media
Comparación 4	Cantidad Comparada desc.	<i>Luis tiene 12 años. Ana tiene 3 años menos que él. ¿Cuántos tiene Ana?</i> ' $12-3=?$ '	Media
Comparación 6	Cantidad de Referencia desc.	<i>Luis tiene 9 años, que son 3 menos que Ana. ¿Cuántos tiene Ana?</i> '?-3=9'	Muy Alta

Clave Didáctica: La Estrategia de 'Palabras Clave' como Falso Atajo

La clasificación anterior revela por qué una de las "estrategias" de enseñanza más extendidas es también una de las más perjudiciales: la enseñanza basada en *palabras clave*. Muchos hemos aprendido (o incluso enseñado) la regla instrumental: «Si en el problema pone *juntar*, *ganar* o *más*, hay que sumar. Si pone *quitar*, *perder* o *menos*, hay que restar».

Esta "regla" es una receta para el desastre a largo plazo. Puede funcionar para algunas forma de expresar los problemas más simples (Cambio 1, Cambio 4), pero genera una comprensión superficial que fracasa estrepitosamente ante problemas más complejos. El último ejemplo de Comparación es la prueba definitiva: la palabra clave es «*más*», pero la operación para resolver el problema es una *resta* ($12 - 3 = 9$).

Un alumno o alumna que depende de las palabras clave está operando con una comprensión instrumental (Skemp, 1993). No está analizando la estructura de la situación. Nuestra labor como docentes es *erradicar activamente esta práctica* y sustituirla por una enseñanza que se centre en la *modelización y representación* del problema. Antes de preguntar «¿qué cuenta tengo que hacer?», debemos preguntar «¿qué está pasando en esta historia? ¿Puedes dibujarlo o representarlo con fichas?». Solo exponiendo al alumnado a la rica variedad de problemas del campo aditivo construiremos un pensamiento matemático flexible y verdaderamente competente.

6.2.3 La Lógica Interna de los Problemas: La Incógnita como Clave

Una vez clasificadas las situaciones aditivas en categorías semánticas (cambio, combinación y comparación), podríamos pensar que la dificultad de un problema reside únicamente en su categoría. Sin embargo, la investigación en didáctica de las matemáticas ha demostrado que el factor más determinante para la dificultad de un problema aditivo es la *posición de la cantidad desconocida* (la incógnita) (Carpenter & Moser, 1982).

Para comprender esto, es fundamental introducir un concepto clave: la *consistencia semántica*. Un problema es semánticamente consistente cuando la acción descrita en el enunciado se corresponde directamente con la operación aritmética necesaria para resolverlo. Por el contrario, un problema es inconsistente cuando la operación

para hallar la solución es opuesta a la acción que sugiere el enunciado. Estos últimos generan un *conflicto cognitivo* en el alumnado y, por tanto, son significativamente más difíciles.

Analicemos esto con ejemplos concretos para cada una de las tipologías:

- *En problemas de Cambio (aumento):*
 - *Situación 1 (Consistente): «Ana tenía 8 cromos y ganó 5 en el recreo. ¿Cuántos cromos tiene ahora?».*
 - *Análisis:* La acción es de *ganar* (añadir), y el problema se resuelve con una suma. La semántica y la operación coinciden.
 - *Modelo matemático:* $8 + 5 = ?$
 - *Resolución:* $8 + 5 = 13$.
 - *Situación 2 (Inconsistente): «Ana tenía algunos cromos. Ganó 5 en el recreo y ahora tiene 13. ¿Cuántos cromos tenía al principio?».*
 - *Análisis:* La acción sigue siendo de *ganar* (añadir), pero para encontrar la solución necesitamos realizar una resta. La semántica y la operación entran en conflicto.
 - *Modelo matemático:* $? + 5 = 13$.
 - *Resolución:* $13 - 5 = 8$.
- *En problemas de Comparación:*
 - *Situación 3 (Consistente): «Luis tiene 12 años. Su hermana Ana tiene 9. ¿Cuántos años más que Ana tiene Luis?».*
 - *Análisis:* El lenguaje «*cuántos más*» sugiere una búsqueda de la diferencia, que se asocia intuitivamente con la resta. La semántica y la operación coinciden.
 - *Modelo matemático:* $9 + ? = 12$.
 - *Resolución:* $12 - 9 = 3$.
 - *Situación 4 (Inconsistente): «Luis tiene 12 años, que son 3 más que los que tiene su hermana Ana. ¿Cuántos años tiene Ana?».*
 - *Análisis:* La palabra «*más*» sugiere semánticamente una suma. Sin embargo, para resolver el problema es necesario realizar una resta. Este es un ejemplo clásico de problema que induce al error si el alumnado se guía por palabras clave.
 - *Modelo matemático:* $? + 3 = 12$.
 - *Resolución:* $12 - 3 = 9$.

Estos ejemplos demuestran que la dificultad no reside en las palabras del enunciado, sino en la estructura lógica subyacente. Un docente eficaz no solo debe conocer las diferentes categorías de problemas, sino también ser consciente del desafío cognitivo que supone para el alumnado enfrentarse a situaciones semánticamente inconsistentes.

En resumen, la verdadera comprensión del campo aditivo implica la capacidad de identificar la estructura de un problema y modelizarla matemáticamente, independientemente de si su semántica es consistente o no. Exponer al alumnado a una rica

variedad de problemas, incluyendo aquellos que presentan un conflicto cognitivo, es la única vía para desarrollar una competencia resolutoria flexible, robusta y duradera (Cid et al., 2003; Vergnaud, 1982).

6.2.4 Propiedades Matemáticas como Fundamento del Cálculo Flexible

Una vez analizada la diversidad de situaciones que modeliza el campo aditivo, es fundamental adentrarnos en su estructura interna. A menudo, las propiedades de las operaciones (conmutativa, asociativa, etc.) se presentan en la formación de maestros y maestras como un listado de reglas abstractas que hay que saber enunciar. Sin embargo, desde la perspectiva de la didáctica, esta visión es terriblemente limitada. Las propiedades no son meras “curiosidades” de los números; son las *reglas del juego* que hacen posible el pensamiento numérico flexible y el cálculo mental estratégico (National Council of Teachers of Mathematics, 2014).

Comprender estas propiedades permite al docente pasar de enseñar “recetas” de cálculo (comprensión instrumental) a cultivar un genuino “sentido” de las operaciones (comprensión relacional) (Skemp, 1978). Son el andamiaje matemático que justifica por qué podemos descomponer, recomponer, reordenar y transformar los números para que el cálculo sea más sencillo y transparente. En el campo aditivo, las propiedades de la suma son las que nos otorgan esta potencia.

La Propiedad Conmutativa: El Orden No Altera la Comodidad. La propiedad conmutativa de la suma establece que el orden de los sumandos no altera el resultado.

$$a + b = b + a$$

Clave Didáctica: El Salto Didáctico, De la Regla a la Estrategia

La verdadera potencia didáctica de la propiedad conmutativa reside en que es el *fundamento matemático de la estrategia de sobreconteo desde el número mayor* (*counting on from the larger*). Esta es una de las primeras y más importantes estrategias de cálculo que desarrolla el alumnado para superar el conteo de todo. Nuestro rol no es simplemente enunciar la propiedad, sino ayudar a los niños y niñas a descubrir que aplicarla les facilita enormemente la tarea.

Mini-Caso de Aula: De la acción a la estrategia con la propiedad conmutativa

Escenario: Un alumno de 1º de Primaria debe resolver la suma $3 + 9$.

- *Estrategia Inicial (ineficiente):* El alumno pone 3 dedos, y luego necesita contar 9 más, levantando los otros 7 dedos de sus manos y teniendo que volver a empezar o usar los de un compañero para seguir la cuenta. Es un proceso largo y propenso a errores.
- *Intervención Docente (Andamiaje):* El o la docente no le da la respuesta. En su lugar, pregunta: «¿Y si lo hacemos al revés? ¿Si empezamos por el 9 y le añadimos 3? ¿Crees que dará lo mismo? Vamos a probar».
- *Descubrimiento Guiado:* El alumno piensa “nueve...” y luego cuenta levantando tres dedos: “diez, once y doce”. Descubre, a través de la acción,

que no solo el resultado es el mismo, sino que el proceso es mucho más rápido y seguro.

- **Institucionalización:** El docente verbaliza el descubrimiento: «¡Fantástico! Acabas de usar un superpoder de la suma. Se llama la propiedad conmutativa, y nos dice que siempre podemos empezar a contar por el número más grande para que sea más fácil».

La Propiedad Asociativa: El Superpoder de Descomponer y Recomponer.

Esta es, quizás, la propiedad más poderosa y, a la vez, una de las más relevantes didácticamente. Establece que la forma en que agrupamos los sumandos no altera el resultado final.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Clave Didáctica: El Salto Didáctico, La Arquitectura del Cálculo Mental

Si la propiedad conmutativa nos da comodidad, la asociativa nos da *flexibilidad*. Es el motor que se esconde detrás de casi todas las estrategias de cálculo mental basadas en la descomposición. Nos da el «permiso» matemático para *romper* los números en partes que nos convengan (generalmente, para buscar “amigos del 10”) y volver a agruparlos en un orden diferente y más sencillo. Sin esta propiedad, el cálculo mental estratégico no existiría; estaríamos limitados a contar.

Para el alumnado de Primaria, no se trata de que memoricen la fórmula, sino de que vivencien su poder a través de la manipulación, la visualización y el diálogo.

Ejemplo: La propiedad asociativa como motor del cálculo estratégico

Objetivo: Resolver la suma $8 + 7$. Un alumno que domina la descomposición del 10 utiliza la propiedad asociativa, a menudo de forma intuitiva.

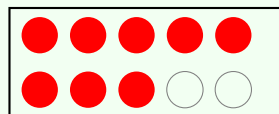
Proceso de pensamiento estratégico:

1. **Descomposición:** «Para llegar a 10, al 8 le faltan 2. Rompo el 7 en dos partes: un 2 y un 5». Matemáticamente, está pensando en $8 + (2 + 5)$.
2. **Reagrupación (Aquí actúa la magia asociativa):** «Ahora junto el 8 con el 2 que le he quitado al 7». Lo que está haciendo es cambiar la agrupación: de $8 + (2 + 5)$ pasa a $(8 + 2) + 5$. La propiedad asociativa garantiza que esta “trampa” es legal.
3. **Cálculo final:** « $8+2$ son 10, y $10+5$ son 15. ¡El resultado es 15!».

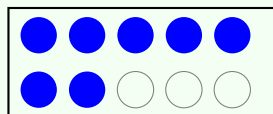
Visualización (Conectando con la Fase Icónica de Bruner): Esta estrategia se puede representar visualmente con Marcos de Diez para construir un significado profundo.

1. **Representación Inicial (Enactivo/Icónico):** El alumnado representa los dos sumandos en marcos de diez separados.

Marco 1 (8)



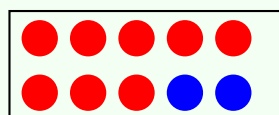
Marco 2 (7)



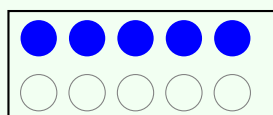
2. *La Acción de Descomponer y Recomponer*: El docente pregunta: «¿Cómo podemos usar las fichas del 7 para llenar el primer marco y hacer un 10?». El alumnado mueve físicamente (enactivo) o dibuja (icónico) el movimiento de 2 fichas.

3. *Representación Final (Reagrupación)*: Ahora la disposición es un 10 completo y un 5. La suma es visiblemente 15.

Marco 1 (10)



Marco 2 (5)



Esta acción visual es la encarnación de la propiedad asociativa: $8+7 = 8+(2+5) = (8+2)+5 = 10+5 = 15$. El alumno *ve* la propiedad en acción antes de nombrarla.

Este proceso, que parece una simple estrategia, es una aplicación implícita pero potentísima de la propiedad asociativa. Nuestra labor es fomentar estas estrategias a través de materiales como las regletas de Cuisenaire o los marcos de diez, que hacen visible la descomposición y la reagrupación. Además, este “superpoder de descomponer y recomponer” es el fundamento de los algoritmos más avanzados que exploraremos más adelante, como los basados en la *descomposición (OAOA)* o el *método ABN*. Todos ellos se basan en la libertad que nos otorga la propiedad asociativa para ‘romper’ un número (ej. 7 en 2 y 5) y reagrupar las partes de una manera más conveniente.

El Elemento Neutro: La Importancia de no Cambiar Nada La existencia del elemento neutro (el cero) en la suma establece que sumar cero a cualquier cantidad no la altera.

$$a + 0 = a$$

Aunque parezca una obviedad, este concepto es fundamental. Didácticamente, aparece en situaciones de cambio nulo («Tenía 5 cromos y no he ganado ninguno. Sigo teniendo 5») y es la piedra angular para comprender la resta de un número a sí mismo ($a - a = 0$) y para el futuro desarrollo del sistema de los números enteros. Es la formalización de la idea de “ausencia de cambio”.

En resumen, el conocimiento de estas propiedades por parte del docente transforma la enseñanza del cálculo. En lugar de ofrecer un único procedimiento cerrado (el algoritmo tradicional), le permite abrir un abanico de estrategias, valorar la diversidad de razonamientos del alumnado y, lo más importante, justificar por qué esos “trucos” que los niños y niñas descubren no son casualidades, sino que están fundamentados en la propia estructura de las matemáticas.

Profundizando: De las Propiedades al Pensamiento Estratégico

Las propiedades conmutativa y asociativa no son meras curiosidades teóricas; son el motor del *cálculo mental estratégico*. Como veremos en profundidad en el Capítulo 12, las estrategias más potentes que desarrolla el alumnado, como la descomposición o la compensación, no son más que una aplicación flexible e inteligente de estas propiedades. Comprenderlas ahora es sentar las bases para un futuro pensamiento numérico ágil y autónomo.

6.2.5 El Algoritmo como Objeto Matemático e Histórico

En el imaginario colectivo, y a menudo en la práctica escolar tradicional, la palabra «algoritmo» evoca la idea de un procedimiento mecánico, una serie de pasos rígidos y, para muchos, carentes de significado. Se percibe como la parte más «aburrida» de las matemáticas, un peaje que hay que pagar para obtener una respuesta correcta. Sin embargo, esta visión empobrecida nos oculta una de las invenciones intelectuales más extraordinarias de la humanidad.

6.2.5.1 Qué es un algoritmo

Un algoritmo no es una simple receta; es una *tecnología del pensamiento*. Es la cristalización de un profundo conocimiento sobre la estructura de nuestro sistema de numeración que permite resolver toda una familia de problemas de forma eficiente y garantizada. Para enseñar los algoritmos con sentido, primero debemos comprender su naturaleza, su historia y su poder.

Anclaje Histórico: El Origen del Término “Algoritmo”

El término *algoritmo* no tiene un origen abstracto, sino un nombre y un lugar. Proviene del nombre latinizado del gran matemático, astrónomo y geógrafo persa del siglo IX, *Muhammad ibn Mūsā al-Jwārizmī* (Abu Abdallah Muḥammad ibn Mūsā al-Jwārizmī). Su obra más influyente, el *Compendio de cálculo por compleción y comparación* (circa 820 d.C.), no solo sentó las bases del álgebra (de la palabra *al-jabr* en su título), sino que también fue fundamental para introducir el sistema de numeración hindú-arábigo en el mundo islámico y, posteriormente, en Europa.

Cuando sus obras se tradujeron al latín, su nombre, *al-Jwārizmī*, se latinizó como *Algoritmi*. Los procedimientos de cálculo descritos en su libro, que operaban con el nuevo sistema posicional, comenzaron a conocerse como los «métodos de Algoritmi». Con el tiempo, la palabra evolucionó a *algoritmo* para referirse a cualquier procedimiento de cálculo sistemático (Ifrah, 1997). Así, cada vez que enseñamos un algoritmo, estamos, en cierto modo, rindiendo homenaje a Al-Juarismi y a la revolución intelectual que ayudó a desatar.

Para poder apreciar su valor, es crucial entender qué define a un algoritmo desde un punto de vista matemático y funcional.

Profundizando: Características Esenciales de un Algoritmo

Un algoritmo es un conjunto *finito* y *ordenado* de instrucciones o reglas bien definidas y no ambiguas que permite, de forma sistemática, resolver un determinado tipo de problema. En aritmética, un algoritmo de cálculo toma unos datos de entrada (los operandos, ej. 247 y 185) y, tras una serie de pasos, produce un resultado de salida (la solución, ej. 432).

Todo algoritmo debe poseer tres características esenciales:

- *Finitud*: Debe terminar tras un número finito de pasos.
- *Precisión*: Cada paso debe estar definido de forma inequívoca, sin dejar lugar a la ambigüedad.
- *Eficacia*: Debe resolver el problema para el que fue diseñado, garantizando la obtención de una solución correcta.

6.2.5.2 El ADN del Algoritmo: La Conexión con el Sistema de Numeración

Para apreciar el valor de un algoritmo como el de la suma con llevadas, es crucial entender que no es una idea abstracta que flota en el aire. Es una consecuencia directa y genial de la estructura de nuestro Sistema de Numeración Decimal (SND), tal como lo exploramos en el Capítulo 5. Su existencia misma depende de tres pilares fundamentales de nuestro sistema:

- *Principio de Agrupamiento en Base 10*: La idea de que 10 unidades se pueden *canjear* por 1 decena es el motor de la “llevada”. El algoritmo es, en esencia, un registro simbólico de esta acción de agrupar y canjear.
- *Valor Posicional*: El sistema de columnas (unidades, decenas, centenas...) solo tiene sentido porque la posición de una cifra determina su valor. El algoritmo opera verticalmente porque confía en esta estructura.
- *El Cero como Marcador de Posición*: Sin el cero, no podríamos diferenciar 207 de 27, y la estructura de columnas colapsaría. El cero garantiza que cada valor esté en su lugar correcto, permitiendo que el algoritmo funcione de manera fiable.

El algoritmo, por tanto, no es una mera “receta para sumar”; es la *expresión dinámica de la anatomía de nuestro sistema de numeración*. Esta es la razón por la que es imposible aplicar un algoritmo similar en un sistema no posicional como el romano (véase el Mini-caso “La ineficacia del sistema aditivo para el cálculo algorítmico” en la página 156)

Clave Didáctica: De la “Caja Negra” del Algoritmo a su Comprensión

El mayor riesgo pedagógico en la enseñanza de los algoritmos es presentarlos como una «caja negra»: un procedimiento mágico donde el alumnado introduce unos números, sigue unas reglas que no comprende («me llevo una»), y obtiene un resultado. Este enfoque promueve una *comprensión instrumental* (Skemp, 1978), frágil y propensa al olvido.

Nuestra labor docente, en línea con el enfoque competencial de la LOMLOE,

consiste precisamente en *abrir esa caja negra*. El algoritmo no debe ser el punto de partida de la enseñanza, sino el punto de llegada. Es la formalización de un proceso que el alumnado ya ha construido de forma significativa. Un algoritmo con sentido es la *culminación* del aprendizaje, no su sustituto.

En resumen, abordar el algoritmo como un objeto matemático e histórico enriquece nuestra perspectiva como docentes. Nos permite presentarlo no como una imposición arbitraria, sino como una ingeniosa solución a un problema histórico, una herramienta cultural que libera a la mente de la carga del cálculo repetitivo para que pueda dedicarse a tareas de orden superior, como la resolución de problemas.

6.3 Aspectos Psicopedagógicos y Didácticos: Guiando la Construcción del Pensamiento Aditivo

Si la sección anterior nos ha proporcionado el mapa del territorio matemático del campo aditivo, esta sección se adentra en el explorador: el niño o la niña que aprende. Dejamos por un momento la perspectiva del matemático para adoptar la del psicólogo y el pedagogo. La pregunta clave ahora no es «¿qué es la suma?», sino «¿cómo llega un ser humano a comprender y dominar la suma?».

La respuesta a esta pregunta ha transformado radicalmente la enseñanza de la aritmética. Lejos de la idea de que la mente infantil es una «pizarra en blanco» sobre la que el docente escribe los algoritmos, la investigación psicopedagógica de las últimas décadas, heredera de los trabajos de Piaget, ha demostrado que el alumnado llega al aula con un considerable bagaje de conocimientos intuitivos y estrategias informales sobre el mundo numérico. Han repartido cromos, han contado juguetes, han comparado su edad con la de sus hermanos. En definitiva, han estado «haciendo matemáticas» mucho antes de que nosotros se las enseñemos formalmente.

Clave Didáctica: Conectar el Conocimiento Informal con el Formal

El error más grave en la didáctica de la aritmética es ignorar el conocimiento informal del alumnado. Si presentamos el algoritmo como un conjunto de reglas nuevas y desconectadas de su experiencia, estamos creando dos mundos matemáticos paralelos: el de la escuela (rígido y simbólico) y el de la vida (intuitivo y con sentido).

Nuestra labor como docentes no es *reemplazar* la matemática informal del niño por la matemática formal del adulto, sino *construir puentes* entre ambas. Debemos partir de sus estrategias intuitivas, ayudándole a reflexionar sobre ellas, a hacerlas más eficientes, a representarlas con un lenguaje más preciso y, finalmente, a conectarlas con los procedimientos formales. El aprendizaje significativo de la suma y la resta es, en esencia, un proceso de traducción y refinamiento.

Este viaje desde las intuiciones iniciales hasta el dominio flexible de los procedimientos formales no es caótico. Sigue una trayectoria de desarrollo coherente y predecible. Como futuros docentes, nuestra responsabilidad es conocer las etapas de esta evolución. Este conocimiento nos permitirá:

- *Diagnosticar*: Entender en qué punto del camino se encuentra cada estudiante.

- *Respetar*: Valorar sus estrategias actuales como un paso necesario y lógico en su desarrollo, en lugar de verlas como «formas incorrectas» de resolver un problema.
- *Intervenir*: Proponer las tareas y formular las preguntas adecuadas para ayudarle a dar el siguiente paso en su trayectoria de aprendizaje.

Esta sección se dedicará a trazar ese mapa evolutivo. Exploraremos cómo se desarrollan las estrategias de cálculo infantil, desde el conteo concreto hasta el uso flexible de hechos numéricos. Analizaremos cómo construir el andamiaje necesario para que los algoritmos, lejos de ser trucos memorizados, se conviertan en la culminación natural y comprensible de este proceso. El primer paso crucial en este camino es, precisamente, el que da título al siguiente apartado.

6.3.1 El Punto de Partida: La Evolución Natural de las Estrategias Infantiles

La enseñanza de la suma y la resta no comienza en una pizarra en blanco. Como hemos visto en capítulos anteriores, el alumnado llega a nuestras aulas con un bagaje sorprendentemente rico de conocimientos informales sobre cómo añadir y quitar cantidades, construido a través de sus juegos e interacciones cotidianas. Ignorar esta matemática informal no solo es ineficaz, sino que va en contra de todo lo que las teorías del aprendizaje nos han enseñado. Nuestra labor como docentes no es erradicar estas estrategias intuitivas para reemplazarlas por un método formal, sino, como defendía Constance Kamii, crear las condiciones para que el alumnado *reinvente la aritmética* (Kamii, 1985/2003).

Este proceso de reinención sigue una trayectoria natural y progresiva. Las investigaciones pioneras en psicología cognitiva de autores como Karen Fuson, Thomas Carpenter y James Moser han revelado que las estrategias infantiles para resolver problemas aditivos evolucionan a través de una secuencia de etapas bien definidas, que transitan de lo concreto a lo abstracto, de la enumeración al cálculo (Carpenter & Moser, 1982; Fuson, 1992). Comprender esta evolución es, para el docente, la herramienta diagnóstica más potente que existe. Nos permite entender *por qué* un alumno resuelve un problema de una determinada manera y *cómo* podemos ayudarle a dar el siguiente paso en su desarrollo conceptual.

6.3.1.1 Contar vs. Calcular: Una Distinción Crucial

Antes de explorar la secuencia evolutiva, es indispensable clarificar una distinción fundamental que subyace a todo este proceso: la diferencia entre *contar* y *calcular*.

- *Contar* es un proceso de *enumeración*. Implica establecer una correspondencia uno a uno entre una colección de objetos y la secuencia de palabras-número. Es una estrategia fundamental, pero inherentemente ligada a la presencia (física o mental) de unidades individuales. Es lento y cognitivamente demandante con números grandes.
- *Calcular* es un proceso de *composición y descomposición*. Implica operar directamente con los números como entidades abstractas, utilizando sus propiedades y relaciones. Es una estrategia más sofisticada, flexible y eficiente que se apoya en el sentido numérico.

La enseñanza de la aritmética en el Primer Ciclo es, en esencia, el arte de guiar al alumnado en la transición gradual y significativa del conteo al cálculo.

Clave Didáctica: Contar vs. Calcular, La Distinción Clave en Acción

Imaginemos a dos estudiantes de 1º de Primaria resolviendo la suma $5 + 3$.

- *Ana (Estrategia de Conteo)*: Levanta 5 dedos en una mano y 3 en la otra. A continuación, toca cada uno de los dedos mientras recita la secuencia numérica desde el principio: «uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho. ¡Son ocho!». Ana necesita *ver y enumerar* todas las unidades.
- *David (Estrategia de Cálculo)*: Sostiene en su mente el primer número, el 5, y a partir de ahí, sobrecuenta los otros 3, a menudo apoyándose en sus dedos: «cinco... (levanta un dedo) seis, (levanta otro) siete, (levanta otro) ocho. ¡Son ocho!». David ya no necesita enumerar el primer conjunto; opera *a partir de él*. Ha dado un paso crucial del conteo al cálculo.

6.3.1.2 La Secuencia Evolutiva de Estrategias

Esta transición se materializa en tres grandes niveles de desarrollo estratégico. Es importante entender que estos niveles no son compartimentos estancos, sino una progresión fluida donde las estrategias coexisten y se refinan.

Nivel 1: Modelado Directo y Conteo de Todo (Direct Modeling & Counting All) Es la primera y más intuitiva de las estrategias. El niño o la niña necesita una representación física y concreta de todas las cantidades involucradas en el problema.

- *Descripción*: Para resolver una suma como $6 + 4$, el discente primero representa la primera cantidad (coge 6 polícubos), luego representa la segunda (coge otros 4 polícubos), los junta físicamente y, finalmente, cuenta toda la colección resultante desde el principio: «uno, dos, tres... diez».
- *Implicación Cognitiva*: El alumnado comprende la acción de la suma como “juntar”, pero su procedimiento es totalmente dependiente del material y del conteo uno a uno. Aún no ha desarrollado la cardinalidad de forma que pueda operar con un número sin tener que volver a contarlos.

Nivel 2: Estrategias de Conteo (Counting Strategies) Aquí se produce el primer gran salto hacia la abstracción. El alumnado ya no necesita contar todos los elementos desde uno. Ha interiorizado el principio de cardinalidad y es capaz de confiar en que un número representa una cantidad sin tener que volver a verificarla.

- *Sobreconteo (Counting On)*: Es la estrategia más característica de este nivel. Para resolver $6 + 4$, el discente inicia el conteo desde el primer sumando («seis...») y continúa contando los cuatro siguientes («...siete, ocho, nueve, diez»). Una versión más sofisticada, que demuestra un uso implícito de la propiedad conmutativa, es el *sobreconteo desde el mayor*. Para resolver $4 + 6$, el niño inteligentemente empezará desde 6, haciendo el proceso más corto y eficiente.
- *Descontar (Counting Back)*: Es la estrategia análoga para la resta. Para resolver $9 - 3$, el discente inicia una cuenta regresiva: «nueve... ocho, siete, seis. ¡Quedan seis!». Esta estrategia es cognitivamente más difícil que el sobreconteo, pues la

Nivel 1: Modelado Directo y Conteo de Todo

El pensamiento depende de la percepción y la manipulación de objetos. Se necesita representar físicamente *toda* la cantidad.

Conexión Bruner: Corresponde al *Modo Enactivo*. El conocimiento está en la acción.



Nivel 2: Estrategias de Conteo

Primer salto a la abstracción. Se confía en el cardinal de un número y se opera a partir de él, sin necesidad de representar todos los objetos. La acción se interioriza.

Conexión Bruner: Es el *Puente Icónico-Simbólico*. Se opera sobre una representación mental (icónica) de la secuencia numérica.



Nivel 3: Hechos Numéricos y Estrategias Flexibles

Máxima abstracción. Los números se tratan como entidades flexibles que se pueden componer y descomponer. Se usan las propiedades de las operaciones.

Conexión Bruner: Dominio del *Modo Simbólico*. Se opera directamente con los símbolos y sus relaciones.

Figura 6.2: Progresión evolutiva de las estrategias de cálculo aditivo y su conexión con los modos de representación de Bruner.

secuencia numérica regresiva es menos familiar y requiere un mayor control de la memoria de trabajo.

Nivel 3: Hechos Numéricos y Estrategias Flexibles (Number Facts & Derived Facts) Este es el nivel más avanzado y el verdadero objetivo del desarrollo del sentido numérico. El alumnado trasciende el conteo y comienza a utilizar su conocimiento sobre las relaciones entre los números para resolver problemas. Los números dejan de ser solo etiquetas en una secuencia y se convierten en entidades flexibles que pueden ser descompuestas y recompuestas de múltiples maneras.

- *Descripción:* Las estrategias en este nivel son variadas y demuestran una comprensión profunda.
 - *Uso de Dobles:* Para resolver $6 + 7$, el discente puede pensar: «Sé que $6 + 6$ son 12, así que $6 + 7$ debe ser uno más, 13».
 - *Completar la Decena (Making Ten):* Es una de las estrategias más potentes y un pilar del cálculo mental. Para resolver $8 + 5$, el alumno razona: «A 8 le faltan 2 para ser 10. Cojo 2 del 5, así que me quedan 3. Entonces, $10 + 3$ son 13». Esta estrategia es la base conceptual del algoritmo tradicional de la “llevada”.
 - *Descomposición por Valor Posicional:* Para sumas con números de dos cifras, como $24 + 35$, el alumno puede pensar: « $20 + 30$ son 50, $4 + 5$ son 9. En total, 59».
- *Implicación Cognitiva:* El alumnado ha desarrollado una red de relaciones numéricas. Ya no sigue una secuencia de pasos, sino que elige una estrategia basada en los números específicos del problema. Esto es la esencia del *cálculo mental estratégico*.

Mini-Caso de Aula: Guiando la Transición del Conteo al Sobreconteo

Situación: En un rincón de juego en 1º de Primaria, Lucía se enfrenta al problema: «Tienes 5 cromos y tu amigo te da 3 más. ¿Cuántos tienes ahora?».

Acción del Alumno (Nivel 1): Lucía levanta 5 dedos, luego 3 en la otra mano. Empieza a contar todos los dedos desde el pulgar de la primera mano: «uno, dos... ocho».

Intervención del Docente (Andamiaje): El docente, reconociendo la estrategia de Lucía, en lugar de corregir, le proporciona un andamio para ayudarla a avanzar. Se acerca y le dice: «¡Genial, Lucía! Veo que has contado todos tus dedos. Pero mira, en esta mano (señala la de 5), ya sabíamos que tenías cinco, ¿verdad? ¿Qué pasaría si empezamos a contar desde ahí, desde el cinco, para añadir los otros tres?».

Nuevo Intento del Alumno (Hacia el Nivel 2): Lucía mira su mano de 5 dedos, asiente y dice «cinco...». Luego, tocando los dedos de la otra mano, continúa: «...seis, siete, ocho. ¡Ocho!».

Análisis Didáctico: Con una simple pregunta, el docente no ha dado la respuesta, sino que ha creado un conflicto cognitivo que ha impulsado a Lucía a probar una estrategia más eficiente. Ha validado su conocimiento inicial (la cantidad de

5) y lo ha usado como punto de partida para construir una nueva estrategia (el sobreconteo). Este es el núcleo de la enseñanza sensible y eficaz.

En resumen, esta secuencia evolutiva no es una simple curiosidad psicológica, sino una hoja de ruta para nuestra práctica docente. Nuestro rol es diagnosticar en qué nivel se encuentra cada estudiante y diseñar tareas, juegos y, sobre todo, preguntas que les inviten a dar el siguiente paso en este fascinante viaje desde el conteo concreto hacia el cálculo flexible y con sentido.

6.3.2 Trabajos Previos al Algoritmo: Construyendo el Andamiaje

Antes de abordar los algoritmos formales de suma y resta, es vital realizar un trabajo preparatorio centrado en la comprensión y el cálculo mental. Estas actividades no son un mero “calentamiento” o un complemento; son el andamiaje cognitivo indispensable sobre el que se construirán los algoritmos para que no sean reglas vacías, sino procedimientos cargados de sentido (Carpenter et al., 1999). El objetivo de esta fase es doble: consolidar y flexibilizar el conocimiento sobre la composición de los números y desarrollar un repertorio de estrategias de cálculo mental que doten de autonomía y seguridad al alumnado.

6.3.2.1 Construcción y Composición de los Primeros Números

El dominio del pensamiento aditivo comienza con la manipulación y comprensión de las cantidades más pequeñas.

- *Dominar la construcción de los números hasta el 10:* Principalmente por parejas (los «amigos del 10»), pero también con varios sumandos, estableciendo relaciones: si $5 = 3 + 1 + 1$, entonces $5 = 3 + 2$. Este trabajo debe ser eminentemente manipulativo, apoyado en el lenguaje oral.
- *Introducir la propiedad conmutativa:* A través de la acción, el alumnado debe descubrir que $6 = 4 + 2$ es lo mismo que $2 + 4$. Este es un pilar para la flexibilidad del cálculo.
- *Construcción de números de dos cifras:* Es fundamental usar material como las regletas de Cuisenaire para que el alumnado *vea* y *toque* el valor de posición. Construir $20 + 3$ ayuda a consolidar que en «veintitrés» hay un 20 y un 3, diferenciando las dos cantidades en el lenguaje simbólico 23.

Ejemplo: Fomento de la flexibilidad en la descomposición numérica

Propuesta para el alumnado: «Compón el número 28 de 3 maneras diferentes, pero con estas reglas»:

- «Donde haya 3 sumandos y alguno sea mayor que 10».
Posibles respuestas: $28 = 20 + 5 + 3$; $28 = 14 + 10 + 4$.
- «Donde haya dos números iguales».
Posibles respuestas: $28 = 11 + 11 + 6$; $28 = 7 + 7 + 14$.

Este tipo de tareas fomenta la flexibilidad y el pensamiento estratégico más allá de la simple descomposición.

6.3.2.2 Estrategias de Cálculo Mental Basadas en la Composición

Una vez que el alumnado domina la descomposición, podemos introducir estrategias de cálculo más sofisticadas.

- *Ruta de los dieces/cienes (Completar la decena)*: Es la estrategia más potente y se basa en los “amigos del 10”. Para calcular $27 + 52$, el razonamiento sería: «Del 27 para llegar a 30 me faltan 3. Esos 3 los cojo del 52. Ahora tengo $30 + 49$. El resultado es 79». Esto se puede desglosar aún más: $27 + 3 \rightarrow 30 + 20 \rightarrow 50 + 2 \rightarrow 52$.
- *Ruta de los dobles*: Si el alumnado domina los dobles, puede usarlos como anclaje. Para calcular $45 + 48$, puede pensar: « $45 + 45$ son 90, y como 48 es 3 más que 45, el resultado es $90 + 3 = 93$ ».

Clave Didáctica: Indicador de Progreso

Un buen indicador para observar la mejora en el cálculo mental es que las composiciones que realiza el alumnado son cada vez más cortas y eficientes. Un estudiante puede pasar de calcular $101 + 334$ como $101 + 9 + 40 + 50 + 100 + 100 + 35$ (Día 1) a hacerlo como $101 + 99 + 200 + 35$ (Día 30), mostrando una mayor eficiencia y comprensión de las cantidades.

Mini-Caso de Aula: Verbalizando y Comparando Estrategias de Cálculo Mental

Contexto: Aula de 2º de Primaria. La docente plantea la suma $39 + 24$.

Docente: «¿Cómo podemos resolver esto sin usar el algoritmo de la “llevada”? Pensad en un camino rápido y seguro».

Alumna 1: «Yo le quito 1 al 24 y se lo doy al 39. Así tengo $40 + 23$, que es 63». (Estrategia de completar la decena).

Alumno 2: «Yo he hecho 30 más 20, que son 50. Y luego 9 más 4, que son 13. Y 50 más 13, son 63». (Estrategia de descomposición).

Docente: «¡Fantástico! ¿Veis que ambos caminos nos llevan al mismo sitio? ¿Cuál os parece más fácil para *esta* suma en concreto? ¿Por qué?».

Análisis: La docente no busca “la” respuesta correcta. Valida ambas estrategias, las hace públicas y fomenta la *metacognición*: que el alumnado reflexione sobre su propio pensamiento y el de los demás, desarrollando la flexibilidad para elegir la estrategia más idónea en cada caso.

Del Currículo al Aula: De la Teoría al Mandato Normativo.

Este enfoque no es una mera preferencia pedagógica, sino una exigencia explícita de nuestro marco normativo. La *ORDEN de 30 de mayo de 2023* de la Junta de Andalucía es clara al respecto. Por ejemplo, para el Primer Ciclo, el Saber Básico *MAT.1.A.3.2.* especifica:

«Suma y resta de números naturales resueltas con *flexibilidad y sentido*: utilidad en situaciones contextualizadas, *estrategias y herra-*

mientas de resolución y propiedades, mediante el uso de materiales y recursos lúdicos y motivadores.»

Y para el Segundo Ciclo, el Saber Básico *MAT.2.A.3.4.* insiste en el mismo enfoque. El currículo nos pide, por tanto, que dediquemos tiempo y esfuerzo a construir este andamiaje. Enseñar un único algoritmo de forma mecánica no desarrolla la “flexibilidad y sentido” que la ley nos demanda. La exploración de estas estrategias de cálculo mental es, por tanto, el núcleo del desarrollo de la competencia matemática en el campo aditivo.

En definitiva, estas actividades pre-algorítmicas son el verdadero motor del desarrollo del sentido numérico. Un alumno o alumna que domina la descomposición y las estrategias de “componer hasta...” no solo será más rápido y flexible en el cálculo mental, sino que, fundamentalmente, comprenderá mucho mejor *por qué* y *cómo* funcionan los algoritmos tradicionales cuando llegue el momento de aprenderlos. Estará construyendo un conocimiento relacional, robusto y duradero.

6.3.3 Un Abanico de Algoritmos para la Suma: Comprensión Antes que Mecanización

Una vez que el alumnado ha construido un andamiaje sólido sobre la composición y descomposición de los números y ha desarrollado estrategias de cálculo mental básicas, llega el momento de abordar los procedimientos formales para sumar: los algoritmos. Tradicionalmente, la enseñanza se ha centrado en un único algoritmo, el tradicional, presentado como la única forma “correcta” de sumar. Sin embargo, la didáctica de la matemática contemporánea, en línea con el currículo andaluz que prescribe trabajar las operaciones con «flexibilidad y sentido» (*ORDEN de 30 de mayo de 2023*), nos invita a adoptar una perspectiva mucho más rica y potente.

Un algoritmo no es una verdad matemática caída del cielo, sino una *invención cultural*: una herramienta, una receta eficiente y estandarizada para realizar una tarea compleja. Como toda herramienta, su eficacia depende de que el usuario comprenda para qué sirve y cómo funciona su mecanismo interno. Presentar un algoritmo sin haber construido su significado es como entregar una herramienta sofisticada sin manual de instrucciones; el resultado probable es un uso mecánico, frágil y propenso a errores que el usuario no sabrá cómo reparar.

Clave Didáctica: El Principio Pedagógico Irrenunciable, La Secuencia de Bruner

Para evitar que los algoritmos se conviertan en “trucos mágicos”, su enseñanza debe seguir de forma rigurosa la secuencia pedagógica de Jerome Bruner (1966/1972). Esta transición es la única garantía de que el procedimiento simbólico final esté anclado en una comprensión real. El mantra del docente debe ser:

No se escribe en el papel nada que no se haya hecho primero con las manos.

A continuación, se analizan varios algoritmos para la suma, no como un catálogo a memorizar, sino como un repertorio de herramientas cuyo fundamento debemos comprender.

6.3.3.1 Algoritmo Tradicional (ATOA - Algoritmo Tradicional de las Operaciones Aritméticas).

Es el algoritmo más extendido. Procede de derecha a izquierda (unidades, luego decenas...), basándose en el canje (la “llevada”) cuando la suma en una columna excede de 9. Su enseñanza debe seguir escrupulosamente tres fases:

Fase 1: Enactiva (La Acción). El aprendizaje nace de la manipulación. Para sumar $147 + 85$, el alumnado representa ambas cantidades con bloques multibase.

1. *Juntar Unidades:* Junta físicamente los 7 cubitos-unidad con los 5 cubitos-unidad, obteniendo 13 cubitos.
2. *Canjear:* Experimenta la necesidad de agrupar 10 de esos cubitos y los *canjea* por una nueva barra de decena. Le quedan 3 cubitos sueltos.
3. *Juntar Decenas:* Junta las 4 barras de decena originales, las 8 del segundo número y la nueva barra que acaba de formar. Obtiene 13 barras.
4. *Canjear:* Vuelve a canjear 10 barras de decena por una placa de centena. Le quedan 3 barras sueltas.
5. *Juntar Centenas:* Junta la placa original con la nueva que ha formado. Obtiene 2 placas. El resultado visible es 2 placas, 3 barras y 3 cubitos.

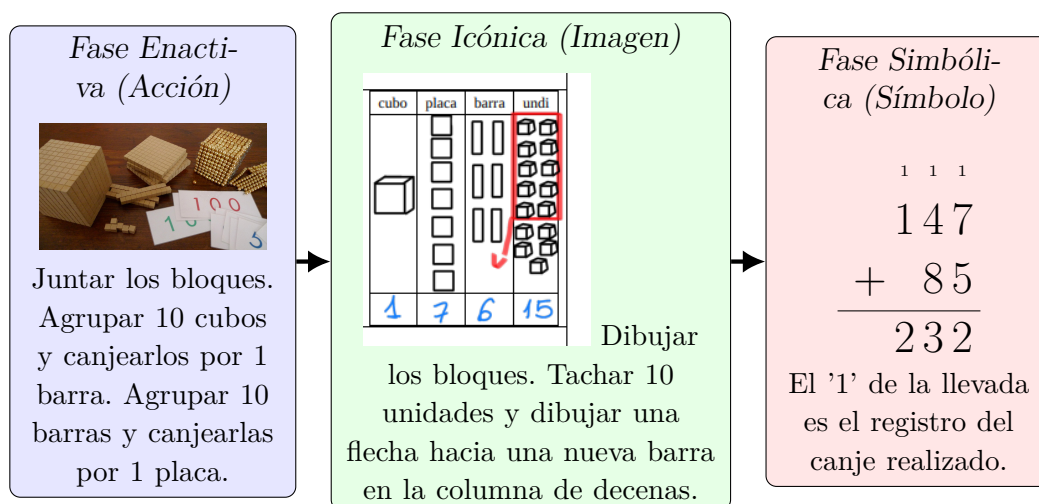


Figura 6.3: Secuencia didáctica de Bruner para la construcción del algoritmo tradicional de la suma. La acción con el material precede al registro simbólico.

Fase 2: Icónica (El Puente). Se construye un puente hacia la abstracción dibujando lo que se ha hecho. El alumnado dibuja en una tabla de valor posicional los bloques que ha manipulado, representando gráficamente la acción del canje (ej. rodeando 10 cubitos y dibujando una flecha hacia una nueva barra de decena en la columna contigua).

Fase 3: Simbólica (El Registro). Es el último paso. Se conecta la acción con la escritura convencional. El “1” que se escribe arriba (*la llevada*) deja de ser un misterio; ahora es el símbolo que representa la nueva decena o centena que se *formó* y se *llevó* a la columna correspondiente en la fase enactiva.

Ejemplo: Conexión del algoritmo tradicional con el modelo de bloques

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 4 \quad 7 \\
 + \quad 8 \quad 5 \\
 \hline
 2 \quad 3 \quad 2
 \end{array}$$

← El 1 sobre el 4 es la **nueva decena** que resulta del canje de $7 + 5 = 12$ unidades.

← El 1 sobre el 1 es la **nueva centena** que resulta del canje de $1 + 4 + 8 = 13$ decenas.

Proceso mental relacional:

1. Sumo $7+5=12$. 12 unidades son *1 decena y 2 unidades*. Dejo el 2 en las unidades y la nueva decena la “llevo” a la columna de las decenas.
2. Sumo las decenas: 1 (que me llevé) $+ 4 + 8 = 13$ decenas. 13 decenas son *1 centena y 3 decenas*. Dejo el 3 en las decenas y la nueva centena la “llevo” a su columna.
3. Sumo las centenas: 1 (que me llevé) $+ 1 = 2$ centenas.

Clave Didáctica: Análisis Didáctico del Algoritmo Tradicional

- **Fortalezas:** Es extremadamente eficiente y rápido una vez que se ha automatizado.
- **Riesgos y Debilidades:** Es muy *opaco* si se enseña directamente en su forma simbólica. Oculta el valor posicional real de los números (se suman “8 más 5”, no “80 más 50”). La “llevada” se convierte en un truco memorístico sin significado, siendo una fuente principal de errores.
- **Implicación Didáctica:** Su enseñanza *nunca* debe ser el punto de partida. Solo debe introducirse tras un intenso trabajo enactivo e icónico que permita dotar de significado al concepto del canje.

6.3.3.2 Algoritmos por Descomposición (OAOA - Otros Algoritmos para las Operaciones Aritméticas).

Estos algoritmos se basan en la descomposición aditiva de los números, operando con los valores posicionales de forma separada y componiendo el resultado al final.

Ejemplo: Algoritmo por descomposición (suma por la izquierda)

$$\begin{array}{r}
 147 \\
 + 85 \\
 \hline
 100 \quad (100 + 0) \\
 120 \quad (40 + 80) \\
 12 \quad (7 + 5) \\
 \hline
 232 \quad (\text{Suma de los parciales})
 \end{array}$$

Clave Didáctica: Análisis Didáctico de la Suma por la Izquierda

- **Fortalezas:** Es muy *transparente*. Trabaja con el valor real de las cifras, lo que refuerza la comprensión del sistema de numeración. Al operar de izquierda a derecha, se alinea con la forma natural de leer y fomenta la *estimación* (tras el primer paso, ya se sabe que el resultado será “ciento y pico”). No hay “llevada”, sino sumas parciales.
- **Implicación Didáctica:** Es un excelente puente entre el cálculo mental y el algoritmo tradicional. Permite al alumnado ganar confianza y comprensión antes de pasar a un método más compacto.

6.3.3.3 Algoritmo ABN (Abierto Basado en Números).

Desarrollado en España por Jaime Martínez Montero (2008), este método se caracteriza por ser “abierto”, es decir, permite diferentes caminos para llegar a la misma solución, adaptándose al nivel de dominio del alumnado. Se basa en la descomposición flexible de uno de los sumandos, que se va añadiendo progresivamente al otro.

Clave Didáctica: Análisis Didáctico del Algoritmo ABN

- **Fortalezas:** Desarrolla de forma excepcional el *sentido numérico* y el cálculo mental. Es totalmente transparente, ya que se opera siempre con números completos. Su flexibilidad respeta los distintos ritmos de aprendizaje: un alumno puede descomponer en decenas y unidades, mientras que otro más avanzado puede hacerlo en cantidades mayores y en menos pasos.
- **Riesgos y Debilidades:** Requiere un dominio sólido de la composición y descomposición numérica como prerequisite. Puede parecer más lento al principio y su formato es menos estandarizado que el tradicional.

Ejemplo: Flexibilidad en la descomposición aditiva (Algoritmo ABN)

Camino A (más directo):

Añadimos	Total	Queda por añadir
	147	85
+80	227	5
+5	232	0

Camino B (más desglosado):

Añadimos	Total	Queda por añadir
	147	85
+50	197	35
+3	200	32
+32	232	0

Mini-Caso de Aula: Comparando Estrategias de Cálculo

Situación: En un aula de 2º de Primaria, el docente propone la suma $36 + 29$.

- *Alumno A (usa algoritmo tradicional):* Coloca los números, suma $6+9=15$, pone el 5, se “lleva” 1. Suma $1+3+2=6$. Resultado: 65. El proceso es rápido.
- *Alumno B (usa una estrategia flexible):* Piensa: “A 29 le falta 1 para ser 30. Le quito 1 al 36 y se lo doy al 29. Ahora tengo $35 + 30$, que es 65”.

Intervención del Docente: El docente no se limita a validar ambas respuestas como correctas. Pide a ambos que expliquen su razonamiento. Al Alumno A le pregunta: «¿Qué es ese '1' que te has llevado? ¿Es un 1 o un 10?». Al Alumno B le dice: «¿Qué estrategia tan inteligente! Has usado la propiedad asociativa. ¿Funcionaría siempre?».

Objetivo Docente: El objetivo no es que el Alumno A deje de usar su método, sino que comprenda su significado. Tampoco es imponer al Alumno A el método del B, sino valorar ambas estrategias y hacer que toda la clase vea que hay diferentes caminos, todos basados en la lógica de los números, para llegar a la misma solución. Se está cultivando la *flexibilidad estratégica*.

6.3.3.4 Algoritmo Holandés (o por Descomposición de Sumandos Parciales)

Este algoritmo, transparente y muy conectado con el cálculo mental, procede de izquierda a derecha.

- *Fundamento Matemático:* Se basa en la descomposición aditiva de los números según el valor posicional y la propiedad asociativa de la suma.
- *Proceso:* Se suman por separado las centenas, las decenas y las unidades, y finalmente se componen los resultados parciales.

Ejemplo: Algoritmo por descomposición de sumandos parciales

$$\begin{array}{r}
 357 \\
 + 235 \\
 \hline
 500 \quad (300 + 200) \\
 80 \quad (50 + 30) \\
 + 12 \quad (7 + 5) \\
 \hline
 592
 \end{array}$$

Clave Didáctica: Análisis del Algoritmo Holandés

Fortalezas: Es extremadamente transparente. Trabaja siempre con el valor real de las cifras (300, 50, 7), reforzando el sentido numérico. Al operar de izquierda a derecha, se alinea con la lectura y facilita la estimación del resultado desde el primer paso. *Implicación Didáctica:* Es un puente excelente entre las estrategias de cálculo mental y el algoritmo tradicional. Permite al alumnado ganar confianza y comprensión antes de pasar a un método más compacto y opaco.

6.3.4 El Desafío de la Resta: Didáctica de sus Algoritmos

La sustracción es la operación inversa de la suma ($m - s = d \iff m = s + d$), pero esta elegante definición matemática esconde una realidad didáctica compleja. Enseñar a restar es uno de los mayores desafíos en la aritmética de Primaria por varias razones fundamentales:

- *Pérdida de la Conmutatividad:* A diferencia de la suma, el orden en la resta es crucial ($5 - 3 \neq 3 - 5$). Esto rompe una de las primeras e más importantes intuiciones que el alumnado construye sobre las operaciones.
- *Diversidad Semántica:* Como vimos en el campo conceptual de Vergnaud, la resta modeliza situaciones muy diferentes entre sí: quitar (transformación), buscar una parte (combinación) o comparar (comparación). Un niño o una niña que entiende la resta como “quitar” puede tener enormes dificultades para aplicarla en un problema que pregunte “¿cuántos más que...?”.
- *Complejidad Lingüística:* Las expresiones asociadas a la resta (“diferencia”, “cuánto falta para”, “cuánto más que”) son menos directas e intuitivas que las asociadas a la suma (“juntar”, “añadir”, “en total”).
- *Complejidad Algorítmica:* El algoritmo tradicional de la resta con “llevadas” o “préstamos” es conceptualmente mucho más opaco que el de la suma, siendo una fuente constante de errores que, como veremos, no son fruto del azar, sino de una comprensión instrumental (Skemp, 1978).

Por todas estas razones, la enseñanza de los algoritmos de la resta debe ser especialmente cuidadosa, secuenciada y, sobre todo, anclada en la comprensión.

6.3.4.1 Algoritmo por Descomposición (“Pedir Prestado”)

Es el algoritmo de resta más extendido. Su lógica se basa en la descomposición del minuendo para poder realizar la sustracción en cada columna. Su enseñanza debe, de nuevo, seguir la secuencia de Bruner.

Fase 1: Enactiva (La Acción). Para restar $52 - 28$, el alumnado representa el minuendo, 52, con bloques multibase (5 barras y 2 cubitos).

1. *Identificar el Conflicto:* Intenta quitar 8 cubitos-unidad, pero solo tiene 2. Constatata físicamente que es imposible. Esto crea la *necesidad* de actuar.
2. *Realizar el Canje:* Descubre que la solución es *canjear* una de las 5 barras de decena por 10 cubitos-unidad. Ahora, sobre la mesa tiene 4 barras y 12 cubitos. El valor total sigue siendo 52, pero su forma ha cambiado.
3. *Restar:* Ahora sí puede quitar 8 cubitos de los 12, y 2 barras de las 4. El resultado que queda sobre la mesa es 2 barras y 4 cubitos.

Fase 2: Icónica (El Puente). El alumnado dibuja la acción. En una tabla de valor posicional, tacha una barra de la columna de las decenas y dibuja una flecha que lleva 10 cubitos nuevos a la columna de las unidades. Este registro visual es el puente hacia el símbolo.

Fase 3: Simbólica (El Registro). El algoritmo escrito se presenta como el registro de la acción. El “tachar el 5 y poner un 4” y “añadir un 1 al 2” deja de ser un truco: es la forma de anotar que hemos *canjeado* una decena, dejando 4, para convertirla en 10 unidades que se juntan a las 2 que ya teníamos.

Clave Didáctica: Primero la Acción, luego el Símbolo

No se debe anotar *nunca* en el algoritmo un paso que no se haya realizado y comprendido primero de forma manipulativa. El “préstamo” no es un acto de magia, es el registro de un *canje* basado en la equivalencia de que una decena son diez unidades. Sin esta base, el algoritmo se convierte en una receta sin sentido, frágil y propensa al olvido.

6.3.4.2 Técnica de Izquierda a Derecha o de la Diferencia Sucesiva

Este algoritmo, también conocido como “algoritmo árabe”, comparte con otras técnicas alternativas (como el algoritmo holandés para la suma) la particularidad de proceder de izquierda a derecha. Este enfoque se alinea de forma más natural con la manera en que leemos y verbalizamos los números, lo que puede fortalecer la comprensión del valor posicional en el alumnado.

- *Fundamento Matemático:* El algoritmo se basa en la *descomposición aditiva de los números según su valor posicional* ($732 = 700 + 30 + 2$). La resta se realiza operando con las unidades de mayor orden primero (centenas, decenas, etc.). Si en una columna el dígito del minuendo es menor que el del sustraendo, se ajusta el resultado de la columna anterior (la de la izquierda), descomponiendo una de sus unidades en diez unidades de la columna actual.
- *Proceso:*

1. Se resta la columna del extremo izquierdo (la de mayor valor posicional). Se anota el resultado.
2. Se pasa a la columna siguiente (hacia la derecha). Se observa si la resta es posible (minuendo $\geq$ sustraendo).
3. Si la resta no es posible (minuendo $<$ sustraendo), se *canjea* una unidad del resultado de la columna anterior por 10 unidades que se añaden al minuendo de la columna actual, antes de efectuar la resta.
4. Se repite el proceso hasta llegar a la columna de las unidades. El resultado final se compone de los dígitos correctos (no tachados) de cada paso.

Ejemplo: Algoritmo de resta de izquierda a derecha (732 - 567)

$$\begin{array}{r}
 7 \quad 3 \quad 2 \\
 - \quad 5 \quad 6 \quad 7 \\
 \hline
 \cancel{2} \quad \cancel{7} \quad 5 \\
 1 \quad 6
 \end{array}
 \quad (7-5=2)$$

Reflexión sobre el proceso mental: El diálogo interno del alumnado al resolver la operación podría ser:

“Empiezo por la izquierda. De 7 centenas quito 5, me quedan 2 centenas. Ahora las decenas. A 3 no le puedo quitar 6. Vale, pues de las 2 centenas que tenía, cojo una. Me queda 1 centena. La centena que he tomado son 10 decenas, que con las 3 que tengo son 13. A 13 le quito 6, me quedan 7 decenas. Ahora las unidades. A 2 no le puedo quitar 7. Vale, pues de las 7 decenas que tenía, cojo una. Me quedan 6 decenas. La decena que he tomado son 10 unidades, que con las 2 que tengo son 12. A 12 le quito 7, me quedan 5 unidades. El resultado es 1, 6, 5... 165.”

Este algoritmo es muy potente para el cálculo mental, ya que permite obtener una primera aproximación al resultado (en este caso, 200) y ajustarla sucesivamente. Fomenta la flexibilidad del pensamiento numérico y el sentido numérico (Godino et al., 2004).

6.3.4.3 Algoritmo por Compensación (o de la llevada en la resta)

Este algoritmo se basa en una propiedad fundamental de la resta: la invarianza de la diferencia.

- *Fundamento Matemático:* Si se suma la misma cantidad al minuendo y al sustraendo, la diferencia no varía: $(m + k) - (s + k) = m - s$.

- *Proceso:* Para restar $732 - 567$, como no puedo hacer $2 - 7$, sumo 10 al 2 (convirtiéndolo en 12). Para compensar, sumo 10 al sustraendo, pero en la siguiente columna (sumo 1 a las decenas del sustraendo).

Ejemplo: Algoritmo de resta por invarianza de la diferencia

$$\begin{array}{r} 7 \quad 3 \quad 2^{(12)} \\ - 5 \quad 6 \quad 7^{(7)} \\ \hline 1 \quad 6 \quad 5 \end{array}$$

Proceso mental: De 7 a 12, van 5. Como he añadido 10 al minuendo, sumo 1 a las decenas del sustraendo ($6+1=7$). De 7 a 13, van 6. Vuelvo a sumar 1 a las centenas del sustraendo ($5+1=6$). De 6 a 7, va 1.

Clave Didáctica: Los Riesgos de un Método Opaco

El algoritmo por compensación es matemáticamente elegante pero didácticamente muy opaco. No se corresponde con ninguna acción concreta e intuitiva con materiales manipulativos. Fomenta una comprensión puramente instrumental y memorística (“de 7 a 12 van 5, y me llevo una”), generando errores persistentes. Su uso en el aula debe ser, como mínimo, pospuesto hasta que el alumnado tenga una comprensión muy sólida del algoritmo por descomposición.

6.3.4.4 Algoritmos Alternativos y Estrategias Flexibles

En línea con lo que exige el currículo andaluz, es fundamental presentar al alumnado estrategias alternativas que fomenten el sentido numérico y la flexibilidad.

- *ABN - Escalera Ascendente:* Esta estrategia es particularmente potente porque conecta la resta con la idea de “distancia” entre dos números. Para calcular $52 - 28$, la pregunta se transforma en: “¿cuánto le falta al 28 para llegar al 52?”. El alumnado construye un puente entre los dos números.

Ejemplo: La resta como distancia entre dos números

Un alumno o alumna podría razonar:

- “Desde 28, voy a la siguiente decena. Sumo 2 y llego a 30”.
- “Desde 30, para llegar a 50, sumo 20”.
- “Desde 50, para llegar a 52, sumo 2”.
- “En total he sumado $2 + 20 + 2 = 24$ ”.

Esta estrategia es transparente, fomenta el cálculo mental y es ideal para problemas de comparación e igualación.

- *ABN - Detracción:* Consiste en descomponer el sustraendo e ir restándolo por

partes. Para $52 - 28$, se podría hacer:

$$52 - 20 \rightarrow 32$$

$$32 - 8 \rightarrow 24$$

(para este paso se puede usar una sub-estrategia como $32 - 2 - 6$).

- *Resta en la Recta Numérica Vacía*: Es la representación icónica de la estrategia de escalera ascendente. Se dibujan los dos números en los extremos de un segmento y se anota en “saltos” la distancia entre ellos, generalmente pasando por las decenas.

Para el futuro o la futura docente: Flexibilidad Algorítmica como Objetivo Docente

No existe “el mejor” algoritmo para la resta. El algoritmo tradicional por descomposición es muy potente si se construye desde la manipulación. Las estrategias ABN, por su parte, son excepcionales para desarrollar el cálculo mental y el sentido numérico.

Tu objetivo como docente no es que el alumnado domine todos los métodos, sino que *comprenda profundamente al menos uno* y, a ser posible, que desarrolle la *flexibilidad* para elegir o crear estrategias eficientes según la situación. Presentar diversas formas de operar enriquece su sentido numérico, combate la idea de que solo hay un camino correcto y les demuestra que las matemáticas son un campo creativo y no un conjunto de reglas inamovibles. La clave, siempre, es la misma: *comprensión antes que mecanización*.

En la siguiente tabla (Tabla 6.4) se resumen y comparan las características didácticas de los principales algoritmos abordados.

6.3.5 La Didáctica de la Resolución de Problemas: De la Palabra Clave a la Estructura

Una vez que el alumnado desarrolla una cierta comprensión de las operaciones y maneja algunas estrategias de cálculo, nos enfrentamos al verdadero propósito de la aritmética: la resolución de problemas. Esta no es una mera aplicación final de los conocimientos, sino el contexto que da origen y sentido a todo el aprendizaje. Sin embargo, la enseñanza de la resolución de problemas está plagada de uno de los mayores malentendidos pedagógicos: la enseñanza de “trucos” basados en palabras clave.

Clave Didáctica: De los “Trucos” a la Comprensión Estructural

La estrategia de enseñar a buscar “palabras clave” es el epítome de la comprensión instrumental (el “saber cómo” sin el “porqué”), un conocimiento frágil que se olvida fácilmente.

Nuestra labor, en cambio, es cultivar la comprensión relacional (Skemp, 1978): enseñar a analizar la estructura de la situación para que el alumnado sepa no solo qué hacer, sino por qué lo hace. Como vimos en el Apartado 1.3.5, esta es la única vía para construir un pensamiento matemático flexible y duradero.

Tabla 6.4: Análisis Didáctico Comparativo de los Algoritmos del Campo Aditivo.

Algoritmo	Características Clave	Fortalezas Didácticas	Riesgos y Consideraciones
ALGORITMOS DE SUMA			
Tradicional (ATOA)	De derecha a izquierda. Opera con cifras. Usa la “llevada” como registro del canje.	Máxima eficiencia y rapidez una vez mecanizado. Estandarizado universalmente.	Muy opaco. Oculta el valor posicional. La “llevada” puede convertirse en un truco sin sentido. Alto riesgo de comprensión instrumental.
Por Descomposición (OAOA / Holandés)	Opera con los valores posicionales de los números (ej. 40+80). Sumas parciales. Flexible en la dirección (izq-der o der-izq).	Muy transparente. Refuerza el valor posicional. Conecta con el cálculo mental. Excelente puente hacia el algoritmo tradicional.	Menos eficiente para cálculos complejos con lápiz y papel. Requiere una buena comprensión de la descomposición.
ABN (Abierto)	Flexible y abierto. Uno de los sumandos permanece intacto. El otro se descompone y se añade en “saltos”.	Desarrolla el sentido numérico y la flexibilidad. Se adapta al nivel del alumno. Totalmente transparente en el proceso.	Requiere un dominio sólido de la composición numérica. Menos estandarizado y puede parecer más lento inicialmente.
ALGORITMOS DE RESTA			
Tradicional (Pedir Prestado)	De derecha a izquierda. Se basa en la descomposición del minuendo (canje).	Eficiente y estandarizado.	Conceptualmente muy opaco. El “préstamo” es una metáfora engañosa. Genera errores persistentes si no se construye desde la manipulación.
Por Compensación (Llevada en la resta)	Se basa en la propiedad de invarianza de la diferencia (sumar lo mismo a minuendo y sustraendo).	Matemáticamente elegante y muy rápido.	Didácticamente muy opaco. No se corresponde con ninguna acción concreta o manipulativa. Fomenta la memorización de una regla sin sentido.
Escalera Ascendente (ABN)	Transforma la resta en una suma: buscar la distancia entre el sustraendo y el minuendo (“¿cuánto falta para llegar?”).	Muy conceptual e intuitivo. Conecta directamente con los problemas de comparación. Fomenta el cálculo mental y la estimación.	Puede ser menos directo para problemas puramente de “quitar”.

6.3.5.1 La Trampa de las Palabras Clave: Un Atajo que Lleva al Fracaso.

La estrategia de las palabras clave consiste en enseñar al alumnado a asociar términos del enunciado con operaciones específicas. Por ejemplo: “si dice ‘juntar’ o ‘más’, es una suma; si dice ‘quitar’ o ‘perder’, es una resta”. Aunque pueda parecer un andamio útil al principio, esta estrategia es pedagógicamente perjudicial a largo plazo por varias razones:

- *Inhibe el Razonamiento*: Desalienta al alumnado a leer y comprender el problema en su totalidad. En lugar de analizar la situación, se embarcan en una “caza de palabras” superficial.
- *Es Poco Fiable*: Falla estrepitosamente en cuanto los problemas adquieren una mínima complejidad estructural, como en los problemas de comparación o de cambio con incógnita inicial.
- *Genera Falsas Creencias*: Fomenta la idea de que las matemáticas no tienen sentido y que se basan en seguir reglas mágicas y arbitrarias.

Ejemplo: Cuando las Palabras Engañan

Consideremos los siguientes problemas y cómo un enfoque instrumental basado en palabras clave lleva a una respuesta incorrecta:

- *Problema 1 (Comparación)*: “Luis tiene 12 cromos, que son 3 *más* que los de Ana. ¿Cuántos cromos tiene Ana?”
 - *Razonamiento Instrumental*: La palabra “más” indica sumar. El alumno calcula $12 + 3 = 15$. (*Incorrecto*)
 - *Razonamiento Relacional*: Se comprende que la cantidad de Luis es el resultado de añadir 3 a la de Ana. La estructura es $? + 3 = 12$. La operación que resuelve el problema es, por tanto, una resta: $12 - 3 = 9$.
- *Problema 2 (Cambio)*: “En un autobús iban 15 personas. En una parada se bajaron algunas y ahora quedan 9. ¿Cuántas personas se bajaron?”
 - *Razonamiento Instrumental*: La palabra “quedan” indica restar el número más pequeño del más grande. El alumno calcula $15 - 9 = 6$. (*Correcto, pero por casualidad*)
 - *Razonamiento Relacional*: El alumno comprende que la cantidad final (9) es el resultado de disminuir la cantidad inicial (15) en un número desconocido. La estructura es $15 - ? = 9$. La operación es una resta. En este caso, el atajo funciona, pero no construye comprensión. Si el problema fuera “Se bajaron 6 y quedaron 9, ¿cuántos había al principio?”, el atajo fallaría.

6.3.5.2 El Antídoto: Enseñar a Ver la Estructura mediante la Representación

Para superar la dependencia de las palabras clave, debemos dotar al alumnado de herramientas que les permitan *visualizar la estructura matemática* de la situación. La clave está en transitar por la secuencia de Bruner, haciendo un énfasis especial

en la fase icónica (la representación gráfica) como puente entre la situación real y la operación simbólica.

El objetivo es cambiar la pregunta del alumnado de «¿qué cuenta tengo que hacer?» a «¿cómo puedo dibujar esta historia?».

Algunas estrategias Didácticas para la Visualización pueden ser:

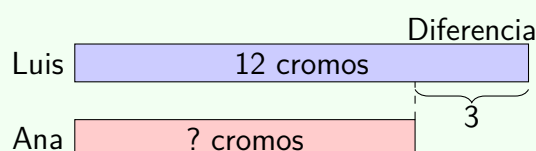
1. *Dramatización y Dibujo Libre*: Especialmente en el Primer Ciclo, animar al alumnado a actuar el problema o a dibujar la historia que cuenta el enunciado.
2. *Esquemas Parte-Parte-Todo*: Ideales para los problemas de combinación, haciendo visible la relación entre las partes y el todo.
3. *Diagramas de Barras (Modelo de Singapur)*: Es una herramienta extraordinariamente potente, especialmente para los problemas de comparación. Se utilizan barras rectangulares para representar las cantidades y sus relaciones, haciendo tangibles conceptos como “la diferencia” o “la comparación”.

Mini-Caso de Aula: El Modelo de Barras frente a la Palabra Clave

Situación: Un docente presenta el siguiente problema a un grupo de alumnos de 2º de Primaria: «Luis tiene 12 cromos. Tiene 3 cromos más que Ana. ¿Cuántos cromos tiene Ana?»

Respuesta de Ana (basada en palabras clave): «¡Es de sumar! Pone ‘más’». Ana calcula rápidamente $12 + 3 = 15$ y responde con seguridad: «Ana tiene 15 cromos».

Proceso de Luis (basado en la visualización): Luis, en cambio, parece dudar. Coge su lápiz y murmura: «A ver... Luis tiene más, así que su barra es más larga». Dibuja lo siguiente en su cuaderno:



Luis (explicando su dibujo): «La barra de Luis es más larga. El trozo que le sobra es de 3. Así que para que la barra de Ana sea igual, a 12 le tengo que quitar 3. Son 9. Ana tiene 9 cromos».

Análisis Didáctico (El Antídoto en Acción): Ana ha caído en la trampa de la palabra clave, realizando una interpretación superficial. Luis, en cambio, al traducir el enunciado a una representación visual (fase icónica de Bruner), ha logrado ver la estructura relacional del problema. El *Modelo de Barras* le ha permitido comprender que, aunque la palabra sea “más”, la operación necesaria para encontrar la cantidad de referencia es una resta. Su dibujo no es un simple adorno, es la herramienta de pensamiento que ha desvelado la lógica oculta del problema (Skemp, 1978).

Clave Didáctica: De Buscar la Operación a Modelizar la Situación

La labor del docente no es dar “trucos” para encontrar la operación correcta, sino enseñar a *modelizar la situación problemática*. El objetivo es que el alumnado, ante un problema, no se pregunte “¿es de sumar o de restar?”, sino “¿cuál es el mejor dibujo o esquema para representar esta historia?”. La operación correcta emerge como una consecuencia lógica de una representación bien construida. Este enfoque no solo es más robusto, sino que cumple directamente con el mandato curricular de la *Competencia Específica 1* del área: «Interpretar situaciones [...] proporcionando una representación matemática de las mismas» (ORDEN de 30 de mayo de 2023).

6.3.6 El Docente como Detective Cognitivo: Errores Comunes e Intervención

El camino del aprendizaje aritmético no es una línea recta; está lleno de exploraciones y, de manera inevitable, errores. Adoptar el rol de un *detective cognitivo* es fundamental para gestionar estos errores de forma productiva. Tal como se describe en la Sección 14.5.2, nuestro objetivo no es simplemente corregir, sino diagnosticar la lógica subyacente del error para diseñar una intervención que construya una comprensión más profunda.

Dentro del campo aditivo, podemos clasificar los errores en dos grandes familias, que se corresponden con las dos grandes áreas de trabajo de este capítulo: los errores algorítmicos (vinculados al cálculo) y los errores de resolución (vinculados a la comprensión de la situación).

Análisis de Errores Algorítmicos Comunes. Estos errores surgen durante la ejecución del cálculo escrito y, a menudo, delatan una frágil comprensión del Sistema de Numeración Decimal y de las propiedades de la operación. A continuación, aplicamos el ciclo del “detective cognitivo” a dos de los errores más persistentes en el aula de Primaria.

Ejemplo: El error “Restar siempre la cifra menor de la mayor”

- 1. *Evidencia*: Un alumno resuelve la operación $52 - 28$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} 52 \\ -28 \\ \hline 36 \end{array} \quad \leftarrow \text{Incorrecto (8-2=6, 5-2=3)}$$

- 2. *Hipótesis (Diagnóstico)*: El alumno no ha comprendido que 52 y 28 son cantidades globales. Para él, el algoritmo es un procedimiento que se realiza en columnas separadas e independientes. Su regla interna, una sobregeneralización lógica, es: “en cada columna, al número de arriba le quito el de abajo; si no se puede, al de abajo le quito el de arriba”. No ha interiorizado el concepto de reagrupamiento (la necesidad de “pedir prestado”), que es una consecuencia directa del valor posicional.

- 3. *Intervención (Crear el Conflicto Cognitivo)*: Corregir verbalmente es ineficaz. La intervención debe ser *enactiva* y forzar al alumno a enfrentarse a la imposibilidad de su regla.
 - *Docente*: “¡Vamos a hacer esta resta con los bloques! Coge 5 barras de decena y 2 cubitos de unidad para formar el 52. ¡Perfecto! Ahora, de estos bloques, tienes que quitar 28, es decir, 2 barras y 8 cubitos. Inténtalo.”
 - *Acción del alumno*: El alumno puede quitar fácilmente las 2 barras de decena, pero se encuentra con un bloqueo físico: no puede quitar 8 cubitos porque solo tiene 2.
 - *El Conflicto*: Su acción en el mundo real contradice su algoritmo en el papel. El material mismo refuta su hipótesis.
 - *La Guía del Docente*: “Vaya, parece que no tenemos suficientes cubitos. ¿Hay alguna forma de conseguir más cubitos usando las barras que tenemos?”. Esta pregunta guía al alumno hacia el descubrimiento de la acción de *canjear* una barra de decena por 10 cubitos, que es la base conceptual del algoritmo de la resta.

Ejemplo: El error de la “Llevada Mágica”

- 1. *Evidencia*: Un alumno suma $38 + 25$. Al sumar las unidades ($8 + 5 = 13$), escribe el 13 completo en la columna de las unidades y luego suma las decenas, obteniendo 513.

$$\begin{array}{r} 38 \\ + 25 \\ \hline 513 \end{array} \quad \leftarrow \text{Incorrecto}$$

- 2. *Hipótesis (Diagnóstico)*: Similar al caso anterior, el alumno trata las columnas como espacios aislados. Comprende que $8 + 5$ es 13, pero no ha comprendido la regla fundamental del Sistema de Numeración Decimal: en la “casa” de las unidades solo puede haber una cifra. El ‘1’ de la llevada no es, para él, una decena que se reagrupa, sino un “truco” memorístico que ha olvidado o aplica incorrectamente. Es una comprensión puramente instrumental (Skemp, 1978).
- 3. *Intervención (La Regla de Oro del Canje)*: La intervención debe seguir el principio pedagógico fundamental: “No se anota en el papel ninguna acción que no se haya realizado primero físicamente con el material”.
 - *Docente*: “Representemos la suma con los bloques. Forma el 38 y el 25. Ahora, junta todos los bloques. Empecemos por los cubitos de las unidades.”
 - *Acción del alumno*: El alumno junta 8 cubitos y 5 cubitos, obteniendo un montón de 13 cubitos.

- *La Guía del Docente*: “¡Genial! Tenemos 13 cubitos. Pero, ¿recuerdas la regla de nuestro sistema de numeración? Cuando tenemos 10 cubitos, ¿qué podemos hacer?”. El docente guía al alumno para que *agrupe* 10 de los 13 cubitos y los *canjee* por una barra de decena.
- *Conexión Simbólica*: “Esa barra que acabas de formar y que ahora está con las otras barras, es este pequeño ‘1’ que escribimos aquí arriba. No es un ‘1’ mágico, es la decena que acabas de construir y mover.”

Clave Didáctica: La Gestión del Error como Motor del Sentido Socioafectivo

Adoptar este enfoque de “detective cognitivo” tiene un impacto profundo en la dimensión afectiva del aprendizaje, uno de los pilares del currículo andaluz. Cuando un docente responde a un error con una pregunta en lugar de con una corrección, está enviando un mensaje poderoso al alumno:

- “Tu razonamiento me importa.”
- “No espero que seas perfecto, espero que pienses.”
- “Los errores no son un final, son el principio de una conversación interesante.”

Esta práctica docente construye resiliencia, fomenta una mentalidad de crecimiento y transforma la ansiedad matemática en curiosidad intelectual, desarrollando así de forma directa el *Sentido Socioafectivo* que la normativa nos pide cultivar.

En resumen, la gestión de los errores es una competencia docente de alto nivel. Requiere un sólido conocimiento del contenido (saber por qué el algoritmo funciona así), un profundo conocimiento del aprendiz (entender sus posibles lógicas alternativas) y un dominio de las estrategias didácticas (saber diseñar la tarea precisa que ilumine la comprensión). Es, en esencia, el corazón del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) aplicado a la aritmética.

6.4 Conclusión: Hacia un Razonamiento Aditivo Flexible y con Sentido

En este capítulo hemos emprendido un viaje al corazón del primer gran campo conceptual de la aritmética. Hemos visto que la enseñanza de la suma y la resta trasciende, con mucho, la mera instrucción de algoritmos. Es un proceso complejo y fascinante que implica guiar al alumnado en la construcción de un *entramado de significados, estrategias y procedimientos interconectados*.

Hemos recorrido un camino que parte de las intuiciones y estrategias informales del alumnado –basadas en el conteo– y avanza progresivamente hacia un conocimiento más formal, flexible y potente. Se ha puesto de manifiesto la importancia crucial de los trabajos previos al algoritmo, como la descomposición numérica y el desarrollo de

estrategias de cálculo mental. Este trabajo de base, este andamiaje, es indispensable para que los algoritmos formales, ya sean tradicionales o alternativos, se comprendan *relacionalmente*. Lejos de ser “recetas mágicas”, los algoritmos se nos han revelado como la culminación de este viaje, como una ingeniosa *tecnología del pensamiento* que solo adquiere sentido si se construye siguiendo la secuencia irrenunciable: de la acción concreta (fase enactiva) al registro simbólico (fase simbólica).

Asimismo, hemos descubierto que la verdadera competencia en el campo aditivo reside en la capacidad de aplicar la suma y la resta para resolver una amplia y variada gama de situaciones problemáticas. El mapa conceptual de problemas de Vergnaud nos ha proporcionado la brújula conceptual para navegar esta diversidad. Hemos aprendido que el antídoto pedagógico a la frágil estrategia de las “palabras clave” es enseñar a *visualizar la estructura del problema*, usando herramientas de representación como los diagramas de barras.

Finalmente, la identificación y el análisis de los errores comunes cierran el círculo. Lejos de ser fracasos, los errores se nos han revelado como valiosas oportunidades para la reflexión y la reorientación de nuestra práctica. Nos invitan a adoptar el rol de un “*detective cognitivo*” que busca comprender el razonamiento del niño o la niña para poder ayudarle a construir un conocimiento más sólido.

En definitiva, como futuros docentes, debemos concebir la enseñanza de la suma y la resta no como el entrenamiento de una habilidad mecánica, sino como el cultivo del sentido numérico y el desarrollo de un *razonamiento aditivo*. Un alumnado que comprende en profundidad el campo aditivo está preparado no solo para superar con éxito los siguientes desafíos aritméticos, sino para utilizar las matemáticas con confianza, creatividad y sentido en su vida cotidiana. Esa es, y debe ser, nuestra meta final.

Hemos construido un sólido edificio sobre los números naturales. Sin embargo, este edificio tiene una grieta fundamental. ¿Qué ocurre cuando intentamos restar más de lo que tenemos? Nuestro sistema numérico actual se rompe. Esta ruptura no es un fracaso, sino una invitación a expandir nuestro universo. En el próximo capítulo, cruzaremos la frontera del cero para adentrarnos en el fascinante y simétrico mundo de los *números enteros*.

6.5 Para la Reflexión y el Portfolio Docente

1. Conexión con la Propia Historia: El Misterio de la Resta.

Consigna: Reflexiona sobre tu propia trayectoria como estudiante. Intenta recordar cómo te enseñaron el algoritmo de la resta con llevadas.

- ¿Aprendiste la técnica de «pedir prestado» (descomposición) o la de «me llevo una y se la sumo al de abajo» (compensación)?
- En su momento, ¿comprendiste por qué funcionaba o fue un conjunto de pasos a memorizar (comprensión relacional vs. instrumental)?
- ¿Cómo crees que esa experiencia podría influir en tu futura manera de enseñar esta operación? Redacta un breve texto reflexivo conectando tu recuerdo con los conceptos teóricos del capítulo.

2. El Ojo Didáctico: Análisis de la «Dieta de Problemas».

Consigna: Consigue un libro de texto de matemáticas de 1º o 2º de Primaria.

Selecciona la unidad didáctica dedicada a la suma y la resta y realiza un análisis crítico de los problemas que se proponen.

- Clasifica al menos 10 problemas aditivos según la tipología semántica de Vergnaud (Cambio, Combinación, Comparación).
- Dentro de cada categoría, ¿qué subtipos predominan? ¿Se ofrece una variedad que desafíe realmente el pensamiento del alumnado?
- ¿Promueve una estrategia basada en «palabras clave» o en la comprensión de la estructura? Justifica tu respuesta con un ejemplo concreto.

3. *Del Diagnóstico a la Intervención: El Arte del Andamiaje.*

Consigna: Imagina la siguiente escena: Planteas a un alumno de 1º el problema: «Tienes 7 pegatinas y te regalo 4 más. ¿Cuántas tienes ahora?». El niño cuenta todos los elementos desde el principio («uno, dos,..., once»). Diagnostica en qué nivel de la secuencia evolutiva se encuentra y diseña el diálogo exacto que mantendrías para ayudarlo a pasar de «contar todo» a «sobrecontar».

7 Números Enteros: Ampliando el Horizonte Numérico

LA llegada de los números enteros al currículo de Educación Primaria no es un tema más en el temario. Representa, tanto para el alumnado como para quien enseña, uno de los primeros y más significativos saltos hacia el pensamiento matemático abstracto. Hasta este momento, el universo numérico del niño o la niña estaba anclado en una realidad tangible, directa y contable. Los números servían para responder a la pregunta «¿cuántos hay?». Con los números enteros, esta certeza se desvanece y damos la bienvenida a un universo donde los números ya no solo cuentan, sino que también miden, posicionan, dirigen y comparan respecto a un punto de referencia.

Este capítulo está diseñado para guiar al futuro personal docente a través de los desafíos y las oportunidades que presenta la enseñanza de los números enteros. Exploraremos su compleja historia, sus fundamentos matemáticos, los obstáculos que el alumnado encontrará de forma natural y, lo más importante, un abanico de estrategias, modelos y recursos didácticos para construir su significado de una forma sólida y duradera, en total consonancia con el enfoque competencial de la legislación vigente. Nuestra misión como docentes no será simplemente «enseñar los números negativos», sino acompañar al alumnado en la valiente tarea de cruzar el cero y descubrir un nuevo y potente universo numérico.

7.1 Introducción: Cruzando el Cero, un Nuevo Universo Numérico

La transición de la aritmética de los números naturales al conjunto de los números enteros constituye una auténtica «ruptura epistemológica» en el desarrollo del pensamiento matemático del alumnado (Brousseau, 2007). No se trata de una simple ampliación, como podría ser pasar de contar hasta 100 a contar hasta 1000. Se trata de una reconstrucción conceptual completa de la propia idea de número. El signo «menos», que hasta ahora era una invitación a realizar una acción —la resta—, se convierte de pronto en una cualidad inherente a un tipo de número, dotándolo de un significado que desafía la intuición y la experiencia cotidiana.

7.1.1 El Reto Cognitivo: La Ruptura con lo Contable

El viaje hacia los números enteros comienza justo donde termina el capítulo anterior: en los límites del campo aditivo. Allí, nuestro alumnado ha construido un universo numérico robusto sobre los números naturales, pero se enfrenta a un muro conceptual en operaciones tan sencillas como $5 - 7$. La reacción natural y lógica es: «es imposible», «no se puede», «faltan». Y tienen razón. En su universo numérico, esa operación no tiene solución.

Esta situación es un ejemplo perfecto de lo que la teoría constructivista de Jean Piaget denomina un *conflicto cognitivo*: una confrontación entre la realidad (o una nueva idea) y los esquemas de conocimiento existentes en la mente del aprendiz. El esquema previo, robusto y útil durante años («no se puede quitar más de lo que se tiene»), se revela de pronto insuficiente. Este estado de desequilibrio es, desde la

perspectiva piagetiana, el auténtico motor del aprendizaje (Piaget, 1964/2018).

Clave Didáctica: Clave Didáctica: De la Imposibilidad a la Necesidad

Nuestra primera tarea como docentes no es presentar los números negativos como una nueva regla, sino hacer que el alumnado sienta la *necesidad* de su existencia. El punto de partida no es la definición, sino el problema. La imposibilidad de resolver ciertas restas en el conjunto de los números naturales es el motor que impulsa la mayor ampliación del campo numérico en toda la Educación Primaria.

La dificultad fundamental, y por tanto nuestro primer objetivo didáctico, radica en que el número natural está intrínsecamente ligado al *cardinal*, a la propiedad de «cantidad» de un conjunto de objetos discretos. Los números enteros, en cambio, abandonan esta conexión directa con lo contable para representar:

- *Estados relativos*: como la temperatura (grados sobre o bajo cero).
- *Posiciones relativas*: como la altura (metros sobre o bajo el nivel del mar) o las plantas de un edificio (plantas y sótanos).
- *Transformaciones o desplazamientos*: como avanzar o retroceder en un tablero de juego.
- *SalDOS o balances*: como tener dinero (haber) o deberlo (deudas).

El número -3 no representa la existencia de «menos tres objetos», un concepto imposible de imaginar. Representa un estado, una posición o una deuda de valor 3 en la dirección opuesta a la que hemos convenido como positiva. La superación de este reto cognitivo exige una *acomodación* de las estructuras mentales del alumnado; un proceso en el que el docente actúa como mediador indispensable, proveyendo los contextos y los modelos que dan sentido a esta nueva clase de números.

Clave Didáctica: La Necesidad como Origen del Significado

Nuestra primera tarea como docentes no es dar una definición formal de número entero, ni mucho menos presentar un conjunto de reglas para operar con ellos. Nuestra misión inicial es *crear la necesidad* de estos números. Debemos sumergir al alumnado en situaciones y problemas (temperaturas, deudas, juegos, ascensores) donde los números naturales se queden cortos y la existencia de números «por debajo del cero» se vuelva no solo lógica, sino imprescindible para describir y comprender el mundo que les rodea.

7.1.1.1 El marco curricular: Una introducción conceptual en el Tercer Ciclo

Es fundamental que como futuros docentes tengamos una visión precisa de lo que la normativa vigente establece para la etapa de Educación Primaria. Una lectura detallada de la *ORDEN de 30 de mayo de 2023* de la Junta de Andalucía nos revela que el tratamiento de este campo numérico es muy específico y acotado.

La única referencia explícita se encuentra en los saberes básicos del Tercer Ciclo, dentro del bloque A. *Sentido Numérico*, bajo el epígrafe *MAT.3.A.1. Sentido de los números*, donde se indica la necesidad de trabajar con:

«Números positivos y negativos: significado, utilización, ordenación y representación en la recta numérica en situaciones del entorno próximo».

Este enunciado es, en sí mismo, una guía didáctica de gran valor. Vamos a analizar sus implicaciones:

- *No se habla de “números enteros”*: El currículo utiliza la denominación más intuitiva y accesible de «números positivos y negativos». Esto nos indica que el enfoque no es el de un tratamiento matemático formal del conjunto $\mathbb{Z}$, sino el de una ampliación del campo numérico con un propósito funcional.
- *El foco está en la comprensión conceptual*: Las acciones clave que se demandan son *significado, utilización, ordenación y representación*. No se mencionan las operaciones formales (suma, resta, multiplicación o división) con números negativos. El objetivo no es que el alumnado domine los algoritmos, sino que comprenda qué es un número negativo, para qué sirve y cómo se relaciona con otros números.
- *El contexto es el rey*: La acotación «en situaciones del entorno próximo» es la directriz más importante. Se prohíbe un tratamiento abstracto del número negativo. Su introducción solo tiene sentido si viene a resolver un problema o a describir una realidad que los números naturales no pueden abarcar (temperaturas bajo cero, deudas, plantas de un sótano, etc.).

Clave Didáctica: El Límite Curricular, Significado sin Operatoria Formal

Es crucial entender que la operatoria formal con números enteros —es decir, algoritmos como $(-5) + (-3) = -8$ o la regla de los signos para la multiplicación— *no es un objetivo de la Educación Primaria*. El papel del docente en esta etapa es construir una base intuitiva y conceptual sólida. Se trata de que el alumnado desarrolle un *sentido numérico* que incluya los negativos, de modo que cuando en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) se aborde la estructura y la operatoria del conjunto $\mathbb{Z}$, no partan de un vacío conceptual, sino de una base de significado robusta. Pretender acelerar este proceso y enseñar las reglas de forma mecánica en Primaria sería pedagógicamente contraproducente.

Por tanto, este capítulo se centrará en dotar al futuro personal docente de las herramientas necesarias para cumplir con este mandato curricular: enseñar a usar y a dar sentido a los números negativos a través de contextos, modelos visuales y actividades significativas, sentando las bases para el aprendizaje formal que vendrá en etapas posteriores.

7.1.1.2 Hoja de Ruta del Capítulo: De la Teoría a la Práctica

Este capítulo ha sido diseñado no como un mero repositorio de actividades, sino como un mapa para guiarle, futuro o futura docente, en un viaje que va desde el conocimiento más profundo de la materia hasta su implementación efectiva en el aula de Primaria. Este viaje es un proceso fundamental en nuestra profesión y recibe el nombre de *transposición didáctica* (Chevallard, 1991/2000).

La teoría de la transposición didáctica, desarrollada por Yves Chevallard, nos ex-

plica cómo un conocimiento, para poder ser enseñado, debe sufrir una serie de transformaciones adaptativas. En esencia, distingue entre:

- *El saber sabio (savoir savant)*: Es el conocimiento en su estado más puro, el que producen los matemáticos e historiadores. Es complejo, formal y está descontextualizado de la enseñanza.
- *El saber a enseñar (savoir à enseigner)*: Es la versión del saber sabio que recogen los currículos oficiales. Es una selección, una reorganización y, a menudo, una simplificación de ese saber original para adecuarlo a los objetivos de un sistema educativo. Es lo que la normativa andaluza nos pide que enseñemos.
- *El saber enseñado (savoir enseigné)*: Es el conocimiento tal y como se construye realmente en el aula. Es el resultado final de la intervención del personal docente, de los materiales que utiliza, de las preguntas que formula y de las interacciones que se producen con el alumnado.

La estructura de este capítulo sigue deliberadamente este proceso de transformación, con el objetivo de capacitarle para llevar a cabo su propia transposición didáctica de forma reflexiva y fundamentada:

- *El Bloque 2 (Fundamentos)* le proporcionará el *saber sabio*. Nos sumergiremos en la historia, en las propiedades matemáticas y en los obstáculos epistemológicos de los números enteros para que usted, como docente, posea un dominio del contenido que vaya mucho más allá de lo que va a enseñar. Este es el conocimiento que da seguridad y permite improvisar con criterio.
- *El Bloque 3 (La Práctica en el Aula)* es el corazón de la *transposición didáctica*. Aquí transformaremos ese saber sabio en *saber enseñado*. Analizaremos los contextos, modelos, materiales y secuencias que hacen que el concepto abstracto de número entero cobre vida y sentido para un niño o una niña de 10 u 11 años.
- *El Bloque 4 (Cierre y Aplicación)* le pedirá que *ponga en práctica* lo aprendido. A través de la síntesis del decálogo y las tareas del portfolio, deberá movilizar todo el conocimiento adquirido para analizar situaciones y diseñar sus propias propuestas, completando así el ciclo del saber.

En esencia, este capítulo no solo le dirá *qué* enseñar sobre los números enteros, sino que aspira a modelar *cómo pensar* para poder enseñarlos eficazmente, una competencia que le será de utilidad para cualquier otro contenido matemático al que se enfrente en su futuro profesional.

Con este mapa trazado, iniciamos el recorrido.

7.2 Fundamentos para el Docente: Perspectivas Histórica, Matemática y Epistemológica

Un docente eficaz no solo sabe enseñar, sino que posee un conocimiento profundo del contenido que enseña. Este conocimiento, que Lee Shulman denominó *Conocimiento Especializado del Contenido*, nos permite tomar decisiones didácticas informadas, anticipar dificultades y responder a las preguntas del alumnado con seguridad y rigor. En esta sección, construiremos ese conocimiento fundamental sobre los números enteros.

7.2.1 La Lenta Génesis Histórica: Una Lección de Empatía Pedagógica

Una de las herramientas más potentes para un docente de matemáticas es la historia de su propia disciplina. El recorrido histórico de un concepto suele ser un reflejo a gran escala del camino de aprendizaje que recorre cada estudiante. Si a las mentes más brillantes de la humanidad les costó siglos asimilar una idea, es natural que un niño o una niña de 10 años necesite tiempo, paciencia y buenos modelos para construirla.

A diferencia de los números naturales, que surgen de forma intuitiva en todas las civilizaciones, o de las fracciones, ligadas a la necesidad de medir, los números negativos no tuvieron una aceptación fácil ni universal. Su historia es una de resistencia, rechazo y, finalmente, aceptación por pura necesidad práctica.

Anclaje Histórico: Hitos en la Historia de los Números Enteros

- *China (s. II a.C.):* En la obra *Los nueve capítulos sobre el arte matemático*, se utilizan varillas de contar de dos colores: rojas para representar deudas o déficits y negras para representar haberes o ingresos. De esta práctica deriva la expresión financiera actual de «estar en números rojos».
- *India (s. VII d.C.):* El matemático y astrónomo Brahmagupta, en su obra *Brahmasphutasiddhanta*, es uno de los primeros en establecer reglas aritméticas para operar con cantidades positivas («fortunas») y negativas («deudas»), así como con el cero. Poco antes, Āryabhaṭa ya había definido reglas para la suma y la resta.
- *Occidente (Rechazo y Aceptación Tardía):* La matemática griega, fuertemente ligada a la geometría, no concebía los números negativos. ¿Qué es una longitud negativa? En el Renacer europeo, matemáticos como Cardano o Stifel los llamaban *numeri ficti* (números ficticios) o *numeri absurdi* (números absurdos). Todavía en el siglo XVIII, en plena Ilustración, el célebre matemático y filósofo D'Alembert escribía en la *Encyclopédie* que el número negativo era una «idea peligrosa».

No fue hasta el siglo XIX que los números negativos fueron plenamente aceptados y formalizados como una extensión consistente y necesaria del sistema numérico (Boyer & Merzbach, 1999).

Anclaje Histórico: La Necesidad Práctica Precede a la Abstracción

La historia nos enseña que los números negativos no surgieron de la abstracción, sino de la necesidad de modelizar una realidad dual: tener/deber, ganar/perder, encima/debajo. Este es el mismo camino que debemos seguir en el aula. No podemos presentar el -3 como un ente abstracto; debemos introducirlo como la herramienta que necesitamos para hablar de «3 grados bajo cero» o de una «deuda de 3 euros». La empatía histórica nos prepara para la paciencia pedagógica.

7.2.2 Fundamento Matemático: El «Saber Sabio» que Sustenta la Práctica

Es posible que, al abordar este apartado, el estudiantado se pregunte por la necesidad de profundizar en aspectos matemáticos que parecen alejados de la realidad del

aula de Primaria. Sin embargo, es precisamente aquí donde reside uno de los pilares de la competencia docente. El teórico de la educación Lee Shulman (1986/2019) diferenció entre el conocimiento del contenido y el *conocimiento pedagógico del contenido* (Pedagogical Content Knowledge, PCK). Este último es el saber que transforma el conocimiento de la materia en algo enseñable.

Para desarrollar un buen PCK, el personal docente necesita lo que Shulman y sus seguidores denominaron *Conocimiento Especializado del Contenido* (Specialized Content Knowledge, SCK): un tipo de saber matemático que no se suele considerar necesario para el matemático profesional, pero sí para el docente. Es el conocimiento de la estructura subyacente de las ideas, de las conexiones entre conceptos y de por qué los procedimientos funcionan como lo hacen. Este apartado tiene como objetivo construir ese conocimiento especializado sobre los números enteros. No para enseñarlo directamente, sino para que, como futuros docentes, podáis tomar decisiones didácticas informadas, flexibles y fundamentadas.

7.2.2.1 La Necesidad Formal de los Números Enteros: La Clausura de la Sustracción

El universo de los números naturales ($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$)¹ es el primer sistema numérico que se construye en la escuela y en la historia de la humanidad. Es potente para contar, ordenar y para las operaciones de adición y multiplicación. Sin embargo, presenta una limitación estructural fundamental: la sustracción no es una *operación interna* o *clausurada*. Esto significa que la resta de dos números naturales no siempre da como resultado otro número natural.

La operación $8 - 5 = 3$ tiene solución en $\mathbb{N}$, pero, como vimos en la introducción con el ejemplo de las bolas, la operación $5 - 7$ no la tiene. Desde una perspectiva matemática, esta insuficiencia provoca una «ruptura» que exige la creación de un nuevo conjunto numérico más amplio que sí contenga las soluciones a este tipo de problemas. Esta idea de que la matemática progresa creando sistemas numéricos más amplios para resolver las limitaciones de los anteriores es una de las grandes narrativas de la disciplina. Como indican Courant y Robbins (1941/1979) en su obra clásica *¿Qué es la matemática?*, la extensión de los números naturales a los enteros, y de estos a los racionales, no es un mero ejercicio de abstracción, sino una respuesta necesaria a problemas concretos como la sustracción o la división.

Profundizando: Nota Clave

La creación del conjunto de los números enteros responde a la necesidad matemática de *clausura*: se busca un sistema numérico donde la sustracción sea siempre posible, es decir, donde la operación $a - b$ tenga siempre una solución que pertenezca al propio conjunto, sin importar si a es mayor, menor o igual que b .

¹Incluimos el 0 en los naturales, siguiendo la convención más extendida en la didáctica y la teoría de conjuntos.

7.2.2.2 Definición y Estructura del Conjunto $\mathbb{Z}$

Para dar respuesta a esta necesidad, se construye el *conjunto de los números enteros*, denotado por la letra $\mathbb{Z}$ (del alemán *Zahlen*, que significa «números»). Este conjunto se define formalmente como la unión de tres subconjuntos disjuntos:

- El conjunto de los *enteros positivos* ($\mathbb{Z}^+$), que son isomorfos² a los números naturales sin el cero: $\{1, 2, 3, \dots\}$.
- El *cero*, $\{0\}$.
- El conjunto de los *enteros negativos* ($\mathbb{Z}^-$), que son los opuestos de los enteros positivos: $\{-1, -2, -3, \dots\}$.

Así, se obtiene el conjunto ordenado que conocemos:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Desde un punto de vista estructural, este nuevo conjunto posee una riqueza mucho mayor que $\mathbb{N}$. Aunque no es necesario usar esta terminología en el aula de Primaria, el docente debe saber que $\mathbb{Z}$ con la adición y la multiplicación tiene una estructura de *anillo conmutativo unitario*³. Lo relevante para nuestra labor didáctica son las consecuencias prácticas de esta estructura, que analizamos a continuación.

7.2.2.3 Propiedades Clave y su Traducción Didáctica

Comprender las propiedades formales de $\mathbb{Z}$ nos permite entender por qué los modelos y recursos que usamos en el aula son eficaces. No son trucos o casualidades; son representaciones fieles de la estructura matemática subyacente (Godino et al., 2004).

- *Propiedad 1: Existencia del Elemento Opuesto (Inverso Aditivo)*. Para cada número entero a , existe un único número entero, denotado como $-a$, tal que su suma es cero: $a + (-a) = 0$.

Traducción Didáctica: Esta es la propiedad que da validez y potencia al *modelo de cancelación*. Cuando en el aula utilizamos fichas de dos colores (rojas para deber, azules para tener) y explicamos que una ficha roja y una azul se anulan mutuamente, estamos creando una representación física de esta propiedad. Lo mismo ocurre con el modelo de las cargas eléctricas. La idea de «anular», «compensar» o «neutralizar» es la manifestación didáctica del concepto de elemento opuesto.

- *Propiedad 2: Estructura de Orden Total*. Dados dos números enteros distintos cualesquiera a y b , se cumple una y solo una de las siguientes relaciones: $a < b$, $a = b$ o $a > b$. Además, este orden es compatible con las operaciones (es un «anillo ordenado»).

Traducción Didáctica: Esta propiedad es la que justifica matemáticamente el uso de la *recta numérica* como modelo principal para los números enteros. El hecho de que el conjunto esté totalmente ordenado permite que cada número entero ocupe una posición única en una línea. La recta numérica no es solo un

²Concepto matemático que se podría traducir como “equivalentes” o “iguales en casi todo aspecto o comportamiento”

³Conjunto de elementos con una operación sobre ellos que cumplen un conjunto determinado de propiedades

dibujo, es un isomorfismo entre el conjunto $\mathbb{Z}$ y un conjunto de puntos discretos en una línea. Permite visualizar el orden («estar a la izquierda es ser menor»), la distancia y, como veremos, las operaciones.

- **Propiedad 3: El Cero como Origen y Elemento Neutro.** El cero es el elemento neutro para la suma, lo que significa que $a + 0 = a$ para cualquier entero a .

Traducción Didáctica: En los modelos visuales, el cero no significa «nada» o «ausencia de cantidad» (como en los naturales), sino que adquiere un nuevo rol fundamental: es el *origen de coordenadas*, el punto de referencia que dota de significado a los signos. Lo positivo y lo negativo se definen *en relación al cero*. En la recta numérica, el cero es el centro de simetría que relaciona cada número a con su opuesto $-a$, situados a la misma distancia de él. Modelos como el del nivel del mar o la planta baja de un ascensor son excelentes para construir este nuevo significado del cero.

Profundizando: La Justificación de la Regla de los Signos

Esta es una de las preguntas más complejas de justificar en la escuela. Las analogías como «el amigo de mi amigo...» son pedagógicamente débiles y no tienen fundamento matemático. Aunque la multiplicación de enteros no es un objetivo central en Primaria, el docente debe poseer una justificación sólida para su propio conocimiento. La explicación se basa en la necesidad de preservar la *propiedad distributiva* en el nuevo conjunto $\mathbb{Z}$.

Veamos, con el ejemplo de la presentación, por qué $(-5) \times (-4)$ tiene que ser $+20$.

1. Partimos de una igualdad que sabemos que es cierta:

$$(-5) \times 0 = 0$$

2. Expresamos el cero de una forma ingeniosa, usando la propiedad del elemento opuesto: $0 = 4 + (-4)$.

$$(-5) \times (4 + (-4)) = 0$$

3. Ahora, aplicamos la propiedad distributiva, que queremos que siga siendo válida en $\mathbb{Z}$:

$$((-5) \times 4) + ((-5) \times (-4)) = 0$$

4. Calculamos la primera parte, que sí tiene un significado intuitivo («deber 5 euros a 4 personas» es deber 20 euros):

$$-20 + ((-5) \times (-4)) = 0$$

5. Llegamos a la conclusión lógica. La expresión $(-5) \times (-4)$ debe ser aquel número que, sumado a -20 , da como resultado 0. Por la definición de elemento opuesto, ese número tiene que ser, necesariamente, el opuesto de -20 .

$$(-5) \times (-4) = +20$$

Esta demostración no es para llevarla al aula de Primaria, pero dota al docente de la seguridad de saber que la regla de los signos no es un capricho arbitrario, sino una consecuencia lógica de mantener la coherencia estructural de la matemática al ampliar el conjunto de los números naturales.

7.2.2.4 Ampliando la Estructura: Opuesto y Valor Absoluto

Además de las propiedades estructurales que hemos visto, la creación del conjunto de los números enteros da lugar a dos conceptos nuevos y fundamentales que son, a la vez, herramientas matemáticas y didácticas de primer orden: el *opuesto* y el *valor absoluto*.

El Opuesto de un Número: El poder de la simetría y la cancelación. Para cada número entero a (distinto de cero), existe un único número, denotado como $-a$, llamado su *opuesto*. Se caracterizan por estar *a la misma distancia del cero, pero en direcciones contrarias*. Esta definición tiene una consecuencia visual inmediata en la recta numérica: un número y su opuesto son *simétricos* respecto al origen.

La propiedad fundamental que define al opuesto es que su suma con el número original es siempre cero:

$$a + (-a) = 0$$

Esta propiedad formal es la que da sustento matemático al *modelo de cancelación* que usamos en el aula. Cuando un alumno junta una ficha roja (+1) y una azul (-1) y entiende que “se anulan”, está experimentando de forma enactiva el concepto de opuesto.

Clave Didáctica: El Concepto de Opuesto como Clave Estructural de los Números Enteros

El concepto de opuesto es lo que da a los números enteros su estructura única y los diferencia radicalmente de los naturales. Es la base para comprender la resta de forma profunda y, más adelante, la resolución de ecuaciones.

El Valor Absoluto: La distancia al origen. El *valor absoluto* de un número entero, denotado como $|a|$, es su *distancia al cero* en la recta numérica. Dado que una distancia no puede ser negativa, el valor absoluto de un número es siempre positivo o cero.

Por ejemplo, tanto -5 como $+5$ se encuentran a 5 unidades de distancia del cero. Por lo tanto, su valor absoluto es el mismo (Figura 7.1):

$$|-5| = 5 \quad \text{y} \quad |+5| = 5$$

Implicación didáctica: El Valor Absoluto como Herramienta Diagnóstica

El concepto de valor absoluto es vital para el docente, pues nos permite diagnosticar con precisión uno de los errores más comunes. *El valor absoluto nos ayuda a entender por qué un alumno piensa que -8 es mayor que -3 .* El estudiante aplica la lógica de los números naturales al *valor absoluto* de los números (ya que 8 es mayor que 3), pero no al valor posicional de los mismos. Confunde el valor abso-

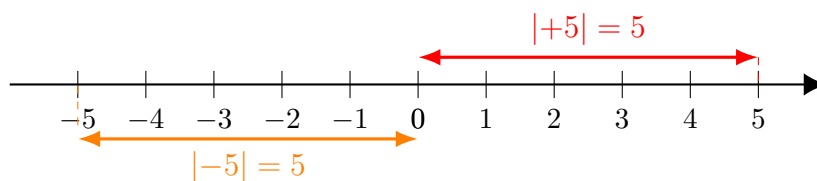


Figura 7.1: Visualización del valor absoluto como la distancia al cero en la recta numérica.

luto (la magnitud de la deuda o de la temperatura bajo cero) con el valor real del número (su posición en la recta). Nuestra tarea es ayudarlo a diferenciar entre la “cantidad de negatividad” (valor absoluto) y la posición en la recta (valor real).

7.2.3 El Obstáculo Epistemológico: ¿Dónde Radica la Dificultad?

Si la historia nos demuestra que la aceptación de los números enteros fue un proceso largo y complejo para las mentes más brillantes, es lógico anticipar que su aprendizaje presentará dificultades significativas para el alumnado de Educación Primaria. La Didáctica de las Matemáticas nos ofrece un concepto clave para analizar estas dificultades: el *obstáculo epistemológico*, acuñado por el filósofo Gaston Bachelard y desarrollado para nuestra disciplina por Guy Brousseau (2007).

Profundizando: El Obstáculo Epistemológico (Bachelard & Brousseau)

El concepto de obstáculo epistemológico, acuñado por el filósofo Gaston Bachelard (1938/2000) y desarrollado para nuestra disciplina por Guy Brousseau (2007), es una herramienta fundamental para la didáctica.

Un obstáculo epistemológico no es una simple falta de conocimiento, sino un *conocimiento previo que ha demostrado ser útil y eficaz en un determinado ámbito, pero que se revela inadecuado o genera errores al aplicarse en un nuevo contexto*. Este conocimiento se resiste a ser modificado precisamente porque fue exitoso en el pasado.

La labor docente no consiste en “borrar” el error, sino en crear situaciones didácticas que hagan evidente la insuficiencia del conocimiento anterior y promuevan su reconstrucción.

En el caso de los números enteros, el gran obstáculo epistemológico es el propio *conocimiento sobre los números naturales*. El alumnado ha pasado años construyendo un sólido edificio conceptual sobre la base de que los números sirven para contar, que siempre tienen un valor, que resulta ser absoluto, y que las operaciones tienen efectos predecibles. La llegada de los números negativos hace temblar los cimientos de este edificio.

Identifiquemos los obstáculos más comunes que se manifiestan en el aula:

- *La idea de que “un número es más grande cuanto mayor es su ‘cifra’”*. Este es el obstáculo más persistente. El alumnado, aplicando la lógica de los naturales, afirma sin dudar que -8 es mayor que -3 porque 8 es mayor que 3. Este

error revela una profunda confusión entre el *valor absoluto* de un número y su *valor relativo* o posición en la recta numérica. El conocimiento previo sobre la ordenación de los naturales actúa aquí como una barrera directa para la comprensión del nuevo sistema de orden.

- *La convicción de que “la resta siempre disminuye”*. En el universo de los números naturales, la sustracción $a - b$ (con $a \geq b$) siempre da un resultado menor o igual que a . Esta idea, reforzada durante años, se rompe de forma contraintuitiva. Por ejemplo, en la operación $5 - (-3) = 8$, el resultado es mayor que el minuendo. Esto genera una gran perplejidad y desconfianza en el alumnado si no se aborda desde un modelo con significado (p. ej., “¿qué diferencia de temperatura hay entre $+5^{\circ}\text{C}$ y -3°C ?”).
- *La imposibilidad de “quitar más de lo que se tiene”*. La propia génesis de los números enteros (dar respuesta a la operación $5 - 7$) choca frontalmente con la experiencia concreta del conteo. Para un niño o una niña, la expresión $5 - 7$ en un contexto de objetos físicos carece de sentido. Este obstáculo solo puede superarse abandonando el modelo de conteo y adoptando nuevos modelos como el de deudas y haberes o el de posiciones relativas.

La Polisemia del Signo “-”: El Origen de Múltiples Errores. Quizás el mayor catalizador de los obstáculos anteriores es la ambigüedad del signo menos ($-$). Este símbolo, que hasta ahora tenía un único y claro significado, de repente asume dos roles completamente distintos, generando una considerable sobrecarga cognitiva en el aprendiz. Este es un ejemplo paradigmático de lo que Shulman denominó *Conocimiento Didáctico del Contenido* (Shulman, 1986/2019): el docente experto sabe que este punto es conflictivo y requiere una atención especial.

Tabla 7.1: La doble naturaleza del signo menos ($-$): Operador vs. Cualidad.

Característica	El ‘-’ como Resta (Operador Binario)	El ‘-’ como Signo (Operador Unario)
¿Qué hace?	Indica una acción: quitar, comparar, encontrar una diferencia.	Indica una cualidad: ser negativo, estar por debajo de cero.
¿Dónde actúa?	Entre dos números.	Sobre un único número, formando parte de su identidad.
Ejemplo	$8 - 3$	(-3)
Se lee...	«Ocho menos tres» o «A ocho se le resta tres»	«Tres negativo » o «Menos tres»
Modelo Principal	Búsqueda de una distancia o diferencia en la recta numérica.	Una posición a la izquierda del cero en la recta numérica.

Los dos roles del signo son (Tabla 7.1):

1. *Operador Binario*: Indica la operación de *sustracción* entre dos números. Es el “menos” de la resta que el alumnado ya conoce. Por ejemplo, en $9 - 4$, el signo indica una acción a realizar.
2. *Operador Unario*: Indica la *cualidad* de un número, su propiedad de ser negativo.

Es el “signo” del número. Por ejemplo, en (-4) , el signo no indica una operación, sino que forma parte indivisible de la identidad del número.

El alumnado debe discernir, a partir del contexto de la expresión matemática, qué papel está jugando el signo en cada momento. Una expresión como $(-3) - (-5)$ exige un análisis complejo: el primer signo es unario, el segundo es binario y el tercero es unario. No es de extrañar que esto sea una fuente constante de errores.

Mini-Caso de Aula: Polisemia del “-”

Situación: Un alumno, al resolver en voz alta la operación $8 - (-2)$, la lee como “ocho menos menos dos”. Su expresión facial muestra confusión. Al resolverla, escribe $8 - 2 = 6$.

Diagnóstico: El alumno no está diferenciando los roles del signo “-”. Al leer “menos menos”, su cerebro lo simplifica a una única idea (la resta que ya conoce), ignorando la cualidad de “negativo” del segundo número. El obstáculo es la falta de distinción entre el operador binario y el unario.

Actuación Didáctica:

- **Intervención sobre el lenguaje:** El docente debe promover activamente un lenguaje preciso. Se debe corregir la lectura “menos menos” por “*menos dos negativo*”. Esta distinción verbal ayuda a crear la distinción conceptual. Incluso puede llegar a expresarlo como “a 8 se le resta dos negativo”, estableciendo de forma explícita de los significados de cada signo “-”.
- **Remodelización:** Se debe volver a un contexto. “¿Si la temperatura está en 8 grados y queremos saber la diferencia con una temperatura de 2 grados bajo cero, la diferencia es de 6 grados o de 10?”. Se utiliza la recta numérica o un termómetro para visualizar que la distancia entre $+8$ y -2 es de 10 unidades.
- **Foco en la escritura:** Se debe insistir en el uso de paréntesis para proteger los números negativos, como en $8 - (-2)$, para reforzar visualmente que (-2) es una entidad única e indivisible.

En definitiva, la labor del personal docente frente a los números enteros no es simplemente presentar un nuevo conjunto de números y sus reglas. Es una labor mucho más profunda y compleja: consiste en guiar al alumnado en la *reconstrucción de su propia idea del concepto de número*. Esto implica hacerles conscientes de los límites de sus conocimientos previos, presentarles situaciones problemáticas que solo los nuevos números pueden resolver y dotarles de modelos y un lenguaje que les permitan navegar por este nuevo universo numérico con seguridad y comprensión. El error, por tanto, deja de ser un fracaso para convertirse en una valiosa ventana a los obstáculos conceptuales del alumnado, y en la principal herramienta del docente para regular el aprendizaje.

7.3 Didáctica en el Aula: De lo Concreto a lo Simbólico

Una vez comprendidas las raíces históricas, matemáticas y epistemológicas de la dificultad que entrañan los números enteros, el futuro personal docente debe pregun-

tarse: ¿cómo orquestar su enseñanza en el aula de Primaria? La respuesta no reside en una transmisión acelerada de reglas y algoritmos, sino en el diseño de un itinerario de aprendizaje que respete el desarrollo cognitivo del alumnado y que construya el conocimiento de manera sólida y significativa.

Este itinerario sigue la secuencia de aprendizaje propuesta por Jerome Bruner (1966/1972), un viaje progresivo que transita por tres fases de representación del conocimiento:

1. *Fase Enactiva (la acción)*: El aprendizaje se produce a través de la acción y la manipulación directa. El alumnado experimenta los conceptos con su propio cuerpo y con objetos. En nuestro caso, será jugar al ascensor en el patio o mover una ficha en un tablero.
2. *Fase Icónica (la imagen)*: El conocimiento se representa mediante imágenes o esquemas visuales que condensan la acción. La recta numérica o los diagramas de cargas son los protagonistas de esta fase.
3. *Fase Simbólica (el lenguaje)*: Finalmente, se utiliza el lenguaje abstracto y los símbolos matemáticos para representar la realidad. Escribir $(+3) + (-5) = -2$ es el culmen de este proceso, pero solo tendrá sentido si se apoya en las fases previas.

El error pedagógico más común en la enseñanza de los números enteros es comenzar por la fase simbólica, presentando reglas que carecen de significado para el alumnado. Este capítulo se dedica a proporcionar las herramientas para recorrer el camino completo. Desde la perspectiva de la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud (1991/2010), un concepto no es solo una definición, sino un conjunto de situaciones que le dan sentido, de representaciones simbólicas que lo expresan y de invariantes operatorios que subyacen a la acción. Nuestra labor como docentes es enriquecer al máximo el campo conceptual del número entero a través de una diversidad planificada de situaciones y representaciones.

7.3.1 El Principio Fundamental: Anclaje en la Realidad como Único Punto de Partida

El punto de partida para la enseñanza de los números enteros en Educación Primaria es, sin excepción, el anclaje en la realidad a través de contextos significativos. Antes de que un niño o una niña pueda comprender qué es “-3”, debe haber experimentado situaciones en las que un número por debajo de cero tenga un sentido claro y tangible. Ignorar este principio y presentar los números negativos como una simple regla (“lo mismo que los naturales, pero con una raya delante”) es sembrar la semilla de los obstáculos epistemológicos que analizamos en la sección anterior.

Un buen contexto no es una simple anécdota o un ejemplo aislado; es un entorno rico y fértil del que el alumnado, con la guía docente, puede extraer el lenguaje, las intuiciones y las relaciones matemáticas fundamentales.

Clave Didáctica: Las Cuatro Funciones de un Contexto Potente

Un contexto didácticamente potente cumple cuatro funciones esenciales:

- *Dar Significado:* Responde a la pregunta implícita del alumnado: “¿Y esto para qué sirve?”. Un número negativo deja de ser un “número absurdo” cuando representa una temperatura bajo cero o una deuda.
- *Generar Lenguaje:* Introduce de forma natural el vocabulario clave: “bajo cero”, “deber”, “sótano”, “antes de Cristo”, “retroceder”. Este lenguaje vernáculo es el puente hacia el lenguaje matemático formal.
- *Motivar:* Un contexto interesante y cercano a la experiencia del alumnado fomenta la curiosidad y el compromiso con la tarea, convirtiendo el aprendizaje en un proceso activo y voluntario.
- *Servir de Anclaje para la Abstracción:* Cuando surgen dificultades con las operaciones simbólicas, el docente y el propio estudiante siempre pueden volver al contexto para razonar. “¿No entiendes por qué $(-2) + 5$ es 3? Pensemos en el ascensor: si estás en el sótano 2 y subes 5 plantas, ¿dónde apareces?”.

A continuación, se presenta un catálogo de contextos y modelos cuya eficacia ha sido ampliamente reconocida en la didáctica de las matemáticas (Chamorro, 2003/2006), muchos de ellos ya sugeridos en la historia del propio concepto.

7.3.1.1 Temperaturas: El termómetro como recta numérica vertical

- *Descripción:* Es, posiblemente, el contexto más intuitivo y universal. El alumnado tiene experiencias directas con el frío y el calor y está familiarizado con los informes del tiempo en los que aparecen temperaturas negativas (bueno, en Málaga no tanto ...).
- *Potencial Didáctico:* Es ideal para introducir los conceptos de *orden y comparación*. Es evidente que -8°C es una temperatura más baja (y por tanto, *menor*) que -2°C . El termómetro funciona como una recta numérica vertical donde “más arriba” significa “mayor valor”. El cero adquiere un significado físico claro (la temperatura de congelación del agua).
- *Ejemplo de uso en el aula:* Trabajar con un mapa del tiempo real de España en invierno. Pedir al alumnado que ordene de menor a mayor las temperaturas mínimas de varias capitales (p. ej., Burgos: -5°C ; Madrid: 2°C ; Sevilla: 8°C). Posteriormente, se pueden calcular “variaciones”: si la mínima en Burgos fue de -5°C y la máxima de 3°C , ¿cuántos grados subió la temperatura?

7.3.1.2 Finanzas: El modelo de “debo/tengo”

- *Descripción:* Este contexto conecta directamente con el origen histórico de los números negativos (las deudas). Se puede trabajar con situaciones de dinero, la paga semanal, pequeños préstamos entre compañeros o juegos de mesa como el Monopoly.
- *Potencial Didáctico:* Es el modelo por excelencia para dar sentido a la *suma de enteros* y, fundamentalmente, al concepto de *cancelación y elemento opuesto*. Si tengo 10 euros (+10) y adquiero una deuda de 10 euros (-10), mi saldo es 0. Esta idea de que una cantidad positiva y su correspondiente negativa se anulan

mutuamente es la piedra angular de la estructura aditiva del conjunto $\mathbb{Z}$.

- *Ejemplo de uso en el aula:* Plantear problemas de gestión de saldos. “Ana tiene 15€ en su hucha. Compra un cómic que cuesta 5€ y un regalo para su amiga que cuesta 12€. ¿Cuál es su nuevo saldo?”. Se puede escenificar con dinero de juguete, llevando un libro de cuentas sencillo donde los haberes se apuntan en una columna (positivos) y los débitos en otra (negativos).

7.3.1.3 Geografía y Topografía: Altitudes y profundidades

- *Descripción:* Utiliza el nivel del mar como un referente universal y significativo para el cero. Las altitudes de las montañas son valores positivos, mientras que las profundidades de fosas marinas o minas son valores negativos.
- *Potencial Didáctico:* Refuerza la idea del *cero como origen o punto de referencia arbitrario*. Permite trabajar con números grandes y visualizar distancias en una escala vertical. Es un contexto muy potente para la representación e interpretación de datos.
- *Ejemplo de uso en el aula:* Presentar un perfil topográfico como el de la imagen. Pedir al alumnado que identifique el punto más alto y el más bajo. Plantear preguntas como: “Un submarinista está a -50 metros y asciende 20 metros, ¿a qué profundidad se encuentra ahora?”. O calcular la distancia vertical total entre el pico del Aneto (+3404 m) y la Fosa de las Marianas (-10994 m).

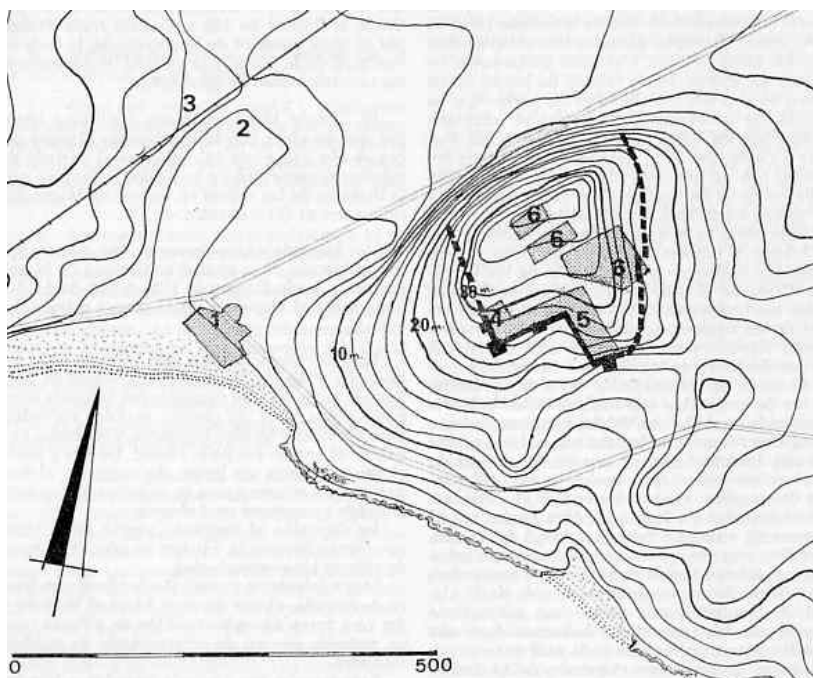


Figura 7.2: Perfil topográfico para visualizar altitudes y profundidades.

7.3.1.4 Movimiento y Desplazamiento: El ascensor y los juegos de tablero

- *Descripción:* Son contextos dinámicos que se centran en la acción de moverse. El ascensor de un edificio con plantas, planta baja (cero) y sótanos es el ejemplo

paradigmático. También se incluyen los juegos de mesa donde se puede avanzar y retroceder.

- *Potencial Didáctico*: Es el modelo más eficaz para introducir las *operaciones de suma y resta como transformaciones* o desplazamientos a lo largo de una recta. Sumar un número positivo es “avanzar” o “subir”, mientras que sumar un negativo es “retroceder” o “bajar”.
- *Ejemplo de uso en el aula (Fase Enactiva)*: Dibujar una recta numérica vertical en el patio que simule un ascensor. Un alumno o alumna se sitúa en una planta (p. ej., -2, el segundo sótano). El resto de la clase le da instrucciones como “sube 5 plantas” $((-2) + 5)$. El estudiante se mueve físicamente hasta la planta +3. Esta vivencia corporal crea un anclaje muy potente para comprender la operación.

7.3.1.5 Modelos de Dualidad: Cargas eléctricas y objetos opuestos

- *Descripción*: Este modelo es ligeramente más abstracto, pero muy potente. Se basa en la existencia de propiedades opuestas que se neutralizan mutuamente, como las cargas positivas (protones) y negativas (electrones) en un átomo. Una versión más concreta, propuesta en la presentación, es la de “cubos fríos” (que restan temperatura) y “vasitos calientes” (que la añaden).
- *Potencial Didáctico*: Es el mejor modelo para visualizar la *estructura matemática del conjunto $\mathbb{Z}$* . Permite representar un mismo número de infinitas maneras (p. ej., el número +2 se puede representar con dos fichas positivas, o con tres positivas y una negativa). Esto desarrolla una comprensión profunda de la *cancelación* y del *cero como la suma de un elemento y su opuesto*.
- *Ejemplo de uso en el aula*: Entregar al alumnado fichas de dos colores (p. ej., rojas para -1 y azules para +1). Pedirles que formen “átomos neutros” (el número 0) juntando una ficha de cada color. Luego, plantearles el reto: “¿Cómo podéis representar el número -3 sobre la mesa? ¿Y si ahora añadís un ‘átomo neutro’, qué número tenéis? ¿Ha cambiado?”. Este juego conduce al descubrimiento de que añadir cero $((+1) + (-1))$ no altera el valor, un concepto clave para futuras manipulaciones algebraicas.

7.3.2 Visualizar para Comprender: Modelos Matemáticos y Materiales

Una vez que el alumnado ha explorado los números enteros en contextos reales y significativos (la fase *enactiva* de Bruner), el siguiente paso crucial es traducir esas experiencias a representaciones visuales y manipulativas. Entramos en la fase *icónica*, donde construimos los puentes entre la acción y el símbolo. No se trata simplemente de “dibujar”, sino de utilizar modelos matemáticos que encapsulan las propiedades del nuevo conjunto numérico y permiten al alumnado razonar sobre ellas.

Dos modelos son fundamentales en esta etapa por su potencia y complementariedad: la recta numérica y el modelo de cancelación.

7.3.2.1 El poder de la recta numérica

La recta numérica es el modelo por excelencia para trabajar el conjunto de los números enteros en Educación Primaria. Su poder reside en que es una representación

visual directa de la propiedad de *orden total* del conjunto $\mathbb{Z}$. Sin embargo, para que sea una herramienta de aprendizaje y no una simple ilustración, debe ser construida y comprendida por el alumnado, no meramente presentada.

La construcción de la recta numérica se debe realizar de forma dialogada, asegurando la comprensión de sus elementos fundamentales:

- *El Cero como Origen y Referencia.* Es el primer elemento a situar. Representa el punto de partida, el nivel del mar, la planta baja del ascensor. Es el ancla que separa el universo de los números positivos del de los negativos.
- *La Unidad como Medida.* Se debe establecer una unidad de medida constante (la distancia entre 0 y 1) que se repetirá a lo largo de toda la recta. Esto asegura que la representación sea coherente y proporcional.
- *La Direccionalidad y el Sentido.* Se establece la convención universal de que los números positivos se sitúan a la derecha del cero (en orden creciente) y los negativos a la izquierda. El sentido es vital para visualizar las operaciones como desplazamientos. Sin embargo, es importante tener en cuenta que esta costumbre es una convención y no es una necesidad imperativa.
- *La Simetría de los Opuestos.* La construcción debe hacer visible que un número y su opuesto (p. ej., +3 y -3) se encuentran a la misma distancia del cero, pero en direcciones contrarias. Esto materializa el concepto de *elemento opuesto*.

Clave Didáctica: La Construcción Colectiva de la Recta Numérica.

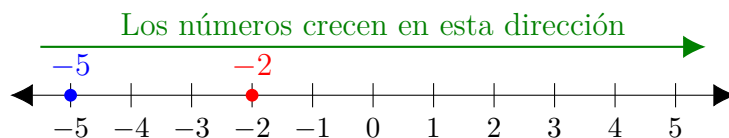
Una actividad de gran valor consiste en entregar al alumnado una línea en blanco y pedirles que sitúen el número -1 y el +2. El debate que surgirá será muy rico: ¿Dónde ponemos el cero? ¿Qué separación hay entre los números? ¿Es la misma entre todos? A partir de sus razonamientos, el o la docente puede guiar la construcción colectiva de una recta numérica coherente en la pizarra o en el suelo del aula, estableciendo los criterios de forma consensuada. Este proceso de construcción promueve una apropiación mucho más profunda del modelo que una simple exposición.

Una vez construida, la principal utilidad de la recta numérica es la *comparación y ordenación* de números enteros. La regla es visual, potente e inequívoca:

Cualquier número es menor que los que se sitúan a su derecha y mayor que los que se sitúan a su izquierda.

Esta regla visual permite confrontar y superar uno de los obstáculos epistemológicos más comunes. Cuando se pregunta a un niño o niña “¿Qué número es mayor, -8 o -2?”, es frecuente que responda que -8, porque su mente, anclada en la lógica de los números naturales, se fija en el valor absoluto (8 es mayor que 2). La recta numérica deshace esta falacia de un vistazo.

Al visualizar que -2 está a la derecha de -8, el alumnado puede comprender por qué -2 es mayor (hace menos frío, debo menos dinero). La representación icónica da soporte al razonamiento contextual.



Como -2 está a la derecha de -5 , entonces $-2 > -5$

Figura 7.3: Uso de la recta numérica para comparar -5 y -2 .

7.3.2.2 El modelo de cancelación y otros recursos manipulativos

Si la recta numérica es ideal para el orden, el *modelo de cancelación* es la herramienta más potente para visualizar la propiedad del elemento opuesto ($a + (-a) = 0$) y para dar sentido a las operaciones de suma y resta.

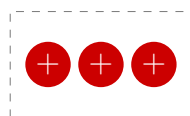
Este modelo se basa en la idea de que existen dos tipos de objetos de valor opuesto que, al sumarse, se anulan mutuamente. El material más común para representarlo son las *fichas bicolores*:

- Se asigna un valor a cada color. Por ejemplo: fichas rojas valen $+1$, fichas amarillas valen -1 .
- La regla fundamental del modelo es que una ficha roja y una amarilla juntas forman un “par nulo”, es decir, su valor es 0 , y por tanto se pueden añadir o quitar de una colección sin alterar su valor total.

Este modelo permite una flexibilidad de representación muy rica. Por ejemplo, el número $+3$ puede representarse de infinitas maneras:

- Con tres fichas rojas ($+3$).
- Con cuatro fichas rojas y una amarilla ($+4 + (-1) = +3$).
- Con cinco fichas rojas y dos amarillas ($+5 + (-2) = +3$).

Representación de $+3$



Representación alternativa de $+3$

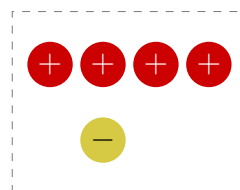


Figura 7.4: Representación del número $+3$ con fichas bicolores.

Esta propiedad es la clave para comprender la resta de números enteros de una forma manipulativa, como veremos en el siguiente apartado.

Mini-Caso de Aula: Juego “¿Qué número soy?”

El o la docente prepara varias bolsas opacas con una mezcla de fichas rojas y amarillas. Por turnos, un alumno o alumna saca el contenido de una bolsa, lo muestra a la clase, agrupa los pares nulos (si los hay) y los retira. El resto de la

clase debe “adivinar” el número total representado por las fichas que quedan. Esta actividad refuerza la idea de cancelación y el cálculo mental de sumas sencillas de enteros.

Además de estos dos grandes modelos, existen otros *recursos manipulativos y visuales* que se derivan directamente de los contextos estudiados:

- *Termómetros de aula:* Ya sean reales o de cartón con una cinta móvil, son la recta numérica vertical por excelencia. Permiten visualizar variaciones de temperatura de forma muy intuitiva.
- *Recta numérica en el suelo:* Dibujar una recta numérica grande en el patio o en el pasillo con tiza permite al alumnado “ser” el número. Se les puede pedir que caminen desde un número hasta otro para resolver sumas o restas, interiorizando las operaciones como movimientos físicos.
- *Líneas de tiempo:* Para el contexto histórico, son una herramienta fundamental para ordenar fechas (a.C. como negativas, d.C. como positivas) y calcular duraciones.

La clave del éxito en esta fase icónica es la *variedad y la conexión*. El futuro personal docente debe ser capaz de transitar de un modelo a otro, mostrando al alumnado que la recta numérica horizontal, el termómetro vertical y las fichas de colores son, en el fondo, distintas formas de hablar de las mismas ideas matemáticas.

Tabla 7.2: Síntesis de los principales modelos y contextos para la enseñanza de los números enteros.

<i>Modelo/ Contexto</i>	<i>Conceptos Clave que Desarrolla</i>	<i>Ventajas Didácticas y Foco</i>
Termómetro / Altitudes	Orden, comparación, cero como referencia.	Intuitivo, visual. Conecta “arriba/abajo” con “mayor/menor”. Ideal para iniciar la ordenación y la resta como distancia.
Deber/Tener (Finanzas)	Cero como equilibrio, opuesto, cancelación, suma.	Contexto funcional y realista. Excelente para introducir la idea de que un positivo y un negativo se anulan (cancelación).
Ascensor / Juegos de Tablero	Desplazamiento (suma de positivos/negativos), cero como origen.	Modelo dinámico y enactivo. La suma se vivencia como un movimiento. Fortalece la idea de dirección y sentido en la recta numérica.
Fichas Bicolores (Modelo de Cancelación)	Opuesto, cancelación, equivalencia (un número tiene infinitas representaciones).	Modelo estructural potente. Hace visible la propiedad del inverso aditivo ($a + (-a) = 0$). Esencial para comprender la resta de negativos.

7.3.3 Introducción a las Operaciones: Siempre con Significado

Una vez que el alumnado ha explorado los números enteros en diversos contextos y ha comenzado a visualizarlos y ordenarlos en la recta numérica, nos encontramos en la fase simbólica del aprendizaje, según la secuencia de Bruner (1966/1972). Sin embargo, este paso hacia el símbolo no debe suponer un divorcio de la realidad ni de los modelos visuales. Todo lo contrario: la fortaleza del aprendizaje dependerá de cuán ancladas estén las operaciones en los significados construidos previamente.

El principio rector en esta etapa es *significado antes que algoritmo*. Nuestro objetivo como docentes no es que el alumnado memorice reglas abstractas, sino que sea capaz de resolver operaciones razonando sobre los modelos que ya conoce. Abandonamos frontalmente la práctica de enunciar una regla y luego hacer ejercicios mecánicos; en su lugar, planteamos un problema en un contexto conocido, lo resolvemos usando un modelo visual o manipulativo, y solo entonces extraemos y formalizamos el procedimiento matemático.

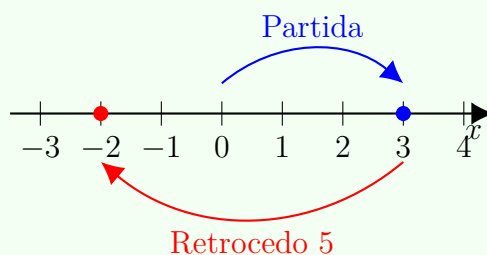
7.3.3.1 La Adición como Composición de Movimientos o de Estados

La suma de números enteros puede ser introducida a través de dos modelos complementarios y potentes que ya hemos explorado: los desplazamientos en la recta y la consolidación de saldos.

Modelización en la recta numérica: composición de movimientos. En este modelo, asociamos la operación de sumar con la acción de “moverse”. Los números positivos representan avances (hacia la derecha) y los números negativos representan retrocesos (hacia la izquierda). El primer sumando indica el punto de partida y el segundo, el desplazamiento a realizar.

Clave Didáctica: La Adición como Composición de Movimientos

Planteamos al alumnado: «Si estamos en la casilla +3 de nuestro juego y sacamos una tarjeta que dice “Retrocede 5 pasos”, ¿a qué casilla llegamos?». Lo representamos en la recta numérica:



El alumnado visualiza que el resultado es -2. El movimiento, y no una regla abstracta, les da la solución. De esta forma, $(+3) + (-5) = -2$.

Modelización financiera: consolidación de saldos. Este modelo se apoya en el contexto de “deber” (negativos) y “tener” (positivos). La suma es la acción de juntar o consolidar varias de estas situaciones para obtener un saldo final.

Para el mismo ejemplo, $(+3) + (-5)$, la pregunta sería: «Si en mi cartera tengo 3 euros, pero en mi cuaderno de deudas tengo apuntado que debo 5 euros a un amigo, ¿cuál es mi situación económica real?». Utilizando el modelo de cancelación (por ejemplo, con fichas bicolores), el alumnado comprenderá que los 3 euros que tiene sirven para pagar parte de la deuda, pero todavía le quedarán 2 euros por pagar. Su saldo final, por tanto, es de -2 euros.

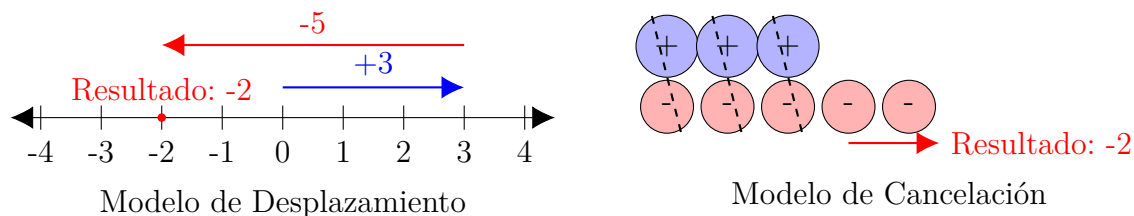


Figura 7.5: Visualización comparativa de la operación $(+3) + (-5) = -2$ con los dos modelos principales.

7.3.3.2 La Sustracción como Búsqueda de una Diferencia Dirigida

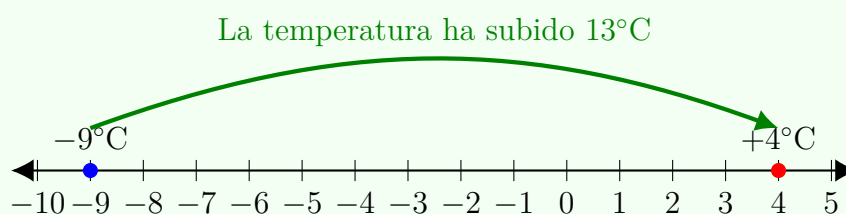
La sustracción de números enteros es, didácticamente, la operación más compleja y donde una enseñanza basada en reglas (“restar es sumar el opuesto”) causa mayores estragos en la comprensión (Brousseau, 2007). Esta regla, aunque matemáticamente correcta, es abstracta y profundamente anti-intuitiva para un aprendiz.

Proponemos un enfoque radicalmente distinto: concebir la resta, no como “quitar”, sino como calcular la *distancia o el cambio necesario para ir de un número a otro*. La pregunta clave para $a - b$ no es “¿cuánto es a quitando b?”, sino “¿cuánto hay que añadirle a b para llegar a a?”.

Clave Didáctica: a Sustracción como Búsqueda de una Diferencia Dirigida

En lugar de presentar la operación en abstracto, la contextualizamos: «Esta mañana, la temperatura en la sierra era de -9°C . Al mediodía, el termómetro marca $+4^{\circ}\text{C}$. ¿Cuántos grados ha subido la temperatura?».

Esta pregunta invita al alumnado a usar el termómetro o la recta numérica para “contar” el cambio:



El alumnado deduce, contando los “saltos” (9 saltos para llegar a 0, y 4 más para llegar a +4), que la temperatura ha subido 13 grados. Por lo tanto, el resultado de la operación $(+4) - (-9)$ es +13. Este descubrimiento es significativo y comprensible. Solo después de varias experiencias como esta, el docente puede guiar

la reflexión para que el alumnado observe patrones y, eventualmente, comprenda la equivalencia con la suma del opuesto como una conclusión, no como un punto de partida.

Tabla 7.3: Síntesis de los Modelos y Conceptos para las Operaciones con Enteros.

Operación	Modelo Didáctico Principal	Concepto Clave	Pregunta Guía del Contexto
Adición	Recta Numérica (desplazamientos)	Composición de movimientos.	«Si estás aquí y te mueves tanto, ¿dónde acabas?»
	Cancelación (fichas bicolores)	Consolidación de saldos.	«Si tienes esto y debes aquello, ¿cuál es tu situación final?»
Sustracción	Recta Numérica (distancia)	Diferencia dirigida / Cambio.	«¿Cuánto te falta para ir desde B hasta A?» o «¿Cuál ha sido el cambio?»

Profundizando: Multiplicación de Enteros, Argumentos para su Exclusión en Primaria

La famosa regla de la multiplicación de enteros, especialmente la enigmática «menos por menos es más», genera una enorme curiosidad. Sin embargo, su abordaje formal *no es un objetivo* en la Educación Primaria. La normativa vigente y los principios de una didáctica centrada en la comprensión nos invitan a ser extremadamente cautos. ¿Por qué esta cautela pedagógica? Las razones son tanto matemáticas como, y más importante, didácticas.

- **Alto Nivel de Abstracción (El Argumento Matemático):** La justificación matemática formal de que $(-3) \times (-2) = +6$ no es intuitiva. Se basa en la necesidad de preservar la *propiedad distributiva* en el conjunto de los números enteros, tal como se esbozó en el recuadro de la página 232. Esta argumentación es conceptualmente muy avanzada y se aleja del desarrollo cognitivo del alumnado de estas edades.
- **Ausencia de un Modelo Concreto (El Argumento Didáctico):** Esta es la razón pedagógica fundamental. La principal razón didáctica es la *ausencia de un modelo concreto, intuitivo y unívoco* para la multiplicación de dos negativos. Mientras que la suma y la resta se anclan con facilidad en movimientos (recta numérica) o cantidades opuestas (fichas bicolores), no existe un modelo igualmente potente para $(-3) \times (-2)$ que no genere confusión o parezca un 'truco' arbitrario. Forzar una regla sin un modelo comprensible viola el principio fundamental de este manual: *significado antes que algoritmo*.

¿Qué podemos hacer entonces? Sí podemos (y debemos) introducir la multiplica-

ción de un entero negativo por un número natural de forma intuitiva, anclándola en el concepto de *suma repetida*, que sí es comprensible y modelizable.

Ejemplo: Para introducir $(-5) \times 4$, podemos usar un contexto de deudas:

«Ana debe 5 euros a cada uno de sus cuatro amigos. ¿Cuál es su situación total?»

El alumnado puede interpretar esto como una deuda que se repite, una suma de negativos:

$$(-5) + (-5) + (-5) + (-5) = -20$$

Así, el alumnado comprende de forma significativa que $(-5) \times 4 = -20$. Este es el punto de llegada razonable y conceptualmente sólido para la Educación Primaria, sentando las bases para una formalización más profunda en la Educación Secundaria.

7.3.3.3 El Juego como Herramienta Didáctica

El aprendizaje de conceptos abstractos, como los números enteros, encuentra en el juego un aliado insustituible. Desde una perspectiva vygotskiana, el juego crea una *Zona de Desarrollo Próximo* donde el alumnado puede operar con ideas que están justo por encima de su nivel de desarrollo actual, gracias al andamiaje que proporcionan las reglas y la interacción social (Vygotsky, 1978/2009). Lejos de ser una mera distracción o un premio al final de la tarea, el juego con propósito didáctico es una de las formas más potentes de *hacer matemáticas*. Se transita de «jugar con las matemáticas» (donde estas son una excusa) a «hacer matemáticas jugando» (donde el pensamiento matemático es la clave para participar y tener éxito en el juego).

El objetivo es presentar actividades lúdicas donde el uso de los números enteros no sea forzado, sino que constituya la mecánica central del juego. A continuación, se detallan varias propuestas, clasificadas por el modelo matemático que subyace en ellas.

Juegos de Cartas: El Modelo de Cancelación en Acción. El juego de cartas es ideal para practicar la propiedad del elemento opuesto ($a + (-a) = 0$) de una forma dinámica y motivadora.

Ejemplo: «Buscando el Cero»

- *Objetivo del Juego:* Ser el jugador o jugadora que consiga capturar más cartas.
- *Material:* Una baraja de 40 cartas. Se pueden crear fácilmente. La baraja contendrá cuatro juegos de cartas numeradas del -10 al +10 (excluyendo el 0, o incluyéndolo como comodín).
- *Reglas:*
 1. Se reparten 5 cartas a cada participante y se colocan 4 cartas boca arriba en el centro de la mesa. El resto del mazo se deja a un lado.
 2. Por turnos, cada jugador/a intenta usar una carta de su mano

para «capturar» una o varias cartas de la mesa. La condición para capturar es que *la suma de la carta jugada y las cartas capturadas sea cero*.

3. *Ejemplo de jugada:* En la mesa hay las cartas: +8, -5, +2, -3. Un jugador tiene en su mano la carta -2. Puede jugar su -2 y llevarse la carta +2 de la mesa, ya que $(-2) + (+2) = 0$. Ambas cartas pasan a su montón de capturas.
4. *Jugada avanzada:* Si un jugador tiene un +5, podría llevarse las cartas -2 y -3 de la mesa, ya que $(+5) + (-2) + (-3) = 0$.
5. Si un jugador/a no puede hacer una jugada que sume cero, debe dejar una de sus cartas en la mesa y robar una nueva del mazo.
6. El juego termina cuando se acaba el mazo y nadie puede hacer más jugadas. Gana quien más cartas haya capturado.

Clave Didáctica: El Juego como Contexto para la Cancelación y la Estrategia

Este juego no es una simple práctica de sumas. Desde el punto de vista didáctico, promueve:

- *La conceptualización del opuesto:* El alumnado interioriza de forma funcional la idea de que para cada número positivo hay un negativo que lo anula.
- *El cálculo mental estratégico:* No se trata de sumar por sumar, sino de buscar combinaciones que cumplan una condición. Esto desarrolla la flexibilidad del cálculo.
- *Diferenciación:* Se puede adaptar la dificultad variando el rango de números en las cartas o permitiendo combinaciones más complejas (sumar a +1 o -1, por ejemplo).

Cuadrados Mágicos: Lógica y Cálculo. Los cuadrados mágicos, un pasatiempo con una rica historia matemática, pueden adaptarse para trabajar con números enteros, añadiendo una capa de razonamiento lógico a la práctica operativa.

Ejemplo: Cuadrado Mágico Aditivo (Suma Cero)

El reto es rellenar las casillas vacías de modo que la suma de cada fila, cada columna y cada diagonal principal sea siempre cero.

-4		
	0	
		4

Pista para el docente: Se puede guiar al alumnado con preguntas como: «Fijaos en la diagonal principal. Ya tenemos un -4 y un +4. ¿Qué número falta en el centro para que la suma sea 0?». La respuesta (0) permite rellenar la casilla central.

A partir de ahí, se puede seguir con otra fila o columna: «Ahora miremos la columna de la derecha. Si ya tenemos un $+4$, ¿qué necesitaríamos en las otras dos casillas para que sumen 0?»

Ejemplo: Cuadrado Mágico Multiplicativo

Este reto es significativamente más complejo y es ideal para la ampliación o para trabajar con alumnado con altas capacidades. El objetivo es que el *producto* de cada fila y columna sea un número determinado, por ejemplo, -30 .

-5		+3
	-3	

Nota para el docente: Este cuadrado mágico introduce de forma implícita la regla de los signos de la multiplicación en un contexto de resolución de problemas. Por ejemplo, en la primera fila, $(-5) \times ? \times (+3) = -30$. El alumnado tendrá que deducir que el número que falta debe ser positivo.

Clave Didáctica: En los Juegos, el Proceso Supera al Resultado

Hay que tener en cuenta que no es importante “llegar a resolver el cuadrado”. Incluso puede ser más divertido si no hay una solución, pero obliga a revisar muchas opciones. Sin embargo, la reiteración de situaciones sin solución hará que el alumnado pierda interés. Lo mejor es llevar preparadas tareas cerradas y abiertas (con una solución, ninguna o muchas) y de diferentes niveles de dificultad. Así se conseguirá mantener el interés por el reto.

Juegos de Tablero y Problemas Equivalentes. Estos juegos son la materialización del modelo de desplazamientos en la recta numérica. Permiten al alumnado vivenciar las operaciones como movimientos reales.

Ejemplo: Juego para la adición y sustracción en la recta numérica

- **Tablero:** Un recorrido vertical simple, como una escalera o un edificio con plantas numeradas de, por ejemplo, $+10$ (ático) a -10 (sótano), con el 0 representando la planta baja o la calle.
- **Mecánica:** Los jugadores colocan su ficha en la planta 0. Por turnos, lanzan dos dados:
 - Un dado normal (del 1 al 6) que indica *cuántas plantas* se mueven.
 - Un dado de signos (con 3 caras ‘+’ y 3 caras ‘-’) que indica la *dirección* del movimiento (subir o bajar).
- **Ejemplo de jugada:** Un jugador está en la planta -2 . Saca un 5 en el dado numérico y un ‘+’ en el de signos. Debe realizar la operación $(-2) + (+5)$ y mover su ficha a la planta $+3$.
- **Casillas Especiales:** Se pueden añadir casillas con instrucciones contex-

tualizadas para hacer el juego más rico: «Se estropea el ascensor, baja 3 plantas», «Pagas la comunidad, baja 2 plantas», «Encuentras un paquete para un vecino, sube 4 plantas».

Como se vio en la presentación de la que se nutre este manual, existen numerosos *problemas equivalentes* que comparten la misma estructura matemática de “entradas y salidas” o “ganancias y pérdidas”. Estos pueden ser la inspiración para crear nuevos juegos o problemas:

- Coches que entran y salen de un garaje.
- Pasajeros que suben y bajan de un vagón de metro o autobús.
- El nivel del agua en un embalse que recibe agua de un río y la pierde por una presa.
- Una balanza donde se añaden y quitan pesos en ambos lados.

El uso de estas actividades lúdicas, bien secuenciadas y con una clara intención didáctica, transforma el aprendizaje de los números enteros de una tarea abstracta y memorística a una exploración significativa, lógica y motivadora.

7.3.3.4 Propuesta de Secuencia Didáctica: Un Itinerario de Aprendizaje

Llegados a este punto, es imperativo traducir los fundamentos teóricos y los modelos didácticos analizados en un itinerario de aprendizaje coherente y práctico para el aula de Primaria. La siguiente secuencia de cinco sesiones no debe ser interpretada como una receta rígida, sino como un ejemplo modelizador de cómo se pueden orquestrar los contextos, materiales y conceptos a lo largo de una unidad didáctica.

El eje vertebrador de toda la secuencia es la *resolución de problemas en contexto*, en plena sintonía con el enfoque competencial de la LOMLOE. Además, la progresión sigue deliberadamente las fases de aprendizaje propuestas por Jerome Bruner (1966/1972), transitando de una experiencia corporal y manipulativa (*fase enactiva*) a la representación gráfica (*fase icónica*), para finalmente llegar a la expresión simbólica (*fase simbólica*), pero siempre anclada en el significado construido en las fases previas. El siguiente diagrama (Figura 7.6) resume este itinerario.

Sesión 1: ¡Nos movemos! El juego del ascensor.

- *Objetivo Didáctico*: Experimentar corporalmente los desplazamientos en una escala vertical, introduciendo de forma intuitiva y oral los conceptos de “cero”, “plantas por encima” (positivos) y “sótanos por debajo” (negativos).
- *Contexto Principal*: Un ascensor en un edificio con varias plantas y sótanos.
- *Modelo Matemático Subyacente*: Recta numérica vertical.
- *Fase de Bruner*: Predominantemente *enactiva*.
- *Descripción de la Actividad*: En el patio o en un espacio amplio del aula, se dibuja con tiza o cinta adhesiva una gran línea vertical en el suelo. Se marcan divisiones y se etiqueta el “0” como “Planta Baja”. El alumnado, por turnos, se convierte en el “ascensor”. El o la docente da instrucciones orales como: «Estás en la planta baja. Sube 3 plantas. ¿Dónde estás? Ahora baja 5 plantas. ¿En qué planta te encuentras ahora?». Se verbalizan los resultados: «Estoy en el sótano

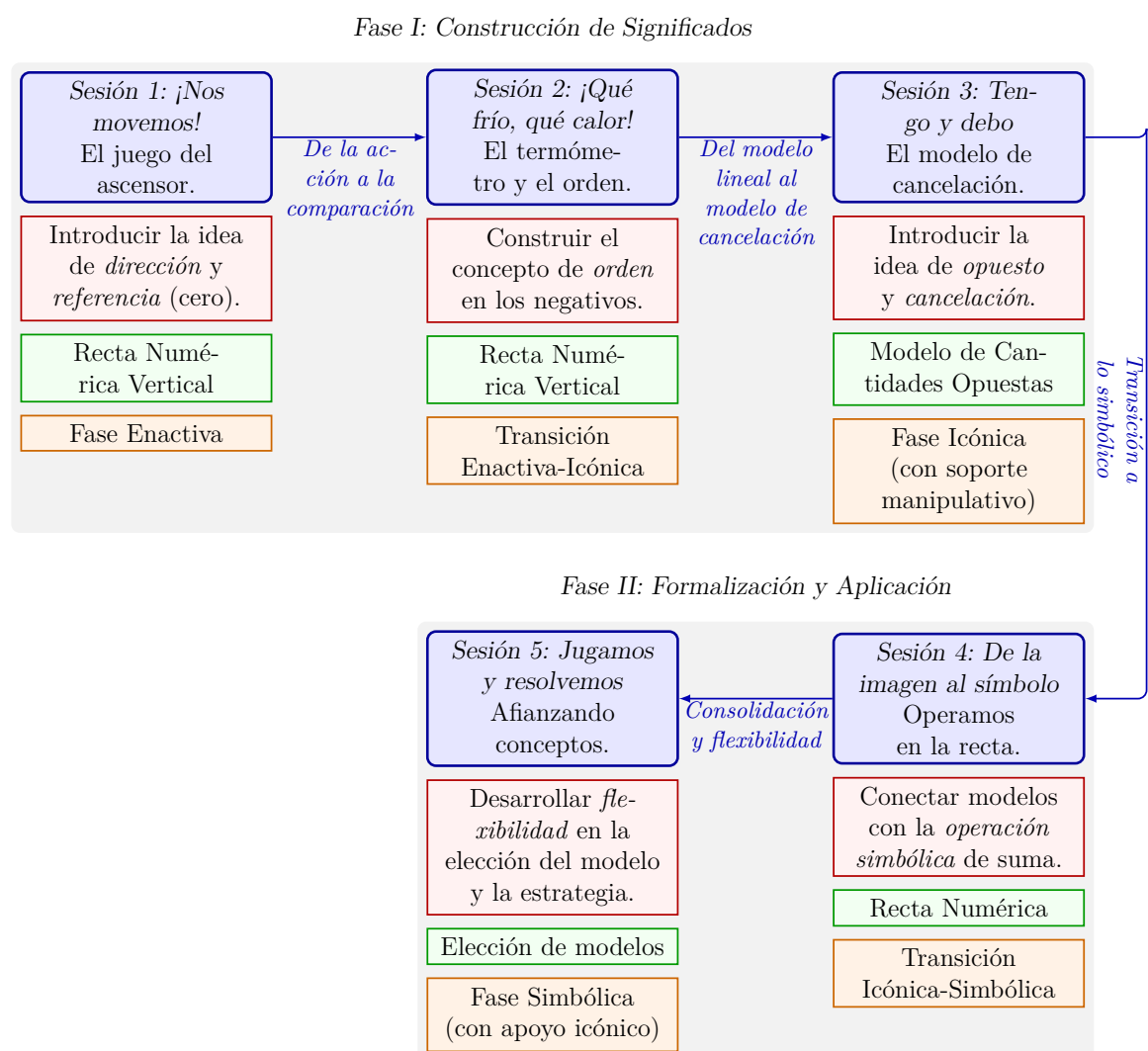


Figura 7.6: Esquema del itinerario de aprendizaje para los números enteros, mostrando la progresión de objetivos, modelos y fases.

2».

- *Preguntas Clave para el Docente:* «¿Qué pasa si estás en el sótano 1 y bajas dos plantas más?», «Para ir de la planta 4 al sótano 1, ¿has subido o has bajado? ¿Cuántas plantas?», «¿Es lo mismo ‘estar en la planta +3’ que ‘subir 3 plantas’?» (para empezar a diferenciar entre estado y transformación).

Sesión 2: ¡Qué frío, qué calor! El termómetro y el orden.

- *Objetivo Didáctico:* Introducir la comparación y el orden de los números enteros, utilizando una escala graduada familiar.
- *Contexto Principal:* Las temperaturas y los mapas del tiempo.
- *Modelo Matemático:* La recta numérica vertical (termómetro).
- *Fase de Bruner:* Transición *enactiva-icónica*.
- *Descripción de la Actividad:* Se presenta un termómetro de aula grande (real o una simulación en la pizarra digital). Se parte de la temperatura actual de la clase. Luego, se muestra un mapa del tiempo con las temperaturas mínimas de varias ciudades españolas en un día de invierno (ej. Málaga: +8°C; Burgos: -4°C; Granada: -1°C; Gijón: +5°C). El alumnado debe localizar estas temperaturas en el termómetro gigante. A continuación, se les pide que las ordenen de la más fría a la más cálida.
- *Preguntas Clave para el Docente:* «¿Dónde hace más frío, en Burgos o en Granada? ¿Por qué? ¿Cómo lo veis en el termómetro?» (para combatir el obstáculo de que 4 es mayor que 1), «¿Qué temperatura es más alta, -2°C o +1°C?», «Ordenad estas temperaturas de mayor a menor: 0, -5, +3, -1».

Sesión 3: Tengo y debo. El modelo de cancelación.

- *Objetivo Didáctico:* Comprender el significado del cero como resultado de la anulación de cantidades opuestas y construir la propiedad del inverso aditivo ($a + (-a) = 0$).
- *Contexto Principal:* Situaciones financieras simples de tener dinero (haber) y deudas (débito).
- *Modelo Matemático:* Modelo de cancelación.
- *Fase de Bruner:* Predominantemente *icónica* (con soporte manipulativo).
- *Descripción de la Actividad:* Se reparten fichas de dos colores (p. ej., azules para “euros que tengo” y rojas para “euros que debo”). Se plantea una situación: «Tienes 5 euros (coge 5 fichas azules). Pero le debes 3 euros a tu amigo (coge 3 fichas rojas). ¿Cuál es tu saldo real?». Se guía al alumnado para que comprendan que cada ficha azul se anula con una roja. Tras retirar las parejas, ven que su saldo real es de +2 (dos fichas azules). Se exploran casos como tener 4€ y deber 4€ (saldo cero) o tener 3€ y deber 5€ (saldo -2, dos fichas rojas).
- *Preguntas Clave para el Docente:* «¿Qué pasa cuando juntas una ficha azul y una roja? ¿Qué valor tiene esa pareja?», «Si tienes 6 fichas rojas, ¿qué necesitas para tener un saldo de 0?», «Describe con fichas una situación en la que tu saldo final sea de -1».

Sesión 4: De la imagen al símbolo. Operamos en la recta.

- **Objetivo Didáctico:** Formalizar las operaciones de adición y sustracción de números enteros como desplazamientos en la recta numérica horizontal.
- **Contexto Principal:** Variaciones de temperatura o movimientos en un juego.
- **Modelo Matemático:** Recta numérica horizontal.
- **Fase de Bruner:** Transición *icónica-simbólica*.
- **Descripción de la Actividad:** Se entrega a cada estudiante una recta numérica plastificada y un rotulador borrable. El o la docente plantea problemas anclados en un contexto, nunca como una operación aislada. Por ejemplo: «A las 8 de la mañana, el termómetro marcaba -2°C . Al mediodía, la temperatura había subido 7 grados. ¿Qué temperatura marcaba?». El alumnado, primero, resuelve el problema de forma icónica: se sitúa en -2 y dibuja 7 “saltos” hacia la derecha en su recta para llegar a $+5$. Solo después de que la solución visual haya sido encontrada y compartida, el docente interviene para formalizar. Introduce la escritura simbólica en la pizarra como una forma de *registrar la historia que acaban de dibujar*:

$$(-2) + (+7) = +5 \quad (-2) + (+7) = +5$$

Se trabajan distintos casos, siempre partiendo del contexto. Por ejemplo, para la resta como búsqueda de una diferencia: «Ayer estábamos a $+4^{\circ}\text{C}$ y hoy estamos a -1°C . ¿Ha subido o ha bajado la temperatura? ¿Cuántos grados ha cambiado?». De nuevo, el alumnado lo resuelve primero en su recta numérica, descubriendo visualmente que la diferencia es de 5 grados hacia abajo.

- **Preguntas Clave para Guiar la Transición:** El objetivo del docente no es pedir que resuelvan operaciones simbólicas, sino plantear retos contextualizados y usar preguntas que ayuden a conectar la acción, la imagen y el símbolo. La meta es que el alumnado descubra los patrones por sí mismo.
 - **Para construir la suma de negativos:** «Partimos del sótano 5 y bajamos 3 plantas más. Dibujadlo en la recta. ¿Dónde acabamos? ¿Cómo escribiríamos en lenguaje matemático esta historia de un movimiento negativo al que le sigue otro movimiento negativo?» (Guiando hacia la construcción de $(-5) + (-3) = -8$).
 - **Para construir la resta como distancia:** «Ana está en la casilla $+6$ y Luis en la $+4$. ¿Qué distancia les separa? Dibujadla.» o «La temperatura máxima fue de $+1^{\circ}\text{C}$ y la mínima de -5°C . ¿Qué diferencia de temperatura hubo en total?». Estas preguntas dan sentido a la resta como el cálculo de un intervalo, evitando la idea de “quitar”.
 - **Para la generalización y reflexión (metacognición):** Tras varios ejemplos, se pregunta: «Cuando hemos sumado un número positivo (la temperatura sube), ¿hacia qué lado nos hemos movido siempre en la recta? ¿Y cuándo hemos sumado un número negativo (la temperatura baja)?». Esta reflexión final es la que permite al alumnado extraer la “regla”, pero como una conclusión lógica de su propia experiencia, no como un dictado inicial.

Sesión 5: Jugamos y resolvemos. Afianzando conceptos.

- **Objetivo Didáctico:** Consolidar los conceptos y operaciones trabajados de forma flexible, aplicando el modelo más pertinente para cada situación.
- **Contexto Principal:** Juego de cartas y resolución de problemas variados.
- **Modelo Matemático:** Elección y aplicación de los modelos trabajados (recta, cancelación).
- **Fase de Bruner:** Predominantemente *simbólica*, con apoyo icónico a demanda.
- **Descripción de la Actividad:** Se organiza la clase en pequeños grupos para jugar al juego de cartas “Suma Cero” (descrito en la sección 7.3.3.3). En la segunda parte de la sesión, se entregan a los grupos una serie de problemas contextualizados que abarcan las distintas situaciones vistas (saldos, temperaturas, ascensores, etc.), para que los discutan, decidan qué modelo usar para resolverlos y presenten su solución.
- **Preguntas Clave para el Docente:** (En esta fase, la intervención es más de observación y apoyo) «¿Por qué habéis elegido la recta numérica para este problema?», «¿Podrías haberlo resuelto con las fichas de colores? ¿Cómo?», «Veo que tu resultado es -8. Explícame cómo has llegado a él usando tu dibujo».

Para el futuro o la futura docente: Reflexiones sobre la Secuencia Didáctica

Esta secuencia es un esqueleto, no una armadura. La clave de una buena praxis reside en la *flexibilidad* y la *escucha activa*. Es posible que un grupo necesite dos sesiones para interiorizar el modelo de cancelación, o que un contexto particular (p. ej., el fútbol con la diferencia de goles) resuene más en una clase que otro. El rol docente no es el de un mero ejecutor de un plan, sino el de un *facilitador* que observa, pregunta y adapta los recursos a las necesidades reales de su alumnado. El objetivo final no es completar las cinco sesiones, sino asegurar que el alumnado construya un significado profundo y duradero del número entero, un logro que justifica cualquier ajuste en el camino (Godino et al., 2004).

7.4 Conclusiones: Decálogo Didáctico para una Enseñanza Eficaz

Llegados a este punto, hemos desgranado la naturaleza de los números enteros desde múltiples perspectivas: su compleja génesis histórica, su elegante estructura matemática y los obstáculos que su aprendizaje presenta en la mente del alumnado de Primaria. Hemos explorado contextos, modelos y secuencias didácticas diseñadas para construir un conocimiento con significado.

Todo este recorrido se puede condensar en una serie de principios fundamentales que deben guiar la práctica docente. No se trata de una lista de comprobación, sino de una auténtica *filosofía de enseñanza* para abordar uno de los contenidos más abstractos y potentes de la aritmética escolar. A continuación, presentamos este enfoque en forma de decálogo.

1. **Principio de Empatía Histórica y Pedagógica.** No olvides nunca que la humanidad tardó siglos en aceptar los números negativos; fueron considerados “absurdos” y “peligrosos” por mentes brillantes. Si a la historia de las matemáticas le costó, es natural que a un niño o una niña de 10 años también le cueste. Utiliza

esta perspectiva para armarte de paciencia, respetar los ritmos de aprendizaje y comprender que los errores no son fallos, sino pasos lógicos en un camino conceptualmente arduo.

2. *El Contexto como Origen de Todo Significado*. Los números enteros no deben aparecer en el aula como una definición abstracta en la pizarra. Su introducción debe ser siempre una respuesta a una necesidad planteada por un contexto cercano y significativo. La temperatura, el dinero que se debe, la altura sobre el nivel del mar o las plantas de un ascensor no son “ejemplos” que se ponen después de la teoría; son el *punto de partida indispensable* desde el cual se construye el concepto.
3. *De lo Concreto a lo Simbólico, sin Atajos*. Respeta la progresión cognitiva del aprendizaje que propone Bruner (1966/1972). Comienza con la acción y la manipulación (*fase enactiva*), como caminar sobre una recta numérica en el patio. Continúa con la visualización y la representación (*fase icónica*), construyendo y utilizando modelos como el termómetro o las fichas bicolores. Solo cuando el concepto esté anclado en estas experiencias, introduce la notación formal (*fase simbólica*). Saltar directamente al símbolo es construir sobre arena.
4. *Los Modelos Múltiples son tus Aliados*. No te limites a un único modelo. La *recta numérica* es insuperable para trabajar el orden y la suma como desplazamiento. El *modelo de cancelación* (cargas, fichas) es extraordinariamente potente para visualizar la propiedad del elemento opuesto y dar sentido a operaciones como $(+5) + (-3)$. Usa ambos modelos y ayuda al alumnado a establecer conexiones entre ellos. Un concepto se comprende de verdad cuando se puede representar y utilizar de varias formas.
5. *Significado Antes que Algoritmo*. La meta en Educación Primaria no es que el alumnado mecanice la “regla de los signos” o aprenda que “restar es sumar el opuesto”. Esas son reglas abstractas que, sin una base conceptual sólida, generan errores y ansiedad. El objetivo es que puedan resolver problemas sencillos *razonando sobre los modelos*. Que para calcular $4 - (-2)$ piensen “¿cuántos grados de diferencia hay entre -2°C y 4°C ?” y lo vean en un termómetro, en lugar de aplicar una regla que no comprenden.
6. *El Lenguaje Importa (y Mucho)*. Sé deliberadamente preciso con el lenguaje que utilizas y fomentas en el aula. Distingue activamente entre el signo de la operación y el signo del número. No es lo mismo “cinco menos tres” ($5 - 3$) que “cinco más tres negativo” ($5 + (-3)$). Anima a tu alumnado a verbalizar sus razonamientos. La claridad en el lenguaje promueve la claridad en el pensamiento.
7. *El Error como Oportunidad de Aprendizaje*. Cuando un alumno o alumna afirma que -8 es mayor que -3 , no está cometiendo un error aleatorio. Está manifestando un *obstáculo epistemológico* (Bachelard, 1938/2000; Brousseau, 2007): la lógica de los números naturales, que fue exitosa durante años, sigue dominando su pensamiento e interfiere con la nueva lógica de los enteros. No te limites a corregir. Pregunta: «¿Por qué lo crees? ¿Dónde lo situarías en la recta? ¿En qué ciudad haría más frío?». Convierte el error en un trampolín para el debate, la reflexión y la reconstrucción de ideas.

8. *Domina el Fundamento Matemático para Enseñar con Seguridad.* Aunque no vayas a demostrar en clase por qué “menos por menos es más”, comprender la estructura matemática del conjunto $\mathbb{Z}$ y la lógica interna de sus propiedades (como vimos en el apartado 7.2.2.2) te dará una enorme seguridad. Este *conocimiento especializado del contenido* (Shulman, 1986/2019) es lo que te permitirá responder a las preguntas inesperadas, diseñar mejores tareas y, en definitiva, tomar decisiones didácticas fundamentadas y no basadas en la mera repetición de lo que a ti te enseñaron.
9. *El Juego como Contexto Privilegiado para la Práctica.* Utiliza el juego de forma intencionada. Un juego de cartas para buscar sumas cero, una “búsqueda del tesoro” en un plano cartesiano o un juego de tablero con avances y retrocesos no son un mero entretenimiento. Son contextos de aprendizaje potentes donde el uso de los números enteros se convierte en la herramienta necesaria y significativa para participar y alcanzar un objetivo.
10. *Tu Objetivo Final: Sentar las Bases de un Pensamiento Flexible.* Enseñar los números enteros en Primaria es mucho más que cumplir con un punto del currículo. Es abrir la mente del alumnado a la idea revolucionaria de que los números pueden representar algo más que cantidades. Es sentar las bases para el álgebra. Es, en definitiva, dar uno de los primeros y más importantes pasos en el desarrollo de un pensamiento matemático flexible, abstracto y potente que les servirá durante toda su vida académica y personal.

on la introducción de los números enteros, hemos completado la exploración del pensamiento aditivo. Hemos dotado al alumnado de herramientas para comprender cambios y comparaciones en un mundo lineal. Sin embargo, la realidad no solo se suma y se resta; también se escala, se reparte y se combina. Estamos listos para dar el siguiente gran salto cognitivo y adentrarnos en el *campo multiplicativo*, un nuevo universo de relaciones proporcionales que exploraremos en el siguiente capítulo.

7.5 Para la Reflexión y el Portfolio Docente

1. *Reflexión sobre la Empatía Histórico-Pedagógica.*
Consigna: Reflexiona sobre la frase de D’Alembert, quien consideraba los números enteros como una «idea peligrosa». ¿De qué manera puede esta perspectiva histórica modular tu paciencia y tu enfoque didáctico cuando un alumno o alumna muestre dificultades o incredulidad ante el concepto de número negativo?
2. *Diseño de un Recurso Didáctico Manipulativo.*
Consigna: Diseña un juego de mesa simple para 2-4 jugadores de 6º de Primaria, cuyo objetivo sea trabajar la suma de números enteros. Debe incluir:
 - *Nombre del juego y materiales:* Un tablero sencillo, fichas, y un mecanismo para determinar los movimientos (dados especiales, cartas, etc.).
 - *Reglas del juego:* Instrucciones claras y concisas sobre cómo jugar y cómo se gana.
 - *Justificación didáctica:* Un texto breve (aprox. 200 palabras) que explique qué modelo de los números enteros utiliza, qué saberes básicos del

currículo andaluz trabaja, y por qué el formato lúdico es adecuado.

3. *Análisis de Error y Propuesta de Intervención.*

Consigna: Un alumno de 5º curso resuelve la operación $(-4) - (-7)$ como -11 .

Aplica el ciclo del «detective cognitivo»:

- *Diagnóstico del error:* ¿Cuál es la causa conceptual probable? ¿Qué regla o idea errónea está aplicando?
- *Diseño de la intervención:* Describe, paso a paso, cómo usarías un modelo (recta numérica, contexto de temperaturas) para guiar al alumno hacia la respuesta correcta de forma razonada, no memorística.

8 Campo Multiplicativo: Multiplicación y División con Números Naturales

Las matemáticas son una actividad humana. Y como actividad humana, deben ser significativas.

8.1 Introducción: Un Salto Conceptual Más Allá de la Suma

Una vez que el alumnado ha comenzado a construir los cimientos del pensamiento numérico y a comprender la estructura de nuestro sistema de numeración, se abre la puerta a uno de los territorios más fascinantes y esenciales del aprendizaje: el de las operaciones aritméticas. Si en el capítulo anterior exploramos el *campo conceptual aditivo*, nos adentramos ahora en una estructura de un orden de complejidad superior: el *campo multiplicativo*.

Este paso de la adición a la multiplicación no es meramente un escalón más en el aprendizaje de “cuentas”. Representa una de las transiciones cognitivas más importantes y, a menudo, más desafiantes de la Educación Primaria. Supone un cambio radical en la forma de cuantificar y relacionar el mundo. Si el pensamiento aditivo es como recorrer un camino paso a paso, el pensamiento multiplicativo es como tener la capacidad de dar grandes saltos, de ver patrones y estructuras a una escala mayor. Implica pasar de pensar en términos de *cambios* a pensar en términos de *razones* y *proporciones*.

La enseñanza de la multiplicación y la división no consiste, por tanto, en la mera transmisión de procedimientos para obtener resultados correctos. Consiste en guiar al alumnado en la construcción de un sistema de pensamiento lógico y flexible que le permita modelizar y resolver una amplísima y variada gama de situaciones. Como ya vimos con la suma y la resta, no se trata de dos operaciones aisladas, sino de una compleja red de situaciones, conceptos y relaciones que constituyen un único campo conceptual (Vergnaud, 1991/2010).

8.1.1 De la Adición a la Multiplicación: Una Nueva Lente para Ver el Mundo

Hasta ahora, el alumnado ha habitado un universo aritmético gobernado por la lógica aditiva. Un mundo lineal, predecible y seguro, basado en la acción fundamental de “añadir uno más” o “contar el siguiente”. Las operaciones de suma y resta, aunque ricas en significados, se fundamentan en esta idea de avanzar o retroceder sobre una secuencia establecida.

La llegada del campo multiplicativo supone mucho más que aprender una nueva operación. Es una auténtica *ruptura epistemológica*; es entregar al alumnado una nueva lente, mucho más potente, para interpretar y estructurar la realidad. Se abandona la lógica puramente aditiva para entrar en el fascinante mundo de las relaciones proporcionales y el razonamiento covariacional. Nuestra primera tarea como docentes es ser conscientes de la profundidad de este cambio, que a menudo desafía nuestras propias intuiciones más arraigadas.

Profundizando: Del Pensamiento Logarítmico al Lineal

Pregunte a una persona adulta qué número está justo en medio del 1 y el 9, y responderá sin dudar que es el 5. Nuestra mente, entrenada en la escolarización, visualiza una recta numérica donde las distancias son aditivas: el 5 está a 4 unidades del 1 ($5-1=4$) y a 4 unidades del 9 ($9-5=4$). Es el centro aditivo, la *media aritmética*.

Sin embargo, estudios en cognición numérica infantil (Siegler & Ramani, 2004) revelan una respuesta sorprendentemente distinta y recurrente en niños y niñas pequeños: *el 3*.

¿Por qué? Porque su intuición, antes de la instrucción formal, no opera sobre una recta lineal, sino sobre una *escala logarítmica* mental. En esta escala, no importa la distancia aditiva, sino la *proporción multiplicativa*. Para ir de 1 a 3, se multiplica por 3. Y para ir de 3 a 9, se vuelve a multiplicar por 3. El 3 es el centro multiplicativo, la *media geométrica*.

Este fascinante hallazgo, conocido como el cambio de una representación logarítmica a una lineal (*logarithmic-to-linear shift*), es uno de los hitos cognitivos más importantes de la Educación Primaria.

Clave Didáctica: Construyendo el Modelo Lineal sobre la Intuición Logarítmica

Como futuros docentes, debemos ser conscientes de que la idea “lineal” de los números no es innata, sino una construcción cultural. La intuición de un niño que razona de forma proporcional o multiplicativa no es un error, sino el punto de partida natural de su pensamiento. Nuestra labor no es “corregir” esa intuición, sino construir activamente el modelo lineal a través de la manipulación, el conteo y, sobre todo, la exposición a los múltiples significados del campo multiplicativo que exploraremos en este capítulo.

Comprender esta transición nos prepara para guiar al alumnado en el descubrimiento de los múltiples significados de la multiplicación y la división. No se trata de imponer una nueva regla, sino de ofrecer experiencias y problemas donde la lógica multiplicativa se revele como la herramienta más eficaz y elegante para dar sentido al mundo. Este es el viaje que iniciamos en este capítulo.

8.1.2 La Doble Cara del Desafío Didáctico: Sentido y Algoritmos

Para guiar al alumnado en este nuevo territorio del pensamiento multiplicativo, debemos abordar simultáneamente dos frentes que, aunque profundamente interconectados, son conceptualmente distintos. Una enseñanza eficaz del campo multiplicativo requiere equilibrar constantemente estos dos aspectos, que podemos ver como las dos caras de una misma moneda, la de la competencia matemática.

8.1.2.1 La Construcción del Significado (El Para Qué)

Este es el pilar fundamental. Se centra en la capacidad de conectar las operaciones de multiplicación y división con el mundo real. No se trata de calcular, sino de interpretar. Un estudiante que construye el significado es capaz de responder a la pregunta crucial: «¿Y esto para qué sirve?».

Construir el significado implica que el alumnado comprenda la gran variedad de situaciones que pueden ser modelizadas por estas operaciones. Como señala Vergnaud (1991/2010), un concepto no es solo su definición, sino el conjunto de situaciones que le dan sentido. En el campo multiplicativo, esto significa que el alumnado debe ser capaz de reconocer una estructura multiplicativa no solo en un problema de “juntar 4 bolsas con 6 cromos cada una”, sino también al calcular el área de un jardín, las combinaciones posibles de un menú o cuántas veces más alto es un edificio que otro.

El objetivo de este pilar es dotar de propósito al cálculo. La meta no es que el alumnado *sepa hacer* una multiplicación, sino que sepa *cuándo y por qué* debe usarla.

Mini-Caso de Aula: Comprensión Instrumental frente a Comprensión Relacional

Dos estudiantes de 4º de Primaria deben calcular cuántos yogures hay en 12 paquetes de 4 yogures.

- *Estudiante A (Centrado en el Algoritmo)*: Realiza correctamente la operación 12×4 en su cuaderno y obtiene 48. Cuando se le pregunta por qué multiplica, responde: “Porque es lo que toca en este tema”.
- *Estudiante B (Centrado en el Significado)*: Piensa en voz alta: “Son 12 paquetes. Si fueran 10 paquetes, serían $10 \times 4 = 40$ yogures. Como son 2 paquetes más, son $2 \times 4 = 8$ yogures más. En total, $40 + 8 = 48$ yogures”.

Ambos llegan al resultado correcto, pero solo el Estudiante B demuestra un verdadero *sentido numérico*. Ha comprendido la estructura del problema y la ha descompuesto de una forma flexible. El Estudiante A, por su parte, ha ejecutado un procedimiento de forma mecánica, mostrando una comprensión meramente instrumental.

8.1.2.2 El Desarrollo de los Procedimientos (El Cómo)

Este segundo pilar se refiere al desarrollo de las estrategias de cálculo. Es el camino que va desde las estrategias más tempranas e informales (como el conteo a saltos) hasta el dominio comprensivo de los algoritmos formales. Un procedimiento o algoritmo es una herramienta extraordinariamente potente: una secuencia de pasos optimizada que nos permite realizar cálculos de forma eficiente y fiable, liberando recursos cognitivos para poder centrarnos en la interpretación del problema.

Sin embargo, aquí reside uno de los mayores peligros de la didáctica tradicional. Como advirtió Richard Skemp (1993), si los algoritmos se enseñan como “recetas de cocina” sin conexión con el significado, se promueve una *comprensión instrumental* (saber qué hacer) en lugar de una *comprensión relacional* (saber qué hacer y por qué). Un conocimiento instrumental es frágil, se olvida con facilidad y es una fuente constante de errores y ansiedad matemática.

Clave Didáctica: La Secuencia Acción-Imagen-Símbolo como Vía al Significado

Un procedimiento sin significado es una regla vacía; un significado sin un procedimiento eficiente es un saber impracticable. La clave de nuestra labor docente, como defendió Skemp (1993), es asegurar que ambos se construyan de la mano, pero en la dirección correcta.

La secuencia pedagógica que respeta esta construcción, fundamentada en la teoría de Bruner (1966/1972), es siempre la misma:

$$\text{Acción} \rightarrow \text{Imagen} \rightarrow \text{Símbolo}$$

Primero, el alumnado *actúa* sobre el problema con materiales concretos (fase enactiva). Luego, *representa* esa acción con un dibujo o un esquema (fase icónica). Finalmente, el *algoritmo* (fase simbólica) se introduce como la forma más eficiente de registrar lo que ya ha comprendido a través de la acción y la imagen.

Este enfoque no es una mera preferencia pedagógica. Es un mandato directo de nuestro marco normativo. La *ORDEN de 30 de mayo de 2023* establece que las operaciones deben trabajarse “con flexibilidad y sentido”. El algoritmo, por tanto, no es el punto de partida, sino el punto de llegada.

Este capítulo se estructura siguiendo esta lógica. Primero, desentrañaremos los múltiples significados y la estructura matemática del campo multiplicativo para, después, explorar cómo guiar al alumnado en la construcción de procedimientos y algoritmos cargados de sentido.

8.1.3 Hoja de Ruta del Capítulo: De los Fundamentos a la Práctica en el Aula

Este capítulo ha sido diseñado como un viaje guiado al corazón del pensamiento multiplicativo. Nuestro recorrido no será un simple catálogo de actividades, sino una inmersión profunda y estructurada que nos equipará como futuros docentes para tomar decisiones pedagógicas fundamentadas y eficaces. Para ello, nuestro itinerario se desarrollará en dos grandes etapas, siguiendo la lógica de la transposición didáctica: primero, construiremos un sólido conocimiento del contenido matemático y, después, exploraremos las herramientas para su enseñanza en el aula.

La primera parte del viaje, correspondiente a los *Aspectos Epistemológicos y Matemáticos*, nos invita a actuar como matemáticos, historiadores y analistas. Antes de preguntarnos cómo enseñar, debemos responder con claridad a la pregunta: ¿qué es exactamente lo que vamos a enseñar? Para ello:

- Comenzaremos explorando los múltiples *significados* que dan origen y sentido tanto a la multiplicación como a la división, descubriendo que son mucho más que meras sumas repetidas” o repartos”.
- A continuación, nos adentraremos en su *definición formal y sus propiedades*, el *saber sabio* que sustenta toda la estructura y que justifica por qué los algoritmos funcionan como lo hacen.

- Trazaremos un *mapa completo de la riqueza semántica* del campo multiplicativo, clasificando la gran variedad de problemas que estas operaciones nos permiten resolver.
- Finalmente, exploraremos un fascinante *abanico de algoritmos*, desde los más transparentes y visuales hasta los más eficientes, entendiéndolos como ingeniosas invenciones humanas.

Una vez que hayamos consolidado este profundo conocimiento del contenido, emprendemos la segunda etapa del viaje: los *Aspectos Psicopedagógicos y Didácticos*. Aquí cambiaremos de perspectiva para adentrarnos en la mente del aprendiz y en la realidad del aula de Primaria. Nos centraremos en cómo guiar al alumnado en la reinención de este conocimiento. En esta sección:

- Analizaremos la *progresión natural de las estrategias infantiles*, desde el conteo directo hasta el uso flexible de las propiedades.
- Abordaremos la *didáctica específica* de los conceptos clave: cómo enseñar las tablas de multiplicar de forma comprensiva, cómo introducir la división de manera significativa y cómo transformar los algoritmos en herramientas con sentido, en lugar de “recetas mágicas”.
- Adoptaremos el rol de *detectives cognitivos*, aprendiendo a interpretar los errores comunes no como fracasos, sino como valiosas ventanas al pensamiento del alumnado.
- Anclaremos toda esta práctica en nuestro marco de referencia, conectándola explícitamente con la progresión de saberes y el desarrollo de competencias que establece el *currículo de Andalucía*.

Este doble recorrido, del objeto matemático al sujeto que aprende, nos permitirá transformar nuestra visión de la enseñanza del campo multiplicativo. El objetivo final es trascender la mera instrucción de procedimientos para convertirnos en arquitectos de experiencias de aprendizaje que cultiven en nuestro futuro alumnado un razonamiento multiplicativo flexible, potente y, sobre todo, lleno de sentido.

8.2 Aspectos Epistemológicos y Matemáticos: La Estructura del Pensamiento Multiplicativo

Una vez que el alumnado ha construido un primer edificio conceptual sobre la adición y la sustracción, se abre la puerta a un universo de relaciones numéricas mucho más complejo y potente: el *campo multiplicativo*. Antes de sumergirnos en cómo enseñar la multiplicación y la división, es indispensable dar un paso atrás y actuar como matemáticos y epistemólogos. Debemos desentrañar la estructura profunda de estas operaciones.

Esta labor no es un mero ejercicio académico. Como futuros docentes, comprender la naturaleza y la riqueza de significados del pensamiento multiplicativo es la condición indispensable para poder guiar al alumnado más allá de la mera mecanización de algoritmos. Un docente que comprende esta estructura puede diseñar problemas más ricos, interpretar los errores de su alumnado con mayor profundidad y, en definitiva, transformar la enseñanza de unas “recetas” en una auténtica construcción de sentido

(Vergnaud, 1983).

En esta sección, exploraremos el *saber sabio*: qué es la multiplicación y la división desde sus fundamentos, qué lógicas las sustentan y qué variedad de situaciones del mundo real son capaces de modelizar. Este conocimiento es el pilar sobre el que se edificará toda la práctica didáctica posterior.

8.2.1 ¿Qué es la Multiplicación? Múltiples Significados y Contextos Fundacionales

En el campo aditivo, las acciones de “juntar” o “quitar” son intuiciones muy potentes y directas. Sin embargo, el campo multiplicativo es conceptualmente más diverso y abstracto. Un mismo símbolo, $\times$, representa ideas y acciones que, en el mundo real, son radicalmente distintas. Si un estudiante solo asocia la multiplicación con una única idea, su capacidad para resolver problemas quedará severamente limitada.

Nuestra primera tarea como docentes es, por tanto, ampliar nuestra propia visión y comprender la multiplicación en sus múltiples facetas. Lejos de ser una única idea, la multiplicación es una familia de conceptos interrelacionados. A continuación, analizamos los cuatro significados fundamentales que justifican su existencia y su enorme potencia para modelizar la realidad (Godino et al., 2004).

Clave Didáctica: Los Cuatro Rostros de la Multiplicación

Para construir una comprensión robusta del campo multiplicativo, es fundamental que el alumnado explore y conecte cuatro significados o contextos fundamentales:

1. *Suma Repetida (Grupos Iguales)*: La base aditiva, útil para contar objetos discretos.
2. *Modelo Rectangular (Área)*: La base geométrica, clave para la propiedad distributiva y para medir magnitudes continuas.
3. *Comparación Multiplicativa (Factor de Escala)*: La base relacional, esencial para el pensamiento proporcional.
4. *Producto Cartesiano (Combinatoria)*: La base abstracta, que generaliza el concepto a la combinación de diferentes magnitudes.

Nuestra labor como docentes es asegurar que la enseñanza transite por estos cuatro contextos, evitando que la multiplicación quede anclada únicamente en el primero.

8.2.1.1 Suma Repetida (Modelo de Grupos Iguales): El Punto de Partida Natural

Este es el significado más intuitivo y la puerta de entrada natural al campo multiplicativo, ya que conecta directamente con el campo aditivo. La multiplicación se presenta como una forma eficiente de realizar una suma de sumandos iguales.

- *Descripción*: Una cantidad se repite¹ un número determinado de veces. Involucra

¹Obsérvese que el concepto de suma de esos números repetidos se considera de forma implícita. Se ha mantenido la redacción para equipararla con la intuición y la expresión habitual, pero, como

tres elementos: el número de grupos, el tamaño de cada grupo (la cantidad que se repite) y el total.

- *Didáctica*: Es el primer modelo que debe trabajarse en el aula, ya que permite al alumnado anclar el nuevo concepto en un conocimiento ya consolidado (la suma). Sirve para construir las tablas de multiplicar y para introducir la idea de que la multiplicación hace los cálculos más rápidos y eficientes.
- *Modelos Clave*: Agrupamientos con material manipulativo (policubos, fichas), disposición en *arrays* (filas y columnas) y secuencias de saltos en la recta numérica.

Ejemplo:

Problema: En una huevera hay 3 filas de 4 huevos cada una. ¿Cuántos huevos hay en total?

Modelización: Esta situación se puede representar como la suma repetida $4+4+4$, que a su vez se expresa de forma más eficiente con la multiplicación $3 \times 4 = 12$ (Figura 8.1).

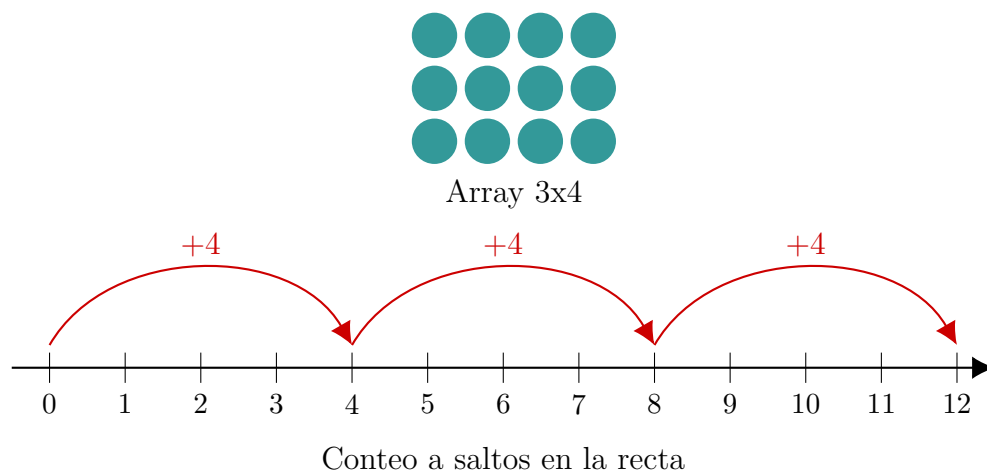


Figura 8.1: Representación del modelo de suma repetida mediante un array y en la recta numérica.

8.2.1.2 Modelo Rectangular (Modelo de Área): La Clave para la Propiedad Distributiva

Este modelo representa un salto conceptual. La multiplicación no solo sirve para contar objetos discretos en grupos, sino también para medir magnitudes continuas, como una superficie. Esta interpretación es el punto de conexión entre la Medida que con la Aritmética.

- *Descripción*: La multiplicación $a \times b$ se representa como el área de un rectángulo de dimensiones a y b . El resultado es el número de unidades cuadradas que cubren dicha superficie.

matemáticos, debería ser explicitada la operación implícita: la suma

- *Didáctica*: Es un modelo potentísimo y fundamental. Permite visualizar de forma concreta y evidente dos propiedades clave de la multiplicación: la *conmutativa* (al girar el rectángulo, el área no cambia) y, sobre todo, la *distributiva*, que es el pilar de todos los algoritmos de multiplicación.
- *Modelos Clave*: Papel cuadriculado, geoplanos, o la construcción de rectángulos con bloques multibase.

Clave Didáctica: El Modelo de Área para Visualizar la Propiedad Distributiva

El modelo de área no es simplemente “un ejemplo más” de la multiplicación. Es, posiblemente, la herramienta conceptual más importante que tiene el docente para enseñar los algoritmos con significado. Al descomponer un rectángulo en partes más pequeñas, el alumnado puede *ver* la propiedad distributiva en acción. Se trabajará estos conceptos en próximos apartados (la propiedad distributiva en la página 413).

8.2.1.3 Comparación Multiplicativa (Factor de Escala): La Idea de «Veces Más Que»

En este contexto, la multiplicación no representa una cantidad total, sino una relación de comparación entre dos cantidades.

- *Descripción*: Una cantidad es “tantas veces más grande” o “tantas veces menor” que otra. La multiplicación (o división) actúa como un factor de escala que aumenta o disminuye la cantidad de referencia.
- *Didáctica*: Este significado es vital para el desarrollo del pensamiento proporcional, un pilar de las matemáticas en etapas posteriores. Introduce un lenguaje específico (“el doble”, “el triple”, “la mitad”, “un tercio”) que debe ser trabajado explícitamente. La dificultad radica en que la estructura es relacional, no aditiva (una comparación de “cuánto más” se resolvería con una resta).
- *Modelos Clave*: Diagramas de barras (Modelo de Singapur) y regletas de Cuisenaire.

Ejemplo: La comparación multiplicativa con modelo de barras

Problema: Ana tiene 5 cromos y su hermano Juan tiene el triple. ¿Cuántos cromos tiene Juan?

Modelización: La cantidad de Ana (5) es la referencia. La cantidad de Juan es el resultado de aplicar el factor de escala “triple” ($\times 3$) a la referencia. La operación es $5 \times 3 = 15$ (Figura 8.2).

8.2.1.4 Producto Cartesiano (Contexto Combinatorio): El Salto a la Abstracción

Este es el significado más abstracto y el que rompe de manera definitiva con la idea de la multiplicación como una simple suma repetida. Aquí, la multiplicación sirve para contar las posibilidades al combinar elementos de diferentes conjuntos.

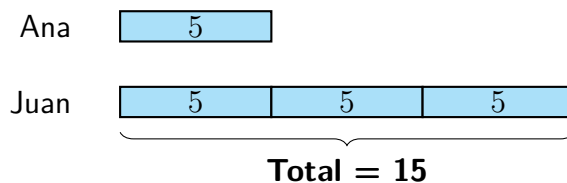


Figura 8.2: Modelización de un problema de comparación multiplicativa (“el triple de 5”) con Diagramas de barras (modelo de Singapur). Con regletas de Cuissenaire sería equivalente.

- *Descripción:* Dados dos o más conjuntos, la multiplicación calcula el número total de combinaciones posibles que se pueden formar tomando un elemento de cada conjunto.
- *Didáctica:* Es fundamental para mostrar que la multiplicación no siempre involucra la repetición de una misma unidad. Aquí se operan magnitudes de naturaleza distinta (ej. camisetas y pantalones) para obtener una nueva magnitud (combinaciones de ropa). Su enseñanza es clave para evitar que el alumnado desarrolle una concepción demasiado restringida de la operación.
- *Modelos Clave:* Tablas de doble entrada y diagramas de árbol.

Profundizando: El Salto Conceptual del Producto Cartesiano

La razón por la que este modelo es tan importante es que obliga a un cambio en el tipo de razonamiento. En la suma repetida (3 bolsas de 4 manzanas), operamos sobre una única magnitud (manzanas). En el producto cartesiano (3 camisetas y 4 pantalones), operamos sobre dos magnitudes distintas para generar una tercera magnitud (posibles combinaciones de vestimenta). Señala Vergnaud (1983) que esta es la estructura que verdaderamente define el campo multiplicativo. Ignorarla es dejar la comprensión del alumnado incompleta.

Ejemplo: Combinaciones Posibles en un Menú

Problema: En la heladería podemos elegir entre 3 tipos de cono (grande, normal, pequeño) y 4 sabores de helado (vainilla, fresa, limón, turrón). ¿Cuántos helados diferentes de un solo sabor podemos pedir?

Modelización: No podemos “sumar los conos 4 veces”. La solución viene de combinar cada tipo de cono con cada sabor, lo que se modeliza con la operación $3 \times 4 = 12$. Una tabla de doble entrada haría visibles todas las combinaciones (Figura: 8.3).

8.2.2 La Multiplicación: Definición Formal y Propiedades

Una vez explorados los diversos contextos y situaciones que dan origen a la multiplicación, es fundamental que, como futuros docentes, demos un paso más para comprender su estructura matemática formal. Este conocimiento no es un mero formalismo académico; es el motor que unifica todos los significados vistos anteriormente y justifica cada una de las estrategias y algoritmos que enseñaremos en el aula. Dominar esta

	Vainilla	Fresa	Limón	Turrón
Grande	(G, V)	(G, F)	(G, L)	(G, T)
Normal	(N, V)	(N, F)	(N, L)	(N, T)
Pequeño	(P, V)	(P, F)	(P, L)	(P, T)

Tabla de Doble Entrada

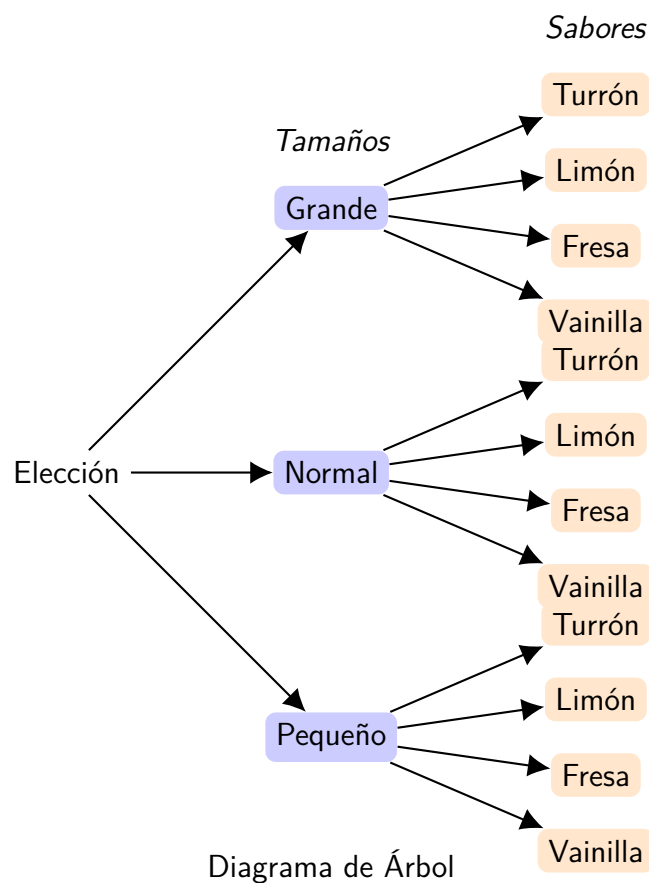


Figura 8.3: Modelización de un problema de producto cartesiano (3×4). Arriba, la tabla de doble entrada muestra los pares ordenados de cada combinación. Debajo, el diagrama de árbol visualiza el proceso secuencial de elección.

estructura nos proporciona la seguridad y la flexibilidad necesarias para guiar al alumnado más allá de la simple memorización de reglas, hacia una comprensión relacional y profunda del pensamiento multiplicativo (Godino et al., 2004).

8.2.2.1 Definición Formal de la Multiplicación

Aunque en la escuela introducimos la multiplicación como una suma repetida, su definición matemática formal es más amplia y potente, y nace del concepto de *producto cartesiano*.

Profundizando: El Producto Cartesiano como Fundamento de la Multiplicación

La multiplicación de dos números naturales, $n = \text{card}(A)$ y $a = \text{card}(B)$, se define formalmente como el cardinal de su producto cartesiano:

$$n \cdot a = \text{card}(A \times B)$$

Aunque esta definición no se enseña en Primaria, es la razón última por la que la multiplicación funciona en todos sus contextos. Explica por qué para calcular el número de combinaciones posibles entre 3 tamaños de helado y 4 sabores (problema de producto cartesiano) o para hallar el área de un rectángulo de 3×4 (problema de área), la operación que resuelve ambas situaciones es, precisamente, 3×4 . Este conocimiento dota al docente de una visión completa y coherente del concepto, superando la limitación de la suma repetida.

Para la práctica escolar en Educación Primaria, esta definición formal se concreta en un modelo mucho más intuitivo y accesible, que sirve como punto de partida: la *suma de sumandos iguales*.

Clave Didáctica: a Suma Repetida como Puente al Campo Multiplicativo

Dados dos números naturales, n y a , se llama multiplicación de n por a (y se denota $n \cdot a$) al resultado de sumar n veces el número a :

$$n \cdot a = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ veces}}$$

Esta definición es el puente natural desde el campo aditivo al multiplicativo. Es fundamental, sin embargo, recordar que es solo uno de los significados de la multiplicación, y no el único.

8.2.2.2 Propiedades de la Multiplicación

Las propiedades de las operaciones no son un listado de reglas abstractas que el alumnado deba memorizar, sino que son las “reglas del juego” que hacen que el cálculo mental flexible y los algoritmos sean posibles. Nuestra labor como docentes es crear situaciones donde estas propiedades emerjan de forma natural y su utilidad se haga evidente.

- *Ley de Composición Interna:* El producto de dos números naturales es siempre otro número natural. Esto garantiza que cuando multiplicamos, el resultado “no se sale” del conjunto de los números naturales.
- *Propiedad Conmutativa:* El orden de los factores no altera el producto.

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Mini-Caso de Aula: Descubriendo la Conmutatividad con el Modelo de Array

La propiedad conmutativa es una de las primeras grandes ideas que el alumnado puede descubrir. En lugar de enunciarla como una regla, podemos proponer una tarea visual.

Tarea: Representa 3 filas de 5 fichas cada una (3×5). Ahora, sin añadir ni quitar ninguna ficha, gira el tablero 90 grados. ¿Cuántas filas y cuántas fichas por fila tienes ahora? (Figura 8.4).

Descubrimiento: El alumnado *ve* que la cantidad total de fichas no ha cambiado, pero la organización sí: ahora son 5 filas de 3 fichas (5×3). La acción de girar el *array* (disposición rectangular) es la encarnación física de la propiedad conmutativa. Didácticamente, es la justificación más potente y memorable.

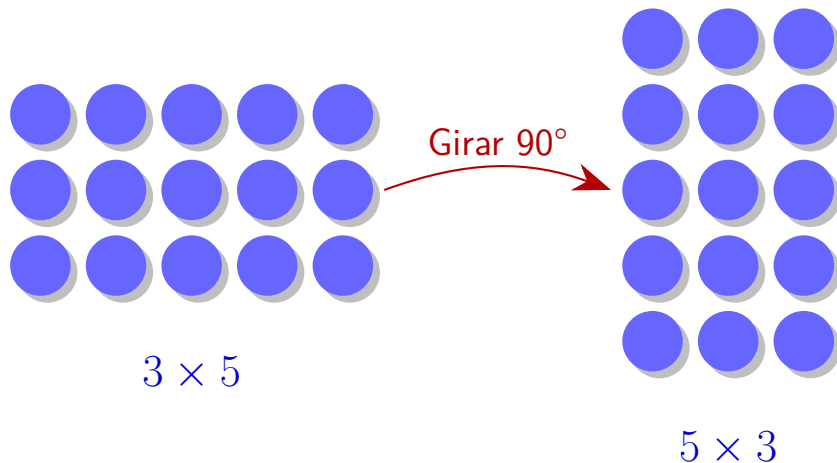


Figura 8.4: Visualización de la propiedad conmutativa con un *array* de monedas de 3×5 . La misma disposición se consigue girando todo el conjunto 90

- *Propiedad Asociativa:* La forma de agrupar los factores no altera el producto².

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

²Observa que los tres operandos conservan el orden. No cambian sus posiciones. Sólo cómo se agrupan. La conmutatividad de la multiplicación asegura que no importa el orden, pero el objetivo de esta propiedad es el orden en que se realiza las operaciones, no el orden de los operandos.

Esta propiedad es la base de muchas estrategias de cálculo mental. Por ejemplo, para calcular 25×12 , podemos pensar en $25 \times (4 \times 3)$ y reagruparlo como $(25 \times 4) \times 3 = 100 \times 3 = 300$.

En la Figura 8.5 se puede encontrar una “demostración gráfica intuitiva” de esta propiedad.

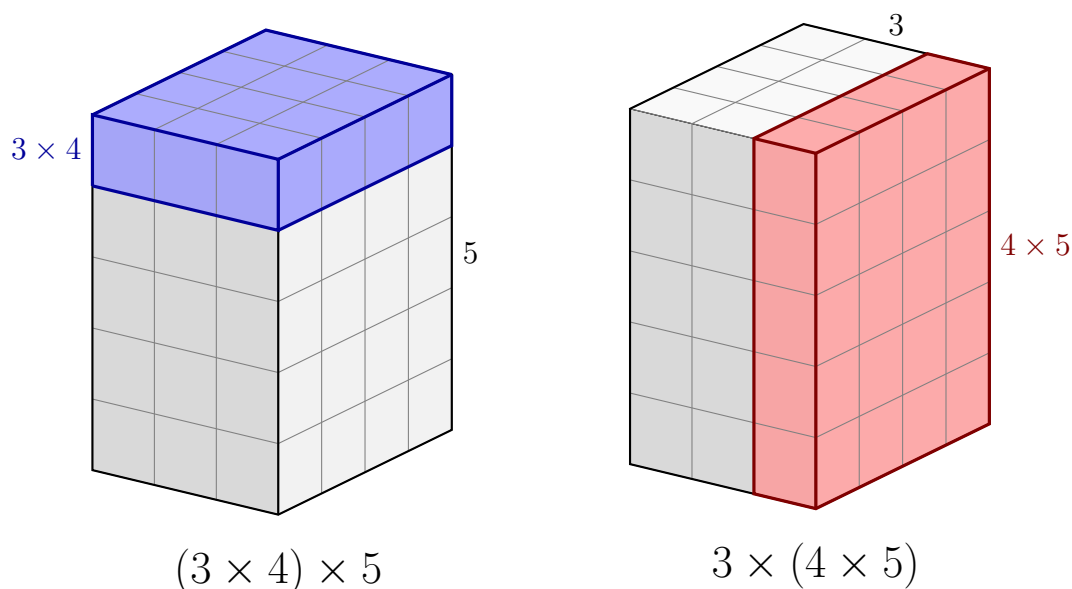


Figura 8.5: Visualización de la propiedad asociativa con un prisma de $3 \times 4 \times 5$. El mismo volumen total puede calcularse agrupando los factores de dos maneras: como 5 capas de (3×4) o como 3 “lonchas” de (4×5) .

- *Elemento Neutro*: El número 1 es el elemento neutro de la multiplicación. Cualquier número multiplicado por 1 es el mismo número.

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

- *Propiedad Distributiva del producto respecto de la suma*: Esta es, quizás, la una de las propiedades más importantes para la didáctica de la aritmética, ya que es el motor que hace funcionar muchos algoritmos de la multiplicación.

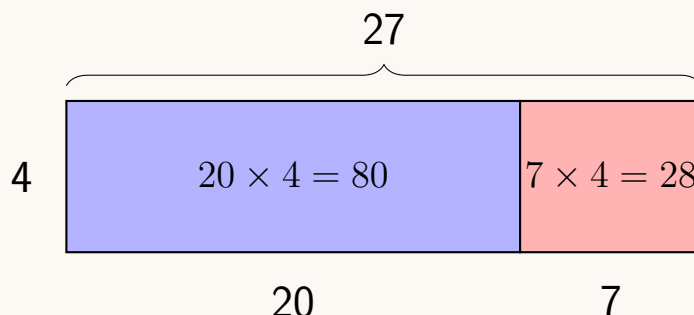
$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

Profundizando: La Propiedad Distributiva como ADN del Algoritmo

La propiedad distributiva no es solo una regla más; es el motor que hace funcionar el algoritmo de la multiplicación que usamos habitualmente. Cuando un estudiante de 3º de Primaria calcula 27×4 , el algoritmo tradicional le enseña a hacer dos multiplicaciones separadas (4×7 y 4×2) y luego a componer los resultados con una “llevada”. Este proceso puede parecer un truco mágico.

Sin embargo, el modelo de área revela que este algoritmo es, en realidad,

una aplicación directa y elegante de la propiedad distributiva. Al calcular el área de un rectángulo de 27×4 , lo que hacemos es:



1. *Descomponer*: Rompemos el 27 en sus partes de valor posicional: $20 + 7$.
2. *Distribuir*: Multiplicamos cada parte por 4. Esto es equivalente a calcular el área de dos rectángulos más pequeños: uno de 20×4 y otro de 7×4 .
3. *Componer*: Sumamos las áreas parciales: $(20 \times 4) + (7 \times 4) = 80 + 28 = 108$.

El algoritmo tradicional es simplemente una forma compacta de registrar este proceso. La “llevada” no es más que una notación para la decena que surge del producto de las unidades ($28 \rightarrow 2$ decenas y 8 unidades). Comprender esta conexión transforma el algoritmo de una receta a un procedimiento con profundo sentido matemático.

8.2.3 ¿Qué es la División? El Desafío de los Múltiples Significados

Si la multiplicación se presenta como un concepto multifacético, la división eleva aún más el nivel de complejidad conceptual. A menudo se la considera la operación aritmética más difícil de enseñar y aprender en Primaria, y no es por casualidad. La dificultad no reside tanto en el algoritmo, sino en la riqueza y, a veces, ambigüedad de su significado. Mientras que la multiplicación puede partir de una idea inicial relativamente unificada como la suma repetida, la división se bifurca desde su origen en dos significados fundamentales que representan acciones y preguntas radicalmente distintas en el mundo real (Vergnaud, 1983).

Para el futuro docente, comprender esta dualidad es el primer paso indispensable para una enseñanza eficaz de la división. Ignorarla y reducir la división a una única idea (generalmente, la de “repartir”) es crear una comprensión incompleta en el alumnado, que fracasará al enfrentarse a problemas que no se ajusten a ese único modelo. Nuestra labor es, por tanto, explorar y construir ambos significados.

8.2.3.1 División Partitiva (Reparto Equitativo): ¿Cuánto para cada uno?

Este es el significado más intuitivo y familiar de la división. La acción que subyace es la de *distribuir o repartir* una cantidad total de objetos en un número conocido de grupos, de forma que todos los grupos tengan la misma cantidad.

En una situación partitiva, conocemos dos datos y buscamos un tercero:

- *Conocemos* la cantidad total de elementos a repartir (el dividendo).
- *Conocemos* el número de grupos entre los que se reparte (el divisor).
- *Buscamos* la cantidad de elementos que hay en cada grupo (el cociente).

La pregunta clave que responde este tipo de división es: «¿cuánto corresponde a cada grupo/parte?».

Mini-Caso de Aula: El significado partitivo de la división

Problema: «Tenemos 12 galletas y las queremos repartir en partes iguales entre 3 amigos. ¿Cuántas galletas le tocan a cada amigo?»

Acción concreta: Un niño o niña que resuelve este problema de forma manipulativa (fase enactiva de Bruner) cogería las 12 galletas y empezaría a “echar” una a cada amigo, luego una segunda ronda, y así sucesivamente, hasta agotar todas las galletas. Al final, contaría cuántas galletas tiene cada amigo en su montón.

Modelización matemática: Esta acción de reparto se simboliza con la operación $12 \div 3 = 4$. El resultado, 4, responde a la pregunta sobre el *tamaño de cada parte*.

8.2.3.2 División Cuotitiva (Agrupamiento o Medida): ¿Cuántos grupos formamos?

Este segundo significado es menos intuitivo para el alumnado, pero igualmente fundamental. La acción que subyace aquí no es repartir, sino *agrupar* o *medir*. Consiste en determinar cuántos grupos de un tamaño determinado se pueden formar a partir de una cantidad total.

En una situación cuotitiva, la información se distribuye de manera diferente:

- *Conocemos* la cantidad total de elementos (el dividendo).
- *Conocemos* la cantidad de elementos que debe tener cada grupo (el divisor).
- *Buscamos* el número de grupos que podemos formar (el cociente).

La pregunta clave que responde este tipo de división es: «¿cuántos grupos se pueden hacer?» o «¿cuántas veces cabe una cantidad en otra?».

Mini-Caso de Aula: El significado cuotitivo de la división

Problema: «Tenemos 12 galletas y queremos hacer paquetes de 3 galletas cada uno. ¿Cuántos paquetes podemos hacer?»

Acción concreta: Un niño o niña que resuelve este problema de forma manipulativa realizaría una acción muy diferente a la anterior. Cogería el montón de 12 galletas y formaría un grupo de 3, luego otro grupo de 3, y así sucesivamente, hasta que no pudiera formar más grupos. Al final, contaría cuántos grupos ha formado.

Modelización matemática: Esta acción de agrupamiento se simboliza con la misma operación, $12 \div 3 = 4$. Sin embargo, el resultado, 4, responde a una pregunta completamente distinta sobre el *número de grupos*.

Clave Didáctica: La Pregunta como Clave de los Significados de la División

El mayor desafío y, a la vez, la mayor riqueza de la división, es que una única expresión simbólica ($12 \div 3 = 4$) modeliza dos acciones y dos preguntas radicalmente distintas.

- *Partitiva (Reparto)*: La incógnita es el *tamaño del grupo*. La pregunta es “¿cuánto para cada uno?”.
- *Cuotitiva (Agrupamiento)*: La incógnita es el *número de grupos*. La pregunta es “¿cuántos grupos hay?”.

Como futuros docentes, nuestra misión es asegurar que el alumnado se enfrente a problemas de ambos tipos. Limitar la enseñanza de la división a problemas de reparto crea una comprensión frágil y sesgada. El alumnado debe descubrir, a través de la experiencia con problemas variados, que la división es una herramienta potente que sirve tanto para repartir como para agrupar (Chamorro, 2003/2006). Esta flexibilidad conceptual es un pilar del verdadero sentido numérico.

8.2.4 La Relación de Divisibilidad y la División Exacta

Una vez comprendidos los significados de la división como reparto o agrupamiento, es importante formalizar una idea fundamental que el alumnado experimenta constantemente: a veces el reparto es perfecto, sin que sobre nada, y a veces no.

Mini-Caso de Aula: Descubriendo la Divisibilidad

Un docente de 3º de Primaria plantea: «*En nuestra clase somos 24. ¿Podemos formar equipos de 4 para el torneo de baloncesto sin que sobre nadie? ¿Y si los equipos fueran de 5? ¿Por qué?*»

Esta sencilla situación de aprendizaje no pide “hacer una división”. Pide explorar una *relación* entre los números 24, 4 y 5. El alumnado, manipulando fichas o dibujando, descubrirá que la relación entre 24 y 4 es “exacta”, mientras que la relación entre 24 y 5 no lo es. Acaban de descubrir, sin saberlo, la idea de divisibilidad.

8.2.4.1 Definiciones en el contexto de la división exacta

Esta es la primera formalización y la más fundamental: la conexión inseparable entre la división y la multiplicación.

Una división exacta es la operación inversa de la multiplicación.

Esto significa que preguntar «¿cuánto es $24 \div 6$?» es matemáticamente equivalente a preguntar «¿qué número multiplicado por 6 nos da 24?». Esta relación se expresa formalmente como:

$$D \div d = c \quad \Leftrightarrow \quad D = d \times c$$

Donde D es el *dividendo*, d es el *divisor* y c es el *cociente*.

Clave Didáctica: La Relación Inversa como Principio Estructural

Esta relación inversa no es solo una definición, es una de las herramientas didácticas más potentes que poseemos. Permite:

- *Comprobar resultados:* La famosa “prueba de la división” no es un truco, sino la aplicación directa de su definición.
- *Construir las tablas de dividir a partir de las de multiplicar:* Entender que saber $3 \times 4 = 12$ implica saber $12 \div 3 = 4$ y $12 \div 4 = 3$ transforma la memorización en una red de relaciones.
- *Resolver problemas de incógnita:* Muchos problemas multiplicativos son, en esencia, divisiones “disfrazadas” (ej. $? \times 5 = 30$).

Nuestra labor es hacer explícita esta conexión desde el principio, usando modelos como los *arrays* o los diagramas de familia de operaciones (fact-family houses).

Ejemplo práctico: El modelo de área para visualizar la división

El modelo de área no solo es potente para la multiplicación, sino también para entender la división como la búsqueda del factor perdido.

- *Problema:* Quiero colocar 24 baldosas cuadradas formando un rectángulo. Si uno de los lados debe medir 4 baldosas, ¿cuánto medirá el otro lado?
- *Modelización:* Esto se traduce en encontrar el lado desconocido de un rectángulo cuya área es 24 y uno de sus lados es 4. La pregunta es: $4 \times ? = 24$.
- *Visualización:*



La división $24 \div 4$ es la búsqueda de la longitud del lado que falta.

- *Conclusión:* La división $24 \div 4$ no es una operación abstracta, sino la respuesta a una pregunta geométrica. Esta visualización refuerza la conexión $D = d \times c$.

Profundizando: Las Familias de Operaciones (Fact Families)

Uno de los mayores obstáculos en el aprendizaje de la aritmética es que el alumnado memoriza los “hechos numéricos” (como $3 \times 5 = 15$ y $15 \div 3 = 5$) como si fueran piezas de información aisladas e inconexas. Esto genera una enorme carga

cognitiva y una comprensión frágil.

Para combatir esta visión fragmentada, una de las herramientas didácticas más potentes es el trabajo con *familias de operaciones* (en inglés, *fact families*). Una familia de operaciones, en este caso, es el conjunto de cuatro enunciados matemáticos (dos de multiplicación y dos de división) que conectan a tres números: dos factores y un producto (Van de Walle & Bay-Williams, 2018).

El potencial pedagógico de esta herramienta, tal y como señalan autores como Carpenter et al. (1999), es inmenso:

- *Hace visible la relación inversa*: Es su mayor fortaleza. El alumnado *ve* que la división no es una operación nueva, sino una forma diferente de pensar en una multiplicación que ya conoce. Entiende que $15 \div 3$ es una pregunta: «¿Qué número, multiplicado por 3, me da 15?».
- *Fomenta el pensamiento algebraico temprano*: Introduce de manera intuitiva la idea de resolver incógnitas. La estructura $a \times b = c$ se presenta como una relación donde, conociendo dos elementos, se puede hallar el tercero.
- *Reduce la carga memorística*: En lugar de memorizar cientos de hechos numéricos aislados, el alumnado aprende estructuras relacionales interconectadas, lo cual es cognitivamente mucho más eficiente y duradero.

La meta no es que el alumnado “rellene casas”, sino que interiorice que las operaciones no viven solas, sino en familias.

La *división exacta* no es una operación en el sentido de que siempre ofrezca un resultado numérico. Es, más bien, un *test de relación* entre dos números. Responde a la pregunta: ¿Existe una relación multiplicativa entera entre estos dos números? La respuesta es un “sí” o un “no”. Cuando la respuesta es afirmativa, decimos que los números están emparentados por una *relación de divisibilidad*, y para describir este parentesco usamos un vocabulario específico: múltiplo y divisor.

Definición de Múltiplo y Divisor. Dados dos números naturales a y b , si la división $a \div b$ es exacta (es decir, su resto es cero), entonces:

- Decimos que a es *múltiplo de* b , porque a contiene un número exacto de “grupos de b ”.
- Decimos que b es *divisor de* a , porque b puede “dividir” a a en partes iguales.

Ambas afirmaciones son dos formas de expresar la misma relación estructural: $a = b \cdot k$ para algún número natural k .

Profundizando: El Eco de los Pitagóricos: La División como Relación y Medida

La idea de la división como una relación, y no solo como una operación, tiene profundas raíces históricas. Para los matemáticos de la Grecia Antigua, como los pitagóricos, el concepto de “número” estaba intrínsecamente ligado a la idea de una colección de unidades. La cuestión fundamental no era tanto “cuánto da la

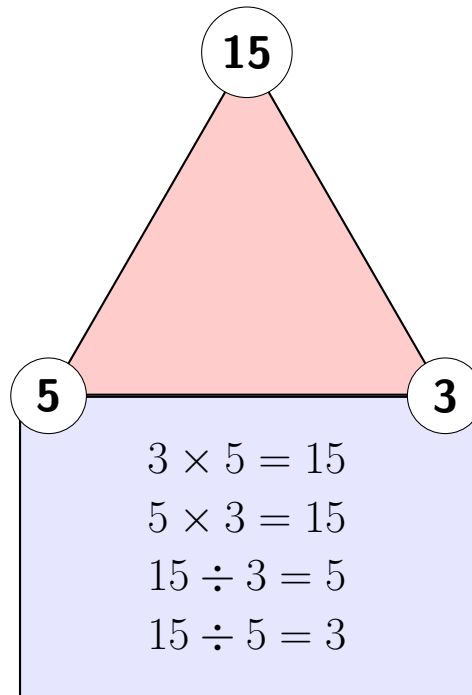


Figura 8.6: Diagrama de una “Familia de Operaciones” para los números 3, 5 y 15. La “casa” muestra visualmente que los tres números del tejado generan las cuatro operaciones del cuerpo.

división”, sino “¿puede el número menor *medir* al mayor?”.

Decir que 3 es divisor de 12 era equivalente a decir que la longitud 3 “mide” exactamente a la longitud 12, pues cabe un número entero de veces. Esta concepción geométrica es la base de la Teoría de la Proporción de Euclides y subyace a toda la aritmética griega (Heath, 1921). Cuando en el aula promovemos la idea de la división como una relación de “encajar perfectamente”, estamos conectando con una de las ideas más fértiles de la historia del pensamiento matemático.

Clave Didáctica: El Modelo de Área para Visualizar la Divisibilidad

La idea de divisor se conecta de forma natural y visual con el modelo de área. Los divisores de un número son las posibles dimensiones de los rectángulos que se pueden formar con esa cantidad de cuadrados unitarios (Figura 8.7). Esta representación concreta es fundamental en Primaria para que los conceptos de múltiplo y divisor no sean meras definiciones a memorizar.

8.2.4.2 Propiedades de la División Exacta

Como relación, la división exacta tiene propiedades estructurales muy distintas a las de la suma o la multiplicación. Comprenderlas ayuda al docente a anticipar dificultades y a diseñar tareas que las hagan evidentes.

- *No es ley de composición interna*: No siempre existe un resultado natural para

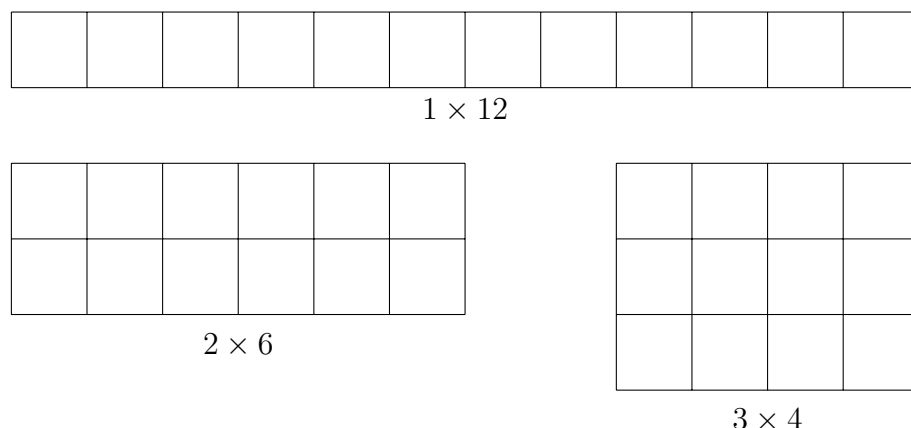


Figura 8.7: Los divisores de 12 (1, 2, 3, 4, 6, 12) como las dimensiones de los posibles rectángulos.

$a \div b$ (ej. $7 \div 2$).

Traducción Didáctica: Esta es la propiedad que da origen a la división entera. Es la razón por la que “a veces sobra”.

- *No es conmutativa:* Si la división $a \div b$ existe, la división $b \div a$ generalmente no (ej. $6 \div 2 = 3$, pero $2 \div 6$ no es exacta en $\mathbb{N}$).

Traducción Didáctica: Es vital que el alumnado comprenda a través de problemas de reparto y agrupamiento que el rol del dividendo (total a repartir) y del divisor (tamaño o número de grupos) no son intercambiables.

- *No es asociativa:* $(16 \div 4) \div 2 = 4 \div 2 = 2$, mientras que $16 \div (4 \div 2) = 16 \div 2 = 8$.

Traducción Didáctica: Esta propiedad rara vez se trabaja explícitamente, pero subyace a la necesidad de usar paréntesis para clarificar el orden en operaciones combinadas.

- *Propiedad distributiva respecto a la suma:* Si a y b son múltiplos de n , entonces $(a + b)$ es múltiplo de n . $(a + b) \div n = (a \div n) + (b \div n)$.

Traducción Didáctica: Esta es la propiedad que fundamenta muchas estrategias de cálculo mental para la división. Por ejemplo, para calcular $84 \div 4$, es mucho más fácil pensar en $(80 \div 4) + (4 \div 4) = 20 + 1 = 21$.

- *Propiedad fundamental del producto:* Para dividir un producto por un número, basta con dividir uno de los factores: $(a \cdot b) \div n = (a \div n) \cdot b$.

Traducción Didáctica: Esta propiedad es la base de las estrategias de simplificación. Por ejemplo, para calcular $(18 \times 5) \div 9$, en lugar de hacer $90 \div 9$, es más fácil hacer $(18 \div 9) \times 5 = 2 \times 5 = 10$.

8.2.4.3 Números Primos y Compuestos: Los Ladrillos de la Aritmética

Una vez que entendemos la divisibilidad a través del modelo de área (Figura 8.7), surge una pregunta fascinante: ¿todos los números pueden formar múltiples rectángulos distintos? Si exploramos el número 12, vemos que es “rico” en divisores y, por tanto, en rectángulos. Pero, ¿qué ocurre con un número como el 7? Descubrimos que solo podemos formar un rectángulo de 1×7 . Esta distinción da lugar a una de las

clasificaciones más importantes de los números naturales.

- **Número Primo:** Es un número natural mayor que 1 que tiene únicamente dos divisores distintos: él mismo y el 1. En el modelo de área, un número primo es aquel que solo puede representarse con un único tipo de rectángulo (una “línea” de $1 \times n$). Ejemplos: 2, 3, 5, 7, 11, 13...
- **Número Compuesto:** Es un número natural que tiene más de dos divisores. En el modelo de área, un número compuesto es aquel que puede representarse con más de un tipo de rectángulo. Ejemplo: 12 (1×12 , 2×6 , 3×4).

Esta idea culmina en el *Teorema Fundamental de la Aritmética*, que establece que todo número compuesto puede expresarse de forma única como un producto de números primos. Los números primos son, en esencia, los “ladrillos” o “átomos” con los que se construyen todos los demás números.

Anclaje Histórico: La Criba de Eratóstenes

Eratóstenes de Cirene (s. III a.C.), un brillante matemático, astrónomo y geógrafo griego, ideó un método ingenioso y visual para encontrar todos los números primos hasta un cierto límite. Este algoritmo, conocido como la *Criba de Eratóstenes*, funciona de la siguiente manera:

1. Se escribe una lista de todos los números naturales desde el 2 hasta un número N .
2. Se empieza por el primer número, el 2, y se tachan todos sus múltiplos (4, 6, 8...).
3. Se pasa al siguiente número no tachado, el 3, y se tachan todos sus múltiplos (6, 9, 12...).
4. Se repite el proceso. El siguiente número no tachado es el 5, tachamos sus múltiplos.
5. Los números que sobreviven al final del proceso (que no han sido tachados) son los números primos.

Esta actividad es un excelente recurso para el aula, ya que permite al alumnado construir activamente el concepto de número primo de una forma visual y exploratoria.

8.2.4.4 Máximo Común Divisor (MCD) y Mínimo Común Múltiplo (mcm)

Estos dos conceptos son aplicaciones directas de las ideas de divisor y múltiplo para resolver problemas que involucran dos o más números. Es fundamental introducirlos a través de contextos que revelen su utilidad.

- **Máximo Común Divisor (MCD):** Es el mayor de los divisores comunes a dos o más números. Responde a problemas de agrupamiento o división.

Ejemplo práctico: El obrador de dulces (Problema de MCD)

Un obrador ha hecho 12 roscos de vino y 18 mantecados. Quiere hacer paquetes iguales que sean lo más grandes posible, conteniendo ambos dul-

ces, y sin que sobre ninguno. ¿Cuántos dulces habrá en cada paquete y cuántos paquetes saldrán?

Análisis: Buscamos un número que sea divisor de 12 y de 18 a la vez, y que sea el más grande posible.

- Divisores de 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12.
- Divisores de 18: 1, 2, 3, 6, 9, 18.
- Divisores comunes: 1, 2, 3, 6.
- El Máximo Común Divisor es 6.

Solución: Cada paquete tendrá 6 dulces. Se podrán hacer 2 paquetes de rosos (12:6) y 3 de mantecados (18:6), un total de 5 paquetes.

Un concepto relacionado es el de *números primos entre sí* (o coprimos), que son aquellos cuyo MCD es 1. Por ejemplo, 8 y 9.

- **Mínimo Común Múltiplo (mcm):** Es el menor de los múltiplos comunes (distinto de cero) a dos o más números. Responde a problemas de coincidencia o ciclos.

Ejemplo práctico: Los autobuses (Problema de mcm)

Un autobús de la línea A pasa por una parada cada 4 minutos y uno de la línea B pasa cada 6 minutos. Si acaban de coincidir ambos en la parada, ¿cuánto tiempo pasará hasta que vuelvan a coincidir?

Análisis: Buscamos el primer momento en el futuro (el primer múltiplo) en que los tiempos de ambos coincidan.

- Múltiplos de 4: 4, 8, 12, 16, 20, 24...
- Múltiplos de 6: 6, 12, 18, 24, 30...
- Múltiplos comunes: 12, 24...
- El Mínimo Común Múltiplo es 12.

Solución: Volverán a coincidir dentro de 12 minutos.

Clave Didáctica: Significado antes que Algoritmo para MCD y mcm

En Educación Primaria, el objetivo fundamental no es que el alumnado domine el algoritmo de descomposición en factores primos para calcular el MCD y el mcm. Ese es un objetivo de la Educación Secundaria. La meta en Primaria es que *comprendan conceptualmente* qué es cada uno y en qué tipo de situaciones son útiles.

El método de *listar los divisores y los múltiplos*, aunque es menos eficiente para números grandes, es *conceptualmente transparente*. Permite al alumnado construir el significado de “común” y de “máximo/mínimo” de forma directa. Es el puente indispensable hacia una comprensión futura de los algoritmos más formales.

8.2.5 La Operación de División Entera

Mientras que la división exacta es un test de relación, la *división entera* es una *operación universal*. Nace como respuesta a una necesidad fundamental: ¿qué hacemos cuando la división no es exacta? Si tengo 23 caramelos para repartir entre 4 amigos, la relación de divisibilidad me dice “no se puede”. Pero la realidad exige una respuesta.

La genialidad de la división entera es que siempre funciona (para un divisor no nulo) y siempre produce un resultado. En lugar de dar un único número, nos da un par de números: un *cociente* y un *resto*. Responde a la pregunta práctica: *Si agrupo una cantidad (dividendo) en grupos de un tamaño determinado (divisor), ¿cuántos grupos completos puedo formar y cuánto me sobra?*

8.2.5.1 Definición de la división entera: El Teorema Fundamental de la División.

Esta operación se sustenta en uno de los pilares de la aritmética, conocido como el Algoritmo de la División o Teorema de la División Entera. Su esencia fue formalizada hace más de dos milenios en los *Elementos* de Euclides (Libro VII, Propositiones 1 y 2), sentando las bases de toda la teoría de números (Euclides, sobre el 300. a.C/2016). El teorema establece que para cualesquiera dos números naturales, un *Dividendo* (D) y un *Divisor* (d) con $d \neq 0$, existen y son *únicos* un *Cociente* (c) y un *Resto* (r) tales que:

$$D = d \cdot c + r, \quad \text{donde } 0 \leq r < d$$

La condición $0 \leq r < d$ es la pieza clave que garantiza la unicidad de la solución. Sin ella, una misma división podría tener infinitas respuestas.

o

Profundizando: La Unicidad como Garantía

El teorema garantiza que el cociente y el resto son *únicos*. Esto es de vital importancia, pues asegura que la operación de división entera tiene un resultado bien definido y consistente, sin ambigüedades. No importa el método o algoritmo que se utilice (restas sucesivas, tradicional, ABN...), si se realiza correctamente, el cociente y el resto final serán siempre los mismos. Esta consistencia es lo que convierte a la división en una herramienta fiable.

Mini-Caso de Aula: Construyendo el Significado del Resto

Un alumno resuelve $23 \div 5$ y responde: «Le doy 3 a cada uno y me sobran 8».

Análisis: La respuesta del alumno no es matemáticamente incorrecta ($23 = 5 \cdot 3 + 8$), pero no es la solución de la división entera. Ha fallado en la condición de que el resto debe ser el mínimo posible (y menor que el divisor).

Intervención Didáctica (guiada por el teorema): El docente no dice “está mal”.

Pregunta: «Te han sobrado 8. Con esos 8, ¿podrías seguir repartiendo a tus 5 amigos?». El alumno se da cuenta de que sí, puede dar uno más a cada uno. La acción de seguir repartiendo hasta que ya no es posible hacerlo más es la encarnación del principio matemático $r < d$. La “mejor” respuesta es aquella en

la que el resto es lo más pequeño posible, lo que la hace única.

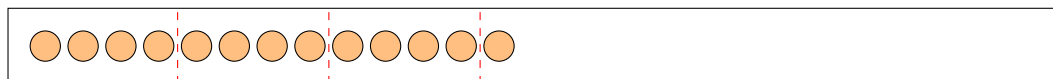
8.2.5.2 Propiedades de la División Entera

Las propiedades de esta operación se centran en cómo se comportan el cociente y el resto ante transformaciones. Lejos de ser reglas abstractas, son la base de la estimación y el cálculo mental con divisiones.

- *Invarianza del Cociente (Propiedad Fundamental)*: Si se multiplica (o divide en caso exacto) el dividendo y el divisor por un mismo número no nulo, el *cociente no varía*, pero el resto queda multiplicado (o dividido) por ese mismo número (Figura 8.8).

$$D \div d \rightarrow (c, r) \implies (D \cdot k) \div (d \cdot k) \rightarrow (c, r \cdot k)$$

$$13 \div 4 \implies c = 3, r = 1$$



$$(13 \times 2) \div (4 \times 2) = 26 \div 8 \implies c = 3, r = 2$$

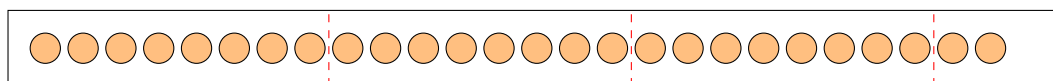


Figura 8.8: Visualización de la invarianza del cociente. Al duplicar tanto la cantidad total como el tamaño de los grupos, el número de grupos (cociente) no cambia, pero el sobrante (resto) también se duplica.

Clave Didáctica: La Didáctica de la Propiedad Fundamental

La invarianza del cociente no es una curiosidad matemática, es el fundamento de una de las estrategias de cálculo más importantes. Es la propiedad que justifica por qué podemos “simplificar” divisiones.

- *Con números naturales*: Permite transformar $100 \div 20$ en una división más simple como $10 \div 2$.
- *Con números decimales (futuro aprendizaje)*: Es la razón por la que, para resolver $15,5 \div 0,5$, podemos multiplicar ambos por 10 y resolver $155 \div 5$. No es un “truco de mover la coma”, es la aplicación de una propiedad estructural de la división.

Trabajar esta propiedad en Primaria con números naturales (ej. “¿Da lo mismo repartir 20 euros entre 10 personas que 2 euros entre 1 persona?”) sienta las bases para una comprensión profunda y relacional del cálculo futuro.

- *Alteración del Dividendo*: Si se multiplica el dividendo por un número, el cociente y el resto también quedan multiplicados por ese número.

Traducción Didáctica: Esta propiedad es muy intuitiva y útil para la estimación. Si para repartir 20 euros entre 5 personas tocan a 4 euros, para repartir el doble de dinero (40 euros) entre las mismas personas, tocará el doble (8 euros).

- *Alteración del Divisor:* Si se multiplica el divisor por un número, el cociente queda dividido por ese número (si la división es exacta).

Traducción Didáctica: Esta propiedad es menos intuitiva pero muy potente. Si reparto 24 caramelos entre 2 amigos, tocan a 12. Si duplico el número de amigos (lo reparto entre 4), cada uno recibirá la mitad de caramelos (6).

8.2.6 La Riqueza Semántica: Clasificación de Problemas Multiplicativos

Una vez comprendida la arquitectura formal de la multiplicación y la división (sus definiciones y propiedades), debemos dar un paso importante: explorar el vasto universo de situaciones del mundo real que estas operaciones son capaces de modelizar. Un error histórico en la enseñanza de la aritmética ha sido reducir la multiplicación a la idea de «suma repetida». Si bien es un punto de partida intuitivo y necesario, quedarse anclado en él limita severamente la capacidad del alumnado para resolver problemas y construir un pensamiento matemático potente.

El psicólogo y matemático francés Gérard Vergnaud nos ofrece el marco teórico más robusto para comprender esta complejidad a través de su Teoría de los Campos Conceptuales. Vergnaud (1983, 1997) postula que un concepto matemático no adquiere su pleno significado por su definición formal, sino a través del conjunto de *situaciones* cuyo dominio permite. El campo multiplicativo, por tanto, es el conjunto de todas las situaciones que pueden ser analizadas y resueltas mediante la multiplicación y la división.

Nuestra labor como docentes es guiar al alumnado a través de este territorio, ayudándole a reconocer la *estructura multiplicativa* subyacente en problemas aparentemente distintos. Esto implica superar la trampa de las «palabras clave» para aprender a identificar las relaciones entre las cantidades. A continuación, presentamos una clasificación de problemas multiplicativos, adaptada de los trabajos de Vergnaud y otros investigadores de referencia, que debe ser una herramienta fundamental en la planificación didáctica del futuro docente.

Profundizando: El Campo Conceptual Multiplicativo

La clasificación de problemas que se presenta a continuación no es un simple catálogo de ejercicios. Es el corazón de la *Teoría de los Campos Conceptuales* del matemático y psicólogo francés Gérard Vergnaud (1983). Su idea es revolucionaria: un concepto matemático no se define solo por su nombre (ej. “multiplicación”), sino por el *conjunto de situaciones y problemas* que le dan sentido.

Según Vergnaud, un campo conceptual tiene tres componentes:

- Un conjunto de *situaciones y problemas* que dan significado al concepto.
- Un conjunto de *conceptos y propiedades* que nos permiten pensar sobre esas situaciones (como la proporcionalidad o la conmutatividad).
- Un conjunto de *formas de representarlo* (con símbolos, palabras o dibujos).

Esta teoría nos ayuda a entender por qué los diferentes tipos de problemas multiplicativos, aunque parezcan distintos, pertenecen a una misma “familia” conceptual. Se distinguen principalmente dos grandes estructuras de pensamiento:

- *Relación entre dos medidas (Razón Simple)*: Aquí pensamos en una relación *de uno a muchos* entre dos tipos de cosas (ej. cajas y lápices). Es como una “máquina de escalar”: si metes el doble de cajas, sacas el doble de lápices. La relación es *lineal y predecible*. Es la idea de la suma repetida.
- *Composición de dos medidas (Producto Cartesiano)*: Aquí, *combinamos* dos tipos de cosas para crear un *tercer tipo de cosa nueva*. Combinamos ‘camisetas’ y ‘pantalones’ para crear ‘conjuntos de ropa’. La multiplicación aquí no escala una cantidad, sino que genera un nuevo espacio de posibilidades.

Implicación Didáctica: Nuestra labor no es solo enseñar a “calcular”, sino presentar al alumnado una rica variedad de situaciones que muestren los diferentes “poderes” de la multiplicación. Un estudiante que solo conoce la multiplicación como suma repetida se quedará bloqueado ante un problema de combinatoria. Al exponerlo a todas estas situaciones, no estamos enseñando “tipos de problemas”; estamos construyendo, pieza a pieza, el *Campo Conceptual Multiplicativo*.

A. Problemas de Razón Simple (Grupos Iguales). Son los problemas más directos e intuitivos. Se establece una relación constante entre dos magnitudes. Hay tres elementos en juego: el número de grupos (N), el tamaño de cada grupo (la razón o tasa, R) y el total (T). La relación entre las tres cantidades se rige por una relación multiplicativa:

$$N \times R = T$$

Tipo de Problema	Estructura / Incógnita	Ejemplo de Aula
Multiplicación	Total desconocido $N \times R = ?$	«En una huevera hay 3 filas de 4 huevos cada una. ¿Cuántos huevos hay en total?»
División Partitiva (Reparto)	Tamaño del grupo desconocido $N \times ? = T$	«Tenemos 24 lápices y queremos repartirlos en 4 estuches, de manera que en cada estuche haya el mismo número. ¿Cuántos lápices habrá en cada estuche?»
División Cuotitiva (Agrupamiento)	Número de grupos desconocido $? \times R = T$	«Tenemos 24 lápices y queremos hacer paquetes de 6 lápices cada uno. ¿Cuántos paquetes podemos hacer?»

Clave Didáctica: Relevancia de los problemas de Razón Simple

Esta familia de problemas es el punto de partida ideal para introducir la multiplicación como suma repetida y la división. Es vital trabajar explícitamente la diferencia entre la división partitiva (repartir) y la cuotitiva (agrupar), ya que las acciones que realizan los discentes para resolverlas son muy distintas. Aunque el cociente resultante sea equivalente, la semántica que representan no lo es. El modelo de *arrays* (disposiciones rectangulares) es una herramienta visual

excelente para representar esta estructura.

B. Problemas de Comparación Multiplicativa. En estos problemas, una cantidad se compara con otra mediante un factor escalar (un multiplicador). Los tres elementos son: la *cantidad de referencia* (R), la *cantidad comparada* (C) y el *factor de escala* o razón (S).

La estructura matemática y, por tanto, la operación necesaria para resolver el problema, depende de cuál de los tres elementos es la incógnita y de la naturaleza de la comparación.

- **Comparación de Aumento:** La cantidad comparada es “tantas veces *mayor*” que la de referencia. La relación fundamental es:

$$C = R \times S$$

- **Comparación de Disminución:** La cantidad comparada es “tantas veces *menor*” que la de referencia. La relación fundamental es:

$$C = R \div S \quad \text{o, equivalentemente,} \quad R = C \times S$$

Esta dualidad genera seis tipos de problemas, como se muestra en la siguiente tabla:

A. Comparación de AUMENTO (veces más que...)		
Multiplicación	Cantidad Comparada $R \times S = ?$	«Luis tiene 8 años. Su padre tiene 5 veces más edad que Luis. ¿Cuántos años tiene el padre?»
División (Partitiva)	Cantidad de Referencia $? \times S = C$	«El padre de Luis tiene 40 años, y tiene 5 veces más edad que Luis. ¿Cuántos años tiene Luis?»
División (Cuotitiva)	Factor de Escala $R \times ? = C$	«Luis tiene 8 años y su padre 40. ¿Cuántas veces es mayor el padre que Luis?»
B. Comparación de DISMINUCIÓN (veces menos que...)		
División	Cantidad Comparada $R = ? \times S$	«El padre de Luis tiene 40 años. Luis tiene 5 veces menos edad. ¿Cuántos años tiene Luis?»
Multiplicación	Cantidad de Referencia $? = C \times S$	«Luis tiene 8 años, que son 5 veces menos que la edad de su padre. ¿Cuántos años tiene el padre?»
División (Cuotitiva)	Factor de Escala $R = C \times ?$	«El padre de Luis tiene 40 años y Luis tiene 8. ¿Cuántas veces es menor Luis que su padre?»

Ejemplo: El Peligro de las Palabras Clave

Tomemos uno de los problemas más complejos de la tabla, donde la estrategia de “palabras clave” conduce inevitablemente al error:

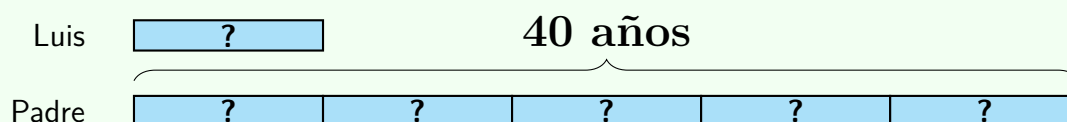
«El padre de Luis tiene 40 años, y tiene 5 veces más edad que Luis.

¿Cuántos años tiene Luis?»

Un alumno con una comprensión instrumental, al leer la palabra “**más**”, podría intentar sumar $(40 + 5)$ o multiplicar (40×5) . Un docente enfocado en la estructura guiaría al alumnado a visualizar el problema antes de operar.

Paso 1: Identificar las partes. ¿Quién es la referencia (el bloque unidad)? Luis. ¿Quién es la cantidad comparada? El padre. ¿Cuál es la relación? La edad del padre es “5 veces” la de Luis.

Paso 2: Dibujar el modelo de barras.



Paso 3: De la visualización a la operación. Al observar el diagrama, la pregunta cambia. Ya no es “¿qué hago con 40 y 5?”. Ahora es: *«Si 5 bloques iguales valen 40, ¿cuánto vale un solo bloque?»*. El modelo ha transformado un problema de comparación multiplicativa en un problema de *reparto equitativo* (división partitiva). La operación emerge del análisis visual:

$$40 \div 5 = 8$$

La edad de Luis (el valor de un bloque) es 8 años.

Clave Didáctica: El Poder del Modelo de Barras

La clasificación anterior revela por qué la estrategia de buscar “palabras clave” es tan perjudicial. Un problema puede contener la palabra “más” y resolverse con una división (como acabamos de ver). Otro puede contener la palabra “menos” y resolverse con una multiplicación (ej. “Luis tiene 8 años, que son 5 veces menos que la edad de su padre”).

Nuestra labor como docentes es enseñar al alumnado a *analizar la estructura relacional* de la situación, en lugar de cazar palabras aisladas. El *Modelo de Barras* es la herramienta gráfica ideal para visualizar estas relaciones, identificar qué cantidad es el todo y cuáles son las partes, y elegir la operación correcta basándose en la comprensión y no en un truco frágil.

C. Problemas de Producto de Medidas (Producto Cartesiano). Estos problemas representan el mayor salto conceptual dentro del campo multiplicativo. Implican la combinación de elementos de dos o más conjuntos (medidas) para formar un nuevo conjunto de pares o combinaciones únicas (una nueva medida). Rompen por completo con la idea de la multiplicación como simple suma repetida.

Profundizando: El Salto Conceptual del Producto Cartesiano

La razón por la que este modelo es tan importante es que obliga a un cambio en el tipo de razonamiento. En la suma repetida (3 bolsas de 4 manzanas), operamos sobre una única magnitud (manzanas). En el producto cartesiano (3 camisetas y 4 pantalones), operamos sobre dos magnitudes distintas para generar una tercera (posibles combinaciones de vestimenta).

Esta estructura, formalizada por René Descartes en el siglo XVII, es la que da nombre al concepto. Señala Vergnaud (1983) que esta es la estructura que verdaderamente define el campo multiplicativo como un espacio de relaciones entre magnitudes. Ignorarla es dejar la comprensión del alumnado incompleta y sin preparación para conceptos futuros como el área, el volumen o la probabilidad.

La siguiente tabla presenta los dos tipos básicos de problemas de esta familia:

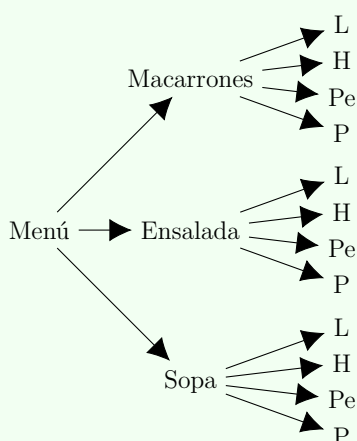
Tipo de Problema	Estructura / Incógnita	Ejemplo de Aula
Multiplicación	Total de combinaciones desconocido. $M_1 \times M_2 = ?$	«En el menú del día, podemos elegir entre 3 primeros platos y 4 segundos platos. ¿Cuántos menús diferentes podemos componer?»
División	Número de elementos de un conjunto desconocido. $M_1 \times ? = \text{Total}$	«Con 3 pantalones diferentes, puedo hacer 12 combinaciones de ropa distintas. ¿Cuántas camisetas tengo?»

Mini-Caso de Aula: Modelizando las Combinaciones del Menú

Un docente presenta el primer problema: «Tenemos 3 primeros (Sopa, Ensalada, Macarrones) y 4 segundos (Pollo, Pescado, Huevo, Lentejas). ¿Cuántos menús podemos crear?». Un alumno podría intentar sumar $3 + 4 = 7$, una respuesta incorrecta pero lógica desde una perspectiva aditiva.

Intervención Didáctica: El docente no da la solución, sino que guía la modelización. «Vamos a asegurarnos de que no nos dejamos ninguna combinación. ¿Cómo podríamos organizarlo para estar seguros?»

	Pollo	Pescado	Huevo	Lentejas
Sopa	(S,P)	(S,Pe)	(S,H)	(S,L)
Ensalada	(E,P)	(E,Pe)	(E,H)	(E,L)
Macarrones	(M,P)	(M,Pe)	(M,H)	(M,L)



Descubrimiento: Al usar la tabla, el alumnado ve una rejilla de 3×4 y puede contar las 12 celdas. Con el árbol, ve que de cada una de las 3 ramas iniciales salen otras 4, lo que les lleva a la idea de “3 veces 4”. Las representaciones visuales revelan la estructura multiplicativa y justifican el uso de la operación $3 \times 4 = 12$.

Clave Didáctica: Importancia del Modelo de Área

El modelo de área, que es fundamental para entender los algoritmos, es un caso particular del producto de medidas donde las dos magnitudes que se combinan son de longitud (largo y ancho) para generar una nueva magnitud, el área. Introducir problemas de producto cartesiano con conjuntos discretos (ropa, menús, helados) es el puente didáctico perfecto para que, más adelante, la fórmula del área del rectángulo (base x altura) tenga un significado profundo y no sea una simple receta a memorizar.

D. El Resto como Protagonista: La División en Contexto

Mini-Caso de Aula: Interpretando el Resto en Contexto

Un docente plantea a su clase: «Para el campamento, necesitamos transportar a 23 estudiantes en furgonetas. En cada furgoneta caben 5 estudiantes. Haced la división y decidme la respuesta». Un grupo calcula $23 \div 5 = c : 4, r : 3$ y responde: «4, sobran 3». Otro grupo, sin embargo, responde: «Necesitamos 5 furgonetas». Ambos han realizado el mismo cálculo, pero solo el segundo grupo ha resuelto el problema. Este ejemplo ilustra que, en la vida real, la resolución de un problema de división no termina al calcular el cociente y el resto; culmina al *interpretar* esos números en el contexto del problema.

La interpretación del resto es una habilidad de modelización matemática tan importante como la del cociente, y dependiente del problema. Un mismo cálculo, como $23 \div 5$ (cociente 4, resto 3), puede tener cuatro soluciones diferentes, dependiendo de la pregunta que el contexto nos haga (Figura 8.9).

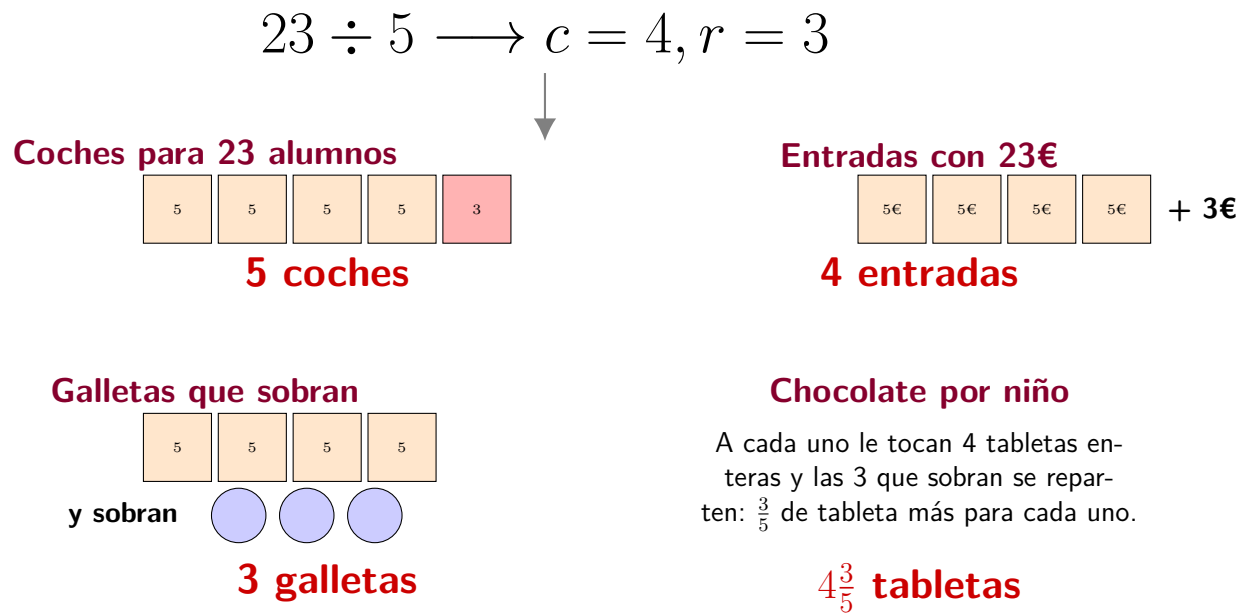


Figura 8.9: Cuatro problemas con distinto tratamiento del resto en la misma división

Profundizando: La Interpretación del Resto, del Currículo Explícito al Oculto

El currículo oficial (el *explícito*) nos pide enseñar el algoritmo de la división. Sin embargo, el *currículo oculto* de las matemáticas (las habilidades de pensamiento que realmente importan) nos exige enseñar a interpretar los resultados.

Un alumno que solo sabe calcular $23 \div 5$ tiene una habilidad instrumental y frágil. Un alumno que sabe decidir si la solución a un problema es 4, 5, 3 o $4\frac{3}{5}$ ha desarrollado un verdadero *sentido numérico* y una auténtica *competencia para la modelización*. Nuestra labor como docentes es dar más importancia a este segundo currículo, dedicando tiempo de aula a discutir y comparar problemas donde el resto juegue diferentes papeles.

En definitiva, la labor docente va más allá de enseñar a ejecutar la operación. Implica presentar al alumnado este rico abanico de situaciones, dotarle de herramientas para visualizarlas y ayudarle a construir un concepto de multiplicación y división flexible, potente y conectado con la realidad.

8.2.7 Un Abanico de Algoritmos: De la Historia a la Práctica

Los algoritmos de cálculo son una de las invenciones más extraordinarias de la humanidad. Lejos de ser meras “recetas” o “trucos” para obtener un resultado, son la cristalización de un profundo conocimiento sobre la estructura de nuestro sistema de numeración y las propiedades de las operaciones. Son, en esencia, *tecnologías del pensamiento* que nos permiten resolver familias enteras de problemas de forma eficiente y garantizada.

En la enseñanza tradicional, a menudo se presenta un único algoritmo (el “tradicional”) como la única forma correcta de operar. Sin embargo, este enfoque empobrece

la comprensión matemática y puede generar una visión de la aritmética como un conjunto de reglas arbitrarias y carentes de significado.

El objetivo de esta sección no es que el futuro docente entrene a su alumnado en todos estos métodos. La meta es triple:

1. *Construir un conocimiento profundo del contenido (PCK)*: Comprender que el algoritmo tradicional es solo una de muchas formas posibles de operar, y que su eficiencia a menudo oculta los principios matemáticos que lo sustentan (como la propiedad distributiva).
2. *Desarrollar una visión histórica y cultural*: Entender los algoritmos como soluciones ingeniosas a problemas reales, desarrolladas por diferentes culturas a lo largo de la historia. Esto humaniza las matemáticas.
3. *Disponer de un repertorio de puentes didácticos*: Muchos de estos algoritmos, especialmente los extendidos y visuales, son más transparentes que el tradicional. Actúan como herramientas didácticas excepcionales para construir el significado del valor posicional y de las propiedades de las operaciones, antes de pasar a métodos más compactos y eficientes.

Explorar este abanico de algoritmos transforma al docente de un mero “instructor de recetas” en un verdadero “arquitecto de la comprensión”.

8.2.7.1 Algoritmos para la Multiplicación

Algoritmo Extendido o por Descomposición

- *Fundamento Matemático*: Es la aplicación directa y transparente de la *propiedad distributiva* y el concepto de *valor posicional*. Se descomponen ambos factores en sus unidades de orden (centenas, decenas, unidades) y se multiplican todos los términos entre sí, para finalmente sumar los productos parciales.
- *Ejemplo Práctico*: Para calcular 434×36 :

$$\begin{aligned} 434 \times 36 &= (400 + 30 + 4) \times (30 + 6) \\ &= (400 \times 30) + (400 \times 6) + (30 \times 30) + (30 \times 6) + (4 \times 30) + (4 \times 6) \\ &= 12000 + 2400 + 900 + 180 + 120 + 24 \\ &= 15624 \end{aligned}$$

Una forma organizada de registrarlo sería:

$$\begin{array}{r}
 \times \quad 434 \\
 \hline
 24 \quad (6 \times 4) \\
 180 \quad (6 \times 30) \\
 2400 \quad (6 \times 400) \\
 120 \quad (30 \times 4) \\
 900 \quad (30 \times 30) \\
 + 12000 \quad (30 \times 400) \\
 \hline
 15624
 \end{array}$$

Clave Didáctica: El Algoritmo Extendido como Puente a la Comprensión

Fortalezas: Es el algoritmo más transparente. Hace explícito el valor posicional de cada cifra y la aplicación de la propiedad distributiva. Refuerza el sentido numérico y es casi imposible aplicarlo de forma mecánica sin comprenderlo.

Implicación Didáctica: Es el puente conceptual indispensable entre el cálculo mental y el algoritmo tradicional. Permite construir el significado antes de pasar a la mecanización.

Algoritmo Abreviado Tradicional

- *Fundamento Matemático:* Es una versión compacta y altamente eficiente del algoritmo extendido. La “llevada” es una notación económica para registrar las reagrupaciones de un orden al orden superior inmediato.
- *Ejemplo Práctico:* Para calcular 434×36 :

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{array} \\
 \times \quad \begin{array}{ccc} 4 & 3 & 4 \\ & 3 & 6 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{cccc} & 2 & 6 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \end{array} \leftarrow \begin{array}{l} \text{Producto } 434 \times 6 \\ \text{Producto } 434 \times 30 \\ \text{(desplazado un lugar)} \end{array} \\
 \hline
 1 \ 5 \ 6 \ 2 \ 4
 \end{array}$$

Clave Didáctica: Análisis del Algoritmo Tradicional de Multiplicación

Fortalezas: Su principal virtud es la eficiencia y la rapidez una vez que se ha automatizado.

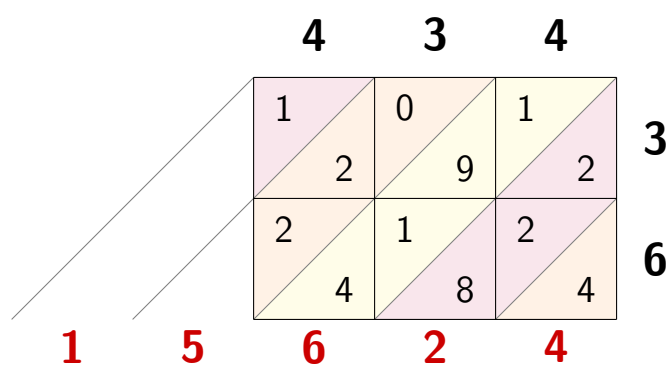
Riesgos y Debilidades: Es conceptualmente opaco. Si se enseña de forma directa, oculta el valor posicional real de los números y la “llevada” se convierte en un truco mágico sin significado, siendo una fuente recurrente de errores.

Implicación Didáctica: Nunca debe ser el punto de partida. Debe ser el punto de

llegada de una secuencia didáctica que comience con la manipulación (modelo de área) y pase por el algoritmo extendido.

Algoritmo de la Celosía (o Gelosia)

- *Contexto Histórico:* De origen hindú, fue introducido en Europa por los árabes y popularizado en el Renacimiento por matemáticos como Luca Pacioli.
- *Fundamento Matemático:* Es una organización visual de los productos parciales. Separa completamente el proceso de multiplicación del de suma, lo que reduce la carga cognitiva.
- *Ejemplo Práctico:* Para calcular 434×36 :



Clave Didáctica: El Algoritmo de Celosía como Alternativa Visual

Fortalezas: Es muy visual y sistemático. Elimina los errores con las “llevadas” durante la multiplicación, ya que la suma se realiza al final. Fomenta la organización y la atención.

Implicación Didáctica: Es una excelente alternativa para el alumnado que tiene dificultades con la organización espacial del algoritmo tradicional. También sirve para mostrar una perspectiva histórica de las matemáticas.

Retículo Chino (Modelo de Área)

- *Fundamento Matemático:* Es la representación gráfica directa de la propiedad distributiva, también conocido como modelo de área.
- *Ejemplo Práctico:* Para calcular 434×36 , se descompone cada número y se representa como las dimensiones de un rectángulo. El área total es la suma de las áreas de los rectángulos interiores.

			434		
			400	30	4
36	30	12000	900	120	
	6	2400	180	24	

Suma total: $12000 + 2400 + 900 + 180 + 120 + 24 = 15624$.

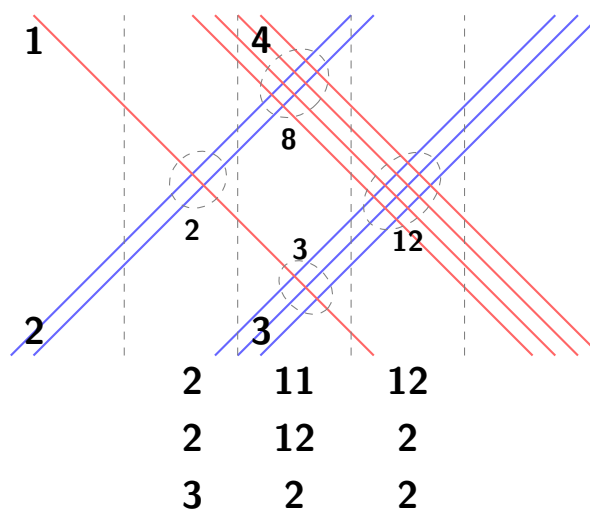
Clave Didáctica: El Retículo Chino como Modelo de Área

Fortalezas: Es la visualización más clara de la propiedad distributiva. Conecta la aritmética con la geometría (cálculo de áreas). Es muy transparente y conceptual.

Implicación Didáctica: Es una herramienta fundamental en las primeras fases de la enseñanza de la multiplicación de números de varias cifras. Permite “ver” de dónde salen los productos parciales del algoritmo extendido.

Algoritmo Gráfico Japonés (por líneas)

- *Fundamento Matemático:* Es una representación geométrica donde cada cifra se representa por un número de líneas paralelas. La multiplicación se realiza al cruzar los dos conjuntos de líneas. Los puntos de intersección, agrupados por su valor posicional, dan las cifras del resultado.
- *Ejemplo Práctico:* Para calcular 23×14 :



Clave Didáctica: El Algoritmo Japonés como Representación Kinestésica

Fortalezas: Es un método muy kinestésico, lúdico y visual. Resulta atractivo y sorprendente para el alumnado.

Debilidades: Es muy poco práctico para números con cifras altas (ej. 98×79 requeriría dibujar muchas líneas) o para números de muchas cifras.

Implicación Didáctica: No es un algoritmo para desarrollar fluidez de cálculo, sino una fantástica herramienta para la exploración, la motivación y para mostrar que existen formas muy diversas de representar las operaciones matemáticas.

Algoritmo Ruso (o Multiplicación Campesina)

- **Contexto Histórico:** Conocido como “multiplicación campesina” por su uso en zonas rurales de Rusia, su lógica ya era utilizada por los antiguos egipcios. Es un algoritmo que no requiere conocer más tablas de multiplicar que la del 2.
- **Fundamento Matemático:** Se basa en la descomposición binaria de uno de los factores. Al dividir sucesivamente por 2 y observar los restos (si el número es par o impar), estamos, en esencia, escribiendo el número en base 2. La suma final acumula los productos correspondientes a los '1' en esa descomposición binaria.
- **Ejemplo Práctico:** Para calcular 36×434 : Se crean dos columnas. En la primera se coloca el primer factor y se va dividiendo por 2 (descartando el resto) hasta llegar a 1. En la segunda columna se coloca el segundo factor y se va duplicando. Finalmente, se suman los números de la segunda columna cuyas filas corresponden a un número impar en la primera columna (aquellos que, al dividir por 2, la división no ha dado exacta).

Columna A	Columna B
36	434
18	868
9	1736
4	3472
2	6944
1	13888

Se suman los números de la Columna B que corresponden a un *número impar* en la Columna A:

$$1736 + 13888 = \mathbf{15624}$$

Clave Didáctica: El Algoritmo Ruso como Encarnación de las Propiedades

Fortalezas: Es un algoritmo que funciona y solo requiere saber dividir y multiplicar por 2, y sumar. Su lógica interna, basada en el sistema binario, es profundísima y conecta la aritmética antigua con la computación moderna.

Implicación Didáctica: Es una actividad de enriquecimiento excepcional. Permite al alumnado descubrir que se puede multiplicar sin saberse todas las tablas, valorando así la eficiencia de los métodos que ya conocen. Además, el “misterio”

de por qué funciona puede dar pie a una fascinante investigación guiada en cursos superiores.

Profundizando: Justificación Matemática del Algoritmo Ruso

El algoritmo ruso parece mágico, pero su lógica se apoya en dos de las propiedades más fundamentales de la multiplicación que ya hemos estudiado. Entender su funcionamiento es un excelente ejercicio de pensamiento matemático.

La clave está en cómo tratamos el número de la primera columna (el que dividimos) dependiendo de si es par o impar.

- *Caso 1: El número es PAR (Ej: 18×868)*

Si el número es par, podemos escribirlo como $2 \times n$. En nuestro ejemplo, $18 = 2 \times 9$. La operación es:

$$18 \times 868 = (2 \times 9) \times 868$$

Por la *propiedad asociativa*, podemos reagrupar los factores como queramos:

$$9 \times (2 \times 868) = 9 \times 1736$$

La conclusión didáctica: Dividir el factor par por 2 y duplicar el otro factor no cambia el resultado. Simplemente estamos pasando el “factor 2” de un número a otro.

- *Caso 2: El número es IMPAR (Ej: 9×1736)*

Si el número es impar, podemos escribirlo como $(2n + 1)$. En nuestro ejemplo, $9 = 8 + 1$. La operación es:

$$9 \times 1736 = (8 + 1) \times 1736$$

Por la *propiedad distributiva*, podemos separar la multiplicación:

$$(8 \times 1736) + (1 \times 1736)$$

La conclusión didáctica: Este es el corazón del algoritmo.

- El término (1×1736) es el número que *marcamos y reservamos* para la suma final.
- Con el término (8×1736) continuamos el proceso. ¿Y cómo lo hacemos? Volvemos al Caso 1, ya que 8 es par: $8 \times 1736 = 4 \times 3472$.

Aplicando los dos criterios anteriores, y utilizando notación algebraica, el cálculo

por el algoritmo ruso se puede ejemplificar como:

$$\begin{aligned}
 36 \cdot 434 &= (18 \cdot 2) \cdot 434 \\
 &= 18 \cdot (2 \cdot 434) \\
 &= 18 \cdot 868 \\
 &= (9 \cdot 2) \cdot 868 \\
 &= 9 \cdot (2 \cdot 868) \\
 &= 9 \cdot 1736 \\
 &= (4 \cdot 2 + 1) \cdot 1736 \\
 &= 4 \cdot (2 \cdot 1736) + 1736 \\
 &= 4 \cdot 3772 + 1736 \\
 &= (2 \cdot 2) \cdot 3772 + 1736 \\
 &= 2 \cdot (2 \cdot 3772) + 1736 \\
 &= 2 \cdot 6944 + 1736 \\
 &= 13888 + 1736 \\
 &= 15624
 \end{aligned}$$

Creo que es más fácil escrito en la forma propuesta ... pero esto es lo que hay por debajo.

El algoritmo ruso no es más que una aplicación encadenada y muy ingeniosa de estas dos ideas. Descompone uno de los factores en su forma binaria (suma de potencias de 2) y aplica la propiedad distributiva para calcular el producto final.

8.2.7.2 Algoritmos para la División

A diferencia de la multiplicación, donde el algoritmo tradicional está muy estandarizado, la división ha dado lugar a una mayor variedad de métodos a lo largo de la historia y en la práctica escolar actual. Esto se debe a su mayor complejidad conceptual, que involucra estimación y una relación más opaca entre el procedimiento y su significado. Presentar un abanico de algoritmos es una estrategia didáctica de primer orden para construir el sentido numérico.

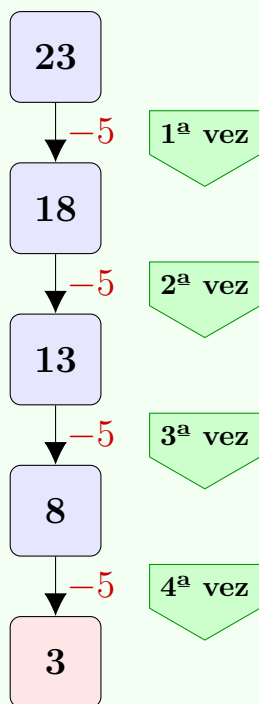
Basados en la aproximación y la resta. Estos algoritmos comparten una filosofía común: son transparentes, se conectan directamente con el significado de la división como agrupamiento (¿cuántas veces cabe el divisor en el dividendo?) y se basan en la resta. Son un puente excepcional entre el cálculo mental y los métodos más formales.

- **Restas Sucesivas:** Es el método más elemental y conectado con la acción. Para resolver $23 \div 5$, el alumnado resta 5 repetidamente y cuenta cuántas veces ha podido hacerlo.

Ejemplo: División por Restas Sucesivas

- **Nivel Básico:** $23 - 5 = 18$ (1 vez), $18 - 5 = 13$ (2 veces), $13 - 5 = 8$ (3 veces), $8 - 5 = 3$ (4 veces). No puedo restar más.

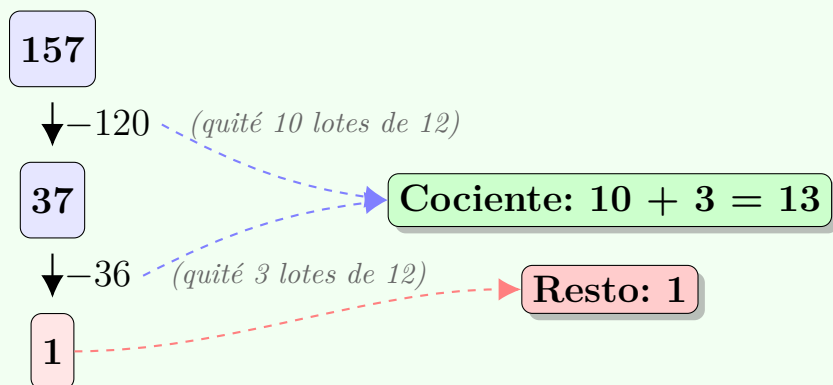
Resultado: Cociente 4 y resto 3.



Hemos podido restar 5 un total de 4 veces y nos sobran 3, que es menor que 5 y no podemos seguir restando.

Resultado:
Cociente = 4,
Resto = 3

- Nivel Avanzado (con lotes):



- Para $157 \div 12$. Pienso: ¿cuántos doces puedo quitar de golpe? Sé que $10 \times 12 = 120$. $157 - 120$ (quitó 10 doces) $\rightarrow$ quedan 37.
- Ahora de 37, ¿cuántos doces quito? Sé que $3 \times 12 = 36$. $37 - 36$ (quitó 3 doces) $\rightarrow$ queda 1.
- En total, he quitado $10 + 3 = 13$ doces.
- Resultado: Cociente 13 y resto 1.

Clave Didáctica: La Resta Sucesiva como Modelo de Agrupamiento

Este método es la encarnación del significado cuotitivo de la división. Al usar “lotes” o “paquetes” (múltiplos del divisor), se convierte en una potentísima herramienta de cálculo mental y estimación.

- *Cocientes Parciales (Partial Quotients)*: Es una forma estructurada y vertical del método de restas por lotes. Es muy popular en el mundo anglosajón por ser un puente claro hacia el algoritmo tradicional.

Ejemplo: El algoritmo de cocientes parciales

Se organiza la división de forma vertical. A la derecha se anotan los “lotes” de setes que se van restando.

7	365 - 350 50 ($50 \times 7 = 350$) 15 - 14 2 ($2 \times 7 = 14$) 1 52 <i>Suma de los cocientes parciales</i>

Cociente final = 52

Resto final = 1

Se suman los cocientes parciales: $50 + 2 = 52$. *Resultado*: Cociente 52 y resto 1.

Clave Didáctica: Flexibilidad en los Algoritmos por Aproximación

La gran ventaja de este método es su flexibilidad. Un discente puede empezar restando lotes de 10, mientras que otro más avanzado puede restar lotes de 50. Ambos llegan al mismo resultado, respetando así sus distintos niveles de dominio. Fomenta el sentido numérico y la estimación.

- *Estilo ABN (Algoritmo Abierto Basado en Números)*: Similar al anterior, pero organizado en una tabla. El alumnado descompone el dividendo y va repartiendo esas cantidades.

Ejemplo: El algoritmo ABN para la división partitiva

El proceso mental es ir repartiendo “lotes” de la cantidad total. El formato de la tabla ABN está diseñado para registrar este proceso de forma sistemática y flexible.

<i>Dividendo a repartir</i>	<i>Cociente (parcial) damos a cada uno</i>	<i>Resto (parcial) cantidad repartida</i>
785	100	$100 \times 6 = 600$
185	30	$30 \times 6 = 180$
5		
	<i>C: 130</i>	<i>R: 5</i>

Explicación del proceso:

1. *Tengo 785.* Decido repartir *100* a cada uno de los 6. He repartido $100 \times 6 = 600$. Me quedan por repartir $785 - 600 = 185$.
2. *Me quedan 185.* Decido repartir *30* a cada uno. He repartido $30 \times 6 = 180$. Me quedan por repartir $185 - 180 = 5$.
3. *Me quedan 5.* Como no puedo repartir 5 entre 6, el proceso termina.
4. *Resultado:* Sumo los cocientes parciales ($100 + 30 = 130$) y anoto el resto final (5).

Algoritmo Egipcio (o Duplicación Inversa)

- *Contexto Histórico:* Este ingenioso método, documentado en papiros como el Papiro Rhind (c. 1550 a.C.), permitía a los escribas egipcios realizar divisiones sin necesidad de tablas de multiplicar. Su poder reside en la operación más simple después de sumar: la duplicación.
- *Fundamento Matemático:* El método descompone el cociente en potencias de 2 (su representación binaria). Es la operación inversa de su método de multiplicación, buscando qué múltiplos del divisor (obtenidos por duplicación) se pueden restar del dividendo.
- *Ejemplo Práctico:* Para calcular $123 \div 12$.

Proceso para $123 \div 12$

2. Descomposición de 123

$$123 = \boxed{96} + \boxed{24} + \boxed{3}$$

Usamos los números de la columna roja para “construir” el 123. Empezamos por el mayor posible (96). Quedan $123 - 96 = 27$. Para construir 27, usamos el 24 y el 3. Nos sobran 3.

3. Resultado Final

Cociente: $2+8=10$

Resto: 3

1. Tabla de Duplicaciones

Lotes	Cantidad
1	12
2	24
4	48
8	96
16	192 (>123 , se descarta)

Clave Didáctica: Justificación del algoritmo de duplicación inversa (Ruso)

Fortalezas: Es un algoritmo que funciona siempre y solo requiere saber duplicar y sumar. Su lógica interna, basada en el sistema binario, es profundísima y conecta la aritmética antigua con la computación moderna.

Implicación Didáctica: Es una actividad de enriquecimiento excepcional. Permite al alumnado descubrir que se puede dividir sin saber las tablas de multiplicar, valorando así la eficiencia de los métodos que ya conocen. El “misterio” de por qué funciona puede dar pie a una fascinante investigación guiada en cursos superiores.

Profundizando: Justificación Matemática del Algoritmo de Duplicación Inversa

El algoritmo de duplicación inversa parece mágico, pero su lógica se apoya en dos de las propiedades más fundamentales de las matemáticas: la *propiedad distributiva* y la *representación binaria* de los números (escribir un número como suma de potencias de 2). Entender su funcionamiento es un excelente ejercicio de pensamiento matemático.

La clave está en que, al descomponer el dividendo, en realidad estamos descomponiendo el cociente en las potencias de 2 que lo forman. Usemos el ejemplo $123 \div 12$.

1. *La Tabla de Duplicación es una Herramienta Estratégica:* Cuando creamos la tabla, estamos calculando cuánto es el divisor multiplicado por las potencias de 2:

- $1 \times 12 = 12 \rightarrow 2^0 \times 12$
- $2 \times 12 = 24 \rightarrow 2^1 \times 12$

$$\blacksquare 4 \times 12 = 48 \rightarrow 2^2 \times 12$$

$$\blacksquare 8 \times 12 = 96 \rightarrow 2^3 \times 12$$

2. *Descomponer el Dividendo es Descomponer el Cociente:* Al buscar los números de la columna derecha que suman 123 (o lo más cercano), estamos encontrando la mejor forma de “construir” el dividendo usando múltiplos del divisor.

$$123 = 96 + 24 + 3$$

Esta ecuación nos dice que en 123 “caben” un grupo de 96, un grupo de 24, y sobran 3.

3. *La Magia de la Propiedad Distributiva:* Ahora, sustituimos cada número por su equivalente de la tabla.

$$123 = (8 \times 12) + (2 \times 12) + 3$$

Usando la propiedad distributiva (sacando factor común 12), podemos reescribir la ecuación:

$$123 = (8 + 2) \times 12 + 3$$

$$123 = \mathbf{10} \times 12 + \mathbf{3}$$

4. *La Conclusión:* Esta última expresión es, exactamente, la prueba de la división ($D = c \times d + r$). Hemos descubierto que el cociente es 10 y el resto es 3. El cociente (10) es la suma de los “lotes” (8 y 2) que seleccionamos en la primera columna.

En esencia, el algoritmo es un método ingenioso para encontrar la representación binaria del cociente ($10 = 8 + 2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$) y usarla para repartir el dividendo.

Algoritmo Tradicional (El Reparto por Órdenes). Es el algoritmo más extendido y eficiente, pero también el más opaco y el que más dificultades genera. Su enseñanza nunca debe ser el punto de partida, sino la culminación de un largo proceso de comprensión. Nuestra labor como docentes es transformar esta «receta» mecánica en un proceso lógico y transparente.

Clave Didáctica: El Algoritmo Tradicional como Registro de un Reparto por Órdenes

El algoritmo tradicional no es más que una forma muy organizada de realizar un reparto, empezando por las unidades de mayor valor (el dinero grande) y terminando por las más pequeñas. La clave para entenderlo es traducir su jerga:

- *Lo que decimos:* «Cojo el 4». *Lo que realmente hacemos:* «Empiezo repartiendo el valor posicional más alto: las 4 centenas».
- *Lo que decimos:* «Bajo el 5». *Lo que realmente hacemos:* «La centena que ha sobrado no se puede repartir. La reagrupa en 10 decenas y las junto

con las 5 decenas que ya tenía».

El algoritmo es el registro simbólico de un proceso de reparto y reagrupamiento que se entiende perfectamente cuando se realiza primero con material manipulativo (como los bloques multibase).

Ejemplo: Conexión entre el reparto manipulativo y el algoritmo tradicional

La pregunta que guía todo el proceso es: *¿Cómo repartir 457 euros en 3 partes iguales?*

1. *Paso 1: Reparto de las Centenas.* Empezamos por los billetes más grandes. Repartimos las 4 centenas entre 3. Toca a *1 centena* para cada parte ($1 \times 3 = 3$). Nos *sobra 1 centena*.
2. *Paso 2: Reagrupamiento y Reparto de las Decenas.* La centena que ha sobrado no puede quedarse flotando. La *reagrupamos* (la «cambiamos») por 10 decenas. Estas 10 decenas se juntan con las 5 decenas que ya teníamos, dándonos un total de *15 decenas* para repartir. Repartimos las 15 decenas entre 3. Toca a *5 decenas* para cada parte ($5 \times 3 = 15$). Nos *sobran 0 decenas*.
3. *Paso 3: Reparto de las Unidades.* Finalmente, repartimos las *7 unidades* que teníamos. Toca a *2 unidades* para cada parte ($2 \times 3 = 6$). Nos *sobra 1 unidad*.

Resultado: Cada parte recibe 1 centena, 5 decenas y 2 unidades, es decir, 152. Y ha sobrado 1 unidad. (*Cociente:* 152, *Resto:* 1).

Diagram illustrating the calculation of the determinant of a 3x3 matrix using Laplace expansion along the first column:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Intermediate steps shown:

- $4 \cdot (5 \cdot 1 - 2 \cdot 7) = 4 \cdot (-9) = -36$
- $-1 \cdot (7 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = -1 \cdot (6) = -6$
- $+1 \cdot (5 \cdot 2 - 7 \cdot 5) = 1 \cdot (-25) = -25$

Final result: $-36 - 6 - 25 = -67$

1. Reparto $4C \div 3 = 1C$.
 $1 \times 3 = 3$. **Sobra 1 Centena.**

2. Reagrupo y Reparto:
 $(1C \rightarrow 10D) + 5D = 15 \text{ Decenas.}$
 $15 \div 3 = 5.$ Sobran **0 Decenas.**

3. Reparto Unidades:
 $7 \div 3 = 2$. *Sobra 1 Unidad.*

Clave Didáctica: El Riesgo del “Cero al Cociente”

El gran peligro de este algoritmo es su enseñanza instrumental, que lleva a errores comunes como el del “cero al cociente”. Debe enseñarse siempre con apoyo de material manipulativo (bloques multibase) para que acciones como “bajar la cifra” se comprendan como un proceso de reagrupamiento de un orden a otro.

Algoritmo de la Galera (mención histórica).El algoritmo de la galera (o galera, del italiano *galea*) fue introducido en Europa por Fibonacci en el siglo XIII, aunque su

origen es árabe o indio. Fue el método estándar durante el Renacimiento. Es complejo, pero visualmente fascinante. Su nombre proviene de que el conjunto de cálculos y tachaduras se asemejaba a un barco de galera con su vela desplegada.

Profundizando: El Algoritmo de la Galera como Testimonio Histórico

No se pretende que este algoritmo se enseñe para ser usado en Primaria, pero es un recurso cultural de gran valor. Muestra al alumnado que los algoritmos son invenciones humanas que han evolucionado con el tiempo. Presentar una imagen del algoritmo y explicar su historia puede ser una actividad de enriquecimiento muy motivadora, que conecta las matemáticas con la historia y el arte. Podéis ver un ejemplo en la Figura 8.10.

Podéis encontrar este algoritmo en la Wikipedia, y es fácil ver porqué ha quedado descartado por los otros algoritmos que hemos estudiado.

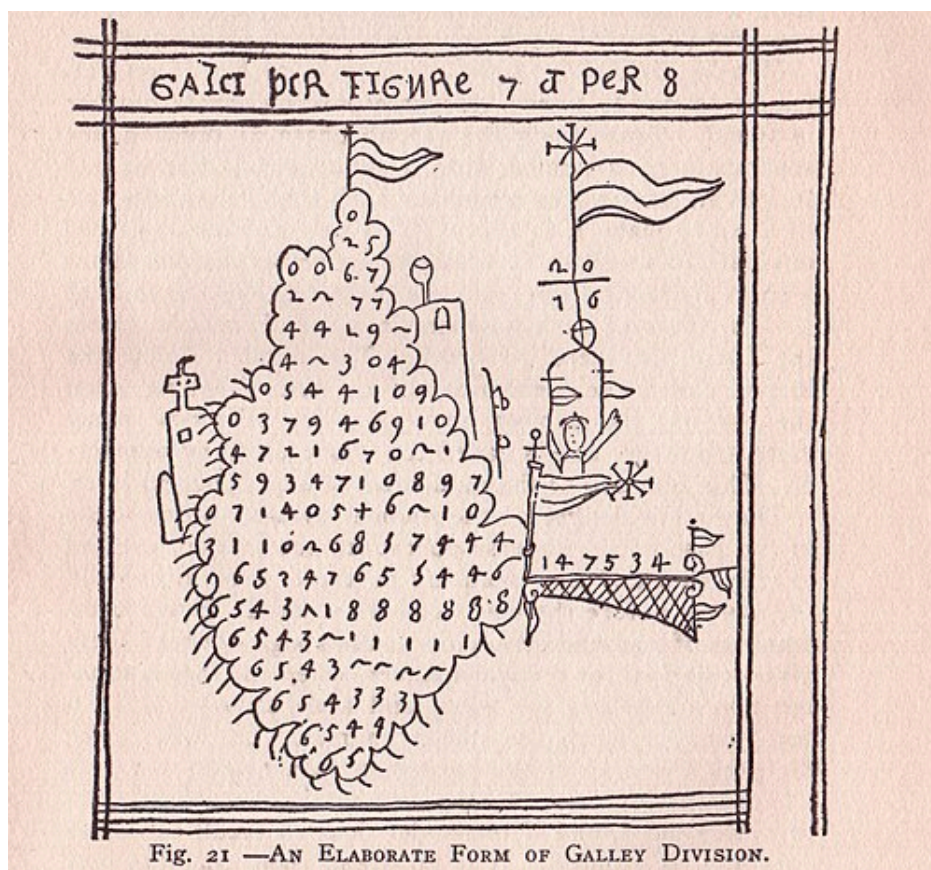


Fig. 21 —AN ELABORATE FORM OF GALLEY DIVISION.

Figura 8.10: Ejemplo del desarrollo de un algoritmo de división por el método “de la Galera”.

8.3 Aspectos Psicopedagógicos y Didácticos: Guiando la Construcción del Campo Multiplicativo

Una vez desentrañada la elegante arquitectura matemática que sustenta el campo multiplicativo, nos enfrentamos a la pregunta verdaderamente vital para nuestra labor

Tabla 8.1: Análisis Didáctico Comparativo de los Algoritmos de Multiplicación.

Algoritmo	Fortaleza Didáctica Principal	Consideración para el Aula
<i>Extendido / Retículo Chino</i>	<i>Transparencia conceptual.</i> Hace visible la propiedad distributiva y el valor posicional. Ideal para construir significado.	Es el puente indispensable entre el cálculo mental y el algoritmo tradicional. No es un fin, es un camino.
<i>Tradicional (Abreviado)</i>	<i>Eficiencia y rapidez.</i> Es el más compacto y rápido una vez automatizado.	Es muy opaco. Si se enseña sin una base conceptual sólida (construida con el extendido), se convierte en un “truco” sin sentido y es una fuente de errores.
<i>Celosía (Gelosia)</i>	<i>Visual y organizativo.</i> Separa la multiplicación de la suma, reduciendo la carga cognitiva. Excelente para alumnos con dificultades de organización.	Es menos común, pero muy útil como alternativa visual. Conecta la aritmética con la historia.
<i>Ruso (Duplicación)</i>	<i>Conexión con propiedades profundas.</i> Funciona sin saber las tablas y se basa en el sistema binario y la distributiva.	Es una fantástica actividad de enriquecimiento. Ayuda a ver las matemáticas como una ciencia creativa y no como un conjunto de reglas fijas.

docente: ¿cómo llega un niño o una niña a construir y dar sentido a esta compleja red de significados y relaciones? Si la sección anterior se centró en el *objeto de conocimiento*, esta se adentra en el *sujeto que aprende*.

Abandonamos aquí la idea obsoleta de que la multiplicación y la división se pueden enseñar por simple transmisión de reglas y algoritmos. Comprender las estructuras multiplicativas es un formidable logro cognitivo que el alumnado debe realizar por sí mismo, un proceso de construcción activa. Como afirma Constance Kamii (1985/2003), basándose en la obra de Piaget, el alumnado no aprende la aritmética por simple absorción, sino que la *reinventa*.

Nuestra función como docentes no es la de un mero transmisor de tablas y “cuentas de multiplicar”, sino la de un *arquitecto de experiencias de aprendizaje*. Un guía que, conociendo el camino del desarrollo del pensamiento infantil y los posibles obstáculos, diseña un entorno rico en problemas, materiales y preguntas que hagan necesaria y significativa esa reinención del pensamiento multiplicativo en la mente de cada estudiante.

Este viaje desde las intuiciones iniciales hasta el dominio flexible de los procedimientos formales no es caótico. Sigue una trayectoria de desarrollo coherente y predecible que la investigación psicopedagógica ha logrado trazar con notable precisión (Carpenter et al., 1999). Como futuros docentes, nuestra responsabilidad es conocer las etapas de esta evolución. Este conocimiento nos permitirá:

- *Diagnosticar:* Entender en qué punto del camino se encuentra cada estudiante, valorando sus estrategias como lógicas y funcionales para su nivel de desarrollo.

- *Intervenir*: Proponer las tareas, los materiales y, sobre todo, las preguntas adecuadas para ayudarle a dar el siguiente paso en su trayectoria de aprendizaje, creando un andamiaje (en el sentido de Vygotsky) que le impulse hacia adelante.

Esta sección se dedicará a trazar ese mapa evolutivo, explorando la progresión natural de las estrategias de resolución que el alumnado desarrolla.

8.3.1 Progresión de las Estrategias de Resolución: Del Conteo al Cálculo Flexible

La transición desde el pensamiento aditivo al multiplicativo es un proceso gradual que se manifiesta en la evolución de las estrategias que utiliza el alumnado para resolver problemas. Inicialmente, estas estrategias están fuertemente ancladas en la acción concreta y el conteo, para luego evolucionar hacia procedimientos más abstractos y eficientes basados en las propiedades de los números y las operaciones.

Comprender esta evolución es la herramienta diagnóstica más potente para el docente. Nos permite entender *por qué* un estudiante resuelve un problema de una determinada manera y *cómo* podemos ayudarle a avanzar. Esta progresión se puede estructurar, a grandes rasgos, en tres grandes fases o niveles (Cid et al., 2003).

8.3.1.1 Fase 1: Modelización Directa (Acción y Conteo Total)

Es la primera y más intuitiva de las estrategias. El niño o la niña necesita una representación física y concreta de *todas* las cantidades involucradas en el problema. El pensamiento está completamente ligado a la acción y a la percepción.

Mini-Caso de Aula: Modelización Directa de la Multiplicación

Problema: En la granja hay 4 corrales, y en cada corral hay 3 gallinas. ¿Cuántas gallinas hay en total?

Acción del Alumno (Nivel 1): El alumno dibuja 4 círculos grandes (los corrales). A continuación, dibuja 3 puntos pequeños dentro de cada uno de los círculos (las gallinas). Finalmente, para encontrar la solución, señala cada uno de los 12 puntos mientras recita la secuencia numérica desde el principio: «uno, dos, tres, cuatro, ..., once, doce. ¡Hay 12 gallinas!».

Análisis Cognitivo: El estudiante comprende perfectamente la estructura de la situación, pero para resolverla necesita *ver* y *tocar* (física o mentalmente) cada una de las unidades. Aún no opera con el concepto abstracto de “grupo”, sino con una colección de unidades. En términos de Bruner, se encuentra plenamente en el *Modo Enactivo*.

8.3.1.2 Fase 2: Estrategias de Conteo (Ritmo y Suma Repetida)

Aquí se produce el primer gran salto hacia la abstracción. El alumnado ya no necesita contar todos los elementos desde uno. Ha interiorizado el principio de cardinalidad y es capaz de confiar en que un grupo (por ejemplo, el “3”) representa una cantidad, lo que le permite usar estrategias más eficientes como el conteo a saltos o la suma repetida.

Mini-Caso de Aula: Estrategias de Conteo en la Multiplicación

Problema: (El mismo que antes) 4 corrales con 3 gallinas cada uno.

Acción del Alumno (Nivel 2): El alumno ya no necesita dibujar todo. Puede que use sus dedos o simplemente lo haga de forma oral.

- *Estrategia de Conteo a Saltos:* El alumno recita: «tres... (levanta un dedo), seis... (levanta otro dedo), nueve... (levanta un tercero), doce (levanta el cuarto). ¡Son 12!».
- *Estrategia de Suma Repetida:* El alumno escribe la operación que modeliza su pensamiento: $3 + 3 + 3 + 3 = 12$.

Análisis Cognitivo: Este estudiante ha pasado de contar unidades a contar *grupos*. La acción se ha interiorizado. Ya no necesita ver todas las gallinas, le basta con saber que en cada corral hay “tres”. Es un paso intermedio importante que conecta la acción concreta con el simbolismo de la multiplicación.

8.3.1.3 Fase 3: Hechos Numéricos y Estrategias Derivadas (El Cálculo Flexible)

Este es el nivel más avanzado y el verdadero objetivo del desarrollo del sentido numérico en el campo multiplicativo. El alumnado trasciende el conteo y comienza a utilizar su conocimiento de los hechos numéricos (las tablas de multiplicar) y las propiedades de las operaciones para resolver problemas de forma flexible. Los números se convierten en entidades que se pueden descomponer y recomponer estratégicamente.

Mini-Caso de Aula: Estrategias Derivadas y Flexibilidad en el Cálculo

Problema: Para hacer un mosaico, necesitamos 6 filas de 12 teselas cada una. ¿Cuántas teselas necesitamos?

Acción del Alumno (Nivel 3): El estudiante no recurre a la suma repetida ($12+12+\dots$), sino que aplica su conocimiento de las propiedades.

- *Estrategia basada en la propiedad distributiva:* «Yo sé que 6 por 10 son 60, y 6 por 2 son 12. Entonces, 60 más 12 son 72. Necesitamos 72 teselas».
- *Estrategia basada en dobles (propiedad asociativa):* «Sé que 3 por 12 son 36. Como 6 es el doble de 3, el resultado será el doble de 36, que es 72».

Análisis Cognitivo: El estudiante ha alcanzado una *comprensión relacional* (Skemp, 1978). No está aplicando una única receta, sino que analiza los números involucrados (6 y 12) y elige una estrategia eficiente basada en las propiedades matemáticas que subyacen a la operación. Está operando plenamente en el *Modo Simbólico* de Bruner, pero con un profundo significado.

Clave Didáctica: El Rol Docente en la Progresión de Estrategias

Nuestra labor no es acelerar artificialmente esta progresión, sino respetarla y nutrirla. Esto implica:

- *En la Fase 1:* Proporcionar abundantes materiales manipulativos (poli-

cubos, fichas, etc.) y fomentar la representación gráfica para ayudar a organizar el pensamiento.

- *En la Fase 2:* Plantear preguntas que inviten al conteo a saltos y a la expresión de la suma repetida, conectando la acción con el lenguaje matemático.
- *En la Fase 3:* Fomentar un ambiente de aula donde se discutan y comparen diferentes estrategias de cálculo, valorando la eficiencia y la flexibilidad por encima de la mera corrección.

Guiar al alumnado a través de estas fases es el verdadero núcleo de la enseñanza del campo multiplicativo, una enseñanza que busca la comprensión antes que la mecanización.

8.3.2 Construyendo el Sentido y los Procedimientos

Una vez comprendida la estructura matemática del campo multiplicativo, la labor docente se centra en orquestar experiencias que permitan al alumnado construir ese conocimiento. Esta construcción no es lineal ni se produce por simple transmisión. Requiere un delicado equilibrio entre la exploración de significados, el desarrollo de estrategias personales, la consolidación de hechos numéricos y la formalización de procedimientos eficientes. A continuación, se detallan las claves didácticas para guiar este proceso.

8.3.2.1 La Didáctica de las Tablas de Multiplicar: Hacia una Memorización Comprensiva

El dominio de los hechos numéricos básicos de la multiplicación (las tablas) es fundamental para la fluidez del cálculo. Sin embargo, un enfoque basado exclusivamente en la memorización mecánica es pedagógicamente pobre y cognitivamente frágil (National Council of Teachers of Mathematics, 2014). La normativa andaluza, al solicitar que la construcción de las tablas se apoye en la suma repetida o en disposiciones rectangulares (Saber Básico MAT.2.A.3.3), nos insta a adoptar un enfoque constructivo. El objetivo no es solo que el alumnado *sepa* las tablas, sino que *comprenda* de dónde surgen.

Clave Didáctica: La Memorización Comprensiva de las Tablas de Multiplicar

La memorización comprensiva se alcanza cuando el alumnado, antes de automatizar un resultado, ha participado en su construcción. Si un estudiante olvida cuánto es 7×8 , pero comprende la estructura subyacente, puede reconstruirlo rápidamente a partir de un hecho conocido (p.ej., “sé que 7×5 es 35 y 7×3 es 21, así que los junto y son 56”). Esta flexibilidad es la verdadera señal de dominio.

Las estrategias para una construcción significativa de las tablas incluyen:

- *Uso de la Propiedad Conmutativa:* Es la primera y más potente estrategia. Se debe guiar al alumnado para que descubra, a través de modelos de *array* (disposiciones rectangulares), que 3×4 ocupa el mismo espacio que 4×3 .

Esto reduce el esfuerzo de memorización casi a la mitad y sienta las bases del pensamiento relacional.

- *Relaciones entre Tablas:* Fomentar el descubrimiento de patrones que conectan las tablas entre sí. Por ejemplo:
 - La tabla del 4 es el doble de la del 2.
 - La tabla del 8 es el doble de la del 4.
 - La tabla del 6 se puede obtener sumando la del 5 y la del 1.
 - La tabla del 9 se puede obtener restando de la del 10.
- *Anclaje en la Propiedad Distributiva:* Esta es la estrategia más sofisticada y la que conecta directamente con el cálculo mental y los algoritmos.

Mini-Caso de Aula: Descubriendo la tabla del 6

Contexto: Aula de 3º de Primaria. El alumnado ya ha construido y domina la tabla del 5.

Docente: (Plantea el problema) “En la tienda de mascotas hay 6 peceras, y en cada una hay 7 peces. ¿Cuántos peces hay en total?”.

Intervención: Un alumno, tras dibujar los grupos, tiene dificultades para calcular 6×7 . El docente interviene:

Docente: “Sé que es un cálculo nuevo, pero, ¿hay alguna multiplicación que ya conozcas que se parezca a esta?”

Alumno: “¡La del 5! Sé que 5×7 es 35.”

Docente: “¡Perfecto! Ya sabemos cuántos peces hay en 5 peceras. Si en total tenemos 6 peceras, ¿qué nos falta por añadir?”

Alumno: “¡Pues los peces de una pecera más! ¡Faltan 7 peces!”

Docente: “Exacto. Entonces, si a los 35 que ya tenías le sumas esos 7...”

Alumno: “¡Son 42!”

Análisis Didáctico: El docente no ha dado la respuesta. Ha guiado al alumno para que use un conocimiento previo (la tabla del 5) como andamio para construir uno nuevo (la tabla del 6), aplicando implícitamente la propiedad distributiva: $6 \times 7 = (5 + 1) \times 7 = 5 \times 7 + 1 \times 7$.

La Tabla Pitagórica: Un Laboratorio de Relaciones Numéricas Una herramienta muy poderosa es la *tabla pitagórica*, llamada así en honor a Pitágoras y su escuela, es una representación estructurada de los hechos numéricos de la multiplicación en una matriz o rejilla de doble entrada. A diferencia de las listas de tablas tradicionales (la tabla del 2, la del 3, etc.), que presentan los hechos numéricos de forma aislada y lineal, la tabla pitagórica los organiza en una estructura bidimensional. En ella, los factores se sitúan en la primera fila y en la primera columna, y los productos se encuentran en las celdas de intersección (Figura 8.11).

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Figura 8.11: Tabla Pitagórica del 1 al 10. Cada celda contiene el producto de su correspondiente fila y columna.

Profundizando: La Tabla Pitagórica como Laboratorio de Relaciones

El verdadero poder de la tabla pitagórica no es ser una «chuleta» para encontrar resultados, sino una herramienta para *descubrir la estructura interna* de la multiplicación. Su valor didáctico es inmenso y supera con creces el de las listas tradicionales.

- *Visualiza la Propiedad Conmutativa*: La tabla es perfectamente simétrica respecto a su diagonal principal (resaltada en amarillo). El alumnado puede *ver* que el resultado de 3×7 (fila 3, columna 7) es el mismo que el de 7×3 (fila 7, columna 3). Este descubrimiento visual reduce la carga memorística a casi la mitad y dota de significado a la propiedad.
- *Revela Relaciones entre Tablas*: Permite descubrir patrones. Por ejemplo, la columna del 4 es el doble de la columna del 2. La del 6 es el doble que la del 3, pero también es la suma de las columnas del 2 y del 4. La del 9 tiene patrones fascinantes (la suma de sus cifras, etc.). Esto enseña al alumnado que las tablas no son compartimentos estancos, sino una red de relaciones interconectadas.
- *Identifica los Números Cuadrados*: La diagonal principal destaca los números cuadrados (1, 4, 9, 16...), dándoles un significado geométrico y una posición especial dentro de la estructura.
- *Sirve como Herramienta de Reconstrucción*: Si un alumno olvida un resultado, como 6×7 , la tabla le ofrece múltiples caminos para reconstruirlo a partir de lo que ya sabe (ej. «sé que $5 \times 7 = 35$, así que le sumo 7 más» o «sé que $3 \times 7 = 21$, así que lo duplico»).

Clave Didáctica: La Tabla Pitagórica como Laboratorio de Relaciones

La tabla pitagórica transforma el aprendizaje de los hechos numéricos de una tarea de *memorización de hechos aislados* a una de *exploración de patrones y construcción de relaciones*. El objetivo no es que el alumnado dependa de ella para siempre, sino que la utilice como un «laboratorio numérico» para construir su propia red mental de conocimientos, que es la base de un cálculo mental flexible y un sólido sentido numérico.

8.3.2.2 La Didáctica de la División: Progresión desde Experiencias Informales

La división es conceptualmente la operación más compleja para el alumnado de Primaria. Su introducción debe ser especialmente cuidadosa, gradual y anclada en la acción concreta.

1. *Apoyo en experiencias informales*: La progresión comienza con situaciones de reparto en contextos lúdicos y reales. Se plantean problemas de reparto equitativo (“repartir en partes iguales”) y no equitativo para que el alumnado valore la necesidad y las condiciones del primero. El propio alumnado es el mejor material manipulativo (“vamos a hacer 3 equipos con los 15 que estamos”).
2. *De la manipulación a lo simbólico*: Se proponen situaciones con material concre-

to (fichas, policubos) que obliguen a “romper” las unidades de orden superior. El reparto de dinero didáctico es un contexto ideal para esto: para repartir 42 euros entre 3 personas, el alumnado descubre que debe *canjear* una de las cuatro decenas por 10 unidades para poder continuar el reparto.

3. *Conexión con la resta sucesiva*: Para dar sentido al significado de agrupamiento (cuotitivo), se conectará la división con la resta. Ante el problema “Tengo 24 galletas y quiero hacer bolsas de 6 galletas, ¿cuántas bolsas puedo llenar?”, se anima al alumnado a resolverlo restando 6 sucesivamente. Descubren que el número de veces que pueden restar es, precisamente, el resultado de la división. Esto dota de significado a algoritmos como el ABN.
4. *Uso de la recta numérica*: La división se puede visualizar como “saltos hacia atrás” de una longitud determinada (el divisor), partiendo del dividendo. La pregunta es “¿cuántos saltos puedo dar?”. Este modelo conecta la división con la medida y es muy potente para estimar el resultado.

8.3.2.3 La Didáctica de los Algoritmos: De la Transparencia a la Eficiencia

Los algoritmos son el punto de llegada del aprendizaje, no el de partida. Su enseñanza debe respetar rigurosamente la secuencia de Bruner, que transita de la acción a la representación simbólica.

Clave Didáctica: El Principio “Acción antes que Símbolo” en los Algoritmos

Para evitar que los algoritmos se conviertan en “magia negra” o trucos sin sentido, debemos seguir un principio didáctico inquebrantable:

No se anota en el papel ninguna acción (como una “llevada”) que no se haya realizado y comprendido primero físicamente con el material.

La mano (fase enactiva) debe ir siempre antes que el lápiz (fase simbólica). Esta es la única garantía de que el algoritmo se construya sobre una base de comprensión relacional.

Esto implica que la enseñanza de cualquier algoritmo (especialmente el tradicional) debe seguir una progresión:

- *Priorizar algoritmos transparentes al inicio*: Métodos como el algoritmo extendido para la multiplicación o los basados en restas sucesivas para la división son excelentes puentes. En ellos, se opera con el valor real de los números (ej. se multiplica por 40, no por 4) y los pasos intermedios son explícitos, lo que refuerza el sentido numérico.
- *Conectar el algoritmo tradicional con la manipulación*: El algoritmo tradicional de la multiplicación debe enseñarse como un registro eficiente de la aplicación de la propiedad distributiva con bloques multibase. El algoritmo tradicional de la división debe entenderse como un registro de un proceso de estimación y restas sucesivas.

8.3.2.4 La Didáctica del Resto: El Tratamiento de sus Interpretaciones

La resolución de un problema de división no termina al calcular el cociente y el resto; culmina al interpretar estos dos números en el contexto del problema. A menudo, el resto es la clave de la solución. Es fundamental que el alumnado se enfrente a problemas que requieran las cuatro posibles interpretaciones del resto.

Ejemplo: Las Cuatro Interpretaciones del Resto

Consideremos cuatro problemas con la misma operación subyacente ($23 \div 5$, que da cociente 4 y resto 3), pero con soluciones distintas (Figura 8.9 en la página 289).

1. *El resto obliga a incrementar el cociente*: “En una excursión van 23 estudiantes. Si en cada coche caben 5, ¿cuántos coches se necesitan?”. *Solución*: 5 coches. No se pueden dejar a 3 estudiantes sin ir, por lo que se necesita un coche más.
2. *El resto se descarta*: “Tengo 23 euros. Si cada entrada de cine cuesta 5 euros, ¿cuántas entradas puedo comprar?”. *Solución*: 4 entradas. Los 3 euros que sobran no son suficientes para comprar otra entrada.
3. *El resto es la solución*: “Quiero repartir 23 galletas en bolsas de 5. Si lleno todas las bolsas posibles, ¿cuántas galletas me sobrarán?”. *Solución*: 3 galletas. La pregunta se centra precisamente en la cantidad sobrante.
4. *El resto se sigue dividiendo*: “Cinco amigos compran una tableta de chocolate gigante que pesa 23 onzas para repartirla en partes iguales. ¿Cuánto chocolate le toca a cada uno?”. *Solución*: 4 onzas y $\frac{3}{5}$ de onza. Como el objeto es divisible, el resto se sigue repartiendo, dando lugar a una fracción.

Profundizando: La Necesidad de una Dieta Variada de Problemas

Si la mayoría de los problemas de división que un docente propone en el aula son del tipo 2 (donde el resto se ignora), el alumnado construirá la creencia errónea de que “el resto es lo que sobra y no sirve para nada”. Esta concepción limitada es un obstáculo directo para la modelización matemática y el desarrollo de un pensamiento crítico y flexible. Una “dieta de problemas” variada es una condición indispensable para una enseñanza competencial.

8.3.3 El Docente como Detective Cognitivo: Errores y Dificultades Comunes

El camino hacia la construcción del pensamiento multiplicativo no es una línea recta; está lleno de exploraciones, intuiciones valiosas y, de manera inevitable, errores. Como docentes, nuestro rol es el de un *detective cognitivo* que, ante un error, inicia un ciclo de investigación profesional (ver Sección 14.5.2) para promover una comprensión más profunda. A continuación, clasificaremos los errores más comunes en el campo multiplicativo.

8.3.3.1 Errores Conceptuales: Confusión Aditivo-Multiplicativo

- *Evidencia* (¿Qué observamos?): Ante un problema como «En un parque hay 3 nidos con 4 pájaros cada uno. ¿Cuántos pájaros hay en total?», el alumno responde $3 + 4 = 7$.
- *Hipótesis* (¿Por qué ocurre?): El alumnado todavía no ha diferenciado claramente la estructura aditiva (juntar dos cantidades diferentes) de la multiplicativa (repetir la misma cantidad un número de veces). Aplica el esquema aditivo, que es más antiguo y está más consolidado en su mente, a una situación que no le corresponde.
- *Intervención* (¿Cómo intervenimos?):
 - *Modelización y dibujo*: Pedir al alumnado que dibuje la situación. Al dibujar los 3 nidos y los 4 pájaros en cada uno, se hará visible que la operación no es una simple suma de 3 y 4. Esto conecta con la fase icónica de Bruner.
 - *Comparar problemas*: Presentar un par de problemas con enunciados similares pero estructuras diferentes (uno aditivo y otro multiplicativo) para discutir explícitamente las diferencias. Por ejemplo: «Tengo 3 cromos y me dan 4» vs. «Tengo 3 sobres con 4 cromos cada uno».

8.3.3.2 Errores en las Tablas de Multiplicar

- *Evidencia* (¿Qué observamos?): El alumnado responde de forma incorrecta a un hecho numérico básico, por ejemplo, $7 \times 8 = 54$.
- *Hipótesis* (¿Por qué ocurre?): Es crucial diagnosticar si es un simple lapsus de memoria o si el problema es más profundo. La hipótesis más común es que el aprendizaje ha sido puramente memorístico (comprensión instrumental, Skemp, 1978) y el alumno no dispone de ninguna estrategia para reconstruir el resultado si lo olvida.
- *Intervención* (¿Cómo intervenimos?): En lugar de simplemente corregir y pedir que «lo estudie más», la intervención debe centrarse en dotar de estrategias constructivas:
 - *Anclaje en un hecho conocido*: «¿Estás seguro? Sé que a veces nos liamos con esa. ¿Cuánto es 7×7 ? ¿Y cuánto sería entonces 7×8 ?».
 - *Uso de la propiedad distributiva*: «Pensemos en el 8. Una forma fácil de multiplicar es usando el 5 y el 3. ¿Cuánto es 7×5 ? ¿Y 7×3 ? Si los juntamos...».
 - *Apoyo visual*: Utilizar la tabla pitagórica para buscar patrones o un array de puntos para visualizar el producto.

8.3.3.3 Errores Algorítmicos Comunes

Estos errores suelen delatar una frágil comprensión del sistema de numeración decimal y de las propiedades de la operación.

Ejemplo: El obstáculo de la concepción aditiva en el algoritmo de multiplicación

1. *Evidencia*: Un alumno resuelve la operación 36×4 de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 4 \\ \hline 1224 \end{array}$$

Y concluye que el resultado es 1224.

2. *Hipótesis (Diagnóstico)*: El alumno no comprende el valor posicional del 3 en 36 (no lo ve como 30, sino como un 3). Está aplicando una regla incorrecta que él mismo ha creado: «multiplico el 4 por el 6, y luego el 4 por el 3, y junto los resultados». Es una sobregeneralización de la suma sin llevada, pero ignora por completo la *propiedad distributiva* ($4 \times (30 + 6)$) y el valor posicional.

3. *Intervención (Crear Conflicto Cognitivo)*:

- *Volver al modelo de área (fase icónica)*: Se pide al alumno que dibuje un rectángulo de 36 por 4 en papel cuadriculado. Luego, se le guía para que lo descomponga en dos rectángulos más manejables: uno de 30×4 y otro de 6×4 . Al calcular el área de cada parte (120 y 24) y sumarlas (144), el alumno *ve* la estructura correcta y el resultado. Su método inicial queda refutado por la evidencia visual.
- *Usar el algoritmo extendido (puente a lo simbólico)*: Se presenta el algoritmo extendido, que es una representación simbólica del modelo de área:

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 4 \\ \hline 24 \quad (4 \times 6) \\ + 120 \quad (4 \times 30) \\ \hline 144 \end{array}$$

Este paso conecta su acción con el modelo de área a una notación simbólica transparente antes de pasar al algoritmo tradicional y opaco.

Otro error algorítmico frecuente es la gestión del «cero al cociente» en la división (ej. al dividir $612 \div 6$). La causa suele ser la misma: una aplicación mecánica del algoritmo sin comprender que ese cero es un marcador de posición indispensable. La intervención, de nuevo, pasa por representar la cantidad con material multibase (6 placas y 12 cubitos) y realizar el reparto de forma manipulativa para hacer evidente la necesidad de ese cero.

8.3.3.4 Errores en la Resolución de Problemas: La Interpretación del Resto

- *Evidencia (¿Qué observamos?)*: Ante un problema como «En una excursión van 23 alumnos. Si en cada coche caben 5, ¿cuántos coches se necesitan?», el alumno

realiza correctamente la división $23 \div 5$, obteniendo cociente 4 y resto 3, pero responde «Se necesitan 4 coches y sobran 3 alumnos».

- **Hipótesis** (*¿Por qué ocurre?*): El alumno ha aprendido a ejecutar el procedimiento de la división, pero no ha aprendido a *interpretar el resultado en el contexto del problema*. Ve el algoritmo como un fin en sí mismo, no como una herramienta para dar respuesta a una pregunta del mundo real.
- **Intervención** (*¿Cómo intervenimos?*): La clave es volver la atención del alumno del cálculo al contexto.
 - **Preguntas de re-contextualización**: «De acuerdo, tu cálculo es perfecto. Pero ahora leamos la pregunta otra vez. Si usamos 4 coches, ¿pueden ir todos los alumnos a la excursión? ¿Qué pasa con esos 3 que sobran? ¿Qué tenemos que hacer para que ellos también puedan ir?».
 - **Trabajo sistemático con las tipologías del resto**: Proponer explícitamente problemas variados donde el resto tenga diferentes significados (se descarta, obliga a redondear al alza, es la solución, etc.), y hacer de la discusión sobre el significado del resto el foco central de la actividad.

8.3.4 El Campo Multiplicativo en el Currículo de Andalucía

Las teorías psicopedagógicas y los fundamentos matemáticos que hemos explorado en este manual no son meras construcciones académicas; encuentran su validación y su mandato de aplicación en el currículo oficial que guía nuestra práctica docente. La *ORDEN de 30 de mayo de 2023*, que desarrolla el currículo de Educación Primaria en Andalucía, es el mapa que nos indica no solo los destinos de aprendizaje (los saberes), sino también la filosofía del viaje (el enfoque competencial).

En esta sección, analizaremos cómo el currículo andaluz articula la progresión del campo multiplicativo a lo largo de los tres ciclos de Primaria. Veremos que el enfoque normativo se alinea perfectamente con una didáctica constructivista y significativa, alejándose de la mera mecanización para priorizar la construcción del sentido.

Progresión de los Saberes Básicos del Sentido Numérico por Ciclos. El currículo organiza el aprendizaje de forma espiral, retomando y ampliando los conceptos en cada ciclo con mayor profundidad y abstracción. El tratamiento del campo multiplicativo es un claro ejemplo de esta progresión cuidada.

- **Primer Ciclo (1º y 2º): Sembrando las Semillas del Pensamiento Multiplicativo.** En esta etapa inicial, el currículo no introduce formalmente las operaciones de multiplicación y división. Sin embargo, sienta sus bases conceptuales de manera explícita. Los saberes básicos en el apartado *MAT.1.A.3. (Sentido de las operaciones)* se centra en la suma y la resta, pero insta a trabajar la resolución de problemas mediante el uso de «*materiales y recursos lúdicos*».

Implicación didáctica: Implicación Didáctica y Curricular (Primer Ciclo)

Nuestra labor aquí es proporcionar experiencias pre-multiplicativas. Esto significa trabajar con:

- *Agrupamientos y sumas repetidas*: Situaciones de grupos iguales que los niños y niñas resuelven de forma natural mediante la suma reiterada.
- *Repartos intuitivos*: Problemas de reparto equitativo en contextos de juego, utilizando la correspondencia uno a uno.
- *Nociones de doble y mitad*: Construidas de forma manipulativa.

El currículo nos pide que el alumnado *actúe* (fase enactiva de Bruner) y construya las ideas fundacionales antes de ponerles nombre y símbolo.

■ **Segundo Ciclo (3º y 4º): Construcción y Consolidación de los Significados.**

Este es el ciclo clave para la formalización del campo multiplicativo. El currículo pone el foco en la construcción de los significados y el dominio comprensivo de los hechos básicos. El saber *MAT.2.A.3.3* (en la sección *MAT.2.A.3. Sentido de las operaciones*) es inequívoco al respecto, pues especifica la «*construcción de las tablas de multiplicar apoyándose en número de veces, suma repetida o disposición en cuadrículas*».

Implicación didáctica: Segundo Ciclo, La Construcción de Significados

La normativa nos da un mandato claro: las tablas de multiplicar no se memorizan, se *construyen*. Se debe conectar explícitamente el símbolo $\times$ con sus diferentes significados (suma repetida, modelo de área). Además, se debe trabajar la «*multiplicación y división de números naturales resueltas con flexibilidad y sentido*». Esto nos exige:

- Presentar los dos significados de la división (partitivo y cuotitivo).
- Fomentar el uso de las propiedades (especialmente la conmutativa y la distributiva) para flexibilizar el cálculo y la memorización.
- Introducir algoritmos que sean transparentes y conectados con el significado.

■ **Tercer Ciclo (5º y 6º): Aplicación y Extensión: La Operación como Herramienta.**

En esta etapa final, el currículo se centra en la consolidación de los algoritmos y, fundamentalmente, en la aplicación del razonamiento multiplicativo a contextos más complejos y a nuevos conjuntos numéricos. El saber *MAT.3.A.3.4* habla de «*Estrategias de resolución de operaciones aritméticas (con números naturales, decimales y fracciones) con flexibilidad y sentido*».

Implicación didáctica: Tercer Ciclo, La Operación como Herramienta

El foco se desplaza de la construcción de la operación a su *uso como herramienta* para la resolución de problemas. La didáctica en este ciclo debe:

- Asegurar la fluidez en los algoritmos, pero siempre anclada en la

comprensión.

- Aplicar las operaciones a la resolución de problemas con fracciones y decimales.
- Conectar el pensamiento multiplicativo con conceptos más abstractos como la *proporcionalidad* (Grupo de Saberes MAT.3.A.5.) y la *potencia* como producto de factores iguales (Saber MAT.3.A.3.3).

El Campo Multiplicativo como Motor para el Desarrollo de las Competencias Específicas. Como prescribe la LOMLOE, el objetivo último no es dominar los saberes básicos, sino utilizarlos para desarrollar las competencias específicas del área. Una enseñanza del campo multiplicativo como la que se ha diseñado en este capítulo es un buen vehículo para ello.

Del Currículo al Aula: Conexiones Clave Del Saber a la Competencia

- *CE.MATE.1: Interpretar situaciones de la vida cotidiana, proporcionando una representación matemática de las mismas mediante conceptos, herramientas y estrategias, para analizar la información más relevante.*

Cuando un alumno o alumna, ante un problema, es capaz de identificar si se trata de una situación de reparto, de comparación o de producto cartesiano, y elige un modelo (como un diagrama de barras o un *array*) para representarlo, está desarrollando plenamente esta competencia. La clasificación semántica de problemas (apartado 8.2.5) es la herramienta fundamental para trabajarla.

- *CE.MATE.2: Resolver situaciones problematizadas, aplicando diferentes técnicas, estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder, obtener soluciones y asegurar su validez desde un punto de vista formal y en relación con el contexto planteado.*

Cuando un estudiante, para calcular 18×5 , descarta el algoritmo tradicional y razona que «es lo mismo que 9×10 , que son 90», está aplicando estrategias flexibles basadas en propiedades. Cuando explora diferentes algoritmos (extendido, ABN, tradicional) y valora su eficiencia, está desarrollando esta competencia.

- *CE.MATE.4: Utilizar el pensamiento computacional, organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, generalizando e interpretando, modificando y creando algoritmos de forma guiada, para modelizar y automatizar situaciones de la vida cotidiana.*

La construcción de las tablas de multiplicar a través de la búsqueda de patrones y el uso de la propiedad distributiva es una forma de pensamiento computacional. Un algoritmo en sí mismo es un programa que se ejecuta paso a paso. Comprender por qué funciona el algoritmo tradicional de la división (un bucle de estimar-multiplicar-restar-bajar) es un ejercicio de pensamiento algorítmico.

- *CE.MATE.6: Comunicar y representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos y resultados matemáticos, utilizando el lengua-*

je oral, escrito, gráfico, multimodal y la terminología apropiados, para dar significado y permanencia a las ideas matemáticas.

Cuando un alumno o alumna utiliza un modelo de área para *explicar* por qué $4 \times 13 = (4 \times 10) + (4 \times 3)$, está comunicando y representando su pensamiento matemático. Justificar los pasos de un algoritmo o explicar el significado del resto en un problema son actos genuinos de comunicación matemática.

En definitiva, la normativa andaluza no solo permite, sino que *exige* una enseñanza del campo multiplicativo centrada en la construcción de significado, la flexibilidad y la resolución de problemas. Nuestro rol como futuros docentes es convertir este mandato curricular en una práctica de aula rica, estimulante y competencial.

8.4 Conclusión: Hacia un Razonamiento Multiplicativo Flexible y con Sentido

En este capítulo hemos emprendido un viaje al corazón del campo conceptual multiplicativo. Hemos trascendido la visión simplista de la multiplicación como una simple suma repetida y de la división como un mero reparto, para descubrir una rica y compleja red de significados, relaciones y procedimientos. Este recorrido nos ha permitido comprender que la enseñanza de estas operaciones es mucho más que la instrucción de algoritmos; es un proceso fascinante que implica guiar al alumnado en la construcción de una nueva y poderosa forma de pensar sobre el mundo.

El primer gran pilar de nuestro viaje ha sido la *construcción del significado*. Hemos desentrañado la riqueza semántica que se esconde tras los símbolos ' $\times$ ' y ' $\div$ '. Hemos visto que estos no se corresponden con una única acción, sino que modelizan una amplia gama de situaciones: desde la repetición de grupos iguales hasta la comparación de cantidades, la organización rectangular en áreas o la combinación de posibilidades (Vergnaud, 1983). Comprender esta diversidad es el antídoto fundamental contra una enseñanza mecanicista, permitiendo al alumnado reconocer la estructura multiplicativa en contextos variados y dar un verdadero sentido a las operaciones.

El segundo pilar ha sido la *flexibilidad procedimental*. Las propiedades matemáticas, especialmente la conmutativa, asociativa y distributiva, han dejado de ser meros enunciados teóricos para revelarse como las verdaderas herramientas del cálculo flexible y del sentido numérico. Hemos explorado un abanico de algoritmos, desde los históricos y visuales hasta los extendidos y el tradicional, no como un catálogo de recetas a memorizar, sino como la cristalización de diferentes formas de razonar sobre los números. Este enfoque nos permite valorar la diversidad de estrategias del alumnado y guiarles hacia métodos cada vez más eficientes, pero siempre comprensibles.

Finalmente, hemos consolidado la idea de que los *algoritmos son el punto de llegada, no el de partida*. Siguiendo la irrenunciable secuencia de Bruner, hemos establecido que cualquier procedimiento simbólico, para no convertirse en una "caja negra" de reglas arbitrarias, debe ser la culminación de un proceso que nace en la acción y se refina en la representación icónica (Bruner, 1966/1972). La verdadera comprensión de un algoritmo no reside en ejecutar sus pasos, sino en poder explicar por qué esos pasos funcionan, conectándolos con la estructura del sistema de numeración decimal y las

propiedades de la operación.

En definitiva, como futuros docentes, nuestra misión no es entrenar calculistas rápidos, sino cultivar *pensadores multiplicativos*. Un alumnado que comprende en profundidad el campo multiplicativo está preparado no solo para superar con éxito los siguientes desafíos aritméticos, sino para utilizar las matemáticas con confianza, creatividad y sentido en su vida cotidiana. Sabrá interpretar una oferta, calcular el área de una superficie, entender una escala o analizar una combinación de opciones. Esa es, y debe ser, nuestra meta final: dotar a nuestro alumnado de una herramienta intelectual para interpretar y transformar el mundo.

Hemos establecido que la multiplicación es una forma potente de abreviar la suma repetida. Esta idea abre una nueva y fascinante pregunta: ¿existe una forma de abreviar la *multiplicación repetida*? El próximo capítulo nos llevará *Más Allá de la Multiplicación*, explorando el crecimiento exponencial de las potencias, la búsqueda del factor perdido en las raíces y las reglas de tráfico que organizan todas estas operaciones: la jerarquía.

8.5 Para la Reflexión y el Portfolio Docente

1. Conexión con la Propia Historia: El Misterio de las Tablas de Multiplicar.

Consigna: Reflexiona sobre tu propia trayectoria como estudiante con las tablas de multiplicar.

- ¿Cómo las aprendiste? ¿Fue un proceso de memorización mecánica o hubo un enfoque constructivo (buscar patrones, usar propiedades)?
- ¿Comprendías en ese momento por qué funcionaban? Por ejemplo, ¿eras consciente de que saber 7×8 era lo mismo que 8×7 ?
- Redacta un breve texto reflexivo (unas 200 palabras) conectando tu recuerdo con los conceptos de memorización comprensiva y aprendizaje relacional.

2. El Ojo Didáctico: Análisis de la «Dieta de Problemas» Multiplicativos.

Consigna: Consigue un libro de texto de 3º o 4º de Primaria y analiza los problemas de multiplicación y división.

- Clasifica al menos 10 problemas según la tipología semántica de Vergnaud (Razón Simple, Comparación, Producto de Medidas,...).
- ¿Están todas las estructuras representadas de forma equilibrada o predomina una sobre las demás (ej. la de suma repetida)?
- ¿Qué implicaciones podría tener una «dieta» de problemas desequilibrada? Justifica tu análisis.

3. Diseño de una Micro-Secuencia Didáctica: El Sentido del Resto.

Consigna: Tu objetivo es diseñar una secuencia de tres mini-problemas para un aula de 4º de Primaria que evidencie la necesidad de *interpretar* el resto de la división. Utiliza para todos la misma operación matemática: $23 \div 4 = 5$, resto 3.

- a) Diseña un problema donde la respuesta correcta sea el cociente, ignorando el resto (Respuesta: 5).

- b) Diseña un problema donde la respuesta correcta sea el cociente más uno (Respuesta: 6).
- c) Diseña un problema donde la respuesta correcta sea únicamente el resto (Respuesta: 3).

9 Más Allá de la Multiplicación: Potencias, Raíces y Jerarquía de Operaciones

UNA vez que el alumnado ha construido un sólido conocimiento del campo aditivo (Capítulo 6) y multiplicativo (Capítulo 8), está preparado para dar un nuevo y fascinante salto conceptual. Este capítulo se adentra en un territorio que representa una mayor generalización y abstracción en el ámbito numérico: las *potencias* y las *raíces*. Si bien su estudio formal y exhaustivo corresponde a etapas educativas posteriores, la introducción intuitiva y significativa de estas ideas en los últimos ciclos de Primaria enriquece enormemente la comprensión del número y sienta bases indispensables para futuros aprendizajes algebraicos.

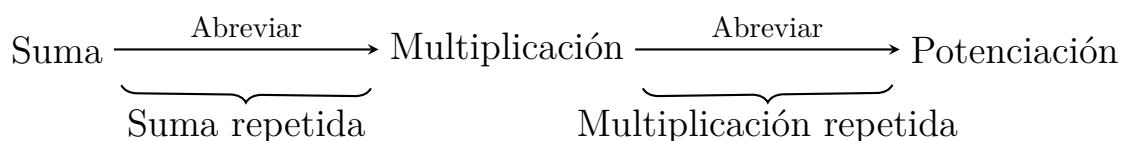
9.1 Introducción: La Necesidad de un Nuevo Lenguaje Matemático

Este viaje no consiste simplemente en añadir dos nuevas operaciones al repertorio del alumnado. Se trata de una auténtica *ruptura epistemológica* (Brousseau, 2007) que desafiará su forma de pensar sobre las cantidades y el crecimiento. Además, la incorporación de estas nuevas operaciones nos obliga a abordar una cuestión fundamental para la comunicación matemática: la necesidad de un acuerdo sobre el orden en que se realizan los cálculos. Exploraremos, por tanto, la *jerarquía de operaciones* no como un conjunto de reglas arbitrarias, sino como la sintaxis necesaria para que el lenguaje matemático sea preciso y universal.

El objetivo de este capítulo es doble: por un lado, desentrañar la naturaleza de estos conceptos para construir el *Conocimiento Especializado del Contenido* del futuro docente; por otro, ofrecer un itinerario didáctico coherente con el marco constructivista y competencial de la LOMLOE y su desarrollo en la normativa andaluza, que permita al alumnado construir estas ideas desde la acción, la visualización y la necesidad.

9.1.1 El Hilo Conductor: La Evolución del Pensamiento Aritmético

Para que el aprendizaje sea significativo, es vital que el alumnado conecte las nuevas ideas con las que ya domina. Nuestra primera tarea como docentes es tender un puente conceptual claro y robusto desde el territorio conocido del campo multiplicativo hacia este nuevo horizonte. El hilo conductor es una poderosa analogía evolutiva que debemos hacer explícita en el aula.



Así como la *multiplicación* es una forma de abreviar la *suma* de sumandos iguales, la *potenciación* es una forma de abreviar la *multiplicación* de factores iguales. Esta

analogía sitúa la potencia no como una idea extraña y aislada, sino como el siguiente paso lógico en la búsqueda de un lenguaje matemático cada vez más eficiente y potente. Cada nivel de operación se construye sobre el anterior, compactando y dando poder a las ideas previas.

Sin embargo, este paso de la multiplicación a la potenciación no es meramente acumulativo; representa una *ruptura epistemológica*. El pensamiento del alumnado, acostumbrado a un crecimiento lineal (aditivo) o proporcional (multiplicativo), debe ahora enfrentarse a una nueva lógica: el crecimiento exponencial.

Clave Didáctica: La Ruptura Epistemológica en el Aula

El concepto de *obstáculo epistemológico*, acuñado por Bachelard y desarrollado para la didáctica por Brousseau, es fundamental aquí. Un obstáculo no es una falta de conocimiento, sino un conocimiento *previo* que fue exitoso, pero que ahora se revela insuficiente y genera errores en un nuevo contexto (Brousseau, 2007).

El conocimiento sobre la multiplicación es un obstáculo potencial. Un estudiante que, ante 3^2 , razona que “si 3×4 es sumar 3 cuatro veces, 3^2 será sumar 3 dos veces ($3+3$) o multiplicar 3×2 ”, no está cometiendo un error ilógico. Al contrario, está aplicando brillantemente la lógica que le ha funcionado hasta ahora.

Nuestra labor no es simplemente *corregir* el error, sino crear una situación (por ejemplo, construir físicamente un cuadrado de 3×3) donde el propio estudiante pueda *constatar la insuficiencia de su modelo anterior* y la necesidad de construir uno nuevo. Comprender esto nos dota de una profunda empatía pedagógica.

9.1.1.1 El Problema como Motor del Aprendizaje: Necesidad y Comunicación

En la didáctica contemporánea de las matemáticas, un principio fundamental es que el conocimiento no se transmite, sino que se construye como respuesta a un problema que lo hace necesario (Brousseau, 2007). Lejos de presentar una definición abstracta, la labor del personal docente consiste en diseñar situaciones que pongan de manifiesto las limitaciones del conocimiento actual del alumnado y revelen la necesidad de una nueva herramienta, de una idea más potente. Este capítulo se articula sobre esta premisa. No presentaremos la potencia o la jerarquía como hechos consumados, sino como las soluciones ingeniosas que la humanidad y, por extensión, el alumnado, necesitan para resolver una nueva clase de problemas.

Anclaje Histórico y Narrativo: La Necesidad de Abreviar. Para motivar el nacimiento de la potenciación, recurrimos a una leyenda clásica que ilustra de forma dramática el concepto de crecimiento exponencial. Su poder didáctico reside en que transforma una idea abstracta en una narración inolvidable (Gamow, 1947/1993).

Anclaje Histórico: La Necesidad de un Lenguaje para el Crecimiento Exponencial

La historia cuenta que un sabio llamado Sissa presentó el juego del ajedrez a un rey de la India. El rey, maravillado, le ofreció la recompensa que deseara. Sissa, con humildad, pidió algo aparentemente simple: un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta, y así sucesivamente, duplicando la cantidad en cada casilla hasta llegar a la 64. El rey, divertido por tan modesta petición, ordenó que se le pagara. Los tesoreros comenzaron el cálculo:

- Casilla 1: 1 grano.
- Casilla 2: 2 granos.
- Casilla 3: 4 granos.
- Casilla 4: 8 granos.
- Casilla 5: 16 granos...

Pronto se dieron cuenta de que la cantidad de trigo necesaria superaba con creces toda la producción del reino y, eventualmente, de todo el planeta.

Esta leyenda crea el *conflicto cognitivo* perfecto. Si pedimos al alumnado que calcule los granos para las primeras casillas, pronto se dará cuenta de que la suma repetida es impracticable. La multiplicación ($2 \times 2 \times 2 \dots$) es una mejora, pero escribirla para la casilla 20, por ejemplo, ya es tedioso y propenso a errores. Surge así una *necesidad imperiosa*: encontrar una forma más corta y eficaz de escribir una multiplicación de factores iguales. Esa necesidad tiene un nombre: la *potenciación*. La notación 2^{19} no es un capricho matemático, es la solución elegante y necesaria a un problema que, de otra forma, sería inmanejable.

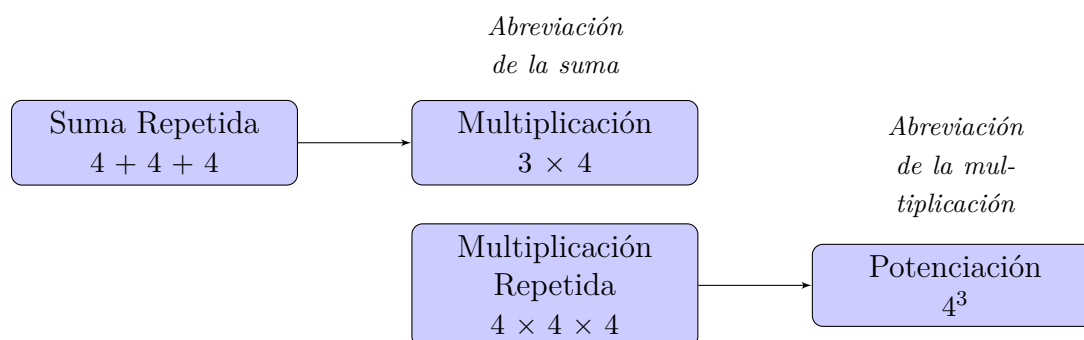


Figura 9.1: La progresión del lenguaje matemático como respuesta a la necesidad de abreviar y potenciar las ideas.

La Jerarquía como Problema de Comunicación. Si la potenciación resuelve un problema de *eficiencia*, la jerarquía de operaciones resuelve un problema de *comunicación* y *ambigüedad*. Sin un acuerdo sobre el orden en que se realizan las operaciones, las matemáticas dejarían de ser un lenguaje universal y preciso (Peterson, 2000). Para que el alumnado sienta esta necesidad, podemos plantear una situación cotidiana que

genere dos resultados distintos.

Mini-Caso de Aula: La jerarquía de operaciones como necesidad comunicativa

Un estudiante va a una tienda y se enfrenta a este problema: «*Compro una camiseta de 5€ y dos cómics de 3€ cada uno. ¿Cuánto he gastado en total?*».

La expresión matemática que modeliza la situación es: $5 + 2 \times 3$. Al resolverla, surgen dos posibles interpretaciones en la clase:

- *Interpretación A*: “Primero sumo 5 y 2, que son 7. Luego multiplico por 3. El resultado es 21€”.
- *Interpretación B*: “Primero multiplico los dos cómics por 3€, que son 6€. Luego sumo los 5€ de la camiseta. El resultado es 11€”.

Ambas interpretaciones son lógicas desde un punto de vista procedimental, pero solo una de ellas se corresponde con la realidad del problema. ¿Cómo podemos asegurar que todo el mundo entienda la expresión de la misma manera?

Este escenario demuestra que, sin un conjunto de reglas compartidas, una misma expresión matemática puede tener múltiples significados. La *jerarquía de operaciones* no es un conjunto de reglas arbitrarias impuestas, sino el “código de circulación” de las matemáticas que necesitamos para evitar el caos y garantizar que todos lleguemos al mismo destino. Es una *convención social* indispensable para la comunicación.

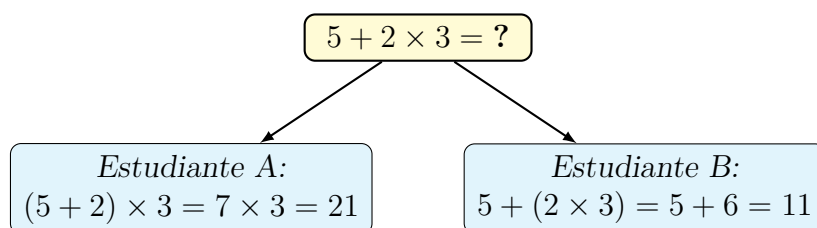


Figura 9.2: La misma expresión matemática, sin un acuerdo de jerarquía, conduce a una ambigüedad inaceptable.

El rol del futuro docente no es, por tanto, simplemente “enseñar la jerarquía”, sino *crear la necesidad* de ella. Al provocar este tipo de debates en el aula, el alumnado no recibe una regla, sino que participa en la construcción de un acuerdo, comprendiendo su propósito y su valor.

9.1.1.2 Conexión Curricular y Hoja de Ruta del Capítulo

Los problemas que hemos esbozado en el apartado anterior no son meros ejercicios de ingenio; constituyen el núcleo de una necesidad de aprendizaje que el currículo oficial reconoce y promueve. La introducción de las potencias, las raíces y la jerarquía de operaciones en el Tercer Ciclo de Educación Primaria no es un capricho, sino un paso deliberado para desarrollar una comprensión más profunda y estructurada del número y de las operaciones.

La *ORDEN de 30 de mayo de 2023*, que desarrolla el currículo en Andalucía, nos proporciona el anclaje normativo que legitima y guía nuestra labor docente.

Clave Didáctica: El Mandato Curricular de un Enfoque Geométrico

Saber Básico Clave: En el bloque A (Sentido Numérico) del Tercer Ciclo, se especifica el saber MAT.3.A.3.3.: «Potencia como producto de factores iguales. Cuadrados y cubos».

Implicación Didáctica Directa: La propia redacción del saber básico es una guía metodológica fundamental. Al enfatizar «cuadrados y cubos», el currículo nos está indicando inequívocamente que la puerta de entrada a la potenciación en Primaria debe ser *geométrica y manipulativa*. No se trata de una definición abstracta que memorizar, sino de una idea que se puede ver, tocar y construir. Esto conecta directamente con un enfoque constructivista del aprendizaje.

Este saber básico no es un fin en sí mismo, sino un vehículo para desarrollar las *Competencias Específicas* del área, que definen lo que el alumnado debe ser capaz de *hacer* con el conocimiento. Este capítulo contribuye de forma significativa al desarrollo de varias de ellas:

- *CE.MAT.2: Resolver situaciones problematizadas...* Las potencias y raíces son las herramientas necesarias para modelizar y resolver una nueva familia de problemas relacionados con el crecimiento exponencial, el área o la combinatoria, como el problema del tablero de ajedrez o el diseño de mosaicos.
- *CE.MAT.4: Utilizar el pensamiento computacional... reconociendo patrones...* La construcción de tablas de potencias (especialmente de base 10) es un ejercicio de reconocimiento de patrones. Del mismo modo, la aplicación de la jerarquía de operaciones es, en esencia, la ejecución de un *algoritmo*, un pilar del pensamiento computacional.
- *CE.MAT.6: Comunicar y representar... utilizando el lenguaje... matemático apropiado.* La notación de potencias y las reglas de la jerarquía son convenciones precisas del lenguaje matemático. Aprender a usarlas es aprender a comunicarse de forma clara y sin ambigüedad, un objetivo central de esta competencia.

Con este marco curricular como guía, este capítulo se ha diseñado no como un mero repositorio de actividades, sino como un mapa para guiar al futuro personal docente en un viaje que va desde el conocimiento profundo de la materia hasta su implementación efectiva en el aula. Este viaje es un proceso de *transposición didáctica* (Chevallard, 1991/2000).

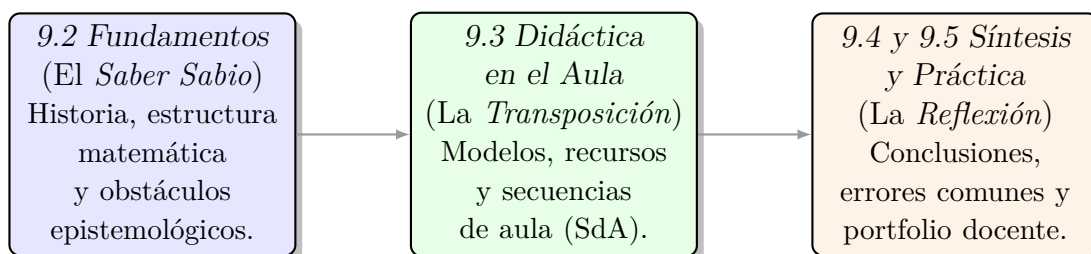


Figura 9.3: Hoja de ruta del capítulo, siguiendo el proceso de transposición didáctica.

Este itinerario está diseñado no solo para mostrar *qué* enseñar, sino para modelar

cómo pensar sobre la enseñanza de las matemáticas de una manera fundamentada, reflexiva y eficaz.

Profundizando: La Raíz Entera y el Currículo Oculto

La normativa andaluza (ORDEN de 30 de mayo de 2023) es muy precisa en su formulación. El saber básico clave que da soporte a nuestro trabajo es el *MAT.3.A.3.3.: «Potencia como producto de factores iguales. Cuadrados y cubos»*.

A primera vista, podría parecer que este saber se limita a que el alumnado calcule $3^2 = 9$ o reconozca que 25 es un “cuadrado”. Sin embargo, un enfoque competencial, como el que prescribe la LOMLOE, nos exige ir más allá de la mera definición. Debemos preguntarnos: ¿qué significa *comprender en profundidad* el concepto de “cuadrado”?

Una comprensión profunda de un concepto matemático nunca se logra estudiando únicamente los casos que cumplen la definición a la perfección. Se consolida, precisamente, al explorar sus límites. La pregunta didáctica más potente no es solo “¿qué es un cuadrado?”, sino también “¿qué ocurre cuando una cantidad *casi* forma un cuadrado?”.

Consideremos la tarea de construir un cuadrado con 29 fichas. Esta situación, aparentemente sencilla, es el corazón didáctico del concepto:

- El alumnado se enfrenta a un problema real: las fichas no encajan perfectamente.
- Se ven obligados a construir el mayor cuadrado posible (el de 5×5).
- Toman conciencia de que hay un “sobrante”, unas piezas que rompen la “cuadradez” (el resto, 4).

En esta acción, el alumnado no está aprendiendo un tema nuevo llamado “raíz entera”. Están, de hecho, explorando la naturaleza misma del concepto de “cuadrado” desde una perspectiva mucho más rica. Están descubriendo que la “cuadradez” es una propiedad exclusiva de ciertos números y que los demás números se pueden relacionar con ellos a través de una aproximación y un resto.

Por tanto, el estudio de la *raíz entera* y su *resto* no es una ampliación del currículo que se salga de los márgenes, sino una *profundización necesaria* y una condición indispensable para una comprensión relacional del saber básico «Cuadrados y cubos». Es la forma natural y constructivista de dar pleno sentido a la idea de cuadrado perfecto, mostrando qué sucede justo en su frontera. Ignorar esta exploración sería reducir el concepto a una simple memorización, traicionando el enfoque competencial que la propia normativa nos exige.

9.2 Fundamentos para el Docente: Perspectivas Histórica, Matemática y Epistemológica

Para enseñar un concepto con profundidad, no basta con dominar las actividades y recursos del aula. Es indispensable que el futuro personal docente posea un conocimiento sólido y bien estructurado del propio contenido matemático: su historia, su lógica interna y los desafíos conceptuales que entraña su aprendizaje. Esta sección

se dedica a construir ese *saber sabio*, el conocimiento que sustenta y da sentido a la práctica pedagógica.

Lejos de ser un mero apéndice teórico, este saber es una herramienta profesional de primer orden. Permite al docente tomar decisiones informadas, anticipar las dificultades del alumnado, interpretar sus errores de forma constructiva y, en definitiva, actuar no como un mero aplicador de técnicas, sino como un verdadero intelectual de su práctica.

9.2.1 Génesis Histórica: Una Lección de Empatía Pedagógica

La historia de las matemáticas es un espejo del desarrollo cognitivo. El camino que la humanidad recorrió durante milenios para desarrollar un concepto es, a menudo, un reflejo a gran escala del viaje que cada estudiante emprende en el aula. Comprender las dudas, los errores y las lentas y tortuosas sendas que siguieron las mentes más brillantes del pasado nos proporciona una lección fundamental de *empatía pedagógica*.

Si a civilizaciones enteras les costó siglos pasar de una idea intuitiva a una notación eficiente y coherente, ¿cómo no vamos a tener paciencia con un niño o una niña de 10 años que encuentra dificultades? Estudiar esta génesis nos permite ver los errores del alumnado no como fallos inexplicables, sino como etapas lógicas en un complejo proceso de construcción conceptual.

9.2.1.1 La Lenta Evolución de la Potenciación: De Babilonia a Descartes

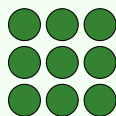
La idea de multiplicar un número por sí mismo es casi tan antigua como la propia multiplicación, pero su formalización en una notación eficiente como la nuestra (a^n) es sorprendentemente reciente. Este lento viaje nos muestra cómo una idea puede existir de forma práctica mucho antes de ser conceptualizada como un objeto matemático en sí mismo.

Las raíces prácticas en Babilonia y Grecia. Nuestro viaje comienza en las civilizaciones antiguas, donde la potencia aparece no como una operación, sino como una propiedad geométrica y numérica de gran utilidad.

- *Los babilonios (c. 1800 a.C.):* En sus tablillas de arcilla cuneiformes, nos legaron extensas tablas de números al cuadrado (n^2) y al cubo (n^3). No tenían una notación para la potencia, pero comprendían perfectamente su utilidad para resolver problemas relacionados con áreas, volúmenes y ecuaciones complejas (Boyer & Merzbach, 1999). Para ellos, el «cuadrado de un número» era una herramienta de cálculo fundamental.
- *Los pitagóricos (c. 500 a.C.):* Para los antiguos griegos, los números tenían forma. Concebían los *números figurados*, entre los que destacaban los *números cuadrados*. Un número era cuadrado si sus unidades podían disponerse formando un cuadrado geométrico perfecto. Así, 4, 9, 16 eran números cuadrados no solo por ser el resultado de 2×2 , 3×3 y 4×4 , sino porque «se veían» como cuadrados.

Clave Didáctica: Los números “cuadrados”

La idea pitagórica de «número cuadrado» es un recurso didáctico de incalculable valor en Primaria. Conecta directamente con el saber básico curricular MAT.3.A.3.3 «Cuadrados y cubos». Antes de introducir el símbolo 3^2 , podemos pedir al alumnado que, usando fichas o polícubos, construyan físicamente un cuadrado de lado 3. Esta experiencia *enactiva* (Bruner) dota de un significado concreto y tangible al concepto abstracto de «elevar al cuadrado», previniendo que se convierta en una regla memorística sin sentido.



El número 9, un «número cuadrado»

Los primeros pasos hacia una notación simbólica. Durante más de mil años, la idea de potencia se mantuvo ligada a la geometría de las dimensiones 2 (cuadrado) y 3 (cubo). Fue un obstáculo conceptual enorme pensar en potencias superiores. ¿Qué forma geométrica tiene un número a la cuarta potencia? Fue necesario un largo proceso de abstracción:

- *Diofanto de Alejandría* (c. 250 d.C.): En su obra *Aritmética*, dio un paso muy importante al usar abreviaturas para las potencias de un número desconocido. Llamó al cuadrado «dynamis» (Δ^Y) y al cubo «kybos» (K^Y). Aunque aún no era una notación general, fue uno de los primeros intentos de simbolizar la potencia como una entidad propia, desligada de la geometría (Heath, 1921).
- *Michael Stifel* (1544): Este matemático alemán, en su obra *Arithmetica Integra*, fue uno de los primeros en utilizar sistemáticamente el término «exponente» para referirse al número que indica la potencia y en explorar las reglas de su cálculo, incluyendo los exponentes cero y negativos (Stifel, 1544). Su trabajo fue un puente decisivo hacia la notación moderna.

La invención moderna: René Descartes. La notación que usamos hoy en día, con el exponente como un superíndice, fue popularizada por *René Descartes* en su apéndice *La Géométrie*, publicado en 1637. Este simple cambio simbólico representó una revolución en el pensamiento matemático, permitiendo expresar y manipular ideas complejas de forma compacta y eficiente.

Anclaje Histórico: Evolución de la Notación

Incluso en la invención de Descartes, la evolución no fue instantánea. En *La Géométrie*, Descartes utilizaba la notación de superíndice para potencias de 3 en adelante ($a^3, a^4, a^5, \dots$), pero para el cuadrado, seguía escribiendo aa en lugar de a^2 (Descartes, 1947). Este detalle nos enseña que incluso las grandes innovaciones son a menudo progresivas y que la estandarización de un lenguaje es un proceso social que lleva tiempo.

Este brevísimo recorrido histórico nos deja una enseñanza clave: la idea de po-

tencia tardó más de 3000 años en pasar de una herramienta de cálculo concreta a la notación abstracta y eficiente que hoy enseñamos en Primaria. Esta perspectiva histórica debe inspirar nuestra práctica docente, dotándonos de paciencia y de un profundo respeto por el desafío intelectual que supone para nuestro alumnado asimilar estas ideas.

9.2.1.2 La Raíz Cuadrada y la Crisis Filosófica de los Inconmensurables: El Legado de Hipaso

Si la historia de la potenciación es un relato sobre la búsqueda de eficiencia, la historia de la raíz cuadrada es un auténtico drama filosófico y conceptual. Su descubrimiento no fue una simple adición al conocimiento matemático, sino una bomba que hizo temblar los cimientos de la visión del mundo de una de las escuelas de pensamiento más influyentes de la Antigüedad: los Pitagóricos.

La escuela pitagórica (s. V a.C.) operaba bajo un principio casi místico: «*Todo es número*». Para ellos, “número” significaba número natural o la razón entre dos números naturales (lo que hoy llamamos números racionales). Creían que cualquier magnitud del universo –la longitud de una cuerda, el movimiento de los planetas, las proporciones de un templo– podía expresarse como una fracción. Esta creencia dotaba al universo de un orden racional y comprensible.

El conflicto surgió de su propio teorema más célebre. Al aplicar el Teorema de Pitágoras a un simple cuadrado de lado 1, descubrieron que la longitud de su diagonal (d) debía cumplir que $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. La longitud de la diagonal era, por tanto, $\sqrt{2}$. El problema irresoluble fue que, por más que lo intentaron, no pudieron encontrar dos números enteros p y q tales que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$. La diagonal del cuadrado más simple era *inconmensurable* con su lado; su relación no podía ser expresada como una fracción.

La leyenda, posiblemente apócrifa pero pedagógicamente potentísima, cuenta que fue el discípulo *Hipaso de Metaponto* quien demostró esta imposibilidad. Lejos de ser celebrado, su descubrimiento fue considerado una herejía que revelaba un defecto en la creación divina, una imperfección en el orden del cosmos. Se dice que Hipaso fue expulsado de la escuela y, según algunas versiones, ahogado en el mar por los propios pitagóricos para que el terrible secreto de los números “irracionales” (alogos, “silógica” o “in-decibles”) no saliera a la luz (Boyer & Merzbach, 1999).

Clave Didáctica: El Conflicto Cognitivo como Lección de Empatía Pedagógica

La historia de Hipaso es, para el futuro docente, una lección magistral de empatía pedagógica. El descubrimiento de $\sqrt{2}$ no fue un simple error de cálculo para los pitagóricos; fue una *ruptura conceptual* que generó un profundo *conflicto cognitivo* (Piaget, 1964/2018). Su conocimiento previo, exitoso y omniabarcante («Todo es número racional»), se demostró insuficiente para explicar una realidad tan simple como la diagonal de un cuadrado.

Cuando un estudiante de Primaria se enfrenta a que 5 – 8 “no se puede” en los naturales, o que hay números que no son ni enteros ni fracciones, está experimentando una versión a escala de la crisis pitagórica. Su mundo numérico,

ordenado y seguro, se ve desafiado. Nuestra labor no es simplemente “dar la nueva regla”, sino comprender la profundidad de esa ruptura, validar la lógica de su conocimiento anterior y crear los puentes (contextos, modelos) que le permitan reconstruir su esquema conceptual sobre cimientos más amplios y sólidos. La frustración del alumnado ante lo “imposible” es el eco de la que sintieron los grandes pensadores de la historia.

9.2.1.3 La Jerarquía de Operaciones: Una Convención Moderna para un Lenguaje Universal

Contrariamente a la creencia popular, la jerarquía de operaciones, a menudo encapsulada en reglas mnemotécnicas como PEMDAS (Paréntesis, Exponentes, Multiplicación/División, Adición/Sustracción), no es una ley matemática inmutable tallada en piedra desde la antigüedad. Se trata, en realidad, de una *convención social* relativamente moderna, cuya estandarización se consolidó principalmente a finales del siglo XIX y principios del XX (Peterson, 2000).

Durante los siglos XVII y XVIII, con el desarrollo de la notación algebraica moderna, no existía un acuerdo universal. La interpretación de una expresión como $a + b \times c$ a menudo dependía del contexto o de la notación específica del autor. Algunos usaban paréntesis explícitos para evitar la ambigüedad, mientras que otros se fiaban de que el lector comprendiera la lógica subyacente del problema.

La necesidad de una convención estándar surgió con la masificación de la educación y, en particular, con la publicación de libros de texto para una audiencia amplia. Para que las matemáticas funcionaran como un lenguaje universal, era imperativo que una misma expresión escrita significara lo mismo para un estudiante en Sevilla, en Londres o en Tokio. Los editores de textos matemáticos y las organizaciones de profesores de principios del siglo XX fueron los principales impulsores de esta estandarización. La llegada de los lenguajes de programación en el siglo XX cimentó definitivamente esta convención, ya que un ordenador necesita un conjunto de reglas explícitas e inequívocas para interpretar una expresión matemática.

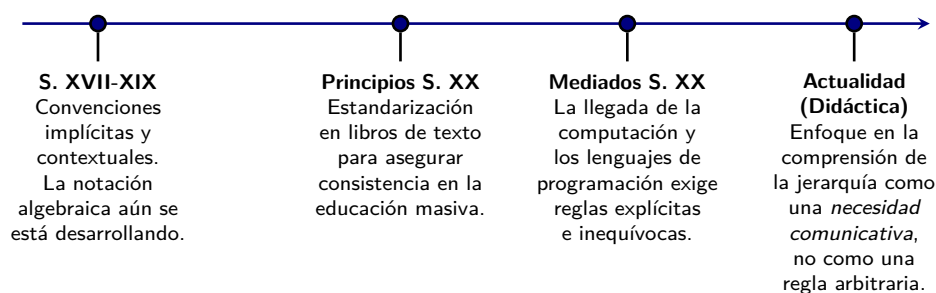


Figura 9.4: Línea temporal simplificada de la estandarización de la jerarquía de operaciones.

Clave Didáctica: La Jerarquía de Operaciones como Necesidad Comunicativa

El origen histórico de la jerarquía de operaciones es la clave para su enseñanza. Si la presentamos como un conjunto de reglas arbitrarias a memorizar (el infame PEMDAS), estamos fomentando una *comprensión instrumental* (Skemp, 1978). Esto no solo es pedagógicamente pobre, sino que induce a errores sistemáticos (como creer que la multiplicación *siempre* va antes que la división).

El enfoque didáctico correcto es presentar la jerarquía como la *gramática del lenguaje matemático*. Al igual que en el lenguaje natural necesitamos reglas (sujeto-verbo-predicado) para que nuestras frases tengan un significado claro y compartido, en matemáticas necesitamos un orden acordado para que nuestras “frases” numéricas no sean ambiguas. La pregunta clave que debe guiar nuestra enseñanza es: «*Si dos matemáticos en dos partes del mundo ven $5 + 2 \times 3$, ¿cómo podemos asegurar que ambos entiendan lo mismo y lleguen al mismo resultado?*». Esta perspectiva transforma la jerarquía de una regla a memorizar en una necesidad lógica y comunicativa que el alumnado puede comprender y valorar.

9.2.2 Estructura Matemática y Obstáculos Epistemológicos

Superada la perspectiva histórica, es fundamental que como docentes nos adentremos en la estructura matemática que da soporte a las potencias y raíces. No se trata de un ejercicio de erudición, sino de una necesidad profesional. Comprender *qué son* estos conceptos y *por qué* su aprendizaje es complejo nos permite pasar de ser meros aplicadores de recetas a ser arquitectos de experiencias de aprendizaje significativas. En esta sección, diseccionaremos tres ideas clave: el concepto de obstáculo epistemológico, la importancia del modelo geométrico y la naturaleza de la raíz como operación inversa.

9.2.2.1 El Obstáculo Epistemológico: Por qué $3^2 = 6$ es un error “lógico”

Uno de los errores más comunes y persistentes que comete el alumnado al iniciarse en la potenciación es la confusión entre la potencia y la multiplicación, como en el cálculo $3^2 = 3 \times 2 = 6$. Desde una didáctica superficial, este error se cataloga como un simple descuido. Desde una perspectiva más profunda, informada por las teorías de la educación matemática, este error es una ventana privilegiada al pensamiento del estudiante.

Este tipo de error es una manifestación perfecta de lo que en el Capítulo 7 definimos como un *obstáculo epistemológico*. La lógica de la multiplicación, que ha sido un conocimiento exitoso y robusto, se convierte en una barrera para comprender la nueva lógica de la potenciación.

El error $3^2 = 6$ es el ejemplo paradigmático de un obstáculo epistemológico. El alumnado ha consolidado durante años un modelo para la multiplicación ($a \times b$) que interpreta como “a veces b”. Al enfrentarse a una notación superficialmente similar como a^b , su mente sobre-generaliza el conocimiento previo exitoso y aplica el mismo patrón (ver Figura 9.5).

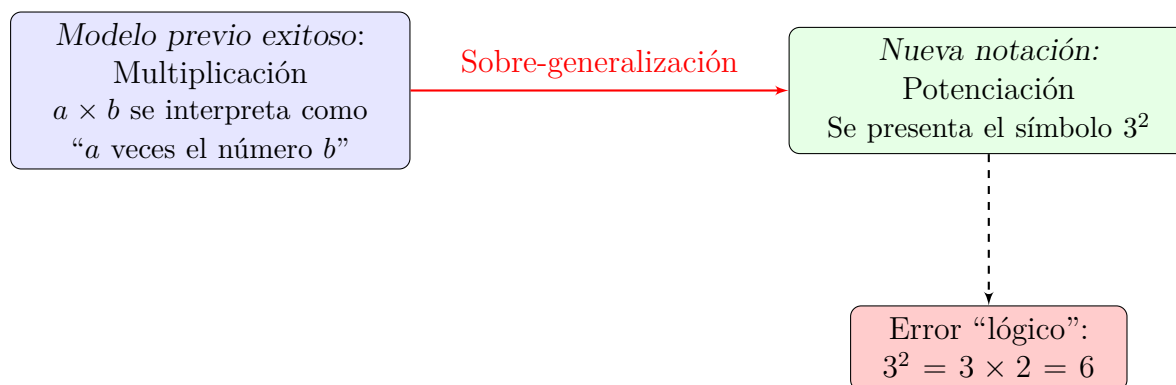


Figura 9.5: Representación del obstáculo epistemológico en la confusión de la potencia con la multiplicación.

Clave Didáctica: El Docente como Detective Cognitivo

Ante un error como $3^2 = 6$, nuestra labor no es simplemente corregir, sino diagnosticar. Debemos comprender que el estudiante no está siendo “ilógico”, sino que está aplicando una lógica que le fue útil. La intervención didáctica no debe ser punitiva, sino que debe crear un *conflicto cognitivo*: debemos proponer una situación (como construir físicamente un cuadrado de 3×3) que haga evidente la insuficiencia de su modelo previo y la necesidad de construir uno nuevo.

El verdadero problema subyacente está en el uso de la expresión “a veces el número b”, sin indicar la operación realizada. Si la operación múltiple son sumas, se “abrevia” como una multiplicación. Si la operación múltiple es una multiplicación, se “abrevia” como una potencia. La expresión inicial no indicaba la operación implicada y, por tanto, lleva a una interpretación sesgada y errónea de la situación.

9.2.2.2 El Fundamento Geométrico en Primaria: El Vínculo con Área y Volumen

La normativa andaluza (ORDEN de 30 de mayo de 2023) es explícita y nos ofrece la clave didáctica fundamental para superar el obstáculo anterior. El Saber Básico *MAT.3.A.3.3* no se limita a definir la potencia como “producto de factores iguales”, sino que añade dos términos específicos: “Cuadrados y cubos”.

Este añadido no es decorativo; es una directriz pedagógica. Nos indica que, en Educación Primaria, la puerta de entrada al concepto de potencia debe ser *geométrica y manipulativa*. Antes de que 3^2 sea un símbolo abstracto, debe ser el área de un cuadrado de lado 3. Antes de que 2^3 sea una operación, debe ser el volumen de un cubo de arista 2.

Este anclaje concreto y visual (Figura 9.6):

- *Dota de significado* a los términos “al cuadrado” y “al cubo”, que de otro modo son arbitrarios.
- *Previene el obstáculo epistemológico*, ya que es visualmente imposible confundir el área de un cuadrado de 3×3 (que contiene 9 unidades cuadradas) con una

colección de $3 + 3 = 6$ unidades.

- Sigue la secuencia de Bruner, partiendo de una fase enactiva (construir los cuadrados y cubos con polícubos) e icónica (dibujarlos) antes de llegar a la fase simbólica ($3^2, 2^3$).

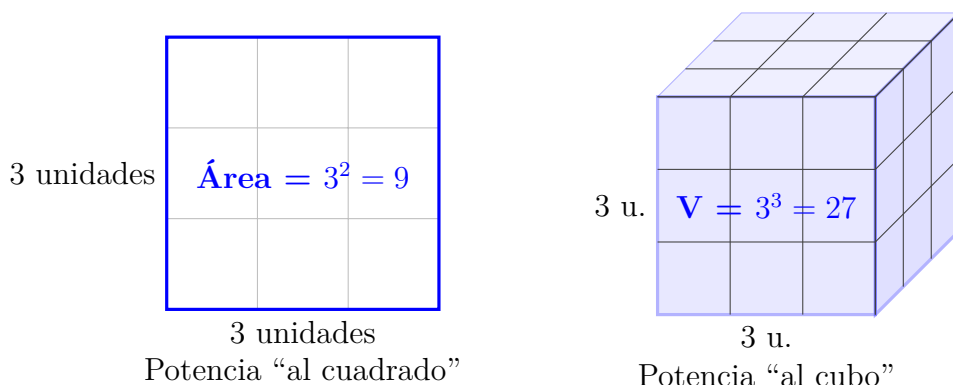


Figura 9.6: Modelos geométricos para la potencia cuadrada y cúbica.

9.2.2.3 La Raíz como Búsqueda del “Factor Perdido”

Una vez que el concepto de potencia se ha construido sobre una base geométrica sólida, la introducción de la raíz cuadrada se convierte en un paso natural y lógico. En lugar de presentarla como una operación nueva y misteriosa, debemos introducirla como la *operación inversa* natural a la potenciación, usando la misma analogía que conecta la división con la multiplicación.

Podemos guiar el razonamiento del alumnado a través de una analogía estructural:

- En la multiplicación, conocemos los factores y buscamos el producto: $A \times B = ?$
- En la división, conocemos el producto y un factor, y buscamos el otro: $C \div A = ?$
- En la potenciación (cuadrada), conocemos el factor que se repite y buscamos el producto: $A^2 = ?$
- En la *radicación (cuadrada)*, conocemos el producto final (el área) y buscamos el factor que, repetido, lo produce (el lado): $\sqrt{C} = ?$

La raíz cuadrada responde a la pregunta: «Si tengo un área de C unidades cuadradas, ¿cuánto debe medir el lado del cuadrado?». Esta concepción transforma la raíz de un algoritmo arcano en una búsqueda con significado (Figura 9.7).

En Primaria, el foco no está en el cálculo de raíces, y mucho menos en el algoritmo tradicional, que es procedimentalmente opaco y contrario al espíritu de la LOMLOE. El objetivo es que el alumnado *comprenda conceptualmente* la relación entre el lado y el área de un cuadrado. El trabajo debe ser manipulativo, planteando retos como: «Con 36 fichas cuadradas, ¿cuál es el cuadrado más grande que podéis formar? ¿Cuánto mide su lado?». Al resolver este problema, el alumnado no está “calculando una raíz”, está *construyendo su significado*.

Pero, ¿qué ocurre cuando el número de fichas no es un cuadrado perfecto? Imaginemos que planteamos el reto con 29 fichas. El alumnado, al manipularlas, descubrirá

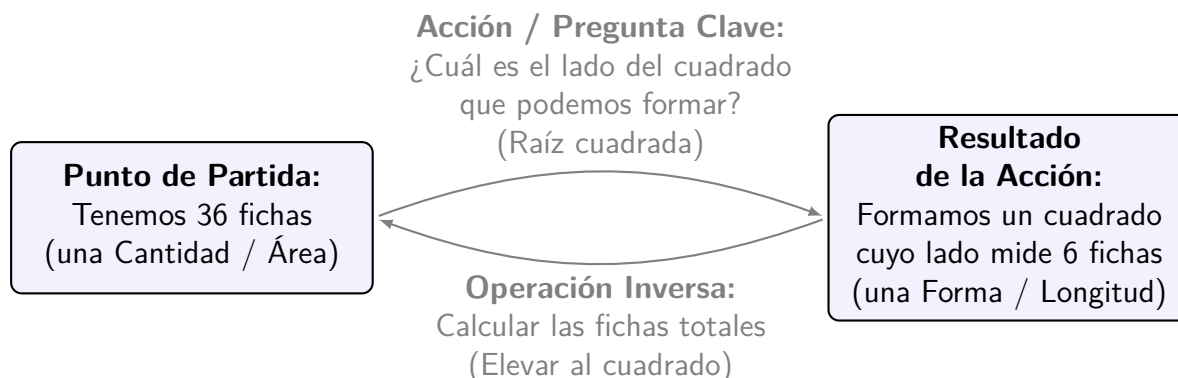


Figura 9.7: Relación conceptual entre Área y Lado en Primaria.

que puede construir un cuadrado de 5×5 , utilizando 25 fichas, pero le sobrarán 4. No podrá construir un cuadrado de 6×6 porque le faltarían fichas. Este escenario, aparentemente simple, revela una limitación en el concepto de raíz cuadrada exacta y crea la necesidad de ampliarlo.

Esta situación nos obliga a refinar nuestro lenguaje y nuestros conceptos. La pregunta ya no tiene una respuesta única y natural, lo que nos lleva a definir dos conceptos clave para este nivel educativo:

- *La Raíz Entera:* Es el lado del cuadrado perfecto más grande que podemos construir sin pasarnos del número de fichas que tenemos. En nuestro ejemplo, la raíz entera de 29 es 5, porque el cuadrado más grande que podemos formar es de lado 5.
- *El Resto:* Es el número de fichas que nos sobran una vez que hemos construido ese cuadrado. En nuestro caso, el resto es 4, porque $29 - 5^2 = 29 - 25 = 4$.

De este modo, la expresión $\sqrt{29}$ se aborda en Primaria no como un número irracional, sino como un proceso de construcción cuyo resultado se expresa con dos números naturales: la raíz entera y el resto.

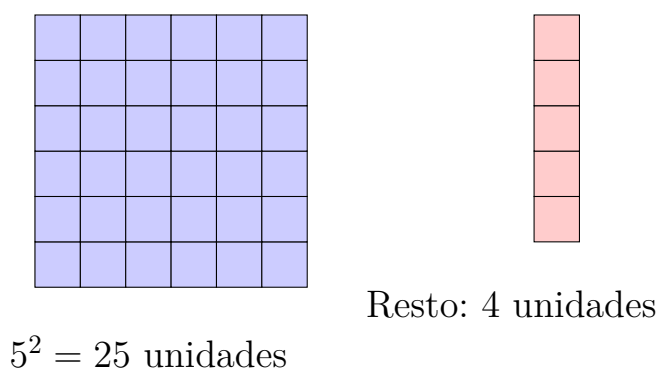


Figura 9.8: Visualización de la raíz cuadrada entera de 29. Se forma el mayor cuadrado posible (5×5) y se identifican las unidades restantes.

Clave Didáctica: De la Raíz Exacta a la Optimización de la Construcción

La introducción de la raíz entera y su resto es didácticamente muy potente. Transforma la raíz cuadrada de una operación que solo funciona para unos pocos números “especiales” (los cuadrados perfectos) en un proceso universal que siempre tiene una solución comprensible en el ámbito de los números naturales. El foco pedagógico se desplaza desde “calcular la respuesta exacta” hacia “optimizar una construcción”. La pregunta clave no es «¿Cuál es la raíz de 29?», sino «Con 29 fichas, ¿cuál es el mayor cuadrado que puedo construir y cuántas me sobran?». Este enfoque valora el proceso de aproximación y descomposición, conectando la radicación con la lógica de la división entera y su resto.

9.3 Didáctica en el Aula: La Transposición al Alumnado de Primaria

Una vez explorado el *qué* y el *porqué* de las potencias, las raíces y la jerarquía de operaciones desde una perspectiva matemática e histórica (el «saber sabio»), nos adentramos en el corazón de nuestra labor como docentes: el *cómo*. ¿Cómo transformamos este conocimiento, a menudo abstracto y complejo, en experiencias de aprendizaje significativas, accesibles y estimulantes para el alumnado de Educación Primaria?

Este proceso de transformación es el núcleo de la *transposición didáctica*, concepto fundamental acuñado por Yves Chevallard (1991/2000). No se trata de una simple simplificación del contenido, sino de una reconstrucción intencionada del saber para que sea aprendible, conservando su esencia y potencial formativo. En este apartado, construiremos los puentes didácticos necesarios para llevar estos conceptos al aula, pasando del «saber sabio» al «saber enseñado».

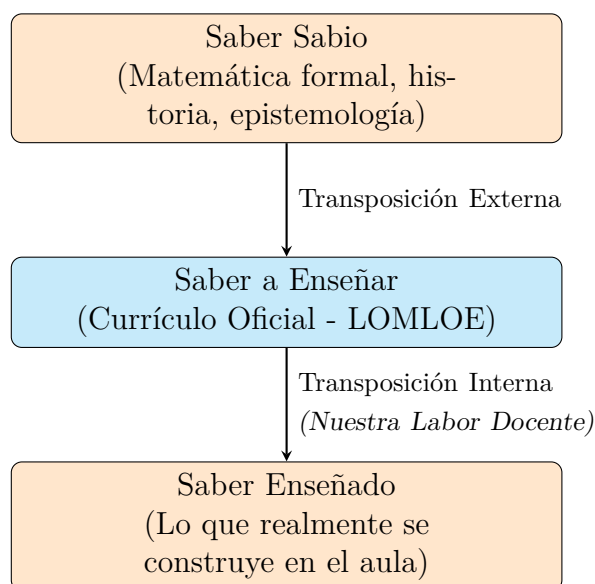


Figura 9.9: El proceso de transposición didáctica según Chevallard y nuestro rol en él.

Para llevar a cabo esta tarea, no partiremos de ocurrencias aisladas, sino que

nos apoyaremos en una serie de principios didácticos fundamentales que actúan como pilares de una práctica docente reflexiva y eficaz. Estos principios, que ya fueron introducidos en el Capítulo 1 de este manual, son las herramientas conceptuales que nos permitirán diseñar secuencias y recursos didácticos coherentes y potentes.

9.3.1 Principios Didácticos Rectores

Toda secuencia didáctica eficaz sobre potencias, raíces y jerarquía de operaciones debe estar fundamentada en un marco teórico sólido. Los siguientes tres principios no son meras teorías, sino guías prácticas para la acción en el aula.

9.3.1.1 La Secuencia de Bruner (Enactivo-Icónico-Simbólico) como Columna Vertebral

Como hemos establecido, nuestra hoja de ruta para introducir cualquier concepto abstracto en Primaria es la secuencia de Bruner (1966/1972). Esta progresión, que transita de la acción (*fase enactiva*) a la imagen (*fase icónica*) para culminar en el lenguaje (*fase simbólica*), es la única garantía de que los símbolos matemáticos se construyan sobre una base de significado. Para el concepto de potencia, esto significa que debemos empezar por construir físicamente cuadrados y cubos antes de representarlos y, finalmente, darles un nombre simbólico (como 3^2).

El mayor error pedagógico en este tema es comenzar por la fase simbólica, presentando la potencia como una definición a memorizar. Al hacerlo, privamos al símbolo de su significado y lo convertimos en un truco vacío, sentando las bases para una comprensión meramente instrumental.

Ejemplo: Aplicación de la secuencia de Bruner a la potenciación

- *Fase Enactiva:* Se entregan fichas cuadradas (como las del parchís o policubos) al alumnado y se les pide: «Construid un cuadrado que tenga 4 fichas en cada lado». El alumnado manipula el material hasta formar un cuadrado de 4×4 . A través de la acción, experimentan que necesitan 16 fichas.
- *Fase Icónica:* El docente pregunta: «¿Cómo podemos dibujar en el papel cuadriculado lo que acabáis de hacer para no olvidarlo?». El alumnado dibuja un cuadrado de 4×4 en su cuaderno. La imagen captura la estructura de la acción.
- *Fase Simbólica:* El docente institucionaliza: «Lo que habéis hecho (4 filas de 4 fichas) se escribe en matemáticas como 4×4 . Pero cuando los dos números son iguales, tenemos una forma aún más corta y especial de escribirlo: 4^2 . A este número lo llamamos “cuatro al cuadrado” porque, como habéis visto, ¡forma un cuadrado perfecto!».

El símbolo 4^2 no es ahora una regla arbitraria, sino la culminación de una experiencia concreta y visual.

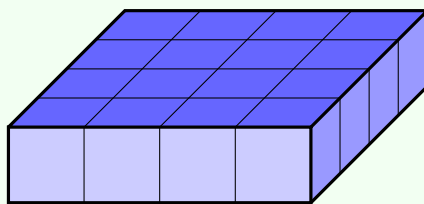
9.3.2 Itinerario de Aprendizaje: Secuencias, Recursos y Situaciones Clave

La construcción de los conceptos de potencia, raíz y jerarquía en el aula de Primaria no puede ser un acto de transmisión de definiciones. Debe ser un viaje cuidadosamente orquestado que guíe al alumnado desde la experiencia concreta hasta la abstracción simbólica. Este itinerario se fundamenta en la secuencia de Bruner, que actúa como nuestra brújula pedagógica, y en la creación de situaciones que revelen la *necesidad* de estas nuevas herramientas matemáticas (Brousseau, 2007).

Introduciendo la Potencia: De la Acción al Símbolo. El objetivo es que el alumnado descubra la potencia como una forma eficiente de expresar una multiplicación de factores iguales, conectando la notación simbólica con un modelo geométrico concreto, tal y como prescribe el currículo andaluz (Saber Básico MAT.3.A.3.3).

Mini-Caso de Aula: «Construyendo el Palacio Cuadrado»

Fase 1: Enactiva (la Acción). El docente plantea un reto: «Vamos a construir el patio cuadrado de un palacio. Necesito que cada equipo construya un cuadrado perfecto usando 16 policubos». Los equipos manipulan los policubos hasta formar un cuadrado de 4×4 .



Fase 2: Icónica (la Imagen). El docente pide: «Ahora, dibujad en vuestro papel cuadriculado una vista de pájaro de vuestro patio. ¿Cómo podemos escribir la cantidad de baldosas que habéis usado como una suma? ¿Y como una multiplicación?». El alumnado escribe:

- Suma: $4 + 4 + 4 + 4 = 16$
- Multiplicación: $4 \times 4 = 16$

Fase 3: Simbólica (la Institucionalización). El docente introduce la nueva notación como una necesidad: «¡Perfecto! Pero los matemáticos son un poco perezosos y siempre buscan la forma más corta de escribir las cosas. Cuando multiplican un número por sí mismo, como en 4×4 , lo abrevian así: 4^2 . Como esto forma un *cuadrado*, lo leemos como *cuatro al cuadrado*». Se repite el proceso para construir un cubo de $3 \times 3 \times 3$ con policubos, para introducir el concepto de *al cubo* (3^3).

Esta secuencia, fundamentada en Bruner (1966/1972), no enseña una definición, sino que permite al alumnado *construir el significado* del exponente 2 y 3 a través de la acción y la visualización.

Descubriendo la Raíz Cuadrada: La Búsqueda del Lado Perdido. La raíz cuadrada no se presenta como un algoritmo, sino como la operación inversa de la potenciación, anclada en una pregunta geométrica fundamental: si conozco el área de un

cuadrado, ¿cuánto mide su lado?

Mini-Caso de Aula: Construcción del concepto de raíz entera y resto

La raíz cuadrada no se presenta como un algoritmo, sino como la operación inversa de la potenciación, anclada en una pregunta geométrica fundamental. Pero, ¿qué ocurre cuando el área no es un cuadrado perfecto? La siguiente secuencia didáctica modeliza cómo guiar al alumnado en la construcción del concepto de *raíz cuadrada entera y resto*.

El Reto (Devolución): El docente presenta al alumnado, organizado en pequeños grupos, un sobre con 30 fichas cuadradas (o policubos) y una nota: «*El emperador desea un nuevo mosaico para su patio. Debe ser el cuadrado más grande posible que se pueda construir con estas 30 teselas. ¿Cuánto medirá el lado de vuestro diseño? ¿Sobrarán alguna pieza?*». Se transfiere así la responsabilidad del problema al alumnado (Brousseau, 2007).

Fase 1: Enactiva (la Acción). Los equipos manipulan las 30 fichas para intentar formar un cuadrado.

- *Primer intento:* Pueden construir un cuadrado de 4×4 , usando 16 fichas. Se dan cuenta de que sobran muchas (14), por lo que intuyen que se puede hacer uno más grande.
- *Segundo intento:* Intentan construir un cuadrado de 6×6 . Al llegar a la quinta fila, se dan cuenta de que necesitarían 36 fichas, pero solo tienen 30. El propio material les ofrece la retroalimentación: un cuadrado de 6×6 no es posible.
- *Conclusión de la acción:* Descubren que el cuadrado más grande que pueden construir es de 5×5 , para lo cual usan 25 fichas. Apartan las 5 fichas que les han sobrado. Han resuelto el problema a través de la acción directa.

Fase 2: Icónica (la Imagen). El docente pide a los grupos que registren su descubrimiento en el papel cuadriculado.

- *Pregunta guía del docente:* «¿Cómo podemos dibujar lo que habéis descubierto para que todos lo entiendan? ¿Dónde está el cuadrado que habéis construido? ¿Y las piezas que han sobrado?».
- *Elaboración:* El alumnado dibuja un cuadrado de 5×5 coloreado y, a su lado, las 5 fichas sobrantes. Este dibujo es el puente conceptual entre la manipulación y el símbolo. Captura la esencia del problema: una parte que forma el cuadrado y una parte que es el resto.

Fase 3: Simbólica (la Institucionalización). Una vez que varios grupos han llegado a la misma conclusión y la han representado, el docente interviene para dar un nombre formal a lo que han descubierto.

- *Diálogo del docente:* «¡Excelente trabajo! Lo que habéis hecho es muy importante. En matemáticas, a esta acción de buscar el lado del cuadrado

más grande posible que podemos hacer con un número de piezas la llamamos *calcular la raíz cuadrada entera*. Habéis descubierto que la raíz entera de 30 es 5. ¿Y a esas piezas que no hemos podido usar para el cuadrado? Las llamamos el *resto*. Para no tener que contar toda esta historia cada vez, los matemáticos lo escribimos de una forma muy corta, así:»

$$\sqrt{30} = 5, \quad r = 5$$

- *La Conexión Final*: «Esta expresión matemática $\sqrt{30} = 5, r = 5$ no es más que la historia de vuestro mosaico: nos cuenta que con 30 teselas pudimos construir un cuadrado de lado 5 y nos sobraron 5 piezas».

Esta secuencia, fundamentada en Bruner (1966/1972), no enseña una definición, sino que permite al alumnado *construir el significado* de la raíz entera y el resto a través de la acción y la visualización, haciendo que la notación simbólica sea la culminación lógica de su propia experiencia.

Recurso: Herramienta digital para visualizar la relación área-lado

Aplicaciones interactivas como GeoGebra permiten crear *applets* donde el alumnado puede manipular un cuadrado con un deslizador y observar cómo cambian dinámicamente el área y la longitud del lado. Esta herramienta visual es un excelente complemento a la manipulación física para consolidar la relación inversa entre elevar al cuadrado y la raíz cuadrada.

Enseñando la Jerarquía de Operaciones: Las Reglas del Juego Común. La jerarquía no es un concepto matemático, sino una *convención social* necesaria para la comunicación. El objetivo didáctico no es la memorización de una regla, sino la comprensión de su necesidad para evitar la ambigüedad. La introducimos generando un *conflicto socio-cognitivo* (Yackel & Cobb, 1996).

Mini-Caso de Aula: El conflicto cognitivo como origen de la jerarquía de operaciones

El docente escribe en la pizarra $2 + 3 \times 4$ y dice: «Mi calculadora se ha roto y da dos resultados distintos. Unas veces dice 20 y otras 14. ¿Cuál tiene razón?».

- *Conflicto*: Se pide al alumnado que, en parejas, defiendan una de las dos posturas. Un grupo argumentará que se opera de izquierda a derecha $((2 + 3) \times 4 = 20)$, mientras que otro podría argumentar que la multiplicación es “más fuerte”.
- *Necesidad del Acuerdo*: El debate revelará que, sin un acuerdo previo, la misma expresión matemática puede tener múltiples significados, lo que la haría inútil como lenguaje universal.
- *Institucionalización de la Norma*: El docente explica que la comunidad matemática global llegó a un acuerdo, a unas “normas de tráfico”, para que todos nos entendamos. Se presenta entonces el modelo visual de la

jerarquía.

Clave Didáctica: ¡Prohibido PEMDAS/BODMAS sin Comprensión!

Enseñar reglas mnemotécnicas como PEMDAS (Paréntesis, Exponentes, Multiplicación, División, Adición, Sustracción) de forma acrítica es una práctica pedagógica de alto riesgo. Fomenta una *comprensión instrumental* (Skemp, 1978) que induce a errores sistemáticos, como pensar que la multiplicación *siempre* se hace antes que la división, o la adición antes que la sustracción. Esto es falso, ya que tienen el mismo nivel de prioridad y se resuelven según su orden de aparición. Es preferible utilizar modelos visuales que enfatizen los *niveles de prioridad*.

El modelo de la “**pirámide de poder**” (Figure 9.10) es una alternativa visual mucho más robusta. Organiza las operaciones en niveles jerárquicos, dejando claro qué operaciones tienen la misma prioridad y cómo proceder en esos casos.

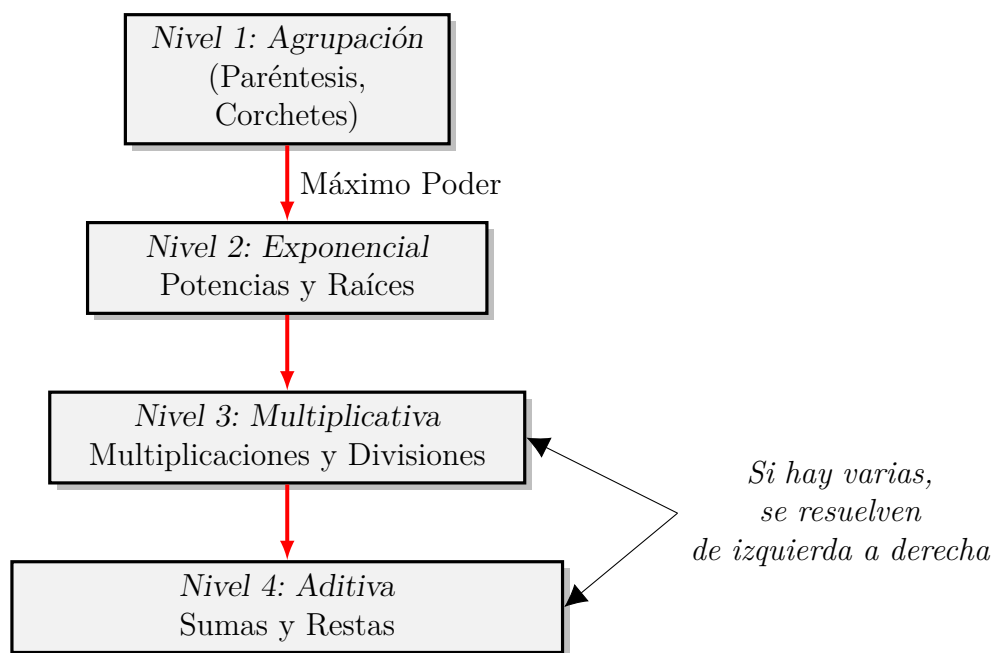


Figura 9.10: Modelo visual de la “Pirámide de Poder” para la jerarquía de operaciones.

Recurso: El Juego del “24” (Aproximación Lúdica)

Una forma excelente de que el alumnado interiorice la jerarquía como una herramienta estratégica es a través de juegos. Se entregan 4 cartas de la baraja (ej. 1, 2, 3, 4) y el objetivo es combinarlas con cualquier operación para obtener el número 24. El alumnado pronto descubre que necesita usar paréntesis y seguir un orden específico para poder ganar. Por ejemplo, con 1, 2, 3, 4, una solución es $(4 + 2) \times (3 + 1) = 24$, mientras que sin paréntesis no sería posible^a.

^aHay más soluciones ... ¿puedes encontrarlas?

9.4 Conclusiones y Orientaciones para la Práctica Docente

Este capítulo ha presentado las potencias, las raíces y la jerarquía de operaciones no como temas aislados, sino como una evolución natural y necesaria del pensamiento aritmético. Abordar estos contenidos en Primaria supone guiar al alumnado en un importante salto hacia la *abstracción estructurada*, un hito que sienta las bases del futuro pensamiento algebraico. Las siguientes orientaciones buscan sintetizar las ideas clave y proporcionar un marco de actuación claro y fundamentado para el futuro personal docente.

9.4.1 Síntesis de Ideas Clave: El Salto a la Abstracción Estructurada

La introducción de estos nuevos conceptos debe entenderse como la construcción de una nueva capa de significado sobre el campo multiplicativo. La cohesión de estas tres ideas es la clave para un aprendizaje significativo:

- *La potencia* no es solo una operación nueva, es la respuesta a la pregunta: «*Si la multiplicación abrevia la suma, ¿qué abrevia la multiplicación?*». Es la culminación de la búsqueda de un lenguaje más potente y eficiente para describir el crecimiento y los patrones.
- La raíz cuadrada, en el contexto de Primaria, es su inversa natural y geométrica. Su significado no es un mero cálculo, sino un *proceso de construcción*. Responde a la pregunta: «*Si conozco el área de un cuadrado, ¿cómo encuentro la medida de su lado?*». Este enfoque se extiende más allá de los cuadrados perfectos: la *raíz entera* de un número se convierte en la búsqueda del “cuadrado más grande posible” que se puede construir con una cantidad dada, y el *resto* es la evidencia tangible de lo que sobra. Su significado nace de la acción de construir, deconstruir y analizar los límites de la construcción.
- *La jerarquía de operaciones* es la gramática que permite que estas nuevas y potentes ideas convivan de forma ordenada con las ya conocidas. Responde a la necesidad de comunicación: «*¿Cómo nos aseguramos de que todos entendemos lo mismo al leer una expresión matemática?*». No es una regla arbitraria, sino una convención social (Yackel & Cobb, 1996) fundamental para que las matemáticas funcionen como un lenguaje universal.

En conjunto, estos tres elementos equipan al alumnado con herramientas para pasar de un pensamiento aditivo (lineal) a un pensamiento multiplicativo y exponencial, comprendiendo que las operaciones no solo calculan, sino que también estructuran y organizan la información.

9.4.2 Enfoque en Primaria: Lo Esencial y lo Accesorio (Lo que SÍ y lo que NO)

Dada la complejidad conceptual de estos temas, es vital que el futuro docente tenga claro el alcance y las limitaciones de su tratamiento en esta etapa. El objetivo no es el dominio procedimental, sino la construcción de un significado intuitivo y robusto.

Implicación didáctica: Qué Hacer y Qué Evitar (en Primaria)

LO QUE SÍ DEBEMOS HACER

- *Dedicar tiempo a la construcción física y visual.* Usar policubos para construir cubos, papel cuadriculado y fichas para formar cuadrados. Anclar siempre a^2 en el área y a^3 en el volumen. Este es el mandato del currículo andaluz y la aplicación directa del principio enactivo de Bruner (1966/1972).
- *Utilizar contextos de patrones, crecimiento y diseño.* Plantear problemas como la leyenda del ajedrez, el diseño de mosaicos o el crecimiento de poblaciones (de forma simplificada) para que la necesidad de la potencia y la raíz emerja de la situación.
- *Tratar la jerarquía como un “juego de reglas para entendernos”.* Fomentar la discusión en el aula sobre la ambigüedad (ej. ¿cuánto es $2 + 3 \times 4$?) para que el alumnado descubra por qué es necesaria una convención, en lugar de imponerla como una regla mágica.
- *Introducir la raíz cuadrada por estimación y manipulación.* El objetivo es que comprendan que $\sqrt{29}$ es “el lado del cuadrado más grande que puedo hacer con 29 fichas” (que es 5) y que me “sobran 4”.

LO QUE NO DEBEMOS HACER

- *Enseñar el algoritmo tradicional de la raíz cuadrada.* Es un procedimiento opaco, puramente mecánico y que no aporta nada a la comprensión conceptual del alumnado en esta etapa. Su enseñanza es contraria al enfoque competencial de la LOMLOE.
- *Memorizar propiedades abstractas* ($a^n \times a^m = a^{n+m}$) sin una exploración previa. Si se introducen, debe ser a través de la observación de patrones con potencias de base 10, donde los exponentes se pueden relacionar con la cantidad de ceros.
- *Trabajar con raíces no cuadradas o exponentes no naturales.* El ámbito de la Educación Primaria se limita, según la normativa, a cuadrados y cubos, y a raíces cuadradas exactas o enteras. Profundizar más allá genera una complejidad innecesaria.

9.4.3 El Docente como Detective Cognitivo: Análisis de Errores Comunes e Intervención

Mini-Caso de Aula: El error de operar de izquierda a derecha

Evidencia (Observación): Un alumno o alumna calcula $10 - 2^3$ y responde con seguridad: «Primero 10 menos 2 son 8. Luego, 8 al cubo... uff, es muy grande, 8 por 8 son 64, y 64 por 8 son... ¡512!».

Hipótesis (Diagnóstico Cognitivo): El error no es de cálculo (de hecho, su cálculo de 8^3 es correcto), sino conceptual. El alumno no ha interiorizado la jerarquía de operaciones. Está aplicando un esquema de conocimiento previo que ha sido exitoso hasta ahora: operar secuencialmente de izquierda a derecha. Esto constituye un claro *obstáculo epistemológico* (Bachelard, 1938/2000; Brousseau, 2007), donde un conocimiento anterior correcto impide la adquisición de uno nuevo.

Intervención Didáctica (No corregir, sino crear un conflicto): El objetivo es hacer visible la estructura invisible de la operación.

1. *No validar el resultado:* La primera reacción no debe ser «No, está mal», sino una pregunta que invite a la reflexión.
2. *Usar una analogía o modelo visual:* El docente pregunta: «En las operaciones, como en los videojuegos, hay ‘jefes finales’ y ‘soldados rasos’. Hay operaciones con más poder que otras. ¿Cuál crees que tiene más poder aquí, la resta o la potencia?». Se puede presentar el modelo de la «Pirámide de Poder» (Figura 9.10).
3. *Fomentar la acción y la metacognición:* «Según nuestra pirámide, ¿qué operación deberíamos hacer primero? Rodéala con un círculo en la pizarra. Ahora, calcula solo esa parte. ¿Qué nos queda? ¿Qué harías ahora?». Al guiarle para que primero calcule $2^3 = 8$ y luego haga $10 - 8$, el alumno no solo llega al resultado correcto, sino que reconstruye su proceso mental.

9.4.4 La Evaluación Formativa como Herramienta de Regulación

La evaluación de estos contenidos debe ser coherente con el enfoque didáctico propuesto: centrada en la comprensión y no solo en la corrección de los resultados. La evaluación formativa es el proceso continuo de recoger evidencias del aprendizaje para ajustar la enseñanza.

En este tema, la evaluación formativa se centra en responder a preguntas como:

- *Sobre la potencia:* ¿El alumnado puede explicar qué significa 5^2 usando un dibujo de un cuadrado? ¿Puede relacionar el crecimiento de las potencias de 2 con el problema del cofre mágico?
- *Sobre la raíz:* Ante un puñado de 40 fichas, ¿es capaz de determinar que el cuadrado más grande que puede construir es de 6×6 y que le sobran 4? ¿Puede verbalizar este proceso como la búsqueda de la raíz entera?
- *Sobre la jerarquía:* ¿Justifica el orden de las operaciones basándose en la necesidad de un acuerdo o en una lógica de “poder”, en lugar de recitar una regla mnemotécnica (como PEMDAS) sin entenderla?

- *Sobre los procesos:* Al resolver un problema, ¿es capaz de verbalizar su plan de acción? ¿Utiliza los modelos visuales (diagramas, dibujos) como herramientas para pensar?

Las herramientas para esta evaluación son la *observación atenta* durante el trabajo en el aula, las *preguntas estratégicas* que revelan el pensamiento del estudiante y el *análisis de sus producciones* (dibujos, esquemas, explicaciones escritas). El objetivo no es poner una nota, sino tomar decisiones informadas sobre los siguientes pasos a dar en la enseñanza.

Hemos alcanzado la cima del edificio de los números enteros. Sin embargo, desde esta altura, descubrimos una verdad incómoda: este edificio está lleno de huecos. No podemos usarlo para medir media pizza, compartir una herencia o representar una probabilidad. El universo de los números contables se nos ha quedado pequeño. La siguiente Parte de nuestro manual nos invita a dar el salto más profundo de todos: abandonar el mundo discreto de los enteros para sumergirnos en el universo denso y continuo de las *fracciones y los decimales*.

9.5 Para la Reflexión y el Portfolio Docente

1. Análisis Crítico de un Recurso Didáctico.

Consigna: Busca en YouTube un vídeo didáctico, o una doble página de un libro de texto de 6º de Primaria, que explique la jerarquía de operaciones. Realiza un análisis crítico.

- *Enfoque de Comprensión:* ¿El recurso presenta la jerarquía como un conjunto de reglas arbitrarias a memorizar (comprensión instrumental) o justifica su necesidad como una convención para un lenguaje universal (comprensión relacional)?
- *Uso de Representaciones:* ¿Utiliza algún modelo visual como la «pirámide de poder» para facilitar la comprensión?
- *Propuesta de Mejora:* Basándote en tu análisis, ¿qué modificarías para que el recurso fuera más potente y coherente con el currículo andaluz?

2. Diseño de una Actividad de Descubrimiento Guiado: El Exponente Cero.

Consigna: Diseña una actividad de 20-25 minutos para alumnado de 6º de Primaria para que descubran por sí mismos la regla del exponente cero ($a^0 = 1$), usando calculadoras.

- *Secuencia de Pasos:* Detalla los pasos de exploración (ej. calcular 10^4 , 10^3 , 10^2 ...), búsqueda del patrón (dividir por 10), predicción (10^0 ?), y verificación.
- *Justificación Pedagógica:* Explica brevemente cómo tu diseño se apoya en los principios de aprendizaje constructivista.

3. Diseño de una Micro-Secuencia Didáctica: El Sentido de la Raíz Entera.

Consigna: Diseña una breve secuencia de actividades (20-25 minutos) para 6º de Primaria para construir el significado de la *raíz cuadrada entera y el resto*, basándose en el modelo geométrico. Utiliza como ejemplo $\sqrt{29}$.

- a) *Fase Enactiva (la acción):* Describe la tarea manipulativa (ej. con fichas cuadradas) y la pregunta clave para iniciar la exploración.

- b) *Fase Icónica (la imagen)*: Describe cómo guiarías al alumnado para que dibuje el resultado de su acción.
- c) *Fase Simbólica (el registro)*: Describe cómo conectarías la acción y el dibujo con la notación formal $\sqrt{29} = 5$, resto 4.

IV Profundizando en el campo numérico: fracciones y decimales

TRAS haber cimentado el edificio de los números naturales y enteros (Parte II) y haber explorado las estructuras aditivas y multiplicativas que rigen sus operaciones (Parte III), el presente módulo, *Profundizando en el Campo Numérico: Fracciones y Decimales*, nos invita a realizar un formidable salto conceptual. La introducción de las fracciones y los números decimales no es una simple ampliación del repertorio numérico; representa una auténtica *ruptura epistemológica* (Brousseau, 2007) que transforma radicalmente el pensamiento del alumnado. Abandonamos el universo discreto y contable de los números enteros para adentrarnos en el universo denso y continuo de la medida y la relación.

Este tránsito supone uno de los mayores desafíos didácticos de la Educación Primaria. El conocimiento previo del alumnado sobre los números naturales, hasta ahora tan exitoso y robusto, se convierte en un potente *obstáculo epistemológico*. Reglas que parecían universales, como «multiplicar siempre agranda» o «entre dos números consecutivos no hay ningún otro», se demuestran falsas en este nuevo territorio. La rica polisemia de la fracción y la sutileza del decimal, que extienden la lógica posicional de nuestro sistema de numeración, exigen una reconstrucción profunda de la idea misma de número (Behr et al., 1983; Hiebert & Wearne, 1992).

Este módulo se articula como un viaje guiado a través de esta reconstrucción. En dos capítulos esenciales, abordaremos este desafío desde nuestra doble perspectiva de docentes: como conocedores del contenido y como arquitectos del aprendizaje.

En el primer capítulo (Capítulo 10), nos sumergiremos en el *saber sabio* de la *fracción*. Exploraremos su rica polisemia (parte-todo, cociente, razón, operador), desentrañaremos sus nociones clave como la equivalencia y, finalmente, trazaremos un itinerario didáctico para construir el significado de sus operaciones de forma visual y manipulativa.

En el segundo capítulo (Capítulo 11), nos adentraremos en el mundo de los *números decimales*, entendiéndolos no como un tema nuevo, sino como la culminación del Sistema de Numeración Decimal. Analizaremos su conexión indisoluble con la fracción y el porcentaje, y diseñaremos secuencias didácticas que, ancladas en la secuencia de Bruner, permitan al alumnado construir su significado y el de sus algoritmos sobre una base sólida y comprensible.

El objetivo de este módulo es, por tanto, dotar al futuro personal docente de las herramientas conceptuales y didácticas para guiar a su alumnado en este crucial viaje. No se trata de enseñar reglas, sino de transformar la percepción del número. Un dominio profundo de este campo es indispensable, no solo para el éxito matemático posterior, sino para formar una ciudadanía capaz de interpretar con sentido crítico la ingente cantidad de información cuantitativa que define nuestro mundo.

10 Las Fracciones: Un Mundo de Relaciones y Cantidades

UNA vez explorado el terreno firme y predecible de los números naturales y enteros, nos adentramos en uno de los territorios más fascinantes y, a la vez, más desafiantes de la aritmética escolar. El estudio de las fracciones marca un punto de inflexión crucial en el desarrollo del pensamiento numérico del alumnado de Educación Primaria. Supone una ampliación significativa del concepto de número, una auténtica *ruptura epistemológica* (Brousseau, 2007) que trasciende el ámbito de lo contable para sumergirse en un universo de relaciones. Las fracciones no solo representan cantidades, sino también complejas conexiones entre partes y todos, cocientes, razones y operadores que transforman el mundo (Behr et al., 1983; Kieren, 1976). Esta riqueza semántica, si bien las dota de una gran potencia expresiva y aplicabilidad, constituye uno de los principales desafíos para su enseñanza y aprendizaje.

Este capítulo se dedica a explorar en profundidad este nuevo universo. Se desglosarán los múltiples significados que una fracción puede encapsular y se ofrecerán estrategias didácticas para construir las operaciones básicas, siempre con un énfasis en la comprensión conceptual y el apoyo en modelos visuales y manipulativos, sin olvidar la identificación de las dificultades y errores comunes más importantes.

10.1 Introducción: La Gran Ruptura con lo Contable

Hasta ahora, el universo numérico del alumnado ha sido el de los números naturales y enteros. Un mundo seguro, ordenado y predecible, cuya función principal es *contar* objetos discretos. La fracción dinamita los cimientos de este mundo. Representa el primer gran encuentro con un tipo de número que no sirve para contar en el sentido tradicional, sino para *medir, comparar y relacionar* (Brousseau, 2007). Pasar de pensar en *¿cuántos hay?* a pensar en *¿qué parte de...?* o *¿qué relación con...?* es un salto cognitivo de enorme magnitud.

Este salto no es un capricho del currículo. Es el eco de una necesidad humana fundamental. Las fracciones no nacieron en la mente de un matemático abstracto, sino de la necesidad práctica de resolver problemas que los números enteros no podían abordar.

10.1.1 El Salto Conceptual

La enseñanza de las fracciones supone un cambio de paradigma fundamental en el pensamiento del alumnado, ya que muchas de las «reglas» que funcionaban en el mundo de los números naturales dejan de ser válidas:

- La multiplicación ya no siempre «agrand» ($\frac{1}{2} \times 8 = 4$).
- La división ya no siempre «empequeñece» ($8 \div \frac{1}{2} = 16$).
- Entre dos números consecutivos, como 0 y 1, ahora existen infinitos números nuevos.
- Un número con «cifras más grandes» no es necesariamente mayor ($\frac{1}{4}$ no es mayor que $\frac{1}{2}$).

Esta ruptura con la lógica anterior es la fuente de muchas de las dificultades que experimenta el alumnado. Su mente no es una pizarra en blanco; es un edificio conceptual sólidamente construido sobre los números naturales. La llegada de la fracción no es una simple ampliación, sino una profunda reconstrucción de ese edificio.

10.1.2 La Necesidad Hecha Número

El salto conceptual desde los números naturales hacia las fracciones no es un capricho del currículo ni una mera sofisticación matemática. Es el eco de una necesidad humana fundamental. Las fracciones no nacieron en la mente de un matemático abstracto que buscaba extender un sistema, sino en la realidad tangible de civilizaciones que se enfrentaron a problemas que los números enteros, por su propia naturaleza contable, eran incapaces de resolver (Boyer & Merzbach, 1999).

Este origen práctico es la primera y más importante clave didáctica. Nuestra labor como docentes no es presentar la fracción como una nueva regla del juego, sino recrear en el aula la necesidad que le dio vida. El alumnado debe sentir, al igual que nuestros antepasados, que el mundo de los números naturales se queda pequeño para describir y operar sobre la realidad.

Anclaje Histórico: Las fracciones en la cultura egipcia

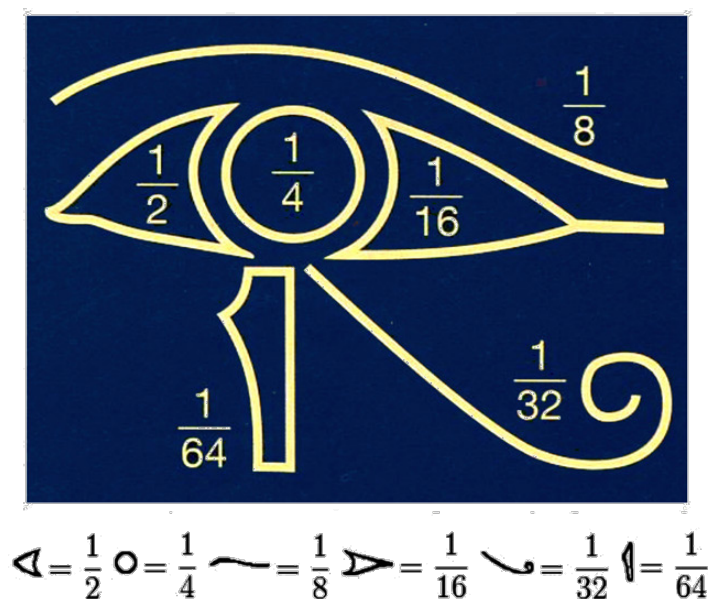
La civilización egipcia, por ejemplo, dependía existencialmente del río Nilo. Sus crecidas anuales fertilizaban las tierras, pero también borraban las lindes de los campos de cultivo. Cada año, los escribas y agrimensores, conocidos como los «*estiradores de cuerda*», debían volver a medir y repartir las tierras. ¿Qué ocurría si un campo no medía un número exacto de unidades? ¿Cómo repartir una cosecha de grano entre un número de trabajadores si la división no era exacta? (Ibrah, 1997).

Para resolver estos problemas, los egipcios desarrollaron un sofisticado sistema de *fracciones unitarias* (aquellas con numerador 1). Para ellos, una fracción como $\frac{3}{4}$ no se concebía directamente, sino que se expresaba como una suma de partes únicas: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. Esta aproximación, que hoy nos parece compleja, es didáctica-mente muy reveladora: muestra que la idea conceptualmente más primitiva y fundamental de la fracción es la de *una parte de*.

El artefacto más célebre de este sistema es el *Ojo de Horus* (Figura 10.1), un símbolo místico donde cada una de sus partes representaba una fracción unitaria ($\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{64}$) usada para medir grano y otros áridos.

Implicación para el aula: La historia de Egipto nos enseña que el significado de la fracción está intrínsecamente ligado a la *medida* y el *reparto*. Antes de enseñar a operar, debemos plantear problemas en el aula donde dividir un todo en partes iguales se convierta en la única solución posible.

La fracción nació, por tanto, como una herramienta para dar sentido a un mundo que es continuo y divisible, no solo discreto y contable. Es el lenguaje que nos permite hablar con precisión de las cantidades que viven *entre* los números enteros.



En <https://tamtampress.es/2015/12/15/el-ojo-matematico-de-horus/> puedes encontrar un desarrollo más extenso de este artefacto egipcio. La imagen ha sido obtenida en esta página.

Figura 10.1: El Ojo de Horus. Cada parte representaba una fracción unitaria usada para medir grano. La suma de sus partes es $\frac{63}{64}$, considerándose que el $\frac{1}{64}$ faltante era la magia del dios Thot.

Clave Didáctica: El Desafío de Contar a Relacionar

La enseñanza de las fracciones supone un cambio de paradigma fundamental en el pensamiento del alumnado. Debemos ser conscientes y explícitos sobre estas transiciones:

- *Se pasa de Contar a Medir:* Los números ya no solo responden a «¿cuántos hay?», sino también a «¿qué parte es?» o «¿dónde está ubicado entre 0 y 1?».
- *Se pasa de lo Absoluto a lo Relativo:* El valor de una fracción (ej. $\frac{1}{2}$) no es absoluto; depende intrínsecamente de la unidad de referencia o el “todo”. Media pizza no es lo mismo que media galleta.
- *Se pasa de una Lógica Aditiva a una Multiplicativa:* Las relaciones entre fracciones a menudo implican razonamiento proporcional y multiplicativo, no solo aditivo.

Nuestra tarea como docentes es facilitar esta transición, haciendo explícitos estos cambios y proporcionando los modelos y contextos necesarios para que el alumnado reconstruya su concepción del número.

10.1.3 Hoja de Ruta del Capítulo

Para abordar la enseñanza de las fracciones de una manera fundamentada y eficaz, este capítulo se ha diseñado como un viaje en dos grandes etapas. Este recorrido dual nos equipará no solo con el conocimiento del concepto en sí, sino también con las herramientas pedagógicas para guiar a nuestro alumnado en su construcción.

1. *La primera etapa del viaje nos convertirá en exploradores del qué:* Nos adentraremos en los *Fundamentos para el Docente* (apartado 10.2). Aquí actuaremos como matemáticos y epistemólogos para desentrañar la naturaleza profunda de la fracción. Exploraremos su rica polisemia —los múltiples “rostros” que puede adoptar— y sus nociones clave. Este es el *Saber Sabio*, el conocimiento del contenido que nos dará la seguridad y la profundidad necesarias para enseñar con confianza.
2. *La segunda etapa nos transformará en arquitectos del cómo:* Una vez comprendido el destino, trazaremos el mapa para llegar a él en el apartado de *Didáctica de las Fracciones* (apartado 10.3). Aquí actuaremos como pedagogos y diseñadores de instrucción. Analizaremos los modelos visuales, las secuencias de aprendizaje, los errores comunes y, fundamentalmente, cómo todo este conocimiento didáctico se alinea con el currículo oficial de Andalucía. Este es el *Saber Enseñado*, el arte de transformar un conocimiento complejo en una experiencia de aprendizaje significativa.

Este doble enfoque, que va del objeto de conocimiento al sujeto que aprende, es el corazón de la transposición didáctica. Nos permitirá transformar la enseñanza de las fracciones de una simple transmisión de reglas a una auténtica aventura de construcción de significado.

10.2 ¿Qué es una Fracción? Fundamentos para el Docente

Una vez superada la introducción, debemos adentrarnos en el *saber sabio* que sustenta toda práctica docente eficaz. Para poder transformar el conocimiento matemático en algo enseñable y aprendible (el corazón de la transposición didáctica), el futuro docente debe poseer un dominio del contenido que vaya más allá de las definiciones y algoritmos que se presentan en el aula de Primaria. Este conocimiento profundo, que Shulman (1986/2019) denominó *Conocimiento del Contenido*, es lo que nos proporciona la seguridad para diseñar tareas potentes, interpretar los errores del alumnado y responder a sus preguntas con sentido.

Esta sección se dedica a construir ese conocimiento fundamental sobre la naturaleza del número fraccionario.

10.2.1 El Concepto de Fracción y su Polisemia

Preguntar «¿qué es una fracción?» parece sencillo. La respuesta intuitiva suele ser «una parte de algo». Si bien esta idea es un excelente punto de partida, es completamente insuficiente para abarcar la complejidad y la potencia del concepto.

Desde una perspectiva matemática, una fracción es, ante todo, un *par ordenado* de números enteros, que se representa como $\frac{a}{b}$, donde $b \neq 0$.

Profundizando: El Salto Conceptual: De “Dos Números” a “Un Número”

La definición de fracción como par ordenado (a, b) es muy interesante. Didácticamente, uno de los mayores obstáculos para el alumnado es dejar de ver la fracción $\frac{3}{5}$ como «un 3 y un 5» para empezar a verla como un *único número*, una única entidad que representa una cantidad o una relación. Nuestra labor docente consiste en guiar al alumnado en este salto conceptual: pasar de ver dos números naturales a comprender un nuevo tipo de número, el número racional.

Esta construcción se apoya en el significado preciso de sus dos componentes, que a menudo se enseña con una simplificación excesiva.

Clave Didáctica: Más allá de “Partes que Cojo de Partes que Hay”

La explicación tradicional del numerador y el denominador es una fuente habitual de confusión. Una comprensión más profunda y didácticamente más potente es la siguiente:

- El *denominador* no indica «en cuántas partes se divide el todo», sino que *define el tamaño* de la nueva unidad de referencia. Al dividir un todo en 5, creamos una nueva unidad llamada «quinto». El denominador *nombra* a la nueva pieza.
- El *numerador* no indica «cuántas partes cojo», sino que *cuenta* o enumera cuántas de esas nuevas unidades fraccionarias estamos considerando.

Así, la fracción $\frac{3}{5}$ no es solo una acción de cortar y coger, sino que significa, literalmente, «tres unidades de tamaño un-quinto». Esta perspectiva es fundamental para entender las operaciones.

Esta aproximación es especialmente relevante cuando nos encontramos con fracciones como $\frac{7}{5}$, en la que la interpretación habitual choca con la intuición: no se puede dividir en 5 y tomar más partes de la que hay (7). Sin embargo, interpretándolas como nueva unidad (quintos), se toman 7 secciones de tamaño “un quinto”, que implica tomar de más de una unidad, pero es conceptualmente coherente.

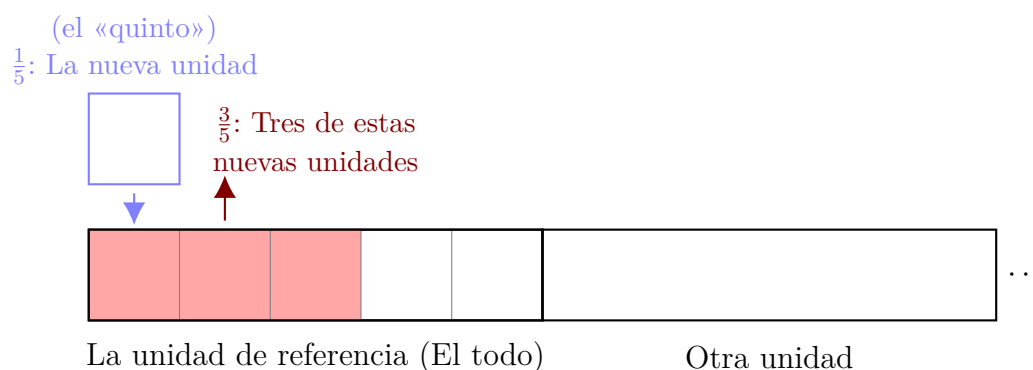


Figura 10.2: Visualización del significado del numerador y el denominador.

La mayor dificultad conceptual, sin embargo, reside en la *polisemia* de la fracción, que se tratará a continuación.

10.2.2 Significados Fundamentales de la Fracción (Los “Cuatro Rostros”)

La riqueza y a la vez la dificultad de la fracción residen en su *polisemia*. Una misma expresión, como $\frac{3}{4}$, puede representar ideas radicalmente distintas. La investigación en *Didáctica de la Matemática*, liderada por teóricos como Behr et al. (1983) y Kieren (1976), ha sido fundamental para identificar los diferentes significados o *subconstructos* de la fracción. Nuestra labor como docentes no es enseñar un único significado, sino diseñar un abanico de situaciones y problemas que permitan al alumnado descubrir y conectar los múltiples rostros de la fracción.

Clave Didáctica: La Fracción como un Camaleón Matemático

Comprender la polisemia de la fracción es la clave para una enseñanza eficaz. Un discente que solo conoce la fracción como “parte de una pizza” (parte-todo) se enfrentará a un obstáculo insuperable cuando se le pida calcular “los $\frac{3}{4}$ de 20 alumnos” (operador) o comparar la relación “3 victorias por cada 4 partidos” (razón).

Nuestra labor como docentes no es enseñar un único significado, sino diseñar un abanico de situaciones y problemas que permitan al alumnado descubrir y conectar los múltiples rostros de la fracción, construyendo así una comprensión flexible y potente.

A continuación, exploramos los cuatro significados fundamentales que el alumnado de Primaria debe construir.

10.2.2.1 Fracción como Parte-Todo

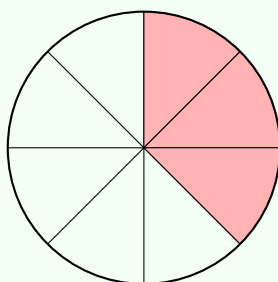
Es la interpretación más intuitiva y el punto de partida habitual en la enseñanza. Responde a la pregunta: *¿Qué relación hay entre una parte y el todo al que pertenece?*

- *Idea Clave:* Se considera una unidad (el todo) que se ha dividido en un número de partes *iguales* (denominador). La fracción representa el número de esas partes que se seleccionan (numerador).
- *Importancia Didáctica:* Es la base para construir el lenguaje inicial de las fracciones y el concepto de fracción unitaria (ej. $\frac{1}{4}$). El énfasis en la *igualdad* de las partes es un prerrequisito conceptual no negociable.

Mini-Caso de Aula: Visualizando la Parte-Todo

Problema: En mi fiesta de cumpleaños, hemos pedido una pizza. La hemos cortado en 8 trozos iguales y yo me he comido 3. ¿Qué fracción de la pizza he comido?

Análisis: El “todo” es la pizza completa. El denominador (8) nos dice el número de partes iguales en las que se ha dividido. El numerador (3) nos dice el número de esas partes que hemos seleccionado. La respuesta es $\frac{3}{8}$.



El todo es la pizza (8 partes). La parte sombreada es $\frac{3}{8}$.

10.2.2.2 Fracción como Cociente

Esta interpretación supone un salto conceptual de gran importancia. La fracción deja de ser solo una relación para convertirse en un número en sí misma, el resultado de una división. Responde a la pregunta: *¿Cuánto le toca a cada uno?*

- *Idea Clave:* La fracción $\frac{a}{b}$ es el resultado de la división $a \div b$.
- *Importancia Didáctica:* Permite dar una solución exacta a divisiones que en el campo de los números naturales eran imposibles (ej. $3 \div 4$). Es el paso que fundamenta la existencia de los números racionales.

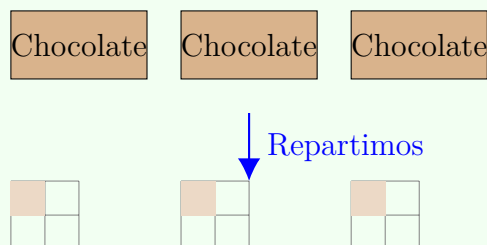
Mini-Caso de Aula: Del Reparto al Cociente

Problema: Queremos repartir 3 tabletas de chocolate de forma equitativa entre 4 amigos. ¿Cuánto chocolate recibe cada amigo?

Análisis: No podemos dar un número entero de tabletas a cada uno. La solución es dividir cada tableta en 4 partes iguales y dar una de esas partes a cada amigo.

Cada amigo recibe $\frac{1}{4}$ de la primera, $\frac{1}{4}$ de la segunda y $\frac{1}{4}$ de la tercera. En total, cada uno recibe $\frac{3}{4}$ de tableta.

3 chocolates a repartir



Cada amigo recibe 3 trozos de $\frac{1}{4}$.
Por tanto, $3 \div 4 = \frac{3}{4}$.

10.2.2.3 Fracción como Razón

En este caso, la fracción no expresa una relación parte-todo, sino una *comparación multiplicativa* entre dos cantidades o conjuntos distintos. Responde a la pregunta: *¿Cómo se compara esta cantidad con esta otra?*

- **Idea Clave:** La fracción $\frac{a}{b}$ expresa que por cada a elementos de un tipo, hay b elementos de otro (comparación parte-parte).
- **Importancia Didáctica:** Es el fundamento del pensamiento proporcional, una de las ideas más importantes de toda la Educación Primaria y Secundaria. Conecta directamente con los conceptos de escala, probabilidad y porcentaje.

Clave Didáctica: La Distinción Crucial en la Razón vs. Parte-Todo:

La distinción entre razón y parte-todo es fundamental. Si en una clase la razón de chicos a chicas es de $\frac{2}{3}$, significa que *por cada 2 chicos hay 3 chicas*.

Esto nos permite pensar en la clase como si estuviera organizada en grupos de 5 estudiantes (2 chicos + 3 chicas). Este grupo de 5 funciona como el *todo de referencia* para esta relación, independientemente del número total de estudiantes en el aula.

Por tanto, la fracción de la clase que son chicos no es $\frac{2}{3}$ (la razón *parte-parte*), sino $\frac{2}{5}$ (la relación *parte-todo*). Confundir estos significados es una fuente común de errores que debemos anticipar y abordar explícitamente (Figura 10.3).

10.2.2.4 Fracción como Operador

En este caso, la fracción actúa como un transformador, una “máquina” que modifica un número o una cantidad. Este significado es el que conecta la expresión coloquial “dos tercios de 18” con la operación formal “ $\frac{2}{3} \times 18$ ”. Responde a la pregunta: *¿Qué transformación le aplica esta fracción a este número?*

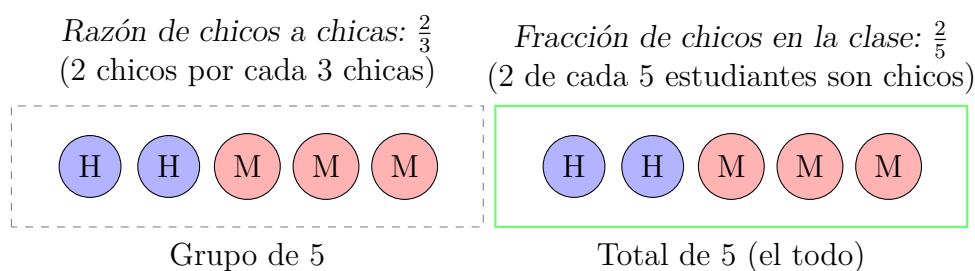


Figura 10.3: Contraste visual entre Razón (parte-parte) y Fracción (parte-todo).

Este significado representa la generalización más importante del concepto de multiplicación. Mientras que multiplicar por un número natural (ej. 3×6) significa *repetir* la unidad original (el 6) un número entero de veces, multiplicar por una fracción implica un proceso más sofisticado de dos pasos: primero un *cambio de unidad* y luego una *repetición*.

- **El Rol del Denominador: El Cambio de Unidad.** El denominador de la fracción nos indica cómo crear una nueva unidad de referencia a partir de la cantidad original. Para calcular $\frac{2}{3} \times 18$, el denominador 3 nos instruye a tomar la cantidad original (18) y encontrar la unidad “un tercio de 18”. Esta nueva unidad de medida es $18 \div 3 = 6$.
- **El Rol del Numerador: La Repetición.** Una vez hemos establecido nuestra nueva unidad de medida (que ahora vale 6), el numerador actúa como un simple multiplicador natural. El numerador 2 nos indica que debemos tomar esa nueva unidad *dos veces*. Por tanto, $2 \times 6 = 12$.

Clave Didáctica: Unificando el Concepto de Multiplicación

Esta perspectiva es fundamental porque demuestra que la multiplicación, ya sea con naturales o con fracciones, siempre responde a la misma estructura: *Multiplicar es repetir una unidad de medida*.

- Al calcular 3×6 , repetimos 3 veces la unidad de medida ‘6’.
- Al calcular $\frac{2}{3} \times 18$, repetimos 2 veces la nueva unidad de medida ‘(un tercio de 18)’.

Este anclaje conceptual evita que la multiplicación de fracciones se perciba como un “truco” arbitrario y la consolida como una extensión lógica de un conocimiento ya adquirido.

Importancia Didáctica: Este es el significado más dinámico y algebraico. Prepara al alumnado para el concepto de función y de transformación lineal. La idea de que multiplicar puede “estirar” (con fracciones impropias) o “encoger” (con fracciones propias) una cantidad es una de las ideas más potentes de la aritmética, ya que rompe con el obstáculo epistemológico de que “multiplicar siempre agranda”.

Mini-Caso de Aula: La Fracción como Máquina Transformadora

Problema: En una bolsa hay 18 canicas. Quiero quedarme con $\frac{2}{3}$ de ellas. ¿Cuántas canicas cojo?

Análisis guiado por el docente:

1. *Cambiamos de unidad (acción del denominador):* “La fracción $\frac{2}{3}$ nos pide primero que pensemos en ‘tercios de la bolsa’. Si la bolsa entera tiene 18 canicas, ¿cuánto es ‘un tercio de la bolsa’?” El alumnado, usando material o cálculo, deduce que deben formar 3 grupos, por lo que ‘un tercio’ son 6 canicas. *Nuestra nueva unidad es 6.*
2. *Repetimos la nueva unidad (acción del numerador):* “¡Perfecto! Ahora que sabemos que ‘un tercio’ son 6 canicas, la fracción $\frac{2}{3}$ nos pide que tomemos *dos* de esas unidades. ¿Cuántas canicas son?”. El alumnado calcula $2 \times 6 = 12$.

Conclusión: El alumnado no solo ha calculado $\frac{2}{3}$ de 18, sino que ha vivenciado la multiplicación por una fracción como un proceso de transformación de la unidad.

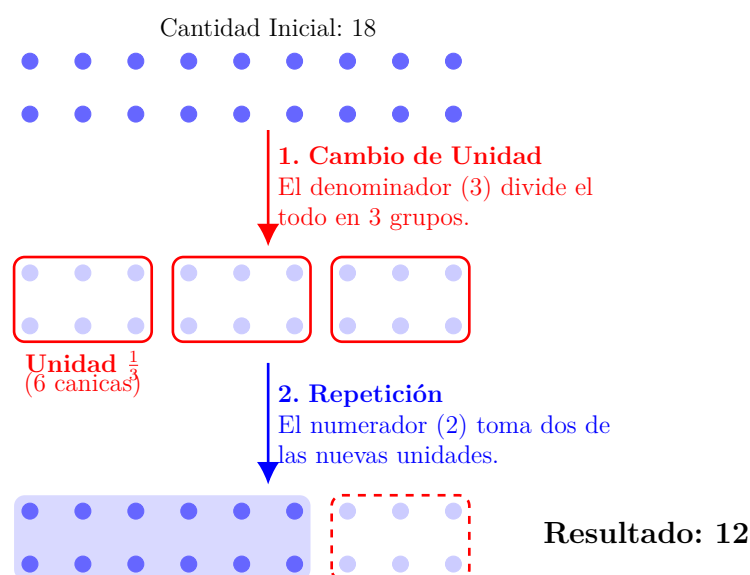
Calculando $\frac{2}{3} \times 18$: Cambio de Unidad y Repetición

Figura 10.4: Visualización del proceso de cambio de unidad y repetición para calcular $\frac{2}{3} \times 18$.

10.2.3 Nociones Elementales Clave (La «Caja de Herramientas» del Docente)

Una vez comprendida la riqueza de significados de la fracción, necesitamos dominar sus conceptos y propiedades fundamentales. Estas nociones no son meros datos a memorizar, sino la *caja de herramientas conceptual* básica que el alumnado necesita para poder operar, comparar y razonar con fracciones de manera flexible y con sentido. Cada una de estas herramientas debe ser construida en el aula a través de la

experiencia y la visualización.

10.2.3.1 Fracciones Unitarias

Son los *ladrillos* o *átomos* del mundo de las fracciones. Una fracción unitaria es aquella cuyo numerador es 1 (ej. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{8}$). Su importancia didáctica es inmensa: cualquier otra fracción se puede construir como una suma repetida de fracciones unitarias. Comprender que $\frac{3}{4}$ es fundamentalmente « tres veces un cuarto » ($\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$) es un paso conceptual clave que aleja al alumnado de la peligrosa idea de ver la fracción como dos números aislados.

10.2.3.2 Fracciones Propias, Impropias y Número Mixto

Esta clasificación se centra en la relación de la fracción con la unidad, el « todo ».

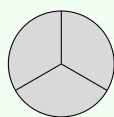
- *Fracción Propia*: Representa una cantidad *menor* que la unidad (numerador < denominador).
- *Fracción Impropia*: Representa una cantidad *igual o mayor* que la unidad (numerador $\geq$ denominador).
- *Número Mixto*: Es una forma de expresar una fracción impropia como la suma de una parte entera y una parte fraccionaria propia.

El objetivo didáctico no es que el alumnado memorice estas etiquetas, sino que comprenda la relación subyacente y sea capaz de transitar de una forma a otra, un proceso de *agrupar* y *desagrupar* unidades enteras.

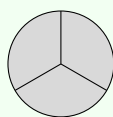
Mini-Caso de Aula: Visualizando la relación entre Fracción Impropia y Número Mixto

Reto: ¿Cómo podemos representar la fracción $\frac{7}{3}$?

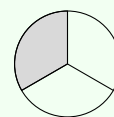
Construcción: El denominador (3) nos dice que nuestras unidades (pizzas, círculos) están divididas en tercios. El numerador (7) nos dice que necesitamos tomar siete de esas piezas. Visualmente, el alumnado tomará piezas hasta completar círculos enteros.



Unidad 1 ($\frac{3}{3}$)



Unidad 2 ($\frac{3}{3}$)



Unidad 3 ($\frac{1}{3}$)

Conclusión: Al tomar 7 tercios, hemos completado 2 unidades enteras y hemos tomado 1 tercio de la siguiente. Por lo tanto, la fracción impropia $\frac{7}{3}$ es equivalente al número mixto $2\frac{1}{3}$.

10.2.3.3 Equivalencia de Fracciones

Este es, sin duda, el *concepto más importante* de toda la aritmética de las fracciones. Sin una comprensión profunda de la equivalencia, la comparación y las operaciones con distinto denominador se convierten en trucos de magia sin sentido. Dos fracciones

son equivalentes si representan la misma cantidad o valor, aunque estén escritas con diferentes números (distintos «nombres»).

Clave Didáctica: El Muro de Fracciones, La Piedra Rosetta de la Equivalencia

El «Muro de Fracciones» (Figura 10.5), popularizado por el enfoque didáctico de Hans Freudenthal (1983/2002), es una de las representaciones visuales más potentes para construir el concepto de equivalencia. Permite al alumnado *ver* múltiples relaciones de equivalencia simultáneamente, actuando como una «Piedra de Rosetta» que traduce entre diferentes «lenguajes» fraccionales (medios, tercios, cuartos...), encontrando un significado común.

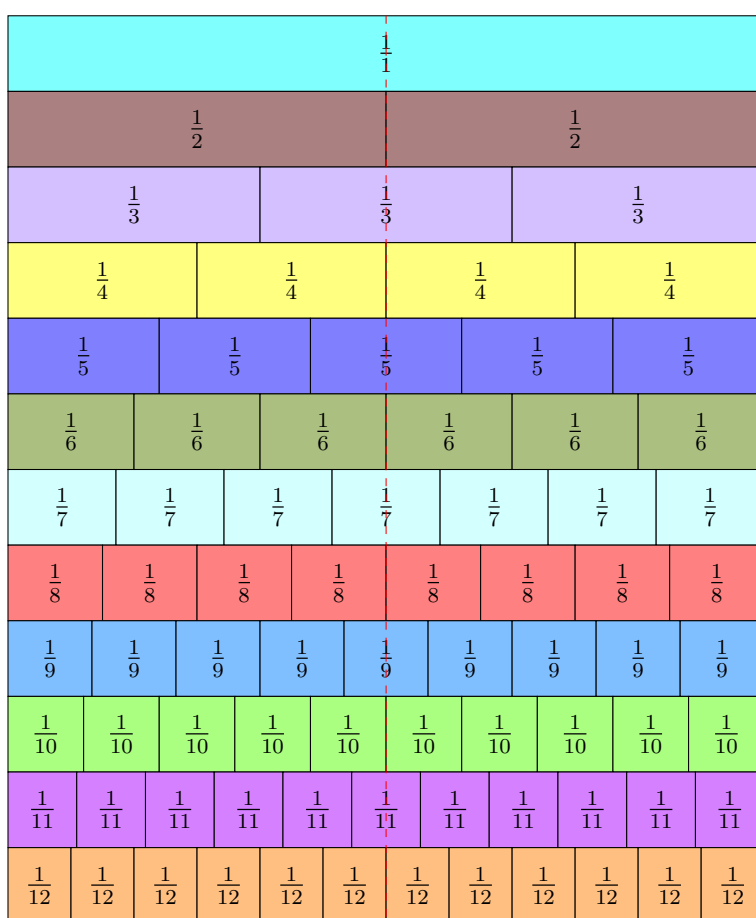


Figura 10.5: Muro de Fracciones. Al observar las alineaciones verticales (línea roja de ejemplo), el alumnado puede *descubrir* visualmente que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{6}{12}$.

10.3 Didáctica de las Fracciones: De los Principios a la Práctica Curricular (El *Saber Enseñado*)

Una vez explorado el *qué* y el *porqué* de las fracciones (el *saber sabio*), nos adentramos en el corazón de nuestra labor: el *cómo* se enseña y se aprende en el aula de Primaria. Este proceso de transformación del conocimiento matemático en conoci-

miento escolar es lo que la teoría de la didáctica denomina el paso al *saber enseñado* (Chevallard, 1991/2000).

Este apartado no es un recetario de actividades, sino un mapa de navegación. Ofrecerá los principios, las herramientas y las rutas didácticas para guiar al alumnado en un viaje que es, a la vez, complejo y fascinante. Nuestro objetivo no es que el alumnado aplique algoritmos de forma mecánica, sino que construya un *pensamiento fraccional* robusto, flexible y conectado con la realidad. Para ello, organizaremos nuestro recorrido en varios momentos clave:

- Los principios pedagógicos y los modelos visuales que actúan como cimientos.
- La construcción de la noción de cantidad fraccionaria y sus operaciones.
- La conexión con conceptos posteriores como el porcentaje.
- El análisis de los errores como oportunidades de aprendizaje.
- La validación de todo lo anterior en el marco del currículo oficial de Andalucía.

10.3.1 Principios Pedagógicos y Modelos Visuales

Antes de iniciar cualquier secuencia de actividades, el personal docente debe tener claros dos elementos: su hoja de ruta pedagógica y su caja de herramientas visuales. La primera nos da la secuencia y el porqué de cada paso; la segunda nos proporciona los puentes indispensables para conectar la experiencia concreta del alumnado con la abstracción matemática.

10.3.1.1 La Secuencia de Bruner como Hoja de Ruta

El psicólogo Jerome Bruner (1966/1972) nos proporcionó el mapa más fiable para guiar el aprendizaje de cualquier concepto abstracto. Su secuencia *Enactivo-Icónico-Simbólico* (ver apartado 1.3.4) no es una opción, sino la ruta natural que debemos respetar. En el contexto de las fracciones, esta progresión implica partir de la acción física de doblar, cortar y repartir (*fase enactiva*); pasar por la representación visual de esas partes en esquemas y dibujos (*fase icónica*); para finalmente introducir la notación formal ($\frac{a}{b}$) como el registro de esa experiencia (*fase simbólica*).

Clave Didáctica: El Peligro de la Abstracción Prematura

El mayor error pedagógico en la enseñanza de las fracciones es la *abstracción prematura*. Introducir el símbolo ($\frac{a}{b}$) y las reglas de operación sin haber construido su significado a través de la manipulación (fase enactiva) y la visualización (fase icónica) es construir sobre arena. El resultado es un conocimiento instrumental, frágil y propenso al olvido.

Recordemos el principio fundamental de nuestra práctica: *La mano debe ir siempre antes que el lápiz.*

10.3.2 Construyendo la Noción de Cantidad Fraccionaria

El primer y más importante salto conceptual en el aprendizaje de las fracciones es pasar de ver una fracción como una simple descripción de una situación (p.ej., «he partido una pizza y he cogido 3 trozos») a comprenderla como una *cantidad única*, un número con un valor determinado que se puede comparar, ordenar y situar en relación

con otros números. Este es el momento en que la fracción deja de ser un adjetivo para convertirse en un sustantivo, en un número por derecho propio.

Las dos herramientas didácticas fundamentales para provocar este salto son el trabajo con la *equivalencia* y la *comparación*.

10.3.2.1 Descubriendo la Equivalencia: “Distintos Nombres para la Misma Cantidad”

La idea de que una misma cantidad puede tener múltiples nombres (ej., 10 también es $8+2$) es fundamental en aritmética. En las fracciones, este concepto, la *equivalencia*, es la piedra angular de todo el edificio. Sin una comprensión profunda de la equivalencia, la comparación y las operaciones con distinto denominador se convierten en trucos de magia sin sentido. Dos fracciones son equivalentes si representan la misma cantidad o valor, aunque estén escritas con diferentes números.

Nuestra labor como docentes no es enunciar una regla, sino crear las condiciones para que el alumnado descubra la equivalencia a través de la secuencia de Bruner.

Mini-Caso de Aula: Secuencia del Doblado al Símbolo

Fase 1: Enactiva (La Acción). Se entrega a cada pareja de alumnado varias tiras de papel idénticas.

- *Consigna 1:* «Tomad una tira. Esta es vuestra chocolatina entera. Dobladla justo por la mitad. ¿Cómo llamamos a cada parte?» El alumnado identifica *una mitad*.
- *Consigna 2:* «Ahora, tomad esa misma tira doblada y volved a doblarla por la mitad. Desdobladla. ¿En cuántas partes iguales está dividida ahora? ¿Cuántas de esas partes forman lo que antes era una mitad?»

El alumnado experimenta físicamente que la misma cantidad ($\frac{1}{2}$) ahora se ve como $\frac{2}{4}$. La pregunta clave del docente es: «Al volver a doblar, ¿hemos añadido o quitado papel? ¿Ha cambiado la cantidad de papel que teníamos al principio?» La respuesta evidente («¡No!») ancla la idea de equivalencia en la experiencia física.

Fase 2: Icónica (La Imagen). Tras explorar con varias tiras, se pasa a una representación más estructurada. El *Muro de Fracciones* (Figura 10.5) es el recurso icónico por excelencia.

Fase 3: Simbólica (El Lenguaje). Observando el muro, el docente guía la conexión con el símbolo:

- *Pregunta Clave:* «Mirad la tira de $\frac{1}{2}$ y la de $\frac{2}{4}$. Ocupan el mismo espacio, son equivalentes. ¿Qué le ha pasado al numerador y al denominador para pasar de una a otra? Y para pasar de $\frac{1}{3}$ a $\frac{2}{6}$?»

El alumnado, a partir de la evidencia visual, puede inducir la regla de la ampliación: «se multiplica el de arriba y el de abajo por el mismo número». La regla no es un decreto, sino el descubrimiento de un patrón visual.

10.3.2.2 Comparando Fracciones: La necesidad del denominador común

Una vez que el alumnado comprende que una misma cantidad puede tener diferentes nombres, está preparado para comparar cantidades distintas. La comparación de fracciones es una actividad cognitiva de primer orden, ya que obliga a movilizar el conocimiento sobre la equivalencia y a confrontar los obstáculos epistemológicos que provienen de los números naturales. La secuencia didáctica debe ser progresiva:

1. *Comparación con Mismo Denominador (el caso fácil)*: Si se comparan $\frac{5}{8}$ y $\frac{3}{8}$, las fracciones tienen el mismo «apellido» (octavos). La lógica de los números naturales funciona perfectamente: como 5 es mayor que 3, $\frac{5}{8}$ es mayor que $\frac{3}{8}$. Se están comparando piezas del mismo tamaño.
2. *Comparación con Mismo Numerador (el conflicto cognitivo)*: Comparar $\frac{3}{4}$ y $\frac{3}{8}$. Este caso es de gran importancia didácticamente, pues genera un conflicto con la intuición de los números naturales. Un alumno o alumna podría pensar que $\frac{3}{8}$ es mayor porque 8 es mayor que 4. La intervención docente aquí es clave, usando modelos de área o longitud: «Si cojo 3 piezas, ¿cuándo cojo más cantidad, cuando la pizza está cortada en 4 trozos o cuando está cortada en 8?». El alumnado descubre una nueva regla: a igual numerador, es mayor la fracción con menor denominador, porque sus piezas son más grandes.
3. *Comparación con Distinto Numerador y Denominador (la necesidad de equivalencia)*: ¿Qué fracción es mayor, $\frac{2}{3}$ o $\frac{3}{4}$? Aquí, ni el número de piezas ni su tamaño coinciden. Es imposible una comparación directa. Se ha creado la *necesidad* de encontrar una forma de reescribir ambas fracciones para que tengan un «apellido común». El trabajo previo con la equivalencia se revela ahora como una herramienta indispensable, no como un ejercicio aislado.

Mini-Caso de Aula: La Búsqueda del “Apellido Común”

El Reto: Un docente plantea a la clase comparar $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$.

Fase 1 (Conflicto y Representación Icónica): El alumnado intenta dibujar ambas fracciones. Se dan cuenta de que $\frac{3}{4}$ parece un poco más grande, pero la representación visual no es suficientemente precisa para estar seguros. Surge la pregunta: «¿Cómo podemos saberlo con certeza?».

Fase 2 (Conexión con la Equivalencia): El docente guía la búsqueda: «¿Recordáis el Muro de Fracciones? ¿Habrá alguna familia de piezas más pequeñas con las que podamos construir tanto $\frac{2}{3}$ como $\frac{3}{4}$ de forma exacta?».

Fase 3 (Descubrimiento Guiado): El alumnado, usando el Muro de Fracciones o explorando con tiras, descubre que tanto los tercios como los cuartos pueden expresarse en doceavos. Descubren que $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ y $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$.

Fase 4 (Resolución y Simbolización): Ahora la comparación es trivial. Como 9 es mayor que 8, concluyen que $\frac{9}{12} > \frac{8}{12}$, y por tanto, $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$. Han descubierto la necesidad y la potencia de encontrar un denominador común.

Comprender la comparación es mucho más que obtener una respuesta correcta. Es el contexto que da sentido y propósito a la idea de fracción equivalente y el que prepara al alumnado para el gran desafío de la suma y la resta con distinto denominador.

10.3.3 Secuencias para la Comprensión de las Operaciones

Enseñar las operaciones con fracciones no es simplemente transmitir un conjunto de reglas algorítmicas («multiplica en cruz», «suma solo los de arriba»...). Es un proceso de construcción de significado donde el alumnado debe comprender *por qué* los algoritmos funcionan como lo hacen. La meta es la *comprensión relacional* (Skemp, 1978), no la mera ejecución instrumental. Cada secuencia que se plantee en el aula debe respetar un principio irrenunciable: la mano (acción) y el ojo (visualización) deben preceder siempre al lápiz (símbolo).

10.3.3.1 Suma y Resta: La necesidad de un «apellido» común

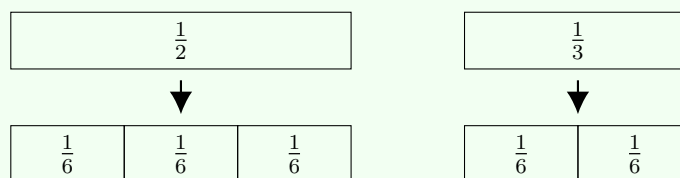
El obstáculo conceptual fundamental en la suma y la resta de fracciones es comprender la necesidad de tener un denominador común. La mejor analogía didáctica es la de los «apellidos»: no podemos sumar 3 coches y 2 casas para obtener 5 «coches-casas». Primero debemos encontrar un nombre común para ambos: 5 «objetos». Con las fracciones ocurre lo mismo: no podemos sumar tercios y cuartos directamente; necesitamos encontrar una unidad común más pequeña que sirva para ambos: los doceavos.

Mini-Caso de Aula: Secuencia para la suma de fracciones

Fase 1 (Enactiva - Mismo Denominador): Proponer sumar $\frac{2}{8} + \frac{3}{8}$ usando tiras de fracciones. El alumnado toma físicamente una tira de $\frac{2}{8}$ y otra de $\frac{3}{8}$, las coloca una a continuación de la otra y comprueba visualmente que la longitud total equivale a la tira de $\frac{5}{8}$. La acción es directa: se suman las partes porque son del mismo tamaño (tienen el mismo «apellido»).

Fase 2 (Conflicto Cognitivo - Distinto Denominador): Plantear la suma $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Al intentar juntar las tiras, el alumnado se enfrenta a un problema: las piezas son de tamaños diferentes. ¿El resultado son 2 piezas, pero de qué tamaño? La suma no tiene un nombre claro. Se ha creado la necesidad de encontrar una solución.

Fase 3 (Descubrimiento Guiado - La Equivalencia en Acción): El docente guía la exploración con preguntas: «¿Existirá alguna tira de piezas más pequeñas con la que podamos construir tanto la tira de $\frac{1}{2}$ como la de $\frac{1}{3}$ de forma exacta?». Usando un muro de fracciones o las propias tiras, el alumnado descubre que $\frac{1}{2}$ es equivalente a $\frac{3}{6}$ y que $\frac{1}{3}$ es equivalente a $\frac{2}{6}$. Ahora sí tienen un «apellido» común.

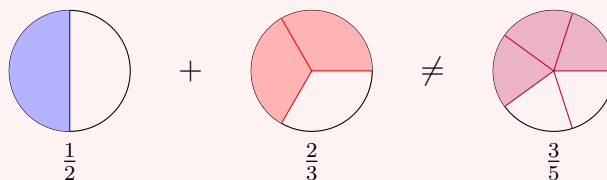


Fase 4 (Simbólica): Una vez visualizado el proceso, se registra simbólicamente: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$. El algoritmo no es una regla mágica, sino la crónica de una acción con sentido.

Dificultad Común: La Fracción como Dos Números Aislados

- *Evidencia:* Ante una suma como $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$, el alumnado responde $\frac{3}{5}$.
- *Diagnóstico:* Este no es un error aleatorio, sino un error profundamente lógico desde la perspectiva del alumnado. Es una *sobregeneralización* de su conocimiento sobre los números naturales. La fracción no es vista como una única cantidad, sino como dos números separados por una raya. Por tanto, aplican la operación que conocen: «sumo los de arriba y sumo los de abajo». Es un síntoma claro de una comprensión instrumental y de un obstáculo epistemológico donde las reglas de un sistema numérico anterior se aplican incorrectamente al nuevo.
- *Intervención:* La corrección verbal es inútil. Se debe crear un *conflicto cognitivo* volviendo a un modelo visual, preferiblemente el de área.
 1. *Visualizar los sumandos:* Pedir al alumno que dibuje y coloree $\frac{1}{2}$ de un círculo y $\frac{2}{3}$ de otro círculo del mismo tamaño.
 2. *Visualizar el resultado erróneo:* Pedirle que dibuje y coloree su respuesta, $\frac{3}{5}$, en un tercer círculo.
 3. *Generar el conflicto:* Preguntar: «Si juntas la media pizza ($\frac{1}{2}$) con los dos tercios de la otra, ¿te parece lógico que el resultado sea un poco más de media pizza ($\frac{3}{5}$)? ¿Visualmente, qué trozo es más grande?».

La evidencia visual contradice el resultado del algoritmo erróneo, demostrando que esa regla no puede ser correcta y abriendo la puerta a la búsqueda de un procedimiento con sentido.



10.3.3.2 Multiplicación: Visualizando el «de»

El principal obstáculo en la multiplicación es abandonar la idea de que «multiplicar siempre agranda». La clave didáctica es introducir la operación a través de su significado como *operador*: «la fracción de una cantidad». El modelo de área es, con diferencia, el más potente para construir este significado, especialmente para el producto de dos fracciones.

Mini-Caso de Aula: El modelo de área para el producto de fracciones

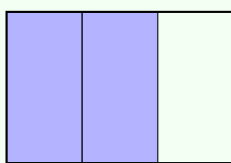
Fase 1 (Natural por Fracción): Se conecta con la suma repetida. Calcular $3 \times \frac{2}{5}$ se presenta como «Tengo 3 botellas, cada una con $\frac{2}{5}$ de litro de agua. ¿Cuánta agua tengo?». Se resuelve sumando $\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$.

Fase 2 (Fracción por Natural): Se introduce el significado de operador. Calcular $\frac{2}{5} \times 10$ se presenta como «Quiero calcular las dos quintas partes de una clase de

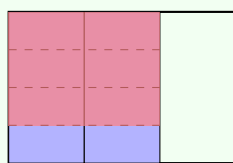
10 alumnos». El alumnado puede formar 5 grupos de 2 alumnos y seleccionar 2 de esos grupos.

Fase 3 (Fracción por Fracción - El Modelo de Área): Este es el paso crucial y menos intuitivo. Se plantea un problema como: «Usamos la mitad de un terreno para plantar tomates. De esa mitad, dedicamos tres cuartas partes a tomates cherry. ¿Qué fracción del terreno total ocupan los tomates cherry?». Se pide calcular $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$.

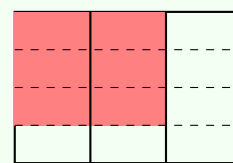
1. *Dibujar el primer factor:* Se representa la cantidad inicial, $\frac{2}{3}$, en un rectángulo.
2. *Operar sobre el resultado:* Sobre esa mitad ya coloreada, se aplica la segunda fracción: se divide en 4 partes y se toman 3.
3. *Interpretar el resultado respecto al TODO:* Se extiende la nueva división a todo el rectángulo original para encontrar el nuevo denominador.



1. Representamos $\frac{2}{3}$



2. Calculamos $\frac{3}{4}$ de la cantidad anterior



3. El resultado es $\frac{6}{12}$ del total

Esta representación visual demuestra por qué el algoritmo $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ funciona: los numeradores se multiplican porque calculamos una parte *de* una parte, y los denominadores se multiplican porque los “trozos” que se toman corresponde al concepto del producto, representado como área.

10.3.3.3 División: Del reparto al agrupamiento

La división es la operación más compleja. Enseñar directamente el algoritmo de «multiplicar en cruz» o «invertir y multiplicar» es pedagógicamente desaconsejable, pues es un procedimiento totalmente opaco y anti-intuitivo. La clave es construir su significado a partir de sus dos interpretaciones principales: partitiva y cuotitiva.

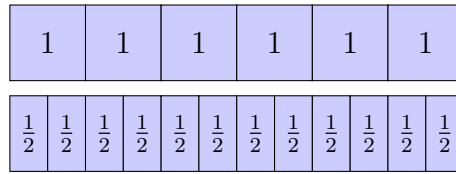
Clave Didáctica: Los significados partitivo y cuotitivo de la división de fracciones

La pregunta didáctica fundamental para la división de fracciones no es «¿Cómo se calcula?», sino «¿Qué puede significar?».

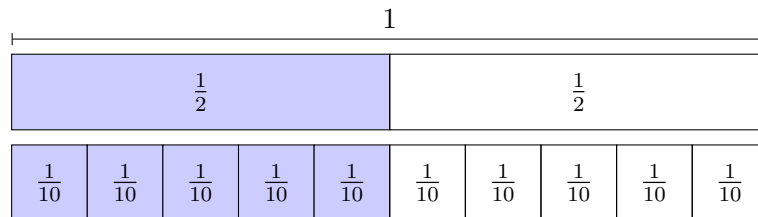
Veamos algunos ejemplos:

- *Significado Partitivo (Reparto):* $6 \div \frac{1}{2}$.

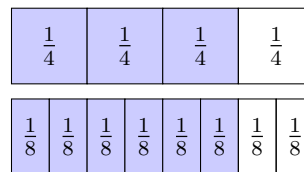
«Si reparto 6 pizzas entre personas y a cada una le doy media pizza, ¿a cuántas personas puedo alimentar?». La respuesta (12) es mayor que el dividendo, un resultado muy anti-intuitivo si se viene de los naturales.



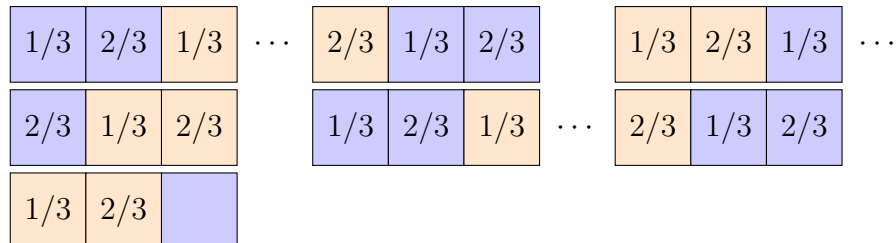
«Queremos echar en 5 vasitos medio ($\frac{1}{2}$) litro de agua, ¿Cuánto echamos en cada vasito expresado en fracción?»



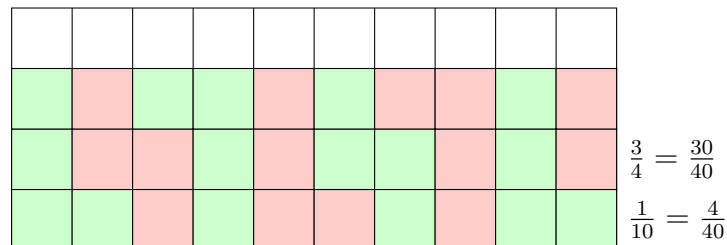
- *Significado Cuotitivo (Medida o Agrupamiento):* $\frac{3}{4} \div \frac{1}{8}$.
 «¿Cuántas veces cabe un octavo de litro en una botella de tres cuartos de litro?». Aquí buscamos cuántas «medidas» de $\frac{1}{8}$ caben en $\frac{3}{4}$.



«Andrea tomó cada día dos bocadillos de $\frac{1}{3}$ de barra de pan. Si había comprado 7 barras, ¿para cuántos días tiene?»



«La batería de mi móvil pierde $\frac{1}{10}$ cada hora. Esta mañana lo saqué cargado con $\frac{3}{4}$ de la batería, ¿cuántas horas me va a durar?»



Resolver estos problemas con dibujos, tiras de fracciones o en la recta numérica es el paso previo indispensable antes de buscar un algoritmo. El algoritmo debe ser la *conclusión*, no el punto de partida.

10.3.4 Tejiendo Conexiones: El Puente hacia el Porcentaje

Una comprensión profunda de las fracciones no está completa si permanece aislada. Su verdadero poder se revela cuando se entiende como la piedra angular sobre la que se construyen los números decimales y los porcentajes. Enseñar estos tres conceptos de forma conectada no es una opción, sino una necesidad didáctica para construir un sentido numérico flexible y robusto en el campo de los números racionales. Nuestra labor es hacer visible que no son tres temas distintos, sino tres *lenguajes* diferentes para hablar de las mismas ideas.

En este manual trataremos los decimales en un tema aparte por su entidad propia dentro del currículum y del uso, pero deberá contemplarse como parte del contexto de las fracciones.

10.3.4.1 El Porcentaje como «Fracción con Apellido 100»

El porcentaje es, conceptualmente, la más sencilla de las tres representaciones, pero de una enorme potencia social y comunicativa. Un porcentaje no es más que una fracción cuyo denominador es siempre 100. La expresión «25 por ciento» (25 %) es, literalmente, «25 por cada cien», es decir, la fracción $\frac{25}{100}$.

Clave Didáctica: El Porcentaje como Base Común para la Comparación

La gran ventaja del porcentaje es que proporciona una *base común* para la comparación. ¿Qué oferta es mejor, un descuento de $\frac{1}{4}$ en un producto o de $\frac{3}{10}$ en otro? La comparación no es inmediata. Sin embargo, si traducimos ambas a porcentajes (25 % y 30 %), la respuesta se vuelve evidente. El porcentaje es el «idioma universal» de la comparación proporcional en nuestra cultura, y dominarlo es una herramienta fundamental para la ciudadanía crítica.

10.3.4.2 La «Piedra de Rosetta» Didáctica: La Rejilla de 100

Para ayudar al alumnado a construir las conexiones entre estas tres representaciones, necesitamos una herramienta visual que actúe como un «traductor simultáneo». El modelo de área, en forma de una rejilla de 10×10 , es el recurso más potente para este fin. Permite visualizar, en un mismo espacio, la fracción, el decimal y el porcentaje asociados a una misma cantidad (Figura 11.4).

Mini-Caso de Aula: El Mercadillo de las Ofertas

Contexto: Una clase de 6º de Primaria. El objetivo es que el alumnado compare cantidades expresadas en diferentes formatos y justifique cuál es la mejor opción.

Reto (Crear la Necesidad): El docente presenta tres carteles de ofertas para un mismo producto que cuesta 20€.

- Tienda A: «¡Hoy, $\frac{1}{4}$ de descuento!»
- Tienda B: «¡Gran oferta! ¡Te descontamos un 30 %!»
- Tienda C: «¡Increíble! ¡Paga solo 0,80€ por cada euro!»

La pregunta es: «¿En qué tienda nos conviene comprar? Debéis demostrarlo».

Proceso (Del Conflicto a la Herramienta):

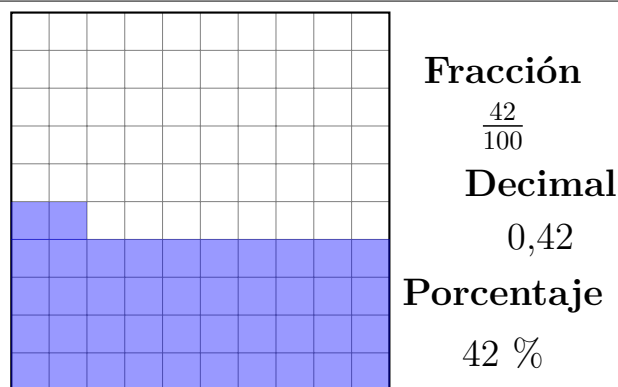


Figura 10.6: La rejilla de 100 como «Piedra de Rosetta» para visualizar la equivalencia entre fracción, decimal y porcentaje.

1. *Conflicto Cognitivo*: El alumnado percibe que no puede comparar directamente « $1/4$ », «30 %» y «0,80». Surge la necesidad de encontrar un «idioma común».
2. *Uso del Modelo Visual*: El docente proporciona rejillas de 100 en blanco. «Vamos a intentar “traducir” cada oferta a esta rejilla para ver cuál es más grande».
3. *Construcción Guiada*:
 - Para la Tienda A ($\frac{1}{4}$), el alumnado descubre que tienen que colorear 25 cuadraditos.
 - Para la Tienda B (30 %), la conexión es directa: colorean 30 cuadraditos.
 - Para la Tienda C (pagar 0,80 por cada 1), descubren que el descuento es de 0,20 por cada euro, lo que equivale a 20 cuadraditos.
4. *Conclusión y Formalización*: Al comparar las tres rejillas coloreadas, es visualmente evidente que el mayor descuento es el del 30 %. El docente institucionaliza: «Hemos visto que para poder comparar, lo más fácil es pasarlo todo a un lenguaje común. El porcentaje, que significa “de cada 100”, es perfecto para esto. $\frac{1}{4}$ es lo mismo que 25 de cada 100, es decir, el 25 %...»

Aprendizaje: El alumnado no ha memorizado una regla de conversión. Ha experimentado la necesidad de la conversión y ha utilizado un modelo visual para construir el significado de la equivalencia entre los tres sistemas de representación.

Uno de los objetivos finales de la enseñanza de las fracciones en Primaria no es solo que el alumnado las domine de forma aislada, sino que comprenda su íntima relación con los números decimales y los porcentajes. Estos tres conceptos no son temas separados, sino tres lenguajes distintos para expresar una misma idea: la relación parte-todo. Desarrollar la *flexibilidad representacional* –la capacidad de «traducir» una cantidad entre estas tres forma– es una de las competencias matemáticas más potentes

y funcionales que podemos cultivar en el alumnado (National Council of Teachers of Mathematics, 2014).

10.3.5 El Docente como Detective Cognitivo: Errores y Dificultades Comunes

El camino del alumnado en el aprendizaje de las fracciones está, inevitablemente, lleno de errores. El rol del docente, por tanto, no es el de un «corrector de fallos», sino el de un *detective cognitivo*. Ante un error sistemático, el docente profesional inicia un ciclo de investigación (descrito en detalle en la Sección 14.5.2) que consta de observación, diagnóstico e intervención. A continuación, analizamos los tres obstáculos epistemológicos más importantes en el aprendizaje de las fracciones, aplicando este ciclo de actuación.

10.3.5.1 Obstáculo 1: La Tiranía de los Números Naturales

El Obstáculo: El conocimiento más sólido que posee el alumnado es el de los números naturales. Durante años, han operado con éxito bajo la regla implícita de que “un número con cifras más grandes representa una cantidad mayor”. Este conocimiento, tan útil hasta ahora, se convierte en un *obstáculo epistemológico* (Brousseau, 2007) al aplicarlo a las fracciones, especialmente en la comparación.

Dificultad Común: Comparación de Fracciones Unitarias

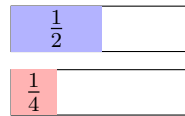
- *Evidencia:* Un alumno de 3º de Primaria afirma con total seguridad que $\frac{1}{4}$ es mayor que $\frac{1}{2}$ porque, razona, «el 4 es más grande que el 2».
- *Diagnóstico:* El alumno no está conceptualizando la fracción como una única cantidad. Está tratando al denominador como un número natural aislado y aplica la lógica que conoce: la de comparar números enteros. Ignora la relación de interdependencia: que el denominador nombra el *tamaño* de la parte (a denominador más grande, parte más pequeña).
- *Intervención:* La corrección verbal («No, un medio es más grande») es ineficaz porque choca con su lógica. La clave es crear un *conflicto cognitivo* (Piaget, 1964/2018) a través de la representación.
 - *Fase Enactiva:* Entregar al alumno dos tiras de papel idénticas. «Pliega esta por la mitad y colorea una parte. Ahora, pliega esta otra en cuatro partes iguales y colorea una parte. ¿Qué trozo es más grande?». El alumno *ve* y *siente* que la tira de $\frac{1}{2}$ es mayor.
 - *Fase Icónica:* Pedirle que dibuje lo que ha hecho. La representación visual (Figura 10.7) sirve como anclaje permanente para la nueva idea.

10.3.5.2 Obstáculo 2: La Fracción como Dos Números Aislados

El Obstáculo: El alumnado percibe la notación $\frac{a}{b}$ no como un único número, sino como dos números naturales, a y b , escritos uno encima del otro. Esta concepción les lleva a operar con ellos por separado, aplicando las reglas que ya conocen de los naturales, especialmente en la suma y la resta.

Modelo Correcto

Lógica del Alumno



$$4 > 2 \implies \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$$

Figura 10.7: Visualización del conflicto cognitivo para el error de comparación.

Dificultad Común: Suma de Fracciones

- **Evidencia:** Un alumno de 4º de Primaria, al resolver $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$, escribe: $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1+2}{2+3} = \frac{3}{5}$.
- **Diagnóstico:** No es un despiste. Ha aplicado una regla que, desde su perspectiva, es perfectamente lógica: «sumo los de arriba y sumo los de abajo». Está tratando numeradores y denominadores como entidades separadas, sin comprender que $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$ son cantidades que no se pueden sumar directamente porque se refieren a “partes de distinto tamaño”.
- **Intervención:** La intervención debe demostrar la imposibilidad lógica de su procedimiento, volviendo a un modelo de área.
 1. *Representar los sumandos:* «Dibuja en esta tarta (círculo) un medio. Perfecto. Ahora, en esta otra tarta igual, dibuja dos tercios. Excelente.»
 2. *Generar el conflicto:* «Si juntamos tus trozos, ¿tenemos más o menos de una tarta?». El alumno verá que el resultado es claramente mayor que una tarta entera.
 3. *Confrontar con el resultado erróneo:* «Ahora, dibuja en una tercera tarta el resultado que te dio tu suma, tres quintos. ¿El trozo que has dibujado es el mismo que el que teníamos al juntar los otros dos?». La contradicción visual es evidente: $\frac{3}{5}$ es *menos* de una tarta, mientras que la suma real es *más* de una. Su “lógica” ha quedado refutada.

10.3.5.3 Obstáculo 3: La Elusiva Unidad de Referencia (El “Todo”)

El Obstáculo: La comprensión de una fracción depende críticamente de la identificación de su unidad de referencia o “todo”. En los números naturales, la unidad es siempre “1” y es constante. Con las fracciones, la unidad puede ser cualquier cosa y, lo que es más complejo, puede cambiar dentro de un mismo problema (Lamon, 2020).

Dificultad Común: Fracción de una Fracción

- **Evidencia:** Se plantea el problema: «Juan se comió $\frac{1}{2}$ de la pizza. Luego, su hermana Ana se comió $\frac{1}{3}$ de lo que quedaba. ¿Qué fracción del *total* de la pizza se comió Ana?». El alumno responde: «Ana se comió $\frac{1}{3}$ de la pizza».
- **Diagnóstico:** El alumno ha identificado correctamente la fracción $\frac{1}{3}$, pero

no ha sido capaz de relativizarla al “todo” correcto. Para él, el “todo” del que come Ana es “lo que quedaba”, no la pizza original. Falla al cambiar la unidad de referencia para dar la respuesta final.

- **Intervención:** La clave es hacer visible el cambio de la unidad de referencia. La modelización gráfica (icónica) es la herramienta más potente, tal y como se muestra en la Figura 10.8. El docente guía la representación visual en la pizarra, haciendo explícito que el “todo” para la segunda fracción es solo una parte del “todo” original.

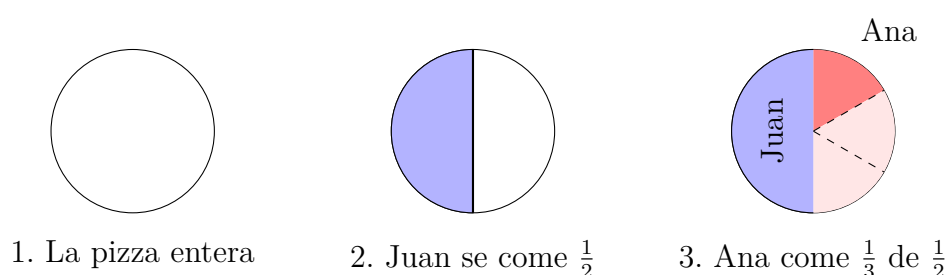


Figura 10.8: Visualización del problema para hacer explícito el cambio de unidad.

10.3.6 Las Fracciones en el Currículo de Andalucía (LOMLOE)

Las teorías psicopedagógicas y las estrategias didácticas que hemos explorado no son meras recomendaciones académicas; encuentran su validación y su mandato de aplicación en el currículo oficial que guía nuestra práctica docente. La *ORDEN de 30 de mayo de 2023* estructura el aprendizaje de forma competencial y progresiva.

Este enfoque nos aleja de una enseñanza centrada en la memorización de algoritmos y nos impulsa a una práctica que prioriza la construcción de significado. Analizar cómo el currículo andaluz articula la progresión del pensamiento fraccional es, por tanto, un ejercicio de didáctica aplicada fundamental para nuestra labor.

10.3.6.1 Progresión de los Saberes Básicos por Ciclos

La forma en que el currículo oficial introduce y desarrolla los conceptos no es una cuestión administrativa, sino una hoja de ruta pedagógica. Analizar la progresión de los saberes básicos sobre fracciones en la normativa andaluza nos permite validar y anclar nuestra práctica docente en un marco fundamentado. La *ORDEN de 30 de mayo de 2023* establece una secuencia que se alinea perfectamente con un enfoque constructivista, priorizando la construcción del significado sobre la mecanización de procedimientos.

Segundo Ciclo (3^a y 4^a de Primaria): La Construcción del Concepto. Este es el ciclo clave para la *construcción del significado* de la fracción. El foco no está en operar, sino en comprender qué es una fracción. Los saberes básicos clave reflejan esta prioridad:

- **MAT.2.A.2.4.:** El currículo introduce aquí las «*Fracciones propias con denominador hasta 12 y su expresión como números decimales hasta las centésimas,*

en contextos de la vida cotidiana».

Implicación didáctica: La normativa nos guía hacia los significados más intuitivos. La acotación a *contextos cotidianos* es una invitación a la significación manipulativa y en el entorno. El límite en el denominador (12) sugiere un fuerte apoyo en material manipulativo y visual, donde estas particiones son manejables (círculos de fracciones, regletas). El objetivo didáctico principal en este ciclo es que el alumnado construya una imagen mental rica y flexible de la fracción como una cantidad.

Es fundamental hacer notar que en el saber MAT.2.A.3. *Sentido de las operaciones* de este ciclo *no se mencionan las operaciones con fracciones*. El currículo establece una separación deliberada y pedagógicamente muy sólida: primero se debe construir el objeto matemático (la fracción como concepto) durante el Segundo Ciclo, antes de poder operar con él en el ciclo siguiente.

Tercer Ciclo (5^a y 6^a de Primaria): Consolidación, Conexión y Aplicación.

En esta etapa, el foco se desplaza hacia la *flexibilización del concepto*, la *operación* y la *aplicación*. El alumnado, que ya ha construido un significado para la fracción, está ahora preparado para profundizar en su estructura y usarla como una herramienta.

- MAT.3.A.1.1.: Se establece la necesidad de comprender la «*diferencia entre números naturales, enteros, fracciones y decimales*» y su «*ordenación en la recta numérica*».

Implicación didáctica: Aquí se exige formalizar la fracción como un *número* con una posición única. El *modelo de longitud* se vuelve crucial. La comparación de fracciones con distinto denominador se convierte en una necesidad, lo que justifica didácticamente la introducción de la *equivalencia* para encontrar un “apellido común”, un prerrequisito indispensable para la suma y la resta.

- MAT.3.A.3.1.: Se demandan «*Estrategias de resolución de operaciones aritméticas [...] con números naturales, decimales y fracciones con flexibilidad y sentido*».

Implicación didáctica: Este es el mandato explícito para introducir las operaciones. La exigencia de *flexibilidad y sentido* prohíbe una enseñanza puramente algorítmica. Nos obliga a explorar los diferentes significados (ej. la multiplicación como operador) y a justificar los algoritmos a través de modelos visuales (ej. el modelo de área para el producto de fracciones), conectando siempre el procedimiento simbólico con la acción y la visualización.

- MAT.3.A.4.3.: Se especifica la «*Relación entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes*».

Implicación didáctica: Este es el culmen de la construcción conceptual. El currículo nos pide explícitamente que tejamos las conexiones. Es el momento de usar la *rejilla de 100* como “Piedra de Rosetta” para traducir entre los tres lenguajes, mostrando que son distintas formas de expresar la misma idea relacional y aplicando las fracciones en contextos ricos y funcionales como los porcentajes.

10.3.6.2 El Desarrollo de las Competencias Específicas

La enseñanza de las fracciones, tal y como la hemos descrito, es un vehículo excepcionalmente potente para desarrollar las competencias matemáticas clave del currículo. No se trata solo de aprender “sobre” fracciones, sino de “hacer” matemáticas con ellas.

- *CE.MATE.1: Interpretar situaciones de la vida cotidiana, proporcionando una representación matemática de las mismas [...]*

Cuando un alumno o alumna traduce un problema de reparto como «repartir 3 tabletas de chocolate entre 4 amigos» a la expresión simbólica $\frac{3}{4}$, está desarrollando esta competencia. Ha elegido un modelo matemático (la fracción como cociente) para interpretar y dar sentido a una situación real.

- *CE.MATE.2: Resolver situaciones problematizadas, aplicando diferentes técnicas, estrategias y formas de razonamiento [...]*

Ante el problema de comparar $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$, un estudiante competente no aplica una regla de memoria. Explora estrategias: puede usar tiras de fracciones para comparar longitudes (modelo de longitud), puede dibujar dos rectángulos idénticos para comparar áreas (modelo de área), o puede transformarlas en $\frac{8}{12}$ y $\frac{9}{12}$ para compararlas numéricamente (equivalencia). Esta elección y aplicación flexible de estrategias es el corazón de la competencia resolutiva.

- *CE.MATE.6: Comunicar y representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos y resultados matemáticos [...]*

La capacidad de usar un modelo para *justificar* un resultado es clave. Un alumno que dibuja el modelo de área para la multiplicación $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$ y explica que «primero cojo la mitad, y luego cojo tres cuartos de esa mitad, y veo que eso es tres octavos del total» está utilizando la representación no como un simple dibujo, sino como una herramienta para comunicar y argumentar su razonamiento matemático.

10.4 Conclusión del Capítulo: Hacia un Pensamiento Relacional con Fracciones

Hemos viajado a través de uno de los territorios más fascinantes y complejos de la aritmética de Primaria: el universo de las fracciones. Este capítulo ha buscado desmantelar la idea de que enseñar fracciones consiste en transmitir una serie de algoritmos para operar. En su lugar, hemos propuesto un enfoque centrado en la *construcción profunda de significado*, un viaje que transforma no solo el conocimiento numérico del alumnado, sino su capacidad para pensar de forma relacional.

El primer gran pilar de nuestro recorrido ha sido la construcción del *significado*. Hemos desentrañado la riqueza semántica —la *polisemia*— que se esconde tras un simple símbolo como $\frac{3}{4}$. Hemos visto que una fracción no es solo una parte de un todo, sino que también puede ser el resultado de un *cociente*, una *razón* comparativa o un *operador* que transforma otras cantidades. Comprender esta diversidad es el antídoto fundamental contra una enseñanza mecanicista, permitiendo al alumnado reconocer la estructura oculta en contextos variados y dar un verdadero sentido a las operaciones.

El segundo pilar ha sido la *flexibilidad procedimental*. Lejos de ser meras “recetas”, las operaciones con fracciones se nos han revelado como procesos lógicos que deben

ser contruidos visual y conceptualmente. La *secuencia de Bruner* (Enactivo-Icónico-Simbólico) se ha erigido como nuestra hoja de ruta irrenunciable. Hemos insistido en que la mano debe ir siempre antes que el lápiz: la manipulación de tiras de fracciones, el dibujo en modelos de área o la ubicación en la recta numérica no son actividades complementarias, sino el cimiento indispensable sobre el que se construye el significado de los algoritmos. La verdadera comprensión no reside en ejecutar los pasos, sino en poder explicar por qué esos pasos funcionan.

Finalmente, hemos consolidado la idea del *error como oportunidad*. Los obstáculos epistemológicos, como la tendencia a aplicar las reglas de los números naturales, no son fracasos, sino valiosas ventanas al pensamiento del alumnado. Nos invitan a adoptar el rol de un *detective cognitivo* que, en lugar de corregir, diseña experiencias para provocar un conflicto cognitivo y una posterior reconstrucción del conocimiento.

En definitiva, como futuros docentes, debemos concebir la enseñanza de las fracciones no como el entrenamiento de una habilidad mecánica, sino como el cultivo del *pensamiento fraccional*. Un alumnado que comprende en profundidad el campo de las fracciones está preparado no solo para superar con éxito los siguientes desafíos aritméticos (decimales, proporcionalidad), sino para utilizar las matemáticas con confianza, creatividad y sentido en su vida cotidiana. Sabrá interpretar un descuento, calcular los ingredientes de una receta, comprender una estadística o valorar una probabilidad. Esa es, y debe ser, nuestra meta final: dotar a nuestro alumnado de una herramienta intelectual indispensable para interpretar y transformar el mundo.

Después de explorar la naturaleza polifacética de la fracción, nos queda una pregunta fundamental: ¿cómo se conecta esta idea de “parte de un todo” con la lógica de nuestro Sistema de Numeración Decimal? El siguiente capítulo revelará que los *números decimales* no son un tema nuevo, sino la culminación de nuestro sistema posicional, una forma elegante y potente de escribir fracciones y la clave para comprender la continuidad del universo numérico.

10.5 Para la Reflexión y el Portfolio Docente

1. Conexión con la Propia Historia: El Misterio de la Suma de Fracciones.

Consigna: Reflexiona sobre tu propia trayectoria como estudiante aprendiendo las fracciones, centrándote en uno de los momentos clave: la suma de fracciones con distinto denominador.

- ¿Cómo te lo enseñaron? ¿Fue a través de una regla memorizada (el «mínimo común múltiplo», el «producto cruzado») o se construyó el procedimiento a partir de un modelo visual o manipulativo?
- ¿Qué modelos visuales (círculos, rectángulos, recta numérica...) predominaban en tus libros o en las explicaciones de tus docentes? ¿Crees que te ayudaron a comprender o simplemente a resolver los ejercicios?
- Elabora un texto reflexivo (unas 200 palabras) conectando tu experiencia personal con los conceptos de comprensión *instrumental* vs. *relacional* de Skemp y la secuencia de Bruner (enactivo-icónico-simbólico) vistos en este manual.

2. El Ojo Didáctico: Análisis de Error y Propuesta de Intervención.

Consigna: Aplica el ciclo del «detective cognitivo» a la siguiente situación real de aula.

Escenario: Un alumno de 4º de Primaria, al resolver la suma $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$, escribe:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1+2}{2+3} = \frac{3}{5}$$

Tu tarea consiste en:

- a) *Diagnóstico del Error (Formular una Hipótesis):* ¿Cuál es la causa conceptual probable de este error? ¿Qué conocimiento previo (y correcto en otro contexto) está aplicando de forma inadecuada? ¿Qué obstáculo epistemológico de los vistos en el capítulo está manifestando?
- b) *Diseño de la Intervención Dirigida:* Describe, paso a paso, cómo intervenirías. No se trata de dar la regla correcta, sino de generar un conflicto cognitivo.
 - ¿Qué modelo visual (área, longitud o conjunto) es el más potente para mostrar la incoherencia de su resultado? Justifica tu elección.
 - Escribe el guion del diálogo que tendrías con el alumno o alumna para guiarle, a través de la representación visual y de preguntas clave, a descubrir por sí mismo/a la insuficiencia de su método.

3. Diseño de una Micro-Secuencia Didáctica.

Consigna: Tu objetivo es diseñar una secuencia de 15-20 minutos para introducir el producto de una fracción por un número natural (ej. $3 \times \frac{2}{5}$) a un grupo de 5º de Primaria, conectando con su significado como *suma repetida*. La secuencia debe seguir rigurosamente el enfoque de Bruner. Describe las tres fases de tu secuencia:

- *Fase Enactiva (la acción):* ¿Qué actividad manipulativa propondrías? (Pista: piensa en tiras de fracciones o círculos fraccionarios). Describe la acción que deben realizar para «juntar 3 veces dos quintos».
- *Fase Icónica (la imagen):* ¿Cómo guiarías al alumnado para que represente gráficamente lo que acaba de hacer? Describe el dibujo o esquema que deberían producir.
- *Fase Simbólica (el registro):* ¿Cómo conectarías la acción y el dibujo con la notación simbólica $3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$? Escribe las preguntas clave que harías para *institucionalizar* el procedimiento.

11 Los Números Decimales: Continuidad y Precisión

UNA vez explorado el terreno firme y predecible de los números naturales y enteros, nos adentramos en uno de los territorios más fascinantes y, a la vez, más desafiantes de la aritmética escolar. El estudio de las fracciones, en el capítulo anterior, abrió una primera puerta a un universo de cantidades situadas *entre* los números enteros. Ahora, con los números decimales, no solo cruzaremos esa puerta, sino que descubriremos que ese universo es infinitamente denso y está gobernado por la misma lógica elegante de nuestro Sistema de Numeración Decimal (SND).

11.1 Introducción: La Búsqueda de un Universo Denso

El estudio de los decimales marca un punto de inflexión en el desarrollo del pensamiento numérico del alumnado de Educación Primaria. Supone una ampliación significativa del concepto de número, una auténtica *ruptura epistemológica* que trasciende el ámbito de lo contable para sumergirse en un universo de medida y relaciones continuas. Como señalan Hiebert y Wearne (1992), una comprensión profunda de los decimales es fundamental para el desarrollo posterior del pensamiento proporcional y algebraico.

Este capítulo se dedica a explorar en profundidad este nuevo universo. Se desgarrará su conexión fundamental con las fracciones y el SND, y se ofrecerán estrategias didácticas para construir su significado, siempre con un énfasis en la comprensión conceptual y el apoyo en modelos visuales y manipulativos. Nuestra meta es transformar la enseñanza de los decimales, de un conjunto de reglas sobre “dónde poner la coma” a una fascinante exploración de la precisión y la continuidad.

Clave Didáctica: El Desafío Conceptual, De lo Discreto a lo Continuo

El mayor desafío en la enseñanza de los decimales es ayudar al alumnado a realizar una transición cognitiva fundamental. Deben pasar de pensar en los números como una colección de objetos discretos y separados (como en los números naturales) a comprenderlos como puntos en un continuo. Esta transición implica reconstruir ideas profundamente arraigadas sobre el valor, el orden y el significado de las operaciones. Nuestra labor como docentes es ser los arquitectos de los puentes que faciliten esta compleja, pero esencial, reconstrucción conceptual.

11.1.1 El Salto Conceptual: De Contar a Medir con Precisión

Hasta ahora, el principal uso del número ha sido responder a la pregunta «¿cuántos hay?». La acción fundamental era *contar* objetos. Los números naturales y enteros son las herramientas perfectas para este propósito. Sin embargo, el mundo real nos plantea constantemente otro tipo de pregunta: «¿cuánto mide?», «¿cuánto pesa?», «cuánto cuesta?». La acción requerida aquí no es contar, sino *medir*.

Mientras que el conteo se mueve en un mundo discreto (hay 3 coches o 4 coches, pero no 3,5 coches), la medida habita en un mundo continuo. Una mesa no mide exactamente 1 metro; su longitud real se encuentra en algún punto entre dos números

enteros. Los números naturales se revelan insuficientes para describir esta realidad con la precisión que necesitamos.

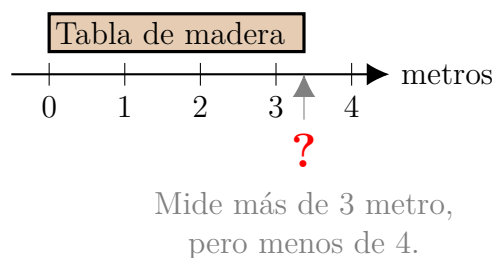


Figura 11.1: La insuficiencia de los números naturales para medir con precisión genera la necesidad de un nuevo tipo de número.

Esta necesidad práctica es el verdadero origen del número decimal. No es una invención abstracta de los matemáticos, sino la respuesta a un problema universal: cómo nombrar y operar con las cantidades que viven en los espacios intermedios de la recta numérica (ver Figura 11.1).

Para el alumnado, enfrentarse a este problema supone un formidable salto conceptual. Requiere abandonar la seguridad del conteo y adentrarse en la sutileza de la medida. Nuestra labor didáctica no es presentar el número decimal como un hecho consumado (“un número con coma”), sino recrear en el aula la necesidad que le dio origen, permitiendo que el alumnado lo construya como la solución lógica y potente a un problema real.

11.1.2 El Reto Didáctico: La Tiranía de los Números Naturales

El salto conceptual hacia las fracciones y los decimales presenta un desafío didáctico fundamental que reside en una paradoja: el mayor obstáculo para aprender los números decimales es el profundo conocimiento que el alumnado ya posee sobre los números naturales. Durante años, han construido un edificio conceptual sólido, robusto y exitoso, cuyas reglas internas dominan su pensamiento cuantitativo. Sin embargo, este conocimiento previo, lejos de ser una simple ayuda, actúa a menudo como un *obstáculo epistemológico* (Bachelard, 1938/2000; Brousseau, 2007).

Como ya se ha indicado anteriormente, un obstáculo epistemológico no es una ausencia de conocimiento, sino un conocimiento anterior que fue eficaz en un contexto, pero que se revela inadecuado o genera errores al ser aplicado en un nuevo dominio. La mente del alumnado no es una pizarra en blanco; llega al aprendizaje de los decimales aplicando la lógica que le ha funcionado hasta ahora:

- *La lógica de la longitud*: “Un número con más cifras siempre es mayor” (ej., $125 > 25$).
- *La lógica del cero final*: “Añadir un cero al final hace el número más grande” (ej., $5 \neq 50$).
- *La lógica de la multiplicación*: “Multiplicar siempre agranda el resultado”.

Cuando un estudiante se enfrenta a la comparación entre 0,5 y 0,25, su intuición, forjada en el universo de los naturales, le grita que 25 es mayor que 5, llevándole

a la conclusión errónea de que $0,25 > 0,5$. Este no es un error de descuido, sino la manifestación de una lógica coherente pero incorrectamente aplicada (ver Figura 11.2).

El Obstáculo Epistemológico en Acción

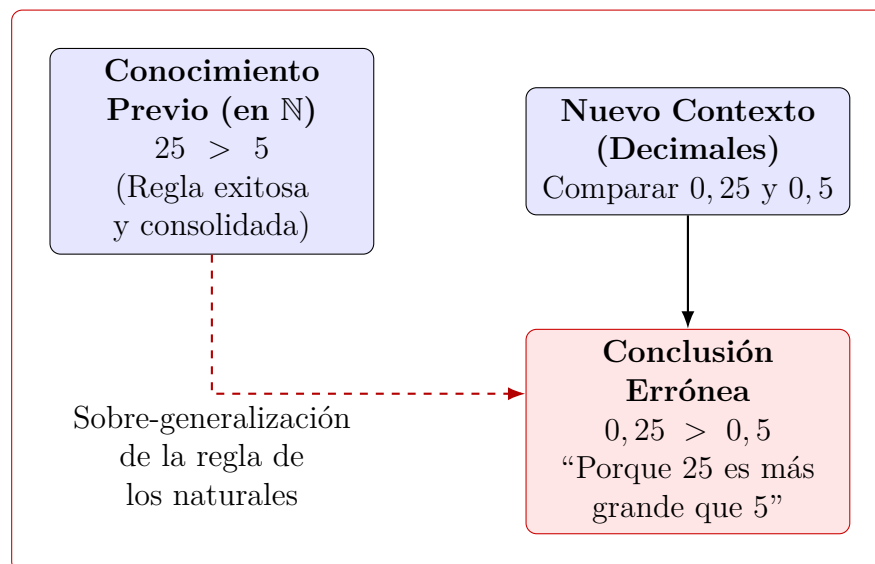


Figura 11.2: Representación visual del obstáculo epistemológico. El conocimiento previo sobre los números naturales se aplica de forma incorrecta al nuevo contexto de los números decimales. En este caso, que más cifras implica un número mayor.

Nuestra labor como docentes no es simplemente corregir este error, sino comprender su origen. Debemos crear situaciones que generen un *conflicto cognitivo* (Piaget, 1964/2018), es decir, una disonancia entre la predicción del estudiante (basada en su conocimiento de los naturales) y la evidencia que obtiene de la manipulación o visualización (usando dinero, material multibase o la recta numérica).

Clave Didáctica: El Conflicto Cognitivo para Reconstruir el Conocimiento

La “tiranía de los números naturales” no se vence con explicaciones, sino con experiencias. En lugar de decir “estás equivocado, 0,5 es la mitad y 0,25 es un cuarto”, debemos preguntar: “Vamos a comprobarlo. Si esto fuera dinero, ¿qué preferirías recibir, 0,5€ o 0,25€? ¿Cuántos céntimos son cada uno?”. Esta pregunta no corrige, sino que traslada el problema a un contexto significativo donde el propio alumno puede constatar la insuficiencia de su modelo anterior y la necesidad de construir uno nuevo. Este es el corazón del aprendizaje constructivista.

Este capítulo, por tanto, se dedica a proporcionar las herramientas didácticas (modelos, contextos, secuencias) necesarias para guiar al alumnado en esta delicada pero fundamental reconstrucción de su concepto de número.

11.1.3 Hoja de Ruta del Capítulo

Para abordar la enseñanza de los números decimales de una manera fundamentada y eficaz, este capítulo se ha diseñado como un viaje en dos grandes etapas. Este

recorrido dual nos equipará no solo con el conocimiento del concepto en sí (el *saber sabio*), sino también con las herramientas pedagógicas para guiar a nuestro alumnado en su construcción (el *saber enseñar*). Este proceso de transformación del conocimiento es el núcleo de lo que se conoce como la *transposición didáctica* (Chevallard, 1991/2000).

A continuación, se presenta el itinerario que seguiremos:

1. *Fundamentos para el Docente*: Nuestra primera parada será en los aspectos epistemológicos, históricos y matemáticos. Exploraremos de dónde vienen los números decimales (su génesis histórica con Simon Stevin), qué son realmente (su estructura matemática como extensión del SND) y por qué su aprendizaje es complejo. Este es el conocimiento profundo del contenido que nos dará seguridad y rigor.
2. *Didáctica en el Aula*: La segunda etapa nos transforma en arquitectos del aprendizaje. Analizaremos los obstáculos cognitivos y los errores típicos del alumnado para poder anticiparlos. Diseñaremos un itinerario de enseñanza basado en la secuencia de Bruner (enactivo-icónico-simbólico), apoyándonos en modelos visuales clave (la recta numérica, la rejilla de 100) y contextos significativos (dinero, medida) para construir el significado de los conceptos y las operaciones.
3. *Concreción Curricular y Práctica*: Finalmente, anclaremos todo este conocimiento en la realidad del aula, conectándolo explícitamente con los saberes básicos y las competencias específicas que establece la normativa andaluza. El capítulo culminará con una serie de tareas diseñadas para la reflexión y la construcción de vuestro portfolio docente, invitándoos a poner en práctica lo aprendido.

Este doble enfoque, que va del objeto de conocimiento al sujeto que aprende, es el corazón de nuestra labor. Nos permitirá transformar la enseñanza de los decimales de una simple transmisión de reglas a una auténtica aventura de construcción de significado.

11.2 Fundamentos para el Docente: Perspectivas Histórica, Matemática y Epistemológica

Un docente eficaz no solo sabe enseñar, sino que posee un conocimiento profundo del contenido que enseña. Este saber, que Shulman (1986/2019) denominó *Conocimiento Didáctico del Contenido* (PCK), nos permite tomar decisiones informadas, anticipar las dificultades del alumnado e interpretar sus errores de forma constructiva. Para construir un PCK sólido sobre los números decimales, es fundamental que, como futuros docentes, exploremos la naturaleza de este concepto desde tres perspectivas interconectadas: su génesis histórica, su estructura matemática y los obstáculos que su aprendizaje entraña.

Esta sección se dedica a construir ese *saber sabio*, el conocimiento que sustenta y da sentido a la práctica pedagógica. Nos sumergiremos primero en la fascinante historia de su invención para, después, desentrañar la lógica matemática que los define.

11.2.1 Génesis Histórica: La Invención de la Precisión

La historia de las matemáticas es un espejo del desarrollo cognitivo. El camino que la humanidad recorrió durante milenios para desarrollar un concepto es, a menudo, un reflejo a gran escala del viaje que cada estudiante emprende en el aula. Comprender las dudas, los errores y las lentas y tortuosas sendas que siguieron las mentes más brillantes del pasado nos proporciona una lección fundamental de *empatía pedagógica*.

La idea de fraccionar la unidad es antiquísima, pero la creación de una notación eficiente y sistemática para estas partes es sorprendentemente reciente.

- *Antecedentes: La necesidad de precisión.* Mucho antes de la existencia de la coma decimal, civilizaciones como la babilónica ya necesitaban una gran precisión para sus cálculos astronómicos. Utilizaban un brillante sistema sexagesimal (base 60) que les permitía trabajar con partes fraccionarias de la unidad. Sin embargo, su sistema era complejo y no estaba integrado con el conteo decimal cotidiano. En la vida diaria, el uso de fracciones comunes (como $\frac{3}{4}$ o $\frac{2}{5}$) era la norma, pero operar con ellas, especialmente con distintos denominadores, resultaba tedioso y propenso a errores (Boyer & Merzbach, 1999). La necesidad de un sistema unificado y eficiente era cada vez más acuciante con el auge del comercio y la ciencia.
- *El Hito Clave: De Thiende de Stevin de Brujas (1585/2015).* El gran salto conceptual llegó de la mano del matemático e ingeniero flamenco Simon Stevin. En su breve pero influyente panfleto *De Thiende* (“La Décima”), propuso una idea revolucionaria en su simplicidad: extender la lógica del sistema de numeración de base 10 a las cantidades más pequeñas que la unidad. Si al movernos a la izquierda cada posición vale diez veces más, al movernos a la derecha cada posición valdrá diez veces menos.

Stevin no usó la coma decimal que conocemos hoy. Su notación era más explícita, indicando el “orden” de cada parte decimal (décimas, centésimas, etc.) con un número dentro de un círculo.

Notación de Stevin (1585) Notación Moderna

$$25^{\textcircled{0}}3^{\textcircled{1}}7^{\textcircled{2}} \longrightarrow 25,37$$

Figura 11.3: La idea fundamental de Stevin era extender el valor posicional. Su notación, aunque hoy nos parezca engorrosa, hace explícito que hay “25 enteros, 3 de la primera parte decimal (décimas) y 7 de la segunda (centésimas)”. La coma es una convención posterior más eficiente para la misma idea.

La propuesta de Stevin no era un mero ejercicio teórico; su obra estaba dirigida a “astrónomos, agrimensores, tapiceros, y todo tipo de mercaderes”, prometiendo que todos los cálculos se podrían realizar “con la misma facilidad que con los números enteros”. La invención del número decimal fue una respuesta a una *necesidad social y práctica*: unificar y democratizar el cálculo.

Clave Didáctica: La Lección Histórica de La Necesidad Práctica Precede al Formalismo

La historia de los decimales nos enseña una lección pedagógica fundamental: la *necesidad precede a la formalidad*. Los decimales no nacieron de una definición abstracta, sino de la necesidad práctica de medir, calcular y comerciar con mayor precisión y facilidad.

En el aula, debemos seguir este mismo camino. Antes de presentar el número decimal como una nueva regla de escritura, debemos crear situaciones (con dinero, medidas, repartos) donde el alumnado sienta que los números naturales se quedan cortos y necesite una forma más precisa de expresar una cantidad. La notación decimal debe aparecer como la solución ingeniosa a un problema tangible, no como una norma arbitraria.

11.2.2 Estructura Matemática: El ADN del Número Decimal

Una vez explorado su origen histórico, es fundamental que como futuros docentes diseccionemos la estructura matemática del número decimal. Este no es un mero ejercicio de formalismo, sino la base del Conocimiento Didáctico del Contenido (Shulman, 1986/2019). Comprender el *porqué* de las reglas nos permitirá enseñarlas con significado, anticipar las dificultades del alumnado y diseñar intervenciones que construyan una comprensión relacional y duradera (Skemp, 1978).

11.2.2.1 Definición y Conexión con el Sistema de Numeración Decimal

La idea más potente y fundamental es que los números decimales no son un concepto radicalmente nuevo, sino una *extensión natural y lógica del Sistema de Numeración Decimal (SND)* a cantidades menores que la unidad. Un número decimal es, en esencia, una forma de escribir una *fracción decimal*, es decir, una fracción cuyo denominador es una potencia de 10 (10, 100, 1000, ...).

La coma decimal (o el punto, en otras culturas) actúa como una nueva referencia, una frontera que marca la posición de las unidades. A su derecha, la lógica del valor posicional continúa inalterada: cada posición tiene un valor 10 veces menor que la posición a su izquierda.

Clave Didáctica: De “Dos Números” a “Un Número”

Uno de los mayores obstáculos para el alumnado es ver un número como 3,14 como dos números enteros separados por una coma. Nuestra labor es ayudarles a reconstruir su conocimiento para que lo vean como una *única cantidad* (3 unidades y un poco más), cuya estructura interna sigue las mismas reglas de la base 10 que ya conocen. El decimal no es una ruptura, sino una continuación del SND (Godino et al., 2004).

11.2.2.2 La Expresión Polinómica Extendida

La mejor manera de visualizar esta continuidad del SND es a través de la descomposición polinómica. Así como un número natural se puede expresar como una suma de potencias de 10, un número decimal se descompone de la misma manera, extendiendo el patrón a potencias negativas de 10.

Consideremos el número 235,74. Su estructura interna es:

$$235,74 = 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5 \cdot 1 + 7 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{100}$$

O, usando potencias de 10:

$$235,74 = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}$$

Clave Didáctica: La Descomposición Polinómica como Fundamento de los Algoritmo

Esta descomposición polinómica no es una mera curiosidad matemática. Es la razón fundamental por la que los algoritmos de las operaciones con decimales (como alinear las comas en la suma) funcionan. Comprender esta estructura permite al docente enseñar los algoritmos como procedimientos lógicos y con sentido, en lugar de como un conjunto de “trucos mágicos”. Es el pilar de una *comprensión relacional* (Skemp, 1978).

11.2.2.3 La Relación Indisoluble con Fracciones y Porcentajes

Recuperamos del capítulo anterior este concepto. Los números decimales, las fracciones y los porcentajes no son tres temas aislados, sino tres *lenguajes distintos para expresar la misma idea*: la relación parte-todo. Una enseñanza eficaz debe hacer estas conexiones explícitas. Para ello, el modelo de la *rejilla de 100* actúa como una “Piedra de Rosetta” didáctica, permitiendo al alumnado traducir de forma visual y simultánea entre los tres sistemas de representación.

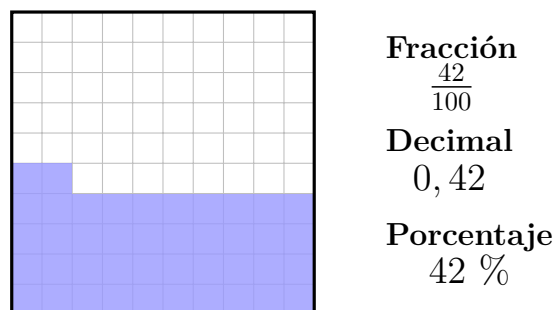


Figura 11.4: La rejilla de 100 como “Piedra de Rosetta” para visualizar la equivalencia entre fracción, decimal y porcentaje.

11.2.2.4 Clasificación de los Números Decimales

Al convertir fracciones a su forma decimal (dividiendo el numerador entre el denominador), descubrimos que existen diferentes tipos de números decimales. Aunque una clasificación formal y exhaustiva excede los objetivos de Primaria, es parte del *saber sabio* del docente conocer este panorama para contextualizar lo que enseña.

- *Decimales Exactos (o Finitos)*: Tienen un número limitado de cifras decimales. Proviene de fracciones irreducibles cuyo denominador solo tiene como factores primos el 2 y/o el 5. *Este es el foco principal en Educación Primaria*. Ejemplo: $\frac{3}{4} = 0,75$.

- **Decimales Periódicos:** Tienen infinitas cifras decimales que se repiten en un patrón (periodo). Proviene de fracciones irreducibles cuyo denominador tiene algún factor primo distinto de 2 o 5. Ejemplo: $\frac{1}{3} = 0,333... = 0,\overline{3}$. Se introducen de forma muy intuitiva en los últimos cursos, si acaso.
- **Decimales no Exactos y no Periódicos (Números Irracionales):** Tienen infinitas cifras decimales sin un patrón de repetición. No pueden expresarse como una fracción.

Profundizando: Nota Cultural y de Ampliación

La existencia de números irracionales como π o $\sqrt{2}$ fue un descubrimiento que provocó una profunda crisis en la matemática de la Antigua Grecia (la crisis de los inconmensurables). Aunque no son un objeto de estudio operativo en Primaria, mencionar su existencia puede servir para maravillar al alumnado y mostrarles que el universo de los números es mucho más grande de lo que imaginan.

11.2.2.5 La Propiedad de Densidad: Rellenando los Huecos de la Recta

Quizás el cambio conceptual más profundo que introducen los decimales (y los racionales en general) es la *propiedad de densidad*. Mientras que los números naturales son discretos (entre 2 y 3 no hay otro número natural), el conjunto de los números decimales es denso: entre dos números decimales cualesquiera, por muy cercanos que estén, siempre podemos encontrar otro.

La *recta numérica* es el modelo visual por excelencia para comprender esta propiedad. Permite realizar un proceso de “zoom” infinito que hace visible la idea de densidad.

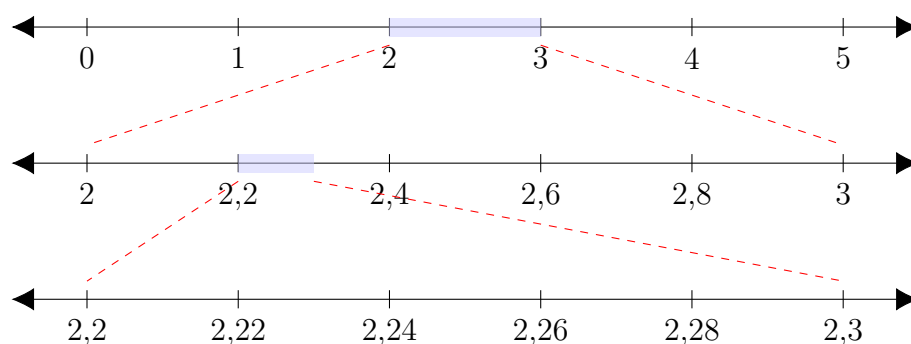


Figura 11.5: Visualización de la propiedad de densidad mediante el “zoom” en la recta numérica entre 2 y 3.

Esta idea de “rellenar los huecos” es vital para el desarrollo matemático posterior y para la comprensión de conceptos como la continuidad, fundamental en la ciencia y la técnica.

11.3 Didáctica de los Números Decimales: Construyendo el Significado

Una vez explorado el *qué* y el *porqué* de los números decimales desde una perspectiva matemática e histórica (el «saber sabio»), nos adentramos en el corazón de nuestra labor como docentes: el *cómo*. ¿Cómo transformamos este conocimiento, a menudo abstracto, en experiencias de aprendizaje significativas y accesibles para el alumnado de Primaria? Este proceso de transformación es el núcleo de la *transposición didáctica* (Chevallard, 1991/2000).

Este apartado no es un recetario de actividades, sino un mapa de navegación. Su propósito es dotar al futuro personal docente de los principios, herramientas y rutas didácticas para guiar al alumnado en un viaje conceptual complejo y fascinante. Nuestra meta no es que el alumnado aplique algoritmos de forma mecánica, sino que construya un *pensamiento decimal* robusto, flexible y conectado con la realidad.

La enseñanza de los decimales nos obliga a cambiar el foco: del objeto matemático (el número) pasamos al sujeto que aprende (el niño o la niña). Lejos de ser una pizarra en blanco, el alumnado llega al aula con un conocimiento muy sólido y exitoso sobre los números naturales. Este conocimiento previo, como veremos, es tanto la base sobre la que construir como la fuente de los mayores obstáculos. Nuestra labor, por tanto, no es la de un mero transmisor de reglas, sino la de un *arquitecto de experiencias* que ayuda al alumnado a reconstruir y ampliar su universo numérico.

11.3.1 Obstáculos Epistemológicos y Errores Típicos: El Docente como Detective Cognitivo

Si la historia nos ha enseñado que a la humanidad le costó siglos desarrollar una notación y un concepto coherente para los decimales, es lógico anticipar que su aprendizaje presentará dificultades. Nuestro rol como docentes es el de un *detective cognitivo* que, ante un error, no se limita a corregir, sino que diagnostica su causa para diseñar una intervención que ayude al alumnado a reconstruir su pensamiento (ver ciclo de actuación en Sección 14.5.2).

En el caso de los números decimales, el gran obstáculo epistemológico es el propio conocimiento sobre los *números naturales*. El alumnado ha construido un sólido edificio conceptual sobre la base de que los números sirven para contar objetos discretos. La llegada de los decimales hace temblar los cimientos de este edificio. Nuestro rol como docentes es el de un *detective cognitivo* que, ante un error, no se limita a corregir, sino que diagnostica su causa para diseñar una intervención que ayude al alumnado a reconstruir su pensamiento (Shulman, 1986/2019).

11.3.1.1 Obstáculo 1: Revisitando La Tiranía de los Números Naturales

Como ya se indicó en el apartado 11.1.2, es el obstáculo más persistente y la fuente de los errores más comunes. El alumnado aplica la lógica de los números enteros a la parte decimal, tratándola como si fuera otro número natural.

Dificultad Común: Comparación de Decimales

- **Evidencia:** Un alumno o alumna de 4º de Primaria afirma con total seguridad que $0,12$ es mayor que $0,6$ porque, razona, «12 es más grande que 6».
- **Diagnóstico (Hipótesis):** El alumnado no está conceptualizando $0,12$ y $0,6$ como cantidades únicas. Ignora el valor posicional de las cifras decimales y trata la parte decimal como un número natural aislado. Su conocimiento previo sobre los naturales interfiere con la nueva lógica de los decimales (Hiebert & Wearne, 1992).
- **Intervención (Crear Conflicto Cognitivo):** La corrección verbal («No, es al revés») es ineficaz porque choca con su lógica interna. La clave es crear un *conflicto cognitivo* (Piaget, 1964/2018) a través de una representación visual o un contexto familiar.
 1. **Contexto de Dinero:** «¿Qué prefieres que te dé, 12 céntimos ($0,12\text{€}$) o 60 céntimos ($0,60\text{€}$)?». La experiencia social con el dinero hace evidente la contradicción.
 2. **Modelo de Área (Rejilla de 100):** «Vamos a colorear ambos números en una rejilla. ¿Qué cantidad ocupa más espacio?». La evidencia visual es incontestable.

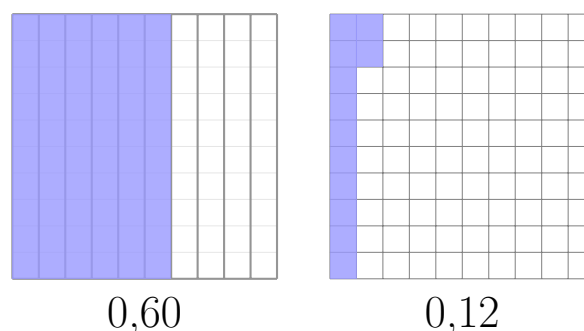


Figura 11.6: Visualización del conflicto cognitivo. La rejilla de 100 evidencia que el área coloreada para $0,60$ es mayor que para $0,12$, refutando la lógica basada en los números naturales.

11.3.1.2 Obstáculo 2: El Cero Fantasma y el Cero Transparente

El cero, que fue una invención clave para el sistema de numeración posicional, vuelve a presentar un desafío conceptual en el contexto de los decimales. Su rol se vuelve dual y, para el alumnado, a menudo confuso: a veces es un marcador de posición indispensable (un “cero fantasma” que hay que hacer visible) y otras veces es un añadido opcional que no altera el valor (un “cero transparente”).

Dificultad Común: El Doble Rol del Cero

- **Evidencia:**
 1. Un alumno escribe $0,4$ cuando se le dicta «cuatro centésimas».

2. Otro alumno, o el mismo, afirma que $0,40\text{€}$ es más dinero que $0,4\text{€}$ porque «40 es más que 4».

- **Diagnóstico (Hipótesis):** En el primer caso, el alumno no comprende la función del cero como *marcador de posición* en la parte decimal. El cero que ocupa el lugar de las décimas es “invisible” en el lenguaje oral, y por tanto lo omite en la escritura. En el segundo caso, el alumno *sobre-generaliza la regla de los números naturales*, donde añadir un cero a la derecha siempre multiplica el valor por 10. No ha construido el concepto de *equivalencia decimal*.
- **Intervención (Hacer Visible lo Invisible y lo Equivalente):** Necesitamos modelos que materialicen la estructura posicional y la equivalencia.
 - **Para el Cero como Marcador de Posición ($0,4$ vs $0,04$):** El uso de una *tabla de valor posicional* junto con *material multibase* (redefiniendo la placa como la unidad) es de gran utilidad. Se pide al alumno que represente “cuatro décimas” (4 barras) y “cuatro centésimas” (4 cubitos). La columna vacía de las décimas en el segundo caso hace evidente la necesidad de un símbolo que “guarde el sitio”.
 - **Para la Equivalencia ($0,4$ vs $0,40$):** El modelo de área, como la *rejilla de 100*, es la herramienta más potente. Se pide al alumno que coloree 4 décimas (4 columnas completas) para representar $0,4$. Luego, en otra rejilla, se le pide que coloree 40 centésimas (40 cuadraditos individuales). El conflicto cognitivo surge cuando descubre que ha coloreado *exactamente la misma superficie*.

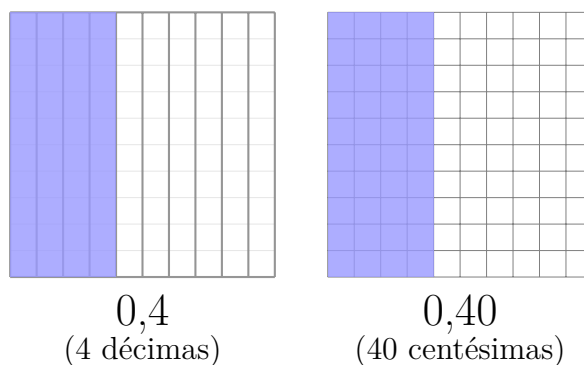


Figura 11.7: Visualización de la equivalencia entre $0,4$ y $0,40$. La rejilla de 100 permite al alumnado *ver* que ambas notaciones representan la misma cantidad, refutando la lógica de los números naturales.

11.3.2 Secuencia de Enseñanza y Modelos Visuales (La Ruta de Bruner)

Si la construcción del SND es un viaje de la acción al símbolo, la construcción del número decimal sigue exactamente el mismo camino. Para evitar el error de la abstracción prematura, nuestra práctica debe seguir rigurosamente la secuencia de aprendizaje de Bruner (1966/1972) (ver apartado 1.3.4), transitando de forma conec-

tada por sus tres fases: partir de la acción de particionar la unidad en diez partes iguales (*fase enactiva*), representarla visualmente con modelos como la rejilla de 100 (*fase icónica*), y solo entonces introducir la notación con coma decimal como registro de esa experiencia (*fase simbólica*).

11.3.2.1 Fase Enactiva: Experimentar la Décima Parte

El aprendizaje nace de la acción física y la manipulación. Para el concepto de decimal, la acción fundamental es *particionar una unidad en diez partes iguales*. El alumnado debe experimentar físicamente qué es una “décima parte” antes de poder representarla o nombrarla formalmente.

Los contextos más potentes para esta fase son aquellos donde la estructura decimal es inherente a la vida cotidiana:

- *El Dinero*: El euro se divide naturalmente en 100 céntimos, y una moneda de 10 céntimos es, tangiblemente, la décima parte de un euro.
- *La Medida*: El metro se divide en 10 decímetros o 100 centímetros. Medir objetos del aula con una cinta métrica revela la necesidad de usar unidades más pequeñas que el metro.

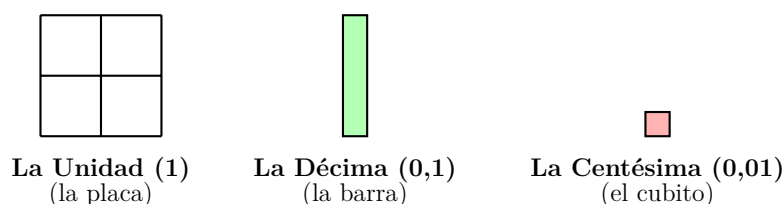
Ejemplo: El origen de la décima

Un docente de 3º de Primaria plantea un reto: «*Tenemos esta chocolatina (una tira de cartulina) y la queremos repartir en partes iguales entre los 10 miembros del equipo. ¿Cómo lo hacemos?*». El alumnado, mediante la acción de doblar el papel, construye físicamente la décima parte. La experiencia corporal y la manipulación preceden a cualquier notación. En esta fase, el lenguaje es vernáculo: “un trocito de los diez”, “una de las diez partes”.

11.3.2.2 Fase Icónica: Visualizar la Estructura

La fase icónica es el puente indispensable entre la acción concreta y el símbolo abstracto. Consiste en representar gráficamente la acción que se acaba de realizar. El objetivo es que el alumnado pueda “ver” la estructura del número decimal. Disponemos de tres modelos visuales fundamentales, cada uno con sus propias fortalezas.

1. Material Multibase (con unidad redefinida): Es el modelo proporcional por excelencia. Su poder didáctico reside en redefinir la unidad: la placa (que antes era 100) pasa a ser *la unidad (el todo, 1)*. Con esta nueva convención, la barra se convierte en una *décima* ($\frac{1}{10}$ o 0,1) y el cubito en una *centésima* ($\frac{1}{100}$ o 0,01). Este modelo permite “ver” y “tocar” la relación de equivalencia: 10 barras (décimas) forman físicamente una placa (unidad).



2. La Rejilla de 100: Es un modelo de área bidimensional. Consiste en un cuadrado de 10×10 . La rejilla completa es la unidad (1). Cada fila o columna es una décima (0,1), y cada cuadradito individual es una centésima (0,01). Es la herramienta más potente para conectar visualmente la *fracción* (ej. 46 de 100), el *decimal* (0,46) y el *porcentaje* (46 %) (Figura 11.4).

3. La Recta Numérica: Es el modelo de longitud por excelencia. Es fundamental para visualizar el *orden*, la *comparación* y, sobre todo, la propiedad de *densidad* (siempre hay otro número decimal entre dos dados). La metáfora del “zoom” es didácticamente muy potente para mostrar cómo se puede “ampliar” un segmento de la recta para ver las subdivisiones (Figura 11.5).

11.3.2.3 Fase Simbólica: Nombrar y Registrar

Esta es la fase final del viaje. Solo después de que el alumnado haya actuado (fase enactiva) y visualizado (fase icónica), se introduce la notación matemática formal. El símbolo (ej. 0,23) no es ahora una marca arbitraria, sino la culminación lógica de una experiencia, una forma eficiente de registrar un concepto ya comprendido.

La herramienta simbólica clave es la *Tabla de Valor Posicional Extendida*. Se presenta como una continuación natural de la tabla que ya conocen para los números naturales, demostrando que la lógica del sistema es la misma. La coma decimal actúa como una “frontera” o “eje de simetría”.

Clave Didáctica: La Coma como Ancla del Valor Posicional

Es fundamental que el alumnado comprenda la función de la coma. No es un simple separador, sino el símbolo que nos indica dónde está la *posición de las unidades*. Una vez localizada la unidad, el valor de todas las demás cifras queda determinado. Esta es la clave para superar muchos errores en las operaciones.

11.3.3 Didáctica de las Operaciones con Decimales: Más Allá de las Reglas

Una vez que el alumnado ha construido una base conceptual sólida sobre la naturaleza de los números decimales, llega el momento de abordar las operaciones. Tradicionalmente, este ha sido un terreno abonado para la enseñanza de “trucos” y reglas memorísticas: «*alineas las comas*», «*cuenta los decimales*», «*quita la coma del divisor*». Si bien estas reglas son eficientes, presentadas de forma aislada promueven una comprensión meramente instrumental (Skemp, 1978) que es frágil y propensa a errores.

Nuestra labor, en consonancia con el currículo andaluz (que exige operar con «*flexibilidad y sentido*»), consiste en abrir la “caja negra” de estos algoritmos. El objetivo es que el alumnado no solo sepa *qué* hacer, sino que comprenda *por qué* lo que hace tiene sentido matemático. Este enfoque transforma la aplicación de un algoritmo en una oportunidad para consolidar la comprensión del valor posicional y las propiedades de las operaciones.

11.3.3.1 Suma y Resta: El porqué de “alinear las comas”

El algoritmo tradicional para la suma y la resta de decimales es, conceptualmente, el más sencillo de justificar. La regla clave es *alineas las comas decimales* verticalmente.

La justificación matemática no es un capricho estético, sino la aplicación directa

del *principio de valor posicional*. Al alinear las comas, nos aseguramos de que estamos operando unidades del mismo tipo: unidades con unidades, décimas con décimas, centésimas con centésimas, etc. Es la misma lógica que nos lleva a alinear por la derecha los números naturales, solo que aquí la coma actúa como el ancla de referencia.

Mini-Caso de Aula: El valor posicional como criterio para alinear las comas

Un alumno de 4º de Primaria debe resolver la suma $12,5 + 3,14$. Coloca los números así y suma:

$$\begin{array}{r} 12,5 \\ + 3,14 \\ \hline 4,39 \end{array} \rightarrow \leftarrow \text{Respuesta incorrecta}$$

Diagnóstico: El alumno está aplicando la regla de “alinear a la derecha” de los números naturales, tratando las partes enteras y decimales como dos números separados. No ha comprendido que la coma es la que define el valor de cada cifra.

Intervención Didáctica (Creando un Conflicto Cognitivo):

- *Docente:* «Vamos a pensar en dinero. 12,5 es como 12 euros y 50 céntimos, ¿verdad? Y 3,14 es como 3 euros y 14 céntimos. Si juntamos el dinero, ¿juntarías los 12 euros con los 14 céntimos? ¿O juntarías los euros con los euros y los céntimos con los céntimos?»
- *Alumno:* «¡Los euros con los euros y los céntimos con los céntimos!»
- *Docente:* «¡Exacto! Pues eso es exactamente lo que hacemos al alinear las comas. La coma nos ayuda a asegurarnos de que estamos sumando siempre cosas del mismo tipo. Vamos a colocarlo bien ahora.»

Conclusión: El contexto del dinero hace tangible y evidente la necesidad de respetar el valor posicional, dotando de significado a la regla de “alinear las comas”.

11.3.3.2 Multiplicación: El secreto de “contar los decimales”

La regla tradicional para multiplicar decimales («multiplica como si fueran naturales y luego cuenta las cifras decimales de los factores para poner la coma en el resultado») es, para muchos alumnos, un acto de magia. La justificación de esta regla es una excelente oportunidad para conectar los decimales con las fracciones decimales.

El “secreto” reside en que un número decimal es una fracción. Al multiplicar, estamos multiplicando esas fracciones, y las reglas de la multiplicación de fracciones (numerador por numerador, denominador por denominador) explican el resultado.

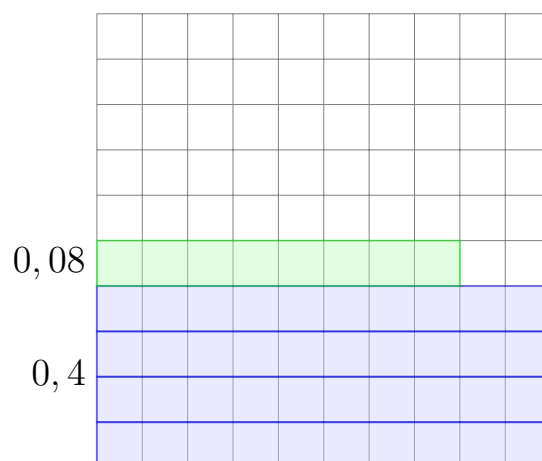


Figura 11.8: Modelo de representación en la rejilla de 100 de la fase enactiva para el análisis del área total de la suma de las áreas parciales: $0,4 + 0,08 = 0,48$

Ejemplo: La conexión con las fracciones para justificar el algoritmo

El algoritmo “mágico”:

1. Multiplico $4 \times 2 = 8$.
2. Cuento los decimales: 0,4 (1 decimal) y 0,2 (1 decimal). En total, 2 decimales.
3. Pongo la coma para que el resultado tenga 2 decimales: 0,08.

La justificación con Fracciones (El porqué):

1. Traducimos los decimales a su lenguaje de fracción: $0,4 = \frac{4}{10}$ y $0,2 = \frac{2}{10}$.
2. Multiplicamos las fracciones: $\frac{4}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{4 \times 2}{10 \times 10} = \frac{8}{100}$.
3. Traducimos el resultado a su lenguaje decimal: $\frac{8}{100} = 0,08$.

Conclusión Didáctica: La regla de “contar decimales” es un atajo para la multiplicación de los denominadores (potencias de 10). Esta conexión dota de sentido al algoritmo y refuerza la relación entre fracciones y decimales (Hiebert & Wearne, 1992).

El *modelo de área* es la representación icónica perfecta para visualizar este proceso.

11.3.3.3 División: La lógica de “quitar la coma del divisor”

El algoritmo de la división con decimales en el divisor suele presentarse con la regla: «*se tacha la coma del divisor y se añaden tantos ceros al dividendo como decimales tenía el divisor*». De nuevo, un procedimiento que parece arbitrario.

La justificación se basa en una de las propiedades más importantes de la división: la *invarianza del cociente*. Si multiplicamos el dividendo y el divisor por el mismo número (distinto de cero), el cociente no varía. Esta es la misma propiedad que usamos para encontrar fracciones equivalentes. El objetivo es transformar la división original en una *división equivalente* que sea más fácil de resolver, es decir, una que tenga un

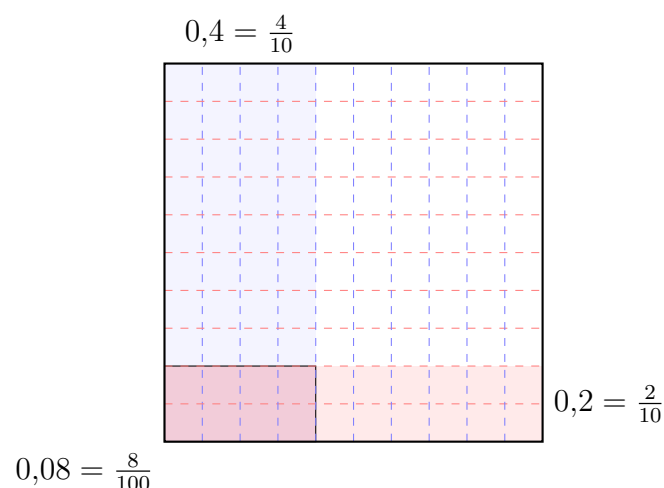


Figura 11.9: Modelo de representación en la rejilla de 100 de la fase enactiva del efecto del producto por decimales

divisor natural.

Ejemplo: La invarianza del cociente para justificar el algoritmo

El algoritmo “mágico”: «Tacho la coma del 0,4 y, como había un decimal, añado un cero al 14,8, convirtiéndolo en 148. Ahora divido 148 entre 4». El resultado es 37.

La justificación con la Propiedad de Invarianza (El porqué):

1. *El problema:* No sabemos dividir por un número decimal como 0,4.
2. *La estrategia:* Vamos a transformar el problema en uno que sí sabemos resolver. Buscamos una división equivalente que tenga un divisor natural.
3. *La herramienta:* La propiedad de invarianza. Si multiplicamos dividendo y divisor por el mismo número, el resultado será el mismo.
4. *La acción:* Para que 0,4 se convierta en 4, ¿por qué número debemos multiplicar? Por 10. Para que el resultado no cambie, debemos multiplicar también el dividendo por 10.

$$14,8 \div 0,4 = (14,8 \times 10) \div (0,4 \times 10) = 148 \div 4 = 37$$

Conclusión Didáctica: La regla de “quitar la coma y añadir ceros” es un atajo procedimental para multiplicar dividendo y divisor por la misma potencia de 10. Entender esto permite al alumnado comprender que no está haciendo un truco, sino resolviendo un problema equivalente de forma inteligente.

11.3.3.4 El Rol Fundamental de la Estimación: La Brújula del Sentido Numérico

En las operaciones con decimales, donde el tamaño de los números puede ser poco intuitivo y un error al colocar la coma tiene consecuencias drásticas, la *estimación* deja

de ser un extra para convertirse en una herramienta fundamental (National Council of Teachers of Mathematics, 2014). Antes de realizar cualquier algoritmo, debemos fomentar en el alumnado la costumbre de hacerse la pregunta: «¿*alrededor de qué número debería estar el resultado?*».

- Para la suma $3,8 + 7,1$: «Es casi como $4 + 7$, así que el resultado estará cerca de 11».
- Para el producto $4,9 \times 3,1$: «Es casi como 5×3 , así que el resultado estará cerca de 15».
- Para la división $23,5 \div 4,8$: «Es casi como 25 entre 5, así que el resultado estará cerca de 5».

Esta práctica no solo ayuda a detectar errores graves (ej. si en el producto anterior el resultado es 1,51 o 151), sino que, y más importante, desarrolla un sentido numérico profundo sobre el efecto de las operaciones. Fomenta que el alumnado piense sobre los números y las relaciones entre ellos, en lugar de limitarse a aplicar reglas mecánicamente.

Clave Didáctica: La Estimación como Guardiana del Significado

En el universo de los decimales, donde un simple desliz de la coma puede generar un error catastrófico (p.ej., calcular el precio de 1,5 kg de fruta a 2,30€/kg y obtener 34,5€ en lugar de 3,45€), la estimación deja de ser una habilidad secundaria. Se convierte en la *primera línea de defensa del sentido común*.

Fomentar la pregunta «¿Tiene sentido mi respuesta?» es tan importante como enseñar el propio algoritmo. Esta práctica no solo previene errores, sino que refuerza constantemente la comprensión del valor de los números y el efecto de las operaciones. Como veremos en el próximo capítulo, la estimación y el cálculo mental estratégico son las dos caras de la misma moneda: el *pensamiento numérico flexible*.

11.3.4 Los Números Decimales en el Currículo de Andalucía (LOMLOE)

Las teorías psicopedagógicas y las estrategias didácticas que hemos explorado no son meras recomendaciones académicas; encuentran su validación y su mandato de aplicación en el currículo oficial que guía nuestra práctica docente. La *ORDEN de 30 de mayo de 2023* estructura el aprendizaje de forma competencial y progresiva, y su análisis nos revela una hoja de ruta pedagógica muy bien definida para la introducción de los números decimales.

11.3.4.1 Progresión de los Saberes Básicos por Ciclos

La forma en que el currículo oficial introduce los conceptos no es una cuestión administrativa, sino una decisión didáctica fundamental. Analizar esta progresión nos permite anclar nuestra práctica docente en un marco validado y coherente.

Segundo Ciclo (3º y 4º de Primaria): La Preparación Conceptual. Es importante observar que en el Segundo Ciclo *no se introducen los números decimales como tales*. En su lugar, el currículo se centra en sentar las bases conceptuales a través de las *fracciones decimales* en contextos muy concretos. El saber básico clave es:

MAT.2.A.2.4. Fracciones propias con denominador hasta 12 en contextos de la vida cotidiana.

Este saber, junto con el trabajo general con fracciones, es la piedra angular sobre la que se construirá el concepto de número decimal.

Implicación didáctica: Conexión con Fracciones antes de la Notación Decimal

La normativa nos está dando una pista pedagógica de una gran relevancia: antes de introducir la notación formal del número decimal (ej. 0,1), el alumnado debe haber construido un significado robusto para la *décima* como fracción ($\frac{1}{10}$) en contextos que le son familiares.

Nuestra labor en este ciclo es eminentemente *enactiva e icónica*:

- *Contexto del Dinero*: Trabajar la relación entre el euro y el céntimo. El alumnado comprende que un céntimo es «la centésima parte de un euro» mucho antes de escribir «0,01€».
- *Contexto de la Medida*: Trabajar la relación entre el metro, el decímetro y el centímetro. Se manipulan reglas y cintas métricas para *ver y sentir* lo que es una décima de metro.

En este ciclo no enseñamos los números decimales, sino que *construimos los cimientos* que harán que su posterior introducción en el Tercer Ciclo sea un paso natural y lógico, en lugar de una regla arbitraria.

Tercer Ciclo (5º y 6º de Primaria): Formalización, Conexión y Aplicación. Es en esta etapa final de la Primaria donde el número decimal se introduce formalmente como un nuevo objeto matemático, se conecta con otros conceptos y se utiliza para resolver problemas. Los saberes básicos clave son explícitos:

- MAT.3.A.1.1: Establece la necesidad de comprender la «diferencia entre números naturales, enteros, racionales y *reales*» y su «representación [...] incluida la recta numérica» (MAT.3.A.2.3).
- MAT.3.A.3.4: Demanda el uso de «Estrategias de resolución de operaciones aritméticas (con números naturales, *decimales* y fracciones) con flexibilidad y sentido»
- MAT.3.A.4.5: Especifica la «Relación entre fracciones sencillas, *decimales* y porcentajes».

Implicación didáctica: Formalización, Conexión y Aplicación (Tercer Ciclo)

El foco del Tercer Ciclo se desplaza de la construcción del concepto a su *formalización, uso y conexión*. El trabajo previo del Segundo Ciclo es ahora el andamiaje sobre el que construiremos:

- *Dar un nombre nuevo a una idea vieja*: Se presenta la notación 0,1 como «la forma matemática de escribir *una décima*», una idea que el alumnado ya ha explorado. La coma decimal se introduce como el símbolo que marca

la frontera de la unidad.

- *Operar con significado*: Los algoritmos para operar con decimales se justifican a través de los conocimientos previos sobre el valor posicional y las fracciones, tal y como se ha detallado en este capítulo.
- *Tejer la red conceptual*: Es el momento de usar la *rejilla de 100* como «Piedra de Rosetta» para traducir de forma fluida entre los tres lenguajes: fracción, decimal y porcentaje, desarrollando una comprensión profunda y flexible del número racional.

11.3.5 El Desarrollo de las Competencias Específicas a través de los Decimales

Esta progresión curricular, centrada en la construcción gradual del significado, es un vehículo excepcionalmente potente para desarrollar las competencias matemáticas clave del currículo. No se trata solo de aprender “sobre” decimales, sino de “hacer” matemáticas con ellos.

- *CE.MATE.1: Interpretar situaciones de la vida cotidiana, proporcionando una representación matemática [...]*

Cuando un discente traduce un precio de «un euro y veinticinco céntimos» a la expresión 1,25€, o interpreta que una medida de 2,5 metros está a mitad de camino entre 2 y 3 metros, está desarrollando plenamente esta competencia.

- *CE.MATE.2: Resolver situaciones problematizadas, aplicando diferentes técnicas, estrategias y formas de razonamiento [...]*

Ante un problema de cálculo de costes, un estudiante competente puede decidir si es más eficiente operar con fracciones ($2\frac{1}{2}$ kg) o con decimales (2,5 kg), demostrando la flexibilidad y el pensamiento estratégico que exige esta competencia.

- *CE.MATE.6: Comunicar y representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos y resultados matemáticos [...]*

La capacidad de un alumno para explicar *por qué* al multiplicar $0,2 \times 0,3$ el resultado es 0,06 y no 0,6, utilizando un modelo de área o argumentando desde las fracciones decimales, es un acto genuino de comunicación y representación matemática.

11.4 Conclusión del Capítulo: Habilitando el Pensamiento Preciso y Relacional

Hemos viajado a través del universo de los números decimales, explorando el espacio que existe *entre* los números enteros. Este capítulo ha buscado dismantlar la idea de que los decimales son simplemente «números con coma» para revelar su verdadera naturaleza: una de las extensiones más potentes y lógicas del pensamiento numérico. La meta no ha sido solo presentar qué son los decimales, sino, fundamentalmente, comprender cómo guiar al alumnado en la construcción de su significado para evitar que se conviertan en un conjunto de reglas frágiles y sin sentido.

El primer gran pilar de nuestro recorrido ha sido la comprensión de los decimales

como la *culminación natural del Sistema de Numeración Decimal*. No son un tema nuevo ni un apéndice de las fracciones, sino la aplicación de la lógica de la base 10 a cantidades menores que la unidad. La descomposición polinómica extendida y su conexión indisoluble con las fracciones decimales son la prueba de esta coherencia estructural. Comprender esto es lo que permite al docente enseñar los decimales no como un tema aislado, sino como una pieza que completa un puzzle que el alumnado ya conoce, dotando de significado a cada nueva posición a la derecha de la coma.

El segundo pilar ha sido la construcción de una *ruta didáctica segura y eficaz*. Hemos constatado que el principal desafío es superar el obstáculo epistemológico que representa la «tiranía de los números naturales» (Brousseau, 2007). Para ello, hemos insistido en la irrenunciable secuencia de Bruner: de la acción (fase enactiva) a la imagen (fase icónica) y, finalmente, al símbolo (fase simbólica) (Bruner, 1966/1972). Modelos como el dinero, la recta numérica, el material multibase redefinido y la rejilla de 100 no son meras actividades lúdicas, sino *puentes cognitivos indispensables* que permiten al alumnado visualizar la estructura decimal, confrontar sus concepciones erróneas y anclar el significado de los algoritmos en una experiencia concreta.

Finalmente, hemos consolidado el *propósito fundamental* de esta enseñanza. Aprender sobre números decimales en Educación Primaria trasciende la mera ejecución de algoritmos. Se trata de desarrollar un pensamiento más preciso, flexible y relacional. Un alumnado que comprende los decimales está preparado para interpretar la información cuantitativa del mundo real, desde una etiqueta de precio hasta una medición científica. Está cultivando las bases del pensamiento proporcional y el sentido de la medida, competencias matemáticas esenciales para una ciudadanía crítica y activa (National Council of Teachers of Mathematics, 2014).

Como futuros docentes, nuestra labor no es ser meros transmisores de reglas sobre «cómo mover la coma». Nuestra misión es ser arquitectos de experiencias de aprendizaje que revelen la lógica y la belleza del Sistema de Numeración Decimal en toda su extensión. Es habilitar en nuestro alumnado la capacidad de ver el mundo no solo en términos de unidades discretas, sino con la continuidad y la precisión que los números decimales hacen posible, equipándolos para navegar con confianza y sentido crítico en un mundo ineludiblemente matemático.

Hemos completado nuestro gran viaje por los campos numéricos de la Educación Primaria. Conocemos los números y sus operaciones. Ahora, nuestra atención se desplaza de *conocer* los números a *pensar con* ellos. La siguiente y última Parte de este manual nos adentrará en las grandes competencias transversales que dan vida a la aritmética: el *Cálculo Mental Estratégico* y la *Resolución de Problemas*, el verdadero corazón de la práctica matemática.

11.5 Para la Reflexión y el Portfolio Docente

1. *Tarea 1: Análisis de Error y Diseño de Intervención. El Misterio de la Coma Desplazada.*

Consigna: Aplica el ciclo del «detective cognitivo» a la siguiente situación real de aula.

Escenario: Un alumno de 5º de Primaria, que ya domina la multiplicación con

números naturales, resuelve la operación $3,4 \times 0,2$ y obtiene como resultado 6,8. Su razonamiento es: «ignoro las comas, hago 34 por 2 que es 68. Luego, como en la suma, pongo la coma en su sitio».

Tu tarea consiste en:

- a) *Diagnóstico del Error (Formular una Hipótesis)*: ¿Cuál es la causa conceptual probable de este error? ¿Qué conocimiento previo está aplicando de forma inadecuada? ¿Qué obstáculo epistemológico está manifestando?
- b) *Diseño de la Intervención Dirigida*: Describe, paso a paso, cómo usarías el modelo de área para crear un conflicto cognitivo y ayudar al alumnado a reconstruir su procedimiento. Describe el guion del diálogo clave que tendrías con el alumno.

2. *Tarea 2: Conexión de Modelos. El Caso del Céntimo Invisible.*

Consigna: Diseña una micro-actividad (10-15 minutos) que ayude al alumnado de 3º o 4º de Primaria a comprender por qué 0,4 y 0,40 representan la misma cantidad, superando el error común de pensar que 0,40 es mayor. La actividad debe conectar explícitamente el contexto del dinero con el modelo visual de la rejilla de 100. Tu tarea consiste en describir el contexto, el objetivo y la secuencia didáctica (diálogo y visualización).

3. *Tarea 3: Del Currículo al Aula. Construyendo la Décima.*

Consigna: La ORDEN de 30 de mayo de 2023 establece en el Segundo Ciclo el saber básico MAT.2.A.2.4. Tu objetivo es diseñar una micro-secuencia (15-20 minutos) para 4º de Primaria que materialice este saber, introduciendo el concepto de *décima* como número decimal, siguiendo rigurosamente la secuencia de Bruner. Detalla las tres fases:

- a) *Fase Enactiva (la acción)*: Describe la tarea manipulativa y la pregunta o reto que plantearías.
- b) *Fase Icónica (la imagen)*: Describe el puente a la representación gráfica.
- c) *Fase Simbólica (el registro)*: Escribe el diálogo exacto para conectar la acción y el dibujo con la notación 0,1.

V Construyendo una práctica docente eficaz y reflexiva

LOS módulos precedentes de este manual han proporcionado un recorrido exhaustivo a través de los fundamentos psicopedagógicos, el marco curricular, los contenidos aritméticos esenciales y las estrategias didácticas específicas para la enseñanza de los números y las operaciones en la Educación Primaria. Sin embargo, el conocimiento de estos elementos, aunque indispensable, no garantiza por sí solo una práctica docente exitosa. La verdadera maestría en la enseñanza de la aritmética se forja en la capacidad del docente para integrar estos saberes de manera coherente, para tomar decisiones pedagógicas informadas en el día a día del aula, y para cultivar una actitud de aprendizaje y mejora continua.

Este quinto y último módulo se enfoca precisamente en aquellas competencias y disposiciones transversales que caracterizan a un profesional de la enseñanza reflexivo y en constante desarrollo. Ya no se trata tanto de “qué” enseñar, sino de “cómo” orquestar el proceso de enseñanza-aprendizaje de manera global, cómo fomentar habilidades matemáticas superiores, cómo evaluar para promover el aprendizaje y cómo planificar con visión y flexibilidad.

A lo largo de los capítulos que componen este módulo, se explorarán aspectos cruciales para la consolidación de una práctica docente de calidad. Se comenzará destacando la importancia del cálculo mental estratégico y la estimación como herramientas para desarrollar la flexibilidad y el sentido numérico de los alumnos (Capítulo 12). Seguidamente, se reafirmará el papel central de la resolución de problemas, no solo como contenido, sino como el verdadero corazón de la actividad matemática y el principal motor del aprendizaje (Capítulo 13). A continuación, se abordará la evaluación desde una perspectiva formativa, entendida como una herramienta para comprender y mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje, y para analizar los errores como valiosas oportunidades pedagógicas (Capítulo 14). Finalmente, se integrarán todos estos elementos en el proceso de planificación didáctica, ofreciendo pautas para diseñar secuencias de enseñanza coherentes, significativas y adaptadas a la diversidad del alumnado (Capítulo 15).

Este módulo final busca cerrar el círculo, conectando el conocimiento teórico y didáctico con las realidades y desafíos de la práctica profesional. El objetivo es empoderar al futuro maestro con las herramientas y la mentalidad necesarias para no solo enseñar aritmética, sino para cultivar en sus alumnos una comprensión profunda, una actitud positiva y una competencia matemática que les sirva a lo largo de toda su vida. La enseñanza eficaz es un arte y una ciencia que se nutre de la preparación, la experiencia y, sobre todo, de una reflexión constante sobre la propia labor.

12 El Cálculo Mental Estratégico y la Estimación

EN los capítulos precedentes, hemos explorado los fundamentos de los sistemas numéricos y los algoritmos para operar con ellos. Sin embargo, el desarrollo de una auténtica competencia matemática en Educación Primaria va más allá del dominio de procedimientos escritos. Implica la capacidad de utilizar los números de forma flexible, de razonar sobre las cantidades y las operaciones, y de elegir las estrategias más eficientes para cada situación. En este contexto, el cálculo mental estratégico y la estimación emergen como habilidades cruciales que dotan al alumnado de autonomía y sentido numérico (McIntosh et al., 1992; Sowder, 1992).

Este capítulo se dedica a profundizar en su importancia, diferenciándolos del simple cálculo “de cabeza”, y a explorar diversas estrategias que pueden promoverse en el aula. El objetivo es proporcionar al futuro personal docente herramientas para cultivar en su alumnado no solo la capacidad de obtener respuestas exactas, sino también la habilidad de pensar numéricamente con agilidad, confianza y sentido crítico.

12.1 Más Allá de “Hacer Cuentas de Cabeza”

Nuestra labor como docentes no parte de una preferencia pedagógica personal, sino de un mandato claro que emana del marco normativo vigente. La *ORDEN de 30 de mayo de 2023*, que desarrolla el currículo de Primaria en Andalucía, sitúa el *Sentido Numérico* como el primer y más fundamental de los seis sentidos que articulan el área de Matemáticas.

Este enfoque curricular nos exige ir más allá de la simple mecanización.

Implicación didáctica: El Sentido Numérico como mandato de flexibilidad y sentido

El currículo andaluz nos insta a que la enseñanza de las operaciones se realice con «*flexibilidad y sentido*». Por ejemplo, el saber básico MAT.2.A.3.4 (para el Segundo Ciclo) especifica la necesidad de trabajar la «Suma, resta, multiplicación y división de números naturales resueltas con flexibilidad y sentido: utilidad en situaciones contextualizadas, *estrategias y herramientas de resolución* y propiedades, mediante el uso de materiales y recursos lúdicos y motivadores».

Este capítulo es, por tanto, el manual de instrucciones para materializar este mandato. Demostraremos que enseñar cálculo mental estratégico y estimación no es una actividad complementaria, sino la vía principal para construir la «flexibilidad y sentido» que la normativa nos demanda.

Para poder cumplir con el mandato curricular, es indispensable clarificar una distinción conceptual clave. No todo cálculo que se hace “de cabeza” es pedagógicamente valioso de la misma manera.

Mini-Caso de Aula: Cálculo Reproductivo vs. Cálculo Estratégico

Un docente plantea en una clase de 4º de Primaria la suma $499 + 325$.

- *Alumno/a A*: Visualiza mentalmente el algoritmo tradicional. “9 más 5 son 14, pongo el 4 y me llevo 1. 1 más 9 son 10, más 2 son 12, pongo el 2 y me llevo 1. 1 más 4 son 5, más 3 son 8. El resultado es 824”.
- *Alumno/a B*: Transforma los números. “499 es casi 500. Así que hago $500 + 325$, que es 825. Pero como antes le sumé 1 al 499, ahora se lo tengo que quitar al resultado. 825 menos 1 es 824”.

Análisis: Ambos llegan al resultado correcto. Sin embargo, el Alumno A ha aplicado un procedimiento memorizado de forma eficiente. El Alumno B ha demostrado una profunda comprensión de los números y sus relaciones: ha descompuesto y compensado, mostrando una flexibilidad de pensamiento que es la verdadera esencia del sentido numérico.

Este ejemplo ilustra la diferencia entre:

- *Cálculo Mental Reproductivo*: Consiste en la aplicación rápida y automatizada de hechos numéricos memorizados (ej. $7 \times 8 = 56$) o de un algoritmo estándar visualizado mentalmente. Es una habilidad útil, pero limitada.
- *Cálculo Mental Estratégico*: Implica un proceso reflexivo y consciente. El alumnado no aplica una regla única, sino que analiza los números involucrados y elige de forma flexible la estrategia más eficiente para ese caso particular. Este enfoque se fundamenta en una comprensión profunda de las propiedades de las operaciones y del sistema de numeración decimal (Threlfall, 2002; Van de Walle & Bay-Williams, 2018).

Es fundamental comprender que el cálculo mental estratégico y la estimación no son dos habilidades aisladas, sino dos caras de la misma moneda: el *pensamiento numérico flexible*. Mientras que el cálculo estratégico busca una respuesta exacta a través de un camino eficiente y adaptado, la estimación busca una respuesta aproximada razonable que nos permita tomar decisiones y juzgar resultados. Ambas competencias se nutren de la misma fuente: una profunda comprensión del valor de los números, de las propiedades de las operaciones y de las relaciones entre cantidades. En este capítulo, exploraremos ambas facetas como un todo interconectado, esencial para el desarrollo de un sentido numérico robusto.

Nuestra meta como docentes no es entrenar “calculadoras humanas” (Cálculo Reproductivo), sino cultivar “pensadores numéricos” (Cálculo Estratégico).

12.2 Cálculo Mental Estratégico: La Arquitectura del Pensamiento Numérico

Una vez superada la fase de construcción de los algoritmos tradicionales, corremos el riesgo de pensar que la enseñanza de las operaciones ha concluido. Sin embargo, es aquí donde comienza una de las etapas más importantes para el desarrollo de una auténtica competencia matemática: el cultivo del *cálculo mental estratégico*.

Este enfoque trasciende la simple mecanización de “llevar la cuenta en la cabeza”.

Dos Caminos para el Pensamiento Numérico

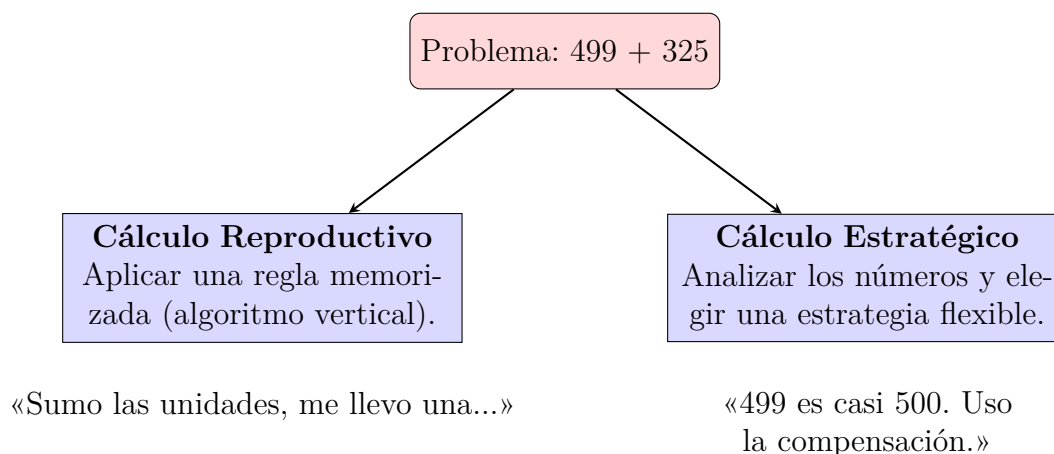


Figura 12.1: Diferencia entre el enfoque reproductivo y el estratégico ante un mismo problema de cálculo.

No se trata de ejecutar el algoritmo estándar de forma más rápida o sin papel, sino de abandonar por completo ese procedimiento para adentrarse en un modo de pensar sobre los números mucho más flexible, creativo y potente. El cálculo mental estratégico es la capacidad de analizar los números de una operación y elegir, de entre un repertorio de posibles estrategias, la más eficiente para ese caso particular. Es la manifestación más clara del *sentido numérico* en acción.

En esta sección exploraremos los engranajes de este pensamiento numérico flexible. Descubriremos que las estrategias que el alumnado inventa o aprende no son “trucos” mágicos, sino la aplicación, a menudo intuitiva, de las propiedades fundamentales de las operaciones. Nuestra labor como docentes será transformar estas propiedades, a menudo presentadas de forma abstracta, en herramientas vivas y poderosas para el cálculo.

12.2.1 El Motor Secreto del Cálculo: Las Propiedades de las Operaciones

¿Por qué es posible calcular 25×16 pensando en $25 \times 4 \times 4$ y luego en 100×4 ? ¿Qué nos da el “permiso” matemático para transformar $47 + 38$ en $50 + 35$? La respuesta no reside en una serie de reglas memorizadas, sino en la estructura misma de la aritmética. Las propiedades de las operaciones (conmutativa, asociativa y distributiva) son el fundamento lógico que dota de validez y coherencia a todas las estrategias de cálculo mental.

Como futuros docentes, comprender estas propiedades a un nivel profundo es crucial. Nos permite pasar de una enseñanza basada en la repetición de procedimientos (comprensión instrumental) a una que cultiva la construcción de redes de conocimiento (comprensión relacional), tal y como distinguió Richard Skemp (1978). Las propiedades no son un tema más del currículo que hay que “enseñar”, sino el andamiaje invisible que debemos usar para ayudar al alumnado a construir su propio edificio numérico.

Clave Didáctica: Conectando las Propiedades Formales con las Estrategias Intuitivas

El salto cualitativo en la didáctica del cálculo mental consiste en conectar explícitamente el *saber sabio* (las propiedades formales) con las estrategias intuitivas del alumnado. Nuestra labor es construir un puente que transforme una regla abstracta en una herramienta poderosa y con sentido (Figura 12.2).

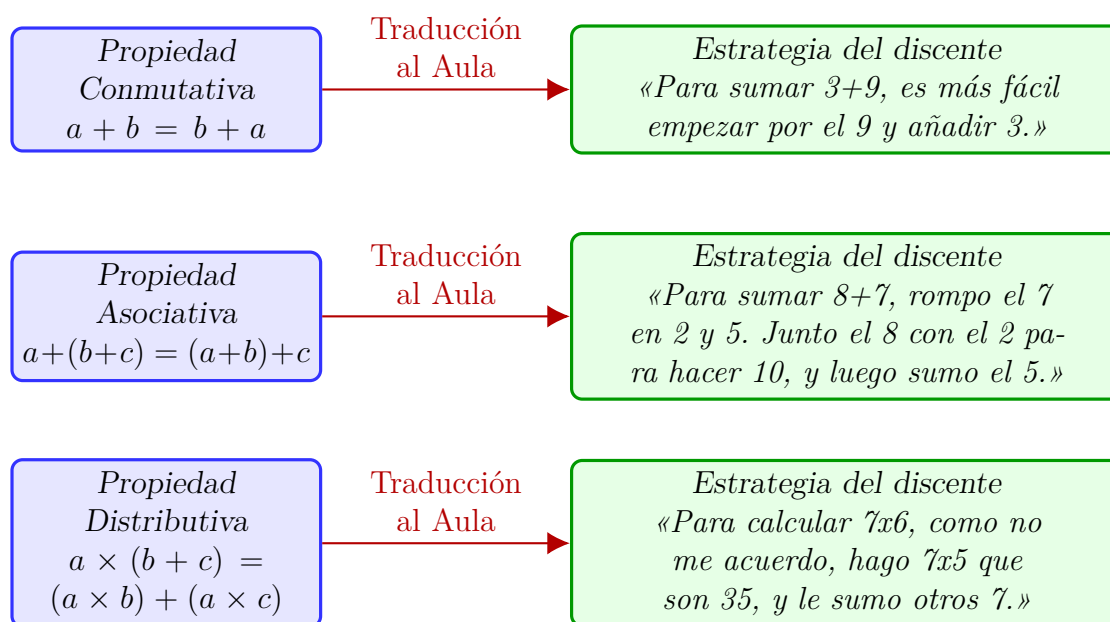


Figura 12.2: Ejemplos de estrategias fundamentadas por el “conocimiento sabio”

12.2.2 Estrategias Comunes de Cálculo Mental para la Adición y Sustracción

El viaje desde el conteo hasta el cálculo flexible no es un salto al vacío, sino una progresión a través de estrategias cada vez más sofisticadas. Como docentes, nuestra labor no es imponer una única estrategia, sino conocer el repertorio de las más comunes, entender la lógica matemática que las sustenta y crear un entorno de aula donde el alumnado pueda desarrollarlas, discutir las y elegir la más eficiente para cada situación (Heirdsfield & Cooper, 2004).

Las siguientes estrategias, basadas en la investigación didáctica pionera sobre el desarrollo del pensamiento infantil (Carpenter & Moser, 1982; Fuson, 1992), representan los principales caminos que el alumnado construye para operar con números de forma significativa en el campo aditivo.

1. *Estrategia de Descomposición (de izquierda a derecha)*: Es una de las estrategias más directas y se apoya fuertemente en una buena comprensión del valor posicional. Consiste en descomponer ambos números en sus órdenes de magnitud (decenas y unidades) y operar con ellos por separado.

Para la suma ($47 + 38$): Se suman primero las decenas y luego las unidades.

«40 y 30 son 70. 7 y 8 son 15. 70 y 15 son 85».

Para la resta ($82 - 35$): Es conceptualmente más exigente. Una forma es restar las decenas y luego las unidades, ajustando si es necesario: «80 menos 30 son 50. Ahora tengo que hacer 2 menos 5, no puedo, me faltan 3. Entonces a 50 le quito 3, y son 47». Otra vía es la secuencial: «A 82 le quito 30, me quedan 52. Ahora a 52 le quito 5, me quedan 47».

2. *Estrategia de Secuenciación (Saltos en la recta numérica)*: En esta estrategia, se mantiene intacto el primer número y se le va sumando o restando el segundo en “saltos” convenientes, usualmente por decenas y unidades. El modelo visual por excelencia para esta estrategia es la *recta numérica vacía*.

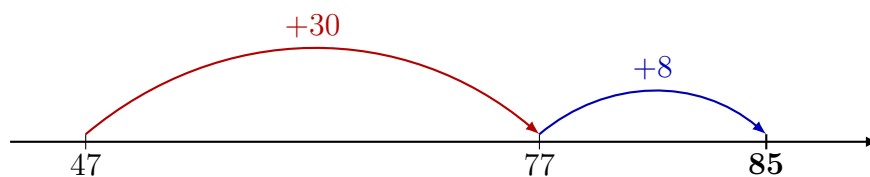


Figura 12.3: La estrategia de secuenciación (saltos en la recta numérica)

3. *Estrategia de Compensación (Redondeo y ajuste)*: Es una estrategia muy potente que busca transformar el cálculo en uno más sencillo, redondeando uno de los números a la decena más cercana y ajustando después el resultado.
 - *Ejemplo para la suma ($47 + 38$)*: Es más fácil sumar 40 que 38. «Sumo 40 a 47, que son 87. Pero como he sumado 2 de más (porque 40 es 2 más que 38), ahora se los quito. 87 menos 2 son 85».
4. *Estrategia de Diferencia Constante (solo para la resta)*: Se basa en la propiedad de invarianza de la resta: si se suma o resta la misma cantidad al minuendo y al sustraendo, la diferencia no cambia. El objetivo es convertir el sustraendo en un número “redondo”.
 - *Ejemplo para la resta ($82 - 38$)*: Para que el 38 se convierta en 40 (más fácil de restar), le sumo 2. Para que la diferencia no cambie, también le sumo 2 al 82. « $82 - 38$ es lo mismo que $84 - 40$, que es 44».

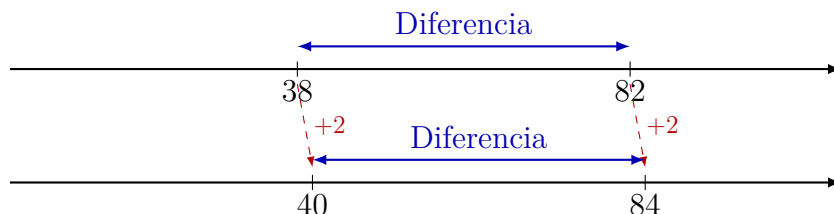


Figura 12.4: Visualización de la estrategia de Diferencia Constante para $82 - 38$.

5. *Estrategia de Completar Hasta (o de la suma inversa)*: Es una forma muy natural de concebir la resta, transformándola en la pregunta: «¿cuánto le falta a un número para llegar al otro?». Es especialmente útil para problemas de comparación o cambio con incógnita.

- Ejemplo para la resta ($82 - 38$): «¿Cuánto va desde 38 hasta 82? De 38 a 40 van 2. De 40 a 80 van 40. Y de 80 a 82 van 2 más. En total, he añadido $2 + 40 + 2$, que son 44».

Mini-Caso de Aula: Orquestando la Discusión sobre Estrategias de Cálculo

Contexto: Un docente de 2º de Primaria plantea en la pizarra la suma $39 + 24$. Da un tiempo para pensar y pide voluntarios para explicar su estrategia.

Diálogo en el aula:

- **Alumno A:** «Yo he descompuesto. Hice $30 + 20$ que son 50. Luego $9 + 4$ que son 13. Y $50 + 13$ son 63».
- **Docente:** (Registra la estrategia en la pizarra de forma visible) «¡Fantástico! Has descompuesto los números en decenas y unidades. Una estrategia muy clara. ¿Alguien lo ha pensado de otra forma?»
- **Alumna B:** «Yo vi que el 39 está muy cerca de 40. Así que le quité 1 al 24 y se lo di al 39. Se convirtió en $40 + 23$, que es 63».
- **Docente:** (Registra la segunda estrategia al lado de la primera) «¡Qué interesante! Has transformado el problema en uno más fácil. ¿Por qué crees que funciona? ¿Podemos siempre “pasar” un trozo de un número a otro?»

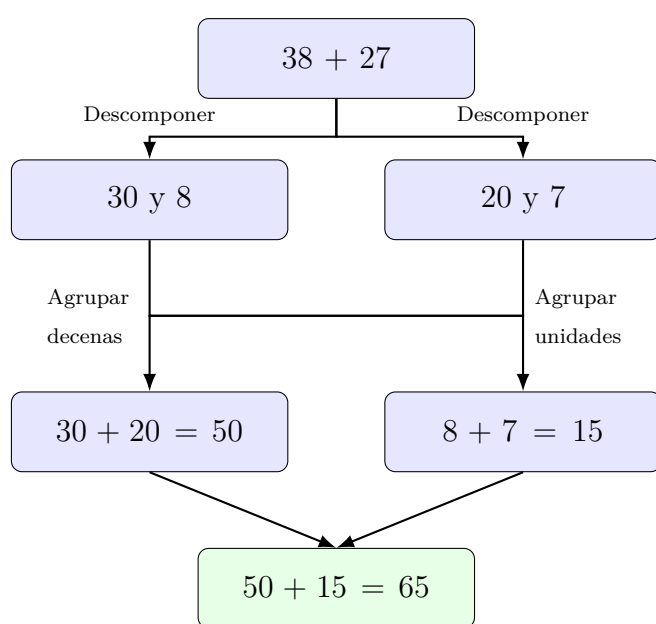
Análisis Didáctico: El docente no se limita a validar la respuesta correcta. Al pedir y valorar públicamente ambas estrategias, legitima la flexibilidad. Su segunda pregunta a la Alumna B no busca una respuesta formal sobre la propiedad asociativa, sino que fomenta la *metacognición*: la reflexión sobre el propio pensamiento. Esta práctica es el núcleo de una enseñanza que construye sentido numérico.

12.2.3 Visualizando el Pensamiento: Un Análisis Comparativo de Estrategias

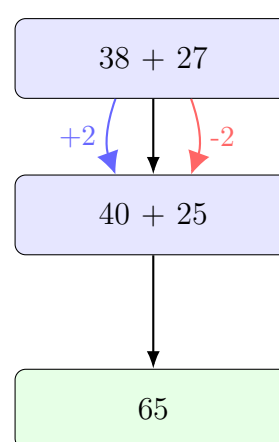
Para un docente, no basta con conocer el repertorio de estrategias de cálculo mental; es fundamental comprender la lógica matemática que subyace a cada una. Esta comprensión nos permite valorar el razonamiento del alumnado, identificar las propiedades matemáticas que están utilizando (a menudo de forma intuitiva) y guiar la discusión en el aula para conectar sus ideas con los principios formales.

Una herramienta didáctica de gran potencia es la visualización de los procesos de pensamiento. El siguiente diagrama (Figura 12.5) no es solo un resumen, sino un modelo de análisis que el futuro docente puede utilizar. Compara dos de las estrategias más comunes para resolver la suma $38 + 27$, haciendo visible el “motor secreto” que las impulsa: las propiedades de las operaciones. Este enfoque transforma las estrategias de simples “trucos” a manifestaciones de un pensamiento matemático profundo y relacional (Skemp, 1978).

Al visualizar las estrategias de esta manera, el futuro docente puede apreciar que el cálculo mental estratégico no consiste en adivinar, sino en *tomar decisiones informadas* sobre la estructura de los números. La estrategia de descomposición es robusta y siempre funciona, mientras que la de compensación es más elegante y eficiente

Estrategia 1: Descomposición

Basada en la descomposición por valor posicional y las propiedades conmutativa y asociativa.

Estrategia 2: Compensación

Basada en la propiedad de invarianza de la suma: se transfiere una cantidad de un sumando a otro para crear un cálculo más sencillo.

Figura 12.5: Análisis comparativo de dos procesos de pensamiento para el cálculo mental de $38 + 27$. Cada estrategia sigue una lógica matemática válida y distinta, fundamentada en diferentes propiedades de la suma.

en casos como este, donde un número está muy cerca de un múltiplo de diez.

Fomentar este tipo de análisis en el aula, utilizando la pizarra como un espacio para registrar y conectar el pensamiento de los estudiantes, es una de las prácticas más potentes para desarrollar una comprensión profunda y flexible, tal y como han documentado numerosos investigadores en el campo (Carpenter et al., 1999).

12.2.4 Estrategias para el Campo Multiplicativo (Multiplicación y División)

Si en el campo aditivo las estrategias se fundamentan en “mover” cantidades a lo largo de una línea, en el campo multiplicativo las estrategias se basan en una comprensión más profunda de la *estructura interna de los números*. La multiplicación y la división no son meramente una suma repetida o un reparto; son operaciones que escalan, agrupan y distribuyen cantidades de manera proporcional. Por ello, las estrategias de cálculo mental en este campo están intrínsecamente ligadas a las propiedades de las operaciones, especialmente la distributiva.

Nuestra labor como docentes es guiar al alumnado para que descubra que un problema de multiplicación aparentemente complejo puede transformarse en varios cálculos más sencillos. El *modelo de área* se convierte aquí en nuestra herramienta didáctica más potente, pues permite visualizar y dar sentido a estas transformaciones.

12.2.4.1 Uso de la Propiedad Distributiva: La Estrategia Maestra

Esta es, sin duda, la estrategia más potente y fundamental del campo multiplicativo. Es el pilar sobre el que se construyen no solo el cálculo mental flexible, sino también los algoritmos tradicionales de multiplicación. Consiste en descomponer uno de los factores en partes más manejables (generalmente según su valor posicional), multiplicar cada parte por el otro factor y, finalmente, sumar los productos parciales.

Ejemplo: Aplicando la Propiedad Distributiva

Un alumno o alumna que domina esta estrategia podría razonar así:

«27 es 20 más 7. Primero hago 20 por 4, que son 80. Luego hago 7 por 4, que son 28. Ahora junto los resultados: 80 más 28 son 108».

Este pensamiento no es un truco, es la aplicación directa de la propiedad distributiva: $27 \times 4 = (20 + 7) \times 4 = (20 \times 4) + (7 \times 4)$.

Clave Didáctica: “Demostración Gráfica” de la Propiedad Distributiva

El *modelo de área* es la representación icónica que da sentido a la propiedad distributiva. Transforma una regla abstracta en una acción visual y concreta: la de calcular el área total de un rectángulo a partir de la suma de sus partes (Figura 12.6).

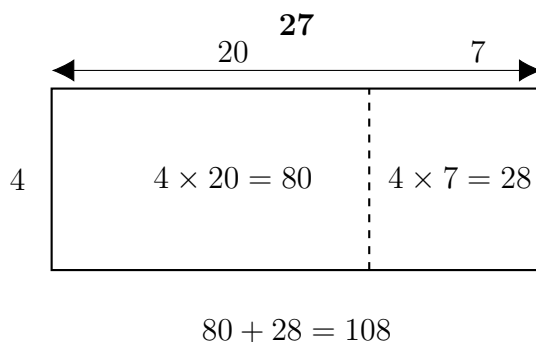


Figura 12.6: Visualización de la propiedad distributiva para 27×4 mediante el modelo de área.

12.2.4.2 Doblar y Mitad (Halving and Doubling)

Esta elegante estrategia se basa en la *propiedad asociativa* de la multiplicación y en la idea de que podemos transformar un cálculo en otro equivalente más sencillo. La lógica es simple: si divido un factor por dos, debo multiplicar el otro por dos para que el producto se mantenga constante. Es especialmente útil con números pares o cuando uno de los factores es 25, 50 o 125.

Ejemplo: Uso de la propiedad asociativa (Doblar y Mitad)

Un cálculo que podría parecer complejo se simplifica enormemente:

- Mitad de 16 es 8, doble de 25 es 50. La operación se convierte en 8×50 .
- Mitad de 8 es 4, doble de 50 es 100. La operación se convierte en 4×100 .
- El resultado es 400.

Fundamento Matemático: $16 \times 25 = (8 \times 2) \times 25 = 8 \times (2 \times 25) = 8 \times 50$.

12.2.4.3 Factorización

Esta estrategia consiste en descomponer uno o ambos factores en sus propios factores primos o compuestos para simplificar la operación. Requiere una buena comprensión de las relaciones numéricas y es una antesala del pensamiento algebraico.

Ejemplo: Uso de la propiedad asociativa (Factorización)

En lugar de calcularlo directamente, un alumno podría pensar:

«18 es 9 por 2. Así que tengo 9 por 2 por 6. Como 2 por 6 es 12, el problema es 9 por 12. ¡Eso es 108!».

Fundamento Matemático: $18 \times 6 = (9 \times 2) \times 6 = 9 \times (2 \times 6) = 9 \times 12$.

12.2.4.4 Uso de la Relación Inversa (para la División)

La forma más potente de abordar la división mentalmente es no pensar en ella como un reparto, sino como la *búsqueda del factor perdido* en una multiplicación. Esta

es la manifestación más clara de la comprensión de la relación inversa entre ambas operaciones.

Ejemplo: Uso de la relación inversa (División como búsqueda del factor)

En lugar de repartir 84, la pregunta se transforma en: «¿Qué número multiplicado por 4 me da 84?». El razonamiento, apoyado en la propiedad distributiva, sería:

«Busco $? \times 4 = 84$. Sé que 20×4 es 80. Me faltan 4 para llegar a 84. Sé que 1×4 es 4. Así que el número que busco es $20 + 1 = 21$ ».

Anclaje Histórico: La Multiplicación Campesina (o Algoritmo Ruso)

Este antiguo método, utilizado por los campesinos rusos y con raíces en el antiguo Egipto y tratado en un capítulo anterior, es un ejemplo fascinante de un algoritmo que funciona sin necesidad de conocer las tablas de multiplicar (solo se necesita saber duplicar y dividir por dos). Su lógica interna es una brillante aplicación de las propiedades que hemos estudiado.

Procedimiento para 35×25 :

1. Se crean dos columnas. En la primera se escribe un factor y se va dividiendo por 2 (ignorando restos) hasta llegar a 1.
2. En la segunda columna se escribe el otro factor y se va duplicando.
3. Se tachan las filas donde el número de la primera columna es par.
4. Se suman los números restantes de la segunda columna. Ese es el resultado.

Mitad	Doble	
35	25	← Impar, se suma
17	50	← Impar, se suma
8	100	← Par, se tacha
4	200	← Par, se tacha
2	400	← Par, se tacha
1	800	← Impar, se suma
Suma:		$25 + 50 + 800 = 875$

¿Por qué funciona? Este método descompone secretamente el primer factor en base 2 ($35 = 32 + 2 + 1$) y aplica la propiedad distributiva: $(32 + 2 + 1) \times 25 = (32 \times 25) + (2 \times 25) + (1 \times 25)$. Las filas que se suman corresponden a las multiplicaciones del segundo factor por las potencias de 2 que componen el número. Es un ejemplo perfecto de cómo diferentes culturas han desarrollado algoritmos ingeniosos basados en las mismas propiedades universales de los números (Boyer & Merzbach, 1999).

Clave Didáctica: Cálculo Mental en la Multiplicación y la División

La enseñanza del cálculo mental para la multiplicación y la división debe pivotar sobre dos ideas clave: el *uso flexible de la propiedad distributiva* y la *comprensión de la relación inversa*. El modelo de área y las “familias de operaciones” (fact families) son los recursos didácticos que mejor materializan estas ideas.

12.2.5 El Aula como Laboratorio de Estrategias: Fomentando el Diálogo Matemático

Una vez explorado el repertorio de estrategias que el alumnado puede desarrollar, la pregunta fundamental para el futuro docente es: *¿cómo se enseña esto en el aula?* Presentar las estrategias como una lista de métodos a memorizar sería traicionar el espíritu del cálculo flexible y recaer en una enseñanza instrumental. El objetivo no es que el alumnado *sepa* las estrategias, sino que las *construya*, las *comprenda*, las *compare* y las *elija* de forma razonada.

Para lograrlo, necesitamos transformar el aula, pasando de ser un lugar donde se reciben respuestas a ser un laboratorio donde se exploran y discuten ideas. La herramienta pedagógica por excelencia para esta transformación son las *Charlas Numéricas* (del inglés, *Number Talks*), una metodología desarrollada y popularizada por autoras como Parrish (2010) y Humphreys y Parker (2015).

Mini-Caso de Aula: ¿Qué es una Charla Numérica?

Una Charla Numérica es una rutina de aula, breve y frecuente (de 5 a 15 minutos), diseñada para construir fluidez computacional y sentido numérico. Consiste en que el alumnado resuelve mentalmente problemas aritméticos y luego comparte y defiende sus estrategias, mientras el docente registra visualmente el pensamiento colectivo en la pizarra. El foco no está en la velocidad ni en la respuesta correcta, sino en el *proceso de razonamiento*.

La implementación de esta metodología sigue una estructura clara y predecible, que proporciona seguridad al alumnado y permite centrar toda la energía cognitiva en el pensamiento matemático.

Profundizando: Anatomía de una Charla Numérica, Las Fases del Diálogo

Una sesión de Charla Numérica se articula, por lo general, en cinco fases bien definidas:

1. *Presentación del problema*: El o la docente escribe un problema en la pizarra, elegido cuidadosamente para que pueda ser resuelto con diversas estrategias. Por ejemplo, 18×5 .
2. *Tiempo de pensamiento individual*: Se pide al alumnado que resuelva el problema mentalmente. Para gestionar los diferentes ritmos, se utiliza una señal silenciosa (como levantar el pulgar discretamente contra el pecho) para indicar que han encontrado una solución. Esto evita la presión sobre los que necesitan más tiempo.

3. *Recogida de respuestas*: El docente pide al alumnado que comparta únicamente sus resultados finales. Todas las respuestas, correctas o incorrectas, se anotan en la pizarra sin juicio ni validación. Esto crea un clima de seguridad y centra la atención en el proceso.
4. *Puesta en común de las estrategias*: Este es el corazón de la Charla Numérica. El docente invita a varios estudiantes a explicar *cómo* llegaron a su respuesta. Se seleccionan estratégicamente diferentes métodos para ser compartidos.
5. *Discusión y conexión de las ideas*: El docente guía a la clase para analizar, comparar y encontrar relaciones entre las diferentes estrategias presentadas. Se formulan preguntas como: «¿En qué se parece la estrategia de Ana a la de Luis?», «¿Por qué funcionan ambos métodos?», «¿Qué estrategia os parece más eficiente para este problema en particular?».

Como se puede deducir, el rol del docente en una Charla Numérica es radicalmente diferente al de un instructor tradicional. Se transforma en un facilitador y orquestador del pensamiento colectivo.

Clave Didáctica: De Instructor a Orquestador del Pensamiento

Durante una Charla Numérica, el docente desempeña cuatro roles cruciales:

- *Arquitecto/a de la Tarea*: Selecciona cuidadosamente el problema para promover ciertas estrategias y conexiones.
- *Orquestador/a del Diálogo*: Gestiona los turnos de palabra, asegura un ambiente de respeto y anima a los estudiantes a escucharse unos a otros.
- *Transcriptor/a del Pensamiento*: Registra fielmente las estrategias de los alumnos y alumnas en la pizarra, utilizando representaciones visuales que hagan su razonamiento claro para toda la clase. Este registro es una herramienta didáctica en sí misma (ver Figura 12.7).
- *Catalizador/a de Conexiones*: Formula preguntas que invitan a la reflexión, la justificación y la comparación de estrategias, ayudando a la clase a construir un conocimiento matemático más profundo y conectado.

El registro visual que realiza el docente es fundamental. No es una simple transcripción, sino una modelización del pensamiento matemático. Herramientas como la recta numérica vacía o el modelo de área son soportes icónicos (en el sentido de Bruner) indispensables para anclar las estrategias abstractas y hacerlas comprensibles para todos y todas.

En definitiva, la implementación regular de Charlas Numéricas transforma la cultura del aula. El error deja de ser un fracaso para convertirse en una oportunidad de aprendizaje, la diversidad de pensamiento se celebra como una fortaleza, y el alumnado desarrolla no solo un repertorio de estrategias flexibles, sino también la confianza y la capacidad de comunicar y justificar su razonamiento. Se está, por tanto, trabajando de forma directa el *Sentido Numérico* y el *Sentido Socioafectivo*, cumpliendo así con los pilares fundamentales del currículo andaluz.

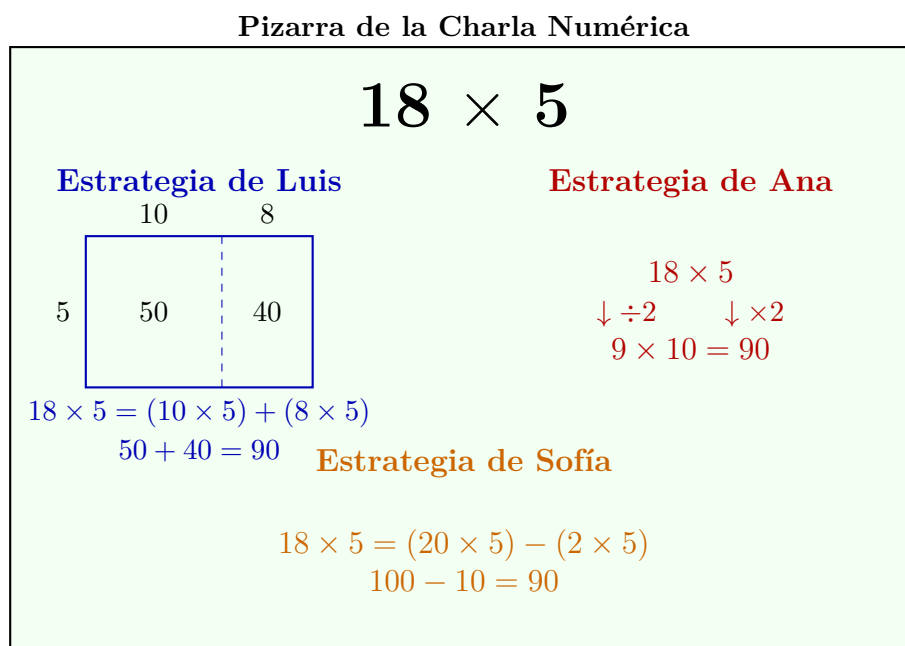


Figura 12.7: Ejemplo de registro visual de una Charla Numérica en la pizarra. El docente modeliza las diferentes estrategias del alumnado, usando representaciones como el modelo de área para darles soporte visual y conceptual (Luis - Descomposición, Sofía - Compensación, Ana - Doblar y Mitad).

Clave Didáctica: Del Calculista al Arquitecto del Pensamiento

La transición del cálculo reproductivo al estratégico implica un cambio fundamental en el rol del docente, que pasa de ser un “instructor de procedimientos” a un “*arquitecto del pensamiento numérico*”. Esta labor se fundamenta en varias acciones clave:

- *Diseñar con intención*: Seleccionar problemas que, por la naturaleza de sus números, inviten a usar ciertas estrategias (ej. 499+325 invita a la compensación).
- *Valorar el proceso, no la velocidad*: El objetivo no es encontrar la respuesta rápido, sino encontrarla de una forma que tenga sentido. La conversación sobre el *cómo* es más importante que la validación del *qué*.
- *Ser un orquestador del diálogo*: Gestionar la puesta en común para que las estrategias se comparen, se conecten y se validen colectivamente.
- *Hacer visible el pensamiento*: Utilizar la pizarra no como un expositor de respuestas correctas, sino como un lienzo para modelizar y registrar la diversidad de razonamientos del alumnado, conectándolos con representaciones visuales y propiedades matemáticas.

12.3 La Estimación: Calculando con Sentido y Propósito

Si el cálculo mental estratégico es el arte de la precisión flexible, la estimación es el arte de la razonabilidad práctica. En la vida cotidiana, rara vez necesitamos o usamos

respuestas exactas. Al hacer la compra, no calculamos que el coste será de 17,83€, sino que pensamos que será «casi 20€». No planificamos un viaje de 42 minutos, sino que calculamos que durará «unos tres cuartos de hora». La estimación no es una versión inferior o imperfecta del cálculo, sino una forma de pensamiento matemático distinta y extraordinariamente potente, diseñada para un mundo que no siempre requiere ni permite la exactitud.

La estimación es la habilidad de obtener un resultado aproximado a una operación o medida, sin necesidad de una precisión exacta, pero con una comprensión consciente del posible margen de error. Es una habilidad matemática de gran utilidad en la vida diaria y, crucialmente, una herramienta de control y validación de los resultados obtenidos por otros medios (Segovia et al., 1989; Sowder, 1992). Lejos de ser una conjetura o una adivinanza, la estimación es un proceso de razonamiento cuantitativo que se apoya fuertemente en el sentido numérico.

12.3.1 Importancia y Funciones: ¿Por qué estimar?

En un currículo a menudo sobrecargado, podría ser tentador ver la estimación como un contenido secundario. Sin embargo, esta visión sería un grave error pedagógico. Fomentar la habilidad de estimar es fundamental porque cumple una triple función esencial en el desarrollo de la competencia matemática del alumnado.

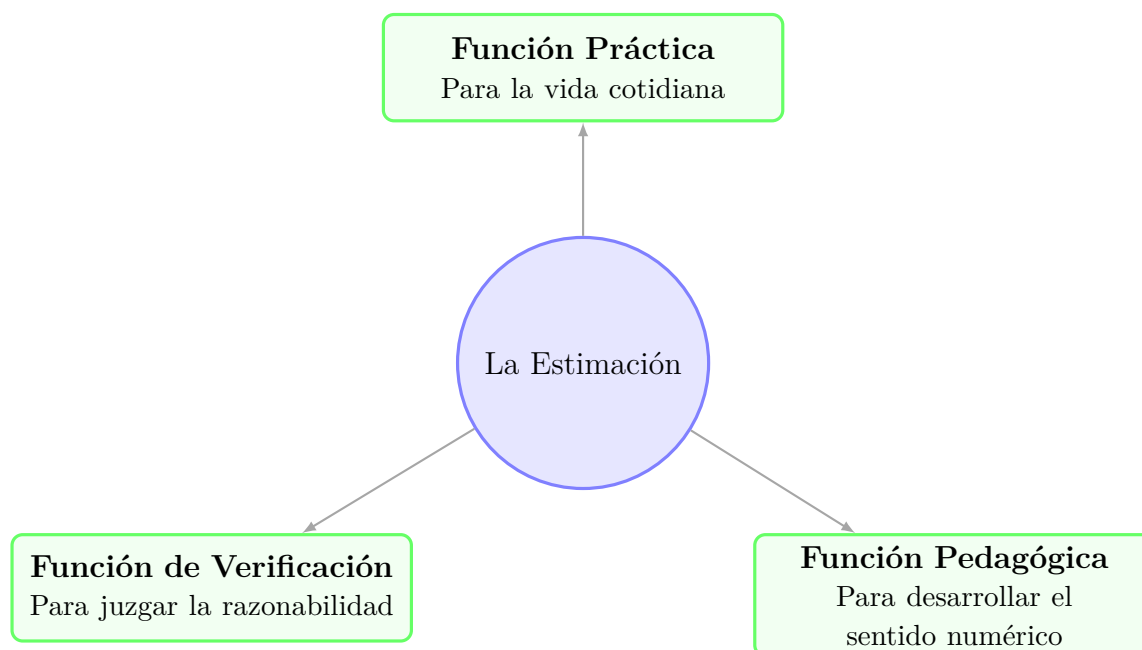


Figura 12.8: La triple función de la estimación en la Educación Primaria.

- *Utilidad en la Vida Cotidiana (Función Práctica):* Es la función más evidente. La estimación nos permite tomar decisiones rápidas y eficientes en innumerables situaciones.

Ejemplo: La estimación en un contexto de planificación y toma de decisiones

«Necesitamos comprar 2 litros de refresco por cada 5 invitados. Si esperamos unos 32 invitados, ¿cuántos refrescos compramos?». No se necesita un cálculo exacto. El alumnado puede razonar: «32 es un poco más de 30. Si para 5 invitados son 2 litros, para 10 serán 4, y para 30 serán 12. Con unos 13 o 14 litros tendremos suficiente».

- *Herramienta de Comprobación (Función de Verificación)*: La estimación es la primera línea de defensa contra los errores de cálculo, especialmente en una era dominada por las calculadoras. Permite al alumnado desarrollar un juicio crítico sobre la razonabilidad de un resultado.

Ejemplo: La estimación como herramienta de autoevaluación

Un alumno calcula en la calculadora 48×19 y obtiene 91.2 por un error de tecleo. Un estudiante sin habilidad de estimación aceptará el resultado. Uno que sí la tiene, razonará: «48 es casi 50, y 19 es casi 20. 50×20 es 1000. Mi resultado debería estar cerca de 1000, no de 90. Algo he hecho mal». Esta autoevaluación es una habilidad metacognitiva fundamental (McIntosh et al., 1992).

- *Desarrollo del Sentido Numérico (Función Pedagógica)*: Quizás la función más importante desde el punto de vista didáctico. La práctica sistemática de la estimación obliga al alumnado a centrarse en la magnitud global de los números, en su valor posicional y en el efecto que las operaciones tienen sobre ellos. En lugar de ejecutar ciegamente un algoritmo, deben pensar sobre las cantidades.

Clave Didáctica: De la Exactitud a la Razonabilidad, Un Cambio de Enfoque

Nuestra labor como docentes es cambiar la cultura del aula. La pregunta dominante no debe ser únicamente «¿Cuál es el resultado exacto?», sino también «¿Alrededor de qué número estará el resultado?», «¿Es una respuesta razonable? ¿Por qué?». Fomentar la estimación es enseñar al alumnado a dialogar con los números antes de operarlos.

12.3.2 Tipos y Técnicas de Estimación en Operaciones Aritméticas

Una vez comprendida la importancia de la estimación, es necesario que el futuro personal docente disponga de un repertorio de técnicas para trabajar en el aula. No se trata de un conjunto de recetas cerradas, sino de un abanico de enfoques flexibles que el alumnado debe aprender a seleccionar y aplicar según el contexto y los números involucrados (Sowder, 1992). La enseñanza de estas técnicas no busca la memorización de un método, sino el desarrollo de la capacidad para tomar decisiones numéricas informadas.

12.3.2.1 Estimación por Redondeo: La Estrategia Universal

Es la técnica de estimación más conocida y utilizada. Consiste en sustituir los números de una operación por otros números cercanos que sean más fáciles de manejar, generalmente múltiplos de 10 o potencias de 10.

- *Ejemplo (Suma)*: Para estimar $487 + 315$, el razonamiento sería: «487 está muy cerca de 500, y 315 está cerca de 300. Por tanto, la suma será aproximadamente $500 + 300 = 800$ ».
- *Ejemplo (Multiplicación)*: Para estimar 68×23 , podemos redondear a la decena más próxima: «68 es casi 70 y 23 es casi 20. Entonces, el producto será aproximadamente $70 \times 20 = 1400$ ».

Clave Didáctica: Más allá de la regla, el redondeo contextual.

La regla escolar de “si es 5 o más, se redondea hacia arriba” es una convención útil, pero la verdadera estimación requiere flexibilidad. La decisión de redondear hacia arriba o hacia abajo a menudo depende del contexto del problema.

- *Contexto de compra*: Si voy a comprar productos que cuestan 2,35€ y 4,40€, y quiero saber si tengo suficiente con un billete de 10€, lo más prudente es redondear siempre al alza (ej. 3€ y 5€) para tener un margen de seguridad.
- *Contexto de reparto*: Si tengo una cuerda de 28,7 metros y quiero hacer 4 trozos, para estimar la medida de cada trozo podría redondear a un número fácilmente divisible por 4, como 28 metros.

Enseñar a tomar estas decisiones es fundamental para desarrollar una competencia estimatoria funcional y crítica.

12.3.2.2 Estimación por Truncamiento (o de Cifras Delanteras): La Vía Rápida

Esta técnica, a menudo llamada *front-end estimation*, es más directa que el redondeo. Consiste en utilizar únicamente el dígito de mayor valor posicional de cada número, tratando los demás como si fueran cero.

- *Ejemplo (Suma)*: Para estimar $487 + 315$, simplemente sumamos las centenas: $400 + 300 = 700$.

Es una estrategia muy rápida, pero por lo general menos precisa que el redondeo, ya que siempre produce una subestimación. Una versión más refinada consiste en realizar un segundo paso de ajuste, estimando la suma de los dígitos restantes (en el ejemplo, $87 + 15$ es aproximadamente $90 + 10 = 100$, por lo que una estimación ajustada sería $700 + 100 = 800$).

12.3.2.3 Estimación con Números Compatibles: La Estrategia del Experto

Esta es una técnica más sofisticada que depende en gran medida del sentido numérico. Consiste en buscar números cercanos a los originales que sean “compatibles” o “amigables” entre sí, es decir, que faciliten la operación mental (Heirdsfield & Cooper, 2004).

- *Ejemplo (Multiplicación)*: Para estimar 26×41 , el redondeo nos daría $30 \times 40 = 1200$. Sin embargo, un pensador flexible podría notar que 26 está muy cerca de 25, un número muy “amigable” con múltiplos de 4. Razonaría: «26 es casi 25, y 41 es casi 40. Calcular 25×40 es fácil, porque $25 \times 4 = 100$, entonces el resultado es 1000». Esta estimación es, en este caso, más precisa y mentalmente más elegante.
- *Ejemplo (División)*: Para estimar $135 \div 6$, el alumno busca un múltiplo de 6 cercano a 135. Puede pensar en 120, que es 12×10 . Entonces, $120 \div 6 = 20$. La estimación es 20.

12.3.2.4 Agrupamiento (Clustering): Encontrando el Promedio en la Multitud

Esta técnica es especialmente útil para sumar una lista de números que se agrupan en torno a un mismo valor.

- *Ejemplo (Suma)*: Para estimar la suma $23 + 28 + 24 + 26$, el alumnado puede observar que todos los números están “alrededor de 25”. La estimación se convierte entonces en una multiplicación: «hay 4 números y todos son más o menos 25, así que la suma será aproximadamente $4 \times 25 = 100$ ». (El resultado exacto es 101).

Profundizando: El Arte de la Estimación, No hay una única respuesta correcta.

El objetivo didáctico en la enseñanza de la estimación no es que el alumnado aprenda a ejecutar una única técnica, sino que desarrolle la *flexibilidad* para elegir la más adecuada en cada situación. La conversación en el aula debe pasar de la pregunta «¿Cuál es la estimación correcta?» a «¿Qué estrategias diferentes podemos usar y cuál nos da una aproximación más útil para este problema?». Este enfoque metacognitivo es el que verdaderamente construye el pensamiento crítico y el sentido numérico (Figura 12.9).

12.3.3 Didáctica en el Aula: Fomentando la Cultura de la Estimación

La enseñanza de la estimación no consiste en añadir un nuevo tipo de ejercicio a la lista de tareas del alumnado, sino en cultivar una nueva forma de pensar y un hábito mental. El objetivo es que, ante cualquier situación cuantitativa, la primera reacción del alumnado no sea calcular, sino preguntarse: «¿Tiene sentido? ¿De qué orden de magnitud estamos hablando?». Esta habilidad no se adquiere mediante la instrucción directa de técnicas, sino creando una cultura de aula donde la aproximación razonada se valora, se practica y se hace necesaria.

Clave Didáctica: La Pregunta Estratégica como Motor de la Estimación

La herramienta más poderosa del docente para fomentar la estimación es la pregunta estratégica. En lugar de pedir siempre una respuesta exacta, debemos modificar nuestra forma de interpelar al alumnado para invitarle a razonar sobre

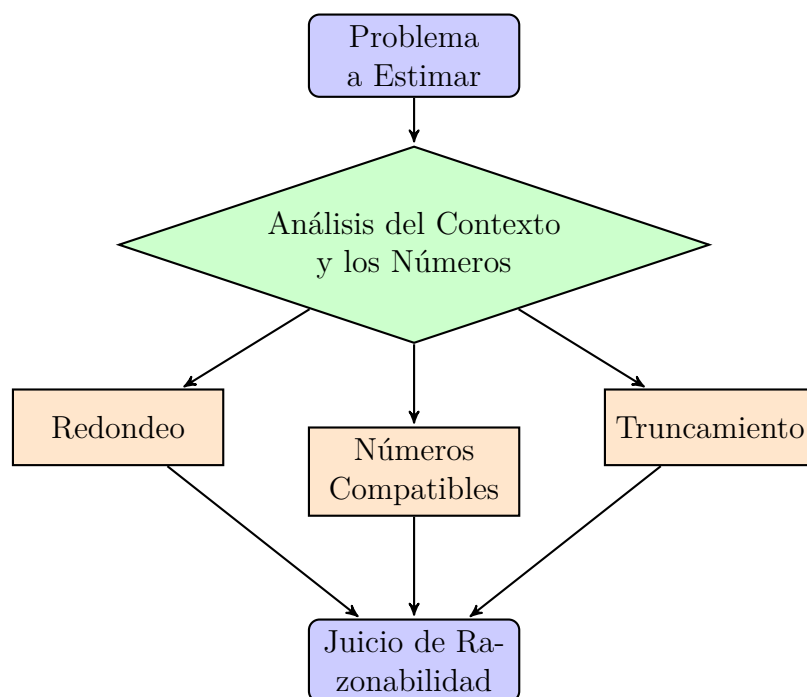


Figura 12.9: Diagrama del proceso de decisión en la estimación. La elección de la técnica no es lineal, sino que depende de un análisis previo.

las cantidades.

- *Antes de calcular:* «¿Creéis que el resultado será mayor o menor que 100? ¿Por qué?», «¿Alrededor de qué número esperáis que esté la solución?», «Haced una apuesta razonable.»
- *Durante la resolución:* «Ese paso que has dado, ¿te acerca o te aleja de la estimación que hiciste?»
- *Después de calcular:* «El resultado que te ha dado la calculadora es 15,87. Tu estimación era “alrededor de 150”. ¿Qué ha podido pasar?», «¿Es vuestra respuesta razonable en el contexto del problema? ¿Tiene sentido que un autobús viaje a 800 km/h?»

Para que estas preguntas cobren vida, deben enmarcarse en contextos ricos y actividades que hagan de la estimación una herramienta útil y, a menudo, lúdica.

12.3.3.1 Integrar la Estimación en la Resolución de Problemas

La estimación no es un tema aislado, sino una fase fundamental del proceso de resolución de cualquier problema. Es el anclaje que conecta el problema con el sentido común antes de sumergirse en los algoritmos y después, para validar la solución encontrada. Este ciclo, inspirado en los trabajos de Pólya (1945/1989), debería convertirse en una rutina de pensamiento en el aula.

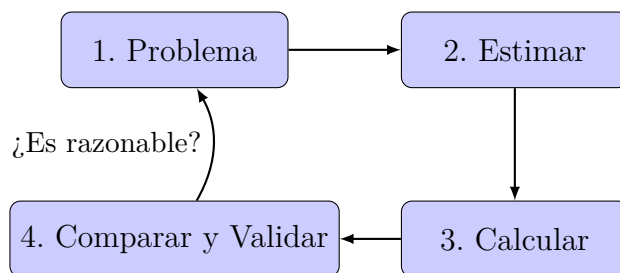


Figura 12.10: El ciclo de la resolución de problemas con la estimación como fase integral. La estimación (Paso 2) proporciona un referente para validar la solución (Paso 4).

Mini-Caso de Aula: Uso de la Estimación para Validar un Cálculo

Un docente de 3º de Primaria presenta un ticket de compra con 4 productos: 1,95€, 3,20€, 0,85€ y 2,10€. El total que marca es 18,10€.

- *Docente:* «Antes de sacar la calculadora para ver si está bien, vamos a pensar. ¿Os parece que 18,10€ es un resultado razonable? Habladlo en vuestros equipos.»
- *Diálogo de un equipo:*
 - *Alumno A:* «1,95 es casi 2€. 3,20 es un poco más de 3€. 0,85 es casi 1€. Y 2,10 es como 2€.»
 - *Alumna B:* «Entonces tenemos casi $2 + 3 + 1 + 2...$ ¡son 8 euros! ¡No 18!»
- *Conclusión:* La estimación ha permitido al alumnado detectar un error garrafal sin necesidad de realizar el cálculo exacto. Han desarrollado un juicio crítico sobre el resultado, una competencia clave del *Sentido Numérico*.

12.3.3.2 Utilizar Contextos Reales y Cotidianos

La necesidad de estimar surge de forma natural en la vida diaria. Nuestra labor es traer esos contextos al aula para que el alumnado perciba la estimación como una herramienta poderosa y relevante.

- *El Mercadillo Semanal:* Utilizar folletos de supermercado para planificar una compra con un presupuesto limitado. «Tenemos 15€. ¿Podemos comprar todos los productos de esta lista? Haced una estimación rápida.»
- *Planificando un Viaje:* Usar mapas o aplicaciones de mapas para estimar distancias y tiempos de viaje. «Si tardamos 2 horas en recorrer 180 km, ¿cuánto tardaremos aproximadamente en llegar a una ciudad que está a 95 km?»
- *Noticias del Mundo Real:* Analizar titulares de prensa que usan grandes números. «La noticia dice que 1,2 millones de personas asistieron al concierto. Si el estadio tiene capacidad para 60.000, ¿es esa cifra razonable?»

12.3.3.3 El Juego como Herramienta de Práctica Sistemática

Para que la estimación se convierta en un hábito, debe practicarse de forma regular en un ambiente de baja presión, donde el error no sea penalizado. Los juegos son un vehículo ideal para ello.

- *El Tarro de las Estimaciones*: Un clásico infalible. Se presenta un tarro transparente lleno de objetos (garbanzos, canicas, clips...). Cada estudiante anota su estimación en un post-it. Luego, se realiza el conteo real (a menudo agrupando de 10 en 10, lo que refuerza el SND). Se celebra a quienes más se han acercado y, sobre todo, se discuten las estrategias de estimación usadas: «¿En qué os habéis fijado? ¿Habéis contado una capa y multiplicado por la altura?».
- *Estimación de Medidas*: Estimar la longitud de la pizarra, el peso de la mochila, la capacidad de una botella o la duración de un minuto de silencio. La posterior comprobación con instrumentos de medida proporciona un feedback inmediato y significativo.

En definitiva, fomentar la estimación es una de las inversiones más rentables que podemos hacer en el aula. No solo estamos enseñando una técnica matemática, sino que estamos cultivando el sentido común, el pensamiento crítico y la confianza del alumnado para enfrentarse a un mundo lleno de números.

12.4 Del Saber a la Competencia: Alineación con el Currículo Andaluz

Las habilidades de cálculo mental estratégico y estimación, exploradas en este capítulo, no son un fin en sí mismas. Constituyen, en realidad, herramientas indispensables para que el alumnado desarrolle de manera efectiva las *Competencias Específicas (CE)* del área de Matemáticas, tal y como establece la normativa vigente. Esta sección actúa como un puente explícito, un “traductor curricular”, que conecta las estrategias y la filosofía de enseñanza aquí presentadas con los objetivos competenciales que la *ORDEN de 30 de mayo de 2023* nos encomienda.

Comprender esta conexión es fundamental: cuando fomentamos el cálculo flexible o la estimación razonada, no estamos realizando una actividad complementaria, sino que estamos trabajando directamente en el núcleo de la competencia matemática.

A continuación, se detalla cómo estas habilidades nutren directamente las competencias clave:

- *CE.MAT.1: Interpretar situaciones de la vida cotidiana [...]*. La estimación es la herramienta por excelencia para la interpretación inicial de una situación cuantitativa. Antes de realizar un cálculo exacto para planificar una compra, el alumnado estima: «¿Llevo suficiente dinero? ¿Serán unos 10€ o más bien 20€?». Esta primera aproximación dota de sentido a la situación y, posteriormente, permite valorar la razonabilidad del resultado final, completando el ciclo de la interpretación.
- *CE.MAT.2: Resolver situaciones problematizadas, aplicando diferentes técnicas, estrategias y formas de razonamiento [...]*. El cálculo mental estratégico es la manifestación más pura de esta competencia. Cuando un estudian-

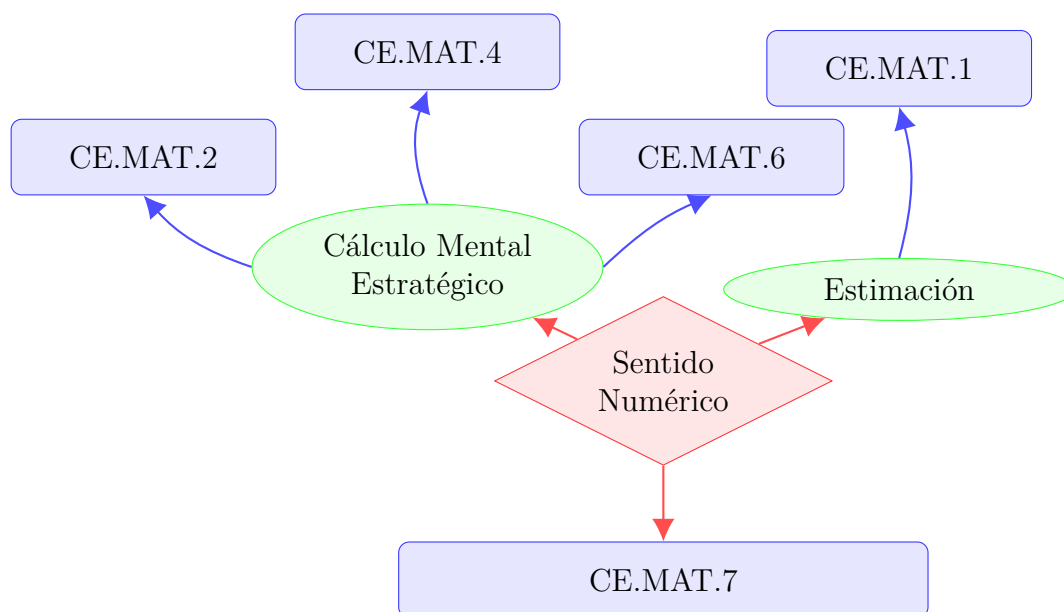


Figura 12.11: Mapa conceptual de la conexión entre el Sentido Numérico, sus habilidades asociadas (cálculo mental y estimación) y el desarrollo de las Competencias Específicas.

te, para calcular 18×5 , descarta el algoritmo tradicional y elige la estrategia $(18 \div 2) \times (5 \times 2) = 9 \times 10 = 90$, no está simplemente calculando. Está analizando las cantidades, reconociendo una oportunidad y *eligiendo* una de las *diferentes técnicas* para *explorar una manera de proceder* más eficiente. Está pensando matemáticamente.

- **CE.MAT.4:** Utilizar el pensamiento computacional [...] reconociendo patrones [...] y creando algoritmos [...]. Las estrategias de cálculo mental son, en esencia, *algoritmos flexibles*. A diferencia de un algoritmo rígido, una estrategia como la descomposición (ej. para 27×4 pensar en $20 \times 4 + 7 \times 4$) es un procedimiento que el propio alumnado construye y adapta. Al hacerlo, está descomponiendo un problema en partes más sencillas y siguiendo una secuencia lógica, que es el núcleo del pensamiento algorítmico.
- **CE.MAT.6:** Comunicar y representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos y resultados matemáticos [...]. Metodologías como las *Charlas Numéricas* (Number Talks) son el ecosistema perfecto para el desarrollo de esta competencia. En ellas, el objetivo no es solo encontrar la respuesta, sino *comunicar* el propio razonamiento. El alumnado debe verbalizar su estrategia, *representarla* visualmente (por ejemplo, en una recta numérica vacía) para que otros la entiendan y, a su vez, escuchar y dar sentido a los procedimientos de sus compañeros.
- **CE.MAT.7:** Desarrollar destrezas personales [...] al enfrentarse a retos matemáticos [...]. Esta es la conexión con el *Sentido Socioafectivo*. Un aula que dedica tiempo a explorar y valorar diferentes estrategias de cálculo envía un mensaje poderoso: no hay un único camino correcto. Esto *reduce la ansiedad matemática*.

al eliminar la presión de tener que recordar un solo método. Fomenta la *autoconfianza*, ya que la estrategia personal de cada alumno/a es válida y valorada. Y cultiva la *perseverancia* y una *mentalidad de crecimiento*, pues el objetivo no es “acabar rápido”, sino “encontrar un buen camino”.

12.5 Conclusión: Habilitando un Pensamiento Numérico Flexible y Autónomo

En este capítulo hemos viajado más allá de la visión tradicional del cálculo como una simple ejecución de algoritmos. Hemos desvelado que el *cálculo mental estratégico* y la *estimación* no son temas accesorios o meras curiosidades, sino que constituyen el núcleo mismo del *Sentido Numérico*. Son, en esencia, la manifestación de un pensamiento matemático que es flexible, eficiente y, sobre todo, comprensivo.

La meta de nuestra labor docente no es, por tanto, la de formar “calculadoras humanas” capaces de ejecutar procedimientos a gran velocidad. El objetivo es mucho más profundo y ambicioso: cultivar *pensadores numéricos*, alumnado que no solo busca la respuesta correcta, sino que comprende las relaciones entre los números y elige conscientemente la estrategia más elegante o adecuada para cada situación. Esta flexibilidad, esta capacidad para descomponer y recomponer números con un propósito, es la verdadera señal de una competencia matemática sólida (National Council of Teachers of Mathematics, 2014).

Este enfoque, centrado en el proceso y en la diversidad de estrategias, tiene profundas implicaciones en el *dominio afectivo* del aprendizaje. Un aula donde se celebran diferentes caminos para llegar a una solución, donde se dedica tiempo a verbalizar y comparar estrategias, es un aula que combate directamente la ansiedad matemática. Al cambiar la pregunta de un simple «¿está bien?» a un mucho más potente «¿cómo lo has pensado?», transformamos el error en una oportunidad de aprendizaje y validamos el pensamiento individual de cada estudiante (McLeod, 1992). Esta práctica docente no es solo una recomendación pedagógica, sino que materializa de forma directa el *Sentido Socioafectivo* que nos prescribe el currículo andaluz (*ORDEN de 30 de mayo de 2023*).

En definitiva, enseñar cálculo mental estratégico y estimación es empoderar al alumnado. Es entregarles las llaves no solo para operar con números, sino para pensar con ellos. Es equiparles con una brújula interna que les permita navegar con confianza y sentido crítico por un mundo cada vez más cuantificado, transformando las matemáticas de un conjunto de reglas a memorizar en una poderosa y creativa herramienta para comprender la realidad.

Hemos afilado nuestras herramientas. Hemos aprendido a calcular con flexibilidad y a estimar con sensatez. Pero las herramientas no tienen propósito si no se usan para construir algo. En el siguiente capítulo, pondremos estas habilidades al servicio de su fin último: la *Resolución de Problemas*, el verdadero corazón del aprendizaje matemático y el motor que da sentido a toda la aritmética.

12.6 Para la Reflexión y el Portfolio Docente

1. *Análisis de Estrategias Propias, El Misterio de Mi Propia Mente.*



Figura 12.12: El cambio de paradigma en la enseñanza del cálculo: del algoritmo como receta a la estrategia como manifestación del sentido numérico.

Consigna: Resuelve mentalmente la operación $345 - 98$. Tómate tu tiempo y luego analiza tu propio proceso de pensamiento:

- *Describe tu estrategia:* ¿Qué pasos mentales has seguido? ¿Has alterado los números?
- *Conecta con la teoría:* ¿Qué nombre le pondrías a tu estrategia según las vistas en este capítulo (Compensación, Diferencia Constante, etc.)? ¿Qué propiedad matemática justifica que tu método funcione?
- *Fomenta la flexibilidad:* Ahora, intenta resolver la misma operación de, al menos, dos formas completamente distintas.
- *Metacognición:* ¿Por qué crees que tu cerebro eligió la primera estrategia de forma casi automática?

2. *Diseño de una Micro-Actividad: Orquestando una Charla Numérica.*

Consigna: Diseña una breve secuencia de 10-15 minutos para una «charla numérica» en 3º de Primaria, centrada en la operación 18×5 . El foco está en explorar y conectar múltiples estrategias.

- *Anticipación de Estrategias:* Describe al menos tres estrategias diferentes que el alumnado podría utilizar (ej., «Doblar y dividir por la mitad», «Uso de la propiedad distributiva»).
- *Registro y Conexión (El Rol del Docente):* Describe cómo registrarías visualmente estas tres estrategias en la pizarra y formula dos preguntas clave para fomentar la conexión entre ellas.

3. *Tarea 3: Diseño de una Micro-Secuencia Didáctica de Estimación.*

Consigna: Diseña una micro-actividad (15-20 minutos) que conecte el saber básico de estrategias de resolución (MAT.3.A.3.4.) con la Competencia Específica 2 (CE.MAT.2). Para ello, crearás una actividad contextualizada donde la estimación sea la herramienta principal para tomar una decisión informada.

- *Contexto y Objetivo:* Describe el escenario (aula de 5º) y el objetivo («Utilizar la estimación para valorar la viabilidad de un presupuesto...»).
- *Planteamiento del Problema:* Presenta un problema visual y contextualizado, como el ejemplo del folleto de la excursión del capítulo.
- *Guion del Docente:* Describe brevemente cómo guiarías la discusión, qué preguntas harías para fomentar diferentes técnicas de estimación y cómo gestionarías la puesta en común.

13 La Resolución de Problemas como Corazón del Aprendizaje Matemático

A lo largo de este manual, se ha insistido en la importancia de que el aprendizaje de la aritmética en Educación Primaria trascienda la mera adquisición de hechos numéricos y la ejecución mecánica de algoritmos. La verdadera competencia matemática se manifiesta en la capacidad del alumnado para utilizar sus conocimientos y habilidades en la resolución de una variedad de problemas, tanto aquellos que surgen en contextos puramente matemáticos como los que emanan de situaciones de la vida real (Schoenfeld2016; National Council of Teachers of Mathematics, 2014; Pólya, 1945/1989). En este sentido, la resolución de problemas no debe ser vista como una actividad que se realiza únicamente «después» de haber aprendido un concepto o un procedimiento, sino como el contexto privilegiado y el motor principal para el aprendizaje matemático significativo.

Este capítulo se dedica a explorar el papel central de la resolución de problemas en la didáctica de la aritmética. Se analizarán las fases implicadas en el proceso de resolución, se presentarán diversas heurísticas o estrategias generales que pueden guiar al alumnado, y se reflexionará sobre el rol crucial del personal docente como facilitador y guía en este proceso. Además, se destacará la importancia de la verbalización de las estrategias y la discusión colectiva como herramientas para la construcción del conocimiento y el desarrollo del pensamiento crítico.

13.1 Introducción: Aprender Aritmética para Resolver, no solo para Calcular

13.1.1 De la aplicación a la construcción: un cambio de paradigma

Tradicionalmente, la enseñanza de la aritmética ha seguido un modelo que podríamos denominar de «transmisión-aplicación». En este enfoque, la secuencia de aprendizaje es lineal y predecible: primero, el personal docente explica un concepto o un algoritmo (p. ej., la división con decimales); segundo, el alumnado practica este procedimiento a través de una serie de ejercicios mecánicos y descontextualizados; y, finalmente, como último paso, se presentan algunos «problemas» para que el alumnado «aplique» el conocimiento recién adquirido.

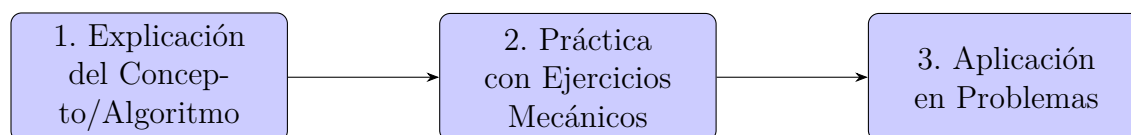


Figura 13.1: El modelo tradicional de transmisión-aplicación en la enseñanza de la aritmética.

Este modelo, aunque extendido, presenta profundas debilidades pedagógicas. Genera una disociación entre el procedimiento y su significado, fomentando una compren-

sión meramente instrumental (Skemp, 1978). El alumnado aprende a ejecutar reglas, pero no a razonar sobre las situaciones. Los problemas se convierten en un acertijo para adivinar «qué cuenta hay que hacer», en lugar de ser un estímulo para el pensamiento matemático.

La didáctica de las matemáticas contemporánea, fundamentada en las teorías constructivistas y socioculturales, propone una inversión radical de este paradigma. La resolución de problemas no es el destino final del aprendizaje, sino su punto de partida. Es el motor que genera la necesidad de un nuevo conocimiento. Como argumenta la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 2007), la labor del docente no es explicar un saber para que el alumnado lo aplique, sino diseñar situaciones-problema donde el saber matemático aparezca como la herramienta óptima y necesaria para encontrar la solución.

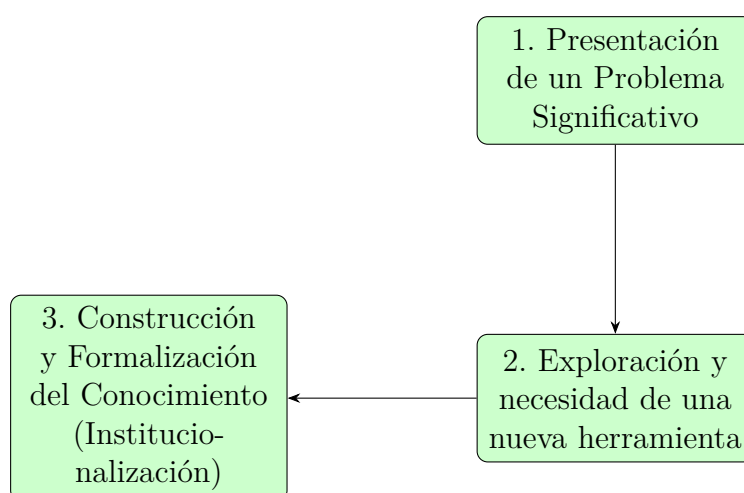


Figura 13.2: El modelo constructivista centrado en la resolución de problemas.

Este enfoque no es una mera preferencia pedagógica, sino un mandato explícito del marco normativo actual. La *ORDEN de 30 de mayo de 2023* de la Junta de Andalucía, al definir la Competencia Específica 2 del área de Matemáticas, establece que el alumnado debe ser capaz de «Resolver situaciones problematizadas, aplicando diferentes técnicas, estrategias y formas de razonamiento». Este objetivo es inalcanzable desde un modelo de mera aplicación; exige que la resolución de problemas sea el contexto habitual de la actividad matemática en el aula, el crisol donde las estrategias se forjan, se comparan y se refinan. Nuestra labor como docentes, por tanto, se desplaza de ser «explicadores de algoritmos» a ser «arquitectos de problemas y guías del pensamiento».

13.1.2 Conexión curricular (LOMLOE - Andalucía)

La resolución de problemas no es un complemento opcional ni una moda pedagógica pasajera; es el eje vertebrador sobre el que se articula el actual marco normativo. La *ORDEN de 30 de mayo de 2023*, que desarrolla el currículo de la Educación Primaria en Andalucía, abandona definitivamente un enfoque centrado en la mera transmisión de contenidos para abrazar un modelo competencial. Este cambio de paradigma sitúa la resolución de problemas en el corazón mismo del aprendizaje matemático.

13.1.2.1 La resolución de problemas como motor de las competencias

Un enfoque competencial se basa en la idea de que el alumnado debe ser capaz de *movilizar* sus conocimientos para actuar ante situaciones diversas. Estas situaciones son, por definición, problemas en un sentido amplio. Por tanto, la resolución de problemas no es una competencia más, sino el contexto natural donde todas las demás competencias específicas del área de Matemáticas se desarrollan y evidencian. De forma particular, es el vehículo principal para el desarrollo de:

- **CE.MAT.1:** Se centra en «*Interpretar situaciones de la vida cotidiana [...] proporcionando una representación matemática de las mismas*». Esta competencia es, en esencia, la primera fase del modelo de Pólya: comprender el problema y traducirlo al lenguaje matemático.
- **CE.MAT.2:** Busca «*Resolver situaciones problematizadas, aplicando diferentes técnicas, estrategias y formas de razonamiento*». Esta es la competencia nuclear de la resolución de problemas, abarcando el diseño y la ejecución de un plan.
- **CE.MAT.3:** Persigue «*Explorar, formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de tipo matemático*». Va un paso más allá de resolver problemas dados, invitando al alumnado a *hacerse preguntas* y a actuar como un joven matemático que investiga patrones y relaciones.

13.1.2.2 La resolución de problemas como integradora de los sentidos matemáticos

El currículo andaluz organiza los saberes básicos en torno a seis sentidos matemáticos. Un error didáctico común es tratarlos como temas estancos. La resolución de problemas es, precisamente, el antídoto contra esta fragmentación. Una *Situación de Aprendizaje* bien diseñada, que plantee un problema rico y contextualizado, obliga al alumnado a integrar y movilizar varios de estos sentidos de forma simultánea, tal y como se muestra en la Figura 13.3.

Ejemplo: La excursión de fin de curso como problema integrador

Pensemos en la tarea de planificar la excursión de fin de curso. No se trata de un ejercicio, sino de un problema abierto que integra múltiples saberes y sentidos:

- **Sentido Numérico:** Calcular el coste total (transporte, entradas, monitores), el precio por alumno, gestionar el presupuesto, etc.
- **Sentido de la Medida:** Estimar y calcular la duración del viaje, los tiempos para cada actividad, etc.
- **Sentido Estocástico:** Recoger datos sobre las preferencias del alumnado (votaciones) para decidir el destino.
- **Sentido Algebraico:** Descubrir la relación funcional entre el número de asistentes y el coste total.
- **Sentido Socioafectivo:** Trabajar en equipo para tomar decisiones, negociar, gestionar la frustración si la opción preferida no es viable y valorar la diversidad de opiniones.

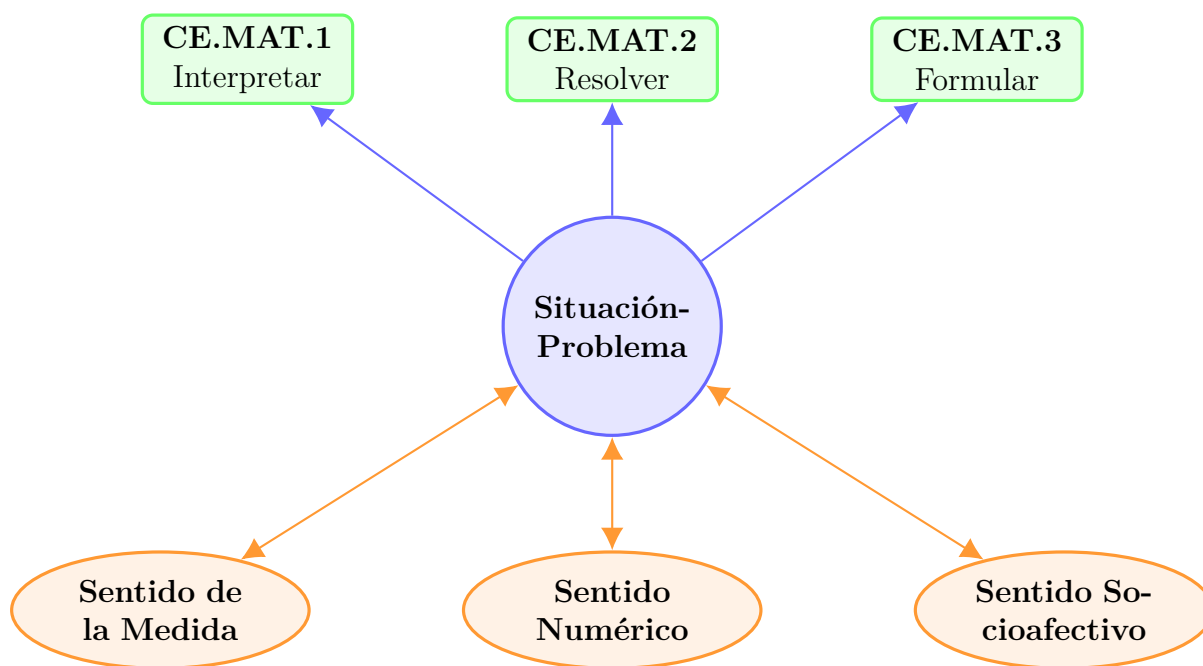


Figura 13.3: Una situación-problema actúa como nexo, activando las competencias específicas y movilizandolos sentidos matemáticos de forma integrada.

Clave Didáctica: El Currículo como Aliado

El enfoque en la resolución de problemas no es una carga adicional para el docente, sino su principal aliado para cumplir con las exigencias de la normativa. Cuando diseñamos una clase en torno a un problema significativo en lugar de una lista de ejercicios, estamos creando de forma natural el ecosistema perfecto para que el alumnado desarrolle competencias. La pregunta que debe guiar nuestra planificación no es «¿qué problema pongo al final de la unidad?», sino «¿qué problema puedo plantear al principio para que mi alumnado necesite construir los saberes de esta unidad para resolverlo?».

13.1.3 ¿Qué es realmente un «problema»? La distinción clave

En el lenguaje cotidiano, los términos «ejercicio» y «problema» a menudo se usan como sinónimos. Sin embargo, en la *Didáctica de las Matemáticas*, esta distinción es fundamental y constituye uno de los pilares para diseñar una enseñanza verdaderamente competencial. Comprender esta diferencia es el primer paso para transformar el aula de aritmética de un lugar de entrenamiento mecánico a un laboratorio de pensamiento matemático.

El Ejercicio: Automatizar lo conocido. Un *ejercicio* es una tarea matemática para la cual el estudiante ya dispone de un procedimiento o algoritmo de resolución que puede aplicar de forma más o menos directa. El camino hacia la solución es conocido y está trazado. Su propósito principal no es generar nuevo conocimiento, sino *consolidar, practicar y automatizar* una técnica o concepto ya presentado (Godino et al., 2004).

Realizar una ficha con veinte restas con llevada después de haber explicado el

algoritmo es un ejercicio. Su valor pedagógico es innegable: la práctica es necesaria para alcanzar la fluidez procedimental. Sin embargo, una enseñanza basada exclusivamente en ejercicios corre el riesgo de promover una comprensión instrumental, donde el alumnado sabe *qué hacer*, pero no *por qué* lo hace.

El Problema: Construir un camino nuevo. Un *problema*, en cambio, es una situación que presenta una dificultad para la cual el estudiante *no dispone de un camino de resolución evidente o inmediato*. Resolver un problema implica un acto de exploración, de toma de decisiones y de movilización estratégica de los conocimientos previos. Como lo define Schoenfeld, un problema es una tarea en la que el individuo se enfrenta a una dificultad que no puede superar mediante la aplicación directa de procedimientos memorizados (Schoenfeld, 1985).

La resolución de un problema no es una mera aplicación, sino una auténtica *construcción de conocimiento*. Es en el esfuerzo por encontrar una solución donde el aprendizaje significativo tiene lugar. El currículo andaluz, al insistir en la necesidad de «Resolver situaciones problematizadas, aplicando diferentes técnicas, estrategias y formas de razonamiento» (CE.MAT.2), nos está pidiendo explícitamente que centremos nuestra enseñanza en el planteamiento de problemas genuinos.



La frontera entre ejercicio y problema no es fija, sino que depende del sujeto que se enfrenta a la tarea. Lo que para un estudiante es un problema, para otro más avanzado puede ser un simple ejercicio. Por ejemplo, calcular 3×5 es un problema para un niño o niña que está construyendo el concepto de multiplicación a través de la suma repetida, pero es un ejercicio para quien ya ha memorizado las tablas. Esta relatividad es clave para la atención a la diversidad.

Como futuros docentes, nuestra misión no es solo enseñar a resolver ejercicios, sino, fundamentalmente, capacitar al alumnado para resolver problemas. Los ejercicios son el entrenamiento necesario para fortalecer los «músculos» procedimentales, pero los problemas son el «partido» donde esos músculos se usan de forma inteligente, flexible y coordinada. Un currículo competencial, como el que nos marca la *ORDEN de 30 de mayo de 2023*, exige que el aula sea un verdadero campo de juego para el pensamiento, y no solo un gimnasio de repetición.

13.2 El Mapa del Viaje: Las Cuatro Fases del Modelo de George Pólya

Una vez que hemos aceptado que la resolución de problemas es el corazón de la aritmética, necesitamos un mapa que nos guíe en esta aventura intelectual. No se trata de un camino lineal ni de una receta mágica, sino de un proceso de pensamiento estructurado. El matemático y educador George Pólya, en su obra seminal *Cómo plantear y resolver problemas* (Pólya, 1945/1989), nos legó el que sigue siendo el modelo más influyente y didácticamente potente para abordar esta tarea.

Tabla 13.1: Diferencias fundamentales entre Ejercicio y Problema.

Característica	Ejercicio	Problema
Objetivo Didáctico	Automatizar un procedimiento. Consolidar un conocimiento previo.	Construir nuevo conocimiento. Desarrollar el pensamiento estratégico y la competencia resolutoria.
Proceso Cognitivo	Aplicación mecánica, recuerdo, imitación de un modelo.	Análisis, exploración, toma de decisiones, argumentación, conexión de ideas.
Rol del Alumnado	Receptor y ejecutor de un procedimiento enseñado.	Constructor activo de la solución. Pensador estratégico.
Ejemplo (2º Ciclo)	«Calcula las siguientes divisiones: $45 \div 5$, $72 \div 8$, $54 \div 9$ ».	«Tenemos 27 estudiantes en clase y queremos formar equipos para un torneo. ¿De cuántas formas diferentes podemos hacer los equipos sin que sobre nadie? ¿Cuál de esas formas crees que es mejor para el torneo? ¿Por qué?»

Pólya no se presenta como un mero instructor, sino como un auténtico *arquitecto del pensamiento resolutor*. Su modelo de cuatro fases no es un algoritmo a seguir mecánicamente, sino un andamiaje heurístico que invita al alumnado a reflexionar sobre su propio proceso de pensamiento, fomentando la metacognición y la autonomía. Estas fases, como se ilustra en la Figura 13.4, forman un ciclo dinámico y reflexivo.

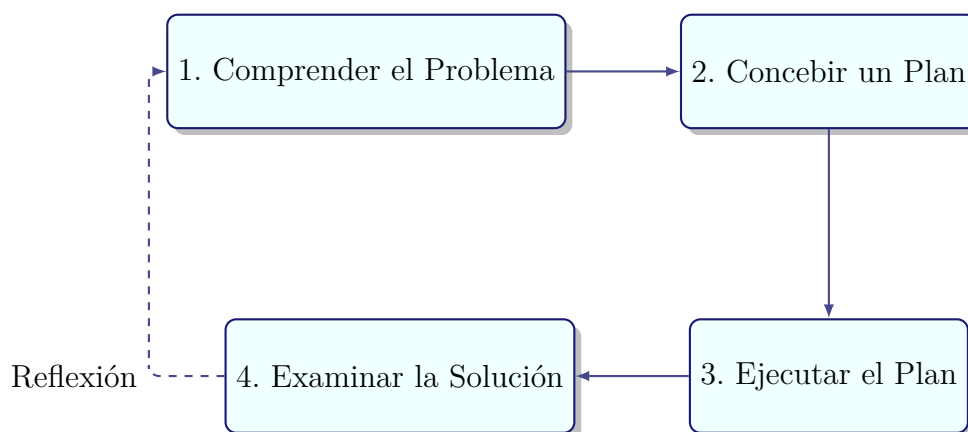


Figura 13.4: El ciclo de resolución de problemas según el modelo de G. Pólya. La cuarta fase, “Examinar la Solución”, es vital pues retroalimenta todo el proceso.

Nuestra labor como docentes es interiorizar este ciclo para poder guiar al alumnado, no dándoles las respuestas, sino haciéndoles las preguntas adecuadas en cada momento del viaje.

13.2.1 Fase 1: Comprender el Problema

«Es una tontería responder a una pregunta que no se ha comprendido». Esta afirmación de Pólya resume la esencia de esta primera y fundamental etapa. Antes de cualquier cálculo o estrategia, el o la discente debe hacer suyo el problema. No se trata solo de leer el enunciado, sino de un proceso activo de *apropiación cognitiva*. Desde una perspectiva psicológica, si la memoria de trabajo del alumnado está completamente ocupada en descifrar el texto y los datos, no quedarán recursos cognitivos para la tarea real de resolver.

El objetivo de esta fase es, por tanto, transformar el problema de un texto ajeno en una misión personal y clara. Para ello, Pólya sugiere que el resolutor se plantee preguntas fundamentales:

- *¿Cuál es la incógnita?* ¿Qué es lo que se me pide encontrar?
- *¿Cuáles son los datos?* ¿De qué información dispongo?
- *¿Cuáles son las condiciones?* ¿Qué reglas, restricciones o relaciones existen entre los datos y la incógnita?

Implicación didáctica: El Arte de Leer Matemáticamente

Nuestra primera tarea como docentes es enseñar a leer de forma matemática. Debemos crear un clima de aula donde la prisa por calcular se sustituya por la calma para comprender.

- *Verbalizar y parafrasear:* Animar al alumnado a contar el problema con sus propias palabras. Esta acción, conectada con las ideas de Vygotsky, obliga a procesar la información en lugar de solo decodificarla. «¿Me puedes explicar qué está pasando en esta historia, como si yo no supiera leer?».
- *Visualizar la situación:* Fomentar el uso del dibujo libre como herramienta de pensamiento. Un simple esquema puede revelar la estructura del problema mucho mejor que una relectura del texto. Esto materializa la fase *icónica* de Bruner como puente para la comprensión.
- *Dramatizar el problema:* Especialmente en el Primer Ciclo, representar la situación con material manipulativo o con el propio cuerpo (*fase enactiva*) es la forma más potente de asegurar la comprensión.

Esta fase inicial conecta directamente con el mandato del currículo andaluz. El Saber Básico *MAT.2.A.3.5* y sus equivalentes en otros ciclos establecen como primer paso en la resolución de problemas la «*comprensión del enunciado*». Al dedicar tiempo y usar estrategias explícitas para esta fase, no estamos realizando una actividad preliminar, sino cumpliendo con un objetivo curricular esencial.

Clave Didáctica: Preguntas del Docente Facilitador

En esta fase, el docente actúa como un guía socrático. En lugar de explicar el problema, formula preguntas que ayuden al alumnado a construir su propia comprensión.

- *Para centrar la atención:* «¿Qué nos cuenta esta historia?», «¿Qué está

ocurriendo aquí?»

- Para identificar datos e incógnita: «¿Qué sabemos con seguridad?», «¿Qué números aparecen y qué significan?», «Y entonces, ¿qué es lo que tenemos que averiguar?»
- Para verificar la comprensión: «¿Puedes dibujarme lo que has entendido?», «Explícaselo a tu compañero/a con tus palabras para ver si lo ha entendido igual que tú».

13.2.2 Fase 2: Concebir un Plan (Diseñar una Estrategia)

Si la primera fase consistía en comprender a fondo el terreno del problema, esta segunda fase es el corazón estratégico del proceso de resolución. Es el momento de trazar un mapa, de diseñar un camino que nos lleve desde los datos conocidos hasta la incógnita. Como futuros docentes, es fundamental entender que esta fase no consiste en encontrar inmediatamente la operación aritmética correcta, sino en desarrollar una línea de actuación coherente. Es, en esencia, el momento de la toma de decisiones, donde el pensamiento se vuelve creativo y propositivo.

George Pólya (1945/1989) sugiere que el alumnado se guíe por una serie de preguntas clave para activar su conocimiento y encontrar una vía de solución:

- ¿Se ha encontrado con un problema semejante anteriormente? ¿O ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?
- ¿Conoce un problema relacionado? ¿Conoce algún teorema o alguna propiedad que le pueda ser útil?
- Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una similar.
- Si el problema es muy complejo, ¿podría replantearlo? ¿Podría resolver primero algún problema relacionado más sencillo?

Implicación didáctica: El Rol del Docente como Catalizador de Estrategias

El error más común en la enseñanza de la resolución de problemas es que el docente, ante un alumno o alumna que no sabe cómo empezar, le *da* el plan: «Lo que tienes que hacer es una multiplicación». Esta intervención, aunque bienintencionada, anula el desarrollo del pensamiento estratégico.

Nuestra labor en esta fase es *catalizar*, no *dirigir*. Consiste en hacer las preguntas adecuadas, inspiradas en las de Pólya, para que sea el propio discente quien *descubra o diseñe un plan*. Debemos resistir la tentación de señalar el camino y, en su lugar, ayudarles a dibujar su propio mapa. El objetivo no es que apliquen *nuestro* plan, sino que construyan el *suyo*.

La concepción de un plan está íntimamente ligada a la elección de una o varias *heurísticas* (que se detallarán en el apartado 13.3). Un plan puede ser tan simple como «voy a hacer un dibujo para ver qué está pasando» o tan elaborado como «voy a organizar los datos en una tabla para buscar un patrón». Lo crucial es que el alumnado

transite de un estado pasivo de espera a un estado activo de búsqueda y propuesta.

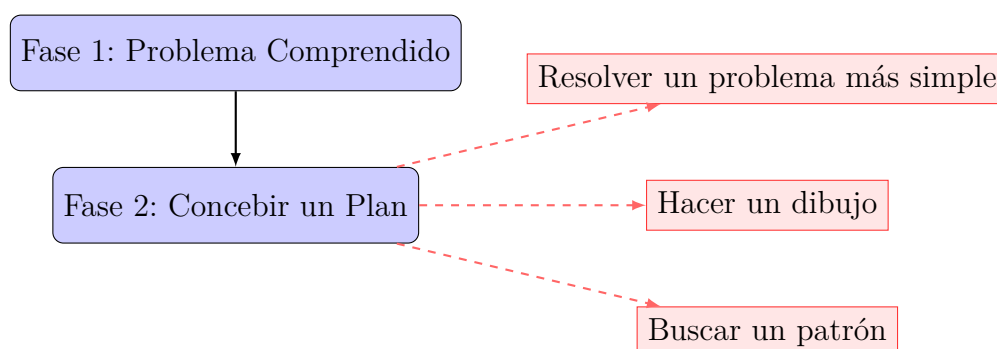


Figura 13.5: La Fase 2 es el puente entre la comprensión y la acción, donde el alumnado elige una heurística como plan de ataque.

Mini-Caso de Aula: De la Operación al Plan, El Rol de la Heurística

Situación: Un docente de 3º de Primaria plantea el siguiente problema: «*En una granja hay 15 animales en total, entre gallinas y ovejas. Si contamos todas las patas, hay 40. ¿Cuántas gallinas y cuántas ovejas hay?*»

Reacción del Alumnado: Un alumno, tras leerlo, levanta la mano y dice: «Maestro, no sé qué cuenta tengo que hacer. ¿Es de sumar o de restar?». Este alumno está atascado porque no ha pasado por la Fase 2; busca una operación directa sin tener un plan.

Intervención del Docente (Guiando la Fase 2):

- **Docente:** «¡Gran pregunta! Antes de pensar en cuentas, ¿qué te parece si intentamos dibujar la situación? ¿Cómo podríamos dibujar una gallina y una oveja para que se vean bien sus patas?» (Heurística: Hacer un dibujo).
- **Docente (alternativa):** «Es un problema difícil. ¿Y si probamos con una respuesta? Por ejemplo, si hubiera 10 gallinas, ¿cuántas ovejas habría? ¿Cuántas patas tendríamos en total? ¿Nos sirve?» (Heurística: Ensayo y Error).
- **Docente (otra alternativa):** «Vamos a organizarnos. ¿Podríamos hacer una tabla para ir probando? Una columna para las gallinas, otra para las ovejas y otra para el total de patas.» (Heurística: Organizar la información).

Análisis: El docente no ofrece la solución. Su intervención se centra exclusivamente en ayudar al alumno a *concebir un plan*, a encontrar un modo de empezar a pensar sobre el problema. La elección de una de estas heurísticas es el plan.

Anclaje Histórico: El “¡Eureka!” de Arquímedes y el Descubrimiento del Plan

La historia de las matemáticas está llena de momentos que ilustran la importancia de esta segunda fase. El famoso grito de «¡Eureka!» (¡Lo encontré!) de Arquímedes no se refería a la solución final del problema de la corona del rey

Hierón, sino al *descubrimiento de un plan*. Al meterse en la bañera y ver cómo el agua se desbordaba, Arquímedes concibió la estrategia clave: podía medir el volumen de un objeto irregular midiendo el volumen de agua que desplazaba. Una vez tuvo el plan, la ejecución (Fase 3) fue una consecuencia directa. Esto nos enseña que el verdadero salto creativo en matemáticas a menudo no reside en el cálculo, sino en la concepción de una estrategia ingeniosa.

13.2.3 Fase 3: Ejecutar el Plan (Llevar a cabo la Estrategia)

Esta tercera fase del modelo de Pólya es el momento de la acción, donde el pensamiento se traduce en procedimiento. Es la etapa en la que el alumnado implementa la estrategia que ha diseñado en la fase anterior. A menudo, tanto docentes como discentes confunden esta fase con la totalidad de la resolución de problemas, reduciéndola a la mera ejecución de cálculos. Sin embargo, su verdadero valor pedagógico reside en ser un ejercicio de *perseverancia, verificación y autoevaluación sistemática* (Pólya, 1945/1989).

La ejecución del plan no es un sprint ciego hacia la meta. Es un camino que se recorre paso a paso, con atención y cuidado. El propio Pólya insistía en la necesidad de que el estudiante se convenciera de la corrección de cada paso. Esta supervisión constante es lo que diferencia a un resolutor experto de un novato.

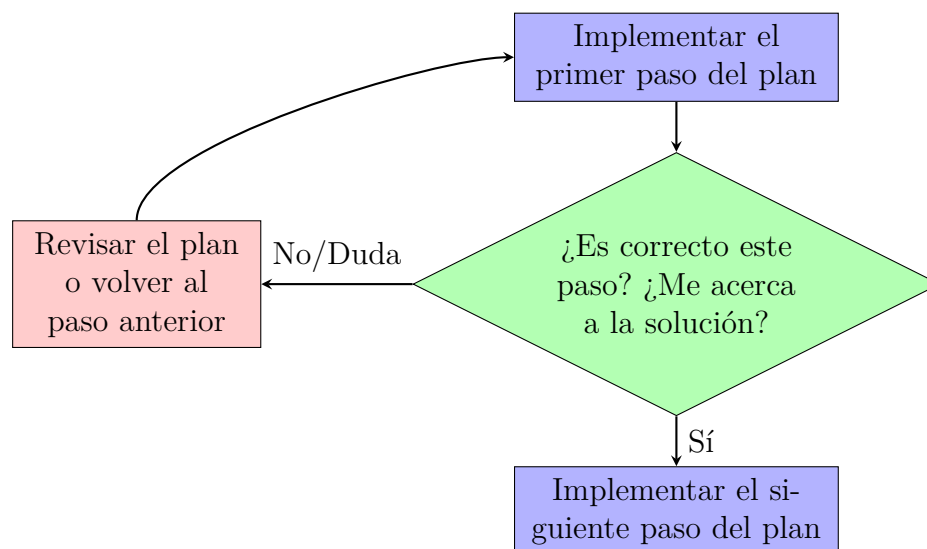


Figura 13.6: Diagrama del proceso de ejecución y autoverificación durante la Fase 3.

El rol del docente en esta fase es el de un *acompañante crítico*. No se trata de corregir errores de cálculo de inmediato, sino de observar el proceso del alumnado y hacer preguntas que fomenten la metacognición: «¿Puedes explicarme por qué has hecho eso?», «¿Estás seguro de ese paso? ¿Cómo podrías comprobarlo?», «¿Qué harás ahora?». Este tipo de intervención es un andamiaje sutil que mantiene la responsabilidad en el estudiante, pero le proporciona las herramientas para supervisar su propio trabajo.

Mini-Caso de Aula: Comparando la Ejecución de Planes, Ensayo y Error vs. Visualización

Contexto: Un docente de 4º de Primaria plantea el siguiente problema clásico, ideal para esta fase porque admite múltiples planes de acción. «*En una granja hay patos y vacas. En total, he contado 10 cabezas y 28 patas. ¿Cuántos patos y cuántas vacas hay?*».

El docente observa a dos parejas de alumnos ejecutando sus respectivos planes:

Pareja A (Plan: Ensayo y Error Sistemático): Han decidido usar una tabla para organizar su pensamiento.

- *Paso 1:* Rellenan la primera fila. Suponen 5 vacas y 5 patos. Calculan las patas: $(5 \times 4) + (5 \times 2) = 20 + 10 = 30$ patas.
- *Verificación:* Comparan su resultado con los datos. «Nos hemos pasado. Necesitamos menos patas».
- *Paso 2:* Ajustan el plan. «Necesitamos menos animales de 4 patas». Prueban con 4 vacas y 6 patos. Calculan: $(4 \times 4) + (6 \times 2) = 16 + 12 = 28$ patas.
- *Verificación Final:* «¡Lo tenemos! Coincide con las 28 patas del problema».

Intervención del docente: El docente se acerca y, en lugar de validar, pregunta: «*Veo que vuestra tabla funciona muy bien. ¿Por qué decidisteis quitar una vaca en lugar de un pato después del primer intento?*». Esta pregunta les obliga a verbalizar la lógica de su ajuste.

Pareja B (Plan: Representación Gráfica): Han decidido dibujar el problema.

- *Paso 1:* Dibujan 10 círculos para las 10 cabezas.
- *Paso 2:* Su plan inicial es dar 2 patas a cada “cabeza”, asumiendo que todos son patos. Calculan: $10 \times 2 = 20$ patas.
- *Verificación:* «Nos faltan patas. Necesitamos $28 - 20 = 8$ patas más».
- *Paso 3:* Ahora ejecutan la segunda parte de su plan. «Cada vaca necesita 2 patas más que un pato. Así que repartimos las 8 patas que nos faltan de dos en dos». Dibujan dos patas adicionales en 4 de los círculos.
- *Verificación Final:* Cuentan y ven que tienen 4 animales con 4 patas (vacas) y 6 animales con 2 patas (patos).

Intervención del docente: El docente observa la brillante estrategia y la marca para la puesta en común final. Pregunta: «*Me encanta vuestra idea de empezar poniendo 2 patas a todos. ¿Creéis que funcionaría si empezaraís poniendo 4 patas a todos?*». Esto les invita a explorar una variante de su propia estrategia.

Como se observa en el caso de aula, la fase de ejecución no es un simple cálculo, sino un *proceso dinámico de acción y reflexión*. La claridad con la que el alumnado documente sus pasos (en una tabla, con un dibujo claro, etc.) es fundamental, no solo para encontrar la solución, sino para poder *examinarla y aprender de ella* en la siguiente y última fase.

13.2.4 Fase 4: Examinar la Solución Obtenida (Mirar hacia atrás)

George Pólya afirmaba que esta cuarta fase, *looking back*, es la que distingue a los verdaderos pensadores matemáticos de los meros calculistas (Pólya, 1945/1989). Es, sin duda, la etapa más importante para la consolidación del aprendizaje y, paradójicamente, la más frecuentemente omitida en la práctica escolar tradicional por falta de tiempo. Sin embargo, es en este momento reflexivo donde el conocimiento se afianza, se conecta y se transfiere. Un docente eficaz no pregunta «¿Habéis terminado?» sino «¿Qué hemos aprendido?».

Esta fase no es una simple corrección, sino un acto deliberado de *metacognición*. El objetivo es que el alumnado reflexione sobre su propio proceso de pensamiento. Para guiar esta fase, podemos desglosarla en tres acciones didácticas clave, que se ilustran en la Figura 13.7.

1. *Verificación: ¿Es razonable nuestra solución?* La primera parada es comprobar la validez del resultado. Esto tiene dos niveles:
 - *Corrección del cálculo:* Revisar las operaciones realizadas.
 - *Coherencia con el problema:* Comprobar si la respuesta tiene sentido en el contexto del problema. Este es un filtro crucial para el desarrollo del sentido numérico.

Mini-Caso de Aula: Validando la Solución en su Contexto, El Rol del Resto

Problema: En un colegio hay 125 alumnos y alumnas. Queremos llevarlos de excursión en autobuses de 50 plazas. ¿Cuántos autobuses necesitamos?

Solución de un alumno: Realiza la división $125 \div 50$, obteniendo como cociente 2 y resto 25. Responde: «Necesitamos 2 autobuses y sobran 25 alumnos».

Intervención del Docente (Fase de Verificación): El docente no se centra en el cálculo (que es correcto), sino en la coherencia. «Tu cálculo es perfecto. Ahora leamos de nuevo la pregunta. Si contratamos 2 autobuses, ¿pueden ir todos los alumnos a la excursión? ¿Qué pasa con los 25 que sobran?».

Aprendizaje: El alumno se da cuenta de que la respuesta matemática (2 y resto 25) no es la solución al problema real. La necesidad de no dejar a nadie atrás le obliga a reinterpretar el resto y concluir que se necesitan 3 autobuses. Se está evaluando la solución en el contexto, un pilar de la *Competencia Específica CE.MAT.1* del currículo andaluz.

2. *Reflexión: ¿Cómo hemos llegado hasta aquí?* Esta es la parte más rica de la discusión colectiva. El foco se desplaza del *qué* (el resultado) al *cómo* (el proceso). Se trata de analizar el camino seguido y explorar otras posibilidades.

Clave Didáctica: La Puesta en Común como Construcción Social del Conocimiento

El objetivo de esta acción es transformar la resolución de problemas de una actividad individual y silenciosa a una construcción social y comunicativa. Al pedir al alumnado que comparta y compare sus estrategias, logramos varios objetivos cruciales:

- *Validación Múltiple*: Se legitiman diferentes caminos para llegar a una solución, combatiendo la idea de que solo hay un método correcto. Esto es fundamental para la *flexibilidad* que demanda el currículo.
- *Desarrollo del Lenguaje Matemático*: El alumnado debe verbalizar su pensamiento, usando un lenguaje cada vez más preciso para que otros lo entiendan (desarrollo de la *CE.MAT.6*).
- *Construcción del Sentido Socioafectivo*: Se fomenta un clima de aula donde se escuchan y respetan las ideas de los demás, y donde el error es una oportunidad para el debate y no para la sanción.

Las preguntas del docente son clave: «La estrategia de Lucía es diferente a la de Marcos, ¿en qué se parecen? ¿Cuál os parece más eficiente para este problema? ¿Por qué?».

3. *Generalización y Transferencia*: ¿Qué hemos aprendido para el futuro? Este es el objetivo último de la resolución de problemas: extraer un conocimiento que trascienda el problema particular y pueda ser aplicado a nuevas situaciones. Es el paso de la comprensión instrumental a la relacional (Skemp, 1978).

El docente puede guiar este proceso con preguntas que inviten a la generalización:

- «Hemos visto que para repartir galletas, lo mejor era dividir. ¿Y si tuviéramos que hacer equipos? ¿Y si quisiéramos saber cuántas veces es más grande una torre que otra? ¿Nos serviría la misma idea?»
- «En este problema, hacer un dibujo nos ha ayudado mucho. ¿En qué otros problemas creéis que esta estrategia podría ser útil?»

Esta práctica transforma la resolución de un problema aislado en la construcción de una verdadera *heurística*, una herramienta de pensamiento que el alumnado puede añadir a su repertorio (Schoenfeld, 1985).

En definitiva, la fase de «mirar hacia atrás» es el motor de la regulación y la transferencia del aprendizaje. Es la responsabilidad del docente crear la cultura y el tiempo necesarios en el aula para que esta fase no sea un apéndice, sino el clímax del proceso de resolución de problemas.

13.3 Heurísticas y Estrategias Generales para la Resolución de Problemas

Si el modelo de cuatro fases de Pólya es el mapa que nos guía en el viaje de la resolución de un problema, las *heurísticas* son las herramientas que llevamos en nuestra

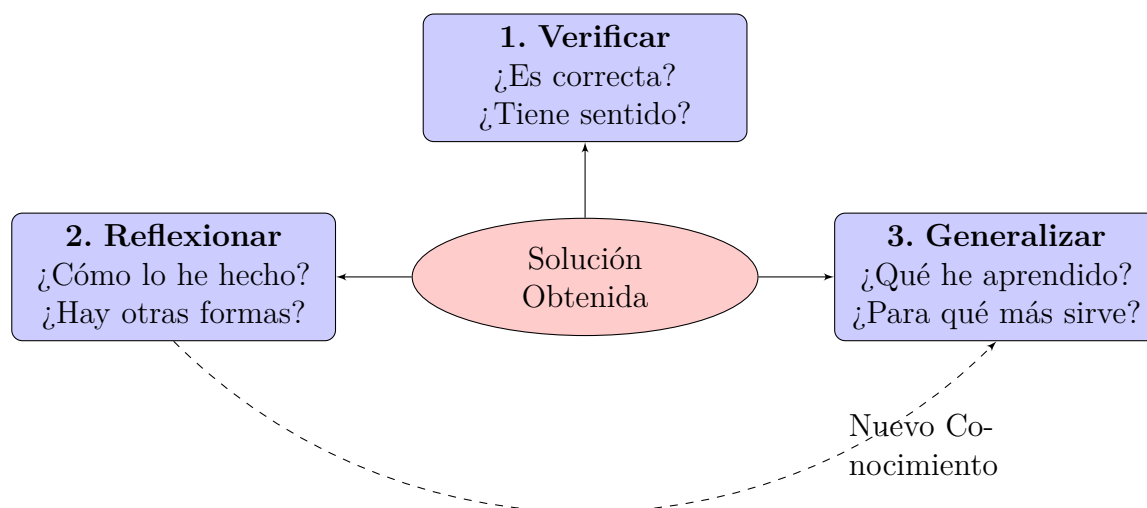


Figura 13.7: Las tres acciones clave de la fase de «Mirar hacia Atrás» de Pólya.

mochila para superar los obstáculos del camino. La fase de “concebir un plan” no surge de la nada; requiere disponer de un repertorio de estrategias de pensamiento a las que acudir cuando no vemos una solución inmediata.

Una heurística no es un algoritmo. Un algoritmo es una receta precisa que garantiza un resultado correcto si se siguen los pasos (por ejemplo, el algoritmo de la suma). Una heurística, en cambio, es una idea guía, una estrategia general o una “regla de pulgar” que no garantiza la solución, pero que nos ayuda a explorar el problema de manera inteligente y aumenta nuestras posibilidades de éxito. Como documentó ampliamente Alan Schoenfeld (1985), los resolutores expertos no son necesariamente más rápidos, sino que disponen de un abanico más amplio y flexible de estas estrategias y saben cuándo aplicarlas.

Nuestra labor como docentes no es dar al alumnado un listado de trucos, sino construir colectivamente esta “caja de herramientas” estratégicas. Debemos presentar las heurísticas no como reglas a memorizar, sino como formas de pensar que emergen de la propia necesidad al enfrentarse a problemas desafiantes.

Clave Didáctica: La Caja de Herramientas del Resolutor de Problemas

Una heurística no es un algoritmo, sino una idea guía, una estrategia general que nos ayuda a explorar un problema de manera inteligente. Nuestra labor como docentes es construir colectivamente esta “caja de herramientas” estratégicas. No se trata de memorizar una lista, sino de aprender a usar cada herramienta, comprendiendo para qué sirve y cuándo es más útil. A continuación, exploraremos algunas de las herramientas más potentes y versátiles para la Educación Primaria.

13.3.1 Empezar por lo Sencillo: El Arte de Quitarse el Miedo

Desde una perspectiva psicológica, uno de los mayores impedimentos para resolver un problema es el *bloqueo inicial*. Un problema que parece demasiado grande o

complejo puede generar ansiedad y paralizar el pensamiento. La estrategia fundamental para superar esta barrera es, paradójicamente, no atacar el problema de frente, sino abordarlo desde una perspectiva más simple y manejable. Esta meta-heurística se concreta en dos estrategias fundamentales.

13.3.1.1 Ensayo y Error Organizado: Explorar con Brújula

Esta heurística es mucho más que “probar al azar”. Es un proceso sistemático e iterativo que consiste en:

1. Realizar una conjetura o un intento razonable.
2. Comprobar si ese intento satisface las condiciones del problema.
3. Utilizar la información obtenida del error para refinar el siguiente intento, acercándose progresivamente a la solución.

Esta estrategia enseña al alumnado que un error no es un fracaso, sino una fuente de información valiosa.

Ejemplo: Aplicación de la Heurística de Ensayo y Error Organizado

Problema: En un corral hay 10 animales en total, entre gallinas y conejos. Si contamos todas sus patas, hay 26. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay?

Guion de Aula (Diálogo con el Alumno/a):

- *Docente:* «No sabemos la solución, pero podemos probar algo. ¿Qué se os ocurre? Si hay 10 animales, ¿cuántas gallinas y conejos podría haber?»
- *Alumno/a (Primer Intento):* «Pues... la mitad de cada uno. 5 gallinas y 5 conejos.»
- *Docente:* «¡Buena idea para empezar! Vamos a comprobarlo. ¿Cuántas patas serían? Para que no nos perdamos, podemos hacer una tabla.»

Nº Gallinas	Nº Conejos	Cálculo de Patas	Total Patas (¿es 26?)
5	5	$(5 \times 2) + (5 \times 4) = 10 + 20$	30

- *Docente:* «Nos ha dado 30 patas, pero necesitamos 26. ¿Nos hemos pasado o nos hemos quedado cortos?»
- *Alumno/a:* «¡Nos hemos pasado! Hay demasiadas patas.»
- *Docente:* «Exacto. Entonces, ¿qué necesitamos? ¿Más animales de 4 patas o menos?»
- *Alumno/a (Refinando el Intento):* «Menos conejos. Voy a probar con más gallinas. Por ejemplo, 7 gallinas y 3 conejos, que siguen sumando 10 animales.»

El proceso continúa, refinando la búsqueda en la tabla:

Nº Gallinas	Nº Conejos	Cálculo de Patas	Total Patas (¿es 26?)
5	5	$(5 \times 2) + (5 \times 4) = 10 + 20$	30 (¡Me paso!)
6	4	$(6 \times 2) + (4 \times 4) = 12 + 16$	28 (¡Me sigo pasando!)
7	3	$(7 \times 2) + (3 \times 4) = 14 + 12$	26 (¡Correcto!)

Clave Didáctica: El Valor de la Heurística reside en el Proceso de Búsqueda

El valor de esta heurística no reside en encontrar la respuesta, sino en el *proceso* de búsqueda. Como docentes, nuestro objetivo es transformar el “ensayo y error” impulsivo en uno *organizado y reflexivo*. La tabla no es solo un adorno; es la herramienta cognitiva que permite al alumnado registrar sus intentos, analizar los resultados y tomar decisiones informadas para el siguiente paso. Fomentar esta estrategia desarrolla la perseverancia y reduce la ansiedad ante el problema, ya que dota al estudiante de una primera acción posible y constructiva.

13.3.1.2 Resolver un Problema más Sencillo: La Estrategia de Gauss

Cuando la estructura de un problema es compleja o los números son demasiado grandes para manejarlos, una heurística extremadamente potente es reducir la complejidad para poder analizar la estructura subyacente. Esto se puede hacer de dos maneras:

- *Reducir los números*: Sustituir los números grandes del problema por otros más pequeños y manejables para ver cómo se relacionan.
- *Reducir las condiciones*: Considerar solo una parte del problema o una versión simplificada del mismo.

Al resolver estos “mini-problemas”, a menudo emerge un patrón o una idea que puede ser generalizada para resolver el problema original.

Profundizando: La Estrategia de Gauss como Modelo de Simplificación

Una famosa leyenda cuenta que, a finales del siglo XVIII, un maestro de primaria^a, queriendo mantener ocupados a sus alumnos, les pidió que sumaran todos los números del 1 al 100. Esperaba que la tarea les llevara mucho tiempo. Sin embargo, un joven Carl Friedrich Gauss (quien se convertiría en uno de los más grandes matemáticos de la historia) dio la respuesta correcta en pocos minutos. En lugar de sumar todos los números, Gauss resolvió un problema más sencillo y buscó un patrón. Se dio cuenta de que si emparejaba el primer número con el último ($1 + 100 = 101$), el segundo con el penúltimo ($2 + 99 = 101$), el tercero con el antepenúltimo ($3 + 98 = 101$), y así sucesivamente, siempre obtenía la misma suma: 101. Como había 100 números, podía formar 50 de estas parejas. Por tanto, la suma total era simplemente $50 \times 101 = 5050$.

^aSegún parece y citan algunas fuentes, este maestro fue una de las personas que propició

que Gauss pudiera tomar el camino del estudio de las matemáticas, pagando de su menguado bolsillo textos para que un incipiente Gauss pudiera acceder a textos especializados de la época.

Ejemplo: Construyendo vallas

Problema: Para poner una valla en línea recta, se colocan 10 postes. Si cada poste está separado del siguiente por 2 metros, ¿cuántos metros de valla necesitamos en total?

Análisis del Error Común: La respuesta impulsiva es $10 \times 2 = 20$ metros. Este error proviene de no comprender la estructura del problema.

Guion de Intervención usando la Heurística:

- **Docente:** «20 metros es una idea interesante. Vamos a comprobarla con un problema más sencillo que podamos dibujar. ¿Qué pasaría si en lugar de 10 postes, solo ponemos 2?»
- **Alumno/a:** «Pues... un tramo de 2 metros.»
- **Docente:** «Perfecto. ¿Y si ponemos 3 postes?»
- **Alumno/a:** (Dibuja tres postes) «Ah, hay dos tramos. Serían $2 \times 2 = 4$ metros.»
- **Docente:** «¡Exacto! Vamos a ponerlo en una tabla para ver si descubrimos algo.»

<i>Nº Postes</i>		<i>Nº Tramos de valla</i>
2	—→	1
3	—→	2
4	—→	3

- **Docente:** «¿Veis algún patrón? ¿Qué relación hay entre el número de postes y el número de tramos?»
- **Alumno/a:** «¡Siempre hay un tramo menos que postes!»
- **Docente:** «Entonces, si volvemos a nuestro problema original de 10 postes, ¿cuántos tramos habrá?»
- **Alumno/a:** «¡Habrán 9 tramos! Y la longitud será $9 \times 2 = 18$ metros.»

Clave Didáctica: Fomentando el Pensamiento Relacional a través de Heurísticas

Esta heurística es fundamental para el desarrollo del *pensamiento relacional* y del *Sentido Algebraico*, tal como lo define el currículo andaluz. Al buscar patrones en casos simples, el alumnado transita de un pensamiento puramente calculista (centrado en la respuesta) a un pensamiento estructural (centrado en la relación entre las cantidades). Nuestra labor es guiar este proceso, ayudando a los estudiantes a organizar la información de los casos sencillos de manera que el patrón

se haga visible (por ejemplo, mediante una tabla o un esquema).

13.3.2 El Poder de la Visualización: Hacer Visible el Pensamiento

Una de las heurísticas más potentes y universalmente aplicables en la resolución de problemas es, sin duda, la de *hacer un dibujo, un esquema o un diagrama*. Lejos de ser una simple ayuda para alumnado con dificultades o una actividad infantil, la visualización es una herramienta cognitiva de primer orden que transforma problemas abstractos y verbales en representaciones concretas y espaciales sobre las que se puede razonar.

Desde una perspectiva psicológica, la *Teoría de la Codificación Dual* de Paivio (1991) sostiene que procesar la información a través de dos canales –el verbal y el visual– crea representaciones mentales más robustas y facilita una comprensión más profunda. Desde la pedagogía, esta heurística se alinea perfectamente con la secuencia de Bruner (1966/1972), actuando como el *punte icónico* indispensable entre la situación real (enactiva) y la operación simbólica.

El objetivo de esta estrategia no es crear una ilustración artística, sino despojar al problema de su información superflua para revelar su *estructura matemática* subyacente. El docente debe guiar al alumnado para transitar desde representaciones literales hacia esquemas cada vez más abstractos y potentes.

Clave Didáctica: De la respuesta a la representación

El cambio fundamental que promueve la visualización es un cambio en la pregunta que se hace el alumnado. En lugar de leer el problema y preguntarse ansiosamente «¿qué cuenta tengo que hacer?», el foco se desplaza a «¿cómo puedo dibujar esta historia?». Al externalizar su comprensión del problema en un dibujo, el propio alumnado puede analizar su razonamiento, identificar relaciones ocultas y, a menudo, la operación necesaria emerge como una consecuencia lógica del modelo visual, en lugar de ser una regla memorizada (Skemp, 1978).

A continuación, se presentan tres tipos de modelos visuales, en orden creciente de abstracción, que son fundamentales en la didáctica de la aritmética en Primaria.

- *Dibujo Libre y Dramatización*. Es el primer paso natural, especialmente en el Primer Ciclo. Consiste en representar la situación del problema de la manera más literal posible. Si el problema habla de 5 pájaros en un árbol y llegan 3 más, el alumnado dibuja un árbol, 5 pájaros y luego 3 más. Esta acción, aunque básica, es vital para que el alumnado se apropie del contexto y de la acción descrita en el problema.
- *Esquemas Parte-Todo*. Representan un primer nivel de abstracción. Ya no se dibujan los objetos individuales, sino que se utiliza un esquema para representar las relaciones estructurales. Son especialmente útiles para los problemas de *combinación* (vistos en el Capítulo 6), donde dos o más cantidades (partes) se combinan para formar una cantidad total (todo).

Mini-Caso de Aula: El Esquema Parte-Todo para Revelar la Estructura

Problema: «En una cesta hay 12 piezas de fruta. 7 son manzanas y el resto son peras. ¿Cuántas peras hay en la cesta?»

Visualización: El docente guía la construcción de un esquema Parte-Todo. No se pide la operación, sino que se pregunta: «¿Qué sabemos? ¿Cuál es el total de frutas? ¿Cuál es una de las partes?». La representación visual (Figura 13.8) hace evidente que para encontrar la parte desconocida, debemos quitarle al todo la parte que ya conocemos.

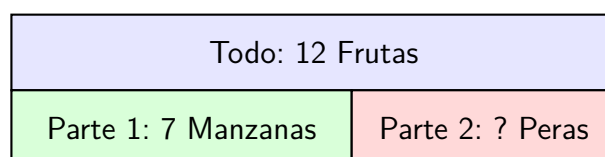


Figura 13.8: Esquema Parte-Todo para un problema de combinación. La estructura visual muestra la relación entre las cantidades.

- *Diagramas de Barras (Modelo de Singapur).* Esta es una de las herramientas de visualización más potentes y versátiles de la Educación Primaria. Aunque su origen está en la estrategia educativa de Singapur, su uso se ha extendido globalmente por su eficacia (Ng & Lee, 2009). Consiste en utilizar barras rectangulares para representar las cantidades y las relaciones entre ellas. Su mayor fortaleza reside en su capacidad para modelizar problemas de *comparación*, tanto aditivos como multiplicativos, que son tradicionalmente difíciles para el alumnado.

Mini-Caso de Aula: El Diagrama de Barras como Antídoto a las Palabras Clave

Problema: «Luis tiene 12 cromos, que son 3 más que los que tiene Ana. ¿Cuántos cromos tiene Ana?»

Riesgo (Sin Visualización): Un alumno, aplicando una estrategia superficial de “palabras clave”, ve la palabra «más» y concluye erróneamente que debe sumar ($12 + 3$).

Intervención con el Modelo de Barras: El docente no corrige, sino que guía la representación.

- *Docente:* «Vamos a dibujarlo. ¿Quién tiene más cromos, Luis o Ana?»
- *Alumno:* «Luis, porque tiene 3 más que Ana.»
- *Docente:* «Perfecto. Entonces, la barra de Luis será más larga que la de Ana. Vamos a dibujarlas.»

El modelo resultante (Figura 13.9) revela la estructura real. La operación de resta ($12 - 3$) surge de la necesidad de igualar las barras, no de una

palabra clave.

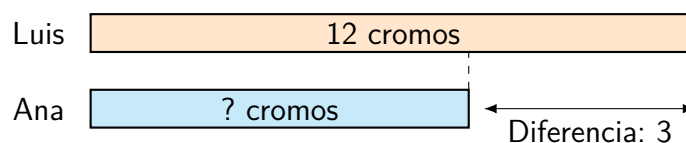


Figura 13.9: Diagrama de barras (Modelo de Singapur) para un problema de comparación. La visualización de la diferencia como el trozo que le “sobra” a la barra mayor clarifica la operación necesaria.

En definitiva, enseñar al alumnado a utilizar estas herramientas visuales es dotarle de una de las heurísticas más poderosas del modelo de Pólya (1945/1989). Le capacita para *comprender el problema y concebir un plan* de una forma mucho más profunda y personal, sentando las bases de un pensamiento matemático flexible y autónomo, plenamente alineado con el desarrollo de la *Competencia Específica 1* del currículo andaluz: «Interpretar situaciones de la vida cotidiana, proporcionando una representación matemática de las mismas».

13.3.3 El Poder de la Visualización: Traducir Palabras a Imágenes

Si una imagen vale más que mil palabras, en la resolución de problemas matemáticos, una buena representación visual vale más que mil cálculos memorizados. La visualización no es un mero adorno, sino una herramienta cognitiva de primer orden. Es el puente que conecta el mundo concreto y narrativo del enunciado de un problema con el mundo abstracto de los símbolos y las operaciones matemáticas. En la secuencia de Bruner (1966/1972), es la *fase icónica*, el paso indispensable entre la acción (*fase enactiva*) y el lenguaje formal (*fase simbólica*).

Cuando un o una discente se enfrenta a un problema, su primera dificultad no suele ser el cálculo, sino la comprensión de la estructura de relaciones que se oculta tras las palabras. Pedirle que dibuje la situación le obliga a abandonar una lectura superficial y a comprometerse con una interpretación profunda del problema. No se trata de crear una obra de arte, sino de organizar el pensamiento.

13.3.3.1 Hacer un Dibujo o Esquema Libre

Esta es la heurística más fundamental y accesible. Consiste en animar al alumnado a representar la situación del problema con un dibujo sencillo, usando cualquier representación que le parezca lógica. Este acto de “traducción” externa el modelo mental del estudiante, haciéndolo visible tanto para sí mismo como para el docente.

Mini-Caso de Aula: El Dibujo como Puente hacia la Operación Inversa

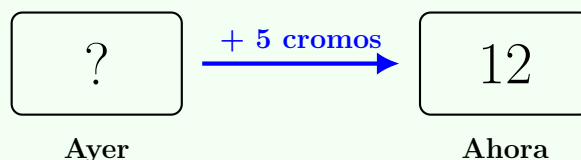
Problema: «Ayer tenía algunos cromos. Hoy he ganado 5 en el recreo y ahora tengo 12. ¿Cuántos cromos tenía ayer?».

Análisis Didáctico: Este es un problema de cambio con estado inicial desconocido. La acción de “ganar” sugiere semánticamente una suma. Un estudiante que se

guía por palabras clave podría concluir erróneamente que debe sumar $12 + 5$.

Intervención del Docente: «¡Fantástico! Antes de decidir qué operación hacer, ¿por qué no dibujamos la historia? ¿Cómo podemos representar los cromos que tenías ayer, los que ganaste y los que tienes ahora?».

Visualización del Alumno/a:



Descubrimiento Guiado: Al ver el esquema, la relación se vuelve evidente. El total es 12. Una de las partes es 5. La otra parte es la incógnita. La operación que resuelve el problema no es la que la acción del enunciado sugiere (suma), sino su inversa (resta: $12 - 5$). El dibujo ha revelado la *estructura parte-parte-todo* subyacente.

13.3.3.2 El Diagrama de Barras (Modelo de Singapur)

A medida que los problemas se vuelven más complejos, especialmente los de tipo comparativo y multiplicativo, el dibujo libre puede volverse confuso. Aquí es donde una representación más estructurada, como el *diagrama de barras*, se convierte en una herramienta excepcionalmente potente. Desarrollado en Singapur en la década de 1980, este modelo representa las cantidades como barras rectangulares, lo que permite visualizar las relaciones entre ellas de manera clara y proporcional.

Clave Didáctica: El Modelo de Barras como Antídoto a las “Palabras Clave”

La principal virtud del diagrama de barras es que obliga al alumnado a centrarse en la *estructura relacional* del problema, en lugar de “cazar” palabras clave. Transforma las relaciones aditivas y multiplicativas en comparaciones de longitud, una de las intuiciones más básicas y potentes que poseemos. Es, además, un puente fundamental hacia el pensamiento algebraico: una barra con una interrogación es, conceptualmente, la precursora de una variable como la x .

Mini-Caso de Aula: Modelizando la Comparación Multiplicativa con Diagramas de Barras

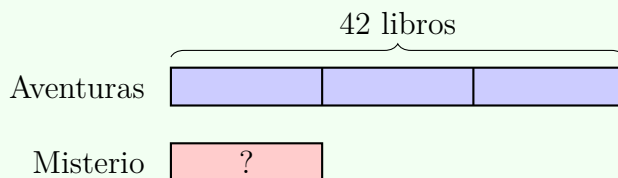
Problema: «En la biblioteca del colegio hay 42 libros de aventuras, que son 3 veces más que los libros de misterio. ¿Cuántos libros de misterio hay?».

Análisis Didáctico: Este es un problema de comparación multiplicativa. La palabra clave “veces más” puede inducir a un error común: multiplicar 42 por 3. La visualización es vital para evitar este error.

Intervención del Docente: «Vamos a representar la información con barras. ¿Qué tipo de libros tenemos? ¿De cuál hay más? Entonces, ¿qué barra será más larga?»

¿Cuántas veces más larga?».

Visualización Guiada: El docente y el alumnado construyen el modelo en la pizarra.



Descubrimiento Guiado: El diagrama revela la estructura real: la cantidad total (42) está dividida en 3 partes iguales. La pregunta ya no es qué hacer con 42 y 3, sino «si 3 bloques iguales valen 42, ¿cuánto vale un solo bloque?». La operación que emerge del modelo es la división ($42 \div 3$), y no la multiplicación que la palabra clave “veces más” sugería.

En definitiva, enseñar al alumnado a visualizar un problema es una de las inversiones didácticas más rentables. Les proporciona una herramienta autónoma para pensar, una forma de verificar su propio razonamiento y un anclaje sólido para comprender la conexión entre la situación y la operación matemática.

13.3.4 Cambiar la Perspectiva: La Estrategia de Trabajar Hacia Atrás

Dentro del abanico de estrategias generales, la heurística de *trabajar hacia atrás* (o empezar por el final) es una de las más potentes y, a la vez, una de las que mejor ilustra la profunda conexión entre la resolución de problemas y los conceptos matemáticos fundamentales.

Esta estrategia es particularmente eficaz en problemas donde se describe una secuencia de acciones o transformaciones y se nos proporciona el estado final, pidiéndonos que averigüemos el estado inicial. Cognitivamente, supone un desafío interesante para el alumnado, ya que requiere invertir mentalmente el flujo temporal de la narración del problema. Sin embargo, su poder didáctico reside en que hace explícita la necesidad de utilizar *operaciones inversas*, un pilar del pensamiento aritmético y algebraico (Schoenfeld, 1985).

Mini-Caso de Aula: La Estrategia de Trabajar Hacia Atrás en Acción

Un docente de 3º de Primaria plantea el siguiente problema: «Ana tenía algunos cromos al empezar el día. En el recreo, ganó 5 cromos jugando con Luis. Después de clase, le dio la mitad de los cromos que tenía en ese momento a su hermana pequeña. Al final, Ana se quedó con 8 cromos. ¿Cuántos cromos tenía Ana al principio?».

El bloqueo del pensamiento directo: Un estudiante que intente resolverlo de forma directa (hacia adelante) se encontrará con una barrera: $? \xrightarrow{+5} ? \xrightarrow{\div 2} 8$. Este camino requiere un pensamiento algebraico abstracto que aún no está desarrollado.

Intervención del docente (guiando la heurística): El docente no da la solución, sino que redirige el pensamiento: «Sabemos cómo termina la historia, con 8 cromos. ¿Qué fue lo último que hizo Ana? [...] Si queremos saber cuántos tenía justo antes de hacer eso, ¿qué tendremos que hacer para “deshacer” esa acción?».

Aplicando la estrategia de trabajar hacia atrás:

1. *Estado Final:* Ana termina con 8 cromos.
2. *Deshacer la última acción:* La última acción fue «dar la mitad» (dividir por 2). La operación inversa es *multiplicar por 2*. Por tanto, antes de darle la mitad a su hermana, tenía $8 \times 2 = 16$ cromos.
3. *Deshacer la primera acción:* La primera acción fue «ganar 5 cromos» (sumar 5). La operación inversa es *restar 5*. Por tanto, al principio del día, tenía $16 - 5 = 11$ cromos.
4. *Conclusión y Verificación:* La solución es que Ana tenía 11 cromos. Se comprueba trabajando hacia adelante: $11 + 5 = 16$. La mitad de 16 es 8. ¡Funciona!

Este proceso puede visualizarse de forma muy clara, ayudando al alumnado a comprender la estructura dual del problema, como se muestra en la Figura 13.10.

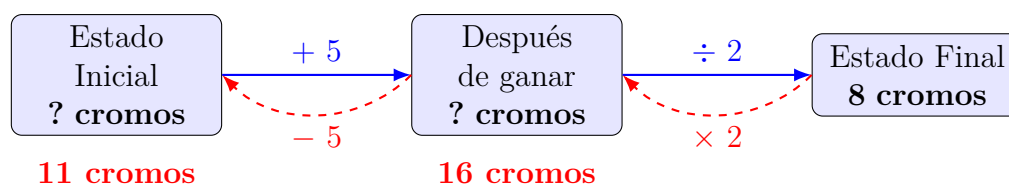


Figura 13.10: Visualización de la estrategia de trabajar hacia atrás. El camino inverso (rojo) utiliza las operaciones inversas para deshacer el camino directo (azul) y encontrar el estado inicial.

Clave Didáctica: Más Allá del Truco, la Lógica de la Inversión

La heurística de trabajar hacia atrás es mucho más que un “truco” para resolver ciertos problemas. Es una manifestación del *pensamiento funcional y relacional*, uno de los pilares del *Sentido Algebraico* que el currículo andaluz nos insta a desarrollar desde Primaria (aunque no se desarrolla forma explícita en Educación Primaria). Al enseñar esta estrategia, estamos:

- *Construyendo el concepto de operación inversa:* El alumnado vivencia que la resta “deshace” la suma y la multiplicación “deshace” la división (en contextos apropiados). Esta comprensión es fundamental para la futura resolución de ecuaciones.
- *Fomentando la flexibilidad del pensamiento:* Se rompe con la idea de que los problemas siempre se resuelven de forma lineal, de izquierda a derecha, tal y como se leen.
- *Validando el modelo de Pólya:* La fase de “examinar la solución” se hace

tangible al comprobar el resultado trabajando hacia adelante.

Enseñar esta heurística no es enseñar un método aislado; es abrir una puerta a la comprensión de la estructura reversible de las operaciones matemáticas, una de las ideas más potentes de toda la aritmética.

Tabla 13.2: Tabla resumen de las principales heurísticas para la resolución de problemas en Primaria.

<i>Heurística</i>	<i>Idea Clave y Aplicación</i>
<i>Ensayo y Error Organizado</i>	No es probar al azar, sino realizar una conjetura informada, verificarla y usar el error como pista para refinar la siguiente conjetura. Ideal para problemas donde se desconocen dos cantidades pero se conoce su suma y otra relación (ej. el problema de las gallinas y conejos).
<i>Resolver un Problema más Sencillo</i>	Ante un problema con números grandes o muchas condiciones, se crea una versión simplificada para buscar un patrón o entender la estructura subyacente. Fundamental para problemas de generalización (ej. el problema de los postes y las vallas).
<i>Hacer un Dibujo o Esquema</i>	Traducir el enunciado verbal a una representación visual. Es el puente entre la comprensión (Fase 1 de Pólya) y la planificación (Fase 2). El <i>Modelo de Barras</i> es una versión estructurada y potente de esta heurística, especialmente para problemas de comparación.
<i>Trabajar Hacia Atrás</i>	Se utiliza en problemas donde se conoce el estado final de una secuencia de acciones y se pregunta por el estado inicial. Requiere el uso sistemático de <i>operaciones inversas</i> .

13.4 El Papel del Docente como Facilitador

En la enseñanza basada en la resolución de problemas, el rol del docente se transforma radicalmente. Se abandona la figura del instructor, proveedor de respuestas y procedimientos, para adoptar la de un *guía*, un *facilitador* y, en última instancia, un *arquitecto de experiencias de aprendizaje*. No es el proveedor de soluciones, sino un catalizador del pensamiento del alumnado. Sus funciones principales no son explicar y corregir, sino cuestionar, escuchar, conectar ideas y fomentar un clima de exploración intelectual.

Esta labor, lejos de ser pasiva, es extraordinariamente exigente y se fundamenta en un profundo conocimiento tanto del contenido matemático como de la pedagogía (Shulman, 1986/2019). El papel del docente se despliega en tres momentos clave, cada uno con sus propias responsabilidades y desafíos:

- *Antes de la resolución:* En el diseño y selección de las tareas.
- *Durante la resolución:* En la gestión del proceso de los estudiantes en el aula.

- *Después de la resolución:* En la orquestación de la puesta en común y la institucionalización del conocimiento.

A continuación, analizaremos en detalle la primera de estas fases, que constituye el cimiento de toda la acción didáctica.

13.4.1 Antes de la resolución: El Diseño de Tareas Potentes

La herramienta pedagógica más importante de la que dispone un docente que enseña a través de la resolución de problemas es, precisamente, el problema mismo. La calidad del aprendizaje que puede tener lugar en un aula está directamente limitada por la riqueza de las tareas que se proponen (Stein et al., 2000/2009). Un problema bien diseñado abre puertas al pensamiento matemático; un ejercicio cerrado y repetitivo las cierra.

Por tanto, la primera responsabilidad del docente como facilitador es ser un cuidadoso y reflexivo diseñador y seleccionador de problemas. Las tareas que se planteen deben ir más allá de la mera aplicación de un algoritmo e invitar a la reflexión, la estrategia y la conexión de ideas. Un buen problema para el aula de Primaria, desde un enfoque competencial, debe reunir las siguientes características:

- *Ser significativo y relevante para el alumnado.* El contexto no es un mero adorno, sino el puente que conecta las matemáticas con el mundo del niño o la niña. Un problema anclado en una situación familiar, un juego, un reto de la vida cotidiana o una narrativa interesante, genera una implicación y una motivación intrínsecas que son el motor del aprendizaje.

Ejemplo: Contexto vs. Abstracción

Comparemos dos formas de trabajar la suma de fracciones:

- *Tarea abstracta (ejercicio):* Resuelve $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.
- *Tarea contextualizada (problema):* «Estamos haciendo un bizcocho y la receta pide media taza de leche y un cuarto de taza de aceite. Si usamos una taza medidora, ¿qué marca alcanzará la mezcla de los dos líquidos? ¿Llenaremos la taza por completo?».

La segunda tarea no solo requiere el mismo cálculo, sino que invita a la visualización, a la estimación y a dotar de significado al resultado.

- *Permitir diferentes niveles de aproximación y estrategias de solución.* Un buen problema no tiene un único camino correcto. Debe ser accesible para todo el alumnado (lo que Jo Boaler (2020) denomina *suelo bajo*), pero a la vez permitir extensiones y profundizaciones para quienes avancen más rápido (*techo alto*). Esta característica es la clave para atender a la diversidad en el aula.

Ejemplo: Un problema con múltiples caminos

Problema: «En el patio del colegio hay triciclos y bicicletas. En total, he contado 8 vehículos y 20 ruedas. ¿Cuántos triciclos y cuántas bicicletas hay?».

- Un estudiante podría resolverlo por *ensayo y error*, probando combinaciones (4 y 4, 5 y 3...).
- Otro podría usar una *representación gráfica*, dibujando los 8 vehículos y añadiendo ruedas hasta llegar a 20.
- Un tercero podría usar una *tabla* para organizar la información de forma sistemática.

Todas las estrategias son válidas y revelan diferentes niveles de pensamiento matemático. La labor docente es valorar y conectar estas diversas soluciones.

- *Fomentar la aplicación de conceptos y procedimientos matemáticos importantes.* El problema debe ser el vehículo para construir o profundizar en una idea matemática central. Debe exigir al alumnado pensar y razonar, no solo recordar una fórmula.

Clave Didáctica: El Problema es el Currículo

La selección de tareas no es una cuestión de gustos, es una decisión curricular de primer orden. Los problemas que elegimos definen qué significa “hacer matemáticas” en nuestra aula. Si los problemas son meros ejercicios de aplicación de una regla recién explicada, el alumnado aprende que las matemáticas consisten en seguir instrucciones. Si los problemas requieren explorar, conjeturar, representar y argumentar, el alumnado aprende que las matemáticas son una actividad creativa y de construcción de sentido (National Council of Teachers of Mathematics, 2014).

13.4.2 Durante la resolución: La Gestión del Proceso

Una vez que hemos diseñado y planteado una tarea rica y desafiante, el rol del personal docente se transforma radicalmente. El silencio expectante del alumnado mientras trabaja no es una señal para que el docente se retire, sino para que active su faceta más compleja y sutil: la de *guía cognitivo*. La tentación de intervenir para «aclarar», «corregir» o «dar una pista» es inmensa, pero a menudo contraproducente. Una intervención prematura o mal enfocada puede cortocircuitar el proceso de pensamiento del discente, devolviéndole a un rol pasivo y socavando el objetivo mismo de la resolución de problemas.

La gestión del proceso se articula en torno a dos ejes fundamentales y entrelazados: el arte de la intervención mínima a través del andamiaje y la concepción del error como una valiosa fuente de información.

13.4.2.1 El Andamiaje Cognitivo en Acción: El Arte de la Intervención Mínima.

El concepto de *andamiaje* (*scaffolding*), acuñado por Bruner a partir de las ideas de Vygotsky (1978/2009), es la metáfora perfecta para nuestra labor. Un andamio no construye el edificio; proporciona el soporte justo y necesario para que los constructores puedan alcanzar el siguiente nivel y continuar su trabajo. Una vez que la estructura

es sólida, el andamio se retira.

Clave Didáctica: Saber Cuándo (y Cuándo NO) Intervenir.

- *Observar y escuchar primero:* Antes de decir nada, recorre el aula en silencio. Observa qué hacen los alumnos y alumnas. Escucha sus conversaciones. ¿Qué estrategias están usando? ¿Dónde están encontrando dificultades? El diagnóstico precede siempre a la intervención.
- *Intervenir para el proceso, no para la respuesta:* Tu objetivo no es que lleguen a la solución, sino que sigan pensando. Intervén cuando un equipo esté bloqueado en el proceso, no cuando tenga una respuesta incorrecta.
- *Diferenciar el esfuerzo del bloqueo:* Es crucial distinguir entre un «esfuerzo productivo» (el alumnado está probando ideas, debatiendo, aunque no avance rápido) y un «bloqueo total» (el alumnado ha abandonado la tarea o está en un bucle improductivo). Solo se debe intervenir en el segundo caso.

La herramienta principal del andamiaje es la *pregunta estratégica*. No se trata de cualquier pregunta. Debemos evitar las preguntas que cierran el pensamiento y priorizar aquellas que lo abren y devuelven la responsabilidad al alumnado (Figura 13.11).

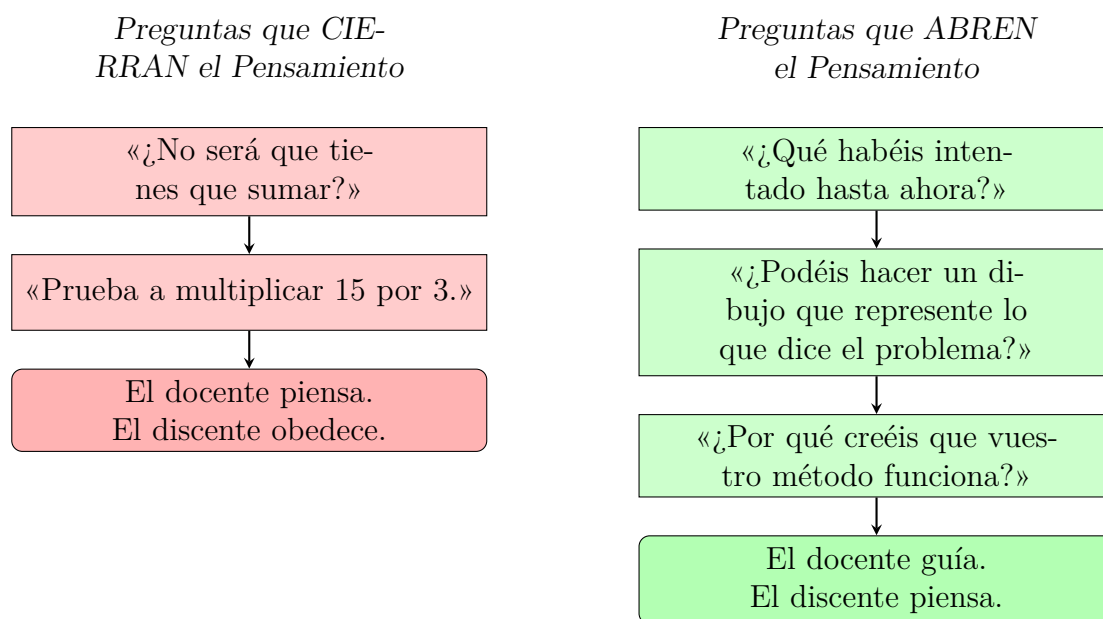


Figura 13.11: El poder de la pregunta: del instructor al facilitador.

13.4.2.2 El Error como Brújula: Del Juicio a la Oportunidad.

La gestión del error es, quizás, el indicador más claro del enfoque pedagógico de un docente. En un modelo tradicional, el error es un fallo que debe ser corregido lo antes posible. En un enfoque constructivista y competencial, el error es una valiosa *oportunidad de aprendizaje*. Como propuso Raffaella Borasi (1987), los errores son «ventanas al pensamiento del niño», pistas que nos da el alumnado sobre su lógica interna y sus concepciones alternativas.

Nuestra labor no es «tapar» el error con la respuesta correcta, sino utilizarlo como punto de partida para una conversación matemática. Esta perspectiva no es una mera preferencia didáctica, sino un mandato curricular explícito. La *ORDEN de 30 de mayo de 2023* establece el *Sentido Socioafectivo* como uno de los pilares del área. Dicho sentido busca, entre otros, «desarrollar la resiliencia ante los desafíos y una actitud positiva hacia las matemáticas, gestionando la ansiedad y el error como parte del proceso de aprendizaje».

Mini-Caso de Aula: Modelos de Intervención en el Aula

Escenario: Un problema de 3ª de Primaria: «En una granja hay 5 corrales y en cada corral hay 12 gallinas. ¿Cuántas gallinas hay en total?». Un equipo de alumnos responde: «Hay 17 gallinas».

- *Intervención tradicional (centrada en la corrección):* «No, está mal. ¿Qué operación hay que hacer si se repite la misma cantidad? Tenéis que multiplicar, no sumar.». *Resultado:* El alumnado corrige el cálculo, pero no su razonamiento. Se refuerza la idea de que hay «trucos» para saber qué operar.
- *Intervención didáctica (centrada en el proceso):* El docente se acerca y pregunta: «Interesante. ¿Me podéis explicar cómo habéis llegado a 17?». *Alumnado:* «Pues hemos sumado los 5 corrales y las 12 gallinas.»
Docente: «Entendido. Vamos a dibujarlo para verlo mejor. Dibujad un corral. ¿Cuántas gallinas hay dentro?» (El alumnado dibuja 12). «Perfecto. ¿Cuántos corrales como este tenemos?».
Alumnado: «Cinco.»
Docente: «Entonces, ¿cuántas veces tenemos 12 gallinas?».

Análisis: La segunda intervención no juzga el error, sino que indaga en su origen. Utiliza la representación icónica (el dibujo) como un puente para que el propio alumnado vea la insuficiencia de su modelo aditivo y la necesidad de un modelo multiplicativo. El error no ha sido un final, sino el motor del aprendizaje.

En definitiva, gestionar el proceso de resolución de problemas es un acto de equilibrio. Requiere saber cuándo hablar y cuándo callar, qué preguntar y qué dejar que el alumnado descubra por sí mismo. Es una práctica que transforma al docente de un simple proveedor de información en un verdadero arquitecto de experiencias de aprendizaje, capaz de cultivar no solo el conocimiento, sino también la autonomía, la resiliencia y la confianza de sus estudiantes.

13.4.3 Orquestrar la Puesta en Común y la Discusión

La fase de puesta en común es, posiblemente, el momento de mayor potencial de aprendizaje en una clase de resolución de problemas. Sin embargo, también es uno de los más exigentes para el personal docente. Una discusión mal gestionada puede derivar en una simple presentación de respuestas correctas, dejando intactas las ideas matemáticas subyacentes. Una discusión bien orquestada, por el contrario, transforma un conjunto de soluciones individuales en una oportunidad para la construcción colectiva de conocimiento matemático profundo.

El objetivo de esta fase no es meramente *revisar* el trabajo, sino *construir conexiones*. La meta es ayudar al alumnado a ver más allá de su propia estrategia, a comprender la lógica de otras aproximaciones y a identificar las ideas matemáticas fundamentales que conectan los diferentes métodos. Para transformar esta fase de un mero “expositor de soluciones” a un verdadero “laboratorio de ideas”, nos apoyaremos en el influyente marco de las *Cinco Prácticas para Orquestrar Discusiones Matemáticas Productivas* (Stein et al., 2000/2009). Este modelo proporciona al docente una estructura proactiva para gestionar la complejidad de la discusión en el aula.

Clave Didáctica: El Cambio de Rol

El modelo de las Cinco Prácticas redefine el rol docente durante la discusión. Pasamos de ser un *evaluador reactivo* que corrige respuestas, a ser un *director de orquesta proactivo* que anticipa, selecciona y secuencía las intervenciones para construir una sinfonía matemática coherente.

Las cinco prácticas, que se planifican en gran medida *antes* y *durante* la resolución del problema por parte del alumnado, son:

1. *Anticipar (Anticipating)*: Antes de plantear el problema en el aula, el docente lo resuelve por sí mismo de varias maneras posibles. Anticipa las estrategias que probablemente usarán sus estudiantes (correctas e incorrectas), las dificultades que encontrarán y los modelos que podrían emplear. Esta fase es vital para no ser sorprendido durante la clase y poder planificar las siguientes etapas.
2. *Monitorear (Monitoring)*: Mientras el alumnado trabaja en el problema (individualmente o en grupos), el docente circula por el aula observando y escuchando activamente. Su objetivo no es corregir, sino identificar qué estrategias está usando cada estudiante y hacer preguntas para clarificar su pensamiento. Anota quién está usando qué método para poder seleccionarlos después.
3. *Seleccionar (Selecting)*: Justo antes de la puesta en común, el docente revisa sus notas y selecciona deliberadamente a los estudiantes o grupos que presentarán su trabajo. La selección no se basa en quién ha terminado primero o quién tiene la respuesta correcta, sino en el potencial de las estrategias para generar una discusión matemática fructífera que cumpla los objetivos de la sesión.
4. *Secuenciar (Sequencing)*: El docente decide el *orden* en que los estudiantes seleccionados presentarán sus estrategias. Esta decisión es clave. Una secuencia efectiva puede ir de las estrategias más concretas a las más abstractas, de las más comunes a las más originales, o puede yuxtaponer una estrategia errónea pero con una lógica interesante junto a una correcta para generar un conflicto cognitivo.
5. *Conectar (Connecting)*: Esta es la culminación del proceso. Durante la puesta en común, el docente guía activamente la discusión para ayudar al alumnado a establecer conexiones entre las estrategias presentadas. Formula preguntas que invitan a comparar los métodos, a identificar las ideas matemáticas subyacentes y a generalizar los aprendizajes. El objetivo es que la clase, en su conjunto, construya una comprensión más profunda y conectada del concepto matemático en juego.

Mini-Caso de Aula: Orquestando la Discusión sobre los Cromos

Contexto: Retomemos la situación de Ana y Luis que vimos en el Capítulo 6 al analizar los problemas de comparación. El docente ha planteado el problema «Luis tiene 12 cromos, 3 más que Ana. ¿Cuántos tiene Ana?» y ha gestionado el trabajo de los alumnos siguiendo las *Cinco Prácticas para Orquestar Discusiones Matemáticas* (Stein et al., 2000/2009).

1. *Anticipación (Antes de la clase):* El docente ya había previsto que la palabra “más” induciría al error de sumar (la estrategia de Ana) y que el dibujo de barras sería una estrategia visual potente para resolverlo (la estrategia de Luis).
2. *Monitoreo (Durante la resolución):* Mientras los alumnos trabajan, el docente circula y observa. Identifica a Ana, que ha sumado $12+3=15$, y le pregunta por su razonamiento («porque pone más»). Luego, observa a Luis dibujando su modelo de barras y le pide que se lo explique.
3. *Selección:* El docente decide que ambas soluciones, la de Ana y la de Luis, son valiosas para la discusión. La de Ana representa un error conceptual muy común que debe ser abordado colectivamente. La de Luis ofrece la clave visual para comprender la estructura del problema.
4. *Secuenciación:* El docente decide el orden de presentación. Primero pedirá a Ana que comparta su respuesta y su razonamiento. Esto hace que el error común sea visible para toda la clase. Después, pedirá a Luis que muestre su dibujo, creando un *conflicto cognitivo* intencionado.
5. *Conexión (La Puesta en Común):*
 - *Docente:* «Ana, ¿puedes contarnos cómo lo has pensado?»
 - *Ana:* «He sumado 12 más 3 porque el problema dice que Luis tiene 3 cromos *más* que Ana.»
 - *Docente:* «Gracias, Ana. Es una idea muy lógica. Luis, ¿puedes enseñarnos tu dibujo en la pizarra y explicarnos tu idea?»
 - *Luis:* (Dibuja el modelo de barras) «Yo he dibujado una barra larga para Luis y una corta para Ana, porque Luis tiene más. El trozo que le sobra es de 3. Así que para saber los de Ana, a 12 le quité 3, y me dio 9.»
 - *Docente (a toda la clase):* «¡Fantástico! Tenemos dos respuestas, 15 y 9, y dos razonamientos muy interesantes. El dibujo de Luis y el cálculo de Ana parecen contradecirse. *Hablemos sobre esto. ¿Cómo puede ser que la palabra “más” nos lleve a una resta en el dibujo de Luis?*»

Análisis Didáctico: El docente no ha actuado como un juez que corrige, sino como un *orquestador* que utiliza las producciones de sus alumnos como materia prima para una construcción colectiva de significado. Al secuenciar las intervenciones y plantear preguntas que conectan las ideas, ha transformado el error de Ana en

una oportunidad de aprendizaje para toda la clase, validando al mismo tiempo la potencia del razonamiento visual de Luis. Se están construyendo activamente normas sociomatemáticas (Yackel & Cobb, 1996) donde justificar el pensamiento es más importante que la rapidez.

Mini-Caso de Aula: Orquestando una Discusión sobre Cálculo Mental

Un docente de 3º de Primaria quiere trabajar el cálculo mental multiplicativo.

- 1. *Anticipación*: El docente anticipa tres posibles estrategias:
 - (A) Descomposición: $10 \times 5 + 8 \times 5 = 50 + 40 = 90$.
 - (B) Doblar y Mitad: $18 \times 5 = 9 \times 10 = 90$.
 - (C) Compensación: $20 \times 5 - 2 \times 5 = 100 - 10 = 90$.
- 2. *Monitoreo*: El docente observa que el Grupo 1 usa la estrategia A, el Grupo 2 la B, y el Grupo 3 la C. Anota los nombres de los portavoces.
- 3. *Selección*: Decide que se presenten estas tres estrategias porque son eficientes y se basan en propiedades matemáticas clave.
- 4. *Secuenciación*: Decide el orden: primero A (la más común y ligada al algoritmo tradicional), luego C (para introducir la idea de resta) y finalmente B (la más elegante y que usa la propiedad asociativa).
- 5. *Conexión*: Tras las presentaciones, el docente pregunta: «La estrategia A y C descomponen el 18, pero de forma diferente. ¿Qué diferencia hay?», «La estrategia B parece muy distinta, ¿por qué funciona? ¿Qué le hemos hecho al 18 y al 5 para que el resultado sea el mismo?».

Esta forma de gestionar la puesta en común es una manifestación directa del enfoque competencial de la *ORDEN de 30 de mayo de 2023*. Al valorar y discutir múltiples estrategias, se desarrolla la *Competencia Específica CE.MAT.2* («Resolver situaciones problematizadas, aplicando diferentes técnicas, estrategias y formas de razonamiento»). Además, al exigir al alumnado que explique, justifique y compare sus métodos, se trabaja de forma explícita la *CE.MAT.6* («Comunicar y representar [...] conceptos, procedimientos y resultados matemáticos»). Finalmente, al crear un entorno donde todas las ideas son escuchadas y se construye conocimiento en comunidad, se fomenta el *Sentido Socioafectivo*, reduciendo la ansiedad matemática y promoviendo una visión de las matemáticas como una actividad creativa y colaborativa (Yackel & Cobb, 1996).

13.5 La Verbalización y la Discusión de Estrategias

El lenguaje juega un papel fundamental en el aprendizaje matemático, un principio profundamente arraigado en la teoría sociocultural de Vygotsky (1978/2009). Para él, el lenguaje no es simplemente un vehículo para comunicar pensamientos ya formados, sino la herramienta misma con la que se construye el pensamiento superior. En el aula de aritmética, esta idea es revolucionaria: la oportunidad de verbalizar el propio razonamiento, explicar las estrategias utilizadas y discutir las ideas con otros compañeros y compañeras y con el personal docente es crucial para la construcción de una comprensión matemática profunda y duradera.

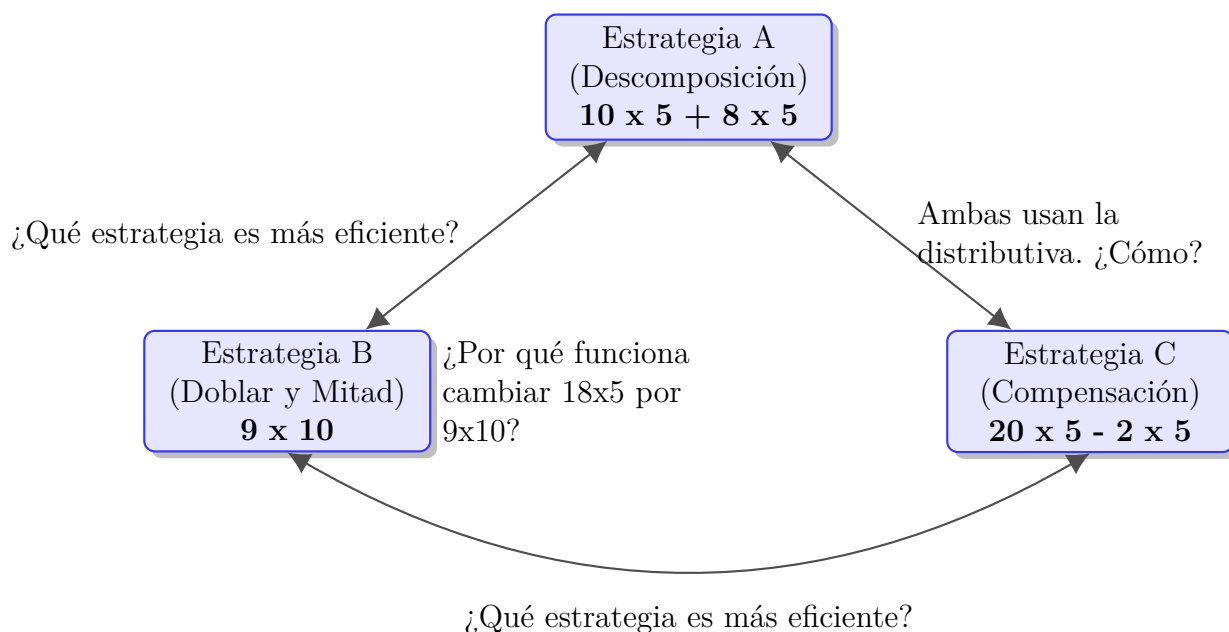


Figura 13.12: Visualización del rol docente en la fase de *Conexión*. El objetivo es guiar al alumnado para que establezca relaciones entre las diferentes estrategias que han surgido en el aula.

Este proceso transforma la resolución de problemas de una actividad silenciosa e individual a una empresa colectiva y comunicativa. Al intentar explicar algo, a menudo se comprende mejor. El lenguaje se convierte en el andamiaje que permite al pensamiento transitar de un estado implícito y nebuloso a uno explícito y estructurado. La discusión en el aula cumple, al menos, cuatro funciones cognitivas y afectivas clave:

- *Clarificar y Organizar el Propio Pensamiento:* Al intentar verbalizar una estrategia, el alumnado se ve obligado a secuenciar sus pasos, a identificar las ideas clave y a tomar conciencia de las lagunas en su propio razonamiento.
- *Desarrollar el Lenguaje Matemático:* Aprender a usar términos y expresiones con precisión (como «descomponer», «compensar», «propiedad conmutativa») en un contexto de uso real es mucho más potente que memorizar definiciones.
- *Aprender de los Demás:* Escuchar las estrategias de los compañeros y compañeras enriquece el repertorio propio, revela que existen múltiples caminos para llegar a una solución y promueve la flexibilidad cognitiva.
- *Fomentar la Metacognición:* Reflexionar sobre los propios procesos de aprendizaje y resolución. Preguntas como «¿Por qué mi estrategia funcionó?» o «¿En qué se diferencia mi método del de mi compañera?» son el motor de la autorregulación.

El docente debe crear espacios y tiempos dedicados a la comunicación y discusión matemática, donde todas las contribuciones sean valoradas, transformando la clase en una *comunidad de práctica matemática*.

13.5.1 El Diario de Matemáticas como Herramienta de Reflexión

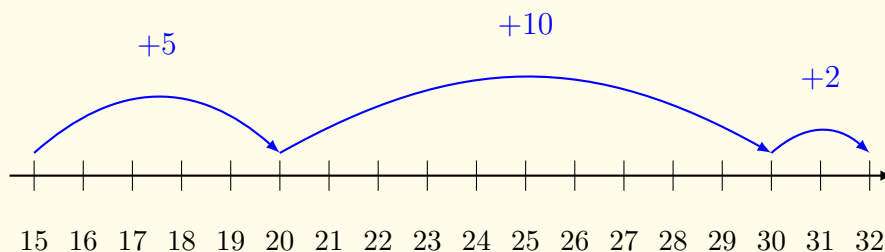
Si la discusión oral es el corazón del pensamiento colectivo, el diario de matemáticas es la herramienta para cultivar el pensamiento individual y la reflexión personal. Es un cuaderno donde el alumnado no solo resuelve problemas, sino que escribe *sobre* cómo los resuelve, qué dificultades encuentra y qué aprende en el proceso.

El diario cumple una triple función didáctica:

1. *Para el alumnado:* Es un espacio para la metacognición. Le permite hacer visible su propio pensamiento, tomar conciencia de sus estrategias, identificar sus errores y documentar su aprendizaje.
2. *Para el personal docente:* Es una ventana invaluable al pensamiento del estudiante. Permite realizar una evaluación formativa auténtica, diagnosticar concepciones erróneas y ajustar la enseñanza a las necesidades reales del alumnado.
3. *Para el lenguaje:* Es un contexto de bajo riesgo para practicar la comunicación matemática escrita. El objetivo no es la perfección gramatical, sino la claridad en la expresión de ideas matemáticas.

Problema: En el autobús del colegio iban 32 estudiantes. En la primera parada se bajaron 15. ¿Cuántos estudiantes quedan en el autobús?

Mi estrategia:



He pensado cuánto le falta al 15 para llegar al 32. Primero le sumé 5 para llegar a 20. Luego 10 para llegar a 30. Y al final 2 para llegar a 32. En total he sumado $5 + 10 + 2 = 17$. Quedan 17 estudiantes.

Lo que he aprendido: Que una resta también se puede resolver sumando hacia adelante. Para mí ha sido más fácil que quitar.

Figura 13.13: Ejemplo de una entrada en un Diario de Matemáticas para un problema de 2º Ciclo. Se observa la representación visual (icónica), la explicación de la estrategia y la reflexión metacognitiva.

Introducir el diario de matemáticas en el aula es una estrategia potente para desarrollar la competencia de *comunicar y representar* (CE.MAT.6) y para cultivar el

Sentido Socioafectivo, al valorar el proceso de pensamiento individual de cada niño y niña.

13.5.2 La Verbalización y la Discusión de Estrategias

El lenguaje juega un papel fundamental en el aprendizaje matemático, una idea potentemente defendida por Vygotsky. La oportunidad de verbalizar el propio pensamiento, explicar las estrategias utilizadas y discutir las ideas con otros compañeros y compañeras y con el personal docente es vital para la construcción de un conocimiento sólido. Sin embargo, no basta con crear espacios para “hablar de matemáticas”. La calidad de esa conversación y las reglas implícitas que la gobiernan son lo que verdaderamente transforma el aprendizaje.

Para que el diálogo en el aula sea matemáticamente productivo, es necesario establecer una cultura de discurso específica. Yackel y Cobb (1996) acuñaron el término *normas sociomatemáticas* para describir aquellas regulaciones implícitas, específicas de la actividad matemática, que guían la conversación y el razonamiento en el aula.

Estas normas van más allá de las normas sociales generales (como levantar la mano para hablar o respetar el turno de palabra). Se refieren a los criterios que la comunidad del aula (docente y alumnado) establece para determinar qué cuenta como una buena práctica matemática. Son el “sistema operativo” invisible que permite que el “hardware” (los problemas y materiales) y el “software” (las heurísticas) funcionen eficazmente.

Las principales normas sociomatemáticas que un docente debe cultivar intencionadamente en el aula de Primaria son:

- *¿Qué se considera una explicación o justificación matemática aceptable?* Se transita de una explicación procedimental (decir *qué* se hizo) a una conceptual (explicar *por qué* funciona). No basta con decir «sumé 25 y 18 y me dio 43», se busca un razonamiento como «descompuse el 18 en 15 y 3, sumé 25 y 15 que son 40, y luego añadí los 3 que quedaban».
- *¿Qué se considera una estrategia matemática diferente?* El objetivo es que el alumnado entienda que una estrategia es diferente por su lógica subyacente, no solo por detalles superficiales. Calcular 12×4 como $10 \times 4 + 2 \times 4$ es genuinamente diferente de calcularlo como $12 \times 2 \times 2$. Esta norma fomenta la flexibilidad de pensamiento.
- *¿Qué se considera una estrategia eficiente o elegante?* Esta norma ayuda a desarrollar el “sentido estético” de las matemáticas. Se promueve la discusión sobre qué estrategia es más adecuada para un problema concreto, reconociendo que la “mejor” estrategia puede depender de los números involucrados.
- *¿Cómo se concibe un error?* Se pasa de ver el error como un fracaso a entenderlo como una oportunidad de aprendizaje. Un error es una hipótesis lógica basada en un conocimiento previo que, aunque incorrecto en el nuevo contexto, tiene sentido.

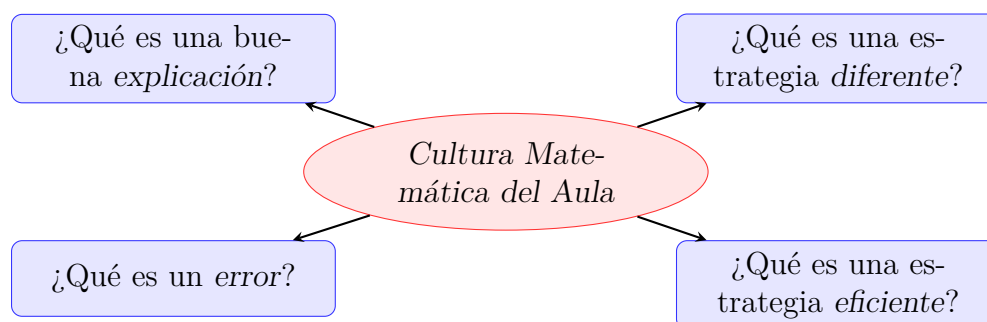


Figura 13.14: Las normas sociomatemáticas definen colectivamente lo que se valora como una buena práctica matemática en el aula.

Mini-Caso de Aula: Construcción de Normas Sociomatemáticas en el Aula

Situación: Un docente de 2º de Primaria plantea el problema: «En el patio hay 18 niños jugando al fútbol y 15 jugando a la comba. ¿Cuántos niños hay en total?». Dos estudiantes, Ana y Marco, resuelven el problema.

- **Ana:** «He puesto el 18 y debajo el 15. He sumado 8 más 5, que son 13. Pongo el 3 y me llevo 1. Luego 1 más 1 más 1 son 3. El resultado es 33».
- **Marco:** «Yo he pensado que 18 es casi 20. Le he quitado 2 al 15 para dárselos al 18. Así tengo 20 y 13. Y 20 más 13 es muy fácil, es 33».

Actuación del docente para construir normas:

- **Validando la explicación (Norma 1):** Al dirigirse a Ana, el docente podría preguntar: «Muy claro tu método, Ana. ¿Puedes explicarnos qué es ese “1” que te llevas? ¿Es un 1 o un 10?». Con esta pregunta, se fomenta una justificación más profunda que la mera descripción del algoritmo.
- **Valorando la diferencia (Norma 2):** Al escuchar a Marco, el docente dice: «¡Qué interesante, Marco! Tu forma de pensar es muy *diferente* a la de Ana. No has usado columnas, has transformado los números. ¿Por qué crees que también funciona?». Así se legitima la diversidad de estrategias.
- **Promoviendo la eficiencia (Norma 3):** El docente se dirige a la clase: «Ambos han llegado a la misma solución, 33. ¿Qué os parece la estrategia de Marco? ¿Creéis que es más rápida para estos números? ¿Funcionaría siempre?». Se inicia una conversación sobre la elegancia y la eficiencia.

Del Currículo al Aula: Del Discurso al Sentido Socioafectivo

El desarrollo de normas sociomatemáticas no es un mero tecnicismo didáctico; es la herramienta principal para materializar el *Sentido Socioafectivo* que prescribe la *ORDEN* de 30 de mayo de 2023. Cuando el currículo nos pide «fomentar el bienestar del alumnado y el desarrollo de habilidades para la gestión emocional y las relaciones sociales, valorando la diversidad y promoviendo la inclusión», lo que nos está pidiendo es que creemos una cultura de aula donde:

- Se valoren las ideas de todos y todas (norma de la estrategia diferente).
- El error no sea una fuente de ansiedad, sino de aprendizaje (norma sobre el error).
- El alumnado gane confianza en su propia capacidad de razonar (norma de la explicación).

Construir estas normas es, por tanto, una acción didáctica que impacta directamente en la autoconfianza, la perseverancia y la actitud positiva del alumnado hacia las matemáticas.

13.6 La Resolución de Problemas y el Currículo Andaluz

Las teorías psicopedagógicas y los modelos didácticos sobre resolución de problemas, como el de Pólya, no son meras recomendaciones académicas, sino que constituyen el fundamento sobre el que se edifica el enfoque competencial de la legislación educativa vigente. Para un futuro docente en nuestra comunidad, es crucial entender que la **ORDEN de 30 de mayo de 2023** no solo permite, sino que *exige* una enseñanza de la aritmética centrada en la resolución de problemas.

Este apartado actúa como un **traductor curricular**: conectaremos la arquitectura teórica de la resolución de problemas con el lenguaje y los objetivos explícitos de la normativa andaluza. Demostraremos que, al enseñar a resolver problemas de forma reflexiva y estructurada, no estamos haciendo algo complementario al currículo, sino que estamos desarrollando directamente el núcleo de las **Competencias Específicas** del área de Matemáticas.

13.6.1 El Vehículo de las Competencias

La resolución de problemas no es un contenido más; es el principal *vehículo* a través del cual el alumnado moviliza saberes, desarrolla estrategias y, en definitiva, construye su competencia matemática. Cada fase del modelo de Pólya y cada heurística que se pone en juego son, en realidad, actuaciones que desarrollan directamente las competencias que el currículo nos demanda. Analicemos las conexiones clave.

Competencia Específica 1 (CE.MAT.1): *Interpretar situaciones de la vida cotidiana, proporcionando una representación matemática de las mismas mediante conceptos, herramientas y estrategias para analizar la información más relevante.*

Esta competencia es, en esencia, la materialización de la primera fase de Pólya: *Comprender el Problema*. Cuando un estudiante lee un enunciado, extrae los datos relevantes, identifica la pregunta y, sobre todo, elige un modelo para representarlo (un dibujo, un esquema, un diagrama de barras, una operación), está interpretando y representando la situación. La capacidad de traducir una historia del lenguaje natural al lenguaje matemático es el primer y más crucial paso para resolver cualquier problema.

Ejemplo: De la Compra al Diagrama

Ante el problema: «*En una cesta hay 8 manzanas rojas y 5 verdes. ¿Cuántas manzanas hay en total?*», un alumno de primer ciclo que dibuja dos conjuntos de círculos (8 de un color y 5 de otro) y los agrupa, o que directamente escribe la

operación $8 + 5$, está demostrando la *CE.MAT.1*. Ha interpretado una situación de combinación (parte-parte-todo) y la ha representado matemáticamente.

Competencia Específica 2 (CE.MAT.2): *Resolver situaciones problematizadas, aplicando diferentes técnicas, estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder, obtener soluciones y asegurar su validez desde un punto de vista formal y en relación con el contexto planteado.*

Esta es la competencia resolutora por excelencia. Se alinea directamente con las fases 2 y 3 de Pólya: *Concebir un Plan y Ejecutarlo*. La clave de esta competencia reside en los plurales: «*diferentes técnicas, estrategias... distintas maneras de proceder*». El currículo nos exige explícitamente que fomentemos la flexibilidad, que el alumnado no aplique una única “receta”, sino que explore un abanico de heurísticas (hacer un dibujo, buscar un patrón, resolver un problema más sencillo...). Además, la última parte, «*asegurar su validez*», nos remite a la cuarta fase de Pólya: *Examinar la Solución*.

Ejemplo: Dos Caminos para la Misma Meta

Problema: «Para comprar un videojuego de 45€, he ahorrado 28€. ¿Cuánto me falta?».

- *Alumno/a A (Estrategia de sustracción):* Aplica un algoritmo de resta: $45 - 28$.
- *Alumno/a B (Estrategia de completar hasta):* Usa una suma inversa y cuenta hacia adelante: «De 28 a 30 van 2. De 30 a 40 van 10. De 40 a 45 van 5. En total, $2 + 10 + 5 = 17$ ».

Ambos estudiantes están desarrollando la *CE.MAT.2* al aplicar diferentes estrategias para llegar a una solución válida. Un docente que valora ambos caminos está cumpliendo con el mandato curricular.

Competencia Específica 3 (CE.MAT.3): *Explorar, formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de tipo matemático en situaciones basadas en la vida cotidiana, de forma guiada, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación para comunicar su validez, adquirir e integrar nuevo conocimiento.*

Esta competencia eleva la resolución de problemas de una mera respuesta a una pregunta a un acto de creación y exploración matemática. No se trata solo de *resolver* lo que se nos plantea, sino de *plantear* nuevas preguntas. Se conecta con la fase de “Mirar hacia atrás” de Pólya, pero la expande hacia la generalización y la conjetura. Es el germen del pensamiento científico.

Ejemplo: Del Caso a la Conjetura

Tras resolver varios problemas de suma de números pares ($4 + 6 = 10$; $8 + 2 = 10$; $12 + 4 = 16$), el docente pregunta: «¿Qué observáis en todos los resultados?». Un alumno formula una conjetura: «Creo que siempre que sumas dos números pares, el resultado es par». El docente continúa: «¡Interesante! ¿Cómo podríamos comprobar si eso es siempre verdad?». El alumnado, al buscar una justificación (ej.

usando policubos para ver que los grupos de dos siempre se pueden emparejar), está desarrollando la *CE.MAT.3*.

Marco Curricular Andaluz (ORDEN 30/05/2023)

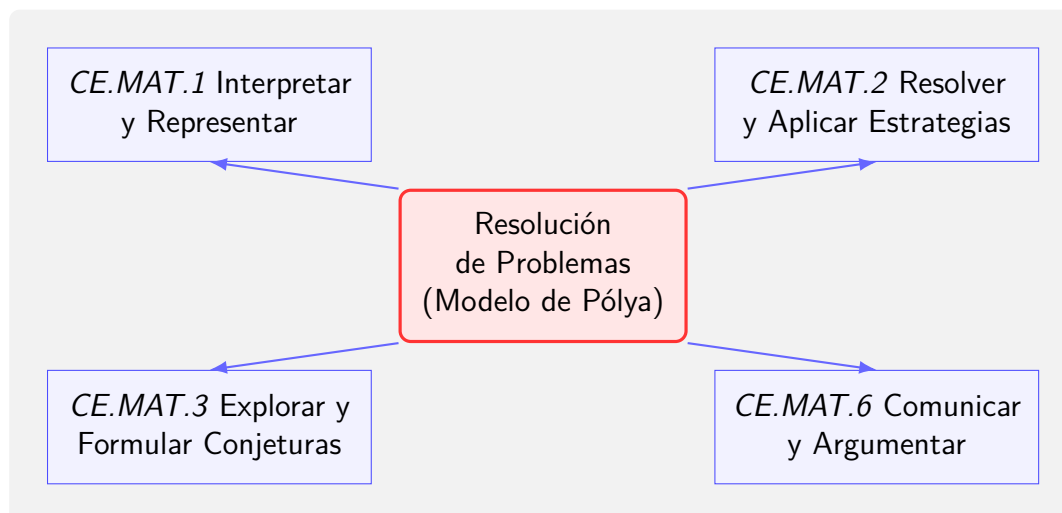


Figura 13.15: Mapa conceptual de la Resolución de Problemas como vehículo para el desarrollo de las Competencias Específicas clave en el marco del currículo andaluz.

Competencia Específica 6 (CE.MAT.6): *Comunicar y representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos y resultados matemáticos, utilizando el lenguaje oral, escrito, gráfico, multimodal y la terminología matemática apropiados, para dar significado y permanencia a las ideas matemáticas.*

Esta competencia subraya que la resolución de problemas no es un acto silencioso e individual. El pensamiento se clarifica y se consolida cuando se comunica. Las fases de “Comprender el problema” (al verbalizarlo) y “Examinar la solución” (al justificarla) están intrínsecamente ligadas a la comunicación. Metodologías como las *Charlas Numéricas* o las puestas en común son el escenario donde esta competencia se desarrolla, transformando una colección de resolutores individuales en una comunidad de aprendizaje matemático (Yackel & Cobb, 1996).

Ejemplo práctico: Justificando la Estrategia

En la puesta en común del problema de los 45€ y 28€ (página 465), el docente pide a la alumna B que explique su estrategia. Ella dice: «*En vez de quitar, pensé en cuánto me faltaba. Es como subir una escalera desde el 28 hasta el 45. Primero subí 2 escalones para llegar al 30, que es un número redondo. Luego...*». Al verbalizar su proceso usando una analogía (“subir una escalera”), está desarrollando la *CE.MAT.6*, haciendo su pensamiento visible y comprensible para sus compañeros y compañeras.

13.6.2 El Punto de Encuentro de los Sentidos: Un Problema, Múltiples Competencias

Una de las mayores potencias del enfoque competencial, y en particular de la resolución de problemas, es su capacidad para integrar conocimientos. Las matemáticas no son una colección de temas aislados que se aprenden uno tras otro; son una red de ideas interconectadas. La normativa andaluza refleja esta visión a través de los seis sentidos matemáticos, que no deben entenderse como bloques de contenido separados, sino como dimensiones interdependientes del pensamiento matemático.

Un problema bien diseñado y rico en contexto no activa un único saber, sino que actúa como un nexo, un punto de encuentro donde los diferentes sentidos se movilizan y colaboran para dar lugar a una solución significativa. Lejos de ser una suma de tareas, la resolución de un problema se convierte en una auténtica experiencia de pensamiento matemático integrado.

Para ilustrar esta idea fundamental, recuperemos la situación de aprendizaje que se esbozó en el Capítulo 2 (página 50), la cual servirá como nuestro caso de estudio.

Ejemplo: “Planificamos una excursión al parque natural”

Una clase de 24 alumnos y alumnas de 3º de Primaria quiere organizar una excursión de un día a un parque natural cercano. Para ello, deben elaborar un plan completo que incluya un presupuesto, un horario y un itinerario dentro del parque, asegurándose de que el coste total no exceda la ayuda de 350 € que ofrece el colegio.

Esta tarea, aparentemente sencilla, se convierte en un potente catalizador para el desarrollo competencial, ya que exige al alumnado navegar por los distintos sentidos matemáticos de una forma funcional y conectada, como se ilustra en la Figura 13.16.

Analicemos cómo se moviliza cada sentido en esta tarea:

- **Sentido Numérico:** Es el más evidente. Se activa al calcular el coste total de las entradas (multiplicación: $24 \times \text{precio por alumno}$), el coste total del autobús, y sumar todos los gastos para obtener el presupuesto final. La tarea culmina con una comparación: ¿es el coste total mayor o menor que la ayuda de 350 €? Además, la necesidad de dar una respuesta rápida y razonada fomenta el uso de la *estimación* como herramienta de control antes de realizar el cálculo exacto.
- **Sentido de la Medida:** El problema está impregnado de magnitudes. El alumnado debe trabajar con el *dinero* (euros y céntimos) y con el *tiempo*. Necesitarán calcular la duración del viaje, establecer un horario para las actividades dentro del parque (inicio, fin, duración) y asegurarse de que el tiempo total se ajusta a la jornada escolar.
- **Sentido Espacial:** Se activa al planificar el itinerario dentro del parque. El alumnado deberá interpretar un *mapa* (una representación bidimensional del espacio), identificar puntos de interés (merendero, mirador, centro de visitantes), y trazar una *ruta* que sea lógica y factible en el tiempo disponible.
- **Sentido Algebraico:** Aunque de forma incipiente, se fomenta el *pensamiento relacional*. Los alumnos y alumnas pueden descubrir la relación funcional entre

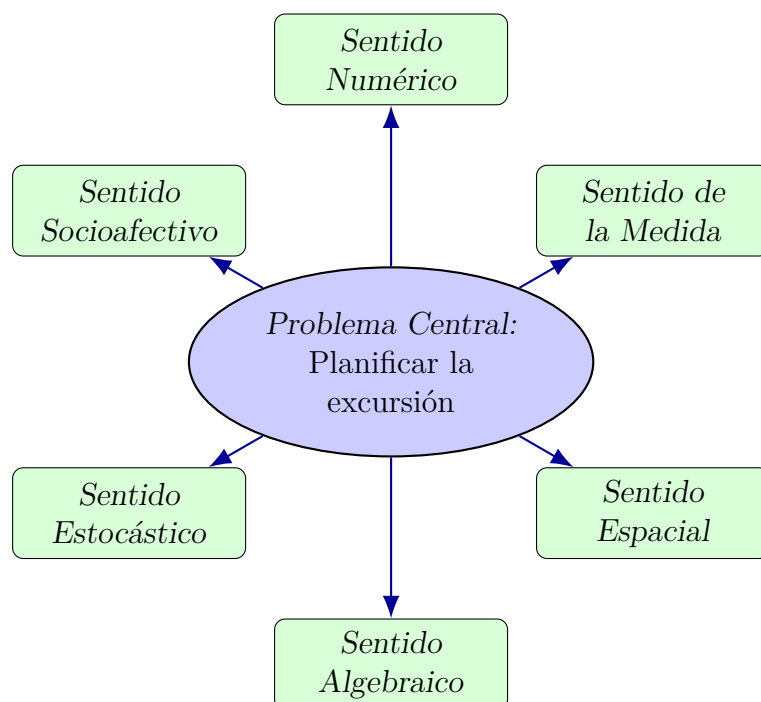


Figura 13.16: Un problema rico como nexo para la integración de los seis sentidos matemáticos.

el número de participantes y el coste total de las entradas. Se pueden plantear preguntas como: «¿Y si en lugar de 24, fuéramos 25? ¿Cómo cambiaría el coste? ¿Y si viniera otra clase?». Identificar este patrón de covariación es la semilla del pensamiento algebraico.

- *Sentido Estocástico*: La tarea puede enriquecerse fácilmente para incluir este sentido. Antes de decidir el itinerario, se puede realizar una *encuesta* en clase sobre las actividades preferidas por el alumnado (senderismo, taller de huellas, visita al reptilario). Deberán recoger los datos, organizarlos en una *tabla de frecuencias* y, quizás, representarlos en un sencillo *gráfico de barras*. La decisión final sobre el itinerario se tomará interpretando esos datos.
- *Sentido Socioafectivo*: Es transversal y fundamental en todo el proceso. La tarea se plantea para ser resuelta en *equipos cooperativos*, lo que exige dialogar, negociar, respetar las opiniones de los demás y gestionar posibles desacuerdos. El alumnado debe tomar decisiones colectivas, fomentando la *autoconfianza* y la *perseverancia* ante un problema complejo y abierto. El error (por ejemplo, un cálculo inicial incorrecto) no es un fallo, sino una parte del proceso que obliga al equipo a revisar y mejorar su plan.

Como demuestra este análisis, una situación de aprendizaje bien contextualizada y significativa, como la planificación de una excursión, trasciende la mera práctica de algoritmos. Obliga al alumnado a *pensar matemáticamente* en un sentido holístico, integrando números, medidas, espacio, relaciones y datos en un proyecto con un propósito claro y motivador. Esta es la esencia de una enseñanza verdaderamente competencial, tal como la concibe el currículo andaluz: utilizar la aritmética no como un

fin en sí mismo, sino como una poderosa lente para interpretar, organizar y actuar sobre el mundo.

13.7 Conclusión del Capítulo: Formar Pensadores, no solo Calculistas

En este capítulo hemos emprendido un viaje al núcleo de la actividad matemática, despojando a la aritmética de su vestidura meramente algorítmica para revelarla como una disciplina eminentemente creativa y funcional: la ciencia de la resolución de problemas. La conclusión fundamental de este recorrido es que la resolución de problemas no es un tema más a añadir al final de una unidad didáctica, sino el *ecosistema* en el que todo el aprendizaje aritmético debe nacer, crecer y encontrar su propósito.

Hemos articulado este viaje en torno a varios pilares interconectados. En primer lugar, la distinción crucial entre *ejercicio* y *problema*, que nos obliga como docentes a diseñar tareas que exijan pensamiento genuino. En segundo lugar, el modelo de Pólya (1945/1989) se ha revelado como un mapa flexible para la exploración, una guía para el pensamiento metacognitivo. Las *heurísticas*, sistematizadas por autores como Schoenfeld (1985), son la caja de herramientas que el alumnado necesita para construir sus propios caminos en esa exploración.

Quizás la transformación más profunda que este enfoque demanda es la de nuestro propio rol docente. Hemos transitado desde la figura del *instructor* que transmite procedimientos hacia la del *facilitador* que guía, el *arquitecto* que diseña experiencias y el *orquestador* que gestiona el discurso matemático en el aula. En esta nueva visión, la verbalización y la discusión de estrategias se convierten en el crisol donde el conocimiento se forja y se comparte, y donde el error se transforma en oportunidad (Yackel & Cobb, 1996).

En definitiva, concebir la resolución de problemas como el corazón de la enseñanza de la aritmética implica un cambio de paradigma: pasamos de formar alumnado que sabe ejecutar cálculos a cultivar individuos que saben *pensar matemáticamente*. Les preparamos no solo para superar los desafíos académicos, sino para enfrentarse con confianza, creatividad y sentido crítico a los problemas cuantitativos del mañana. Nuestra meta final no es que el alumnado sepa la respuesta, sino que sepa qué hacer cuando no la sabe. Esa es la esencia de formar pensadores, no solo calculistas.

Pero, si el proceso de pensamiento es más importante que el resultado final, ¿cómo podemos valorarlo? La evaluación tradicional, centrada en la corrección, se revela insuficiente. El próximo capítulo nos proporcionará una nueva mirada y un conjunto de herramientas para la *Evaluación para el Aprendizaje*, transformándola de un juicio final a la brújula que guía nuestra enseñanza.

13.8 Para la Reflexión y el Portfolio Docente

1. Análisis de Tareas: ¿Ejercicio o Problema?

Consigna: Selecciona una doble página de un libro de texto de 2º o 3er Ciclo de Primaria dedicada a la resolución de problemas. Identifica la tarea principal y realiza un análisis crítico:

- ¿Es un *ejercicio* (aplicación rutinaria) o un verdadero *problema* (requiere

exploración)? Justifica tu respuesta.

- ¿Qué heurísticas o estrategias generales podría promover la tarea en el alumnado?
- ¿Cómo modificarías la tarea para convertirla en un problema más rico y abierto? Propón un enunciado alternativo.

2. *El Arte del Andamiaje: Diseñando Preguntas Guía.*

Consigna: Imagina que un alumno, ante el problema «Ana tiene 15 cromos. Tiene 7 cromos más que Leo. ¿Cuántos cromos tienen entre los dos?», responde erróneamente «22». Tu tarea es diseñar una intervención didáctica basada en el andamiaje. Escribe el guion de un diálogo breve que incluya preguntas clave para ayudarle a:

- a) Re-comprender el enunciado.
- b) Representar la situación de forma visual (ej. con un modelo de barras).
- c) Descubrir por sí mismo la operación correcta.

3. *Evaluar el Proceso: Creación de una Rúbrica Analítica.*

Consigna: Diseña una rúbrica sencilla para evaluar la competencia de resolución de problemas en el 3er Ciclo. La rúbrica debe valorar las diferentes fases del proceso de Pólya.

- Crea una tabla con 3 niveles de desempeño (ej., Iniciado, Conseguido, Experto) y 4 criterios de evaluación basados en el capítulo (Comprensión, Estrategia, Ejecución, Comunicación/Reflexión).
- Rellena las celdas con descriptores breves y claros para cada nivel y criterio.

14 Evaluación para el Aprendizaje en Aritmética

IMAGINEMOS una clase de 4º de Primaria. Se plantea el siguiente problema: «*Para una excursión, necesitamos 125 bocadillos. Si en cada bolsa caben 10 bocadillos, ¿cuántas bolsas necesitaremos?*». Tras unos minutos, dos estudiantes levantan la mano.

Mini-Caso de Aula: Interpretando el Resto, Cálculo vs. Contexto

Estudiante A realiza rápidamente el algoritmo de la división en su cuaderno: $125 \div 10$. Obtiene de cociente 12 y de resto 5. Escribe con seguridad: «*Necesitamos 12 bolsas y sobran 5 bocadillos*».

Estudiante B tarda un poco más. Dibuja círculos o usa material. Murmura: «... con 12 bolsas metemos 120 bocadillos, pero entonces se quedan 5 sin bolsa... ¡Ah! Esos 5 también hay que llevarlos, así que hace falta otra bolsa más». Finalmente, responde: «*Necesitamos 13 bolsas, aunque la última no irá llena*».

Este escenario, tan común en nuestras aulas, nos enfrenta a una de las preguntas más profundas de nuestra labor docente: ¿Quién ha comprendido mejor el problema? ¿El estudiante que ejecutó un cálculo perfecto o el que interpretó el contexto para dar una solución funcional? ¿Merecen la misma calificación? Y, más importante aún, ¿cómo podemos, como docentes, diseñar una evaluación que no solo mida el resultado, sino que valore y promueva el razonamiento que se esconde detrás?

14.1 Introducción: La Evaluación como Brújula del Aprendizaje

La respuesta a estas preguntas marca un cambio de paradigma fundamental en la concepción de la evaluación. Tradicionalmente, la evaluación ha sido vista como un acto final, un juicio sobre el aprendizaje del alumnado. Sin embargo, la didáctica contemporánea, en plena sintonía con marcos teóricos como los de Gipps (1994), nos invita a verla de una forma radicalmente distinta: no como un punto final, sino como el punto de partida para mejorar la enseñanza y el aprendizaje.

Clave Didáctica: Las Dos Caras de la Evaluación

Es importante diferenciar entre dos conceptos que, aunque relacionados, tienen propósitos fundamentalmente distintos:

- *Evaluación del Aprendizaje (Assessment OF Learning)*: Es la visión tradicional. Su función es *sumativa y certificadora*. Ocurre al final de una unidad o período para medir cuánto ha aprendido el alumnado y asignarle una calificación. Es la evaluación como *juicio*.
- *Evaluación para el Aprendizaje (Assessment FOR Learning)*: Es el enfoque que adoptaremos en este capítulo. Su función es *formativa y diagnóstica*. Ocurre *durante* el proceso de aprendizaje para recoger información que permita, tanto al docente como al alumnado, comprender las dificultades

y ajustar el camino. Es la evaluación como *brújula*.

Este cambio de enfoque encuentra su metáfora más potente en el influyente trabajo de Black y Wiliam (2010), quienes describieron el aprendizaje del aula como una «caja negra». Podemos ver lo que entra (nuestra enseñanza) y lo que sale (los resultados de los exámenes), pero el proceso mental del estudiante permanece, en gran medida, oculto. La evaluación para el aprendizaje es la herramienta que nos permite abrir esa caja negra, no para juzgar su contenido, sino para comprenderlo y enriquecerlo.

En este capítulo, nos equiparemos con las herramientas conceptuales y prácticas para transformar la evaluación de un mero acto de calificación en un diálogo continuo sobre el aprendizaje. Para ello, nuestro recorrido seguirá una hoja de ruta clara y fundamentada:

1. Analizaremos qué nos prescribe el *marco normativo actual* (LOMLOE y su concreción en Andalucía) sobre el carácter y la función de la evaluación.
2. Desgranaremos los *principios pedagógicos* que sustentan una evaluación para el aprendizaje eficaz.
3. Exploraremos un abanico de *instrumentos y estrategias* que van más allá del examen tradicional, como las rúbricas, la observación sistemática o el portfolio.
4. Profundizaremos en el *análisis de errores* no como fallos a sancionar, sino como valiosas oportunidades para comprender y guiar.
5. Conectaremos todo lo anterior con el gran objetivo: ¿cómo se evalúa una *competencia matemática* en su totalidad?

Nuestra meta es ambiciosa: convertir la evaluación en la herramienta más poderosa que tenemos para fomentar un pensamiento aritmético profundo, flexible y, sobre todo, lleno de sentido.

14.2 La Evaluación en el Marco Normativo (LOMLOE - Andalucía)

La transición desde una evaluación tradicional centrada en la calificación hacia una *evaluación para el aprendizaje* no es una mera preferencia pedagógica o una moda pasajera. En el contexto de nuestra labor como futuros docentes en la Comunidad Autónoma de Andalucía, este enfoque es un *mandato curricular explícito*. Nuestra práctica evaluadora no parte de cero, sino que está guiada y fundamentada por un marco legal que, afortunadamente, se alinea con las prácticas didácticas más sólidas y efectivas que la investigación ha demostrado.

Comprender en profundidad lo que la normativa nos pide no es un ejercicio burocrático, sino un acto de profesionalización. Nos proporciona el respaldo legal para implementar una evaluación justa y potente, nos ofrece un lenguaje común para dialogar con nuestros compañeros y compañeras, y nos da la seguridad para defender una práctica que prioriza la comprensión y el progreso del alumnado por encima de la simple clasificación.

14.2.1 El Mandato Curricular: ¿Qué nos exige la ley?

El documento clave que articula la evaluación en la Educación Primaria en nuestra comunidad es la *ORDEN de 30 de mayo de 2023*. Esta orden no solo nos dice *qué* evaluar, sino, fundamentalmente, *cómo* y *para qué*. Analicemos sus dos pilares fundamentales.

14.2.2 El Carácter de la Evaluación

El artículo 21 de la citada Orden define el carácter de la evaluación, utilizando una serie de adjetivos que son, en sí mismos, una declaración de principios pedagógicos.

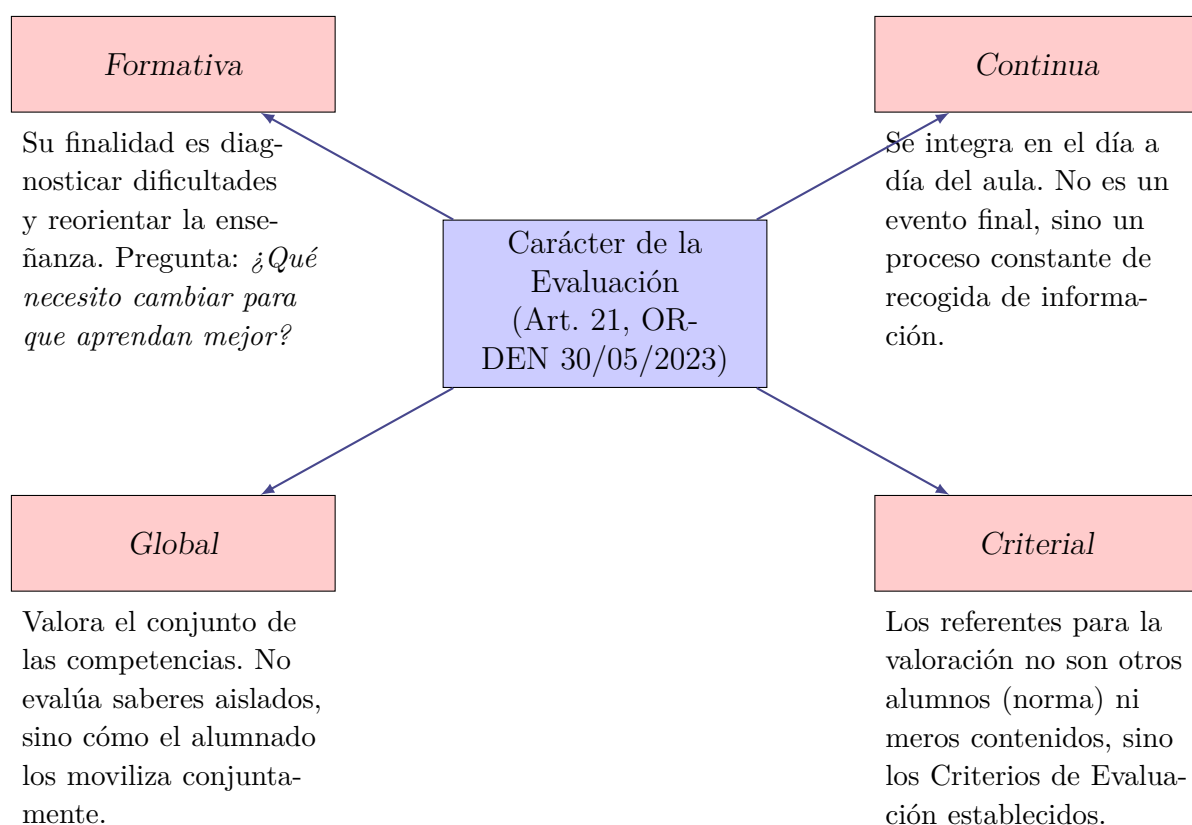


Figura 14.1: Dimensiones clave del carácter de la evaluación según la normativa andaluza.

14.2.3 Los Referentes de la Evaluación: Un Cambio de Foco Crucial

Tradicionalmente, la evaluación se centraba en comprobar si el alumnado había memorizado una lista de contenidos (los saberes básicos). La normativa actual invierte esta lógica, estableciendo una jerarquía clara donde la *competencia* es el objetivo final. Esto transforma radicalmente nuestra práctica.

Esta estructura nos dice que no evaluamos si un alumno “sabe” la tabla del 7 (saber básico), sino si es capaz de *utilizar* esa tabla para *resolver un problema de grupos iguales, explicando su estrategia* (criterio de evaluación), contribuyendo así a su competencia para *resolver situaciones problematizadas* (competencia específica).

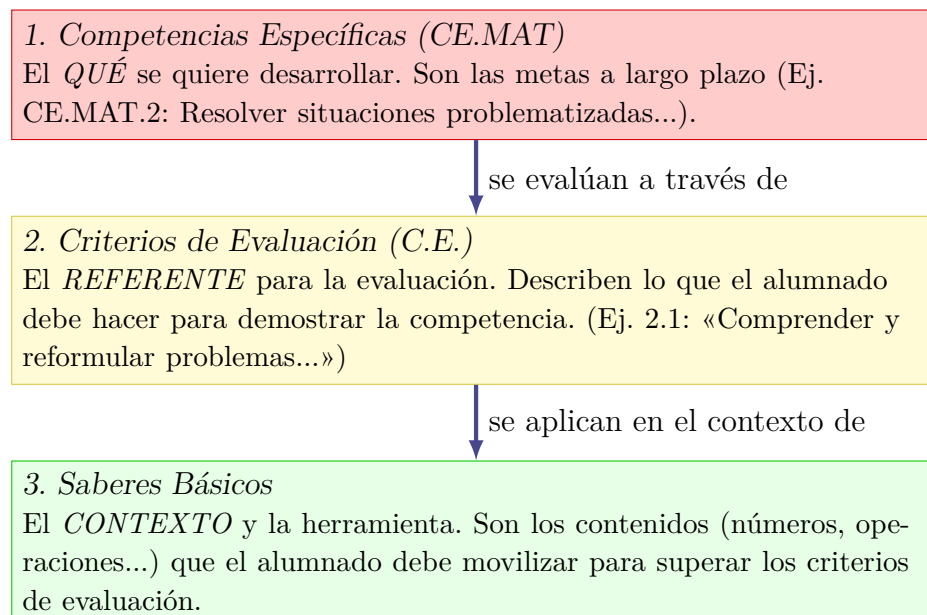


Figura 14.2: La jerarquía de los referentes de evaluación en el currículo andaluz.

Implicación didáctica: Del Marco Normativo a la Brújula Docente

Comprender este marco normativo es liberador. No nos limita, sino que nos *autoriza* a ir más allá del examen tradicional. Nos da el respaldo legal para dedicar tiempo a la observación en el aula, al diálogo con el alumnado, al análisis de sus producciones y a la utilización de rúbricas. El currículo no es un listado de contenidos que cubrir, sino un mapa de competencias que desarrollar, y la evaluación criterial y formativa es la brújula que nos guía en ese viaje, indicándonos en cada momento si vamos en la dirección correcta y qué ajustes necesitamos hacer en nuestra ruta.

14.3 Principios de la Evaluación para el Aprendizaje

La evaluación para el aprendizaje, a diferencia de la evaluación meramente calificadora, no es un evento aislado, sino una filosofía que impregna toda la práctica docente. Se sustenta en una serie de principios clave que transforman la evaluación de un juicio final en un motor para la mejora continua. El Assessment Reform Group (2002) sintetizó estos fundamentos en cinco principios interconectados que, aplicados al aula de aritmética, nos proporcionan un marco de actuación robusto y eficaz.

1. La provisión de *feedback* efectivo al alumnado.

El *feedback* es la información que se ofrece a un estudiante sobre su desempeño con el objetivo de guiar su aprendizaje futuro. Para ser efectivo, debe ser descriptivo en lugar de evaluativo, centrarse en la tarea y el proceso, no en la persona, y ser oportuno.

Ejemplo: Feedback evaluativo vs. feedback descriptivo

Un alumno resuelve 4×13 como $40 + 3 = 43$.

- *Feedback ineficaz (evaluativo)*: «No, está mal. La respuesta es 52». Cierra el aprendizaje y puede afectar negativamente a la autoestima.
- *Feedback efectivo (descriptivo)*: «Veo que has descompuesto el 13 en 10 y 3, ¡esa es una idea excelente! Has multiplicado bien el 10 por 4. ¿Qué crees que ha pasado con el 3? ¿También deberíamos multiplicarlo por 4?». Valida una parte del proceso, identifica el punto de error y guía al alumno para que corrija su propio razonamiento.

2. *La participación activa del alumnado en su propio aprendizaje.*

El aprendizaje es más profundo y duradero cuando el alumnado es un agente activo en el proceso, en lugar de un receptor pasivo. En la evaluación, esto significa involucrarlos en la comprensión de los objetivos de aprendizaje y los criterios de éxito. Compartir y discutir una rúbrica antes de una tarea o crear una lista de cotejo de forma conjunta son prácticas que fomentan esta participación.

3. *El ajuste de la enseñanza en función de los resultados de la evaluación.*

La evaluación formativa no solo sirve para informar al alumno, sino, y fundamentalmente, para informar al docente. La información recogida a través de preguntas, observaciones o tareas cortas debe ser utilizada para tomar decisiones pedagógicas: re enseñar un concepto, proponer un nuevo modelo, o formar grupos de trabajo flexibles. Es el mecanismo que hace a la enseñanza sensible y adaptativa.

Ejemplo: La Evaluación Formativa como Reorientación de la Práctica

Al final de una clase sobre la resta con llevadas, el docente entrega un *post-it* a cada alumno y les pide que resuelvan $42 - 17$. Al recogerlos, observa que un tercio de la clase ha respondido 25 (restando la cifra menor de la mayor).

- *Decisión didáctica*: En lugar de seguir con el siguiente tema, el docente decide empezar la siguiente sesión con una actividad manipulativa (bloques multibase) que genere un conflicto cognitivo sobre la necesidad de canjear una decena. La evaluación ha reorientado la planificación.

4. *El reconocimiento de la profunda influencia de la evaluación en la motivación y la autoestima del alumnado.*

La forma en que evaluamos envía un poderoso mensaje sobre qué es lo que valoramos. Una evaluación centrada únicamente en la rapidez y la corrección fomenta una orientación al ego y puede generar ansiedad matemática. En cambio, una evaluación que valora las estrategias, el esfuerzo, la argumentación y la mejora promueve una *mentalidad de crecimiento* (Dweck, 2016) y es un pilar

fundamental del *Sentido Socioafectivo* del currículo andaluz.

5. *La necesidad de que el alumnado sea capaz de autoevaluarse y comprenda cómo mejorar.*

El objetivo último del aprendizaje es que el alumnado se convierta en un aprendiz autónomo. Para ello, debe desarrollar la capacidad de monitorear su propio trabajo, identificar fortalezas y debilidades, y saber qué hacer para avanzar. La autoevaluación y la coevaluación (evaluación entre pares) guiadas son herramientas clave para este fin.

Ejemplo: Una herramienta para la autoevaluación

Tras una secuencia sobre los diferentes significados de la división (reparto y agrupamiento), el docente pide al alumnado que, en su diario, dibujen un semáforo y coloreen la luz que mejor represente su nivel de confianza actual.

- *Rojo*: «Todavía no lo entiendo bien, me confundo.»
- *Ámbar*: «Creo que lo entiendo, pero necesito más práctica.»
- *Verde*: «Lo entiendo y podría explicárselo a un compañero.»

Esta simple técnica de autoevaluación proporciona información valiosa al docente y fomenta la metacognición en el alumnado.

14.4 Instrumentos y Estrategias: La Caja de Herramientas del Docente Detective

Para recoger información variada y rica sobre el aprendizaje aritmético del alumnado, el personal docente debe emplear una diversidad de instrumentos y estrategias. Un único examen al final de la unidad puede decirnos si un estudiante llega a la respuesta correcta, pero nos dice muy poco sobre *cómo* piensa, qué estrategias domina, qué concepciones erróneas persisten o qué conexiones es capaz de establecer. La evaluación competencial exige una mirada más amplia y continua.

14.4.1 Evaluación Formativa Continua: Mirando Dentro de la Caja Negra

El propósito de la evaluación formativa es monitorear el progreso del alumnado y proporcionar retroalimentación *durante* el proceso de aprendizaje. No busca calificar, sino comprender para poder actuar. Es la herramienta que nos permite abrir lo que Black y Wiliam (2010) denominaron la «caja negra» del aprendizaje: la mente del estudiante. A continuación, se detallan los instrumentos más potentes para esta labor.

14.4.1.1 Observación Sistemática y Listas de Cotejo

La observación es la herramienta más directa y natural en el aula, pero para que sea una técnica de evaluación eficaz, debe ser *sistemática e intencionada*. Lejos de ser una mirada casual, implica observar al alumnado mientras trabaja (individualmente o en grupo) con un propósito claro: recoger evidencias sobre aspectos específicos de su proceso de resolución.

Las *listas de cotejo* (o *checklists*) son el instrumento ideal para estructurar es-

ta observación. Permiten al docente centrar su atención en los indicadores clave del pensamiento matemático, en lugar de solo en el resultado.

Tabla 14.1: Ejemplo de Lista de Cotejo para la observación del proceso de resolución de problemas.

Alumno/a	Comprensión del Problema	Elección y Uso de Estrategias	Perseverancia	Comunicación y Justificación
Elena R.	Reformula el problema con sus propias palabras. Identifica todos los datos.	Dibuja un esquema claro. La estrategia es pertinente.	Se bloquea al encontrar un cálculo difícil, pide ayuda.	Explica sus pasos de forma secuencial.
Marco G.	Se lanza a operar sin leer con detenimiento.	Usa una palabra clave («más») y elige una operación incorrecta.	Abandona la tarea al ver que el resultado no es lógico.	«He sumado porque ponía más».
Sofía M.	...	...	...	...

Implicación didáctica: Uso del Diario para una Evaluación Formativa

El uso regular de listas de cotejo como la de la Tabla 14.1 permite al docente acumular información valiosa a lo largo del tiempo. No es necesario evaluar a todo el alumnado en una sola sesión. Se puede enfocar la observación en un pequeño grupo cada día. Estos registros son fundamentales para ajustar la enseñanza, crear grupos de trabajo flexibles y proporcionar una retroalimentación específica y constructiva al estudiante.

14.4.1.2 El Diálogo y la Entrevista Clínica

El arte de la pregunta es, quizás, la herramienta diagnóstica más poderosa. Inspirada en el *método clínico de Piaget*, la entrevista o el diálogo en el aula busca revelar las estructuras de pensamiento del niño o la niña. Las preguntas no buscan una respuesta correcta, sino comprender el razonamiento subyacente.

Mini-Caso de Aula: Del Error al Diagnóstico, El Diálogo Clínico

Situación: Un alumno de 2º de Primaria resuelve la resta $52 - 28$ y escribe 36.

Intervención tradicional (centrada en la respuesta): «No, está mal. La respuesta es 24.»

Intervención diagnóstica (centrada en el proceso):

- *Docente:* «Interesante. ¿Puedes explicarme cómo has pensado para llegar al 36?»
- *Alumno:* «Pues de 2 a 8 no puedo, así que hago 8 menos 2, que son 6. Y

5 menos 2 son 3.»

- *Hipótesis diagnóstica*: El alumno no comprende la cantidad global, opera con las cifras de forma aislada y aplica una regla errónea pero con lógica interna (“restar siempre el menor del mayor”). No ha construido el concepto de canje o reagrupación.
- *Siguiente paso (guiado por la hipótesis)*: «¡Gracias por explicarlo! Ahora vamos a intentarlo con los bloques multibase. Coge 52. ¿Puedes quitarle 28?» (Se crea un conflicto cognitivo al no poder quitar 8 unidades de 2).

14.4.1.3 Rúbricas: Más Allá del «Bien» o «Mal»

Una rúbrica es una herramienta de evaluación que hace explícitos los criterios y los niveles de calidad de una tarea. A diferencia de una lista de cotejo (que registra la presencia o ausencia de una conducta), la rúbrica describe la *calidad* de la ejecución en un continuo. Es, posiblemente, la herramienta más potente para una evaluación competencial (Andrade, 2000).

Su mayor ventaja es la transparencia. Al compartir la rúbrica con el alumnado *antes* de la tarea, les proporcionamos una hoja de ruta clara sobre qué se espera de ellos. Esto les capacita para la autoevaluación y la coevaluación, fomentando su autonomía y su capacidad de reflexión.

14.4.1.4 Portfolio y Diario de Matemáticas: La Historia del Aprendizaje

El *portfolio* es una colección intencionada del trabajo del estudiante que cuenta la historia de su esfuerzo, progreso y logros. En el contexto de la resolución de problemas, no se trata de archivar todas las fichas, sino de seleccionar aquellas producciones que son particularmente significativas. El *diario de matemáticas* es una forma específica de portfolio, centrada en la escritura y la reflexión sobre el propio proceso de aprendizaje.

Estas herramientas son la encarnación de la evaluación como aprendizaje. Su objetivo principal es fomentar la *metacognición*: la capacidad del estudiante de pensar sobre su propio pensamiento.

Implicación didáctica: La Motivación como Sentido Sofioafectivo

El docente puede guiar el uso del diario con preguntas detonadoras como las de la Figura 14.3. Al final de una unidad, se puede pedir al alumnado que seleccione «el problema del que más orgulloso estoy», «el error del que más aprendí» o «la estrategia más ingeniosa que descubrí» para incluir en su portfolio. Esta práctica no solo proporciona evidencias de aprendizaje muy ricas, sino que también cultiva una identidad matemática positiva y resiliente, un objetivo clave del *Sentido Socioafectivo* del currículo andaluz.

14.4.2 El Arte del Feedback Efectivo

La información recogida a través de los diversos instrumentos de evaluación formativa es pedagógicamente inerte si no se transforma en una comunicación que impulse el aprendizaje del alumnado. Esta comunicación es el *feedback* o retroalimentación. Lejos de ser un simple acto de corrección, el feedback efectivo es una de las intervenciones

Tabla 14.2: Ejemplo de Rúbrica para Evaluar la Resolución de un Problema Aritmético (3er Ciclo).

<i>Criterio</i>	<i>En Desarrollo (1)</i>	<i>Conseguido (2)</i>	<i>Experto (3)</i>
1. <i>Comprensión del Problema</i>	Muestra dificultades para identificar los datos relevantes o la pregunta del problema. Su representación es confusa o no se corresponde con el enunciado.	Identifica correctamente los datos y la incógnita. Su representación (dibujo, esquema) es adecuada y refleja la estructura principal del problema.	Reformula el problema con sus propias palabras. Crea una representación visual clara y organizada que le ayuda a planificar la solución.
2. <i>Planificación y Estrategia</i>	Aplica un procedimiento de forma mecánica (ej. basado en palabras clave) que no es adecuado para la estructura del problema.	Elige una estrategia que es matemáticamente correcta y pertinente para el problema, aunque puede no ser la más eficiente.	Analiza diferentes vías de solución y elige una estrategia eficiente. Justifica por qué ha elegido esa estrategia sobre otras.
3. <i>Ejecución y Desarrollo</i>	Comete errores de cálculo significativos que no detecta. El proceso es desorganizado y difícil de seguir.	Lleva a cabo el plan de forma ordenada. Los cálculos son mayoritariamente correctos. Si comete un error, es capaz de detectarlo con ayuda.	Realiza los cálculos con precisión y verifica sus resultados intermedios. Su trabajo es sistemático y fácil de seguir.
4. <i>Comunicación y Reflexión</i>	La solución presentada es solo un número, sin explicación. No es capaz de verbalizar su proceso de pensamiento.	La solución está claramente indicada. Explica los pasos que ha seguido de forma oral o escrita, aunque sin profundizar en las razones.	Justifica por qué su solución es correcta y tiene sentido en el contexto del problema. Es capaz de reflexionar sobre su proceso y lo que ha aprendido.

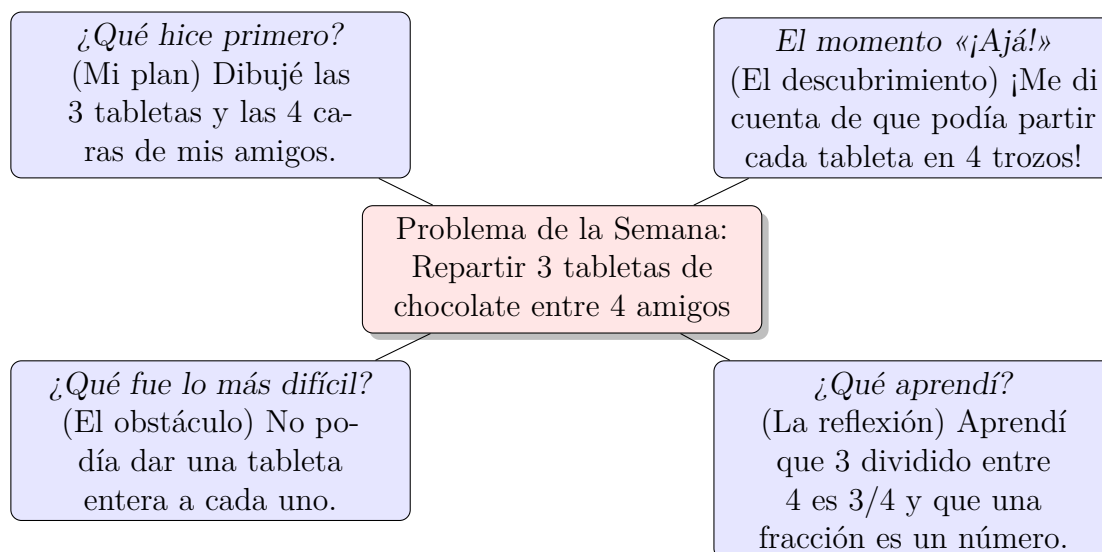


Figura 14.3: Anatomía de una entrada de un Diario de Matemáticas.

pedagógicas más potentes que un docente puede realizar.

El investigador educativo John Hattie, en su monumental obra *Visible Learning*, sintetizó los resultados de miles de estudios para identificar los factores que más influyen en el rendimiento del alumnado. Sus conclusiones son inequívocas: el feedback efectivo se encuentra consistentemente entre las influencias más positivas (Hattie, 2009). Sin embargo, no todo feedback es igualmente eficaz. Un feedback centrado únicamente en la calificación o en juicios de valor puede, de hecho, ser contraproducente y minar la motivación y la autoconfianza del estudiante.

Nuestra labor como docentes es dominar el arte de proporcionar un feedback que no cierre el aprendizaje, sino que lo abra; un feedback que no sea un punto final, sino el comienzo de una nueva reflexión. La siguiente figura ilustra esta distinción fundamental.

Para que el feedback se convierta en una herramienta de aprendizaje, debe poseer las siguientes características, alineadas con el enfoque competencial y el *Sentido Socioafectivo* del currículo andaluz:

- *Es específico y centrado en la tarea, no en la persona.*

En lugar de un genérico «muy bien» o un juicio como «eres muy malo en esto», el feedback debe describir una acción concreta. Por ejemplo, ante un error en la resta $52 - 28$ donde el alumno responde 36 (restando siempre el menor del mayor en cada columna), un feedback ineficaz sería: «Mal, así no se hace». Un feedback efectivo sería: «Has restado muy bien 5 menos 2. Ahora, miremos las unidades. ¿Podemos quitar 8 cubitos si solo tenemos 2? ¿Qué podríamos hacer con una de las barras de decena para ayudarnos?».

- *Orienta hacia el futuro.*

Siguiendo a Hattie, el feedback más potente es el que responde a tres preguntas para el estudiante: ¿A dónde voy? (Feed Up - clarificar el objetivo), ¿Cómo voy? (Feed Back - informar sobre el progreso) y ¿Qué sigue? (Feed Forward - sugerir

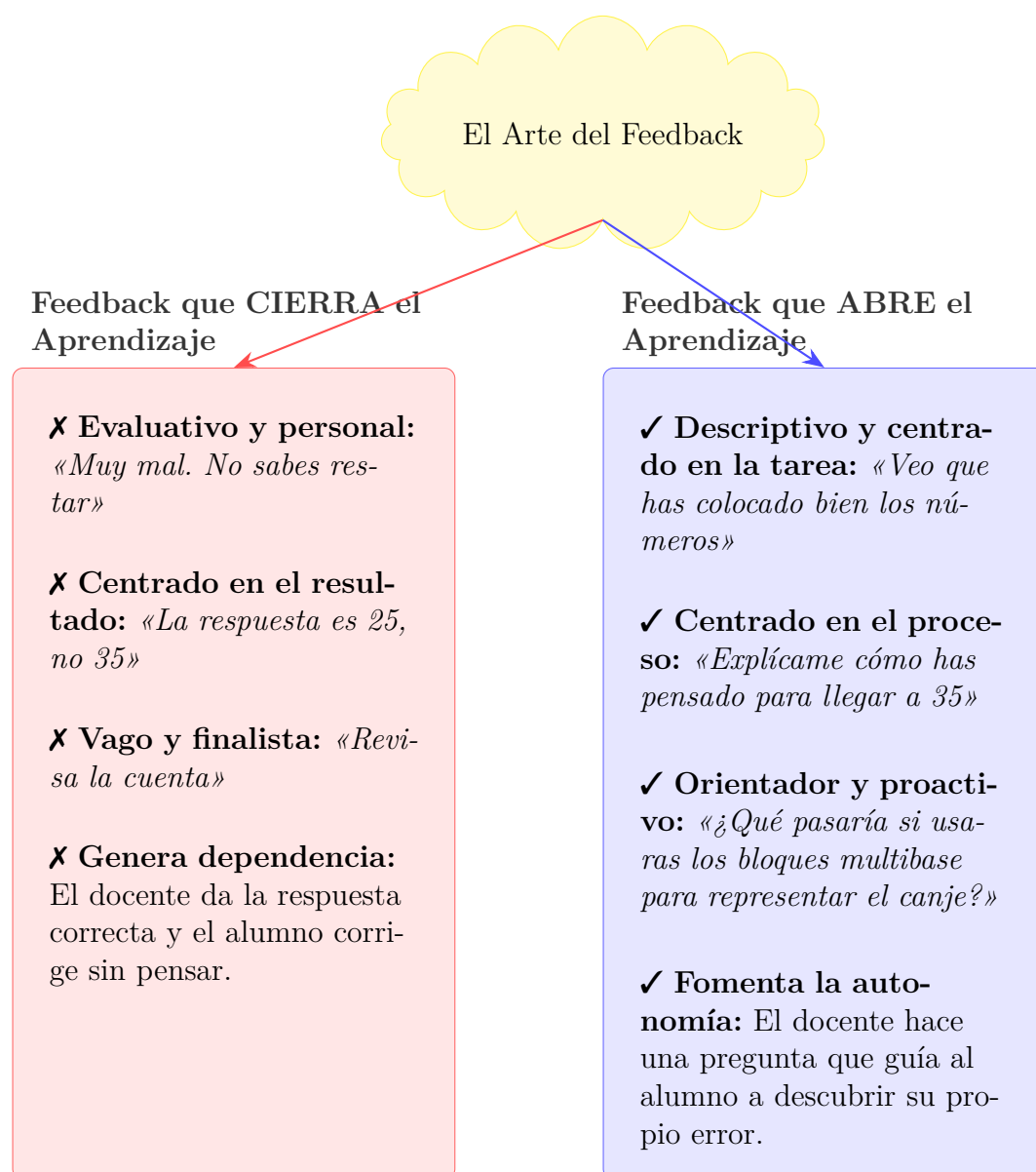


Figura 14.4: Diferencias clave entre el feedback que inhibe el pensamiento (centrado en el juicio y el resultado) y el feedback que lo promueve (centrado en el proceso y la reflexión).

los próximos pasos). Ante un alumno que se bloquea al comparar fracciones, el docente puede decir: «*Nuestro objetivo (Feed Up) es averiguar si $\frac{2}{3}$ es mayor que $\frac{3}{4}$. Veo que has dibujado dos rectángulos (Feed Back), ¡es una gran idea! Ahora, ¿cómo podrías usar el muro de fracciones para encontrar un ‘apellido común’ para ambas? (Feed Forward)*».

- **Fomenta la metacognición.**

A menudo, el mejor feedback no es una afirmación, sino una pregunta. Las preguntas estratégicas devuelven la responsabilidad del pensamiento al alumnado y le invitan a reflexionar sobre su propio proceso. En lugar de decir «te has olvidado de sumar la llevada», podemos preguntar: «*He visto que al juntar 8 y 5 unidades formaste un grupo de 10 y te sobraron 3. ¿Qué representa ese grupo de 10 en nuestro sistema? ¿Dónde lo hemos anotado en tu cuenta?*».

En definitiva, el feedback efectivo es la culminación del ciclo del docente como detective cognitivo. Es el momento en que compartimos los hallazgos de nuestra investigación con el protagonista del aprendizaje, no para darle un veredicto, sino para invitarle a continuar la aventura de construir su propio conocimiento.

14.4.3 Evaluación Sumativa: Certificar y Reorientar

La evaluación sumativa se sitúa, tradicionalmente, al final de un período de aprendizaje —una unidad didáctica, un trimestre o un curso—. Su propósito principal es *certificar* el nivel de logro alcanzado por el alumnado. Sin embargo, en el marco de una evaluación para el aprendizaje, su función no es simplemente poner un punto final; es un *mirador* desde el que obtenemos una panorámica del aprendizaje consolidado para, desde ahí, *reorientar* la planificación futura, tanto para el grupo como para cada estudiante.

Una evaluación sumativa coherente con un enfoque competencial no debe ser una sorpresa ni un mero examen de ejercicios. Debe ser el reflejo natural del trabajo realizado en el aula, evaluando no solo la memorización de procedimientos, sino la capacidad de *movilizar y transferir* conocimientos para resolver problemas complejos y novedosos. Como defienden Wiggins y McTighe (2005), la evaluación sumativa eficaz se caracteriza por diseñar *tareas de desempeño* (performance tasks) que revelan la verdadera comprensión. Estas tareas son problemas ricos y contextualizados que exigen al alumnado aplicar sus saberes de forma integrada, similar a como se usarían en situaciones reales.

Para ello, disponemos de una variedad de instrumentos que van más allá de la prueba escrita tradicional:

- **Pruebas Escritas Bien Diseñadas:** Deben incluir no solo ejercicios algorítmicos, sino problemas contextualizados que requieran interpretación, elección de estrategias y justificación. Es fundamental que evalúen la comprensión conceptual y no solo la corrección del cálculo.
- **Proyectos o Tareas de Desempeño (Performance Tasks):** Son actividades más extensas y abiertas donde el alumnado debe aplicar un abanico de saberes aritméticos para crear un producto o resolver un problema complejo, como planificar un viaje o diseñar un espacio.

- *Presentaciones Orales o Exposiciones*: Permiten evaluar la competencia comunicativa, la claridad del razonamiento y la capacidad de argumentar y defender una solución.
- *Observación de la Resolución de Problemas en Situaciones de Evaluación*: Plantear un problema nuevo y observar, con una rúbrica o lista de cotejo, cómo los estudiantes se enfrentan a él de forma autónoma.

Ejemplo: Tarea de evaluación sumativa competencial

Contexto: Para una clase de 5º de Primaria, al final de una unidad que ha trabajado operaciones con decimales, perímetro y área.

Tarea: «El colegio nos ha cedido un espacio rectangular para construir un nuevo patio de juegos. Tenemos dos condiciones: el perímetro del patio debe ser exactamente de *30 metros* y debemos embaldosarlo completamente. Hemos encontrado dos tipos de baldosas»:

- Baldosas Tipo A: cuadradas, de 0,5 metros de lado. Cuestan 2,25€ cada una.
- Baldosas Tipo B: rectangulares, de 0,4 m x 0,6 m. Vienen en cajas de 10 y cada caja cuesta 20€.

Vuestra tarea, por equipos, es presentar un diseño para el patio. Debéis:

1. Proponer unas dimensiones (largo y ancho) para el patio que cumplan la condición del perímetro.
2. Calcular el área total del patio.
3. Calcular cuántas baldosas del Tipo A necesitaríais y cuál sería su coste total.
4. Calcular cuántas cajas de baldosas del Tipo B necesitaríais y cuál sería su coste.
5. Justificar qué tipo de baldosa elegiríais para el proyecto y por qué, presentando un presupuesto final.

Análisis Didáctico: Esta tarea evalúa mucho más que la ejecución de algoritmos. Permite valorar:

- *Competencia Específica 1*: La capacidad de interpretar la situación, modelizarla (relacionar perímetro y dimensiones, calcular áreas) y representarla.
- *Competencia Específica 2*: La flexibilidad para aplicar diferentes estrategias (cálculo con decimales, proporcionalidad, estimación) y tomar decisiones fundamentadas.
- *Integración de Sentidos*: Moviliza el *Sentido Numérico* (operaciones), el *Sentido de la Medida* (perímetro, área), el *Sentido Espacial* (diseño del rectángulo) y el *Sentido Socioafectivo* (trabajo en equipo y toma de decisiones).

- **Comprensión Profunda:** No hay un único camino correcto. Los equipos pueden proponer diferentes dimensiones (ej. 10m x 5m, 8m x 7m), lo que da lugar a diferentes áreas y costes. La evaluación se centra en la coherencia de su razonamiento y la solidez de su argumentación.

Como se observa en el ejemplo, la evaluación sumativa es el punto de llegada que valida el aprendizaje, pero también el punto de partida que informa la siguiente fase de la enseñanza. Los resultados nos dirán si debemos reforzar el cálculo con decimales, la distinción entre área y perímetro, o las estrategias de resolución de problemas de varias etapas.

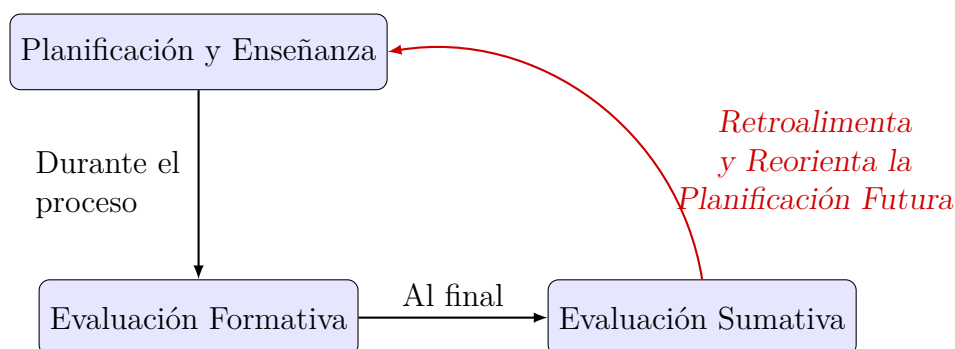


Figura 14.5: El ciclo de la evaluación: La evaluación sumativa no es el final del proceso, sino que retroalimenta la planificación de nuevas experiencias de aprendizaje.

En definitiva, la evaluación sumativa debe ser coherente con la práctica diaria del aula. Si en clase fomentamos la exploración, la diversidad de estrategias y el razonamiento, la evaluación final no puede reducirse a una serie de cálculos mecánicos. Debe ser, en sí misma, una oportunidad más para que el alumnado demuestre su capacidad de *pensar matemáticamente*.

14.5 El Análisis de Errores como Fuente de Información Pedagógica

Los errores que comete el alumnado en el aprendizaje de la aritmética no deben ser vistos simplemente como fracasos, sino como valiosas *ventanas a sus procesos de pensamiento*. Lejos de ser actos aleatorios, los errores suelen ser la consecuencia lógica de una concepción alternativa o de un esquema de conocimiento incompleto. Como propuso la investigadora Raffaella Borasi, nos informan sobre las teorías que el alumnado está construyendo para dar sentido a los números (Borasi, 1987).

Esta perspectiva transforma radicalmente el rol del docente. Ya no somos meros “correctores” de fallos, sino *detectives cognitivos* que, ante un error, inician un ciclo de investigación profesional para promover una comprensión más profunda.

14.5.1 El Obstáculo Epistemológico: La Lógica detrás del Error

Para analizar los errores de forma eficaz, es fundamental comprender el concepto de *obstáculo epistemológico*, acuñado por el filósofo Gaston Bachelard (1938/2000) y adaptado a la didáctica por Guy Brousseau (2007). Como ya hemos establecido, este

concepto es de vital importancia para entender la lógica que se esconde detrás de los errores más persistentes.

Profundizando: El Error como Conocimiento Obstáculo

El error sistemático del alumnado no es un signo de falta de lógica, sino de la aplicación de una *lógica que fue exitosa en el pasado*. La idea de que “un número es más grande cuanto más cifras tiene” funciona perfectamente con los números naturales, pero se convierte en un obstáculo al comparar decimales como 0,4 y 0,12. Nuestra labor no es “borrar” el conocimiento anterior, sino crear un *conflicto cognitivo* (Piaget, 1964/2018) que haga evidente su insuficiencia y promueva su reconstrucción.

14.5.2 El Ciclo de Actuación del Docente como Detective Cognitivo

Ante un error sistemático, la práctica docente más eficaz no se limita a corregir el resultado, sino que adopta el rol de un *detective cognitivo*. Esta perspectiva, inspirada en el trabajo de investigadoras como Raffaella Borasi (1987), transforma el error de un simple fallo en una valiosa pista sobre el razonamiento del alumnado.

En lugar de ser un juez que sanciona, el docente se convierte en un investigador que aplica un ciclo de actuación profesional para comprender y guiar. Este ciclo (ver Figura 14.6) se desarrolla en tres fases fundamentales que transforman el error en el motor del aprendizaje:

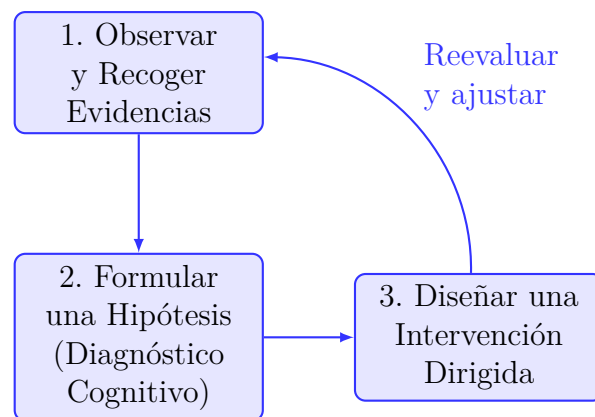


Figura 14.6: El ciclo de actuación del docente como detective cognitivo.

1. *Observar y Recoger Evidencias*: La primera fase es puramente descriptiva. El docente se pregunta: *¿Cuál es el error exacto? ¿Ocurre siempre o solo en ciertos casos? ¿Es un error de cálculo, de procedimiento o de comprensión del problema?* Se recopilan los datos de forma objetiva, sin juzgarlos.
2. *Formular una Hipótesis (Diagnóstico Cognitivo)*: Este es el corazón del análisis. El docente se pregunta: *¿Qué concepción o regla interna del alumnado podría estar generando este error de manera lógica para él o ella?* Esta fase requiere «entrar en la mente» del aprendiz, considerando los posibles obstáculos epistemológicos y las sobregeneralizaciones de conocimientos previos que podrían estar en juego.

3. *Diseñar una Intervención Dirigida*: Basándose en la hipótesis, el docente se pregunta: *¿Qué tarea, pregunta o material puedo presentar para generar un conflicto cognitivo?* La intervención no busca dar la respuesta correcta, sino crear una situación donde la concepción errónea del alumnado se revele como insuficiente, obligándole a reestructurar su pensamiento.

Este ciclo transforma al docente de un «corrector de fallos» a un «reconstructor de significados», que es la esencia de una práctica evaluativa verdaderamente formativa.

Ejemplo: El error “Restar siempre la cifra menor de la mayor”

1. *Evidencia*: Un alumno de 2º de Primaria resuelve la operación $52 - 28$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} 5 \quad 2 \\ - 2 \quad 8 \\ \hline 3 \quad 6 \end{array}$$

2. *Hipótesis (Diagnóstico)*: El alumno no ha comprendido que 52 y 28 son cantidades globales. Para él, el algoritmo es un procedimiento que se realiza en columnas separadas e independientes. Su regla interna, una sobregeneralización lógica, es: «en cada columna, al número de arriba le quito el de abajo; si no se puede, al de abajo le quito el de arriba». No ha interiorizado el concepto de *canje* (la necesidad de “pedir prestado”), que es una consecuencia directa del valor posicional.

3. *Intervención (Crear Conflicto Cognitivo)*: La corrección verbal es ineficaz. La intervención debe ser *enactiva* (basada en la acción) para forzar al alumno a enfrentarse a la imposibilidad de su regla.

- *Docente*: «¡Vamos a hacer esta resta con los bloques! Coge 5 barras de decena y 2 cubitos de unidad para formar el 52. ¡Perfecto! Ahora, de estos bloques, tienes que quitar 28, es decir, 2 barras y 8 cubitos. Inténtalo.»
- *Acción del alumno*: El alumno puede quitar fácilmente las 2 barras de decena, pero se encuentra con un *bloqueo físico*: no puede quitar 8 cubitos porque solo tiene 2.
- *El Conflicto*: Su acción en el mundo real (Figura 14.7) contradice su algoritmo en el papel. El material mismo refuta su hipótesis.
- *La Guía del Docente*: «Vaya, parece que no tenemos suficientes cubitos. ¿Hay alguna forma de conseguir más cubitos usando las barras que tenemos?». Esta pregunta guía al alumno hacia el descubrimiento de la acción de *canjear* una barra de decena por 10 cubitos, que es la base conceptual del algoritmo de la resta.

14.5.3 El Error y el Sentido Socioafectivo

Adoptar este enfoque de “detective cognitivo” tiene un impacto profundo en la dimensión afectiva del aprendizaje, uno de los pilares del currículo andaluz. La *ORDEN de 30 de mayo de 2023* establece que el *Sentido Socioafectivo* busca, entre otros, «desarrollar la resiliencia ante los desafíos y una actitud positiva hacia las matemáticas,

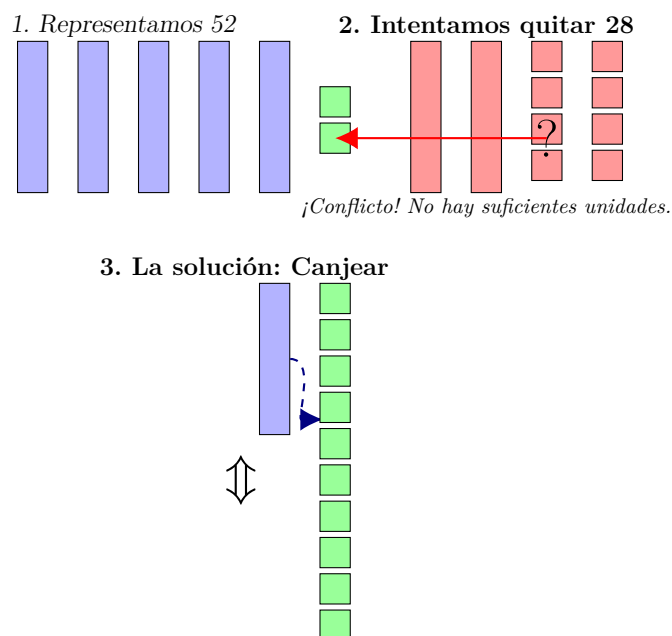


Figura 14.7: Visualización del conflicto cognitivo y la necesidad del canje. La manipulación física hace evidente la insuficiencia de la regla “restar el pequeño del grande”.

gestionando la ansiedad y el error como parte del proceso de aprendizaje».

Cuando un docente responde a un error con una pregunta en lugar de con una corrección, está enviando un mensaje poderoso al alumnado:

- «*Tu razonamiento me importa.*»
- «*No espero que seas perfecto, espero que pienses.*»
- «*Los errores no son un final, son el principio de una conversación interesante.*»

Esta práctica docente construye resiliencia, fomenta una *mentalidad de crecimiento* (Dweck, 2016) y transforma la ansiedad matemática en curiosidad intelectual, desarrollando así de forma directa el Sentido Socioafectivo.

Clave Didáctica: ¿Qué evaluamos cuando evaluamos la resolución de problemas?

Evaluar la resolución de un problema no es una cuestión dicotómica de «bien» o «mal». Implica analizar la actuación del alumnado a lo largo de las diferentes fases del proceso, inspiradas en el modelo de Pólya (1945/1989). Una evaluación integral debe recoger evidencias sobre, al menos, cuatro grandes dimensiones, tal y como se muestra en la Figura 14.8. Esta estructura es la base para construir rúbricas como la de la Tabla 14.2.

14.6 Conclusión: Evaluar es Enseñar

Al finalizar este recorrido por la evaluación en la didáctica de la aritmética, emerge una idea transformadora que redefine nuestra labor docente: evaluar no es lo que hacemos *después* de enseñar, es una parte inseparable del *arte* de enseñar. Hemos

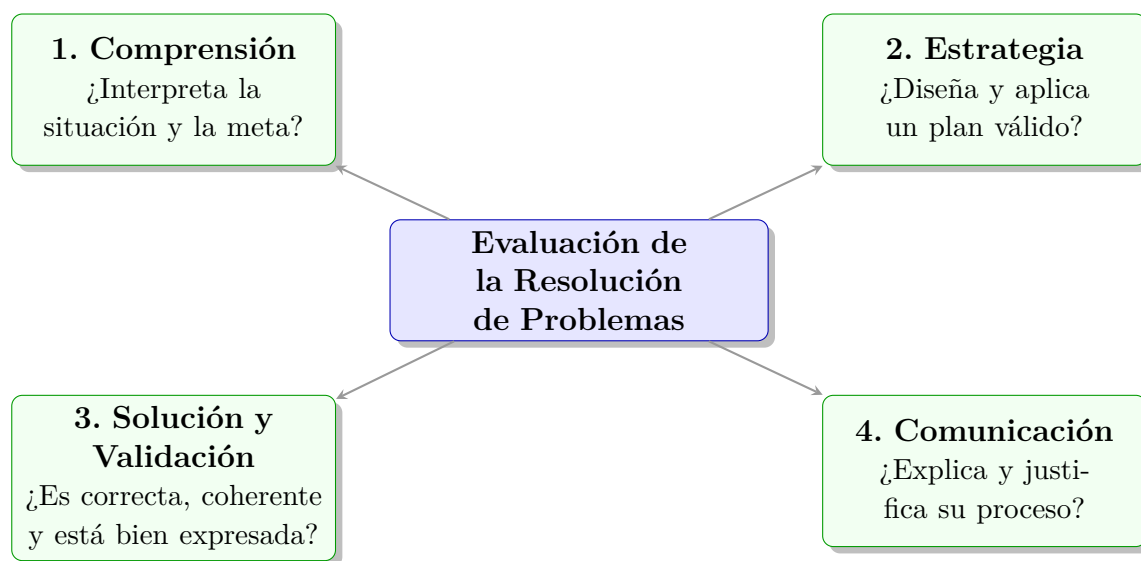


Figura 14.8: Dimensiones clave para una evaluación formativa y competencial de la resolución de problemas.

transitado desde la concepción de la evaluación como un mero espejo retrovisor —útil solo para ver el camino ya recorrido y emitir un juicio final— hacia una visión de la evaluación como una brújula y un mapa: una herramienta de navegación indispensable para guiar el aprendizaje de cada estudiante en tiempo real.

Este cambio de paradigma no es una preferencia pedagógica, sino un mandato explícito de nuestro marco normativo. La *ORDEN de 30 de mayo de 2023* insiste en una evaluación *continua, formativa e integradora*, desplazando el foco de la mera calificación hacia la comprensión profunda del proceso de aprendizaje. Nuestra misión, por tanto, no es ser meros “correctores de ejercicios”, sino convertirnos en *detectives cognitivos*. Como hemos visto, el error no es un fracaso que deba ser sancionado, sino una valiosa ventana al pensamiento del alumnado (Borasi, 1987). Es la manifestación de una lógica interna, a menudo una aplicación coherente de un conocimiento previo que se ha revelado insuficiente ante un nuevo desafío, un perfecto ejemplo de obstáculo epistemológico (Brousseau, 2007). Nuestra labor es diagnosticar la causa raíz de ese error para diseñar una intervención didáctica que no solo corrija, sino que reconstruya el conocimiento sobre bases más sólidas.

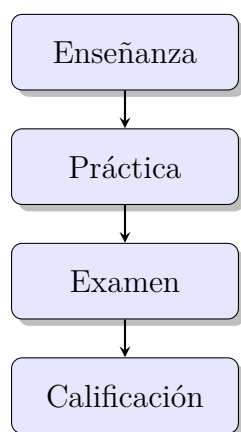
Para ello, hemos explorado una rica caja de herramientas que trasciende el examen tradicional. La observación sistemática, las listas de cotejo, las rúbricas y, sobre todo, el *diálogo socrático* en el aula se revelan como instrumentos de una potencia incalculable. Al preguntar «¿cómo lo has pensado?» en lugar de simplemente señalar un error, transformamos la evaluación de un monólogo a una conversación. Esta conversación, a su vez, es el motor del *feedback efectivo*, aquel que, como demuestran los trabajos de Hattie (Hattie, 2009), se centra en el proceso y en la tarea, capacitando al alumnado para convertirse en un agente activo de su propio aprendizaje.

En definitiva, la evaluación para el aprendizaje nos invita a adoptar un rol profesional mucho más exigente y gratificante. Pasamos de ser jueces a ser guías; de aplicadores de pruebas a diseñadores de experiencias de aprendizaje (figura 14.9). Este

enfoque, que valora el proceso sobre el resultado y la diversidad de estrategias sobre la unicidad del método, es el vehículo perfecto para cultivar el *Sentido Socioafectivo*. Al crear un aula donde el error se percibe como una oportunidad y la reflexión es una rutina, reducimos la ansiedad matemática y fomentamos una mentalidad de crecimiento (Boaler, 2020).

La evaluación, por tanto, cierra el círculo de la práctica docente reflexiva. Es la fuente de información que nutre nuestra planificación, la que nos permite ajustar nuestras estrategias y, en última instancia, la que asegura que nuestra enseñanza responde a las necesidades reales de nuestros estudiantes. Asumir esta visión es comprender que, en la didáctica de la aritmética, la pregunta más importante no es «¿cuánto ha aprendido el alumno?», sino «¿qué puedo hacer yo para ayudarlo a aprender mejor?». Y en esa pregunta reside la esencia misma de nuestra profesión.

Paradigma 1: Evaluación DEL Aprendizaje (Lineal)



Paradigma 2: Evaluación PARA el Aprendizaje (Cíclica)

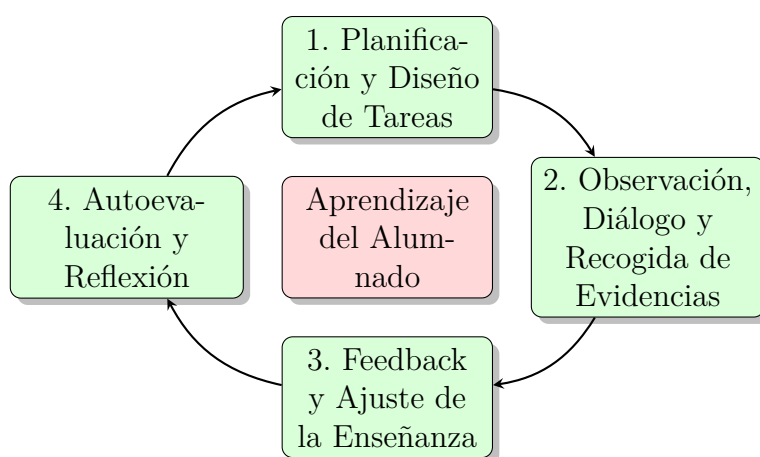


Figura 14.9: Del modelo lineal de la evaluación como juicio final, al modelo cíclico de la evaluación como motor continuo del aprendizaje.

Hemos reunido todas las piezas del rompecabezas: conocemos al aprendiz, dominamos el contenido, sabemos cómo situar el problema en el centro y poseemos las herramientas para evaluar el proceso. Ha llegado el momento del acto supremo de la profesión docente: la creación. En el último capítulo de este manual, aprenderemos a orquestrar todos estos elementos en el arte de la *Planificación Didáctica*, diseñando Situaciones de Aprendizaje que den vida a todo lo que hemos aprendido.

14.7 Para la Reflexión y el Portfolio Docente

1. Análisis Crítico de un Recurso Didáctico.

Consigna: Selecciona una unidad didáctica de un libro de texto de 2º de Primaria dedicada a la resta con llevadas y analiza críticamente cómo se aborda la evaluación.

- *Análisis del Enfoque Evaluador:* ¿Qué tipo de evaluación se propone (formativa, sumativa)? ¿Se centra en el procedimiento (cálculo correcto)

o en la comprensión conceptual (significado del canje)?

- *Propuesta de Mejora:* Diseña una pequeña actividad de evaluación alternativa que se centre en la *comprensión* del algoritmo (ej., usando bloques multibase o detectando un error).
- *Justificación Didáctica:* Explica por qué tu propuesta es más coherente con un enfoque de evaluación para el aprendizaje.

2. *Diseño de un Instrumento de Evaluación: La Rúbrica en Acción.*

Consigna: Basándote en el problema de la «Granja Misteriosa» del Capítulo 13, página 438, (10 cabezas, 28 patas), diseña una rúbrica analítica para evaluar la competencia resolutora de un alumno de 4º de Primaria.

- *Crear la Rúbrica:* Diseña una tabla con 4 criterios de evaluación (columnas) y 3 niveles de desempeño (filas).
- *Justificación Pedagógica (aprox. 150 palabras):* Explica cómo utilizarías esta rúbrica en el aula para fomentar la autoevaluación y el feedback efectivo.

3. *Del Diagnóstico a la Intervención: El Error como Oportunidad.*

Consigna: Aplica el ciclo del «detective cognitivo» a un error clásico en la comparación de fracciones.

Escenario: Un alumno de 5º de Primaria afirma que $\frac{1}{4}$ es mayor que $\frac{1}{2}$ porque «4 es más grande que 2».

Tu tarea consiste en describir los tres pasos de tu intervención:

- a) *Diagnóstico del Error (Formular la Hipótesis):* ¿Cuál es la causa conceptual probable de este error?
- b) *Diseño de la Intervención Dirigida:* Describe, paso a paso, cómo usarías un material manipulativo (ej. tiras de papel) para generar un conflicto cognitivo.
- c) *Conexión con el Feedback:* Explica por qué esta intervención es más potente que simplemente decir «No, está mal», vinculando tu respuesta con las ideas de Hattie sobre el feedback efectivo.

15 Planificación Didáctica en Aritmética

Los módulos precedentes de este manual han proporcionado un recorrido exhaustivo a través de los fundamentos psicopedagógicos, el marco curricular, los contenidos aritméticos esenciales y las estrategias didácticas específicas para la enseñanza de los números y las operaciones en la Educación Primaria. Hemos construido los cimientos. Ahora, en este quinto y último módulo, aprenderemos a ser arquitectas y arquitectos.

El conocimiento de estos elementos, aunque indispensable, no garantiza por sí solo una práctica docente exitosa. La verdadera maestría en la enseñanza de la aritmética se forja en la capacidad del personal docente para integrar estos saberes de manera coherente, para tomar decisiones pedagógicas informadas en el día a día del aula y para cultivar una actitud de aprendizaje y mejora continua.

Este capítulo representa la culminación de nuestro viaje como arquitectos del aprendizaje. Para ello, recuperaremos y pondremos en práctica los fundamentos teóricos que establecimos en el *Capítulo 3*: el diseño de tareas y recursos, y el marco de la Teoría de Situaciones Didácticas. Si aquel capítulo nos proporcionó los planos y los materiales, este nos enseñará a construir el edificio completo, asegurando que cada pieza encaje de forma coherente y con un propósito claro. Una planificación cuidadosa y reflexiva no es un requisito burocrático, sino la hoja de ruta del maestro o maestra; es el instrumento que le permite traducir los grandes objetivos de la educación matemática en experiencias de aula coherentes, significativas y adaptadas a las necesidades de su alumnado (Perrenoud, 2004; Wiggins & McTighe, 2005).

Como ya se introdujo en el Capítulo 3, el instrumento curricular que vehicula esta visión es la *Situación de Aprendizaje (SdA)*. Este capítulo profundiza en el *cómo*: cómo se diseña una SdA que sea, a la vez, curricularmente rigurosa, pedagógicamente sólida y humanamente motivadora. Entenderemos la planificación como el guion de una obra en la que el alumnado es el protagonista, y donde cada acto, cada escena y cada diálogo están diseñados intencionadamente para promover la construcción de su propio pensamiento matemático.

15.1 Principios de una Planificación Didáctica Eficaz en Aritmética

Una buena planificación didáctica en aritmética no es una colección de actividades entretenidas, sino que se sustenta en varios principios fundamentales que aseguran su coherencia, profundidad y potencial de aprendizaje. Estos principios, que hemos ido explorando a lo largo del manual, actúan como los pilares sobre los que se edifica una práctica docente reflexiva y eficaz.

15.1.1 Coherencia Curricular: La Planificación como Traducción Inteligente del Mandato Normativo

El primer pilar de toda planificación es su anclaje en el marco normativo vigente. En nuestro caso, la *ORDEN de 30 de mayo de 2023* por la que se desarrolla el currículo de Educación Primaria en Andalucía. Sin embargo, la coherencia curricular va más allá de “cubrir” una lista de saberes básicos. Implica comprender la lógica interna del currículo y utilizarlo como un aliado para diseñar un aprendizaje competencial.

El currículo andaluz estructura el área de Matemáticas en torno a una tríada fundamental: las *Competencias Específicas* (CE), que describen lo que el alumnado debe ser capaz de *hacer*; los *Criterios de Evaluación*, que nos indican cómo valorar el grado de desarrollo de esas competencias; y los *Saberes Básicos*, que son los contenidos y conceptos que actúan como herramientas para desarrollar dichas competencias.

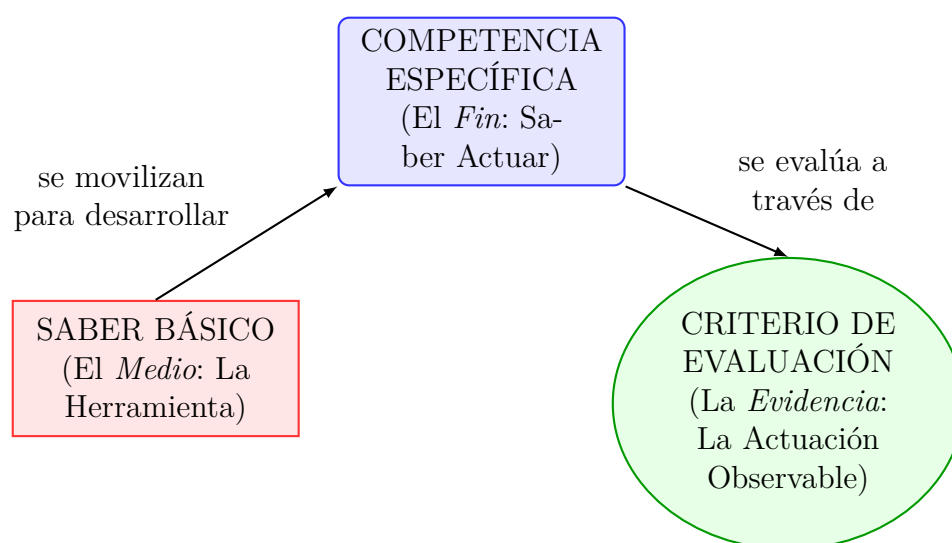


Figura 15.1: Relación entre los elementos clave del currículo LOMLOE.

Clave Didáctica: El Saber no es el Destino, es el Vehículo

El error más común en la planificación tradicional es concebir los saberes básicos como el destino final del aprendizaje (ej. «hoy toca aprender la tabla del 3»). Un enfoque competencial invierte esta lógica: el saber básico (la tabla del 3) es el vehículo que necesitamos para desarrollar una competencia (ej. «resolver problemas de la vida real que impliquen una suma repetida»). La planificación no parte del saber, sino de la competencia que se desea desarrollar.

Ejemplo: Prioridades en los Elementos Curriculares

Al planificar una SdA sobre las tablas de multiplicar en 3º de Primaria, nuestro punto de partida no es el saber básico *MAT.2.A.3.3: «Construcción de las tablas de multiplicar...»*. Nuestro punto de partida es la *Competencia Específica 2: «Resolver situaciones problematizadas, aplicando diferentes técnicas, estrategias y formas de razonamiento...»*.

La tarea que diseñemos (ej. calcular cuántas ruedas hay en 8 triciclos) no tiene como fin último “saberse la tabla del 3”, sino usar ese saber para *resolver un problema*. Al pedir al alumnado que explique cómo lo ha resuelto, estaremos desarrollando también la *Competencia Específica 6* («Comunicar y representar...»). El saber básico es la herramienta indispensable, pero la competencia es el verdadero objetivo del aprendizaje (Zabala & Arnau, 2007).

Una planificación coherente, por tanto, selecciona los saberes básicos necesarios para abordar una situación-problema que permita al alumnado actuar y, por tanto, demostrar las competencias descritas en los criterios de evaluación.

15.1.2 Constructivismo: El Alumnado como Protagonista de su Aprendizaje

Una planificación didáctica eficaz trasciende la mera organización de contenidos; es, en esencia, un acto de fe en la capacidad del alumnado para construir su propio conocimiento. Este principio, pilar del *constructivismo*, nos aleja del rol de meros transmisores de información para convertirnos en auténticos *arquitectos de experiencias de aprendizaje*. Como ya se introdujo en el Capítulo 1, el conocimiento no es una entidad que se transfiere pasivamente del docente al discente, sino una estructura que cada aprendiz debe edificar activamente en su mente.

Para la planificación en aritmética, esta perspectiva se fundamenta en las aportaciones complementarias de dos gigantes de la psicología del desarrollo: Jean Piaget y Lev Vygotsky.

- *La perspectiva piagetiana: El aprendizaje como adaptación al medio.* Para Piaget, el motor del desarrollo cognitivo es la *acción*. El alumnado no aprende escuchando una definición de “decena”, sino al realizar repetidamente la acción de agrupar 10 unidades y canjearlas. Nuestra labor al planificar, por tanto, no es preparar una explicación brillante, sino diseñar un *medio didáctico* —un problema, un juego, un material— que genere un *conflicto cognitivo* o un *desequilibrio*. Es la necesidad de resolver ese conflicto lo que impulsa al alumnado a reorganizar sus esquemas mentales y construir un nuevo conocimiento (Piaget, 1941/1967). La planificación debe anticipar estos desequilibrios y proveer los materiales para que la acción sea posible.
- *La perspectiva vygotskiana: El aprendizaje como proceso social.* Vygotsky añade una dimensión social indispensable a este proceso. El conocimiento no se construye en solitario, sino en la *interacción* con otros. El lenguaje y el diálogo son las herramientas que permiten internalizar los conceptos y regular el propio pensamiento. Al planificar, nuestro rol es diseñar un *andamiaje* (*scaffolding*) adecuado. Esto implica pensar en las preguntas clave que formularemos, cómo organizaremos el trabajo cooperativo y qué apoyos visuales o simbólicos introduciremos para ayudar al alumnado a cruzar su *Zona de Desarrollo Próximo* (ZDP)—la distancia entre lo que puede hacer por sí mismo y lo que puede hacer con ayuda (Vygotsky, 1978/2009).

En síntesis, una planificación constructivista es un ejercicio de anticipación que

se apoya en estos dos pilares: el diseño de un medio rico y desafiante (Piaget) y la provisión de un andamiaje social e intelectual (Vygotsky), como se ilustra en la Figura 15.2.

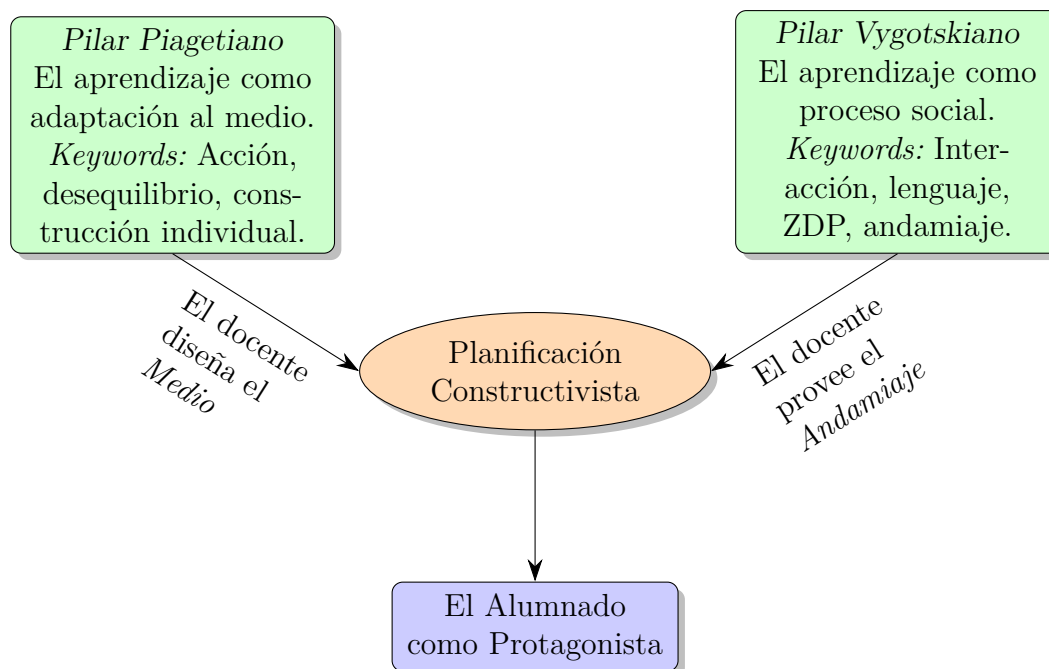


Figura 15.2: Los dos pilares de la planificación constructivista en la didáctica.

Clave Didáctica: Planificación Transmisiva vs. a Constructivista

Imaginemos que nuestro objetivo es que el alumnado de 1º de Primaria descubra la utilidad de la *propiedad conmutativa* para facilitar la suma (ej., $3 + 9$ es más fácil si se calcula como $9 + 3$).

- **Planificación Tradicional (Transmisiva):**

1. Explicar la regla: “El orden de los sumandos no altera el resultado”.
2. Mostrar un ejemplo: $3 + 9 = 12$ y $9 + 3 = 12$.
3. Asignar una ficha con ejercicios para aplicar la regla.

- **Planificación Constructivista:**

1. *Diseñar el Medio (Piaget):* Plantear el problema $3 + 9$ a un alumnado que aún utiliza el conteo de todo o el sobreconteo desde el primer sumando. Su estrategia natural (empezar en 3 y contar 9 más) será larga, tediosa y propensa a errores. Esto crea el *conflicto cognitivo*: “hay una forma más fácil de hacer esto”.
2. *Proveer el Andamiaje (Vygotsky):* El docente no da la solución, sino que hace una pregunta clave: «*Veo que empezar por el 3 es un poco largo. ¿Qué pasaría si empezáramos por el otro número, por el 9? ¿Creéis que dará lo mismo? Vamos a probarlo en la recta numérica o con los bloques*».

3. *Anticipar la Construcción*: El alumnado, al actuar y dialogar, *descubre* que el resultado es el mismo pero el proceso es mucho más eficiente. El conocimiento no ha sido transmitido, sino construido como la solución óptima a un problema.

La planificación constructivista no se pregunta “¿cómo lo explico más claro?”, sino “¿qué problema o situación puedo diseñar para que el alumnado **necesite** este nuevo conocimiento?”.

En definitiva, adoptar un enfoque constructivista en la planificación implica un cambio fundamental en nuestro rol. Dejamos de ser los protagonistas que explican para convertirnos en los guionistas y directores que crean las condiciones para que el alumnado sea el verdadero artífice de su aprendizaje.

15.1.3 Aprendizaje Significativo: Planificar para la Comprensión Relacional

Una planificación constructivista no garantiza por sí sola un aprendizaje profundo y duradero. El objetivo final no es solo que el alumnado *construya* algo, sino que lo que construya sea *significativo*. El *aprendizaje significativo*, concepto acuñado por David Ausubel et al. (1983/1991), se produce cuando la nueva información se conecta de manera sustancial y no arbitraria con la estructura de conocimiento que el aprendiz ya posee. En contraposición, el aprendizaje memorístico o mecánico almacena la información como piezas aisladas, haciéndola frágil, difícil de transferir y propensa al olvido.

Para la didáctica de la aritmética, esta idea se conecta directamente con la distinción de Richard Skemp (1978) entre comprensión instrumental y relacional, ya definida en el Apartado 1.3.5. Una planificación puede, por tanto, orientarse deliberadamente hacia uno de estos dos tipos de comprensión:

- Una planificación orientada al *saber cómo* (instrumental) se enfoca en la ejecución de algoritmos.
- Una planificación orientada al *saber por qué* (relacional) se enfoca en la construcción del significado que sustenta dichos algoritmos.”

Nuestra labor al planificar es diseñar un itinerario que guíe al alumnado desde sus conocimientos previos (el anclaje de Ausubel) hasta una comprensión relacional del nuevo concepto (el destino de Skemp). Una planificación que solo se enfoca en la ejecución de algoritmos está, deliberadamente, planificando para una comprensión instrumental.

Clave Didáctica: Planificando para la comprensión instrumental vs. relacional

Comparemos dos enfoques de planificación para enseñar el algoritmo de la resta $72 - 45$.

- *Planificación para la Comprensión Instrumental* (El “cómo”):
 1. El docente enuncia la regla: «Como a 2 no le puedes quitar 5, le

pides prestado uno al 7. El 7 se convierte en 6 y el 2 en 12...».

2. Se modela el procedimiento en la pizarra, paso a paso.
3. El alumnado realiza una ficha con 20 restas similares para mecanizar el procedimiento.

Resultado: El alumnado aprende una “receta” que funciona, pero es opaca. La “llevada” es un truco mágico. El conocimiento es frágil y no se conecta con el valor posicional.

■ *Planificación para la Comprensión Relacional (El “porqué”):*

1. *Anclaje (Ausubel):* Se parte del conocimiento previo del alumnado sobre el valor posicional. Se les pide representar 72 con bloques multibase (7 barras de decena y 2 cubitos).
2. *Creación de la Necesidad:* Se plantea el reto: «*Ahora, de estos bloques, tenemos que quitar 45. ¿Cómo lo hacemos?*». El alumnado puede quitar las 4 decenas, pero se encuentra con un conflicto: *no puede quitar 5 cubitos porque solo hay 2.*
3. *Construcción del Significado (Skemp):* El docente guía con preguntas: «*¿Hay alguna forma de conseguir más cubitos usando las barras que tenemos?*». El alumnado, a través de la manipulación, descubre que puede *canjear* una barra de decena por 10 cubitos.
4. *Conexión con el Símbolo:* Solo después de la acción física, el docente conecta con el algoritmo escrito: «*Esto que acabamos de hacer, canjear una barra, es lo que representamos cuando tachamos el 7 y escribimos un 6. El '1' que ponemos junto al 2 no es un 'uno', son los 10 cubitos que hemos conseguido*».

Resultado: El alumnado ha construido el significado del algoritmo. La “llevada” no es un truco, sino el registro simbólico de una acción de canje comprendida. El conocimiento es robusto, transparente y está conectado.

En definitiva, planificar para un aprendizaje significativo requiere que nos hagamos constantemente la pregunta clave: «*¿Esta actividad ayudará a mi alumnado a construir una red de conexiones o simplemente a memorizar un procedimiento aislado?*». La respuesta a esta pregunta determinará si estamos formando meros calculistas o verdaderos pensadores matemáticos.

15.1.4 Progresión y Secuenciación Lógica: La Arquitectura del Aprendizaje

Uno de los pilares fundamentales de una planificación didáctica eficaz es su *coherencia interna*. El conocimiento matemático, especialmente en las etapas iniciales, se construye de forma jerárquizada, como un edificio. Si los cimientos no son sólidos, cualquier estructura posterior será inestable. Por tanto, la planificación no puede ser una colección de actividades aisladas y atractivas, sino que debe seguir una progresión y secuenciación lógicas que guíen al alumnado en la construcción de un andamiaje conceptual robusto y duradero.

Esta necesidad de una secuencia lógica nos aleja de una enseñanza que promueve

una comprensión meramente instrumental (saber reglas sin saber por qué) y nos acerca a una que cultiva una *comprensión relacional* (saber qué hacer y por qué), tal y como la definió Richard Skemp (1978). La herramienta pedagógica más potente para diseñar esta arquitectura del aprendizaje es la secuencia de modos de representación propuesta por el psicólogo Jerome Bruner (1966/1972) (apartado 1.3.4). Como hemos visto a lo largo del manual, esta progresión es la hoja de ruta natural para introducir cualquier concepto aritmético en Primaria, asegurando que el conocimiento se construye sobre una base de significado. La Figura 15.3 resume este viaje conceptual.

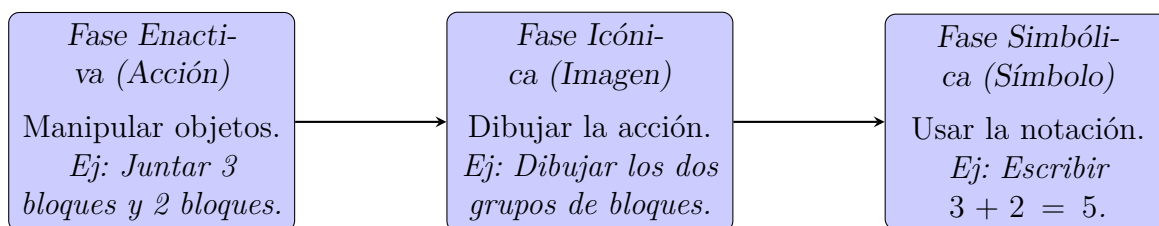


Figura 15.3: La secuencia pedagógica de Bruner como hoja de ruta para la planificación. La comprensión de los símbolos nace de la acción y su representación.

Esta progresión no es una opción metodológica más, sino una condición necesaria para un aprendizaje significativo. La normativa andaluza, al insistir en el uso de «*materiales y recursos lúdicos y motivadores*» y en la utilización de diversas representaciones, está validando y exigiendo implícitamente el respeto a esta secuencia.

Clave Didáctica: El Peligro de la Abstracción Prematura

El mayor error en la planificación de una secuencia didáctica en aritmética es la *abstracción prematura*. Esto ocurre cuando se introduce la fase simbólica (el algoritmo, la fórmula) sin haber consolidado suficientemente las fases enactiva e icónica. El resultado es un conocimiento frágil, memorístico y desconectado de la realidad, la principal fuente de la ansiedad matemática. Una buena planificación siempre respeta el principio fundamental: *la mano (acción) y el ojo (imagen) deben preceder siempre al lápiz (símbolo)*.

En definitiva, una planificación didáctica lógicamente secuenciada es aquella que diseña un viaje para el alumnado. Un viaje que comienza en el mundo tangible de los objetos, hace una parada crucial en el mundo visual de los dibujos y esquemas, y finalmente llega al destino del lenguaje abstracto y poderoso de las matemáticas, pero con las maletas llenas de significado.

15.1.5 Flexibilidad y Atención a la Diversidad: El Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) como Marco

Una planificación didáctica no puede diseñarse para un “alumno/a promedio” inexistente. La realidad de cualquier aula es la *diversidad*: de ritmos, de conocimientos previos, de intereses y de formas de aprender. Tradicionalmente, la atención a la diversidad se ha entendido como un conjunto de adaptaciones que se realizan *a posteriori* para aquel alumnado que no sigue el ritmo de una planificación rígida. Este enfoque reactivo es ineficiente y a menudo estigmatizador.

La pedagogía contemporánea, en línea con la *ORDEN de 30 de mayo de 2023*, propone una inversión radical de esta perspectiva. En lugar de adaptar la enseñanza para unos pocos, se trata de diseñar una enseñanza flexible para todos desde el principio. Este es el núcleo del *Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA)*, un marco de planificación proactivo que busca eliminar barreras al aprendizaje antes de que estas aparezcan (Alba Pastor, 2018; CAST, 2018).

El DUA se fundamenta en la neurociencia y se articula en torno a tres principios fundamentales que deben guiar nuestra planificación en aritmética, asegurando que todo el alumnado tenga la oportunidad de acceder, participar y progresar.

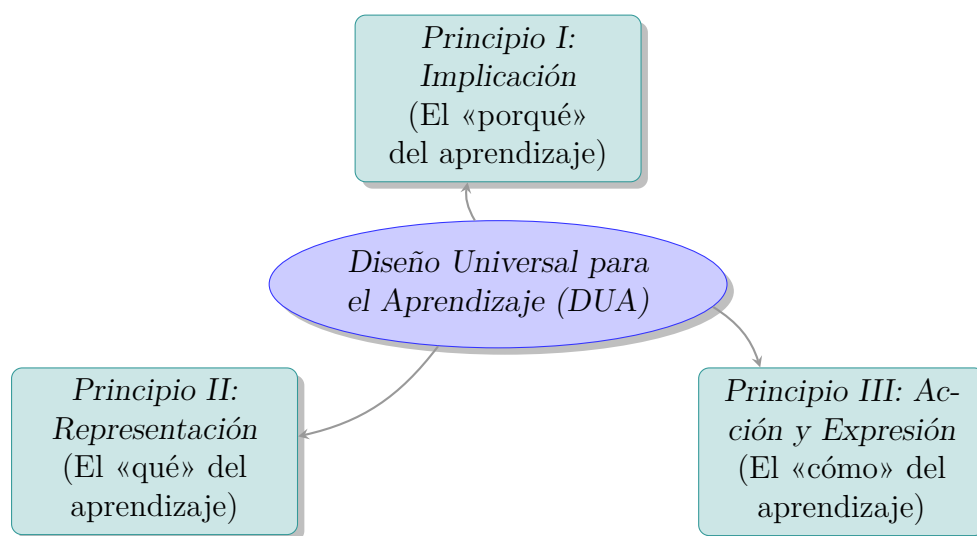


Figura 15.4: Los tres principios del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA).

- *Principio I: Proporcionar Múltiples Formas de Implicación.* Se centra en las redes afectivas del cerebro, el «porqué» del aprendizaje. Busca captar y mantener el interés y la motivación del alumnado. En la planificación aritmética, esto se traduce en:
 - *Captar el interés:* Usar contextos relevantes y cercanos (ej. planificar el presupuesto para una fiesta de cumpleaños, calcular puntos en un videojuego, repartir cromos).
 - *Mantener el esfuerzo y la persistencia:* Diseñar problemas abiertos con múltiples soluciones (tareas de “suelo bajo, techo alto”), fomentar la colaboración en grupos y establecer rutinas de aula donde el error se vea como una oportunidad.
 - *Fomentar la autorregulación:* Ofrecer al alumnado opciones (ej. elegir qué material manipulativo usar, decidir qué estrategia presentar al grupo).
- *Principio II: Proporcionar Múltiples Formas de Representación.* Se enfoca en las redes de reconocimiento, el «qué» del aprendizaje. Asume que los estudiantes perciben y comprenden la información de maneras distintas. En aritmética, esto implica:
 - *Variar la percepción:* No depender solo del libro de texto. Usar *materia-*

les manipulativos (bloques multibase, regletas), representaciones visuales (recta numérica, diagramas de barras, rejilla de 100) y recursos digitales.

- *Clarificar el lenguaje y los símbolos:* Enseñar explícitamente el vocabulario matemático. Conectar siempre un símbolo abstracto (ej. $\frac{3}{4}$) con su representación icónica (un área sombreada) y su acción enactiva (doblar y cortar un papel).
- *Facilitar la comprensión:* Activar conocimientos previos al inicio de una secuencia y usar organizadores gráficos para estructurar la información (ej. una tabla para comparar las propiedades de la suma y la resta).
- *Principio III: Proporcionar Múltiples Formas de Acción y Expresión.* Se dirige a las redes estratégicas, el «cómo» del aprendizaje. Ofrece al alumnado diversas maneras de navegar por el entorno de aprendizaje y de demostrar lo que sabe. En nuestra planificación, esto significa:
 - *Variar la acción física:* Permitir que las respuestas se construyan con materiales, se dibujen, se escriban o se expresen oralmente.
 - *Facilitar la expresión y la comunicación:* Proporcionar “andamios” como plantillas para resolver problemas, calculadoras para la verificación o iniciadores de frases para las discusiones en grupo.
 - *Apoyar las funciones ejecutivas:* Ayudar a planificar los pasos de un problema complejo, usar listas de cotejo para la autoevaluación y modelizar explícitamente las estrategias de resolución de problemas.

Clave Didáctica: La Diversidad no es la Excepción, es la Norma

Integrar el DUA en la planificación no significa crear 25 planes distintos para 25 alumnos/as. Significa crear *un único plan, pero flexible y lleno de opciones*, que anticipe la variabilidad del aula desde el primer momento. Al planificar, la pregunta clave no es «¿cómo adaptaré esto para el estudiante X?», sino «¿Qué barreras podría encontrar mi alumnado en esta tarea y cómo puedo ofrecer diferentes caminos para superarlas desde el diseño inicial?».

15.2 Fases en el Diseño de Secuencias Didácticas y Situaciones de Aprendizaje

El diseño de una secuencia didáctica eficaz, materializada en la *Situación de Aprendizaje (SdA)* que prescribe la normativa andaluza, no es un acto espontáneo ni un mero ejercicio de rellenar una plantilla. Es un proceso de *diseño instruccional*: un acto profesional, reflexivo y estructurado que transforma el currículo oficial en una experiencia de aprendizaje coherente y significativa para el alumnado (Wiggins & McGighe, 2005).

Este proceso puede organizarse en una serie de fases lógicas que aseguran la coherencia entre los objetivos, las actividades y la evaluación. Lejos de ser un camino lineal, es un ciclo dinámico donde las decisiones en una fase pueden llevarnos a refinar las anteriores, como se ilustra en la Figura 3.2 (vuelta a reproducir en la Figura 15.5).

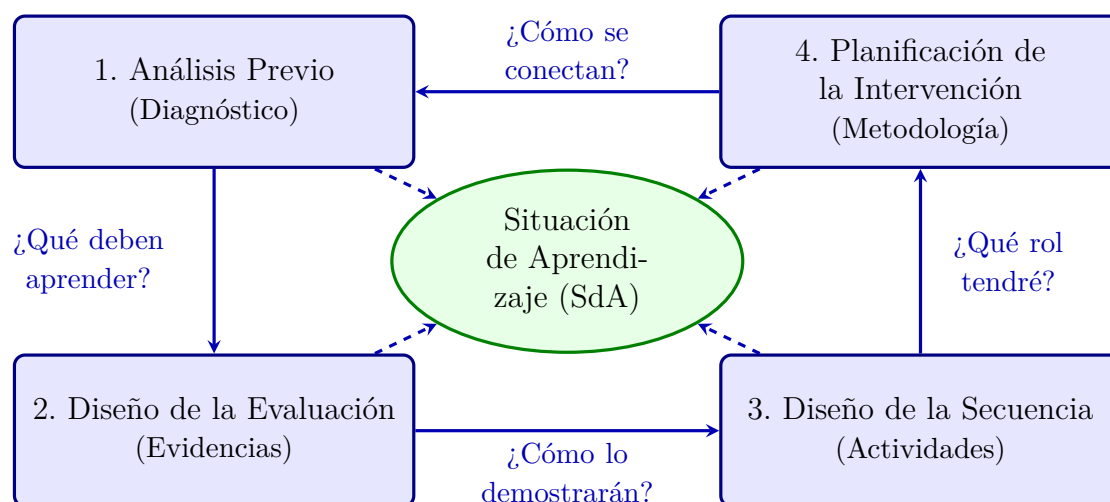


Figura 15.5: Proceso cíclico del diseño de una Situación de Aprendizaje.

15.2.1 Fase 1: Análisis Previo y Definición de Objetivos (El Diagnóstico)

Esta es la fase fundamental. Antes de decidir qué *hacer*, debemos tener claro *qué* queremos que aprendan y *por qué*. Este análisis inicial se realiza desde una triple perspectiva:

- **Análisis Curricular:** Se estudian los documentos oficiales (*ORDEN de 30 de mayo de 2023*) para identificar las *Competencias Específicas*, los *Criterios de Evaluación* y los *Saberes Básicos* que se deben abordar. Es el momento de traducir el lenguaje normativo a objetivos de aprendizaje claros y concretos para nuestra aula.
- **Análisis Epistemológico (del Contenido):** Se profundiza en la naturaleza del saber matemático en sí. ¿Cuál es la “gran idea” matemática que subyace? (p.ej., la equivalencia, la proporcionalidad). ¿Cuáles son los *obstáculos epistemológicos* (Brousseau, 2007) asociados a este contenido? (p.ej., la confusión entre potencia y producto). Conocer la historia del concepto nos da aquí una empatía pedagógica fundamental.
- **Análisis Cognitivo (del Alumnado):** Se consideran las características de nuestros estudiantes. ¿En qué estadio de desarrollo (Piaget) se encuentran? ¿Cuáles son sus conocimientos previos? ¿Qué estrategias informales podrían utilizar? ¿Qué posibles errores, derivados de sus concepciones previas, podemos anticipar?

Profundizando: Hacia un Diseño Inverso (Backward Design)

La lógica de esta primera fase se inspira en el influyente modelo del *Diseño Inverso* de Wiggins y McTighe (2005). La idea central es empezar la planificación por el final:

1. *Identificar los resultados deseados:* ¿Qué deben saber, comprender y ser capaces de hacer los estudiantes al final? (Análisis Curricular y de Contenido).

2. *Determinar las evidencias aceptables*: ¿Cómo sabremos que lo han logrado? ¿Qué tareas o productos demostrarán su aprendizaje? (Diseño de la Evaluación).
3. *Planificar las experiencias de aprendizaje*: ¿Qué actividades, materiales y secuencias didácticas les ayudarán a alcanzar esos resultados? (Diseño de la Secuencia).

Este enfoque garantiza que la planificación esté siempre centrada en el aprendizaje y no en la mera “cobertura” de contenidos.

15.2.2 Fase 2: Diseño de la Evaluación y del Producto Final (El Destino)

Una vez definidos los objetivos, el siguiente paso es decidir cómo vamos a valorar su consecución. La ORDEN de 30 de mayo de 2023 exige que toda SdA culmine en un *producto final* (un informe, una maqueta, una presentación, un debate, etc.). Este producto es la principal evidencia de la *evaluación sumativa*.

Sin embargo, tan importante como el destino es el viaje. Debemos planificar también la *evaluación formativa*:

- *Instrumentos*: ¿Utilizaremos listas de cotejo, rúbricas sencillas, diarios de matemáticas? (Ver Capítulo 14).
- *Momentos Clave*: ¿En qué puntos de la secuencia nos detendremos para recoger información? ¿Qué preguntas clave haremos para revelar el pensamiento del alumnado?

Diseñar la evaluación en esta fase nos obliga a ser muy concretos sobre qué significa “comprender” el concepto que vamos a enseñar.

15.2.3 Fase 3: Diseño de la Secuencia de Tareas y Recursos (El Viaje)

Con los objetivos y la evaluación claros, diseñamos el itinerario de aprendizaje. La clave es crear una secuencia coherente de tareas que guíe al alumnado desde sus conocimientos previos hasta el nuevo aprendizaje, respetando la secuencia cognitiva natural.

Ejemplo: Secuencia de Bruner en acción para la potencia 3^2

La secuencia de tareas debe seguir, como norma general, el principio de Bruner (1966/1972):

- *Fase Enactiva*: El alumnado construye físicamente un cuadrado de 3×3 con policubos o fichas. Sienten y tocan el concepto de “cuadrado”.
- *Fase Icónica*: El alumnado dibuja en papel cuadriculado el cuadrado que ha construido. La imagen captura la acción y permite reflexionar sobre ella.
- *Fase Simbólica*: Se introduce la notación 3^2 como una forma eficiente de registrar la acción y el dibujo. El símbolo queda anclado en un significado concreto.

Esta fase implica tomar decisiones sobre:

- *Tareas y Recursos*: Seleccionar o adaptar tareas (ver sección 15.3) y los materiales manipulativos o tecnológicos que las acompañarán.
- *Metodología y Agrupamientos*: Decidir cómo se organizará el aula (trabajo individual, por parejas, en grupo cooperativo) y cuál será el rol del docente en cada momento.

15.2.4 Fase 4: Planificación de la Atención a la Diversidad (El Mapa para Todos)

La atención a la diversidad no es un añadido final, sino un principio que debe impregnar todo el diseño. El marco del *Diseño Universal para el Aprendizaje* (DUA, CAST, 2018) nos ofrece la estructura para ello. Al planificar, nos preguntamos:

- *¿Cómo ofrecer múltiples formas de implicación? (el porqué del aprendizaje)*: ¿Cómo conectar la tarea con los intereses del alumnado? ¿Cómo fomentar la colaboración y la autonomía?
- *¿Cómo ofrecer múltiples formas de representación? (el qué del aprendizaje)*: ¿Además del lenguaje oral o escrito, qué apoyos visuales, manipulativos o auditivos proporcionaré?
- *¿Cómo ofrecer múltiples formas de acción y expresión? (el cómo del aprendizaje)*: ¿Además de escribir, cómo pueden los estudiantes demostrar lo que saben (dibujando, construyendo, explicando oralmente)?

Planificar pensando en la diversidad desde el principio crea experiencias de aprendizaje más ricas y accesibles para todo el alumnado, reduciendo la necesidad de adaptaciones posteriores.

Este proceso cíclico nos proporciona el mapa general de nuestra planificación. Sin embargo, como hemos visto, el corazón de este proceso, especialmente en la Fase 3, es la selección de las tareas y recursos que darán vida a la SdA. La siguiente sección se adentra en este componente crucial, explorando cómo elegir y adaptar las tareas que verdaderamente promueven el pensamiento matemático.

15.3 El Corazón de la Planificación: Selección y Adaptación de Tareas y Recursos

Una vez definidos los objetivos de aprendizaje y las evidencias de evaluación, nos adentramos en el núcleo del diseño didáctico: la selección y secuenciación de las tareas matemáticas. La calidad del aprendizaje que tiene lugar en el aula es directamente proporcional a la riqueza de las tareas con las que el alumnado interactúa (Stein et al., 2000/2009). No son un mero entretenimiento ni un relleno para la programación; son el motor del aprendizaje.

En esta sección, analizaremos los criterios para seleccionar y adaptar tareas que promuevan un pensamiento matemático profundo, así como el papel de los recursos como puentes hacia la comprensión.

15.3.1 Criterios para la Selección de Tareas

La elección de una tarea no es una cuestión de gusto personal, sino una decisión didáctica fundamental. Un problema bien escogido puede abrir las puertas a la exploración, la conjetura y el descubrimiento, mientras que un ejercicio repetitivo puede cerrarlas, reduciendo la matemática a una mera aplicación de reglas. Para tomar decisiones informadas, debemos evaluar las tareas potenciales a través de varios filtros críticos.

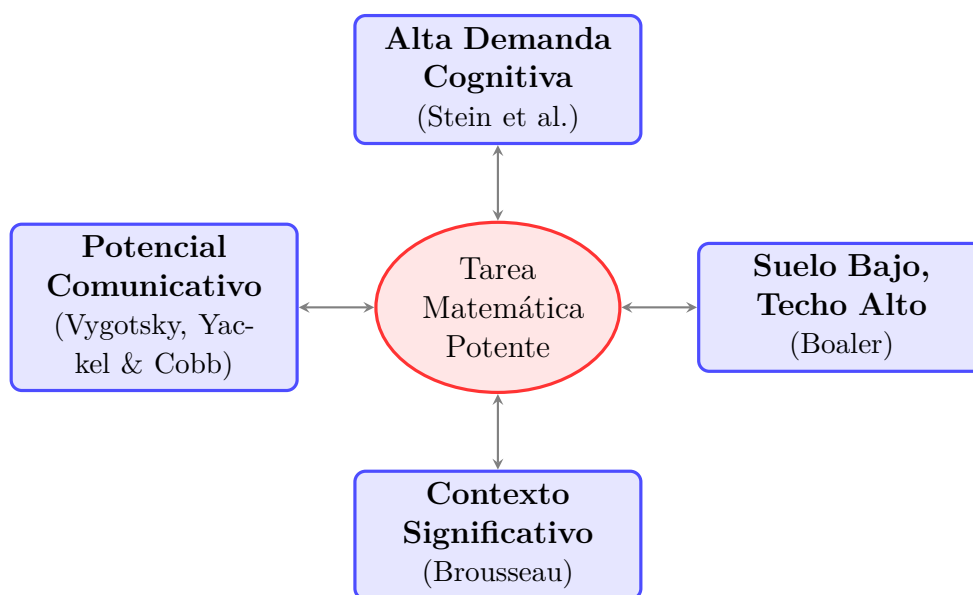


Figura 15.6: Criterios fundamentales para la selección de una tarea matemática rica y competencial.

- *Potencial Matemático y Demanda Cognitiva*: Este es el criterio más importante. Como vimos en el Capítulo 3, no todas las tareas exigen el mismo tipo de nivel de pensamiento. Una enseñanza competencial requiere un predominio de tareas de *alta demanda cognitiva* (procedimientos con conexión y “hacer matemáticas”).

Profundizando: De la Práctica Rutinaria a la Exploración Cognitiva

Tarea de Baja Demanda (Procedimiento sin Conexión): «Calcula el área de los siguientes rectángulos: a) 5 cm x 4 cm; b) 7 cm x 3 cm...»

Esta tarea requiere aplicar una fórmula memorizada. El foco está en la corrección del cálculo.

Tarea de Alta Demanda (“Hacer Matemáticas”): «Tengo 24 baldosas cuadradas de 1x1. ¿Cuántos rectángulos diferentes puedo construir usando todas las baldosas? Dibújalos en papel cuadriculado y anota sus dimensiones. ¿Qué observas?»

Esta tarea, aunque parte de un concepto similar (área), exige exploración, organización sistemática, representación visual y la búsqueda de patrones

(los factores del 24). El foco está en el razonamiento.

- *Accesibilidad y Potencial de Extensión (Suelo Bajo y Techo Alto)*: Este concepto, popularizado por Jo Boaler Boaler (2020), es clave para la atención a la diversidad. Una tarea ideal tiene:
 - Un *suelo bajo*: Es accesible y tiene múltiples puntos de entrada, permitiendo que todo el alumnado pueda comenzar a trabajar en ella con sus conocimientos actuales.
 - Un *techo alto*: Ofrece una gran profundidad y potencial de extensión, permitiendo al alumnado más avanzado explorar el concepto a niveles más complejos, generalizar o conectar con otras ideas.
- *Relevancia y Significado para el Alumnado*: Una tarea es más potente cuando el contexto no es un mero “disfraz” para un cálculo, sino que da sentido y propósito a la actividad matemática. La planificación de una excursión, el diseño de un mosaico o la organización de un torneo deportivo son contextos que por sí mismos generan la necesidad de utilizar las matemáticas.
- *Potencial para la Interacción y la Comunicación*: Una buena tarea debe ser “discutible”. Debe invitar a la diversidad de estrategias y representaciones, creando así una base rica para la puesta en común. Tareas con una única respuesta y un único camino promueven el silencio; tareas abiertas promueven el diálogo matemático y la construcción de *normas sociomatemáticas* (Yackel & Cobb, 1996).

15.3.2 Adaptación de Tareas: El Arte de la Sastrería Pedagógica

Una vez seleccionada una tarea con un alto potencial matemático, la labor del personal docente no ha terminado. Rara vez una tarea extraída de un libro de texto o de un recurso en línea es perfectamente adecuada para los objetivos específicos y las características concretas de un grupo de estudiantes. Aquí es donde entra en juego una de las competencias más finas y cruciales del docente: el arte de la adaptación.

La adaptación de tareas es el proceso de modificar una tarea existente para ajustarla mejor a las necesidades de aprendizaje del alumnado y a los objetivos didácticos. No se trata de hacer las tareas necesariamente “más fáciles” o “más difíciles”, sino de ajustarlas para maximizar la oportunidad de aprendizaje para cada estudiante. Este principio es la encarnación del *Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA)*, que busca eliminar barreras y ofrecer múltiples vías para el compromiso, la representación y la acción (CAST, 2018).

Una tarea bien adaptada puede:

- Servir de *andamio (scaffolding)* para estudiantes que encuentran dificultades, permitiéndoles acceder al núcleo conceptual del problema.
- Ofrecer una *profundización* o extensión para estudiantes que resuelven la tarea inicial con rapidez, fomentando un pensamiento matemático más complejo.
- Conectar de forma más explícita con los *intereses y el contexto* del alumnado, aumentando así su motivación e implicación.

Para ello, el docente puede modificar diversos aspectos de la tarea:

1. *Modificar los números o el contexto*: Es la adaptación más directa. Usar números más pequeños o familiares puede reducir la carga cognitiva del cálculo, permitiendo que el alumnado se centre en la estructura del problema. Cambiar el contexto de “canicas” a “cromos de su serie favorita” puede aumentar la relevancia.
2. *Cambiar el tipo de pregunta o lo que se pide*: En lugar de pedir solo la respuesta final, se puede pedir que representen el problema, que expliquen su estrategia o que inventen un problema similar.
3. *Ofrecer u restringir herramientas y representaciones*: Se puede ofrecer material manipulativo para anclar el pensamiento (andamio) o, por el contrario, pedir que resuelvan el problema sin material para fomentar la abstracción (extensión).

Mini-Caso de Aula: Adaptación de Tareas, Andamiaje y Profundización

Tarea Original (de un libro de texto): «En un huerto hay 8 filas con 12 lechugas cada una. ¿Cuántas lechugas hay en total?».

Esta es una tarea de aplicación directa del algoritmo de la multiplicación.

Adaptación para Andamiaje (Soporte): El docente observa que un alumno tiene dificultades.

- *Intervención del docente*: «Olvida las 12 lechugas por un momento. Imagina que solo son 3 filas de 5 lechugas. ¿Podrías dibujarlo en tu papel cuadriculado? ¿Cómo lo contarías?».
- *Análisis didáctico*: Al reducir los números y pedir una representación icónica (Bruner), el docente ayuda al alumno a visualizar la estructura de *array* (matriz rectangular) del problema, conectando la situación con la idea de suma repetida, que es el fundamento de la multiplicación.

Adaptación para Profundización (Extensión): Una alumna resuelve rápidamente $8 \times 12 = 96$.

- *Intervención del docente*: «¡Excelente! Ahora un nuevo reto. El agricultor quiere plantar esas mismas 96 lechugas, pero quiere probar una organización diferente. ¿De cuántas otras formas podría organizar las filas para que todas tengan el mismo número de lechugas?».
- *Análisis didáctico*: Esta adaptación transforma una tarea de cálculo cerrado en un problema abierto de investigación. La pregunta ya no es sobre el producto, sino sobre los *factores* de 96. Fomenta el pensamiento sistemático, la flexibilidad y una comprensión mucho más profunda de la relación inversa entre multiplicación y división. Cumple con el principio de “techo alto” de Boaler (2020).

En definitiva, la adaptación de tareas es una competencia docente que transforma la planificación de una actividad estática a un proceso dinámico y reflexivo. Es la

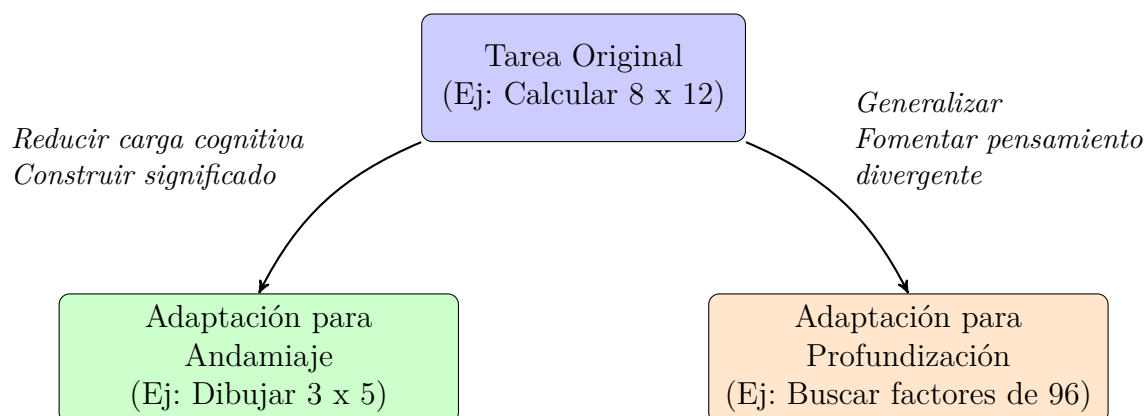


Figura 15.7: El proceso de adaptación de tareas como decisión didáctica clave.

herramienta que nos permite, en la práctica, atender a la diversidad del aula, no como un añadido, sino como el centro de nuestro diseño pedagógico (Stein et al., 2000/2009).

Una vez hemos seleccionado y adaptado una tarea con un alto potencial matemático, la labor de planificación no ha terminado. Una tarea excelente puede perder toda su eficacia si no se implementa en un entorno de aprendizaje bien gestionado. La siguiente sección aborda precisamente esta cuestión: cómo planificar la gestión del aula y la atención a los diferentes ritmos para crear un ecosistema donde cada estudiante pueda comprometerse con el pensamiento matemático de forma segura y productiva.

15.4 Gestión del Aula y Atención a los Diferentes Ritmos de Aprendizaje

Una planificación didáctica, por muy sólida y coherente que sea, permanece como un mero ejercicio teórico si no va acompañada de una gestión eficaz del entorno de aprendizaje. La gestión del aula no se limita a mantener el orden, sino que consiste en crear un *ecosistema* donde cada estudiante pueda comprometerse con el pensamiento matemático de forma segura y productiva. Una buena planificación debe contemplar cómo se va a gestionar el espacio, los materiales, el tiempo y, lo más importante, el clima socioemocional para el aprendizaje de la aritmética.

- *Organización del Espacio y los Materiales:* Facilitar el acceso a los recursos y la movilidad para el trabajo en grupo e individual. Un aula donde los materiales manipulativos están accesibles y ordenados invita a su uso autónomo.
- *Establecimiento de Rutinas y Normas Claras:* Especialmente para el trabajo con materiales y la participación en discusiones. Rutinas como *Number Talks* o “problema del día” crean hábitos de pensamiento matemático.
- *Manejo del Tiempo:* Distribuir el tiempo de forma equilibrada entre la introducción de tareas, el trabajo individual o grupal, y las puestas en común, reconociendo que el pensamiento profundo requiere tiempo.
- *Estrategias para Atender a la Diversidad:* Como se vio en el Capítulo 3, es crucial que la planificación contemple cómo se va a dar respuesta a los diferentes ritmos y necesidades de aprendizaje. Esto puede incluir:

- Agrupamientos flexibles.
- Tareas graduadas o con diferentes niveles de complejidad (tareas de “suelo bajo, techo alto”).
- Rincones de aprendizaje o estaciones de trabajo.
- Apoyos individualizados y andamiaje cognitivo.
- Actividades de ampliación para alumnado de altas capacidades.

Creación de un Clima Motivacional Orientado a la Tarea: El Modelo TARGET. Como vimos en la sección sobre la dimensión afectiva (apartado 1.3.7), el rol del docente como arquitecto de un clima motivacional saludable es fundamental. No basta con la intención; se necesitan herramientas concretas para diseñar experiencias de aprendizaje que fomenten sistemáticamente una *orientación a la tarea* en lugar de una orientación al ego. La investigación en psicología de la educación ha consolidado estos principios en el práctico y memorable marco *TARGET* (Ames, 1992).

Este modelo describe seis dimensiones clave del entorno de aprendizaje que el docente puede gestionar para influir en las metas que persigue el alumnado. La aplicación consciente de estos principios en la planificación diaria es una de las herramientas más poderosas para transformar el aula de aritmética en un espacio de crecimiento, confianza y disfrute matemático.

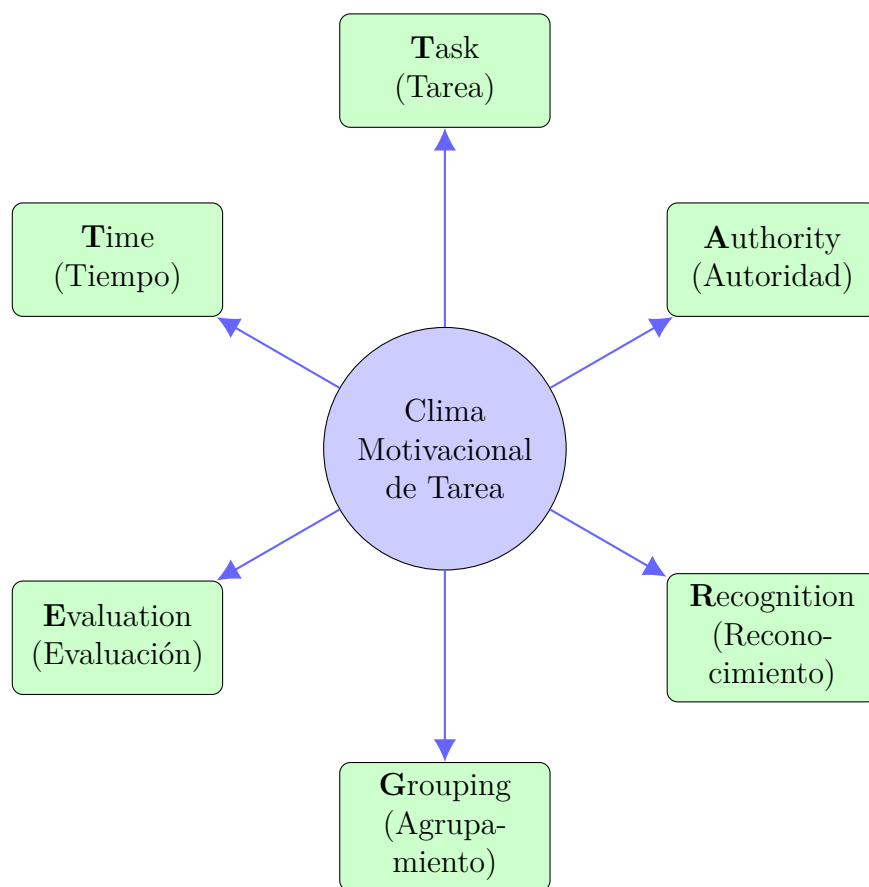


Figura 15.8: Las seis dimensiones del modelo TARGET que el docente puede gestionar para crear un clima de aula orientado a la tarea.

En la Tabla 1.2, en la página 29, se detalla cada componente con aplicaciones directas al aula de aritmética. La analogía con el ámbito deportivo, donde este modelo también ha sido muy estudiado (Treasure & Roberts, 1995), es altamente clarificadora.

15.5 Poniéndolo todo Junto: De la Teoría a la Situación de Aprendizaje

Los módulos precedentes de este manual han proporcionado un recorrido exhaustivo a través de los fundamentos psicopedagógicos, el marco curricular, los contenidos aritméticos esenciales y las estrategias didácticas específicas para la enseñanza de los números y las operaciones en la Educación Primaria. Sin embargo, el conocimiento de estos elementos, aunque indispensable, no garantiza por sí solo una práctica docente exitosa. La verdadera maestría en la enseñanza de la aritmética se forja en la capacidad del personal docente para integrar estos saberes de manera coherente, para tomar decisiones pedagógicas informadas en el día a día del aula, y para cultivar una actitud de aprendizaje y mejora continua.

Este capítulo se centra en un aspecto crucial que integra todos estos elementos: la *planificación didáctica*. Una planificación cuidadosa y reflexiva es la hoja de ruta del maestro o maestra, el instrumento que le permite traducir los objetivos de aprendizaje en experiencias de aula coherentes, significativas y adaptadas a las necesidades de su alumnado (Richards, 2002; Wiggins & McTighe, 2005). Lejos de ser un mero trámite administrativo, la planificación es el acto profesional donde el docente se revela como un auténtico *arquitecto de experiencias de aprendizaje*.

En el marco de la normativa vigente en Andalucía (ORDEN de 30 de mayo de 2023), este acto de diseño se materializa en la *Situación de Aprendizaje (SdA)*. La SdA no es simplemente una “actividad”, sino un completo ecosistema de aprendizaje que, en torno a un reto o problema, moviliza saberes de distintos sentidos matemáticos para desarrollar competencias.

En las siguientes secciones, desglosaremos las herramientas para construir estas SdA en el campo de la aritmética. Primero, recordaremos una plantilla, ya trabajada, que sirve como andamio para el diseño, explicando la función pedagógica de cada uno de sus apartados. Después, ilustraremos su uso con un ejemplo práctico y detallado, mostrando cómo los principios teóricos y didácticos vistos en este manual cobran vida en la planificación de una secuencia concreta.

15.5.1 Plantilla Comentada de SdA para Aritmética: El Guion del Arquitecto

Diseñar una Situación de Aprendizaje (SdA) eficaz es un acto complejo que requiere integrar múltiples elementos curriculares y pedagógicos. Para facilitar y sistematizar este proceso, y alinearlos con las directrices de la administración educativa andaluza, se propone la siguiente plantilla. No debe ser vista como un formulario a rellenar, sino como una herramienta para la reflexión que guía el proceso de diseño. Cada apartado se acompaña de *preguntas guía* que invitan a tomar decisiones didácticas fundamentadas.

15.5.2 Ejemplo Práctico Desarrollado: «El Gran Inventario de la Juguetería»

Para ilustrar cómo los principios y fases de la planificación se materializan en una propuesta concreta, se detalla a continuación una Situación de Aprendizaje (SdA) diseñada para el Segundo Ciclo de Educación Primaria (3º curso). Este ejemplo, ya esbozado brevemente en el capítulo 3, se desarrolla en mayor profundidad para servir como modelo de aplicación práctica.

- *Título de la SdA:* El Gran Inventario de la Juguetería

- *Justificación y Contexto*

Esta SdA se enmarca en una necesidad real y significativa del aula: organizar y cuantificar los materiales del rincón de juegos. El contexto es cercano, manipulable y motivador. El objetivo es transitar de un pensamiento aditivo (contar o sumar repetidamente) a uno multiplicativo, descubriendo la multiplicación como una herramienta más eficiente. Se conecta con el *Sentido Numérico* y el *Sentido Socioafectivo* (trabajo en equipo, responsabilidad).

- *Reto o Desafío y Producto Final*

Reto: «¡Somos los nuevos responsables de logística de la clase! Necesitamos saber exactamente cuántos juguetes tenemos para que no se pierda nada. Vienen en cajas iguales, pero también hay muchos sueltos. ¿Cómo podemos contarlos de forma rápida y organizarlos?»

Producto Final: Elaboración en equipos de una «*Hoja de Inventario del Almacén*», donde se registrará la cantidad total de diferentes tipos de juguetes, mostrando tanto el cálculo aditivo (suma repetida) como el multiplicativo.

- *Concreción Curricular (ORDEN 30/05/2023)*

Competencias Específicas:

- *CE.MAT.1:* Interpretar situaciones de la vida cotidiana (el inventario) proporcionando una representación matemática (arrays, sumas, multiplicaciones).
- *CE.MAT.2:* Resolver la situación problematizada aplicando diferentes estrategias (conteo, suma repetida, multiplicación, división por agrupamiento).
- *CE.MAT.6:* Comunicar y representar los resultados en la Hoja de Inventario y en la puesta en común.

Criterios de Evaluación:

- 1.2.a, 2.1.a, 2.2.a, 6.2.a

Saberes Básicos:

- *MAT.2.A.3.3:* Construcción de las tablas de multiplicar apoyándose en número de veces, suma repetida o disposición en cuadrículas.
- *MAT.2.A.3.4:* Suma, resta, multiplicación y división de números naturales resueltas con flexibilidad y sentido.

El desarrollo completo se puede ver en 3.5.2

- *Secuencia de Tareas (Progresión de Bruner)*

1. Tarea 1 (Fase Enactiva): Organizando los Paquetes.

- *Descripción:* Se presenta un “problema logístico” con material manipulativo (ej. 4 cajas con 6 policubos cada una). La pregunta es: «¿Cuántos policubos tenemos en total?».
- *Acción:* Los equipos manipulan el material. Sacan los policubos, los juntan y los cuentan o suman ($6+6+6+6$). Resuelven el problema a través de la acción directa.

2. Tarea 2 (Fase Icónica): Dibujando el Almacén.

- *Descripción:* Se pide registrar lo que han hecho en su «Hoja de Inventario». «¿Cómo podemos dibujarlo para que se vea claro cómo estaban organizados?».
- *Acción:* Los equipos dibujan en papel cuadriculado las 4 cajas como un *array* (rectángulo de 4×6). Esta representación visual es el puente entre la acción y el símbolo.

3. Tarea 3 (Fase Simbólica): Creando la Etiqueta Eficiente.

- *Descripción:* El docente introduce la necesidad de un lenguaje más eficaz. «Escribir $6+6+6+6$ es un poco largo. ¿Conocéis una forma más corta de escribir esto?».
- *Acción:* Se presenta el símbolo de la multiplicación ($\times$) como la forma de escribir “4 veces el 6”. Se conecta la suma repetida, el array y la nueva expresión: $6 + 6 + 6 + 6 = 4 \times 6 = 24$.

4. Tarea 4 (Inversión y Aplicación): Organizando lo Suelto.

- *Descripción:* «Ahora nos han llegado 27 coches sueltos y tenemos que guardarlos en cajas de 5. ¿Cuántas cajas completas podemos llenar? ¿Sobra alguno?».
- *Acción:* Los equipos usan contadores para formar grupos de 5 (división cuotitiva). Descubren que pueden formar 5 grupos y sobran 2 coches.

5. Tarea 5 (Puesta en Común e Institucionalización): El Inventario Final.

- *Acción:* Cada equipo presenta su Hoja de Inventario. El docente formaliza el vocabulario: *multiplicación*, *factores*, *producto*, *división*, *cociente*, *resto*. Se valida colectivamente que la multiplicación es la forma más eficiente para grupos iguales.

■ Atención a la Diversidad (DUA)

Implicación (el «porqué»):

- *Captar el interés:* El contexto de la juguetería es universalmente motivador. El reto de ser “responsables de logística” les da un rol activo y con propósito.
- *Mantener el esfuerzo:* El trabajo en equipo fomenta la colaboración. La tarea es de “suelo bajo” (todos pueden empezar contando) y “techo alto” (ver extensión).

Representación (el «qué»):

- *Percepción:* Se usa material manipulativo (policubos), representaciones

icónicas (arrays) y simbólicas (operaciones).

- *Lenguaje*: Se parte del lenguaje natural (“cajas de”, “veces”) para llegar al lenguaje matemático (“multiplicación por”).

Acción y Expresión (el «cómo»):

- *Apoyo*: Para alumnado con dificultades, se pueden usar números más pequeños (ej. 3 cajas de 4). La “Hoja de Inventario” puede estar más pautada.
- *Extensión*: Para alumnado con altas capacidades, se puede plantear un problema inverso: «Tenemos 24 polícubos. ¿De cuántas formas diferentes podemos empaquetarlos en cajas iguales? (factores de 24)». O añadir una variable de coste.

■ *Evaluación del Aprendizaje*

Formativa (durante el proceso):

- *Técnica*: Observación sistemática.
- *Instrumento*: Lista de cotejo (ver Tabla 15.1) para registrar si los alumnos transitan de estrategias aditivas a multiplicativas y cómo representan el problema.

Sumativa (del producto final):

- *Técnica*: Análisis de las producciones.
- *Instrumento*: Rúbrica para evaluar la «Hoja de Inventario del Almacén» (ver Tabla 15.2).

Tabla 15.1: Lista de Cotejo para la observación durante la SdA «El Gran Inventario».

Alumno/a	Usa estrategias de conteo/suma repetida	Representa la situación con un array	Conecta la suma repetida con la multiplicación
Elena R.	SÍ	SÍ (con ayuda)	SÍ
Marco G.	SÍ	NO (dibuja grupos sueltos)	Con dificultad
Sofía M.	Pasa directamente a la suma	SÍ	SÍ
...			

15.5.3 La Planificación como Práctica Reflexiva: De Arquitecto a Artista del Aula

Este capítulo ha buscado transformar la percepción de la planificación didáctica: de un mero requisito administrativo a un acto de *diseño intelectual y creativo*. Hemos argumentado que la planificación no es el mapa rígido de un territorio, sino la brújula y las herramientas con las que el personal docente navega el complejo y dinámico paisaje del aprendizaje en el aula. Lejos de ser un corsé que limita la acción, una planificación profunda y reflexiva es lo que nos otorga la libertad para actuar con

Tabla 15.2: Rúbrica para la evaluación de la «Hoja de Inventario del Almacén».

Criterio	Nivel 1: Iniciado	Nivel 2: En Proceso	Nivel 3: Conseguido
<i>Representación del Problema</i>	Dibuja los objetos de forma desorganizada.	Dibuja los grupos de forma clara, pero no necesariamente en un array.	Utiliza una disposición en array para representar visualmente la situación.
<i>Cálculo Aditivo</i>	Calcula el total contando uno a uno. Muestra errores.	Escribe y calcula correctamente la suma repetida.	Escribe y calcula la suma repetida de forma autónoma y sin errores.
<i>Conexión Multiplicativa</i>	No utiliza la notación de la multiplicación o la usa de forma incorrecta.	Escribe la multiplicación con ayuda del docente, pero no explica su significado.	Conecta de forma autónoma la suma repetida y el array con la multiplicación, explicando el significado.

propósito y eficacia.

La idea fundamental que articula este capítulo es la concepción de la planificación como un *ciclo de práctica reflexiva*. No es un proceso lineal que termina cuando la clase comienza, sino un ciclo continuo de previsión, acción y ajuste, tal y como se ilustra en la Figura 15.9. Este modelo, inspirado en los trabajos de teóricos de la educación como Donald Schön, nos aleja de la idea de un docente como un mero técnico que aplica planes prediseñados y nos acerca al de un profesional reflexivo que aprende y refina su práctica constantemente (Schön, 1998).

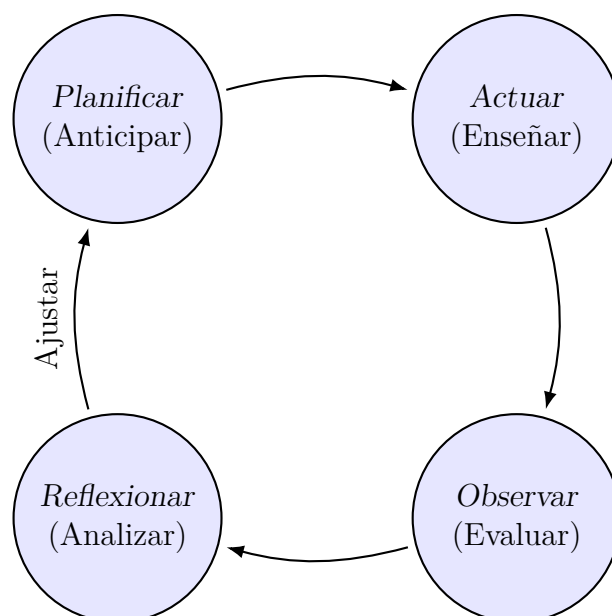


Figura 15.9: El ciclo de la práctica docente reflexiva. La planificación no es solo el punto de partida, sino el resultado de una reflexión continua sobre la práctica.

Una planificación eficaz nos libera. Al haber anticipado los objetivos, las posibles

estrategias del alumnado, los obstáculos conceptuales y los puntos clave de la discusión, el docente puede desplazar su energía durante la clase. Ya no se centra en «¿qué hago ahora?», sino que puede dedicarse a la tarea verdaderamente profesional: *escuchar y observar el pensamiento de sus estudiantes*. Esta libertad le permite actuar como un “detective cognitivo”, que diagnostica concepciones erróneas; como un “orquestador de discusiones”, que conecta ideas y fomenta el diálogo; y como un guía experto que proporciona el andamiaje preciso en la Zona de Desarrollo Próximo de cada alumno o alumna (Vygotsky, 1978/2009).

En definitiva, la planificación didáctica en aritmética es el acto por el cual el docente ejerce su máxima competencia profesional. Es el momento donde el conocimiento del contenido, el conocimiento del currículo y el conocimiento del aprendiz se fusionan para crear una experiencia de aprendizaje coherente, significativa y potente (Shulman, 1986/2019). Es la práctica que nos permite no solo enseñar matemáticas, sino enseñar a pensar matemáticamente.

La enseñanza es el más complejo de los actos humanos. Es una amalgama de ciencia, arte y compromiso ético, donde el conocimiento profundo de la materia se encuentra con la comprensión profunda del aprendiz.

15.6 Para la Reflexión y el Portfolio Docente

1. Análisis Crítico de una Secuencia Didáctica Existente.

Consigna: Selecciona una unidad didáctica dedicada a las fracciones de un libro de texto de 3º Ciclo de Educación Primaria. Analiza críticamente su propuesta a la luz de los principios estudiados en este manual.

- *Secuencia Pedagógica:* La secuencia de tareas propuestas, ¿respeta la progresión Enactivo-Icónico-Simbólica de Bruner? ¿O introduce los conceptos de forma simbólica prematuramente? Justifica tu respuesta con ejemplos concretos del libro.
- *Demanda Cognitiva:* Clasifica al menos tres de las tareas principales según el marco de demanda cognitiva de Stein et al. (2000/2009). ¿Predominan las tareas de baja demanda (memorización, procedimientos sin conexión) o las de alta demanda (procedimientos con conexión, hacer matemáticas)?
- *Atención a la Diversidad:* ¿De qué manera la propuesta atiende (o no) a la diversidad del alumnado? ¿Propone múltiples medios de representación (DUA)? ¿Ofrece tareas con un «suelo bajo y un techo alto» como sugiere Boaler (2020)?
- *Propuesta de Mejora:* Basándote en tu análisis, ¿qué modificación clave introducirías en la secuencia para alinearla más con un enfoque competencial y constructivista?

2. Diseño de una Tarea de «Suelo Bajo, Techo Alto».

Consigna: Transforma un ejercicio aritmético tradicional en un problema abierto y rico, que sea accesible para todo el alumnado pero que a la vez ofrezca posibilidades de profundización.

- *Ejercicio Original (Suelo alto, techo bajo)*: Calcula 18×5 .
- *Tu Tarea Rediseñada (Suelo bajo, techo alto)*: Diseña una tarea que parta del mismo núcleo matemático pero que invite a la exploración. Por ejemplo:

«El número 90 es muy interesante. ¿Puedes encontrar dos números que multiplicados den 90? ¿Puedes encontrar más parejas? ¿Y si uno de los números tuviera que ser un 5? ¿Y si uno tuviera que ser un número de dos cifras acabado en 2? ¿Cuál es la pareja de factores cuya suma es mayor? ¿Y cuya suma es menor?»

- *Justificación Didáctica*: Explica brevemente (aprox. 150 palabras) por qué tu nueva tarea tiene un «suelo bajo» (es accesible para todos), un «techo alto» (permite la extensión) y promueve un pensamiento matemático más flexible y profundo que el ejercicio original.

3. *Planificación de un Clima de Aula Motivacional: El Modelo TARGET en Acción.*

Consigna: Elige el contenido aritmético «Introducción al algoritmo de la división» para una clase de 4º de Primaria. Describe una acción docente concreta que realizarías para cada una de las seis dimensiones del modelo TARGET (Ames, 1992) para crear un clima motivacional orientado a la maestría.

- *Task (Tarea)*:
- *Authority (Autoridad/Autonomía)*:
- *Recognition (Reconocimiento)*:
- *Grouping (Agrupamiento)*:
- *Evaluation (Evaluación)*:
- *Time (Tiempo)*:

4. *Micro-Diseño de una Situación de Aprendizaje (SdA).*

Consigna: Diseña una Situación de Aprendizaje breve (1-2 sesiones) para un contenido aritmético del 2º Ciclo: *La comparación de fracciones con distinto denominador*. La SdA debe reflejar los principios de la planificación didáctica y el marco curricular andaluz.

Utiliza una plantilla (puedes basarte en la del manual) que incluya los siguientes elementos esenciales:

- *Título y Producto Final*: Un nombre motivador y una tarea final tangible que evidencie el aprendizaje.
- *Concreción Curricular*: Especifica la Competencia Específica, los Criterios de Evaluación y los Saberes Básicos clave que se abordan.
- *Secuencia de Tareas*: Detalla una secuencia lógica que siga la progresión de Bruner. Incluye al menos:
 - a) Una *tarea enactiva* para generar la necesidad de comparar (ej. repartir dos tipos de pizza diferentes).
 - b) Una *tarea icónica* para visualizar el problema y descubrir la necesidad de una unidad común (ej. usando el Muro de Fracciones).

- c) Una *tarea simbólica* donde se conecte el modelo visual con la notación matemática.
- *Medidas de Atención a la Diversidad (DUA) y Evaluación:* Describe brevemente cómo ofrecerías múltiples formas de representación y expresión, y qué instrumento de evaluación formativa (ej. una lista de cotejo) usarías.

Epílogo: El Desafío Continuo: Aprender a Enseñar Matemáticas

HEMOS llegado al final de este recorrido por los fundamentos, estrategias y recursos para la enseñanza de la aritmética en la Educación Primaria. Juntos hemos transitado desde los cimientos psicopedagógicos y curriculares que sustentan nuestra labor, hemos explorado el corazón de la aritmética al desentrañar la naturaleza de los números y las operaciones, y finalmente hemos abordado la construcción de una práctica docente reflexiva y eficaz. A lo largo de estas páginas, el objetivo ha sido siempre el mismo: trascender la visión de la aritmética como un conjunto de algoritmos para revelar su verdadera esencia como una disciplina que fomenta la comprensión profunda, el razonamiento lógico y la aplicación funcional y crítica del conocimiento matemático.

Si algo hemos aprendido, es que enseñar aritmética es una de las tareas más complejas y, a la vez, más gratificantes de la docencia. Va mucho más allá de la mera transmisión de algoritmos o la memorización de hechos. Implica ser un observador atento de los procesos de pensamiento del alumnado, un diagnosticador de sus dificultades, un facilitador de descubrimientos y, sobre todo, un *arquitecto de experiencias de aprendizaje* que despierten la curiosidad y construyan la confianza. Esta visión no es una mera preferencia pedagógica, sino el núcleo de la filosofía que impregna la normativa educativa vigente. Al diseñar *Situaciones de Aprendizaje* que priorizan el significado, que valoran la diversidad de estrategias y que conectan con la realidad del alumnado, no solo estamos aplicando buena didáctica, sino que estamos cumpliendo con el mandato explícito de la LOMLOE y de la normativa andaluza, que nos insta a desarrollar la competencia matemática en todas sus dimensiones.

Para ello, nuestra labor se ha revelado como la de un profesional que posee un profundo y entrelazado conocimiento del contenido, del aprendiz y de la pedagogía (Ball et al., 2008; Shulman, 1986/2019). El camino del maestro o de la maestra de matemáticas es un desafío continuo, una búsqueda constante de las mejores formas de hacer accesibles conceptos que a menudo se perciben como abstractos o difíciles. Este manual ha pretendido ofrecer un mapa inicial para este viaje, pero la verdadera pericia se forjará en la práctica reflexiva, en el diálogo con colegas y en la formación permanente. Las teorías y estrategias aquí presentadas no son recetas infalibles, sino herramientas para pensar, para cuestionar la propia práctica y para tomar decisiones pedagógicas informadas.

Es fundamental recordar que cada niño y niña llega al aula con un bagaje único de experiencias, intuiciones y actitudes hacia las matemáticas. Nuestra labor como educadores es construir sobre esas bases, reconociendo el potencial de cada uno y creando un ambiente donde el error sea una oportunidad para aprender y la pregunta sea bienvenida. Fomentar una actitud positiva, desmitificando la idea de que las matemáticas son una disciplina solo para unos pocos elegidos, es quizás uno de los legados más importantes que podemos dejar en nuestro alumnado (Boaler, 2020). Esta es la esencia del *Sentido Socioafectivo* que nuestro currículo nos llama a cultivar.

La recompensa de este desafío es inmensa: ser testigos del momento «¡eureka!»

en el rostro de un estudiante que comprende un nuevo concepto, observar cómo desarrollan la confianza para enfrentarse a problemas complejos, y saber que estamos contribuyendo a formar una ciudadanía crítica, analítica y capaz de utilizar el lenguaje universal de las matemáticas. Nuestra meta final no es que el alumnado sepa la respuesta, sino que sepa qué hacer cuando no la sabe. Esa es la esencia de formar *pensadores*, no solo calculistas; de empoderar a las futuras generaciones para que puedan interpretar, cuestionar y transformar el mundo que les rodea.

Bibliografía

- Alba Pastor, C. (Ed.). (2018). *Diseño Universal para el Aprendizaje: un modelo teórico-práctico para una educación inclusiva de calidad*. Ediciones Morata.
- Ames, C. (1992). Classrooms: Goals, structures, and student motivation. *Journal of Educational Psychology*, 84(3), 261-271. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.84.3.261>
- Andrade, H. G. (2000). Using rubrics to promote thinking and learning. *Educational leadership: journal of the Department of Supervision and Curriculum Development*, 57(5), 13-18.
- Ashcraft, M. H. (2002). Math anxiety: Personal, educational, and cognitive perspectives. *Current Directions in Psychological Science*, 11(5), 181-185. <https://doi.org/10.1111/1467-8721.00196>
- Assessment Reform Group. (2002). *Assessment for learning: 10 principles to guide classroom practice*. Nuffield Foundation.
- Ausubel, D. P., Novak, J. D., & Hanesian, H. (1983/1991). *Psicología educativa : un punto de vista cognoscitivo*. Trillas.
- Bachelard, G. (1938/2000). *La formation de l'esprit scientifique: contribution à une psychanalyse de la connaissance objective* (23th). Siglo XXI Editores.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational-number concepts. En R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91-126). Academic Press.
- Beilock, S. L., Gunderson, E. A., Ramirez, G., & Levine, S. C. (2010). Female teachers' math anxiety affects girls' math achievement. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 107(5), 1860-1863. <https://doi.org/10.1073/pnas.0910967107>
- Black, P., & Wiliam, D. (2010). Inside the Black Box: Raising Standards through Classroom Assessment. *Phi Delta Kappan*, 92(1), 81-90. <https://doi.org/10.1177/003172171009200119>
- Boaler, J. (2020). *Mentalidades matemáticas: cómo liberar el potencial de los estudiantes mediante las matemáticas creativas, mensajes inspiradores y una enseñanza innovadora*. Editorial Sirio.
- Borasi, R. (1987). Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the Learning of Mathematics*, 7(3), 2-8.
- Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (1999). *Historia de la matemática*. Alianza Editorial.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Libros del Zorzal.
- Bruner, J. S. (1966/1972). *Hacia una Teoría de la Instrucción*. Unión Tipográfica Editorial Hispano.
- Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*. Heinemann Portsmouth, NH.
- Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Heinemann.

- Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1982). The development of Addition and Subtraction Problem-Solving Skills. En T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 9-24). Lawrence Erlbaum Associates.
- CAST. (2018). Universal Design for Learning Guidelines version 2.2. <http://udlguidelines.cast.org>
- Chamorro, M. d. C. (Ed.). (2003/2006). *Didáctica de las Matemáticas para Primaria*. Pearson Educación.
- Chevallard, Y. (1991/2000). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Aique Grupo Editor.
- Cid, E., Godino, J. D., & Batanero, C. (2003). *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros* [Recuperado de la web del Proyecto Edumat-Maestros]. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2020). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781003083528>
- Courant, R., & Robbins, H. (1941/1979). *¿Qué es la matemática?: una exposición elemental de sus ideas y métodos*. Aguilar S.A.
- Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics*. Oxford University Press.
- Descartes, R. (1947). *La Geometría*. Espasa-Calpe.
- Dienes, Z. P. (1960/1967). *Building up mathematics*. Hutchinson Educational.
- Duda, J. L., & Nicholls, J. G. (1992). Dimensions of achievement motivation in school-work and sport. *Journal of Educational Psychology*, 84(3), 290-299. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.84.3.290>
- Dweck, C. S. (2016). *Mindset: La actitud del éxito* [Título original: Mindset: The New Psychology of Success (2006)]. Ediciones Sirio.
- Euclides. (sobre el 300. a.C/2016). *Elementos. Libros I-IV*. Gredos.
- Foley, A. E., Herts, J. B., Borgonovi, F., Guerriero, S., Levine, S. C., & Beilock, S. L. (2017). The Math Anxiety-Performance Link: A Global Phenomenon. *Current Directions in Psychological Science*, 26(1), 52-58. <https://doi.org/10.1177/09637214166672>
- Freudenthal, H. (1983/2002). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Springer Nature Link.
- Fuson, K. C. (1988). Children's counting and concepts of number.
- Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 243-275). Macmillan.
- Gamow, G. (1947/1993). *One, two, three... infinity: Facts and speculations of science*. RBA.
- Gelman, R., & Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number*. Harvard University Press.
- Gipps, C. V. (1994). *Beyond testing: Towards a theory of educational assessment*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203486009>

- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2004). *Didáctica de las Matemáticas para Maestros* [Disponible online en el sitio web del autor]. Proyecto Edumat-Maestros / Universidad de Granada.
- Hattie, J. (2009). *Visible Learning: A Synthesis of Over 800 Meta-Analyses Relating to Achievement* [La editorial Paraninfo ha publicado en español "Aprendizaje visible para profesores: Maximizando el impacto en el aprendizaje" (2017), que resume las ideas principales.]. Routledge.
- Heath, T. L. (1921). *A History of Greek Mathematics, Volume 1: From Thales to Euclid*. The Clarendon press.
- Heirdsfield, A. M., & Cooper, T. J. (2004). Factors affecting the process of proficient mental addition and subtraction: A study of flexible and inflexible computers. *The Journal of Mathematical Behavior*, 23(4), 443-463. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2004.09.005>
- Hiebert, J., & Wearne, D. (1992). Links between teaching and learning place value with understanding in first grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(2), 98-122.
- Humphreys, C., & Parker, R. (2015). *Making Number Talks Matter: Developing Mathematical Practices and Deepening Understanding, Grades 3-10*. Routledge.
- Ifrah, G. (1997). *Las cifras: Historia de una gran invención*. Alianza Editorial.
- Kamii, C. (1985/2003). *El niño reinventa la aritmética: implicaciones de la teoría de Piaget*. A. Machado Libros.
- Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. En R. A. Lesh (Ed.), *Number and measurement: Papers from a research workshop* (pp. 101-144). RIC Information Analysis Center for Science, Mathematics, Environmental Education. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED120027.pdf>
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. National Research Council.
- Lamon, S. J. (2020). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (4th). Routledge.
- Lee, C. (2006). *Language for Learning Mathematics: Assessment for Learning in Practice*. Open University Press.
- Martínez Montero, J. (2008). *Competencias básicas en matemáticas. Una nueva práctica (Educación infantil y primaria)*. Wolters Kluwer España.
- McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 2-8.
- McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 575-596). Macmillan Publishing Company.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All*. NCTM.

- Ng, S. F., & Lee, K. (2009). *The Model Method: Singapore Children's Tool for Representing and Solving Algebraic Word Problems* (Vol. 40). <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.40.3.0282>
- Niss, M., & Jensen, T. H. (2011/2002). Competencies and mathematics learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching in Denmark [English edition]. *Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie*, 18. https://www.researchgate.net/publication/270585013_Competencies_and_Mathematical_Learning_Ideas_and_inspiration_for_the_development_of_mathematics_teaching_and_learning_in_Denmark
- Organisation for Economic Co-operation and Development. (2019). *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/b25efab8-en>
- Paivio, A. (1991). Dual Coding Theory: Retrospect and Current Status. *Canadian Journal of Psychology/Revue canadienne de psychologie*, 45(3), 255-287. <https://doi.org/10.1037/h0084295>
- Parrish, S. (2010). *Number Talks: Helping Children Build Mental Math and Computation Strategies, Grades K-5*. Math Solutions.
- Pehkonen, E. (1995). *Pupils' View of Mathematics: Initial Report for an International Comparison Project* (Research Report N.º 152). University of Helsinki, Department of Teacher Education. Helsinki. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED419712.pdf>
- Perrenoud, P. (2004). *Diez nuevas competencias para enseñar*. Editorial Graó.
- Peterson, M. (2000). The History of the Order of Operations. <https://www.themathdoctors.org/order-of-operations-historical-caveats/>
- Piaget, J. (1941/1967). *La Génesis del número en el niño*. Guadalupe.
- Piaget, J. (1964/2018). *Seis estudios de psicología*. Editorial Labor.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1969/1997). *La Psicología del niño*. Ediciones Morata.
- Pólya, G. (1945/1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas.
- Richards, J. (2002). Mathematical Discussions. En E. Von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 13-51). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/0-306-47201-5_2
- Richardson, F. C., & Suinn, R. M. (1972). The Mathematics Anxiety Rating Scale: Psychometric data. *Journal of Counseling Psychology*, 19(6), 551-554. <https://doi.org/10.1037/h0033456>
- Schmandt-Besserat, D. (1992). *Before Writing, Volume I: From Counting to Cuneiform*. University of Texas Press.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.
- Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics (Reprint). *Journal of Education*, 196(2), 1-38. <https://doi.org/10.1177/002205741619600202>
- Schön, D. (1998). *El profesional reflexivo: cómo piensan los profesionales cuando actúan*. Paidós.
- Schreiber, M. (2007). Chronological Interpretation of Mayan Numerals [Consultado el 27-08-2025]. <https://demonstrations.wolfram.com/ChronologicalInterpretationOfMayanNumerals/>
- Segovia, I., Castro, E., Rico, L., & Flores, P. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Editorial Síntesis S.A.

- Shulman, L. S. (1986/2019). Aquellos que entienden: Desarrollo del conocimiento en la enseñanza. *Profesorado: Revista de Currículum y formación del profesorado*, 23(3), 269-295.
- Siegler, R. S., & Ramani, G. B. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child Development Perspectives*, 75(2), 428-444. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2004.00684.x>
- Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *The Arithmetic Teacher*, 26(3), 9-15.
- Skemp, R. R. (1993). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas* (Vol. 15). Ediciones Morata.
- Sowder, J. T. (1992). Estimation and number sense. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371-389). Macmillan.
- Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2000/2009). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. Teachers College Press.
- Stevin de Brujas, S. (1585/2015). *La Disme (Aritmética decimal)*. Prensas de la Universidad de Zaragoza.
- Stifel, M. (1544). *Arithmetica Integra*. Iohannes Petreium.
- Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculation. *Educational Studies in Mathematics*, 50, 29-47. <https://doi.org/10.1023/A:1020572803437>
- Treasure, D. C., & Roberts, G. C. (1995). Applications of Achievement Goal Theory to Physical Education: Implications for Enhancing Motivation. *Quest*, 47(4), 475-489. <https://doi.org/10.1080/00336297.1995.10484170>
- Van de Walle, K. S., John A. Karp, & Bay-Williams, J. M. (2018). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally* (10th). Financial Times Prentice Hall.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2020). Realistic Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 713-717). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_170
- van Hiele, P. (1986). *Structure and insight: a Theory of Mathematics Education*. Academic Press.
- Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 39-59). Lawrence Erlbaum Associates.
- Vergnaud, G. (1983). *Multiplicative structures* (R. Lesh & M. Landau, Eds.).
- Vergnaud, G. (1997). The Nature of Mathematical Concepts. En T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective* (pp. 5-28). Psychology Press.
- Vergnaud, G. (1991/2010). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza en las matemáticas en la escuela primaria*. Trillas.
- Von Glasersfeld, E. (1995/2012). A constructivist approach to teaching. En L. P. Steffe & J. Gale (Eds.), *Constructivism in education* (pp. 3-15). Taylor & Francis Group. <https://doi.org/10.4324/9780203052600>

- Vygotsky, L. S. (1978/2009). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Crítica.
- Wiggins, G., & McTighe, J. (2005). *Understanding by design*. Association for Supervision; Curriculum Development.
- Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477. <https://doi.org/10.2307/749877>
- Zabala, A., & Arnau, L. (2007). *11 ideas clave. Cómo aprender y enseñar competencias*. Editorial Graó.

A Glosario de Teorías

ABN (Algoritmo Abierto Basado en Números) Algoritmo alternativo para las operaciones aritméticas básicas (suma, resta, multiplicación, división) que se caracteriza por trabajar con los números en su totalidad (sin descomponerlos en cifras aisladas de forma tradicional), operar generalmente de izquierda a derecha (empezando por los órdenes de magnitud mayores), y permitir flexibilidad en los procesos de cálculo basándose en la descomposición y composición aditiva o multiplicativa de los números. Fomenta el cálculo mental y la comprensión del *Sentido Numérico*. 525, 528

Algoritmo Conjunto finito y ordenado de instrucciones, reglas o pasos que permiten realizar una tarea o resolver un tipo de problema específico. En aritmética, se refiere a los procedimientos estándar para realizar operaciones como la suma, resta, multiplicación o división. 525

Andamiaje (Scaffolding) Término acuñado en el marco de la teoría de Vygotsky, que se refiere al apoyo temporal (estructuras, guías, preguntas) que un adulto o compañero más capaz proporciona a un aprendiz para ayudarlo a realizar una tarea que está en su *Zona de Desarrollo Próximo (ZDP)*, con el objetivo de que eventualmente pueda realizarla de forma autónoma. 525

Aprendizaje Significativo Término acuñado por Ausubel. Tipo de aprendizaje en el que la nueva información se relaciona de manera sustantiva y no arbitraria con la estructura cognitiva preexistente del alumno, es decir, con lo que ya sabe. Se opone al aprendizaje memorístico o mecánico. 525

Campo Aditivo Concepto de Vergnaud. Es el conjunto de situaciones problemáticas cuya resolución implica operaciones de suma o resta. Incluye problemas de cambio, combinación y comparación. 525

Campo Conceptual Concepto de Vergnaud. Es el conjunto de situaciones cuyo dominio requiere una variedad de conceptos, procedimientos y representaciones simbólicas en estrecha conexión. 525

Campo Multiplicativo Concepto de Vergnaud. Es el conjunto de situaciones problemáticas cuya resolución implica operaciones de multiplicación o división. Incluye problemas de grupos iguales (razón simple), comparación multiplicativa (factor de escala) y producto de medidas (combinatoria, área). 525

Cardinal (Aspecto Cardinal del Número) Propiedad de un conjunto que indica la cantidad de elementos que contiene. Responde a la pregunta "¿cuántos hay?". El último número enunciado en un proceso de *Contar* correcto representa el cardinal del conjunto. 525, 526

Competencia Matemática Capacidad de un individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos, incluyendo el razonamiento matemático y el uso de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas. 525

Composición/Descomposición Numérica Habilidad para entender que un núme-

ro puede formarse (componerse) a partir de la suma de otros (ej., $7 = 5 + 2$) o dividirse (descomponerse) en sumandos (ej., $125 = 100 + 20 + 5$). Fundamental para el cálculo mental y la comprensión de algoritmos. 525

Conservación de la Cantidad (Piaget) Comprensión de que el número de elementos de un conjunto permanece invariante a pesar de cambios en su disposición espacial o perceptual. Es un hito clave en el desarrollo del pensamiento operacional concreto. 525, 528

Constructivismo Teoría del aprendizaje que sostiene que el conocimiento no se recibe pasivamente del exterior, sino que es construido activamente por el sujeto a través de la interacción con su entorno y la reorganización de sus propias estructuras mentales. 525

Contar Proceso de asignar secuencialmente numerales (palabras-número o símbolos) a los elementos de una colección para determinar su *Cardinal (Aspecto Cardinal del Número)* o el *Ordinal (Aspecto Ordinal del Número)* de un elemento. 525

Contexto Continuo (para fracciones/decimales) Situaciones donde la unidad de referencia es un todo divisible que puede ser fraccionado en partes (ej., una longitud, un área, un volumen, una cantidad de líquido). 525

Contexto Discreto (para fracciones/decimales) Situaciones donde la unidad de referencia es una colección de objetos individuales (ej., un grupo de personas, canicas). 525

Currículo Conjunto de objetivos, contenidos, criterios metodológicos y de evaluación que orientan la práctica educativa en un determinado nivel o área. 525

Cálculo Mental Estratégico Habilidad para realizar operaciones aritméticas utilizando conscientemente las propiedades de los números y de las operaciones, sin recurrir a algoritmos estándar escritos, y eligiendo la estrategia más adecuada para cada caso particular. No se limita a "hacer cuentas de cabeza" de forma mecánica. 525

Decimal Exacto (o Finito) Número decimal que tiene un número limitado de cifras decimales. Proviene de una *Fracción Generatriz* cuyo denominador solo tiene factores primos 2 y/o 5. 525

Decimal Periódico Número decimal que tiene un número infinito de cifras decimales que se repiten siguiendo un patrón llamado periodo.

- *Puro*: El periodo comienza inmediatamente después de la coma.
- *Mixto*: Hay cifras decimales no periódicas (anteperiodo) entre la coma y el inicio del periodo.

525

Denominador En una *Fracción* $\frac{a}{b}$, es el número b (distinto de cero) que indica en cuántas partes iguales se considera dividida la unidad de referencia. 525

Didáctica de la Aritmética Disciplina científica que estudia los procesos de enseñanza y aprendizaje de los contenidos aritméticos, analizando los saberes, las metodologías, los recursos y las dificultades asociadas. 525

División Entera (o Euclídea) Operación que, dados un dividendo (D) y un divisor ($d \neq 0$), consiste en encontrar un cociente (c) y un resto (r) tales que $D = d \cdot c + r$,

donde $0 \leq r < |d|$. 525

Estimación Proceso de obtener un resultado aproximado a una operación o medida, sin necesidad de una precisión exacta, utilizando estrategias como el redondeo o el uso de números compatibles. 525

Estrategia Heurística (o Heurístico) Regla general, técnica o "atajo" mental que guía la búsqueda de soluciones en la resolución de problemas. No garantiza la solución, pero aumenta las probabilidades de encontrarla. 525

Fracción Expresión de la forma $\frac{a}{b}$ (o a/b , $a : b$) que representa una cantidad o una relación. Puede tener múltiples significados: parte-todo, cociente, razón, operador, etc. 525, 526, 528

Fracción Decimal Fracción cuyo denominador es una potencia de 10 (ej., 10, 100, 1000). 525

Fracción Equivalente Fracciones que, aunque tengan diferente numerador y denominador, representan la misma cantidad o valor. 525

Fracción Generatriz Fracción irreducible que da lugar a un determinado número decimal (exacto o periódico). 525, 526

Fracción Impropia Fracción cuyo numerador es mayor o igual que el denominador, representando una cantidad igual o mayor que la unidad. 525

Fracción Propia Fracción cuyo numerador es menor que el denominador, representando una cantidad menor que la unidad. 525

Fracción Unitaria Fracción cuyo numerador es 1. 525, 528

Hechos Numéricos Básicos (Tablas) Sumas, restas, multiplicaciones y divisiones simples (generalmente con números de una cifra) cuya memorización comprensiva agiliza el cálculo. 525

Jerarquía de Operaciones Orden convencional en el que se deben realizar las operaciones aritméticas en una expresión combinada (paréntesis, potencias/raíces, multiplicaciones/divisiones, sumas/restas). 525

Material Manipulativo Objeto físico que los estudiantes pueden usar para representar y explorar conceptos matemáticos a través de la acción. 525

Mentalidad de Crecimiento (Growth Mindset) Concepto de Carol Dweck. Es la creencia de que la inteligencia y la habilidad se pueden desarrollar a través del esfuerzo, la práctica y el aprendizaje a partir de los errores. Se contrapone a la "mentalidad fija", que considera estas cualidades como innatas e inmutables. 525

Modos de Representación (Bruner) Formas en que se puede representar el conocimiento: enactiva (acción), icónica (imagen) y simbólica (lenguaje/símbolos). 525

Normas Sociomatemáticas Criterios implícitos, específicos del aula de matemáticas, que definen qué se considera una explicación aceptable, una estrategia diferente, una solución eficiente o un error interesante. Guían la discusión y el razonamiento matemático en la comunidad del aula. 525

Numeración Sistema de símbolos y reglas utilizados para representar los números. 525

Numerador En una *Fracción* $\frac{a}{b}$, es el número a que indica cuántas de las partes iguales (*Fracción Unitarias*) en que se ha dividido la unidad se están considerando. 525

Número Decimal Número que utiliza una coma (o punto) decimal para separar la parte entera de la parte fraccionaria, representando una extensión del sistema de numeración de base 10 a cantidades menores que la unidad. 525

Número Entero ($\mathbb{Z}$) Conjunto numérico que incluye los números naturales (enteros positivos), el cero y los números enteros negativos. 525

Número Mixto Número compuesto por una parte entera y una parte fraccionaria propia (ej., $3\frac{1}{2}$). 525

Número Natural ($\mathbb{N}$) Números utilizados para contar y ordenar (1, 2, 3,...). A veces se incluye el 0 según la convención. 525

Número Racional ($\mathbb{Q}$) Número que puede expresarse como el cociente de dos números enteros, con denominador distinto de cero. Incluye a los enteros y a todas las fracciones. Su expresión decimal es exacta o periódica. 525

OAOA (Otros Algoritmos para las Operaciones Aritméticas) Enfoque metodológico que promueve el uso de algoritmos alternativos a los tradicionales, buscando mayor transparencia, comprensión del valor posicional y fomento del cálculo mental. El *ABN (Algoritmo Abierto Basado en Números)* es un ejemplo. 525

Ordinal (Aspecto Ordinal del Número) Propiedad de un número que indica su posición o lugar dentro de una secuencia ordenada (primero, segundo, etc.). 525, 526

Parte-Todo (Significado de la Fracción) Interpretación de la fracción donde el denominador indica el número total de partes iguales en que se divide un todo (unidad) y el numerador indica el número de esas partes que se consideran. 525

Periodo (en decimales periódicos) Grupo de cifras decimales que se repiten indefinidamente. 525

Potencia Expresión matemática que indica la multiplicación repetida de un mismo número (base) tantas veces como indique otro número (exponente). 525

Principio de Conservación (Piaget) *Ver Conservación de la Cantidad (Piaget)* 525

Principio de Correspondencia Uno a Uno (Conteo) Asignar un único numeral a cada objeto contado y usar cada numeral una sola vez. 525

Propiedad Distributiva Propiedad que relaciona la multiplicación con la adición (o sustracción): $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$. Es fundamental para los algoritmos de multiplicación. 525

Razón (Significado de la Fracción) Comparación multiplicativa entre dos cantidades o magnitudes. 525

Recta Numérica Representación visual de los números como puntos en una línea, útil para ordenar, comparar y visualizar operaciones. 525

-
- Recursos Didácticos** Cualquier material o herramienta (manipulativa, gráfica, tecnológica, textual) que se utiliza para facilitar la enseñanza y el aprendizaje. 525
- Regletas de Cuisenaire** Material manipulativo formado por prismas de diferentes longitudes y colores, que representan los números del 1 al 10. Útil para trabajar la composición y descomposición numérica, operaciones y fracciones. 525
- Resolución de Problemas** Proceso cognitivo complejo mediante el cual un individuo intenta alcanzar una meta para la cual no tiene un camino de solución inmediato. Eje central del aprendizaje matemático. 525
- Sentido Numérico** Intuición y comprensión profunda sobre los números, sus relaciones, su magnitud y el efecto de las operaciones sobre ellos. Incluye flexibilidad en el cálculo mental y la estimación. 525
- Sistema de Numeración Decimal (SND)** Sistema de numeración posicional de base 10, que utiliza diez cifras (0-9) y donde el valor de cada cifra depende de su posición. 525
- Subitización** Capacidad de reconocer de forma rápida y exacta la cantidad de elementos en una pequeña colección (generalmente hasta 4 o 5) sin necesidad de contarlos uno a uno. 525
- Valor Posicional** Principio de los sistemas de numeración posicionales según el cual el valor de una cifra depende de la posición que ocupa dentro del número. 525
- Zona de Desarrollo Próximo (ZDP)** Concepto clave de la teoría de Vygotsky. Es la distancia entre el nivel de desarrollo actual de un alumno (lo que puede hacer de forma independiente) y su nivel de desarrollo potencial (lo que puede hacer con la guía de un adulto o la colaboración de compañeros más capaces). La enseñanza eficaz debe situarse en esta zona. 525

