

Fundamentos del Procesado Digital de la Señal

- 0 Introducción. Procesado analógico de señales
- 1 Procesado digital de señales analógicas
- 2 Filtros digitales. Aproximación
- 3 Filtros digitales. Realización
- 4 Transformada discreta de Fourier
- 5 Aplicaciones de la DFT

Universidad de Málaga

Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Telecomunicación

Departamento de Ingeniería de Comunicaciones

Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación

Tema 0 Introducción. Procesado analógico de señales

Introducción

- Procesados clásicos en telecomunicación
- Realización analógica
- Realización digital
- Ventajas e inconvenientes del procesado digital

Diseño de sistemas de procesado analógico

- Especificación. Sistemas ideales. Filtros selectivos con tolerancias
- Aproximación
- Realización

Fundamentos del procesamiento digital de la señal

¿Señales?

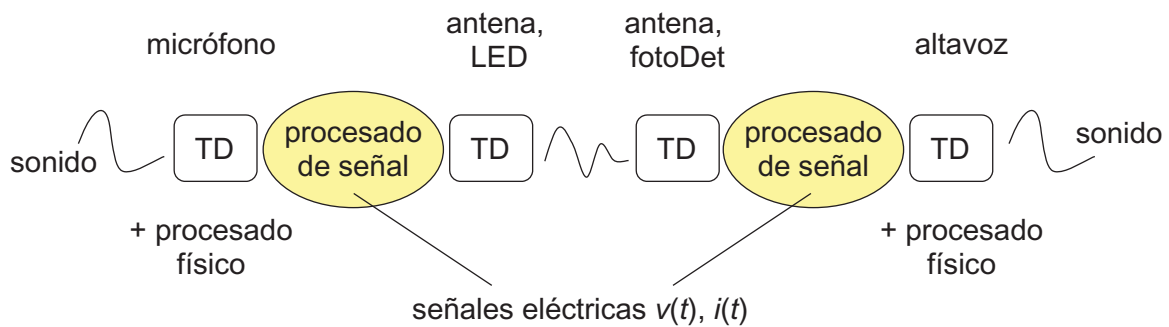
¿Procesado de señales?

¿Para qué sirven?

¿Procesado digital de señales?

Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. **GITT-FPDS**

- La **información** se soporta en **señales**
 - funciones matemáticas del tiempo
- En su **origen** las son **señales físicas**
 - presión sonora, luz, electricidad
- Para el **transporte y procesado** se convierten a **señales eléctricas**
 - **transducción**



Procesado de señal en Telecomunicación



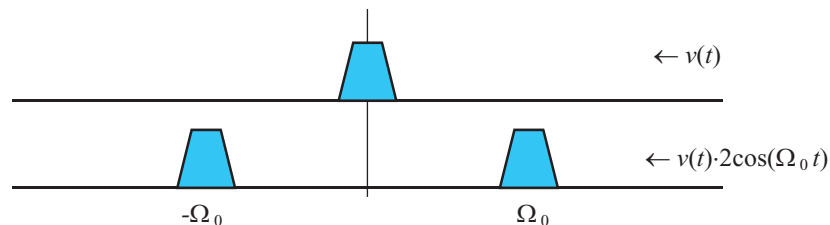
- **Adaptar** a los **medios** de transmisión
 - **Modulación** conversión a señales transmisibles (ej.: RF)
 - **Compensación** de distorsión o deformación de señales
 - **Eliminación de interferencias** señales indeseadas que se mezclan en el camino
- **Mezclar y separar**
 - **Multiplexación** conversión a señales separables (mezcla y separación)
- **Adaptar** a los **fuentes** de información (ej.: compresión audio)

Procesado clásico:

- Desplazamiento en frecuencia
 - Filtros selectivos en frecuencia
- + igualación

Desplazamiento en frecuencia

- para transmisión en la banda que permite el medio de transmisión (ej.: radio)



- para Multiplexación en frecuencia (FDM)

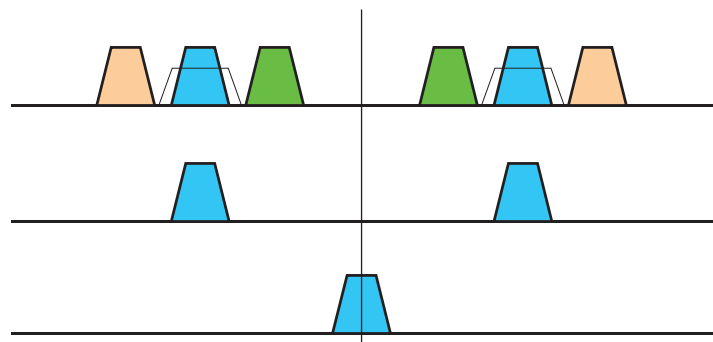


Procesado clásico:

- Desplazamiento en frecuencia
- Filtros selectivos en frecuencia

Filtros selectivos en frecuencia

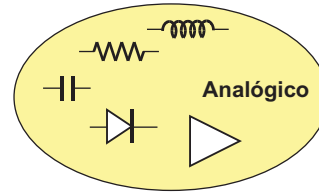
- Demultiplexación: para seleccionar el canal



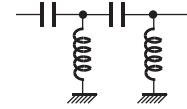
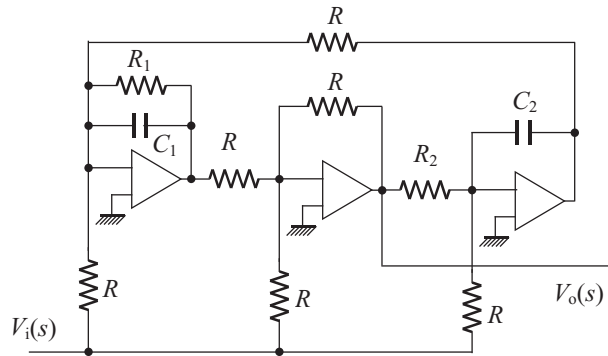
- Multiplexación: para limitar la banda antes del desplazamiento en frecuencia
ej.: voz 23 kHz \rightarrow 3,4 kHz

Procesado analógico

Señales eléctricas:
 $v(t), i(t)$



- Filtros selectivos



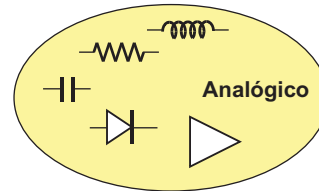
ej.: Butterworth 2º orden

realizado con R, C y amp

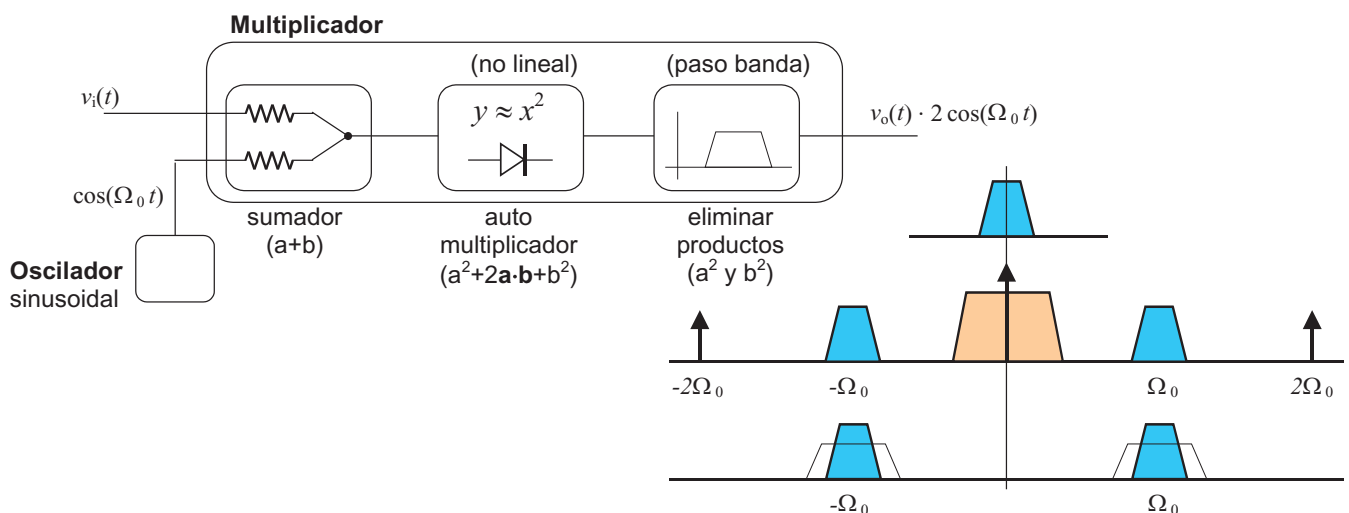
o con L y C

Procesado analógico

Señales eléctricas:
 $v(t), i(t)$

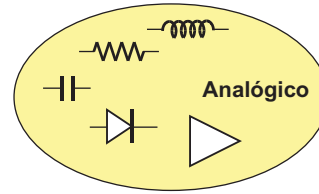


- Desplazamiento en frecuencia con oscilador y multiplicador

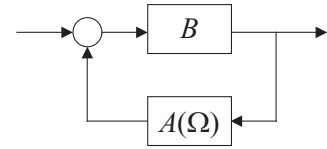
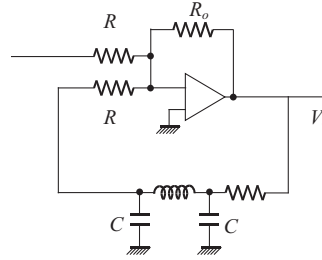
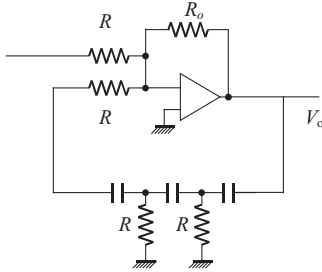


Procesado analógico

Señales eléctricas:
 $v(t), i(t)$



- Oscilador sinusoidal

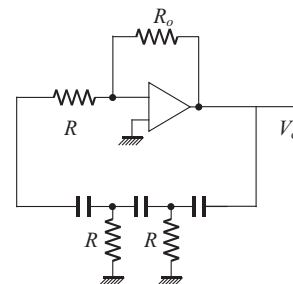
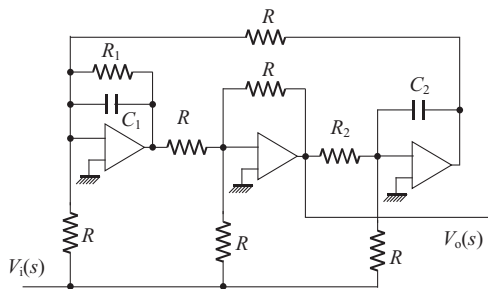
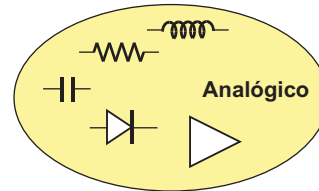


$$H(\Omega) = \frac{B}{1 - B \cdot A(\Omega)}$$

- Realimentación positiva a la frecuencia Ω_0
- Puede haber señal de salida sin señal de entrada
- Salida sinusoidal a la "frecuencia de oscilación" Ω_0

Procesado analógico

Señales eléctricas:
 $v(t), i(t)$

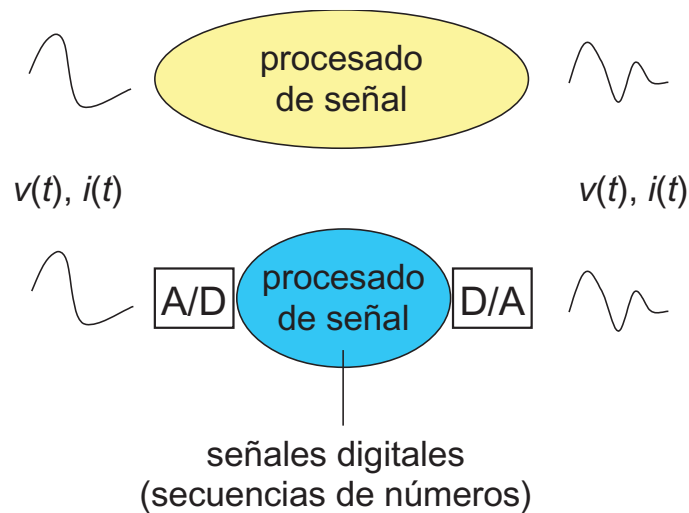


Problemas:

- complejidad de filtros de alto orden (ej.: aprovechar la banda en FDM)
- precisión valores (R, C, diodos, amp) >1%
- cambio de valores con el tiempo
- ruido térmico

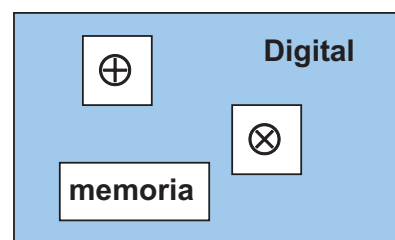
Procesado digital de señales analógicas

- Conversión de señales eléctricas a digitales



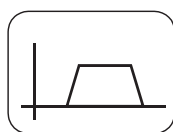
Procesado digital Señales digitales: $\hat{x}[n]$

Operaciones aritméticas con muestras de entrada y valores almacenados (constantes y cálculos anteriores)

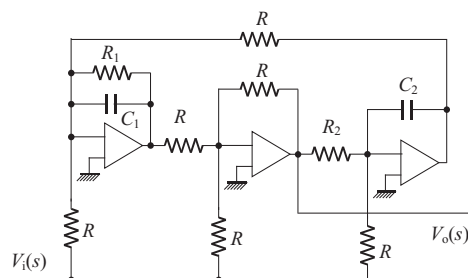


- **Filtro selectivo**

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2] + a_1y[n-1] + a_2y[n-2] \quad \text{IIR 2º orden}$$

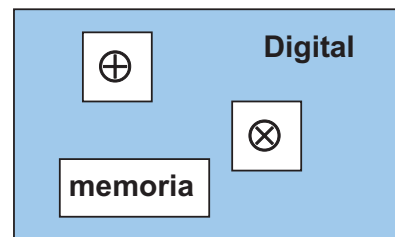


analógico:



Procesado digital Señales digitales: $\hat{x}[n]$

Operaciones aritméticas
con muestras de entrada
y valores almacenados
(constantes y cálculos anteriores)

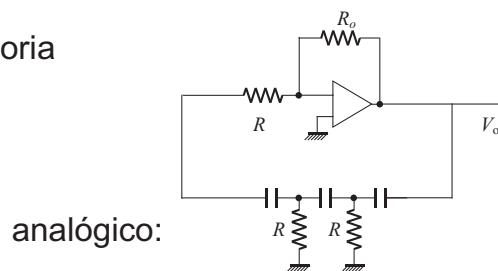


- **Oscilador** (opciones):

$$v[n] = x[n] - 2 \operatorname{Re}(\omega_0) \cdot y[n-1] + \omega_0^2 \cdot y[n-2] \quad \text{2º orden, polos en } z = e^{\pm j\omega_0}$$

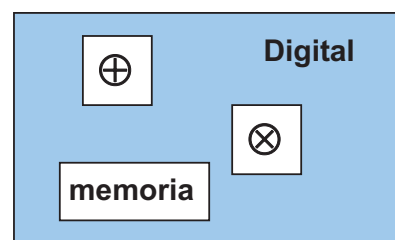
$v[n]$ se extrae de una memoria que contiene los valores de un periodo

$v[n] = \cos(\omega_0 n)$ coseno tabulado en memoria
algoritmo iterativo



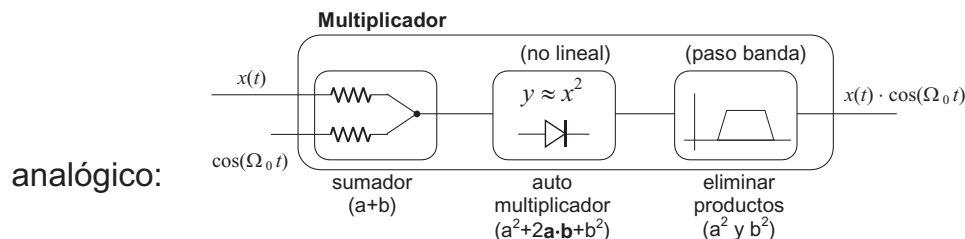
Procesado digital Señales digitales: $\hat{x}[n]$

Operaciones aritméticas
con muestras de entrada
y valores almacenados
(constantes y cálculos anteriores)

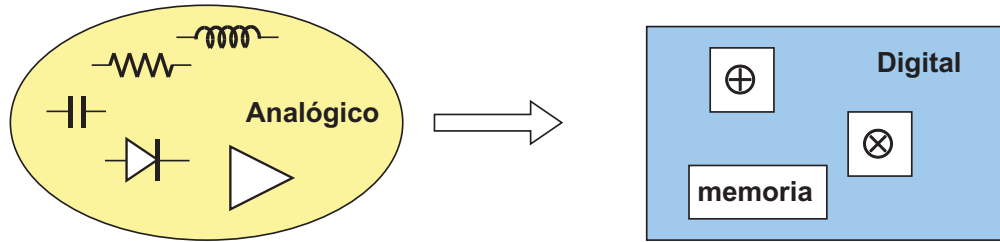


- **Multiplicador para desplazamiento en frecuencia**

$$y[n] = x[n] \cdot v[n]$$



Procesado de señales

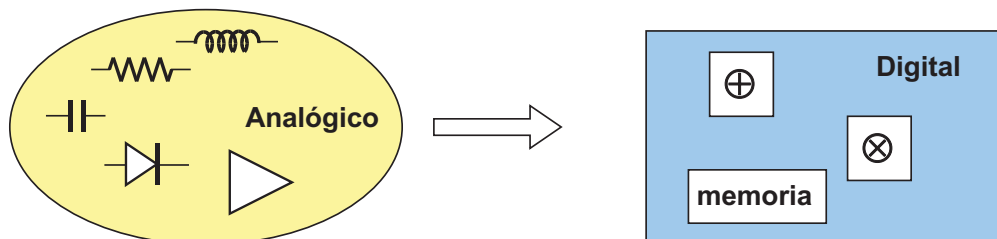


Comparación

- Errores de procesado (por precisión y errores de la realización)
- Complejidad tecnológica (número de dispositivos)
- Frecuencia de las señales (o ancho de banda)

Procesado de señales

Errores de procesado



Precisión valores

R, C, diodos, amp > 1%

Cambio de valores con el tiempo

Ruido térmico

Cuantificación (número de bits)

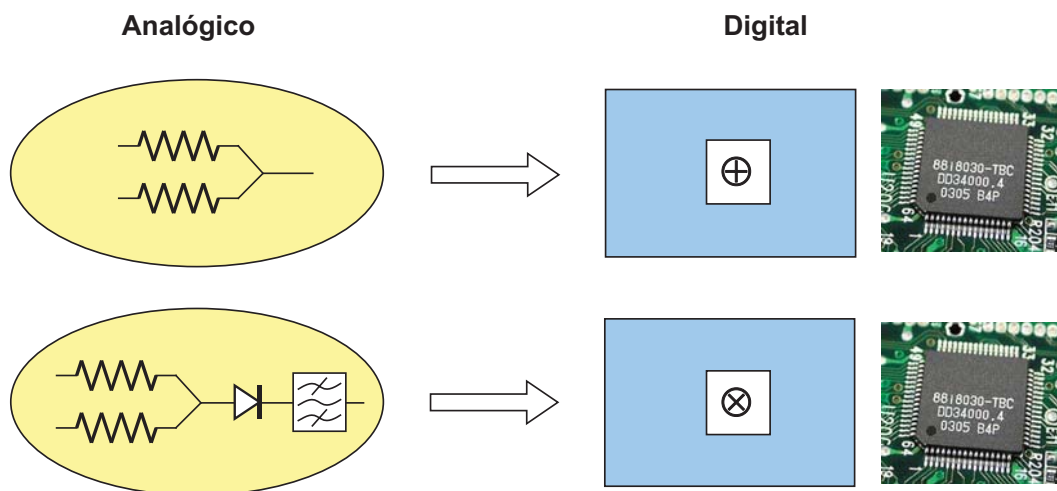
de las constantes de los algoritmos

de las señales

Ruido de cuantificación

Procesado de señales

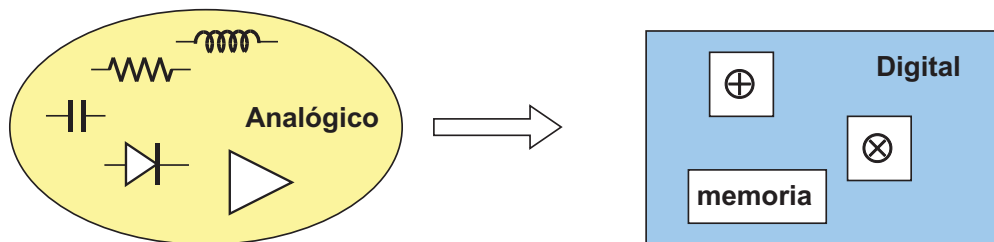
Complejidad tecnológica



Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. **GITT-FPDS**

Procesado de señales

Frecuencia de las señales



Limitada por
funcionamiento no ideal de los
elementos de circuito

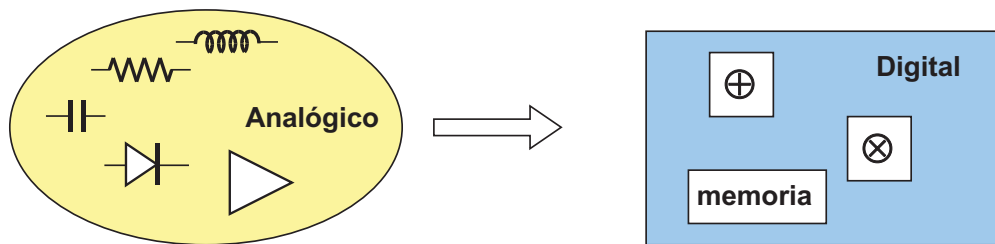
Limitada por
tiempo de ejecución de los cálculos

$$T_{\text{muestreo}} > T_{\text{procesado}}$$

$$\text{ancho de banda} < 1/T_{\text{muestreo}}$$

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2] + a_1y[n-1] + a_2y[n-2]$$

Procesado de señales



Procesado digital

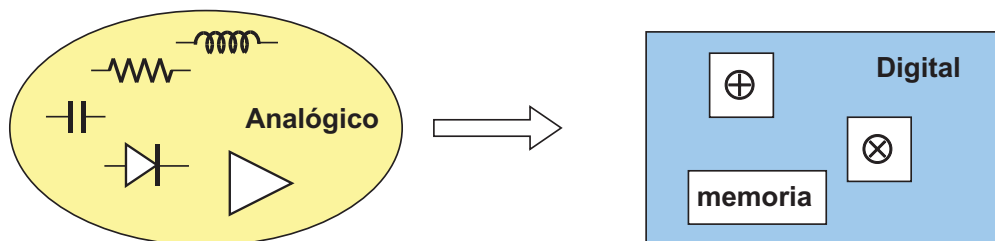
Ventajas

- Precisión controlada (nº bits)
- Reproducibilidad
- Estabilidad del comportamiento

Inconvenientes

- Complejidad tecnológica
- Ancho de banda limitado por tiempo de ejecución del algoritmo
- Conversión A/D

Procesado de señales



Procesado digital

Ventajas

- Precisión controlada (nº bits)
- Reproducibilidad
- Estabilidad del comportamiento

Inconvenientes

- Complejidad tecnológica
- Ancho de banda limitado por tiempo de ejecución del algoritmo
- Conversión A/D

- Nuevos tratamientos (imposibles en analógico)
- Sistemas **programables**

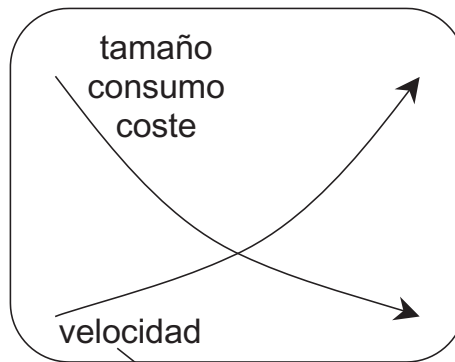
Procesado digital de señales

¿Inconvenientes?

- Complejidad tecnológica
- Limitación de la velocidad de las señales

Tecnología electrónica

1965 G. E. Moore



(ancho de banda señales)



Transmisión digital

1980	~ kHz	Modem (4kHz)	V.29	9.600 bit/s	HD (3 placas)
1990	~ kHz	Modem (4kHz)	V.32bis	14.400 bit/s	FD (1 chip)
2000	~ MHz	ADSL (1MHz)	TDT (8 MHz)	(con DFT)	
2010	~ MHz	WiMAX – LTE	(20 MHz)	(con DFT)	

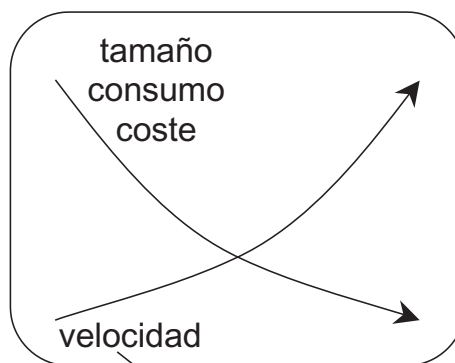
Procesado digital de señales

¿Inconvenientes?

- Complejidad tecnológica
- Limitación de la velocidad de las señales

Tecnología electrónica

1965 G. E. Moore



(ancho de banda señales)

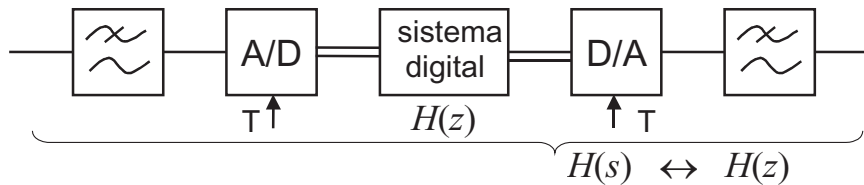


Audio e imagen

Compresión

Voz	telefonía GSM
Audio	MP3
Imagen	JPEG señal RGB(x,y)

Procesado digital de señales



Aproximación

Buscar una $H(z)$ que cumpla una especificación

IIR	$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_Mz^{-M}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_Nz^{-N}}$
FIR	$H(z) = b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_Mz^{-M}$

Realización en el tiempo

Algoritmo de cálculo de la salida que tenga esa $H(z)$: $y[n] = f(x[n], v_1[n], v_2[n], \dots)$

Ejemplos: IIR orden 2: $y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2] + a_1y[n-1] + a_2y[n-2]$

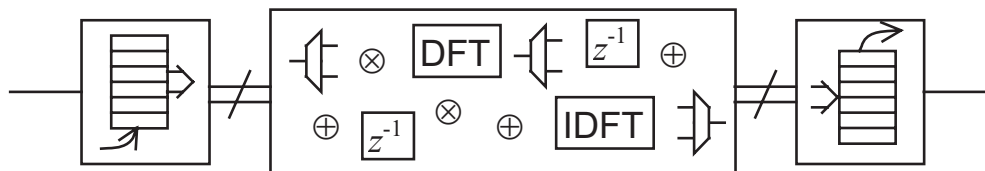
FIR orden M: $y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + \dots + b_Mx[n-M]$

Transformada Discreta de Fourier (DFT)

$x[n] \rightarrow X[k]$ Representación discreta en frecuencia

Realización con DFT

Realización por bloques en el dominio discreto de la frecuencia



Realización eficiente de la DFT (FFT)

Algoritmos alternativos

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j \frac{2\pi k n}{N}}$$

Diseño de sistemas de procesamiento analógico

1 Especificación

2 Aproximación

3 Realización

Diseño de sistemas de procesamiento analógico

1) Especificación

→ Comportamiento $H(\Omega)$



2) Aproximación

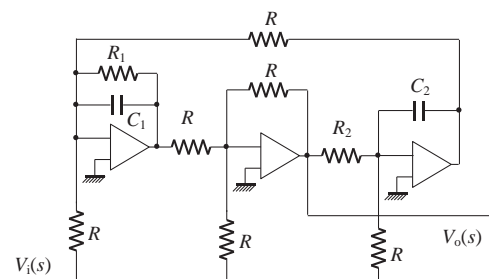
→ Buscar una $H(s)$ que cumpla especificación

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2}{1 + a_1s + a_2s^2}$$

3) Realización

→ Determinar circuito que tenga esa $H(s)$

$$b_0, b_1, b_2, a_1, a_2 \rightarrow R_1, C_1, R_2, C_2, \dots$$



Diseño de sistemas de procesamiento analógico

1 Especificación

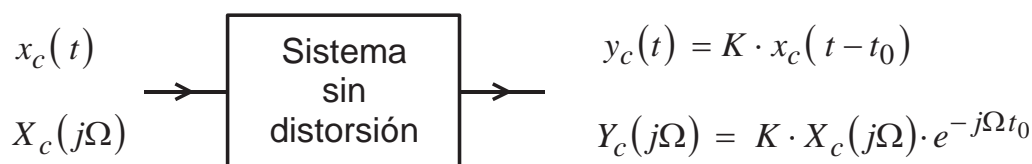
- Objetivos ideales.
 - Sistema sin distorsión. Distorsión de amplitud y de fase. Retardo de grupo
 - Filtros selectivos en frecuencia
 - Compensadores de la distorsión
- Filtros selectivos no ideales
 - Tolerancias y zonas de transición

2 Aproximación

3 Realización

Especificación

Objetivos ideales



- Señal amplificada y retardada:
 - no distorsión (deformación): misma información
- Respuesta en frecuencia de un sistema sin distorsión

$$H(j\Omega) = \frac{Y_c(j\Omega)}{X_c(j\Omega)} = K \cdot e^{-j\Omega t_0} \quad \begin{array}{l} |H(j\Omega)| = K \quad \rightarrow \text{amplitud constante} \\ \angle H(j\Omega) = -\Omega t_0 \quad \text{fase lineal} \end{array}$$

Respuesta de amplitud constante (plana)

Respuesta de fase lineal con la frecuencia (derivada constante)

Especificación

Sistema no ideal:

- Distorsión de amplitud amplitud no constante
- Distorsión de fase fase no lineal

- Medida de la linealidad de la fase: **Respuesta de retardo**

$$\tau_g(\Omega) = \frac{-d\angle H(j\Omega)}{d\Omega} \quad (\text{tiempo})$$

Fase lineal

Respuesta de retardo constante

$$\angle H(j\Omega) = -\Omega t_0$$

$$\tau_g(\Omega) = t_0$$

significado: retardo de la señal

Especificación

Sistema no ideal:

- Distorsión de amplitud $|H(j\Omega)|$ respuesta de amplitud no constante
- Distorsión de fase $\angle H(j\Omega)$ respuesta de fase no lineal
- Distorsión de retardo $\tau_g(\Omega) =$ respuesta de retardo no constante
 $= \frac{-d\angle H(j\Omega)}{d\Omega}$ retardo de una senoide
retardo de grupo

retardo de grupo:

señal de banda estrecha:

grupo de sinusoides de frecuencias próximas con parecido retardo

Diseño de sistemas de procesamiento analógico

1 Especificación

- Objetivos ideales.
 - Sistema sin distorsión. Distorsión de amplitud y de fase. Retardo de grupo
 - Filtros selectivos en frecuencia
 - Compensadores de la distorsión
- Filtros selectivos no ideales
 - Tolerancias y zonas de transición

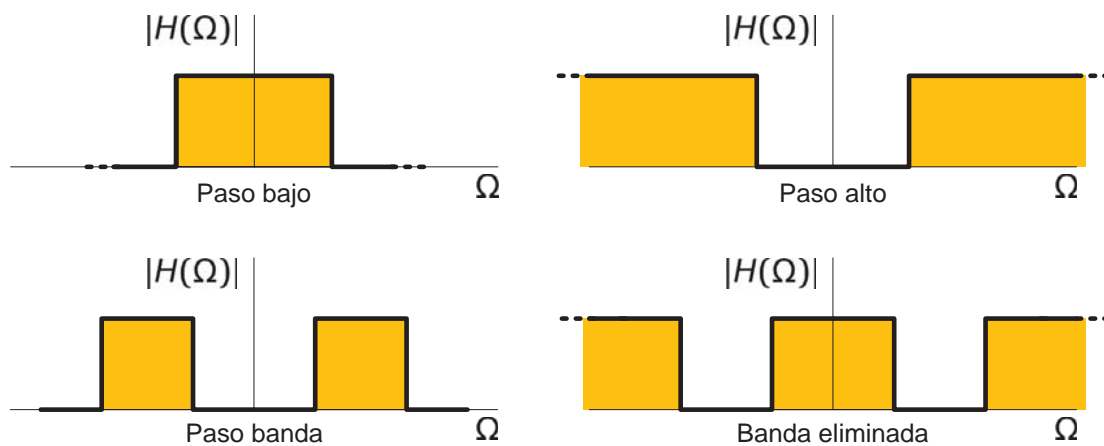
2 Aproximación

3 Realización

Especificación

Filtros selectivos en frecuencia

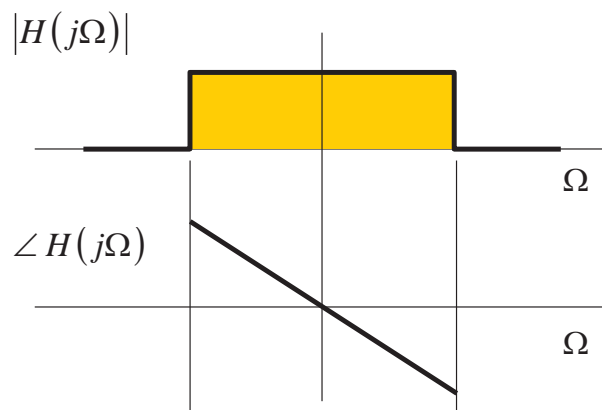
- Procesado clásico de señal
- Objetivo: seleccionar o rechazar bandas de frecuencia
(bandas de paso y bandas de rechazo)



Especificación

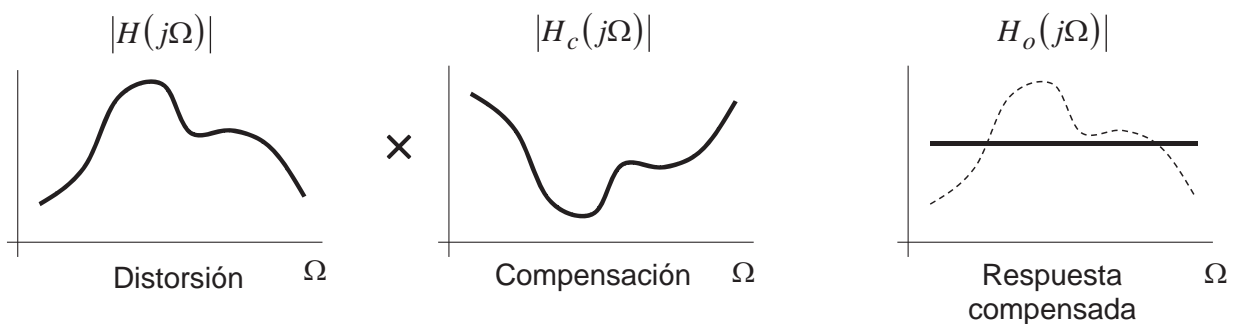
Filtros selectivos en frecuencia

- El sistema sin distorsión es “paso todo”
- Filtro selectivo ideal: sin distorsión en las bandas de paso
- Bandas de paso de amplitud plana y fase lineal



Especificación

Compensación de la distorsión (igualación – ecualización)



- Igualador de amplitud (con fase lineal)
- Igualador de retardo (con amplitud plana)
- Igualador de la respuesta en frecuencia

Diseño de sistemas de procesamiento analógico

1 Especificación

- Objetivos ideales.
 - Sistema sin distorsión. Distorsión de amplitud y de fase. Retardo de grupo
 - Filtros selectivos en frecuencia
 - Compensadores de la distorsión

▪ Filtros selectivos no ideales

- Tolerancias y zonas de transición

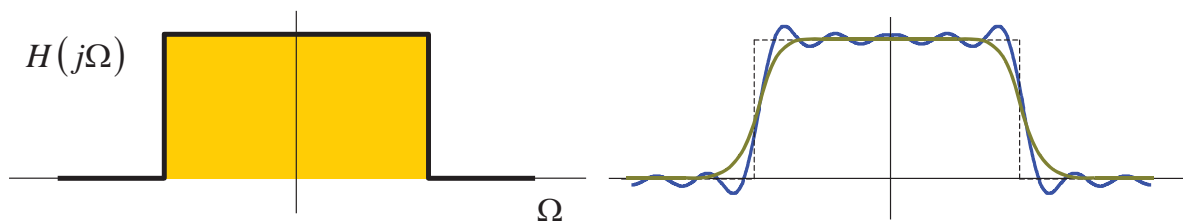
2 Aproximación

3 Realización

Especificación

Filtros selectivos no ideales

- Los filtros ideales no son realizables

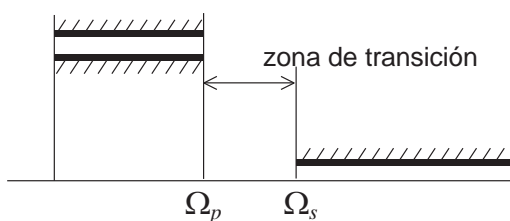


- Hay que admitir
 - no puede haber salto de ganancia mayor pendiente si hay oscilaciones
 - banda de paso: distorsión
 - banda de rechazo: atenuación (no rechazo total)

Especificación

Filtros selectivos no ideales

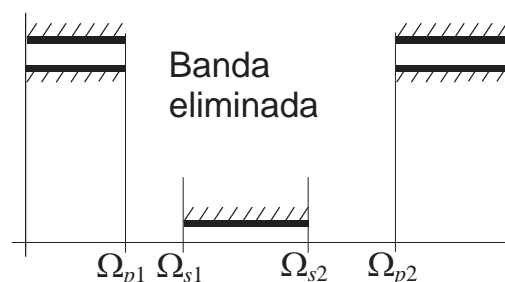
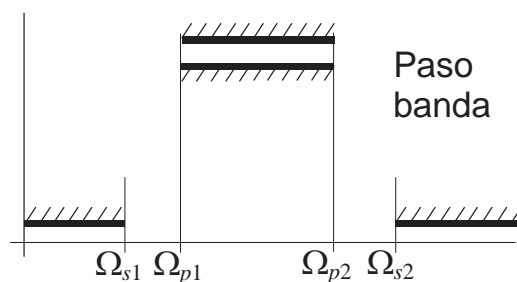
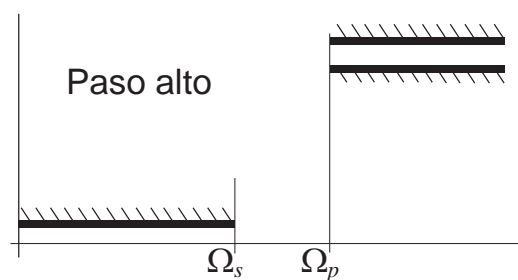
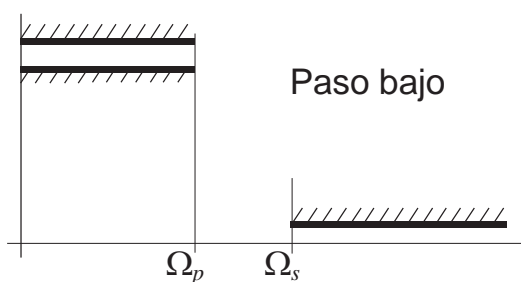
- Los filtros ideales no son realizables
- Hay que admitir tolerancias y zonas de transición



- Zona de transición
- Tolerancia de amplitud en bandas de paso *distorsión de amplitud*
- Tolerancia de amplitud en bandas de rechazo (at. mínima)
- Respuesta de fase: lo más lineal posible en bandas de paso *distorsión de retardo*

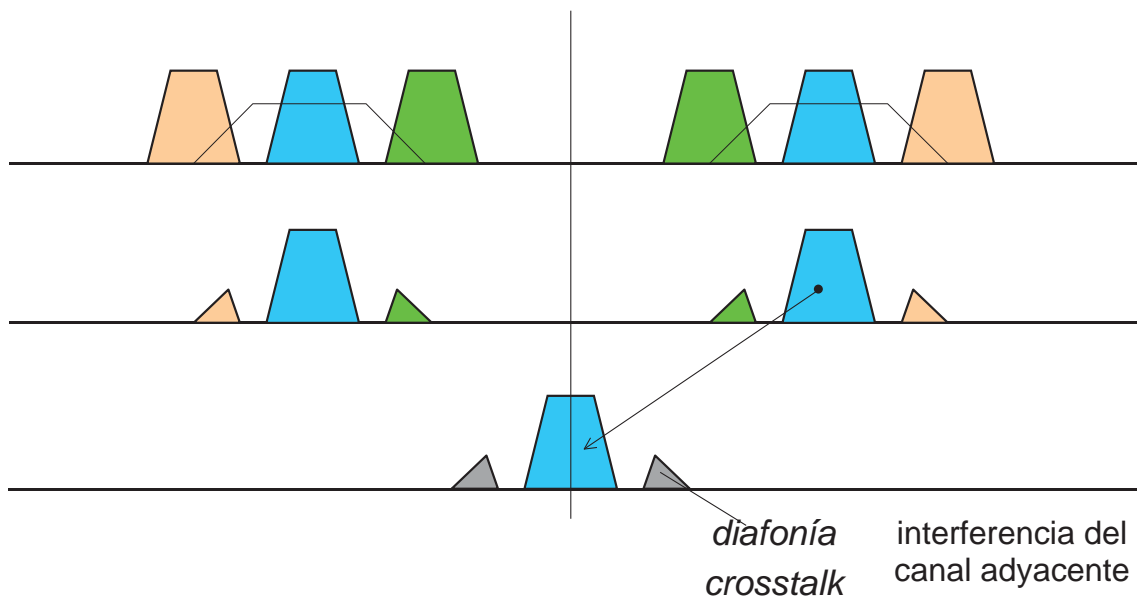
Especificación

Filtros selectivos no ideales



¿Qué tolerancias son admisibles?

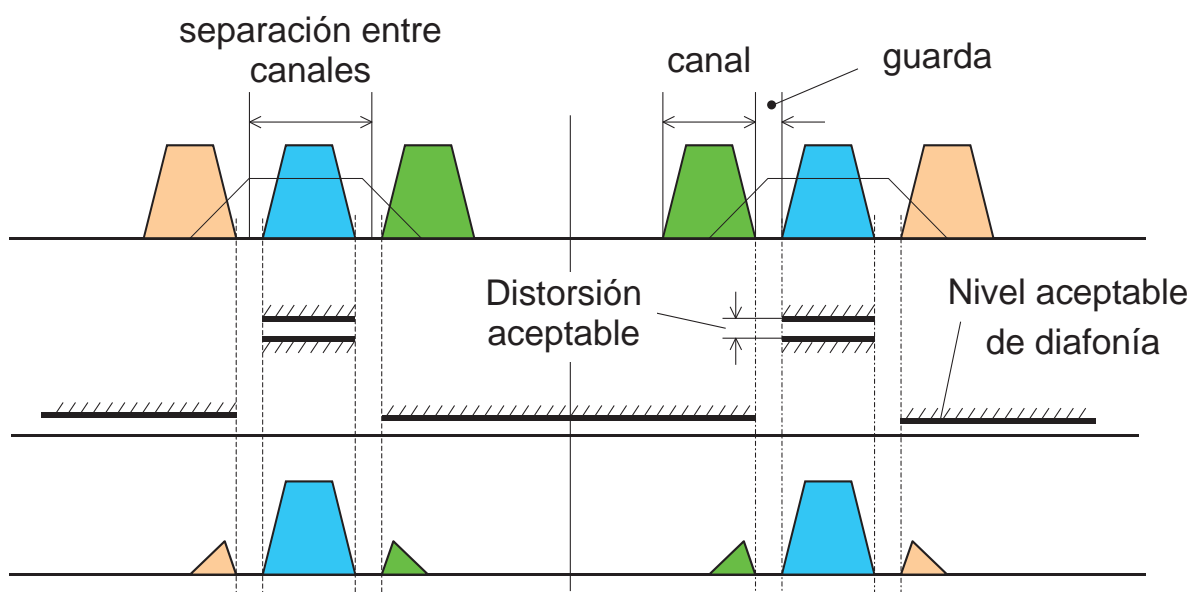
Ejemplo Multiplexación por División en Frecuencia (FDM) Filtro selector de canal



Calidad del servicio: Distorsión aceptable (dB) - Nivel de diafonía aceptable (dB)

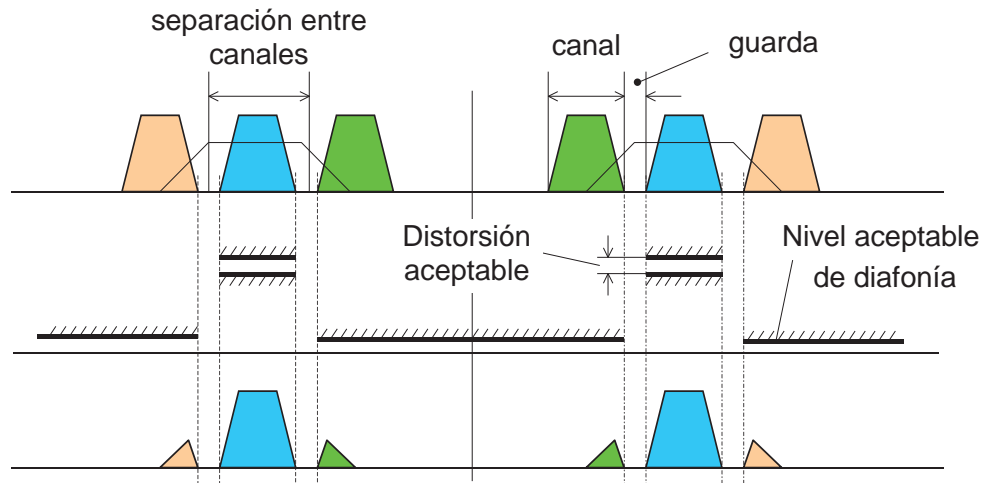
Ejemplo Multiplexación por División en Frecuencia (FDM) Filtro selector de canal

- Se usan bandas de guarda entre canales voz: canal 3,4 kHz separación 4 kHz



La guarda es la zona de transición

Ejemplo Multiplexación por División en Frecuencia (FDM)



- Compromiso: eficacia del sistema ↔ complejidad de realización

	<i>BW</i>	<i>Canal</i>
Telefonía	3,4 kHz	4 kHz
Televisión	7,6 MHz	8 MHz
LTE-A (4G)	18 MHz	20 MHz

Diseño de sistemas de procesamiento analógico

1 Especificación

2 Aproximación

3 Realización

Diseño de sistemas de procesamiento analógico

1) Especificación

→ Comportamiento $H(\Omega)$



2) Aproximación

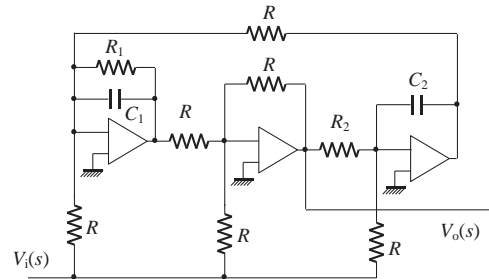
→ Buscar una $H(s)$ que cumpla especificación

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2}{1 + a_1s + a_2s^2}$$

3) Realización

→ Determinar circuito que tenga esa $H(s)$

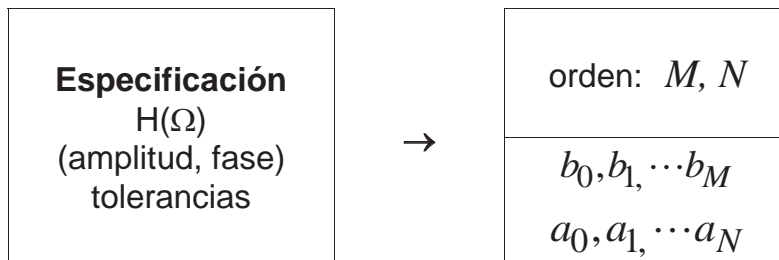
$$b_0, b_1, b_2, a_1, a_2 \rightarrow R_1, C_1, R_2, C_2, \dots$$



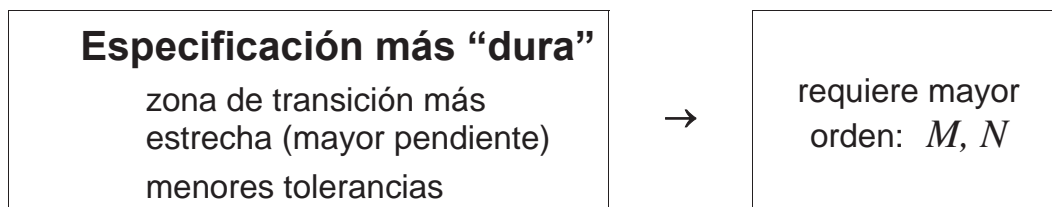
Aproximación

▪ Buscar $H(s)$ que cumpla la especificación

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_Ms^M}{1 + a_1s + \dots + a_Ns^N}$$

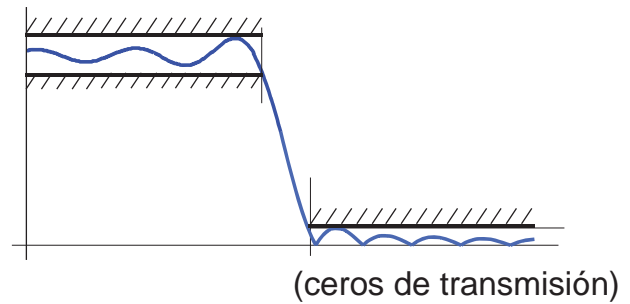
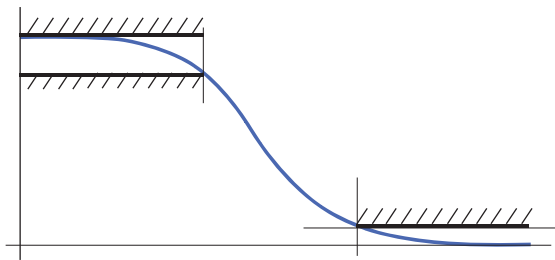


▪ Hay muchas posibilidades, cada una implica una $H(s)$ diferente



Aproximación. Filtros selectivos

- Ajuste a la tolerancia: monótono o con “rizado”



Para un orden dado:

- Rizado en bandas de paso y rechazo permite mayor pendiente en zona de transición

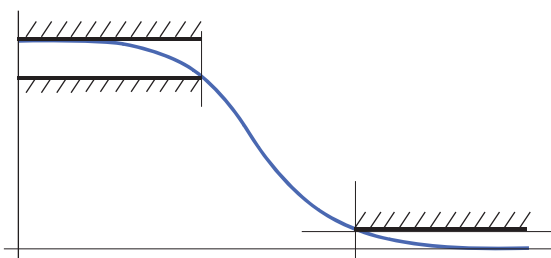
en consecuencia:

- Se puede cumplir especificación con menor orden si se admite rizado

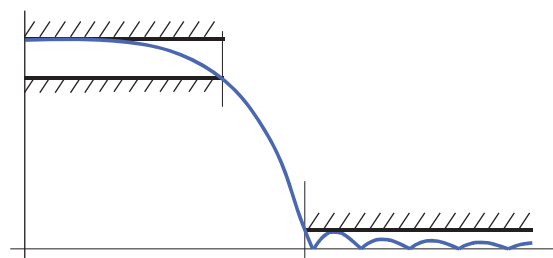
Aproximación. Filtros selectivos

Técnicas de aproximación

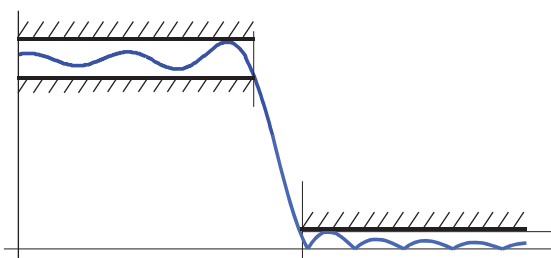
Sin rizado (Butterworth)



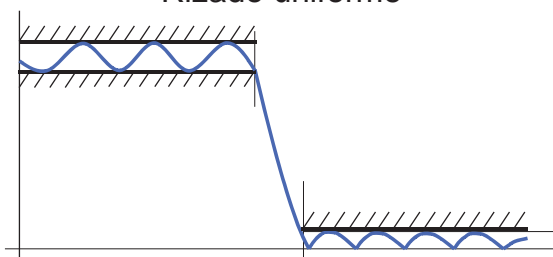
Rizado en una banda



Rizado en ambas bandas



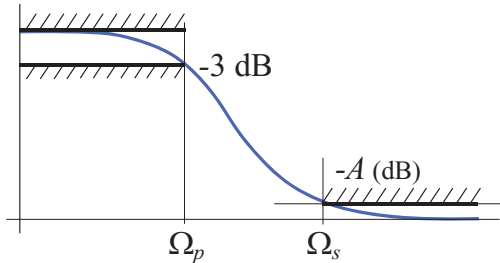
Rizado uniforme



Aproximación. Filtros selectivos paso bajo

Butterworth

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$



$$\Omega \rightarrow 0 \quad |H(\Omega)|^2 \approx 1 - \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N} \rightarrow 1 \text{ (monótonamente)}$$

$$|H(\Omega_c)|^2 = \frac{1}{1+1^{2N}} = \frac{1}{2} \quad 3dB$$

$$\Omega \rightarrow \infty \quad |H(\Omega)|^2 \approx \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{-2N} \rightarrow -20N \log_{10} \frac{\Omega}{\Omega_c} \text{ dB}$$

$$\text{atenuación } 20N \text{ dB/década: } 20N \log_{10} \frac{\Omega}{\Omega_c}$$

Diseño

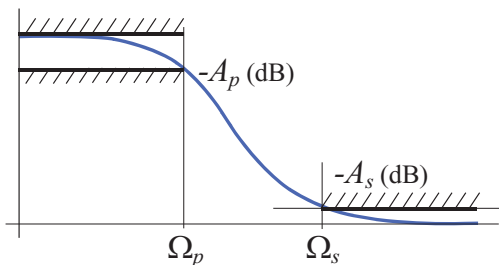
$$\Omega_c = \Omega_p$$

$$N \geq \frac{A/20}{\text{num décadas}} = \frac{A}{20 \log_{10} \frac{\Omega_s}{\Omega_c}}$$

Aproximación. Filtros selectivos paso bajo

Butterworth

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$



$$\Omega \rightarrow 0 \quad |H(\Omega)|^2 \approx 1 - \varepsilon^2 \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N} \rightarrow 1 \text{ (monótonamente)}$$

$$|H(\Omega_c)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}$$

$$\Omega \rightarrow \infty \quad |H(\Omega)|^2 \approx \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{-2N} \rightarrow -10 \log_{10} \varepsilon^2 - 20N \log_{10} \frac{\Omega}{\Omega_c} \text{ dB}$$

$$\text{atenuación (dB): } 10 \log_{10} \varepsilon^2 + 20N \text{ dB/década}$$

Diseño

$$\Omega_c = \Omega_p$$

$$A_p = 10 \log_{10} (1 + \varepsilon^2) \rightarrow \varepsilon^2 = 10^{(A_p/10)} - 1$$

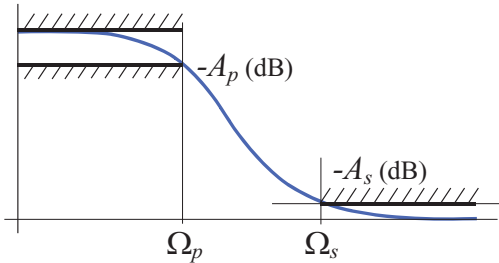
$$N \geq \frac{A_s - 10 \log_{10} \varepsilon^2}{20 \times \text{num décadas}} = \frac{A_s - 10 \log_{10} \varepsilon^2}{20 \log_{10} \frac{\Omega_s}{\Omega_c}}$$

Aproximación. Filtros selectivos paso bajo

Ejemplo con MATLAB

Butterworth

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$



`% Especificacion`

`Wp=2*pi*4000; % rad/s`

`Ws=2*pi*6000; % rad/s`

`Ap=2; % dB`

`As=30; % dB`

`% calcular parámetros`

`Wc=Wp`

`eps2=10^(Ap/10)-1;`

`N=ceil((As-10*log10(eps2))/(20*log10(Ws/Wp)))`

`% comparar con funcion "buttord" de MATLAB`

`[N, Wc] = buttord(Wp, Ws, Ap, As, 's')`

Diseño

$$\Omega_c = \Omega_p$$

$$A_p = 10 \log_{10}(1 + \varepsilon^2) \rightarrow \varepsilon^2 = 10^{(A_p/10)} - 1$$

$$N \geq \frac{A_s - 10 \log_{10} \varepsilon^2}{20 \times \text{num décadas}} = \frac{A_s - 10 \log_{10} \varepsilon^2}{20 \log_{10} \frac{\Omega_s}{\Omega_c}}$$

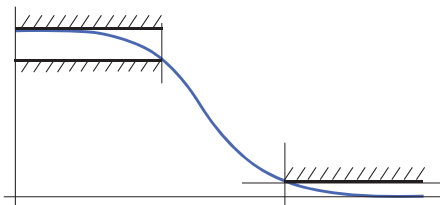
Aproximación. Filtros selectivos paso bajo

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + A(\Omega/\Omega_c)}$$

Butterworth

$$A(x) = \varepsilon^2 x^{2N}$$

x^N potencia

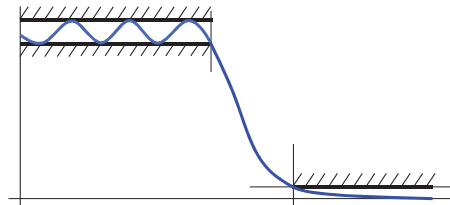


$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

Chevishev

$$A(x) = \varepsilon^2 T_N^2(x)$$

$T_N(x)$ polinomio de Chevishev



$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)}$$

Especificaciones $\rightarrow \Omega_c \quad N \quad \varepsilon$

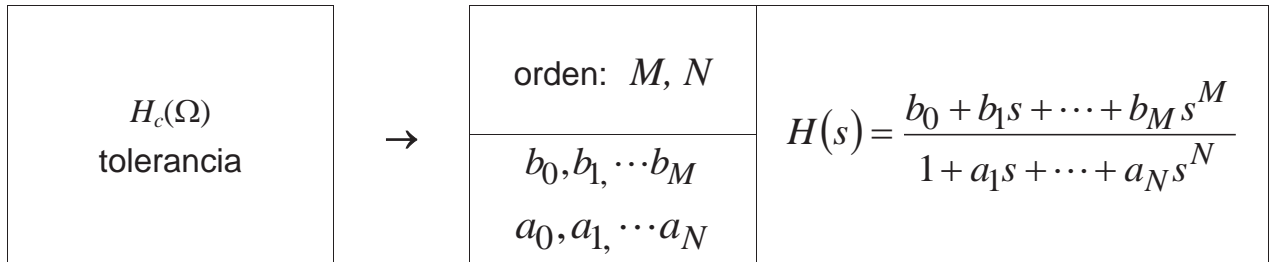
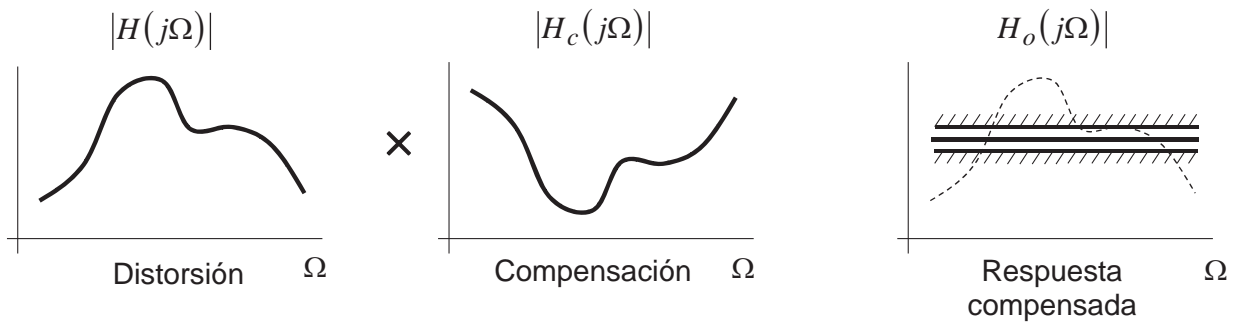
Ω_c frecuencia de corte

N orden de la función

ε

separación entre bandas de paso y rechazo
pendiente en la zona de transición
rizado

Aproximación. Compensación de la distorsión (igualación - ecualización)



- Diseño muy complicado

Diseño de sistemas de procesamiento analógico

1 Especificación

2 Aproximación

3 Realización

Diseño de sistemas de procesamiento analógico

1) Especificación

→ Comportamiento $H(\Omega)$



2) Aproximación

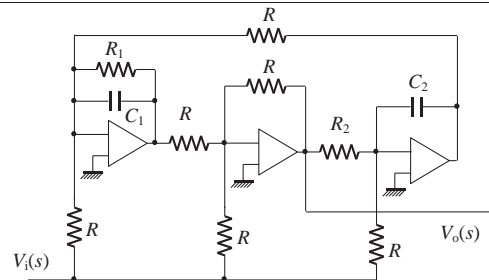
→ Buscar una $H(s)$ que cumpla especificación

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2}{1 + a_1s + a_2s^2}$$

3) Realización

→ Determinar circuito que tenga esa $H(s)$

$$b_0, b_1, b_2, a_1, a_2 \rightarrow R_1, C_1, R_2, C_2, \dots$$

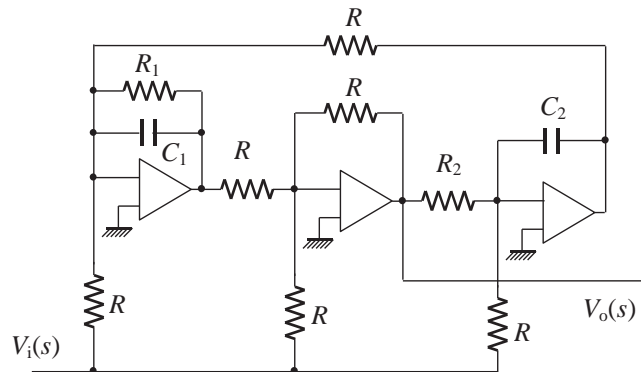


Realización

Ej.: Sistema de segundo orden

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = H(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2}{1 + a_1s + a_2s^2}$$

Circuito:



Calcular R_k y C_k
para obtener $H(s)$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = H(s) = - \frac{\frac{R_2}{R} + R_2C_2 \left(\frac{R}{R_1} - 1 \right) s + RR_2C_1C_2s^2}{1 + R_2C_2 \frac{R}{R_1} s + RR_2C_1C_2s^2}$$

Realización

Sistema de mayor orden

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = H(s) = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_M s^M}{1 + a_1s + \dots + a_N s^N}$$

Factorizar en funciones de 2º orden y usar circuitos desacoplados en cascada

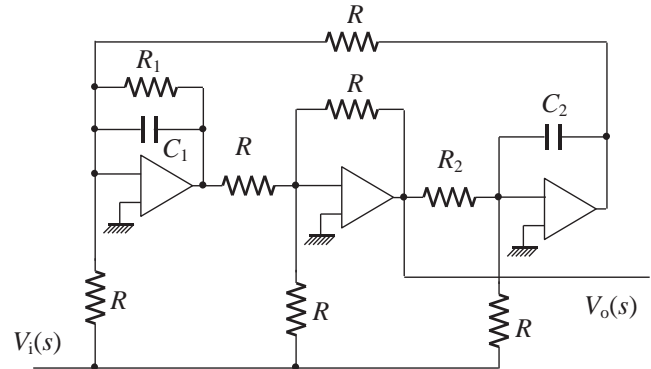
$$H(s) = \prod H_k(s) = \frac{b_{k0} + b_{k1}s + b_{k2}s^2}{1 + a_{k1}s + a_{k2}s^2}$$

Problema

Errores de precisión en Rs y Cs (>1%)

→ errores de b_k y a_k

¿como afectan a $H(j\Omega)$ (comportamiento)?



Diseño de sistemas de procesamiento analógico

1) Especificación

→ Comportamiento $H(\Omega)$



2) Aproximación

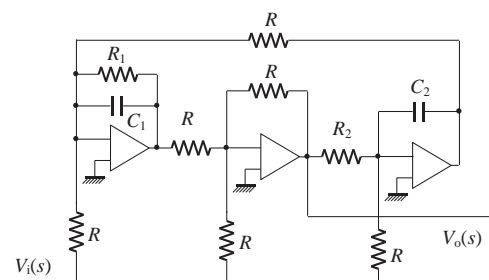
→ Buscar una $H(s)$ que cumpla especificación

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2}{1 + a_1s + a_2s^2}$$

3) Realización

→ Determinar circuito que tenga esa $H(s)$

$$b_0, b_1, b_2, a_1, a_2 \rightarrow R_1, C_1, R_2, C_2, \dots$$



Tema 1 Procesado digital de señales analógicas

PDS-A ideal

- Conversión ideal continuo-discreta (C/D)
- Conversión ideal discreto-continua (D/C)
- PDS-A ideal
- Muestreo de señales de banda estrecha

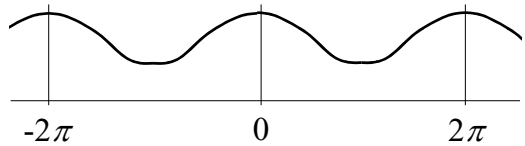
PDS-A no ideal

- Conversión analógico-digital (A/D)
- Conversión digital-analógica (D/A)
- Filtros antisolapamiento y anti-imagen

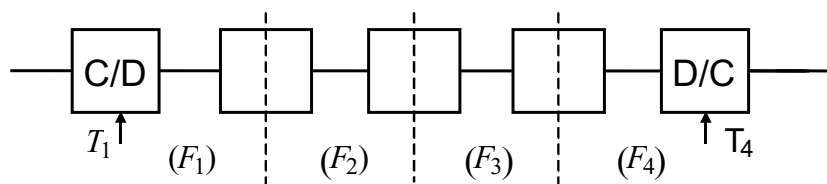
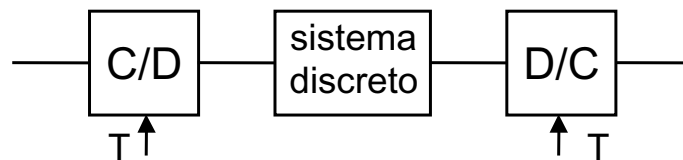
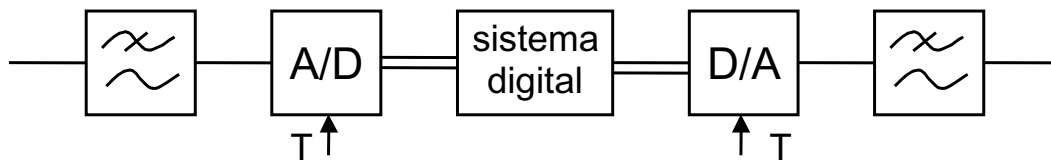
Cambio de la velocidad de muestreo

- Diezmado e interpolación
- Técnicas de sobremuestreo para A/D y D/A

Notación

Señal continua $x_c(t)$ variable continua real $(-\infty, \infty)$ (tiempo)	Transformada de Laplace $X_c(s)$	Transformada de Fourier $X_c(j\Omega) = X_c(s) _{s=j\Omega}$ eje real
Señal discreta $x[n]$ (secuencia) variable discreta entera $(-\infty, \infty)$	Transformada Z $X(z)$ $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$	Transformada de Fourier $X(e^{j\omega}) = X(z) _{z=e^{j\omega}}$ circunferencia unidad $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$ periódica (2π) 

Tema 1 Procesado digital de señales analógicas



Tema 1 Procesado digital de señales analógicas

• PDS-A ideal

- Conversión ideal continuo-discreta (C/D)
- Conversión ideal discreto-continua (D/C)
- PDS-A ideal
- Muestreo de señales de banda estrecha

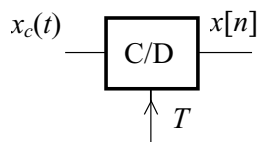
• PDS-A no ideal

- Conversión analógico-digital (A/D)
- Conversión digital-analógica (D/A)
- Filtros antisolapamiento y anti-imagen

• Cambio de la velocidad de muestreo

- Diezmado e interpolación
- Técnicas de sobremuestreo para A/D y D/A

Conversión C/D ideal



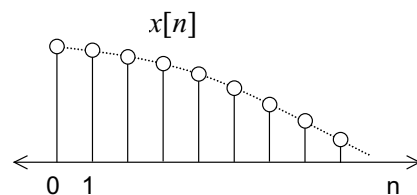
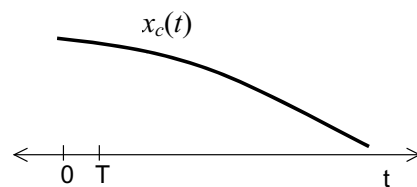
Un sólo parámetro: $\begin{cases} T & \text{intervalo de muestreo} \\ 1/T = F_s & \text{frecuencia de muestreo} \end{cases}$

Definición de comportamiento (D.T.):

$$x[n] = x_c(nT)$$

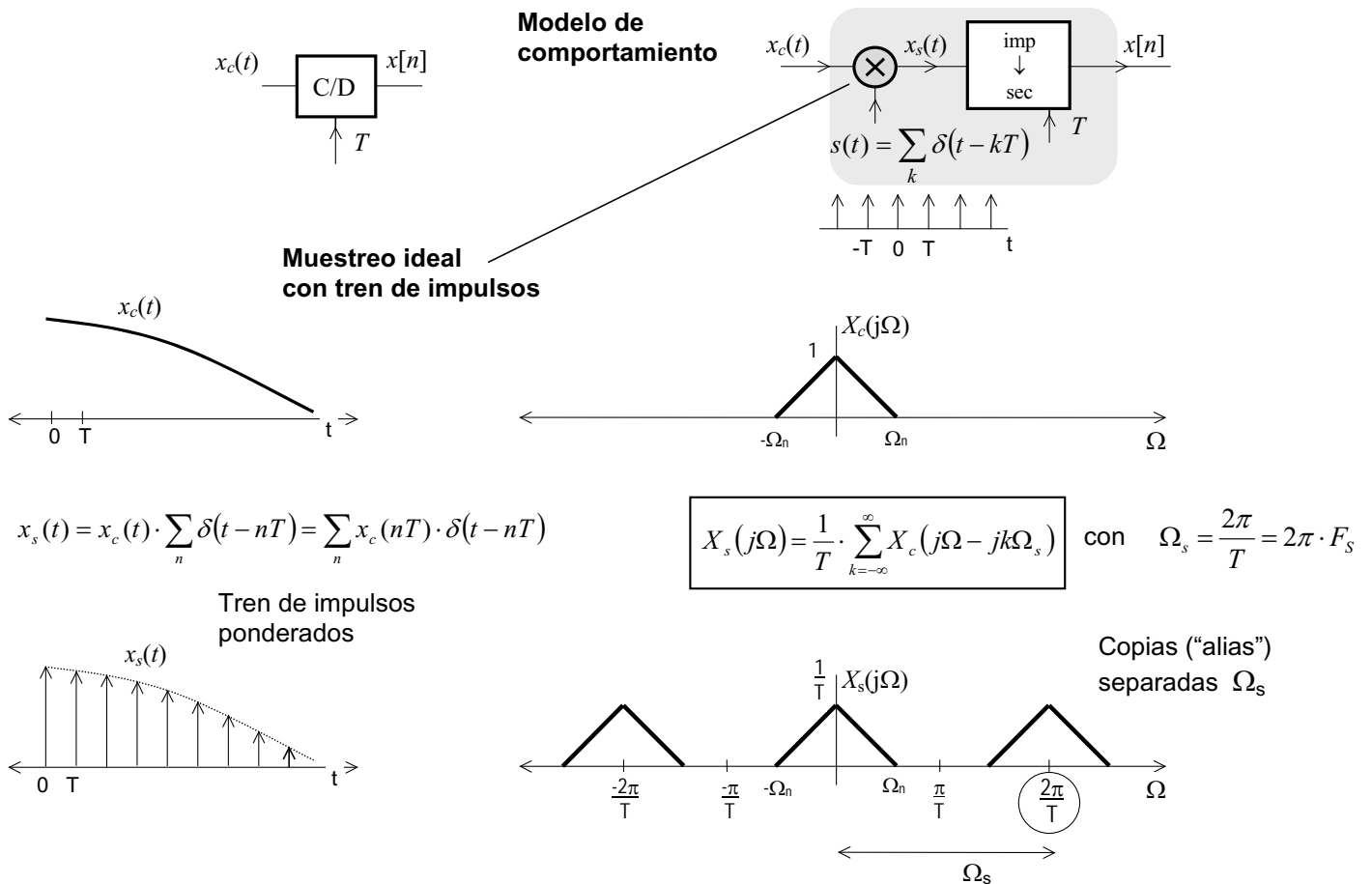
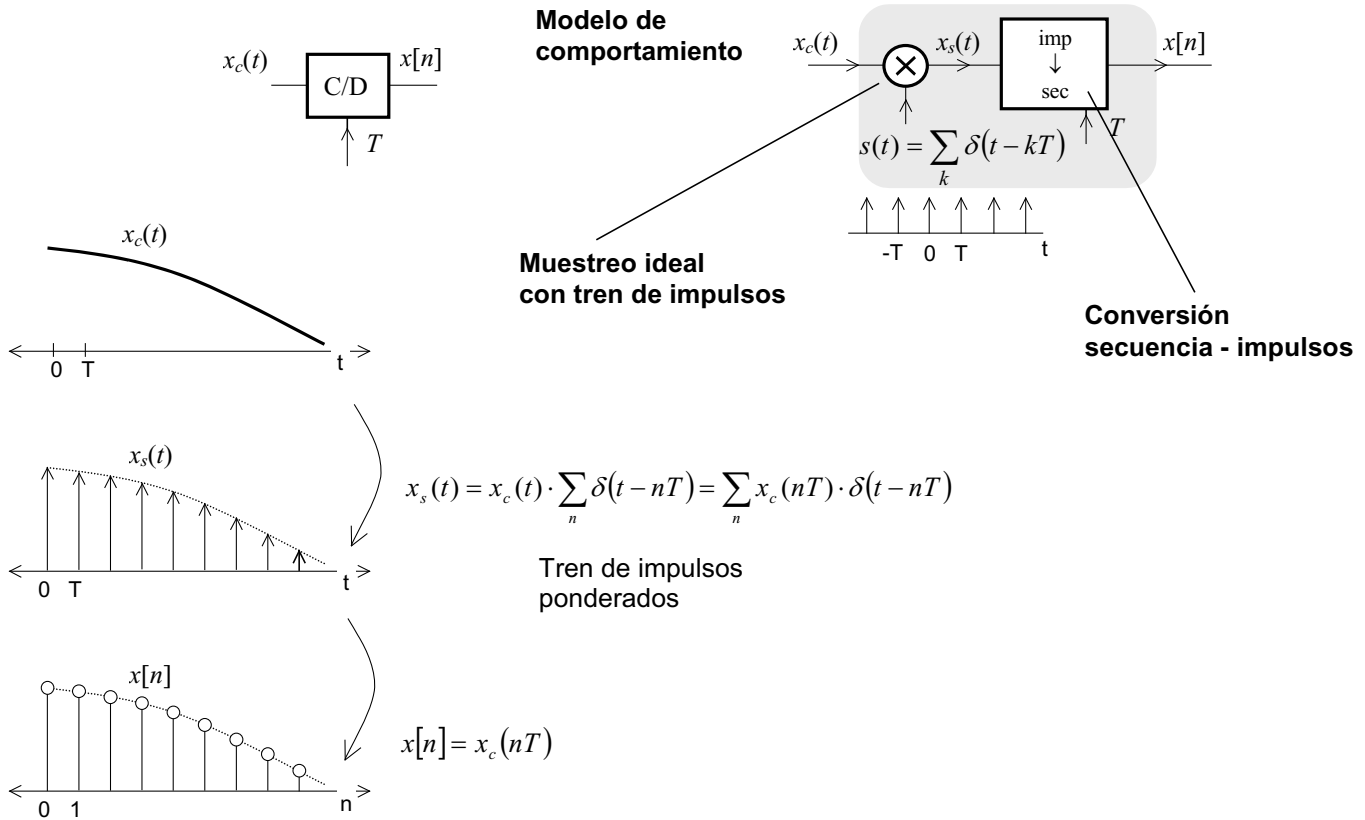
Relación E/S muy simple:

La salida de índice n es
el valor de la entrada en el instante nT



¿Relación E/S en el dominio de la frecuencia (D.F.)?

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_k X_c\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T}\right)$$

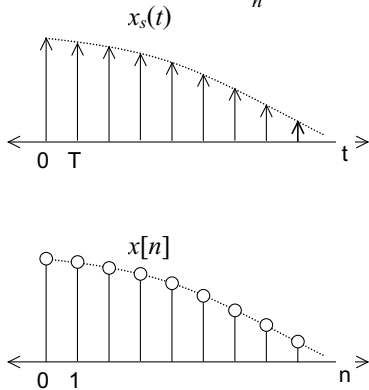




Conversión secuencia - impulsos

$$x_s(t) = \sum_n x_c(nT) \cdot \delta(t - nT) \xrightarrow{\text{T.F.}} X_s(j\Omega) = \sum_n x[n] e^{-j\Omega nT}$$

$$= \sum_n x[n] \cdot \delta(t - nT)$$



$$X(e^{j\omega}) = \sum_n x[n] e^{-j\omega n}$$

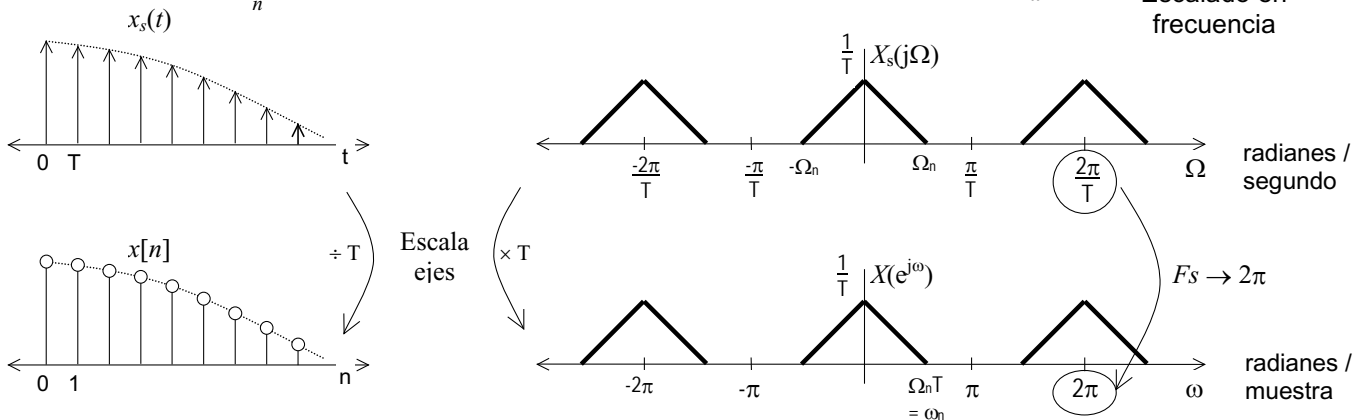


Conversión secuencia - impulsos

$$x_s(t) = \sum_n x_c(nT) \cdot \delta(t - nT) \xrightarrow{\text{T.F.}} X_s(j\Omega) = \sum_n x[n] e^{-j\Omega nT} = X(e^{j\Omega T}) \rightarrow \boxed{X(e^{j\omega}) = X_s\left(j\frac{\omega}{T}\right)}$$

$$= \sum_n x[n] \cdot \delta(t - nT) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\Omega T}$$

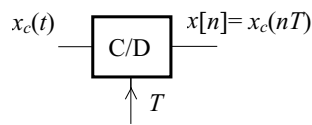
Escala en frecuencia



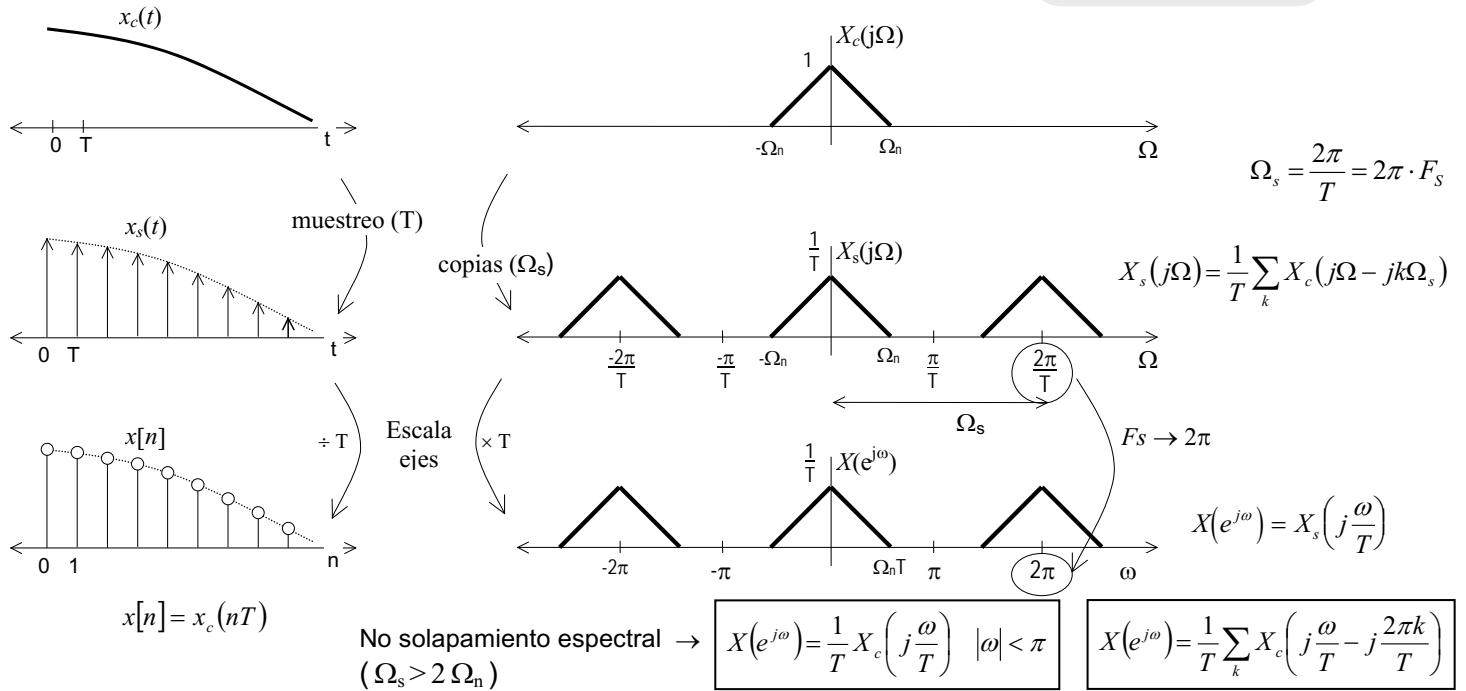
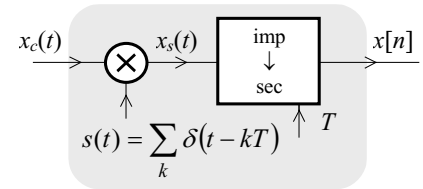
Abstracción-normalización del tiempo $T \rightarrow 1$

Normalización de la frecuencia $\Omega_s = 2\pi/T \rightarrow 2\pi$

Conversión C/D



Modelo de comportamiento



Tema 1 Procesado digital de señales analógicas

• PDS-A ideal

- Conversión ideal continuo-discreta (C/D)
- Conversión ideal discreto-continua (D/C)
- PDS-A ideal
- Muestreo de señales de banda estrecha

• PDS-A no ideal

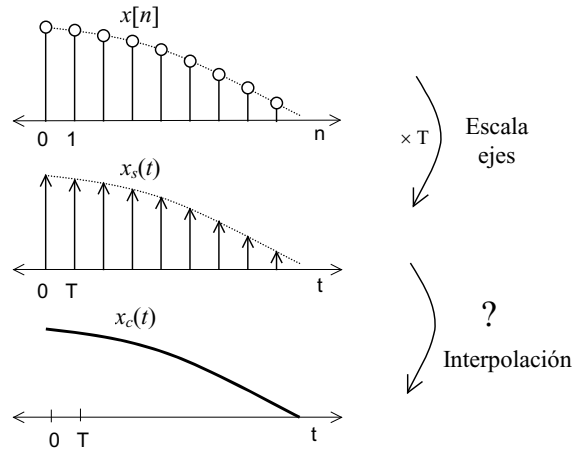
- Conversión analógico-digital (A/D)
- Conversión digital-analógica (D/A)
- Filtros antisolapamiento y anti-imagen

• Cambio de la velocidad de muestreo

- Diezmado e interpolación
- Técnicas de sobremuestreo para A/D y D/A

Conversión ideal C↔D

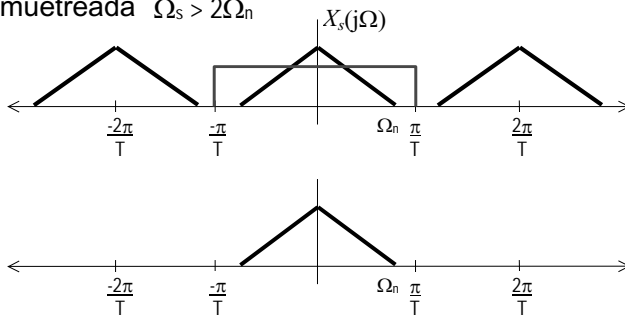
- ¿Se puede recuperar $x_c(t)$ a partir de $x[n]$? ¿cómo?
- $x_s(t)$ y $x[n]$ son equivalentes
 - Tienen la misma información: se pasa de una a otra escalando los ejes
- ¿ $x_s(t) \rightarrow x_c(t)$? Dificil de ver en el dominio del tiempo \rightarrow ver en frecuencia



Conversión ideal C↔D

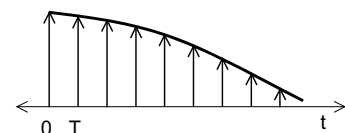
- ¿Se puede recuperar $x_c(t)$ a partir de $x[n]$? ¿cómo?
- $x_s(t)$ y $x[n]$ son equivalentes
 - Tienen la misma información: se pasa de una a otra escalando los ejes
- ¿ $x_s(t) \rightarrow x_c(t)$? Dificil de ver en el dominio del tiempo \rightarrow ver en frecuencia

Señal sobremuestreada $\Omega_s > 2\Omega_n$



Se puede recuperar:
basta eliminar las copias (alias)
con un filtro paso bajo

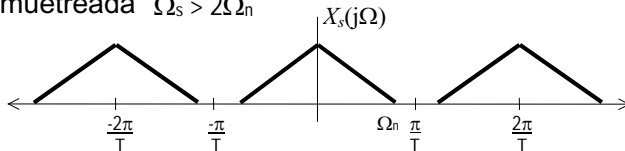
Filtro paso bajo ideal:
Interpolación ideal



Conversión ideal C↔D

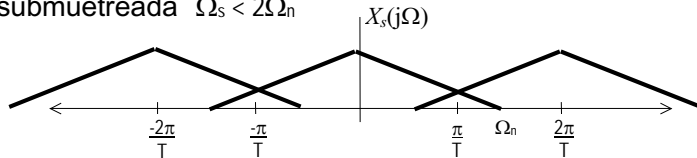
- ¿Se puede recuperar $x_c(t)$ a partir de $x[n]$? ¿cómo?
- $x_s(t)$ y $x[n]$ son equivalentes
 - Tienen la misma información: se pasa de una a otra escalando los ejes
- ¿ $x_s(t) \rightarrow x_c(t)$? Difícil de ver en el dominio del tiempo \rightarrow ver en frecuencia

Señal sobremuestreada $\Omega_s > 2\Omega_n$

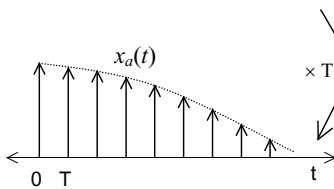
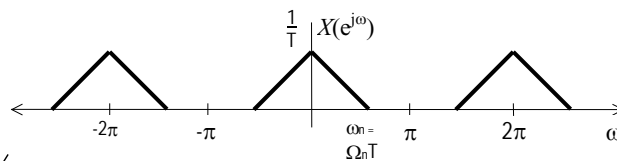
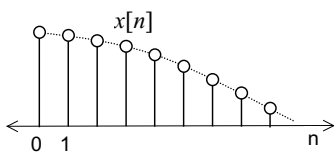
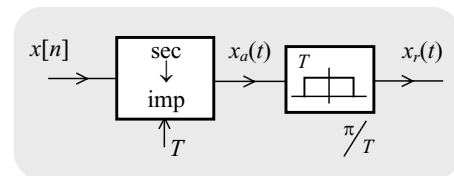
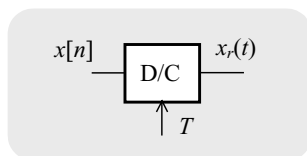


Se puede recuperar:
basta eliminar las copias (alias)
con un filtro paso bajo

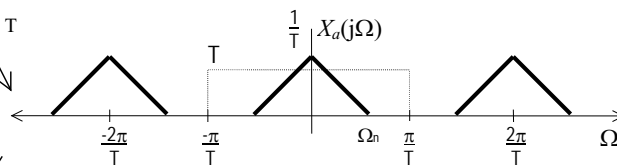
Señal submuestreada $\Omega_s < 2\Omega_n$



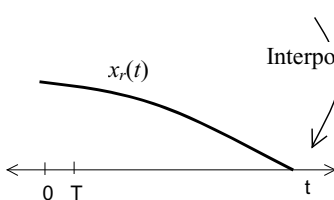
No es posible recuperar
debido al solapamiento espectral
(aliasing)



Escala ejes

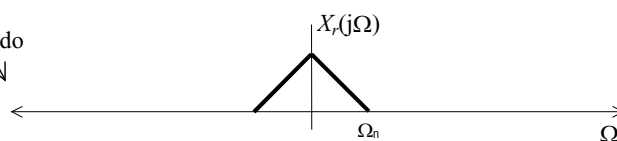


$$X_a(j\Omega) = X(e^{j\Omega T})$$



Interpolación

Filtrado



$$X_r(j\Omega) = X_a(j\Omega) \cdot H_r(j\Omega) = \begin{cases} T \cdot X_a(j\Omega) & |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} = \begin{cases} T \cdot X(e^{j\Omega T}) & |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Tema 1 Procesado digital de señales analógicas

- **PDS-A ideal**

- Conversión ideal continuo-discreta (C/D)
- Conversión ideal discreto-continua (D/C)
- PDS-A ideal
- Muestreo de señales de banda estrecha

- **PDS-A no ideal**

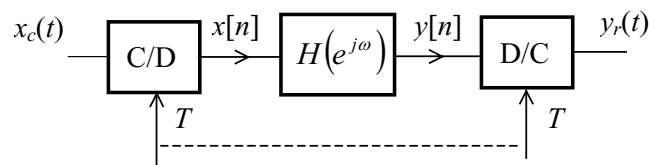
- Conversión analógico-digital (A/D)
- Conversión digital-analógica (D/A)
- Filtros antisolapamiento y anti-imagen

- **Cambio de la velocidad de muestreo**

- Diezmado e interpolación
- Técnicas de sobremuestreo para A/D y D/A

Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. **GITT-FPDS**

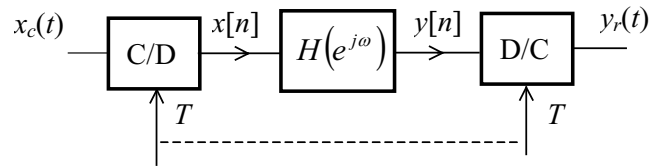
PDS-A ideal



- $X_c(j\Omega) = 0, |\Omega| \geq \frac{\pi}{T}$
(no solapamiento espectral en C/D)
- Sistema discreto LTI
- C/D y D/C mismo T y sincronizados

¿Comportamiento global?

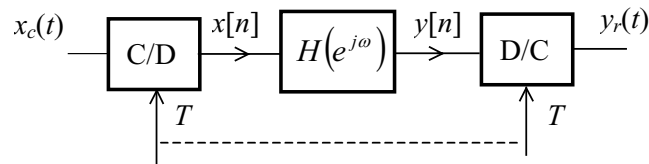
PDS-A ideal



- $X_c(j\Omega) = 0, |\Omega| \geq \frac{\pi}{T}$
(no solapamiento espectral en C/D)
 - Sistema discreto LTI
 - C/D y D/C mismo T y sincronizados
- $$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} X_c\left(j\frac{\omega}{T}\right) \quad |\omega| < \pi \\ 2) \quad Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega}) \\ 3) \quad Y_r(j\Omega) = \begin{cases} T \cdot Y(e^{j\Omega T}) & |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot \frac{1}{T} X_c\left(j\frac{\omega}{T}\right) \quad |\omega| < \pi \quad \text{periódica } 2\pi \\ Y(e^{j\Omega T}) = H(e^{j\Omega T}) \cdot \frac{1}{T} X_c(j\Omega) \quad |\Omega| < \frac{\pi}{T} \quad \text{periódica } 2\pi/T \\ Y_r(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}) \cdot X_c(j\Omega) & |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} = X_c(j\Omega) \cdot \begin{cases} H(e^{j\Omega T}) & |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \end{array} \right.$$

PDS-A ideal



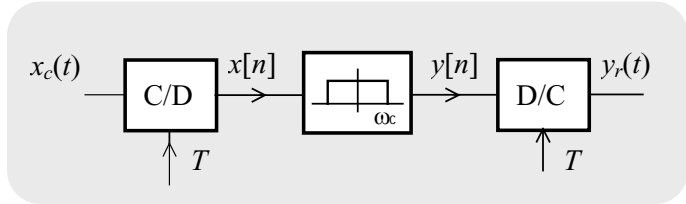
- No solapamiento espectral en C/D
 - Sistema discreto LTI
 - C/D y D/C mismo T y sincronizados
- $$Y_r(j\Omega) = X_c(j\Omega) \cdot \begin{cases} H(e^{j\Omega T}) & |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$Y_r(j\Omega) = X_c(j\Omega) \cdot H_{ef}(j\Omega) \quad \text{con} \quad H_{ef}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}) & |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

- El sistema completo es LTI
- La respuesta en frecuencia es una versión de la del sistema discreto
 - o escalada en frecuencia y
 - o filtrada paso bajo: eliminando las copias periódicas (alias)
- PDS-A solo es aplicable a sistemas paso-bajo

PDS-A ideal

Ejemplo
Filtro paso-bajo



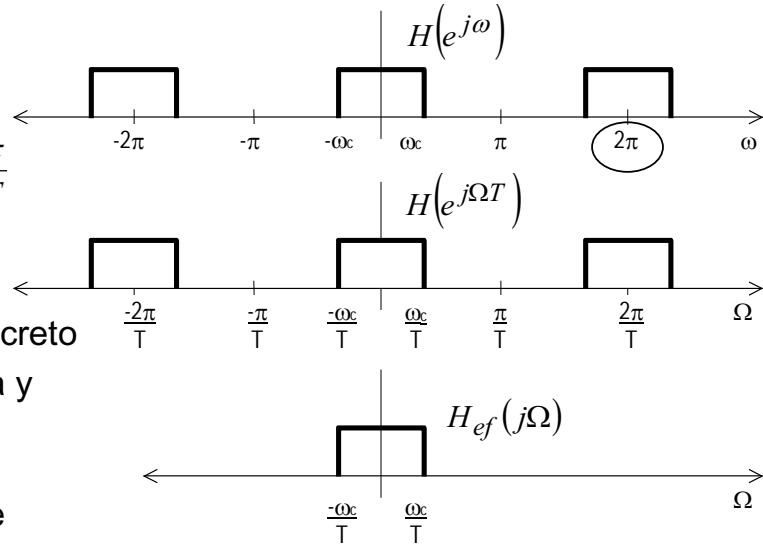
$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

$$H_{ef}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}) & |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

La respuesta del sistema discreto

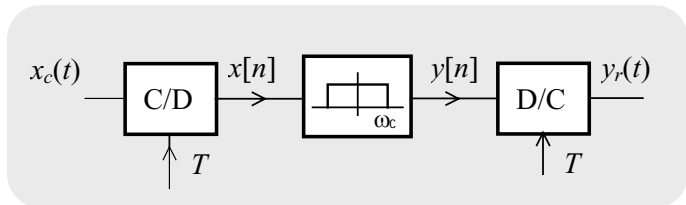
- escalada en frecuencia y
- filtrada paso bajo (π/T)

Filtro analógico paso-bajo de frecuencia de corte $\Omega_c = \omega_c/T$



PDS-A ideal

Ejemplo
Filtro paso-bajo

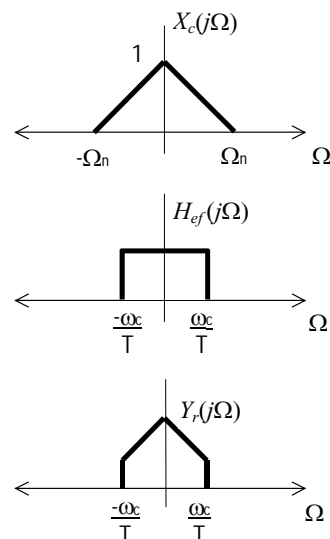


$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

$$H_{ef}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}) & |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

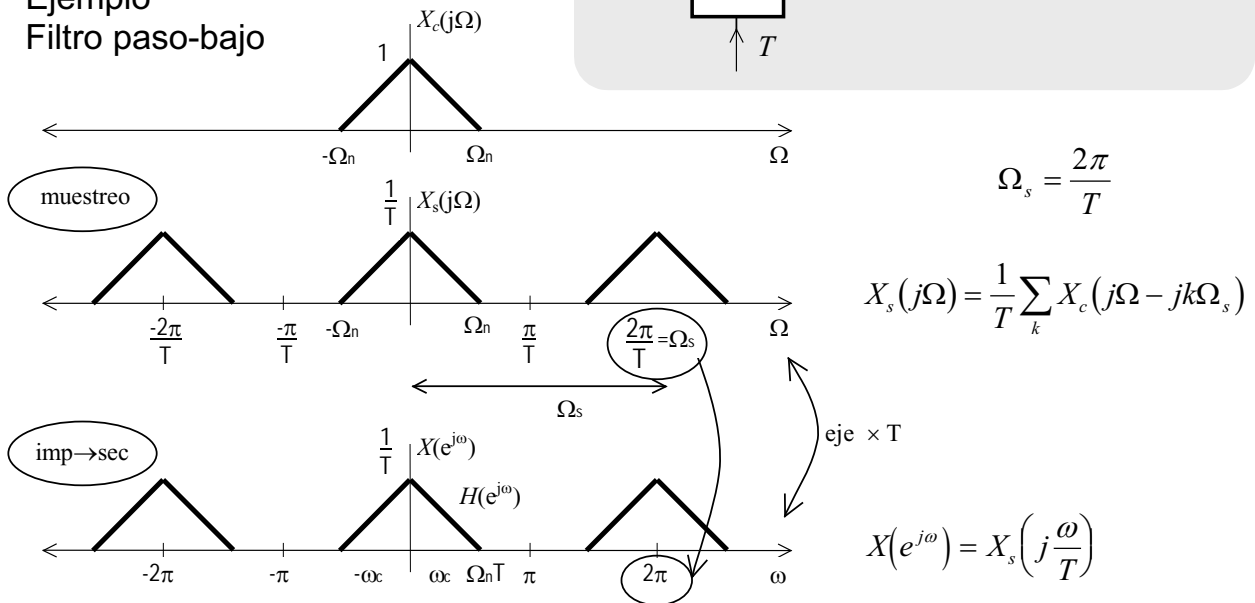
$$H_{ef}(j\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| < \frac{\omega_c}{T} = \Omega_c \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Filtro analógico paso-bajo de frecuencia de corte $\Omega_c = \omega_c/T$



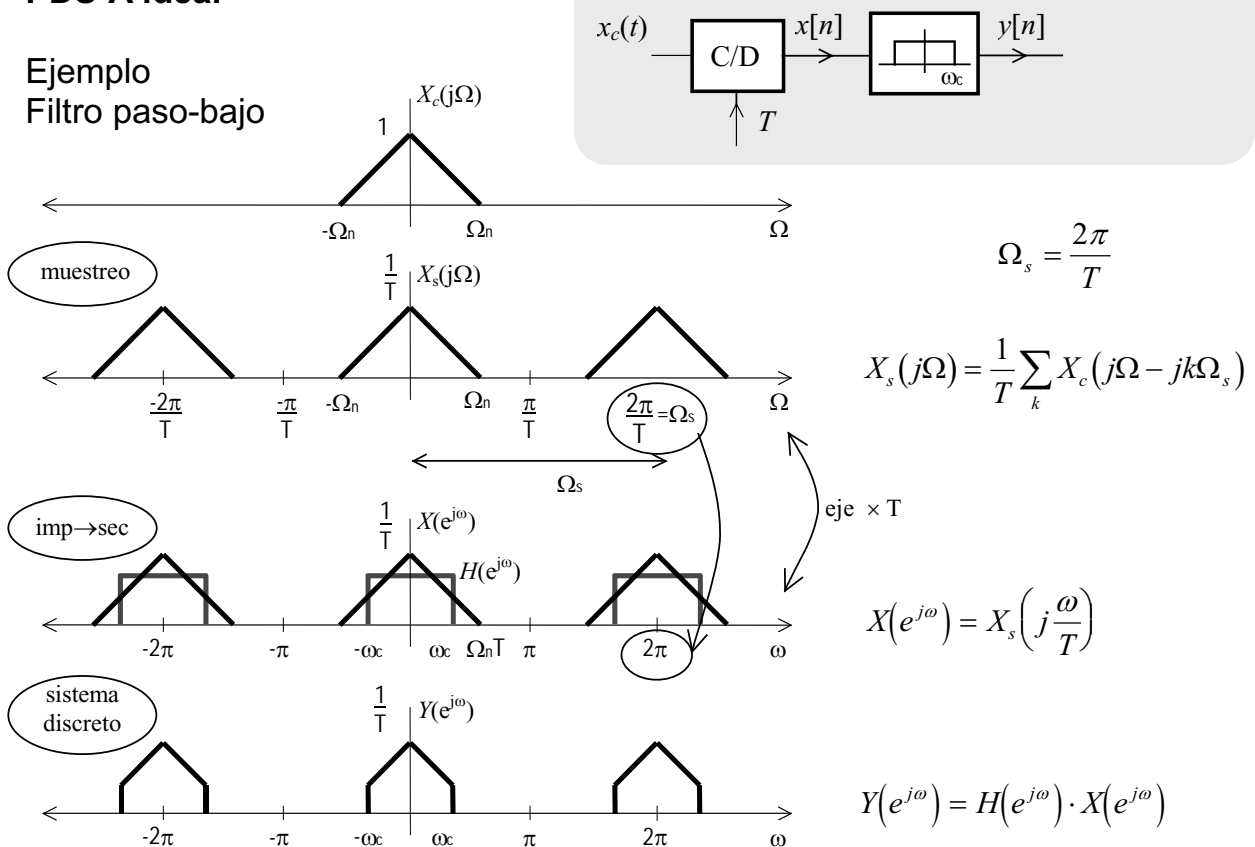
PDS-A ideal

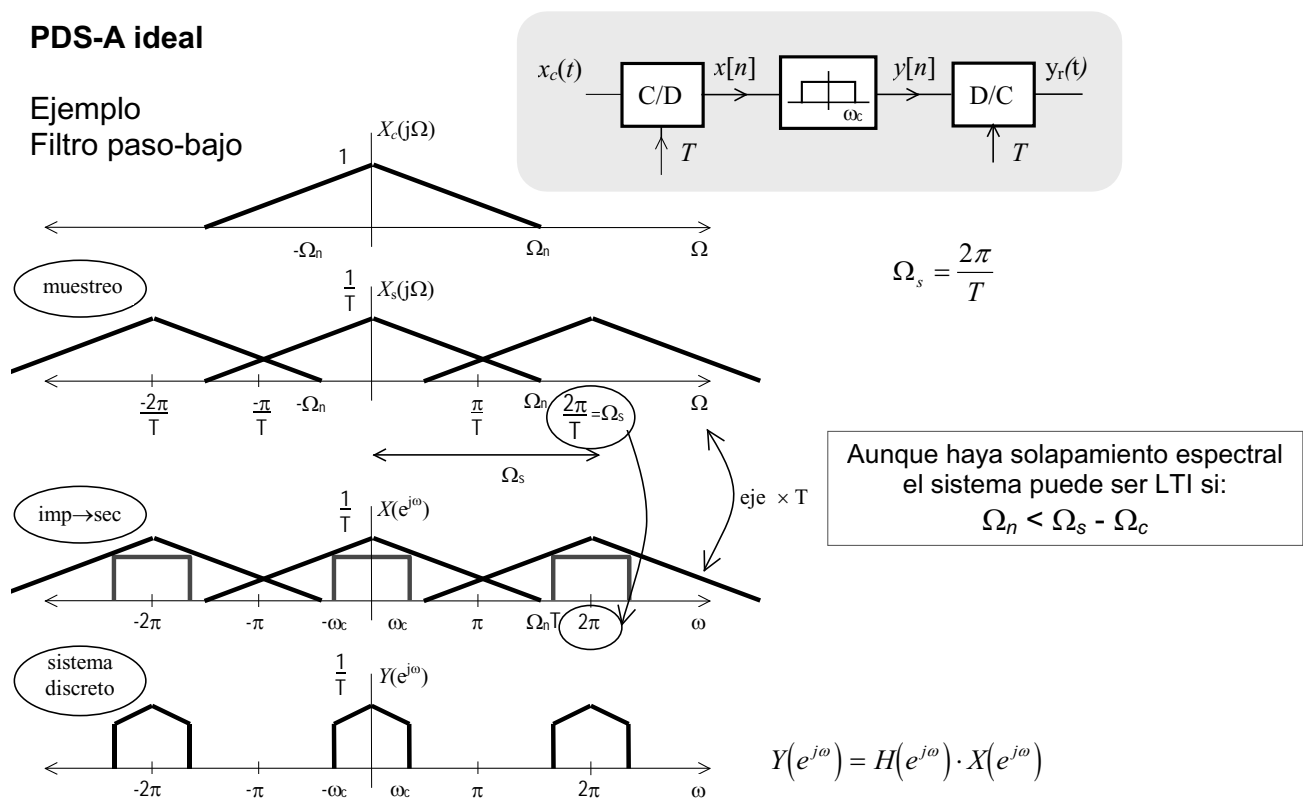
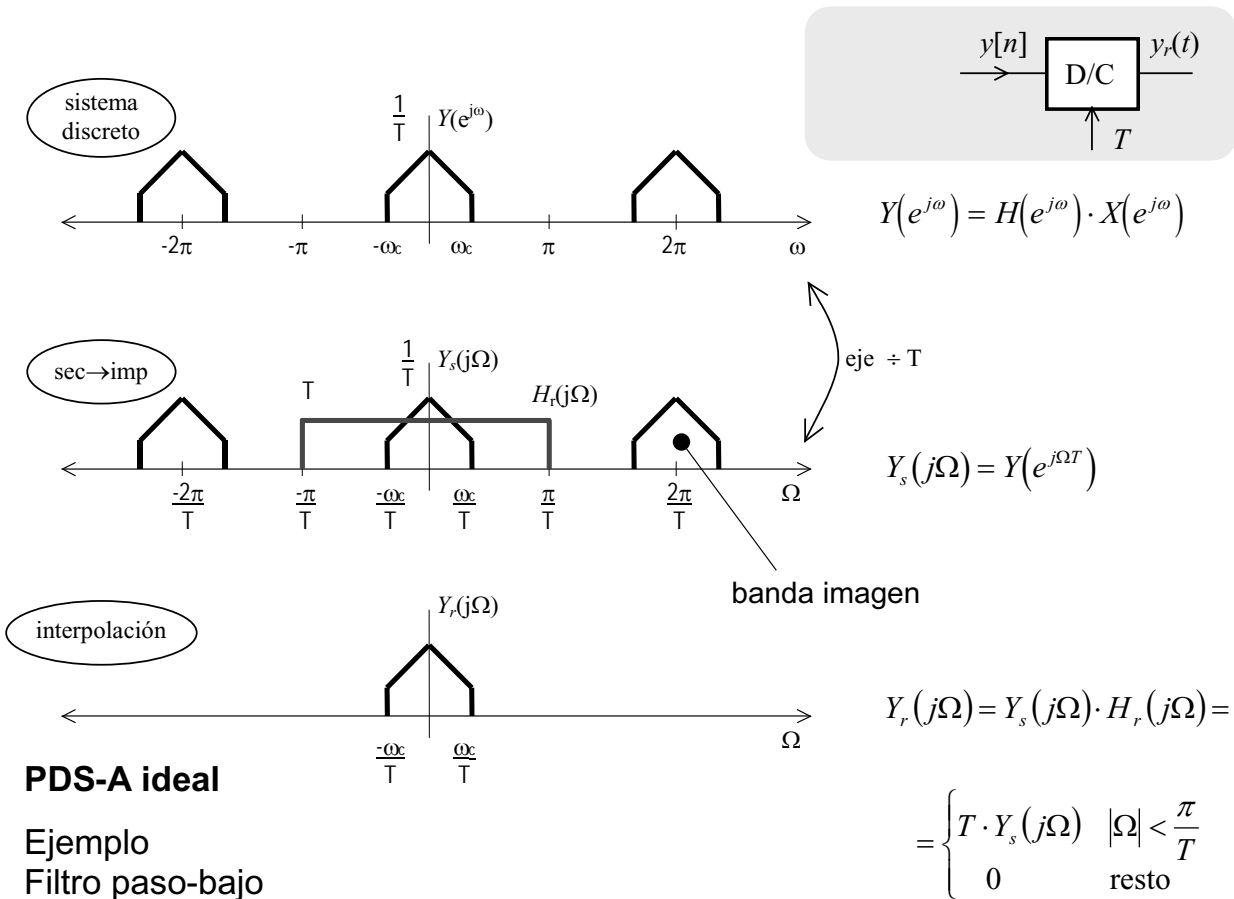
Ejemplo
Filtro paso-bajo



PDS-A ideal

Ejemplo
Filtro paso-bajo





Tema 1 Procesado digital de señales analógicas

- **PDS-A ideal**

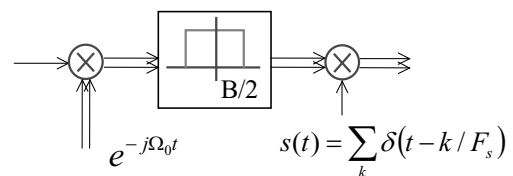
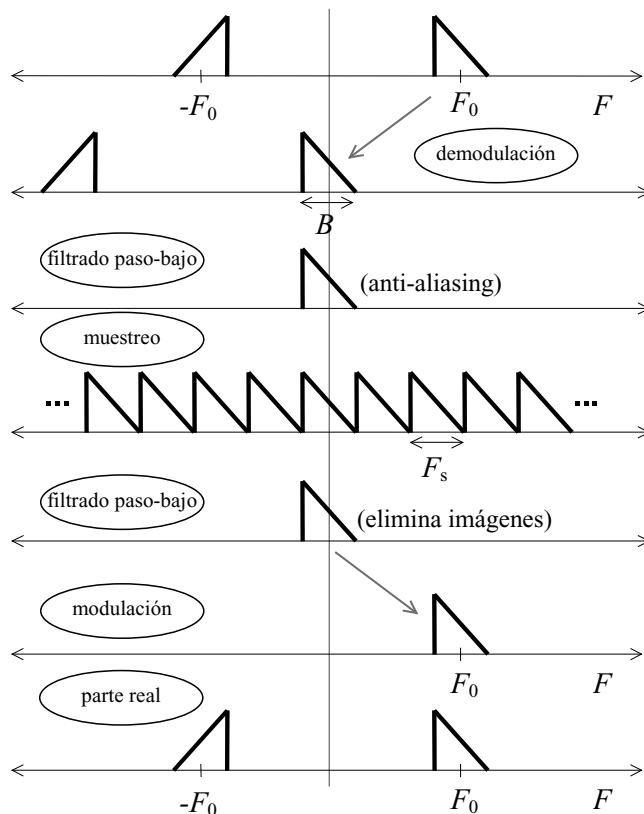
- Conversión ideal continuo-discreta (C/D)
- Conversión ideal discreto-continua (D/C)
- PDS-A ideal
- Muestreo de señales de banda estrecha

- **PDS-A no ideal**

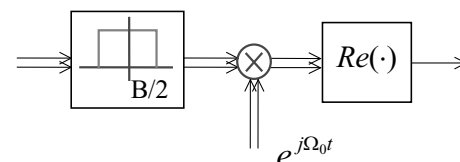
- Conversión analógico-digital (A/D)
- Conversión digital-analógica (D/A)
- Filtros antisolapamiento y anti-imagen

- **Cambio de la velocidad de muestreo**

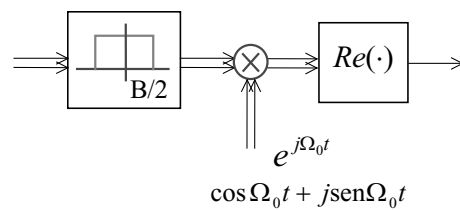
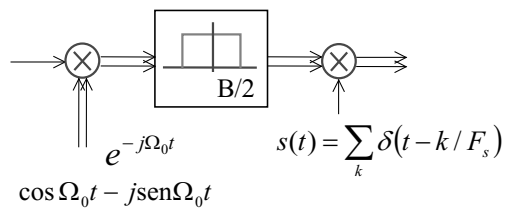
- Diezmado e interpolación
- Técnicas de sobremuestreo para A/D y D/A



Muestreo y reconstrucción de señales paso banda

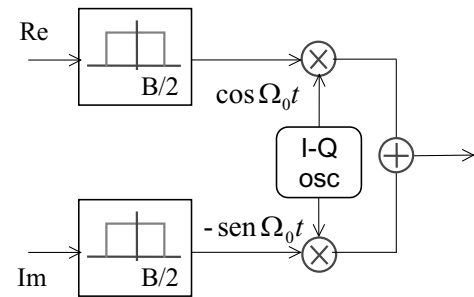
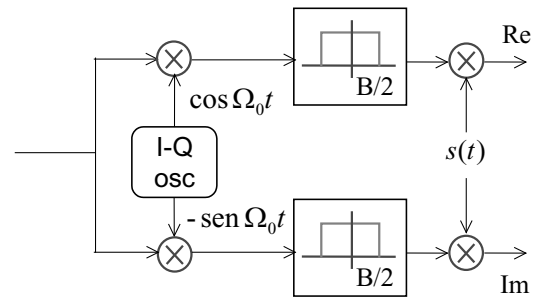


Muestreo y reconstrucción de señales paso banda



Modulación y demodulación en cuadratura

Filtros reales - osciladores en cuadratura



Tema 1 Procesado digital de señales analógicas

• PDS-A ideal

- Conversión ideal continuo-discreta (C/D)
- Conversión ideal discreto-continua (D/C)
- PDS-A ideal
- Muestreo de señales de banda estrecha

• PDS-A no ideal

- Conversión analógico-digital (A/D)
- Conversión digital-analógica (D/A)
- Filtros antisolapamiento y anti-imagen

• Cambio de la velocidad de muestreo

- Diezmado e interpolación
- Técnicas de sobremuestreo para A/D y D/A

Tema 1 Procesado digital de señales analógicas

- **PDS-A ideal**

- Conversión ideal continuo-discreta (C/D)
- Conversión ideal discreto-continua (D/C)
- PDS-A ideal

- **PDS-A no ideal**

- Conversión analógico-digital (A/D)
- Conversión digital-analógica (D/A)
- Filtros antisolapamiento y anti-imagen

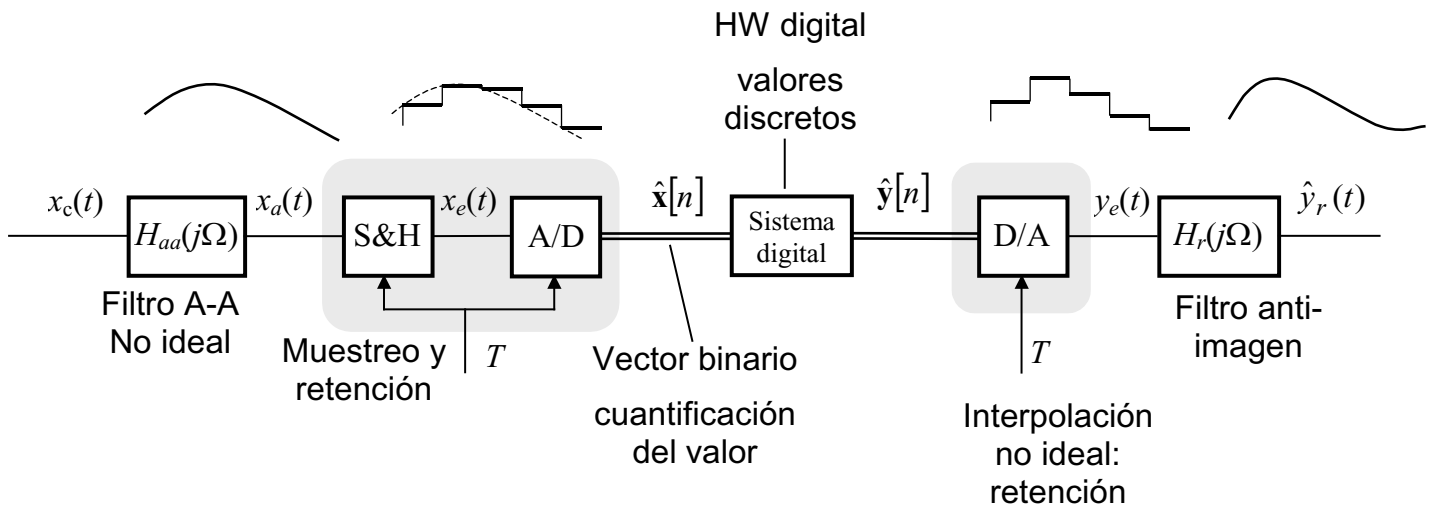
- **Cambio de la velocidad de muestreo**

- Diezmado e interpolación
- Técnicas de sobremuestreo para A/D y D/A

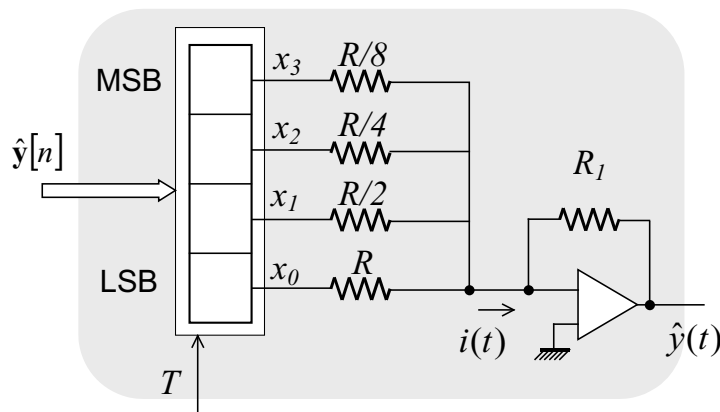
PDS no ideal

- Las señales no son (siempre) limitadas en banda
- Los filtros selectivos no son ideales:
 - Distorsión en la banda de paso
 - Ganancia no nula en banda de rechazo
- El muestreo no es ideal
 - Precisión en el instante de muestreo y en el valor de señal muestreado
 - Los impulsos ideales $\delta(t)$ no pueden obtenerse con electrónica
- Valores discretos (precisión finita)
 - Valores de muestras de señal
 - Constantes de los algoritmos de procesado

PDS no ideal

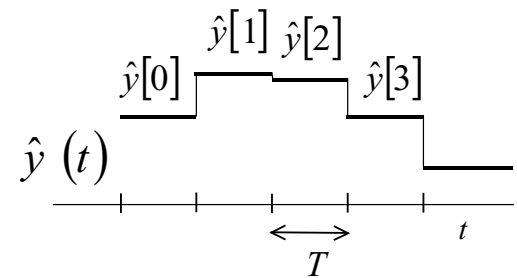
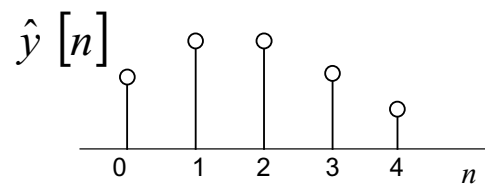


Conversión D/A



$$\hat{y}(t) = R_1 \cdot \left(\frac{x_0}{R} + \frac{x_1}{R/2} + \frac{x_1}{R/4} + \frac{x_1}{R/8} \right)$$

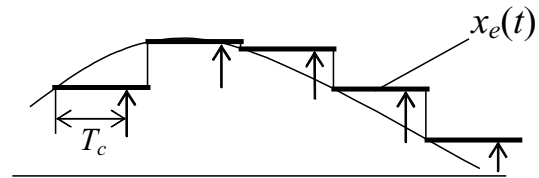
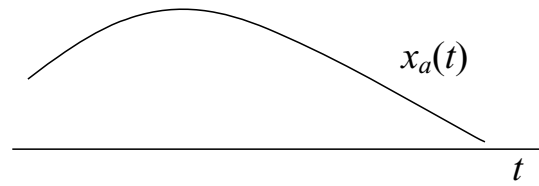
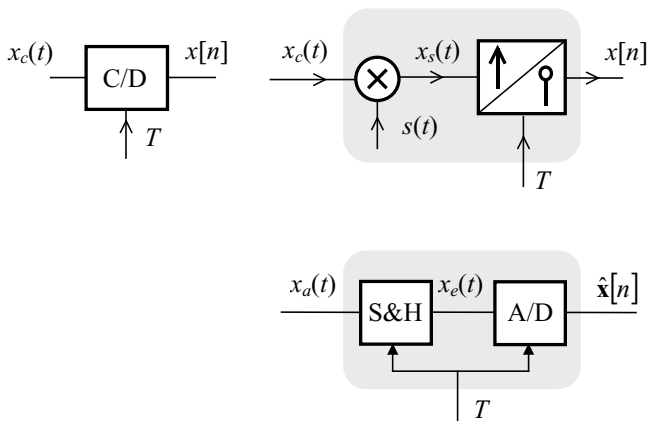
$$\hat{y}(t) = \frac{R_1}{R} \cdot \sum_k x_k(t) \cdot 2^k = \Delta \cdot \sum_k x_k(t) \cdot 2^k$$



- La salida es una señal continua escalonada
- Interpolación por retención del valor

(electrónica sencilla)

Conversión A/D

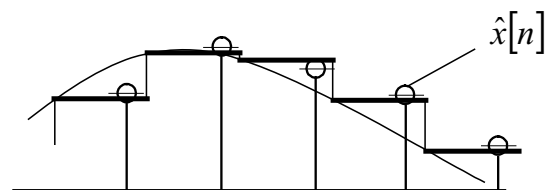


- T_c tiempo de conversión

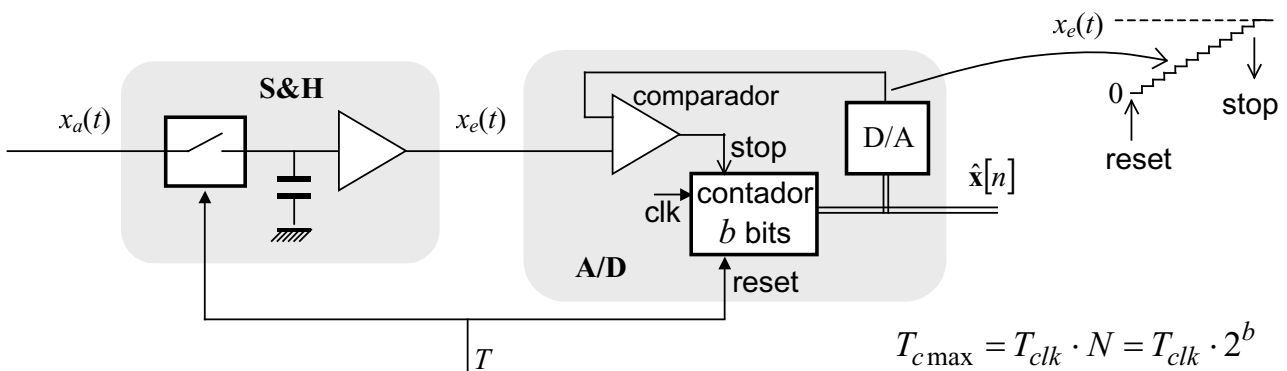
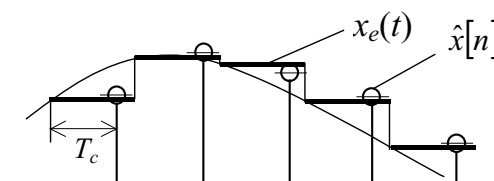
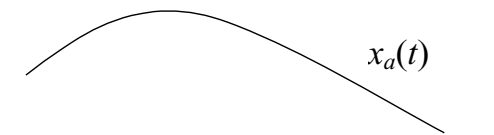
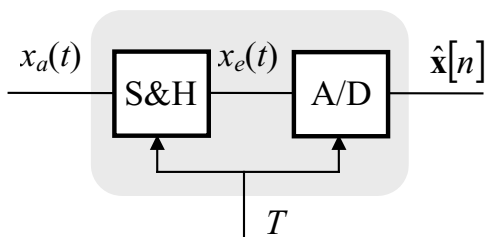
Retardo

Limita T_{min} (F_{max})

- Error de cuantificación



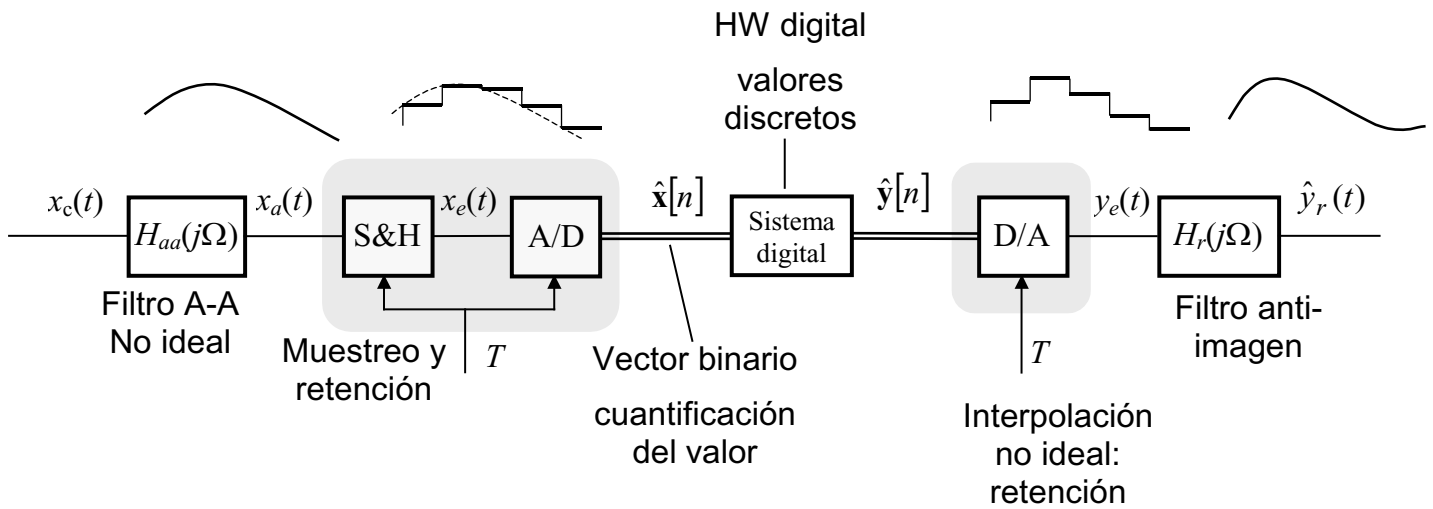
Conversión A/D



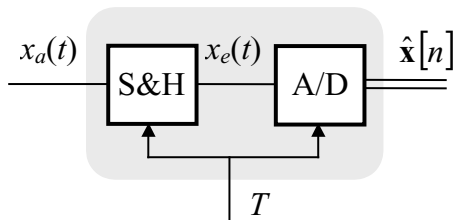
$$T_{c \max} = T_{clk} \cdot N = T_{clk} \cdot 2^b$$

T_c tiempo de conversión aumenta con nº de bits

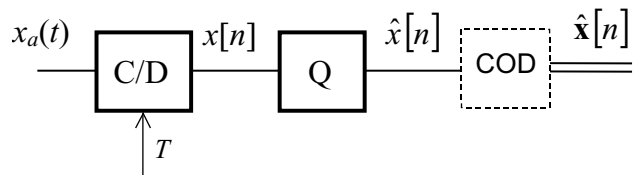
PDS no ideal



Muestreo y cuantificación



Modelo de comportamiento

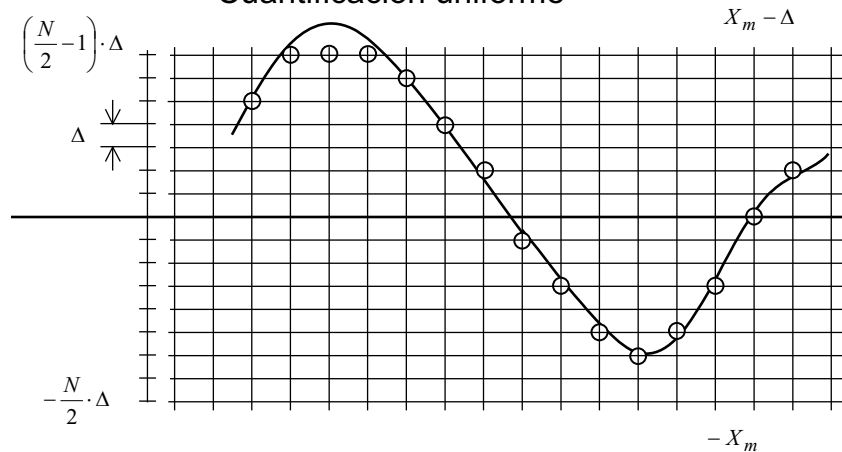


Cuantificación

Necesaria para que COD pueda asignar un símbolo binario a cada valor de $x[n]$

N símbolos binarios

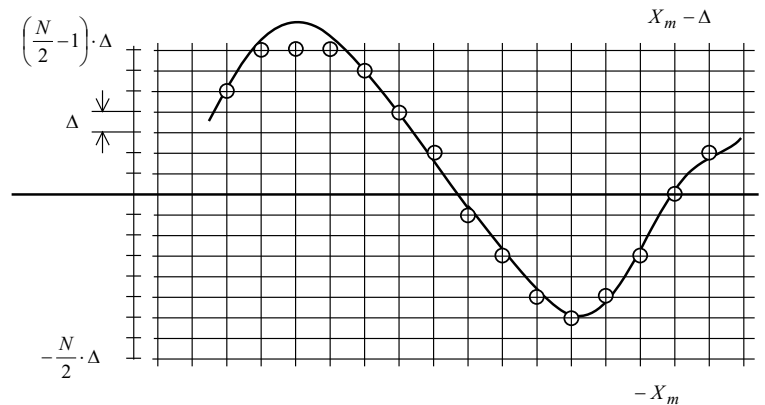
Cuantificación uniforme



cuantificación: tiempo y valor

Cuantificación uniforme

- N (nº niveles): potencia de 2
- Niveles equiespaciados: Δ
- X_m : **Fondo de escala** = $\frac{N}{2} \cdot \Delta$
- Aproximación
 - Al más próximo (redondeo)
 - Al más próximo hacia abajo

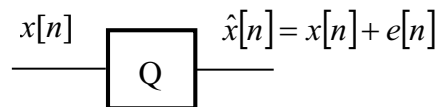


- Se supera el fondo de escala: **recorte** (*clipping*)
- Codificación con vector binario: $b = B + 1$ bits

$$b = \log_2 N$$

$$B = \log_2 \frac{N}{2} \quad \Delta = \frac{X_m}{N/2} = \frac{X_m}{2^B}$$

Cuantificación uniforme.



Análisis del error de cuantificación

¿cómo es $e[n]$?

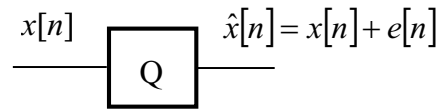
Supuestos:

- $x[n]$ es muy complicada (poco predecible) (ej.: voz, música)
- $x[n]$ no está muy sobre-muestreada (Ω_s sólo un poco mayor que $2 \cdot \Omega_n$)
- $N \gg 1$ (muchos niveles de cuantificación)
- Valor eficaz de la señal $\gg \Delta$
- No hay recorte



- De una muestra a otra se pasa por muchos niveles
 $e[n]$ depende más del azar que de $x[n]$ (caer más o menos cerca de un nivel)

Quantificación uniforme.

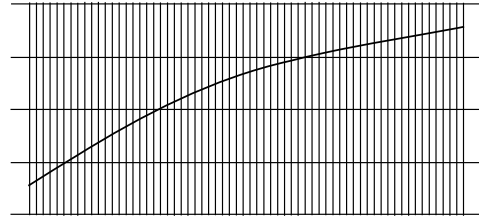


Análisis del error de cuantificación

¿cómo es $e[n]$?

Supuestos:

- $x[n]$ es muy complicada (poco predecible) (ej.: voz, música)
- $x[n]$ no está muy sobre-muestreada (Ω_s sólo un poco mayor que $2 \cdot \Omega_n$)
- $N \gg 1$ (muchos niveles de cuantificación)
- Valor eficaz de la señal $\gg \Delta$
- No hay recorte

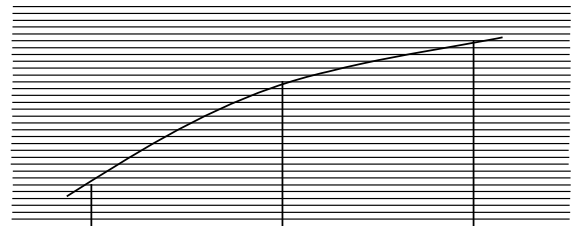


- De una muestra a otra se pasa por muchos niveles
 $e[n]$ depende más del azar que de $x[n]$ (caer más o menos cerca de un nivel)

Análisis del error de cuantificación

¿cómo es $e[n]$?

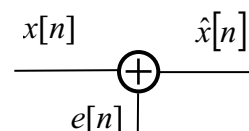
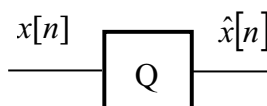
- $e[n]$ depende sólo del azar
- $e[n]$ no depende de $x[n]$



Modelo de $e[n]$

- Señal aleatoria estacionaria
- Valores distribuidos uniformemente en $(-\Delta/2, \Delta/2)$ media cero
- Incorrelada con la señal $E[e[n] \cdot x[m]] = 0$
- Incorrelada consigo misma (blanca) $E[e[n] \cdot e[m]] = 0 \quad n \neq m$

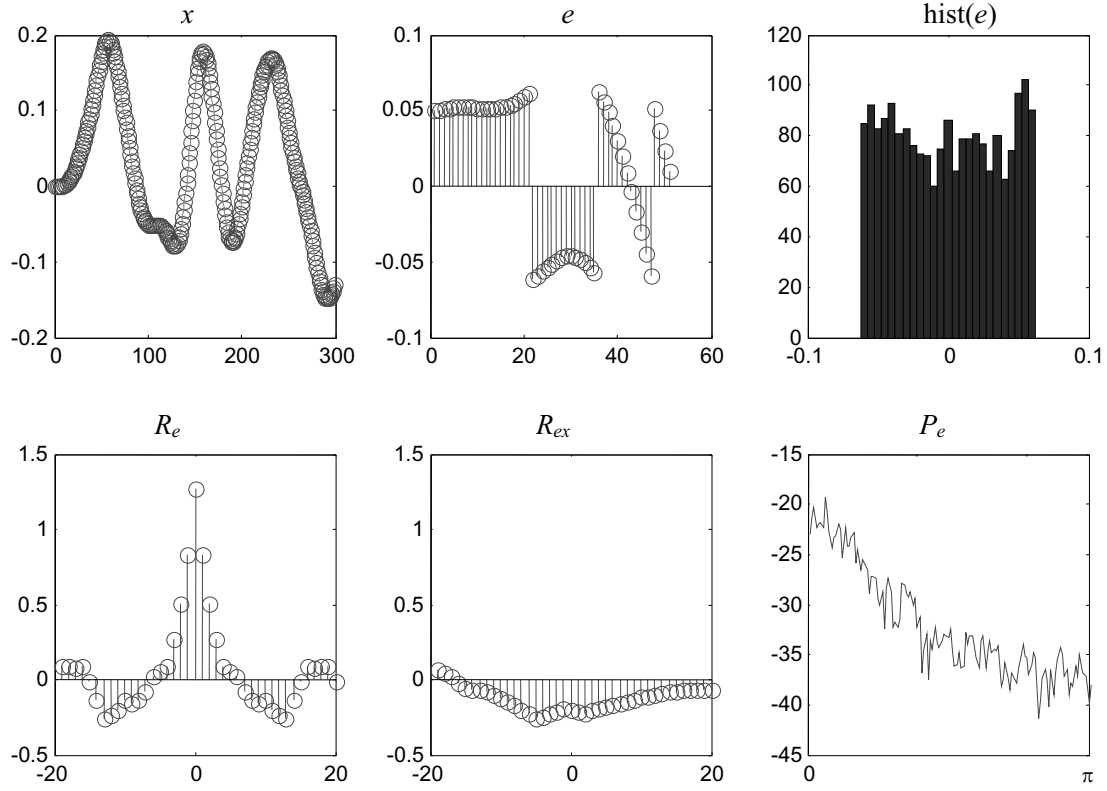
Modelo del cuantificador



ruido aditivo

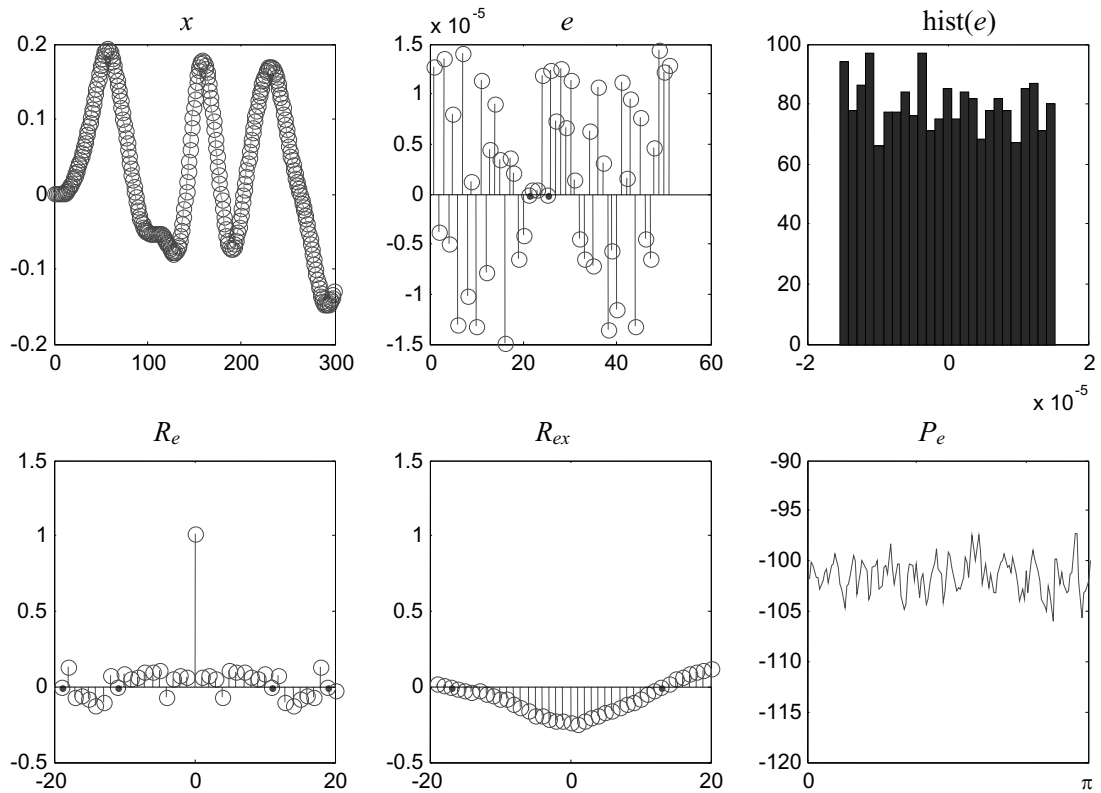
Experimentos

$B_f = 4$ bits



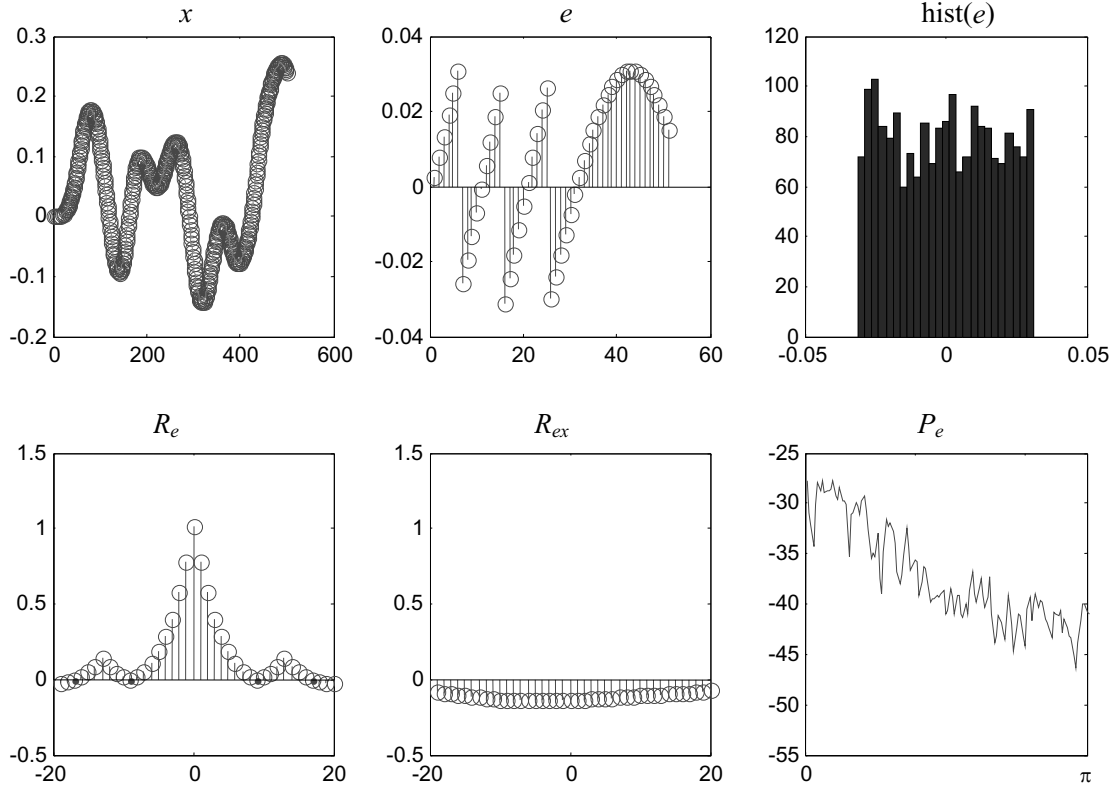
Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

$B_f = 15$ bits

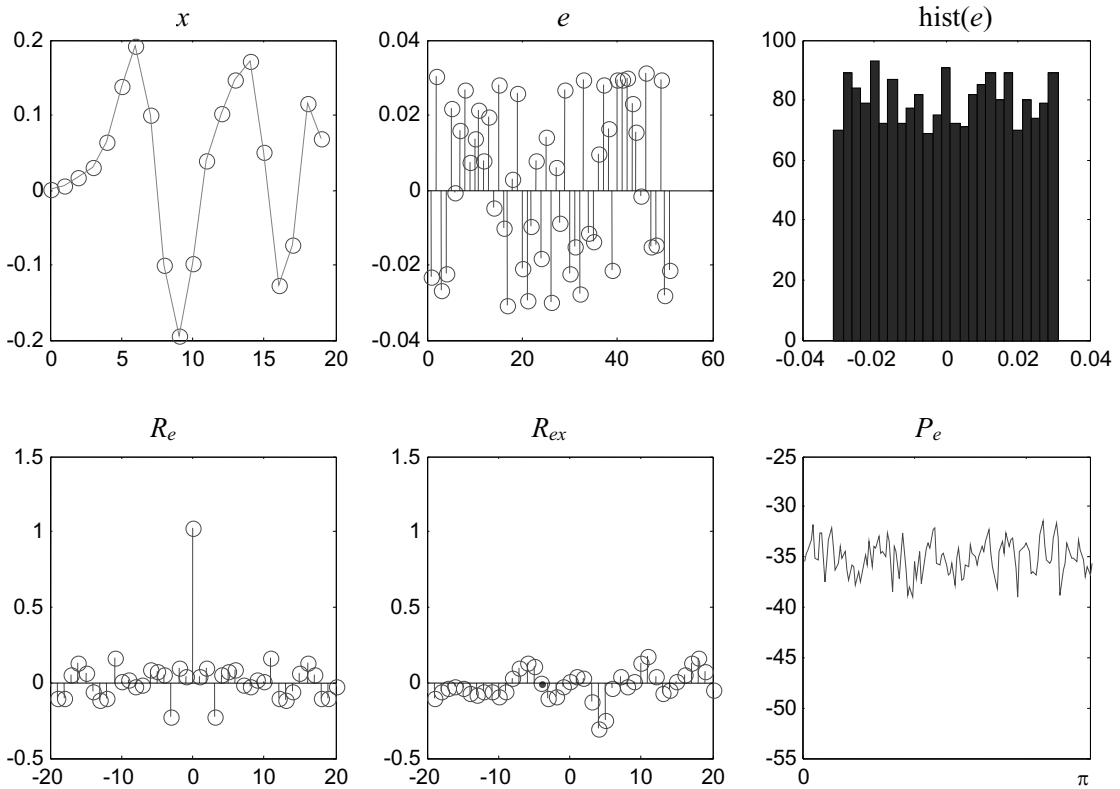


Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

$B_f = 4$ bits



$B_f = 4$ bits

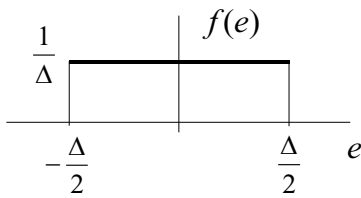


Análisis del error de cuantificación.

Potencia de ruido y SNR

Potencia

- Señal aleatoria blanca: un solo parámetro puede caracterizarla: la potencia
- Distribución uniforme en $(-\Delta/2, \Delta/2)$ media cero



$$\sigma_e^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^2 f(e) de = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 \frac{1}{\Delta} de = \frac{\Delta^2}{12}$$

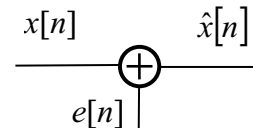
$$\sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12}$$

$$\Delta = \frac{X_m}{2^B} \rightarrow \sigma_e^2 = \frac{X_m^2}{12 \cdot 2^{2B}}$$

SNR debida a la cuantificación

- Si $x[n]$ señal aleatoria estacionaria de media cero y potencia σ_x^2

$$\text{SNR(dB)} = 10 \log \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2}$$



Análisis del error de cuantificación.

Potencia de ruido y SNR

$$\sigma_e^2 = \frac{X_m^2}{12 \cdot 2^{2B}}$$

SNR debida a la cuantificación

↓

$$\text{SNR(dB)} = 10 \log \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} = 20 \log \sigma_x - 20 \log X_m + \underbrace{10 \log 12}_{10,8} + \underbrace{20B \log 2}_{6,02B}$$

$$\text{SNR(dB)} \approx 10,8 + 6,02B + 20 \log \frac{\sigma_x}{X_m}$$

≈ 6 dB/bit

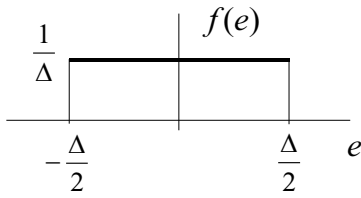
nivel de entrada
relativo al
fondo de escala

Análisis del error de cuantificación.

Potencia de ruido y SNR

Potencia

- Señal aleatoria blanca: un solo parámetro puede caracterizarla: la potencia
- Distribución uniforme en $(-\Delta/2, \Delta/2)$ media cero



$$\sigma_e^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^2 f(e) de = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 \frac{1}{\Delta} de = \frac{\Delta^2}{12}$$

$$\sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12}$$

$$\Delta = \frac{X_m}{2^B} \rightarrow \sigma_e^2 = \frac{X_m^2}{12 \cdot 2^{2B}}$$

SNR debida a la cuantificación

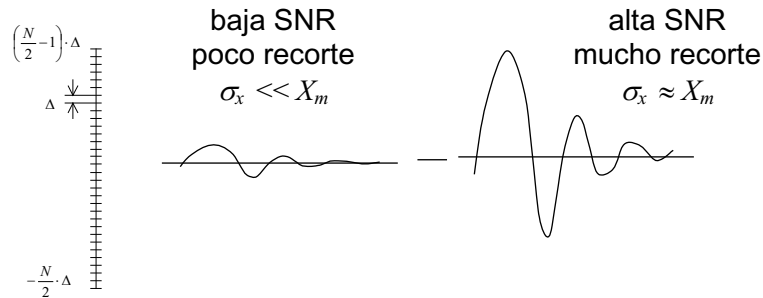
- Si $x[n]$ señal aleatoria estacionaria de media cero y potencia σ_x^2

$$\text{SNR (dB)} = 10 \log \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} \approx 10,8 + 6,02B - 20 \log \frac{X_m}{\sigma_x}$$

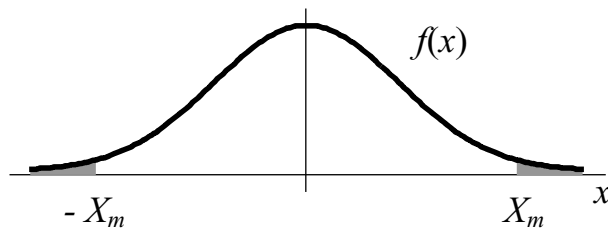
- Depende de n° de bits: ≈ 6 dB/bit
- Depende del nivel de entrada (relativo al fondo de escala)

Análisis del error de cuantificación.

Compromiso SNR - recorte



$x[n]$ distribución gaussiana de media cero



$$P(\text{recorte}) = P(|x| > X_m)$$

$$\frac{X_m}{\sigma_x} = 4 \rightarrow P(\text{recorte}) \approx 10^{-4}$$

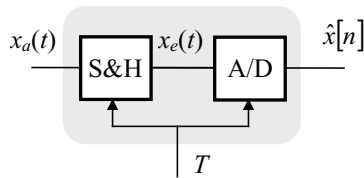
$$\frac{X_m}{\sigma_x} = 5 \rightarrow P(\text{recorte}) \approx 10^{-6}$$

Para ajuste de nivel: $X_m/\sigma_x = 4$ (12dB):

$$\text{SNR (dB)} \approx 6 \cdot B - 1,2$$

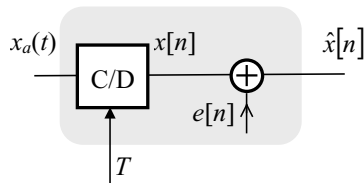
- Telefonía 40dB B=7
- Compact Disk 90dB B=15

Resumen A/D



Condición

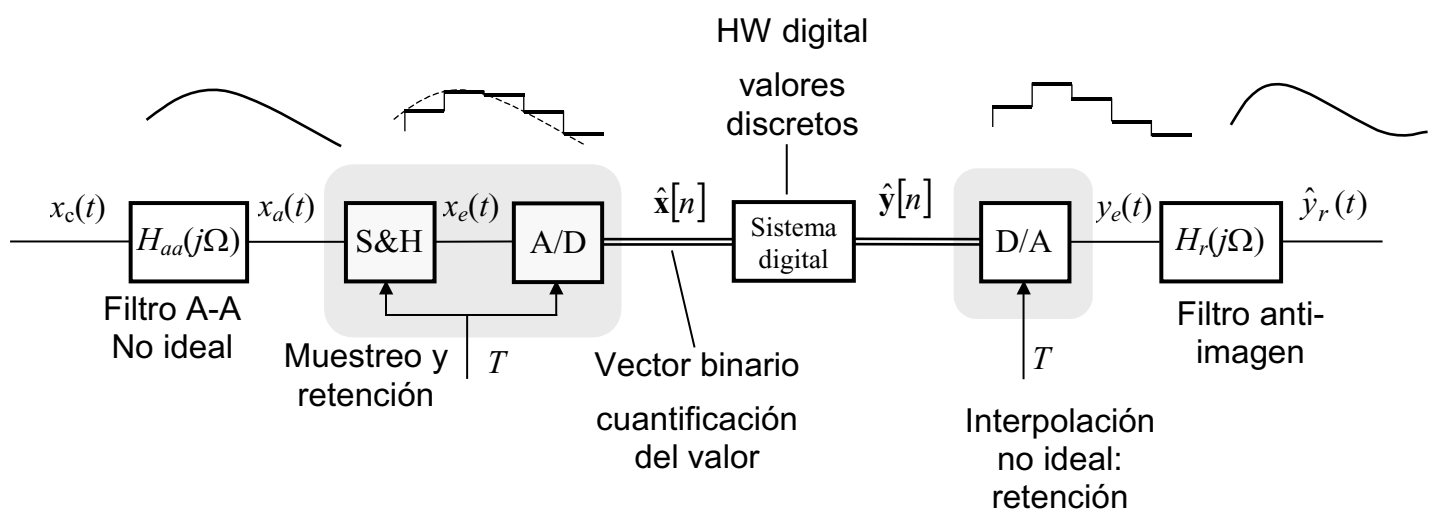
- $N \gg 1$
- $x[n]$ no muy sobre-muestreada



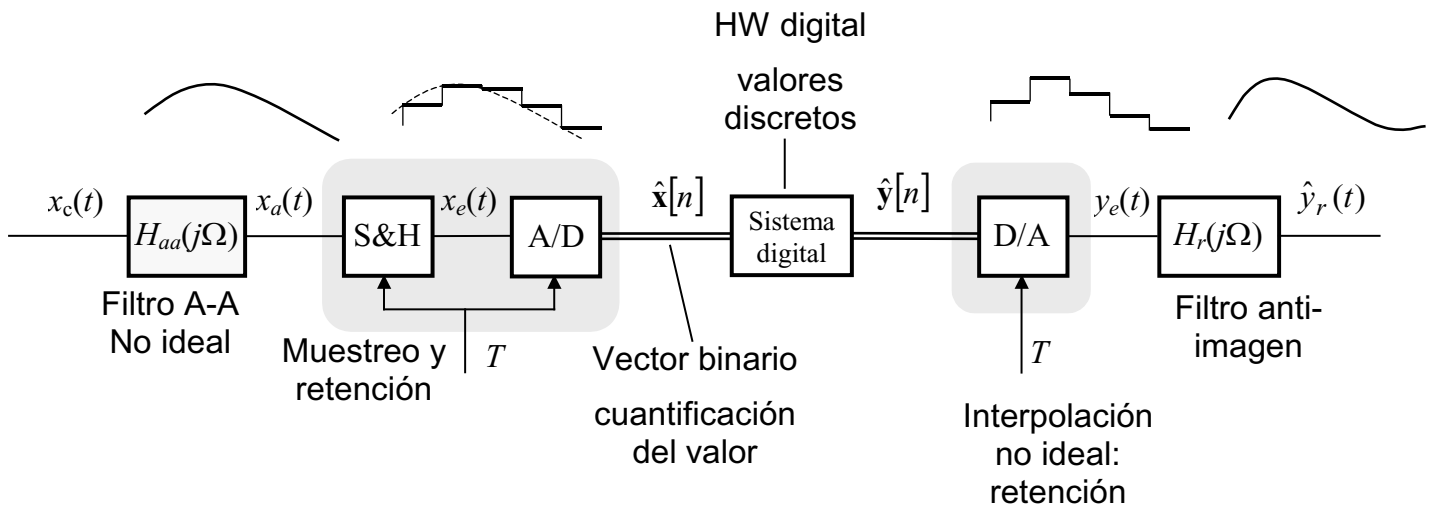
$e[n]$

- Uniforme $(-\Delta/2, \Delta/2)$ media cero
- Blanca e incorrelada con $x[n]$
- Potencia $\frac{\Delta^2}{12}$
- $\text{SNR}(\text{dB}) \approx 6 \cdot B - 1,2$ para $\frac{X_m}{\sigma_x} = 4$
($P_{\text{recorte}} < 10^{-4}$)

PDS no ideal



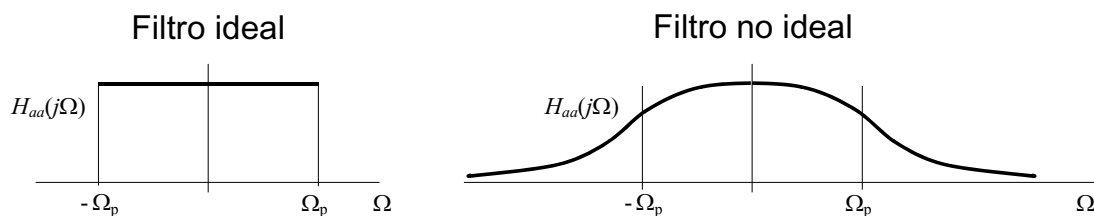
PDS no ideal



Filtro antisolapamiento

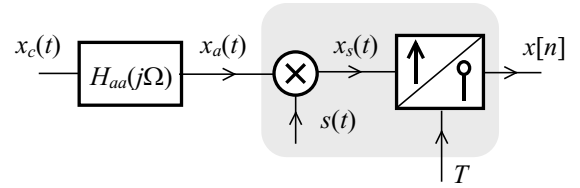
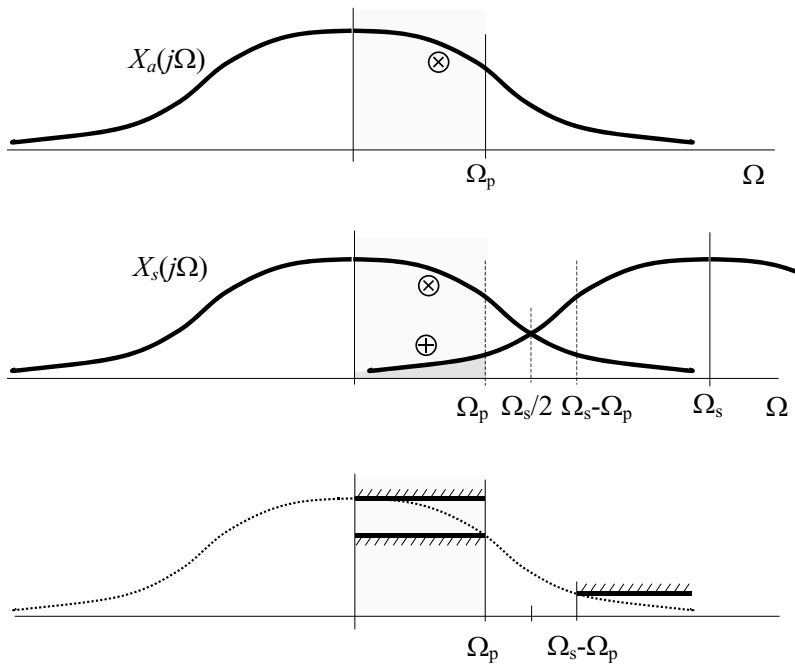
Objetivo

- Limitar la banda
 - Para señales de banda no limitada
- Reducir F_s
 - Procesar sólo la banda necesaria (hasta Ω_p) (voz: 3,6 kHz, música: 20 kHz)
 - No usar más F_s de la necesaria



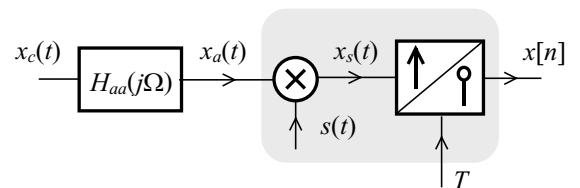
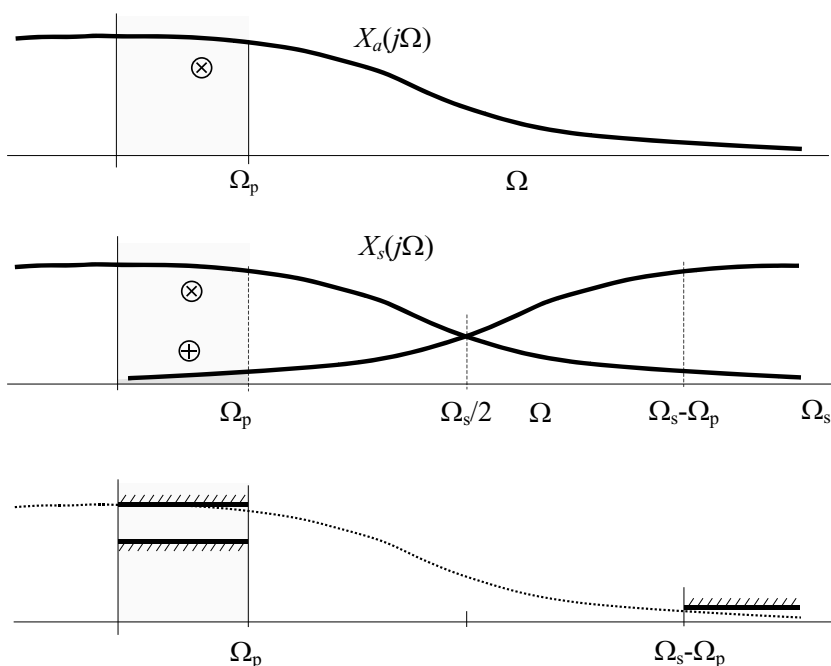
- Filtro A-A no ideal:
 - Distorsión en la banda de paso
 - No evita totalmente el solapamiento espectral

Filtro antisolapamiento. Especificación



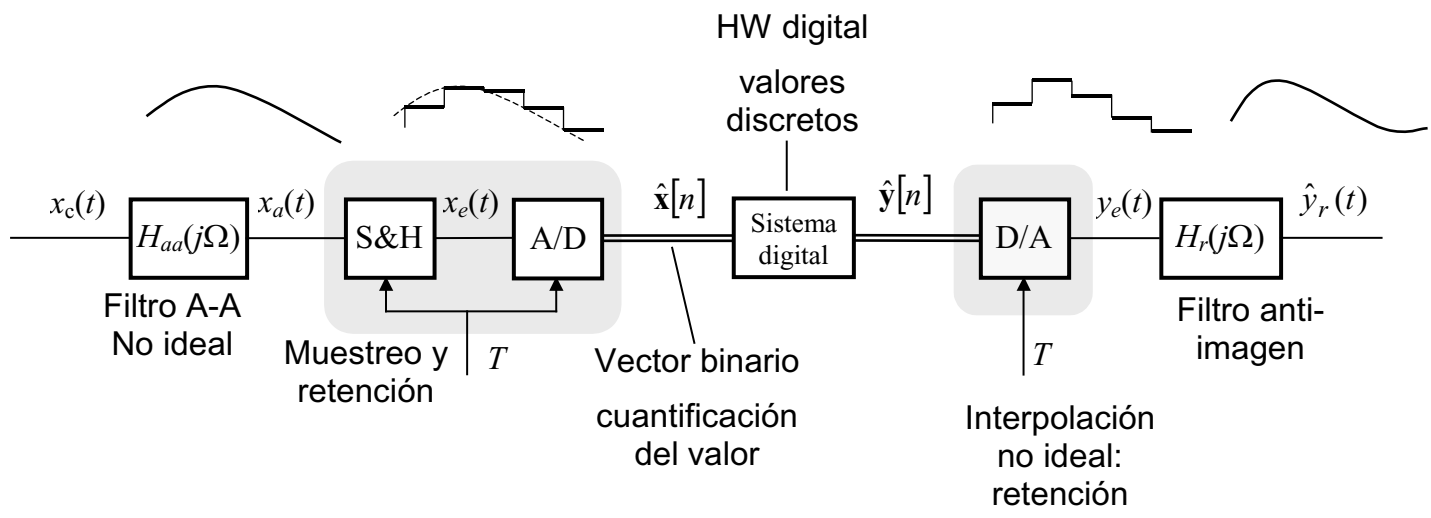
- Elegir Ω_s algo mayor que $2 \cdot \Omega_p$
- Admitir distorsión y “ruido de aliasing” en banda de paso ($\Omega < \Omega_p$)
- Limitar distorsión y “ruido de aliasing”
- Poco margen ($\Omega_s/2 - \Omega_p$) hace difícil el filtro

Filtro antisolapamiento. Especificación

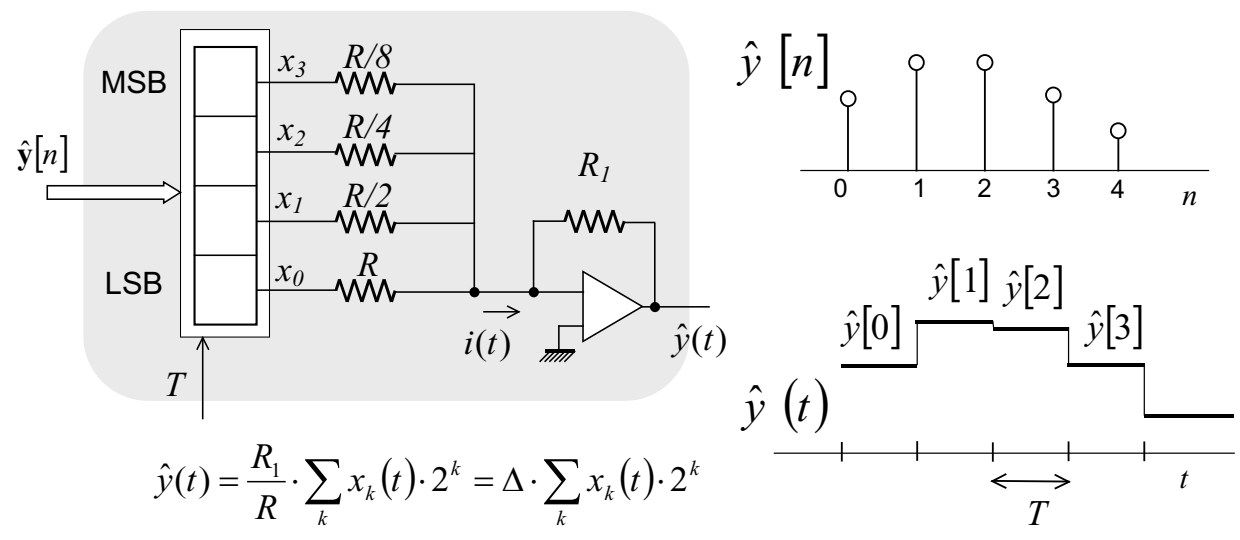


- Elegir Ω_s algo mayor que $2 \cdot \Omega_p$
- Admitir distorsión y “ruido de aliasing” en banda de paso ($\Omega < \Omega_p$)
- Limitar distorsión y “ruido de aliasing”
- Poco margen ($\Omega_s/2 - \Omega_p$) hace difícil el filtro

PDS no ideal

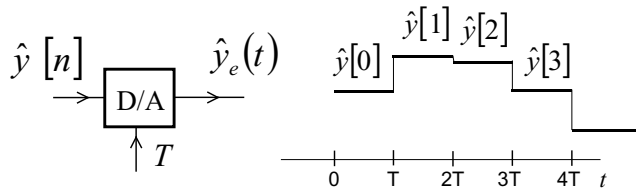


Conversión D/A



- La salida es una señal continua escalonada
- Interpolación por retención del valor

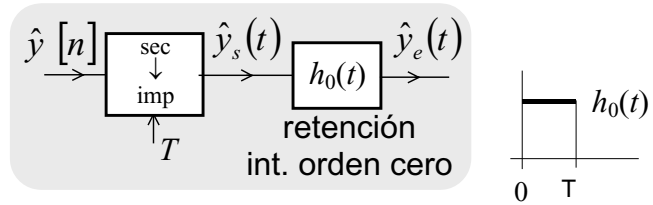
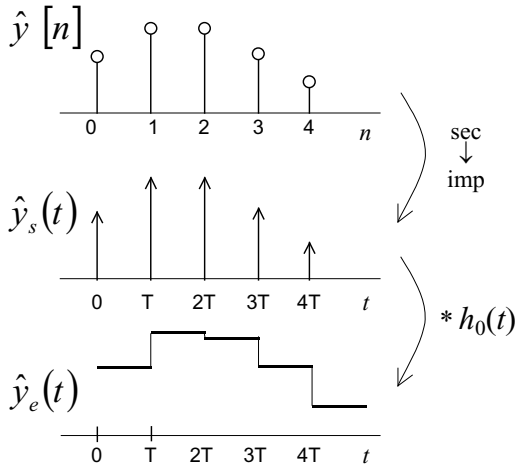
Conversión D/A



Reconstrucción

- en escalera
- por retención (del valor)

Modelo



Dom. tiempo

$$\hat{y}_e(t) = \sum_n \hat{y}[n] \cdot h_0(t - nT)$$

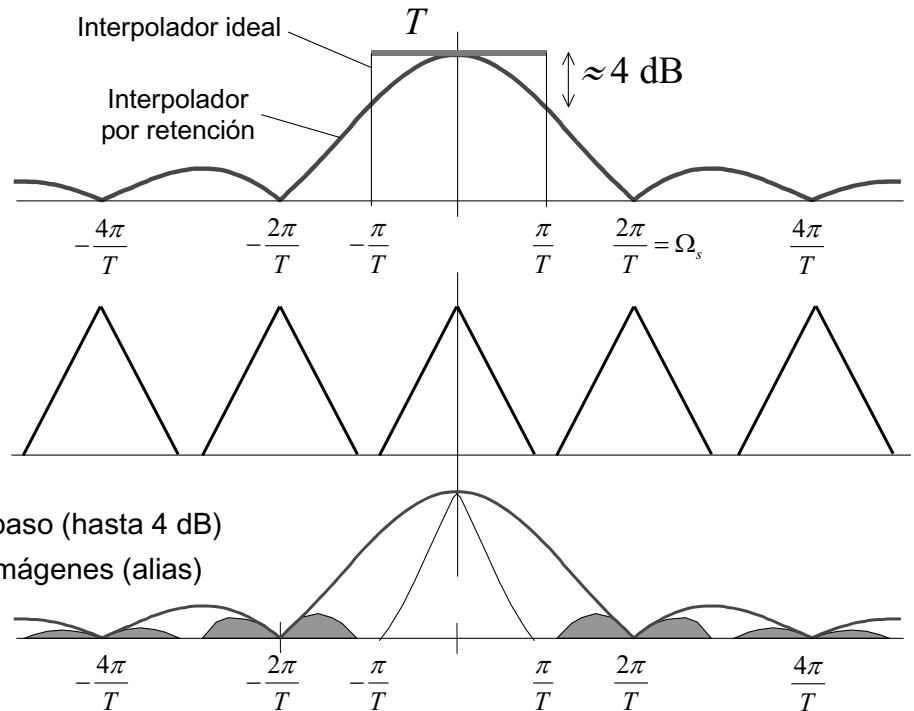
Dom. frecuencia

$$\hat{Y}_s(j\Omega) = \hat{Y}(e^{j\Omega T})$$

$$\hat{Y}_e(j\Omega) = H_0(j\Omega) \cdot \hat{Y}(e^{j\Omega T})$$

Conversión D/A

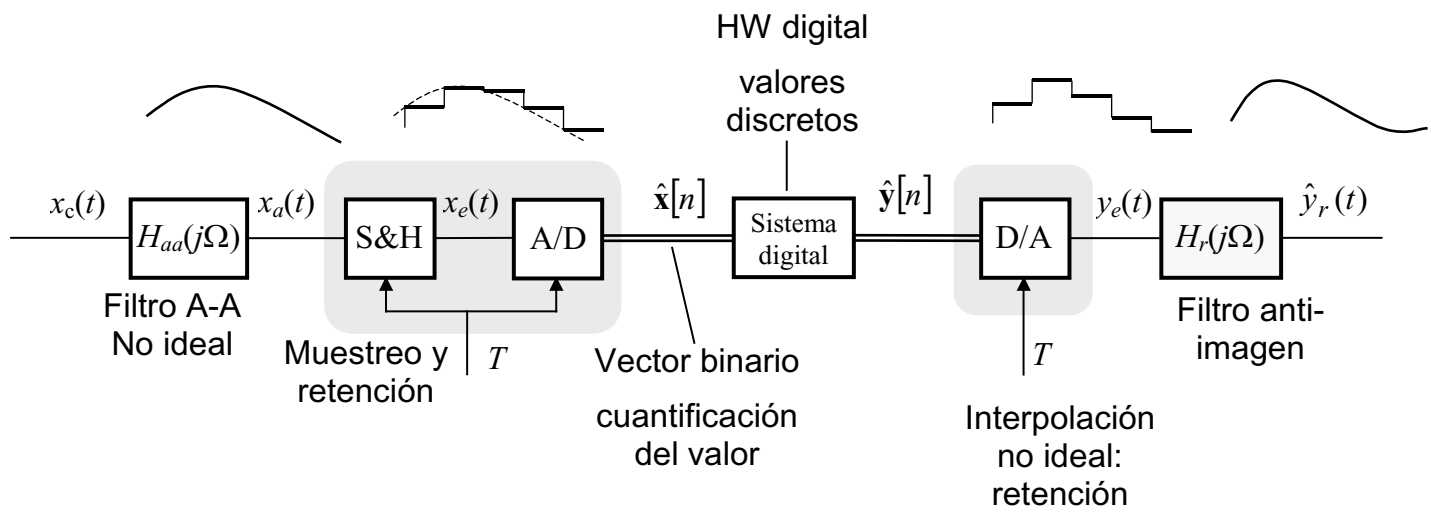
$$|H_0(j\Omega)| = T \cdot \left| \frac{\text{sen} \frac{\Omega T}{2}}{\frac{\Omega T}{2}} \right|$$



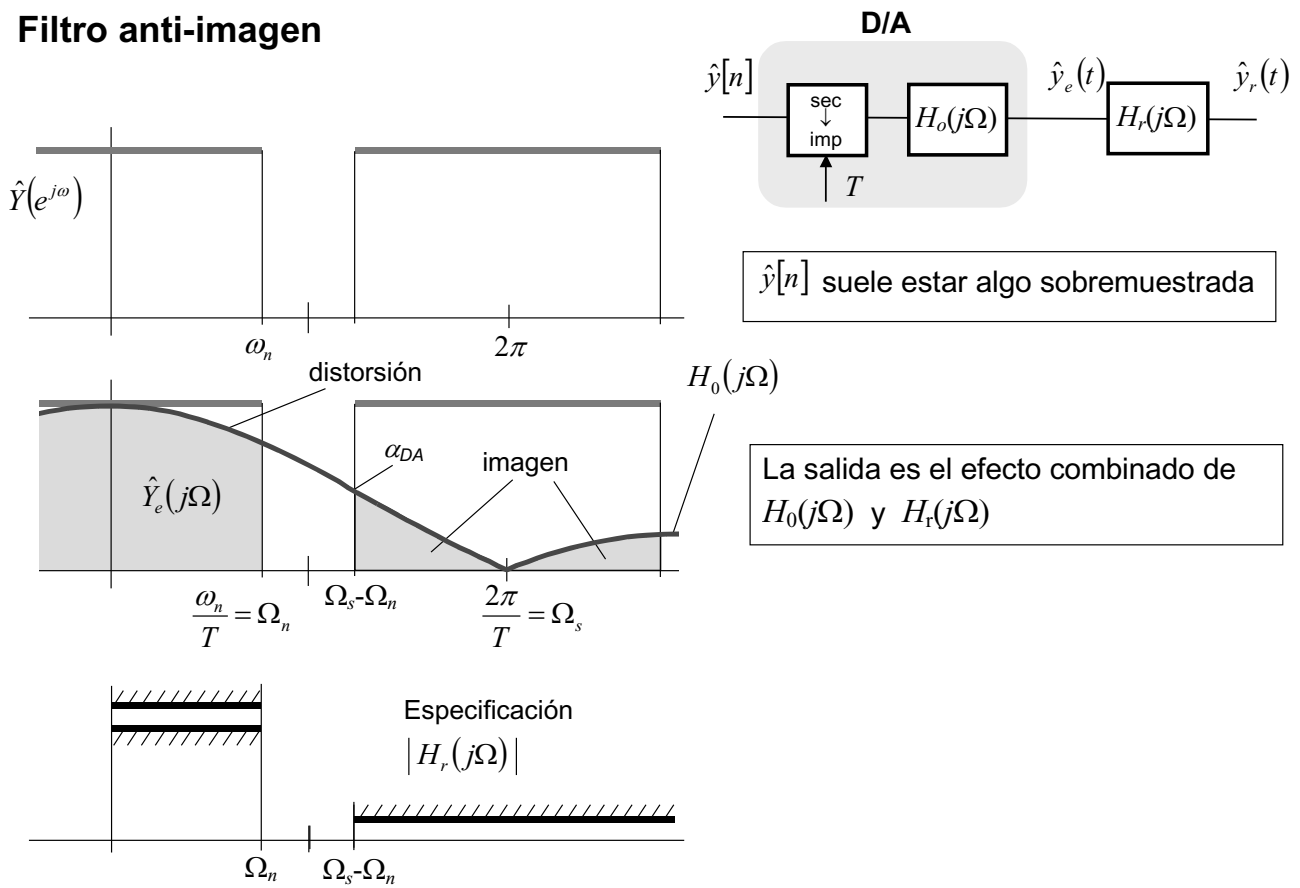
- Distorsión en la banda de paso (hasta 4 dB)
- No elimina totalmente las imágenes (alias)

- Se necesita un filtro anti-imagen

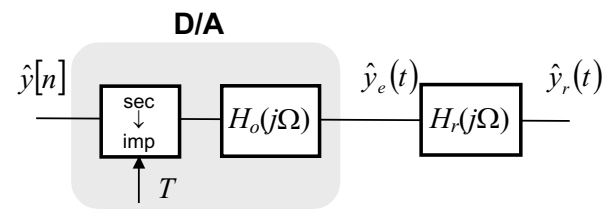
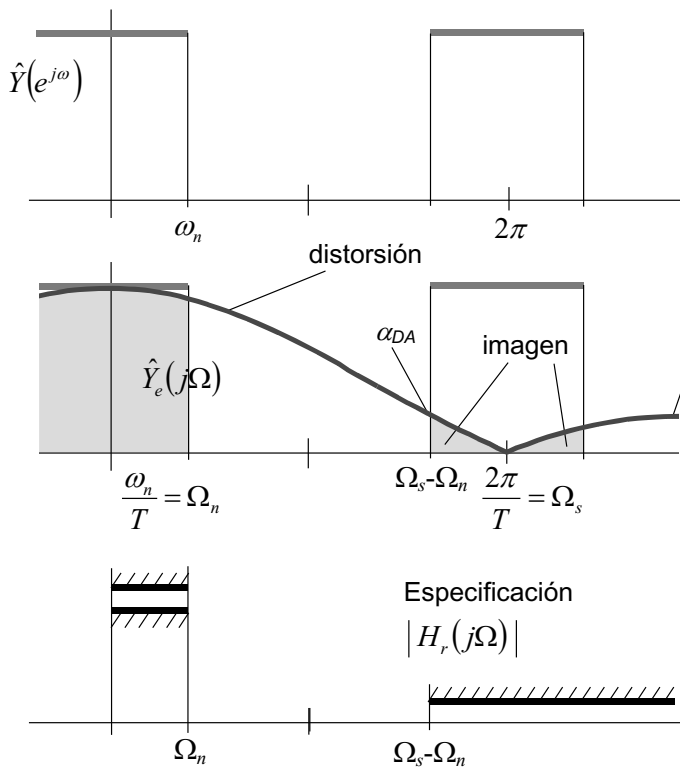
PDS no ideal



Filtro anti-imagen



Filtro anti-imagen

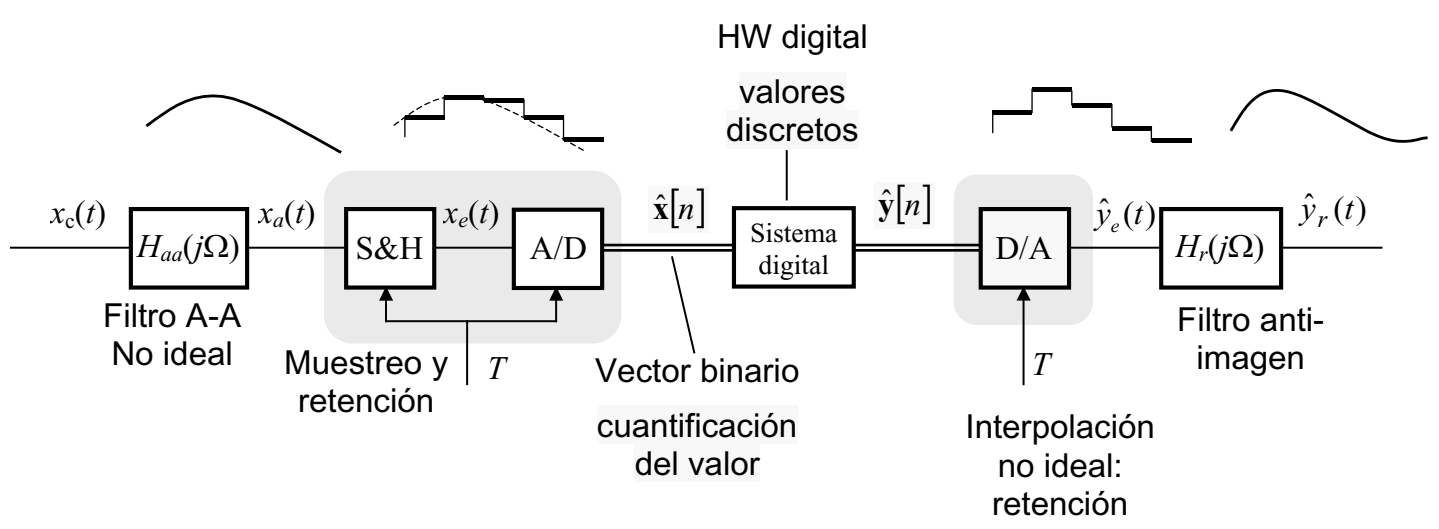


$\hat{y}[n]$ suele estar algo sobremuestrada

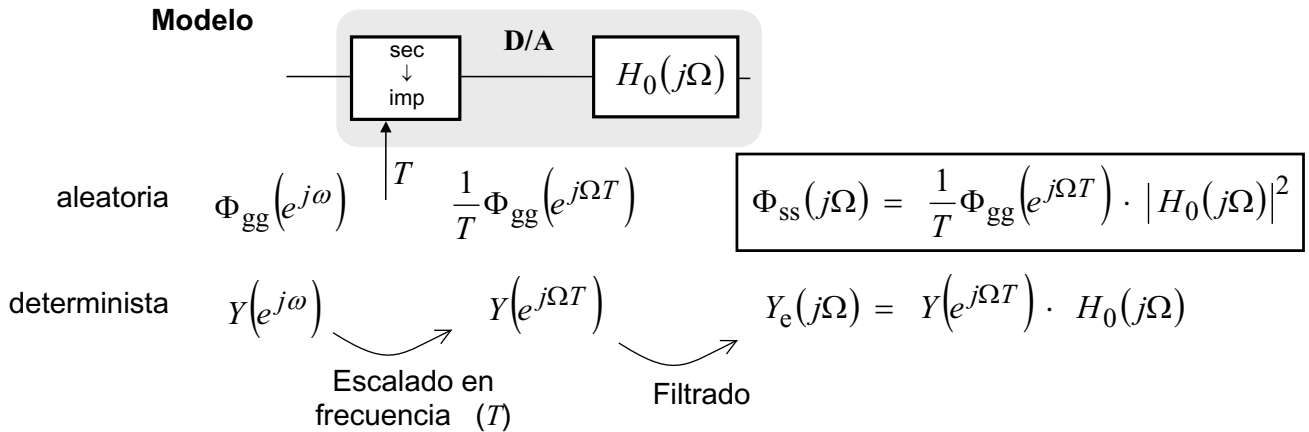
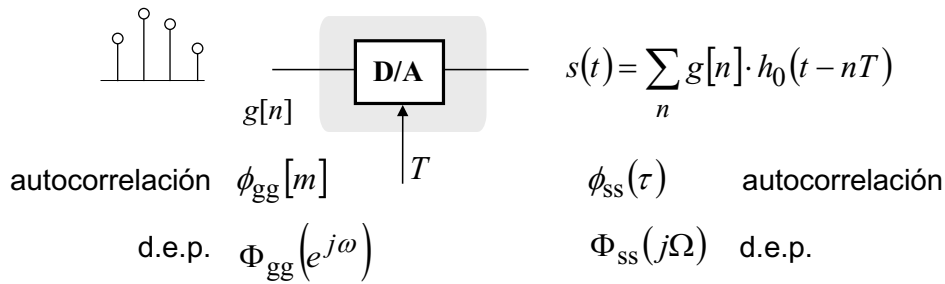
La salida es el efecto combinado de $H_0(j\Omega)$ y $H_r(j\Omega)$

- Cuanto más sobremuestrada esté la señal a la entrada de D/A:
- $H_0(j\Omega)$ distorsiona menos en banda de paso
 - $H_0(j\Omega)$ rechaza más la imagen (α_{DA})
 - el filtro es más sencillo

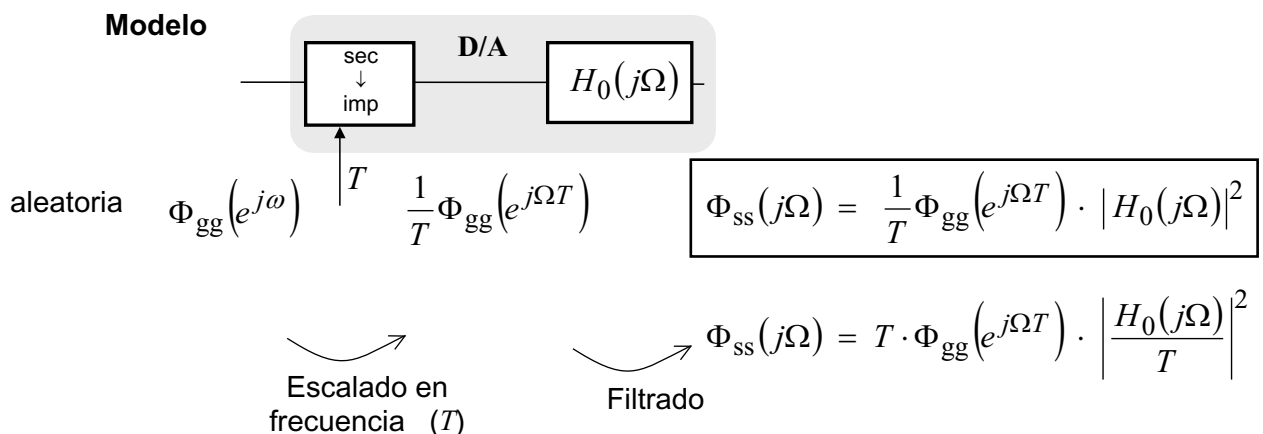
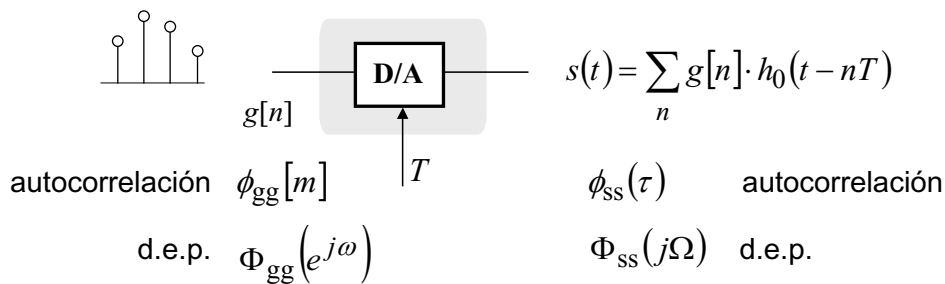
PDS no ideal



Conversión D/A. Señales aleatorias

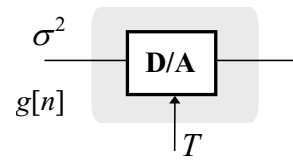
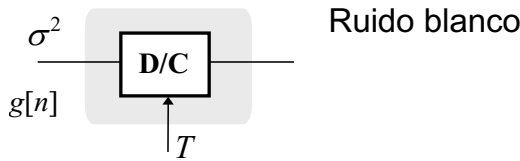


Conversión D/A. Señales aleatorias



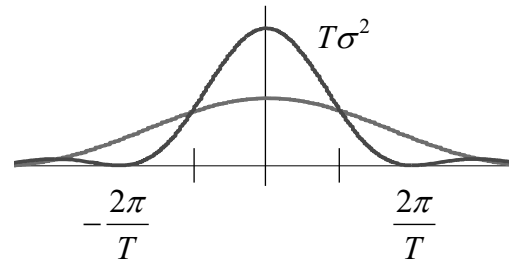
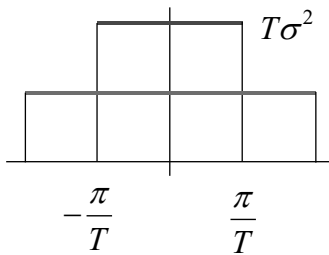
Conversión D/A. Señales aleatorias

$$\Phi_{ss}(j\Omega) = T \cdot \Phi_{gg}(e^{j\Omega T}) \cdot \left| \frac{H_0(j\Omega)}{T} \right|^2$$

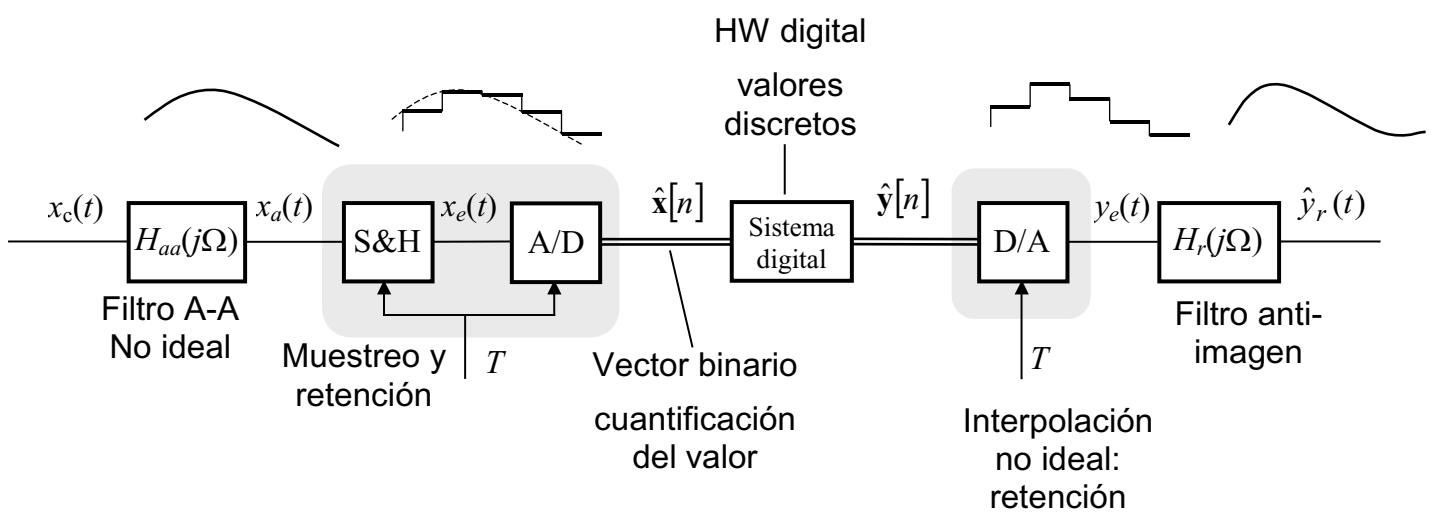


$$\Phi_{ss}(j\Omega) = T \cdot \sigma^2 \cdot \begin{cases} 1 & |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

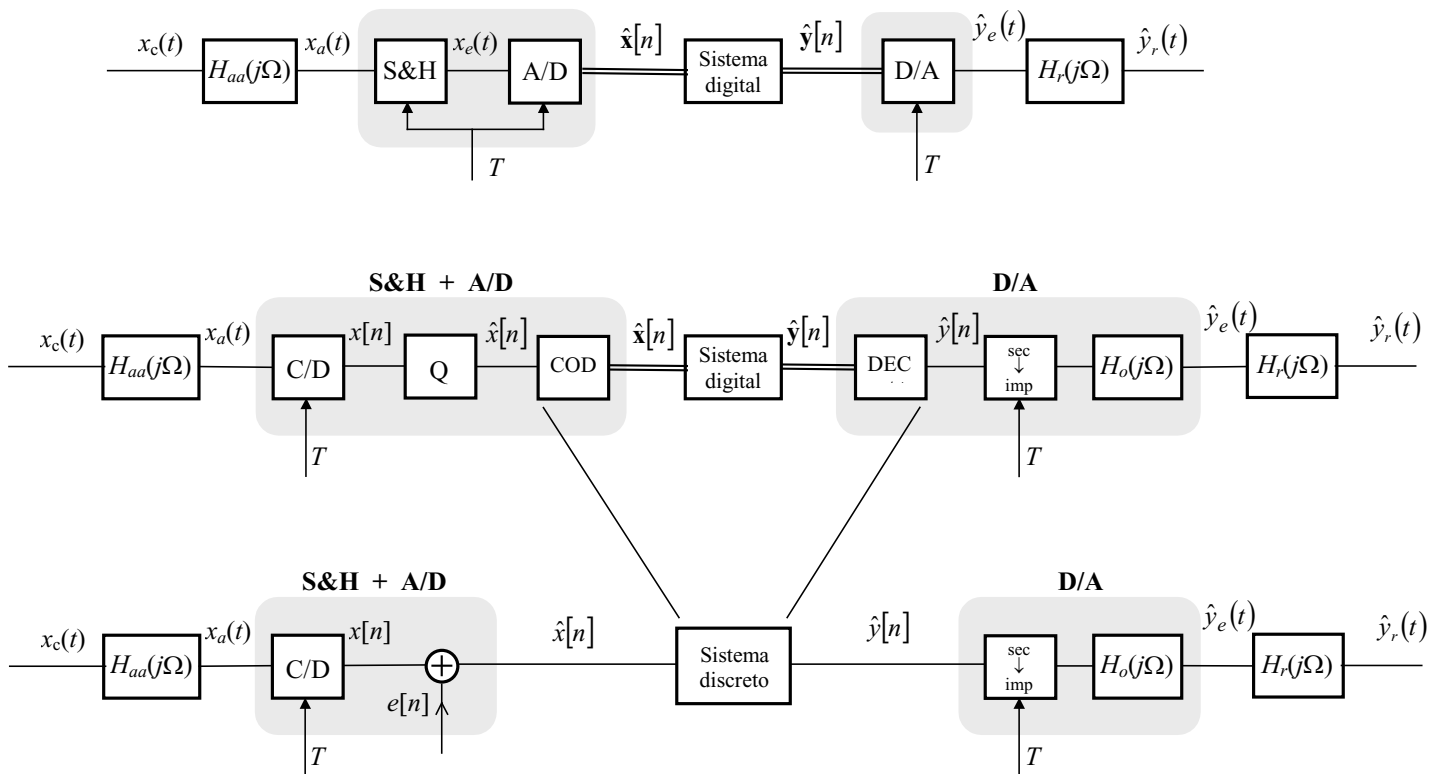
$$\Phi_{ss}(j\Omega) = T \cdot \sigma^2 \cdot \left(\frac{\text{sen } \frac{\Omega T}{2}}{\frac{\Omega T}{2}} \right)^2$$



PDS no ideal



PDS no ideal. Modelo



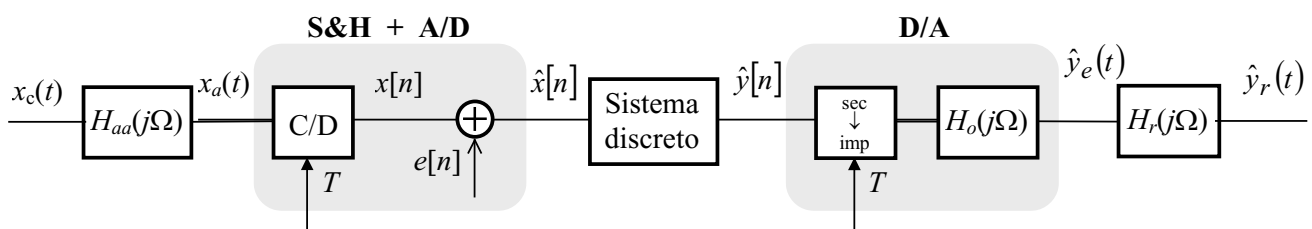
Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

PDS no ideal. Superposición

$x[n] + e[n]$ pasa por una cadena de sistemas lineales

$x[n], e[n]$ incorreladas

Se pueden sumar a la salida los efectos (valores y potencias) de cada una por separado



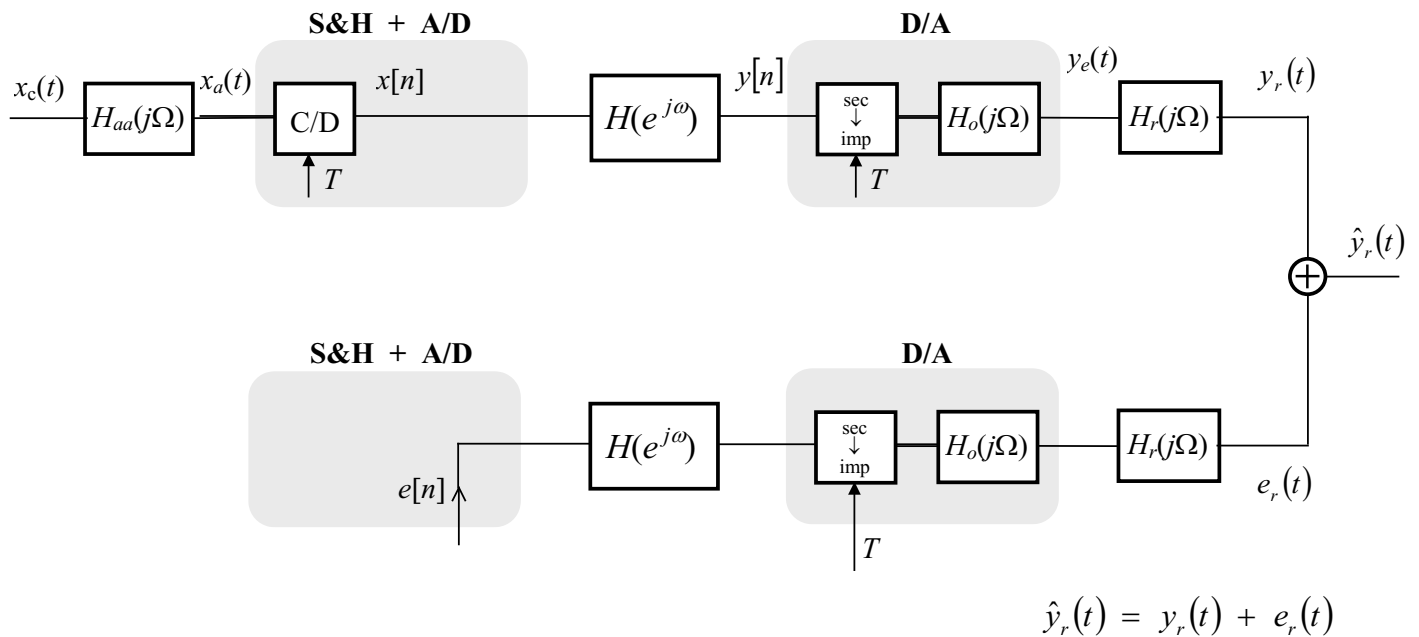
$$\hat{y}_r(t) = y_r(t) + e_r(t)$$

PDS no ideal. Superposición

$x[n] + e[n]$ pasa por una cadena de sistemas lineales

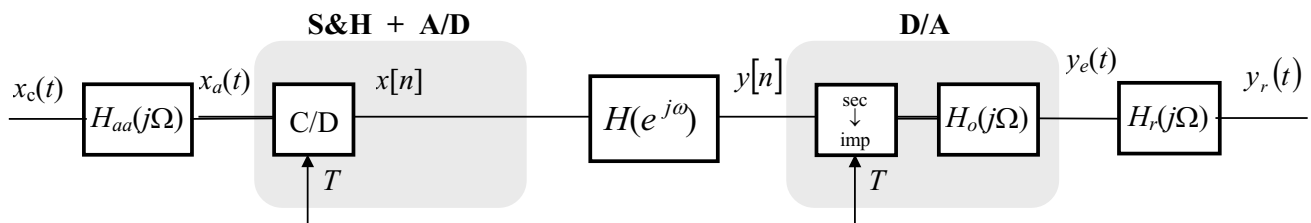
$x[n], e[n]$ incorreladas

Se pueden sumar a la salida los efectos (valores y potencias) de cada una por separado



Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

PDS no ideal. Señal



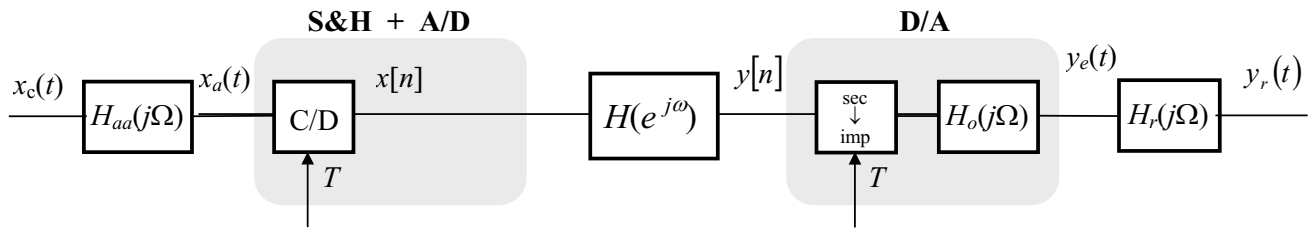
Si $X_c(j\Omega) = 0$ y $H_r(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| > \pi/T$

$$Y_r(j\Omega) = \underbrace{\frac{1}{T} \cdot H_0(j\Omega)}_{\frac{\text{sen}(\Omega T/2)}{\Omega T/2}} \cdot \underbrace{H_r(j\Omega) \cdot H_{aa}(j\Omega)}_{\text{Filtros analógicos}} \cdot \underbrace{H(e^{j\Omega T})}_{\text{Sistema discreto}} \cdot X_c(j\Omega)$$

$$Y_r(j\Omega) = H_{ef}(j\Omega) \cdot X_c(j\Omega)$$

$$H_{ef}(j\Omega) = \frac{H_0(j\Omega)}{T} \cdot H_r(j\Omega) \cdot H_{aa}(j\Omega) \cdot H(e^{j\Omega T})$$

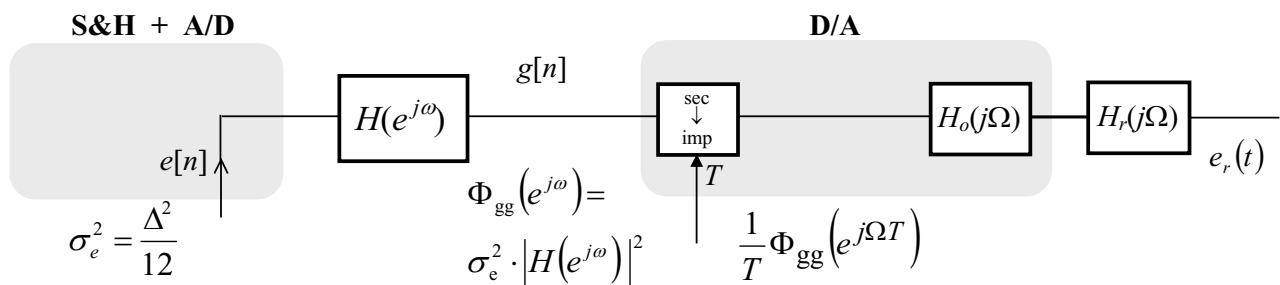
PDS no ideal. Señal



$$H_{ef}(j\Omega) = \frac{H_0(j\Omega)}{T} \cdot H_r(j\Omega) \cdot H_{aa}(j\Omega) \cdot H(e^{j\Omega T})$$

- La distorsión de los filtros analógicos puede compensarse con el sistema discreto
- La distorsión del D/A $H_0(j\Omega)$ también
- Si la condición $X_c(j\Omega) = 0, H_r(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| > \pi/T$ no se cumple habrá, además
 - Bandas imagen a la salida
 - Solapamiento espectral en A/D (\approx ruido en banda)

PDS no ideal. Ruido

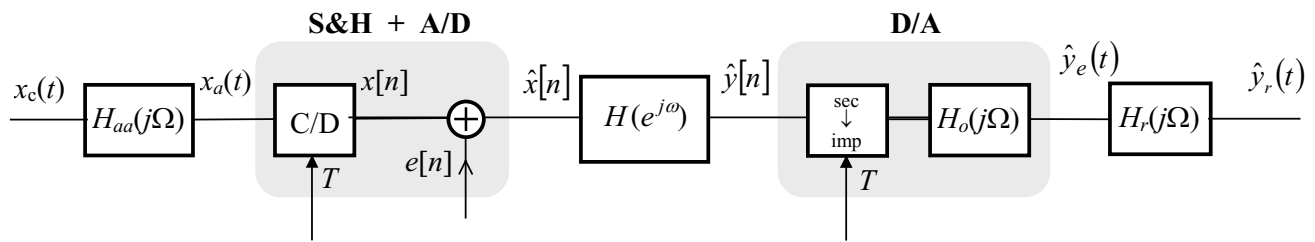


d.e.p.

$$\frac{1}{T} \Phi_{gg}(e^{j\Omega T}) \cdot |H_0(j\Omega)|^2 \cdot |H_r(j\Omega)|^2 = \frac{1}{T} \sigma_e^2 \cdot |H(e^{j\Omega T})|^2 \cdot |H_0(j\Omega)|^2 \cdot |H_r(j\Omega)|^2$$

$$T \cdot \sigma_e^2 \cdot |H(e^{j\Omega T})|^2 \cdot \left| \frac{H_0(j\Omega)}{T} \right|^2 \cdot |H_r(j\Omega)|^2$$

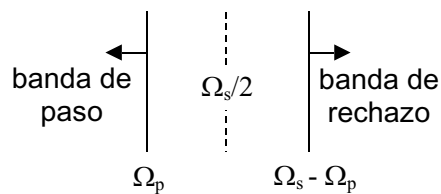
PDS no ideal. Resumen



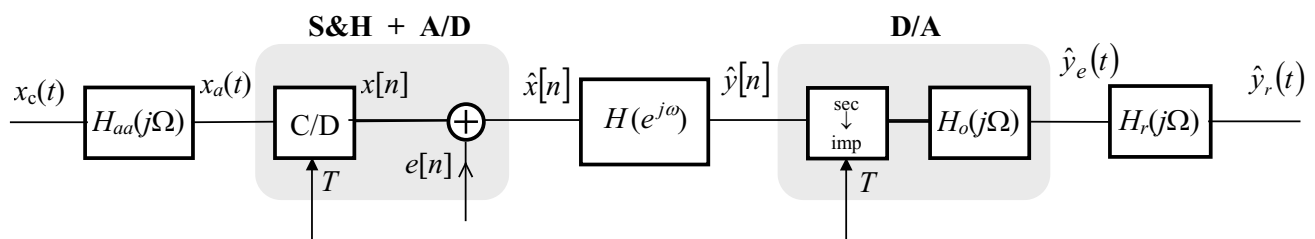
- Sabemos diseñar filtros anti-aliasing y anti-imagen con objetivos de

- Limitar el ruido en banda debido a solapamiento espectral
- Limitar las bandas imagen

Sobremuestreo simplifica filtros



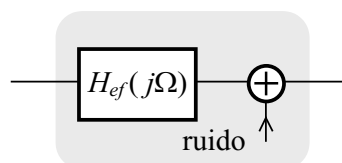
PDS no ideal. Resumen



- Sabemos diseñar filtros anti-aliasing y anti-imagen con objetivos de

- Limitar el ruido en banda debido a solapamiento espectral
- Limitar las bandas imagen

- Si el solapamiento espectral y las imágenes son despreciables:



- Sistema LTI con un ruido aditivo a la salida
- Sabemos calcular $H_{ef}(j\Omega)$ y la d.e.p de ruido a la salida
- Señal y ruido son incorrelados. Se puede calcular la SNR

- La respuesta del sistema discreto $H(e^{j\omega})$ puede compensar:

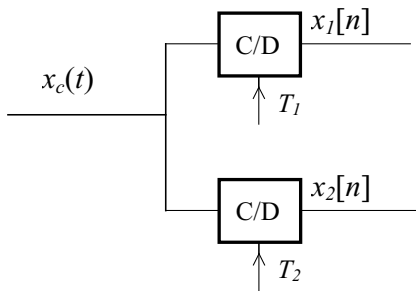
- Distorsión en filtros analógicos
- Distorsión debida a la retención conversión en D/A

Tema 1 Procesado digital de señales analógicas

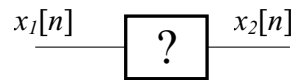
- **PDS-A ideal**
 - Conversión ideal continuo-discreta (C/D)
 - Conversión ideal discreto-continua (D/C)
 - PDS-A ideal
- **PDS-A no ideal**
 - Conversión analógico-digital (A/D)
 - Conversión digital-analógica (D/A)
 - Filtros antisolapamiento y anti-imagen

- **Cambio de la velocidad de muestreo**
 - Diezmado e interpolación
 - Técnicas de sobremuestreo para A/D y D/A

Cambio de velocidad de muestreo



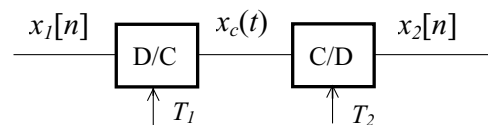
$x_1[n]$ y $x_2[n]$ obtenidas de $x_c(t)$
sin solapamiento espectral



¿Se puede obtener una a partir de la otra?

Debe ser posible ya que tienen la misma información

Solución trivial:



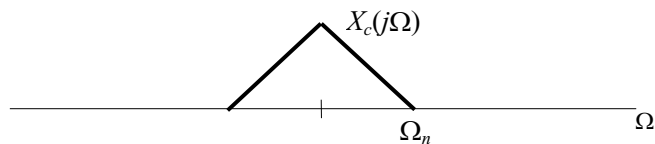
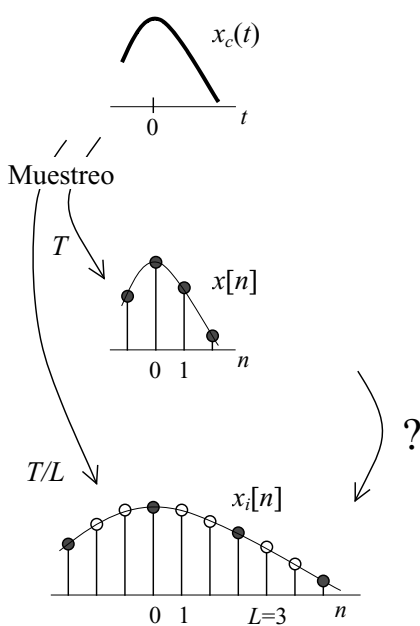
Realización sin pasar a señal continua

Cambio de velocidad por un factor entero	$T_2 = \frac{T_1}{L}$	Velocidad \uparrow	interpolación factor L
	$T_2 = M \cdot T_1$	Velocidad \downarrow	diezmado factor M

Tema 1 Procesado digital de señales analógicas

- PDS-A ideal
 - Conversión ideal continuo-discreta (C/D)
 - Conversión ideal discreto-continua (D/C)
 - PDS-A ideal
- PDS-A no ideal
 - Conversión analógico-digital (A/D)
 - Conversión digital-analógica (D/A)
 - Filtros antisolapamiento y anti-imagen
- **Cambio de la velocidad de muestreo**
 - Diezmado e interpolación
 - Técnicas de sobremuestreo para A/D y D/A

INTERPOLACIÓN



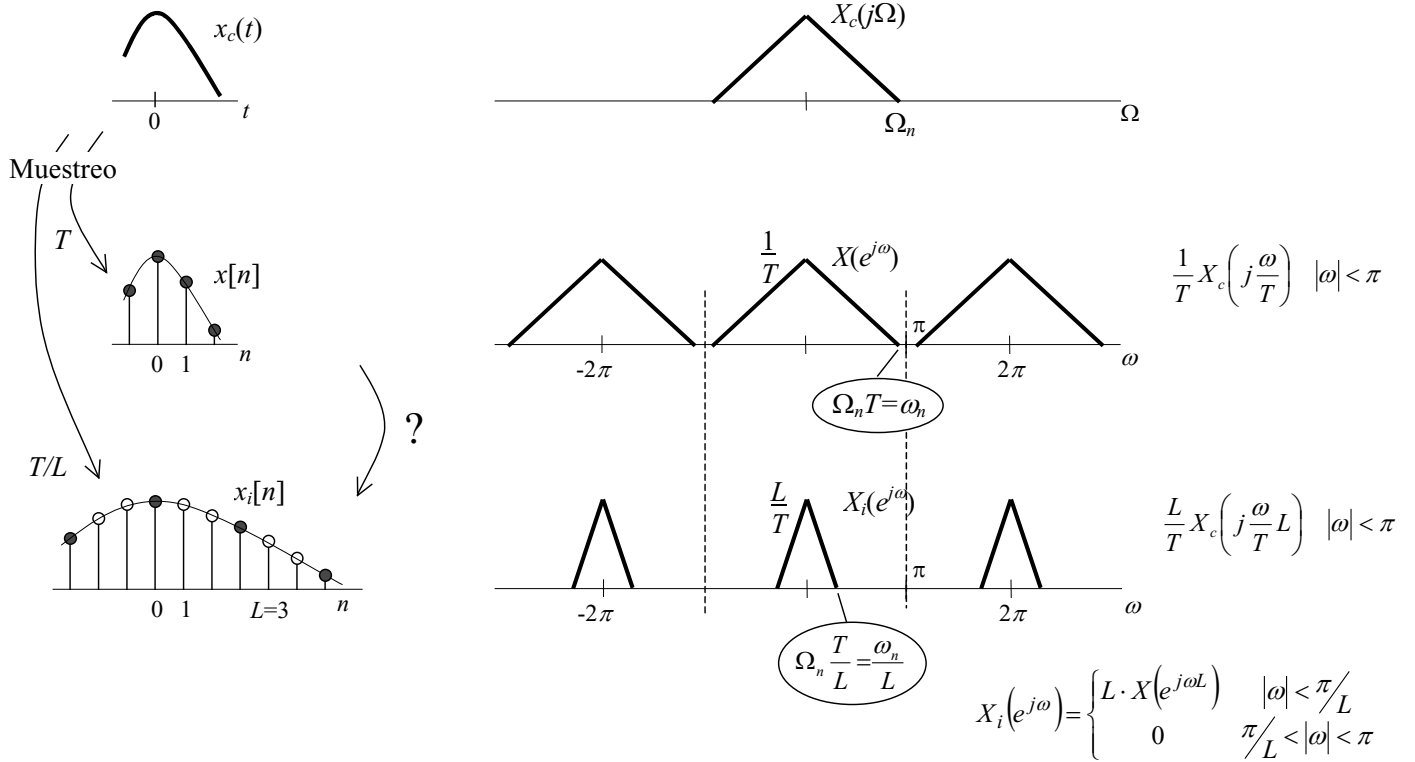
$x[n]$ y $x_i[n]$ obtenidas de $x_c(t)$ sin solapamiento espectral

¿Cómo se puede obtener $x_i[n]$ a partir de $x[n]$?

D.T.: no es evidente

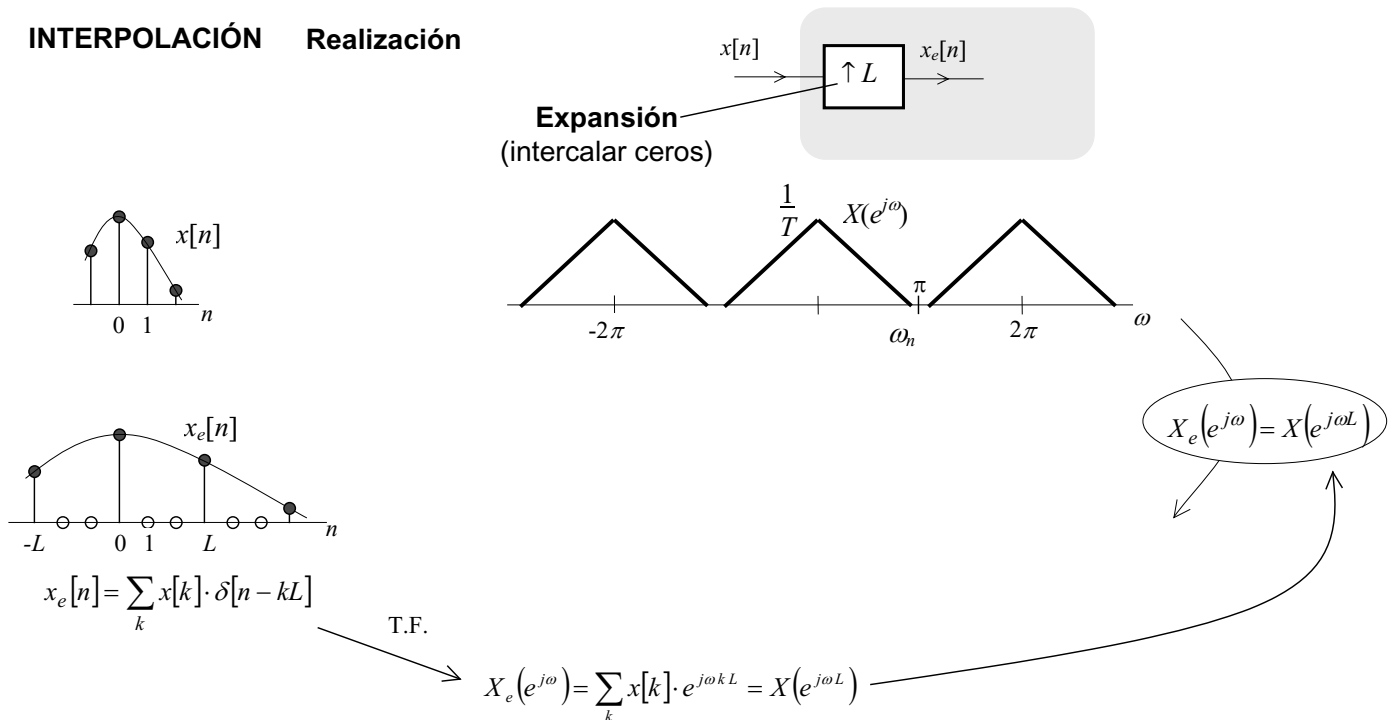
D.F.: en $(-\pi, \pi)$ sólo hay un escalado en frecuencia (T) y en amplitud ($1/T$)

INTERPOLACIÓN

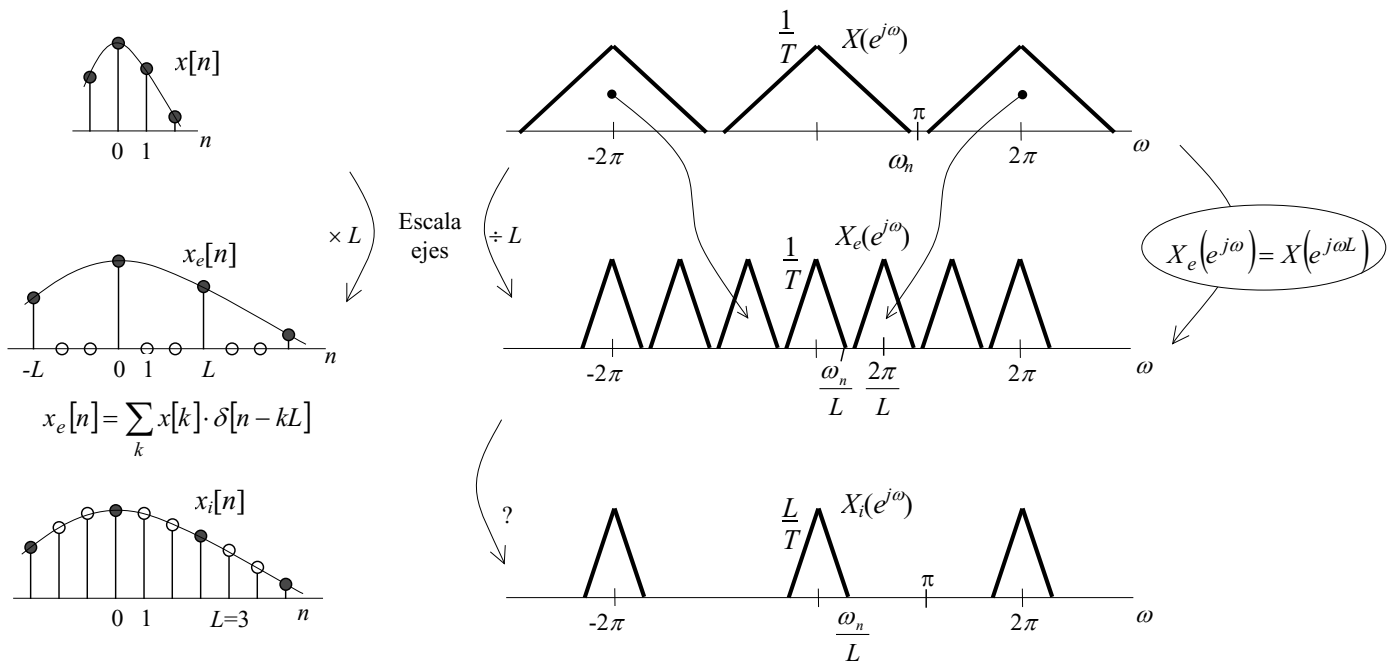
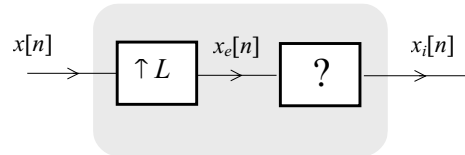


Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

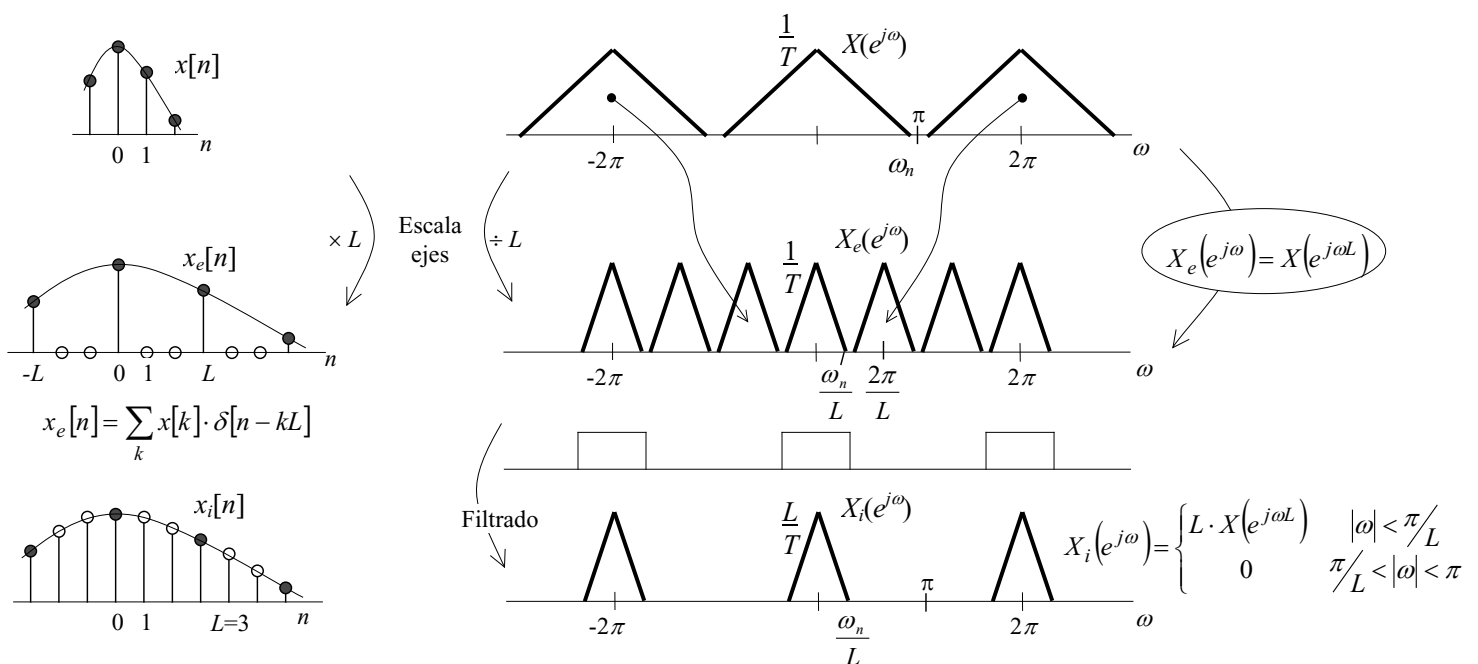
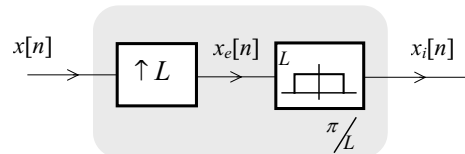
INTERPOLACIÓN Realización



INTERPOLACIÓN Realización



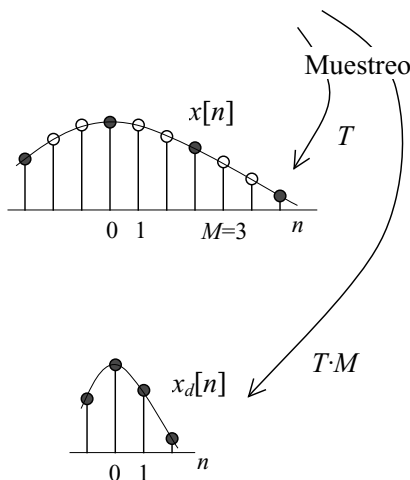
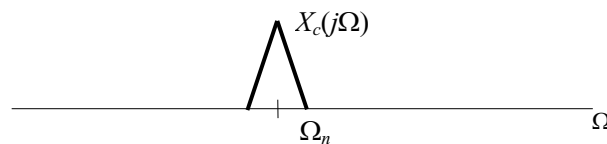
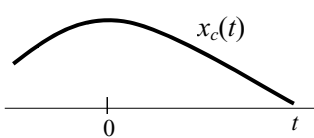
INTERPOLACIÓN Realización



Tema 1 Procesado digital de señales analógicas

- PDS-A ideal
 - Conversión ideal continuo-discreta (C/D)
 - Conversión ideal discreto-continua (D/C)
 - PDS-A ideal
- PDS-A no ideal
 - Conversión analógico-digital (A/D)
 - Conversión digital-analógica (D/A)
 - Filtros antisolapamiento y anti-imagen
- Cambio de la velocidad de muestreo
 - Diezmado e interpolación
 - Técnicas de sobremuestreo para A/D y D/A

DIEZMADO



$x[n]$ y $x_d[n]$ obtenidas de $x_c(t)$

¿Cómo se puede obtener $x_d[n]$ a partir de $x[n]$?

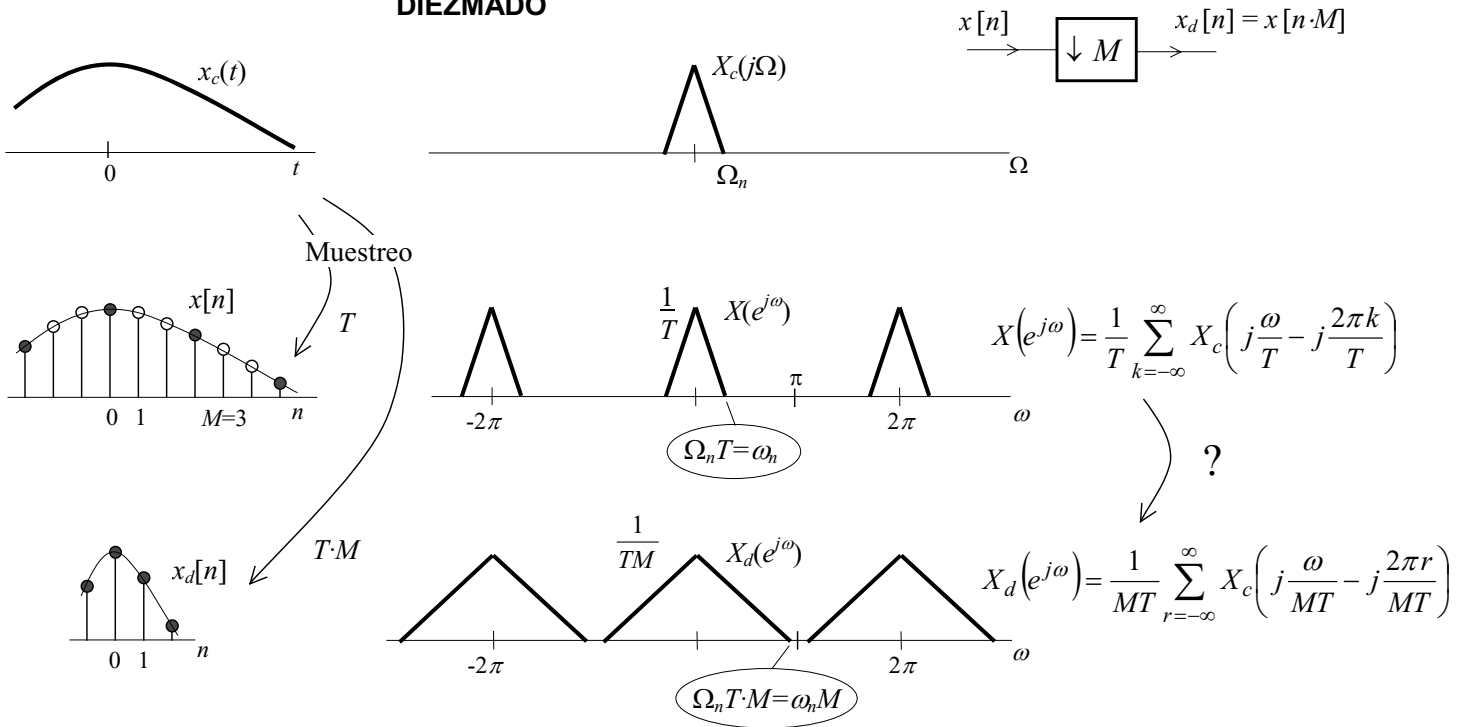
Realización (D.T.): descartar muestras
(quedándose con 1 de cada M)

Diezmado $x[n]$ \rightarrow $\boxed{\downarrow M}$ \rightarrow $x_d[n] = x[n \cdot M]$

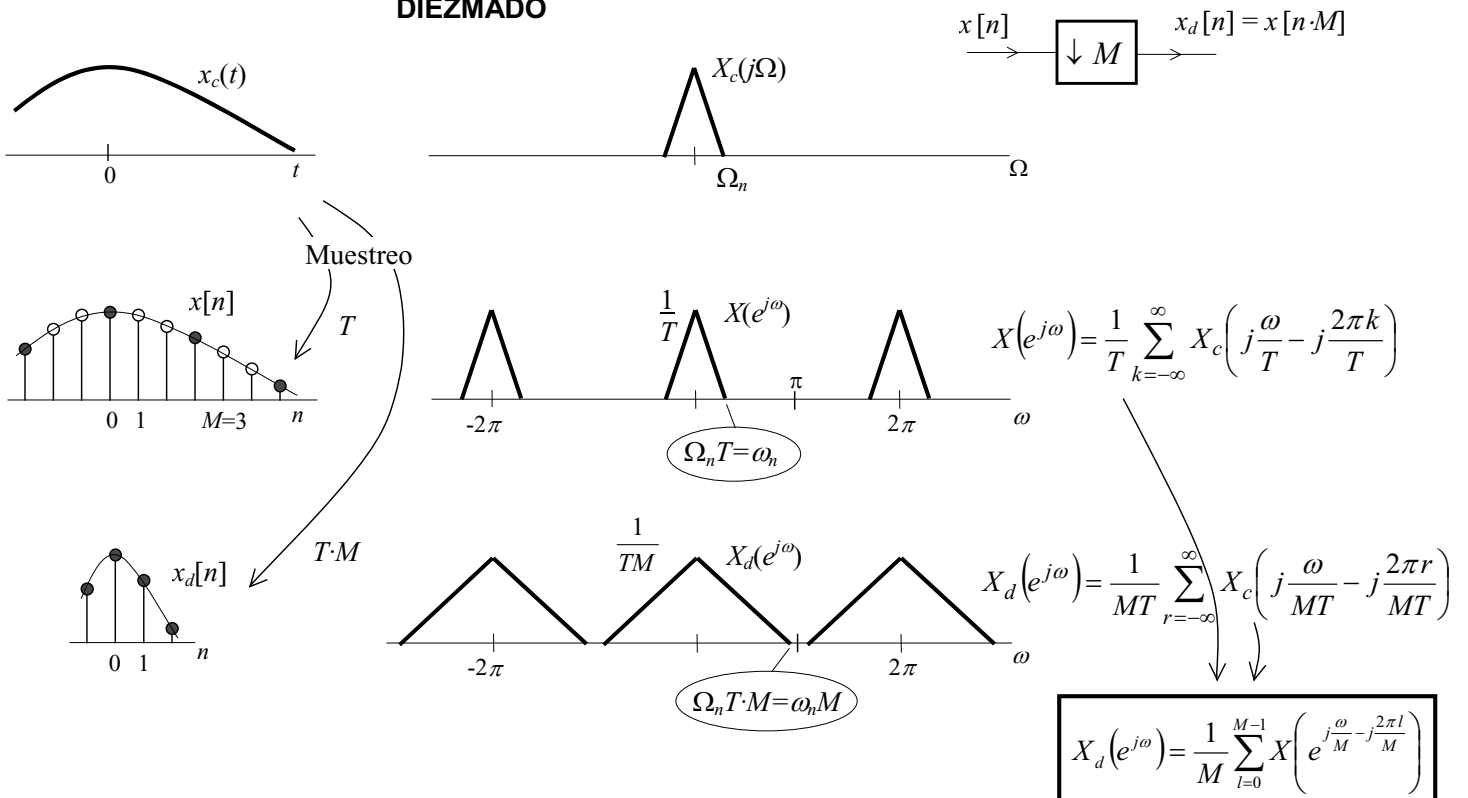
¿Relación E/S en el dominio de la frecuencia?

¿Hasta qué valor de M se puede diezmar?

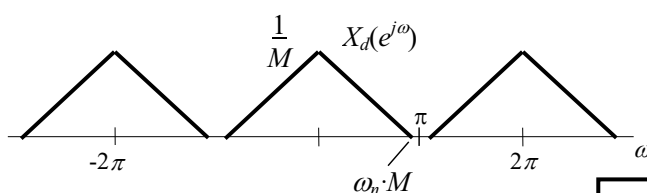
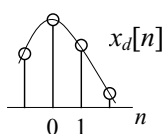
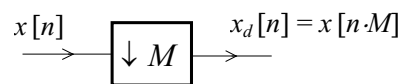
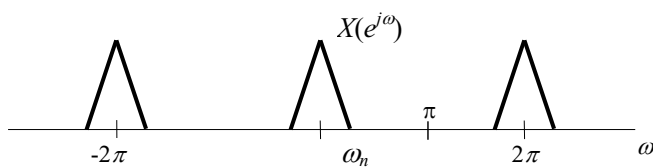
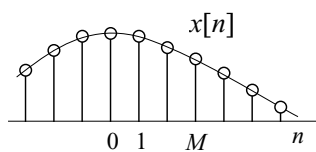
DIEZMADO



DIEZMADO



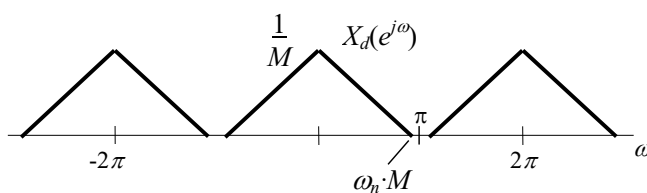
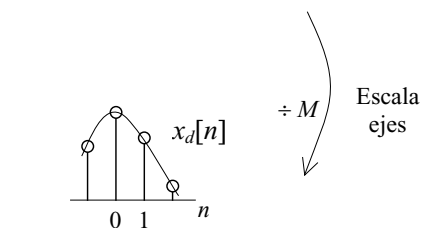
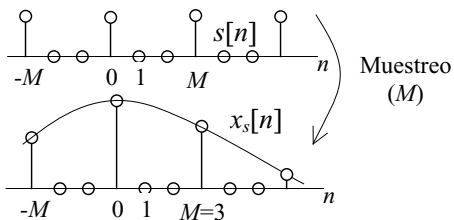
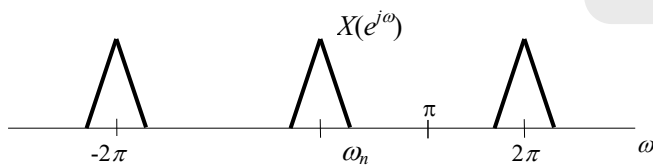
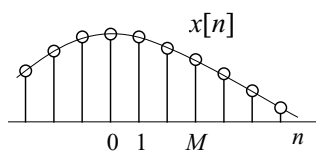
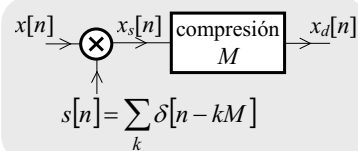
DIEZMADO



$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(e^{j\frac{\omega}{M} - j\frac{2\pi l}{M}}\right)$$

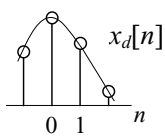
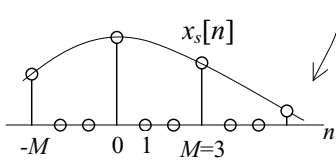
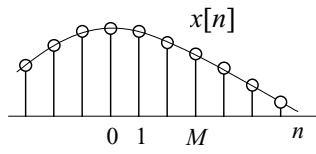
DIEZMADO

Modelo muestreo-compresión



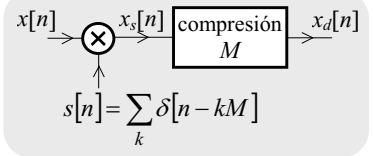
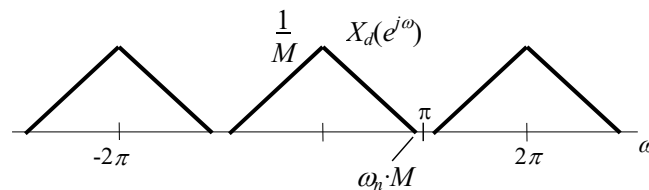
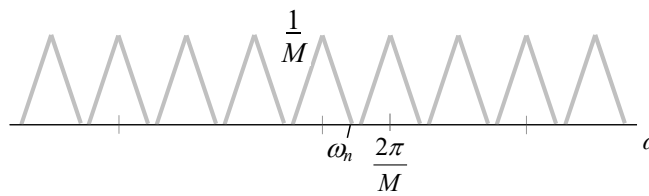
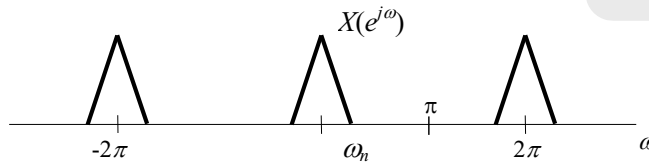
$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(e^{j\frac{\omega}{M} - j\frac{2\pi l}{M}}\right)$$

DIEZMADO



Muestreo
(M)

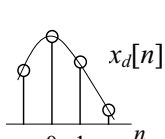
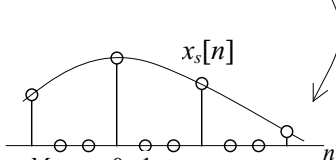
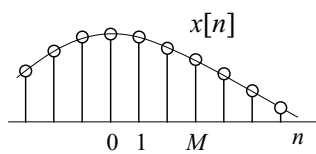
÷ M
Escala
ejes



$$X_s(e^{j\omega}) = X_d(e^{j\omega M})$$

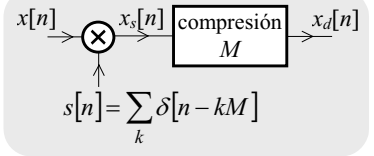
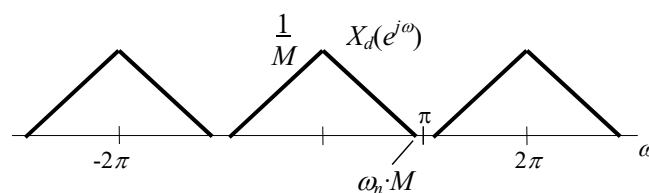
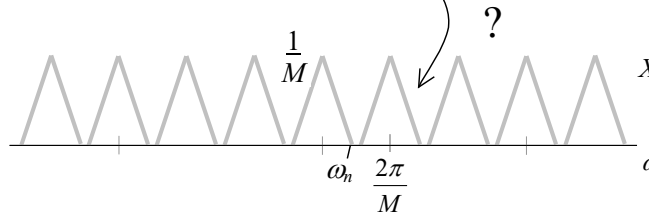
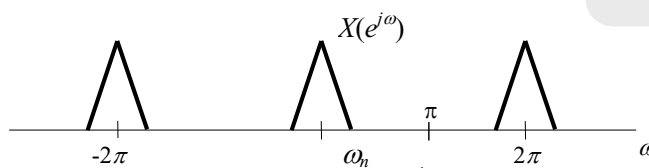
$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(e^{j\frac{\omega}{M} - j\frac{2\pi l}{M}}\right)$$

DIEZMADO



Muestreo
(M)

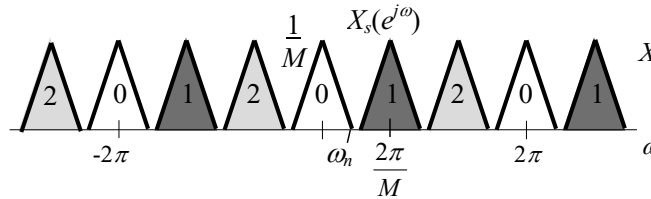
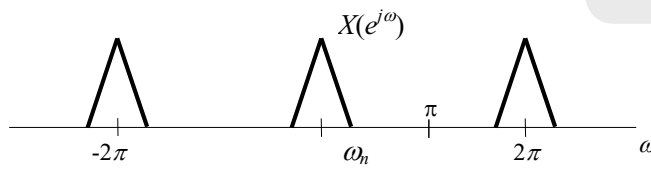
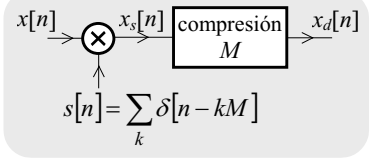
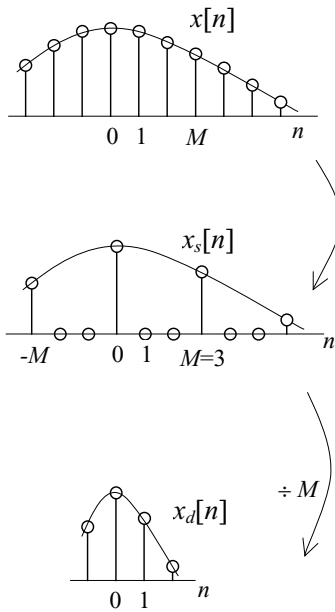
÷ M
Escala
ejes



$$X_s(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(e^{j\omega - j\frac{2\pi l}{M}}\right)$$

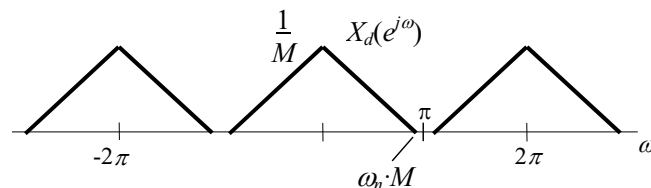
$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(e^{j\frac{\omega}{M} - j\frac{2\pi l}{M}}\right)$$

DIEZMADO



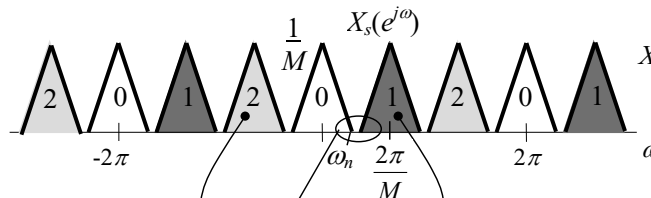
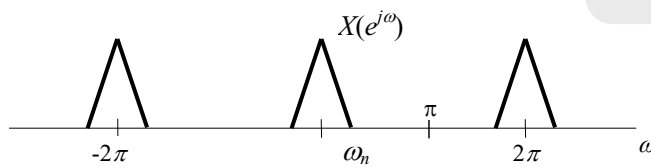
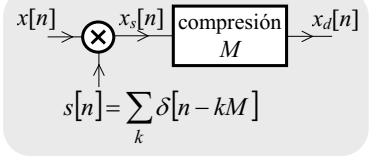
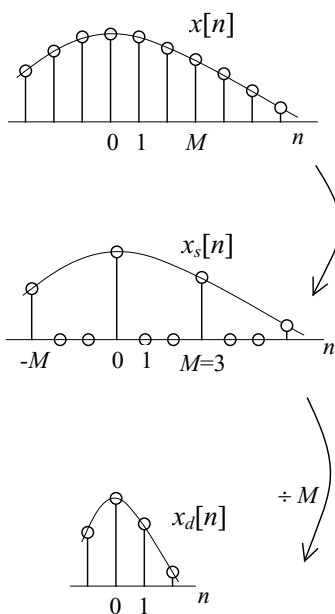
$$X_s(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(e^{j\omega - j\frac{2\pi l}{M}}\right)$$

$$M = 3$$



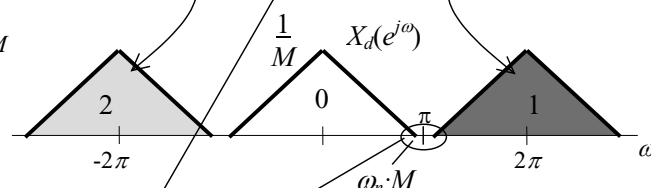
$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(e^{j\frac{\omega}{M} - j\frac{2\pi l}{M}}\right)$$

DIEZMADO



$$X_s(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(e^{j\omega - j\frac{2\pi l}{M}}\right)$$

$$X_d(e^{j\omega}) = X_s\left(e^{j\frac{\omega}{M}}\right)$$



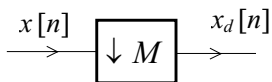
Condición para no solapamiento

$$\omega_n < \frac{\pi}{M}$$

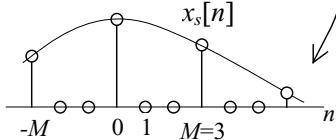
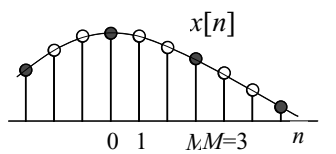
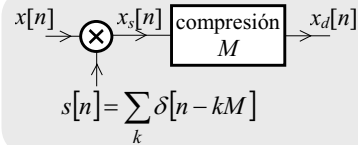
$$\omega_n \cdot M < \pi$$

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(e^{j\frac{\omega}{M} - j\frac{2\pi l}{M}}\right)$$

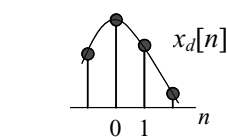
DIEZMADO



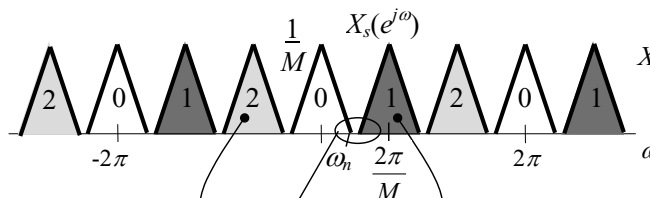
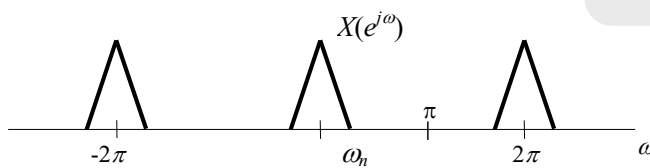
Modelo de comportamiento



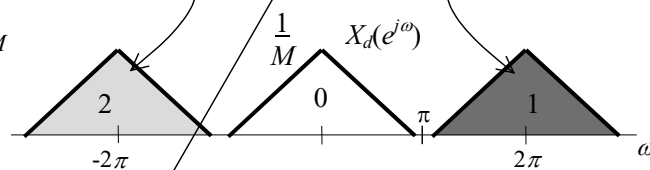
Muestreo (M)



Escala ejes



$$X_s(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(e^{j\omega - j\frac{2\pi l}{M}}\right)$$



$$X_d(e^{j\omega}) = X_s\left(e^{j\frac{\omega}{M}}\right)$$

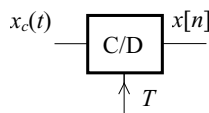
Condición para no solapamiento

$$\omega_n < \frac{\pi}{M}$$

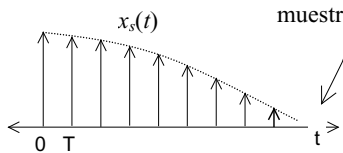
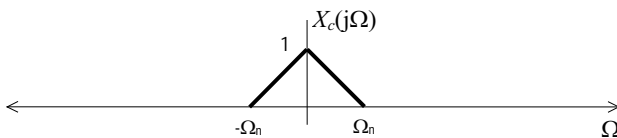
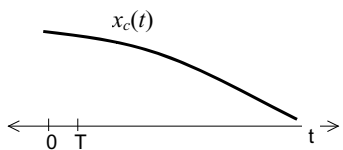
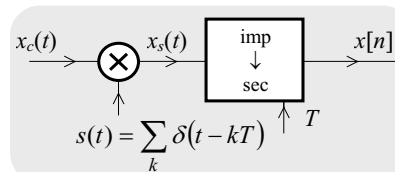
$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} X\left(e^{j\frac{\omega}{M}}\right) \quad |\omega| < \pi$$

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(e^{j\frac{\omega}{M} - j\frac{2\pi l}{M}}\right)$$

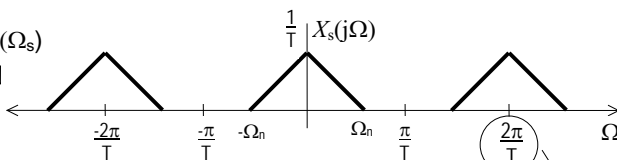
Conversión C/D



Modelo de comportamiento

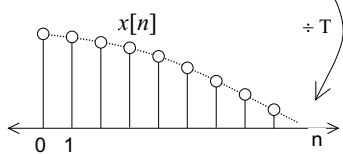


copias (\Omega_s)

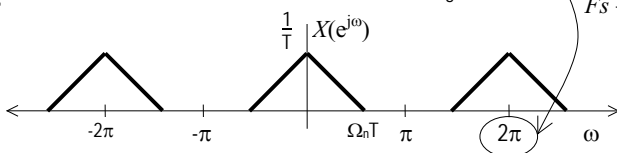


$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot F_s$$

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_k X_c(j\Omega - jk\Omega_s)$$



Escala ejes



$$X(e^{j\omega}) = X_s\left(j\frac{\omega}{T}\right)$$

Condición para no solapamiento

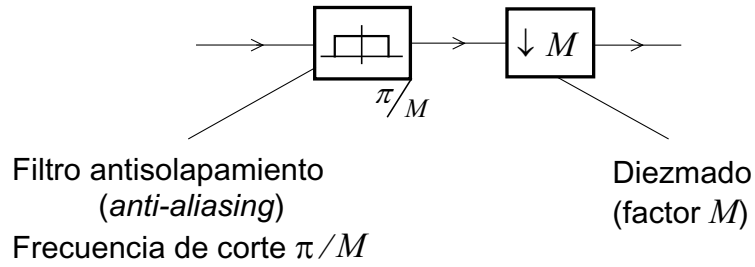
$$\Omega_n < \frac{\pi}{T} = \frac{\Omega_s}{2}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} X_c\left(j\frac{\omega}{T}\right) \quad |\omega| < \pi$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_k X_c\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T}\right)$$

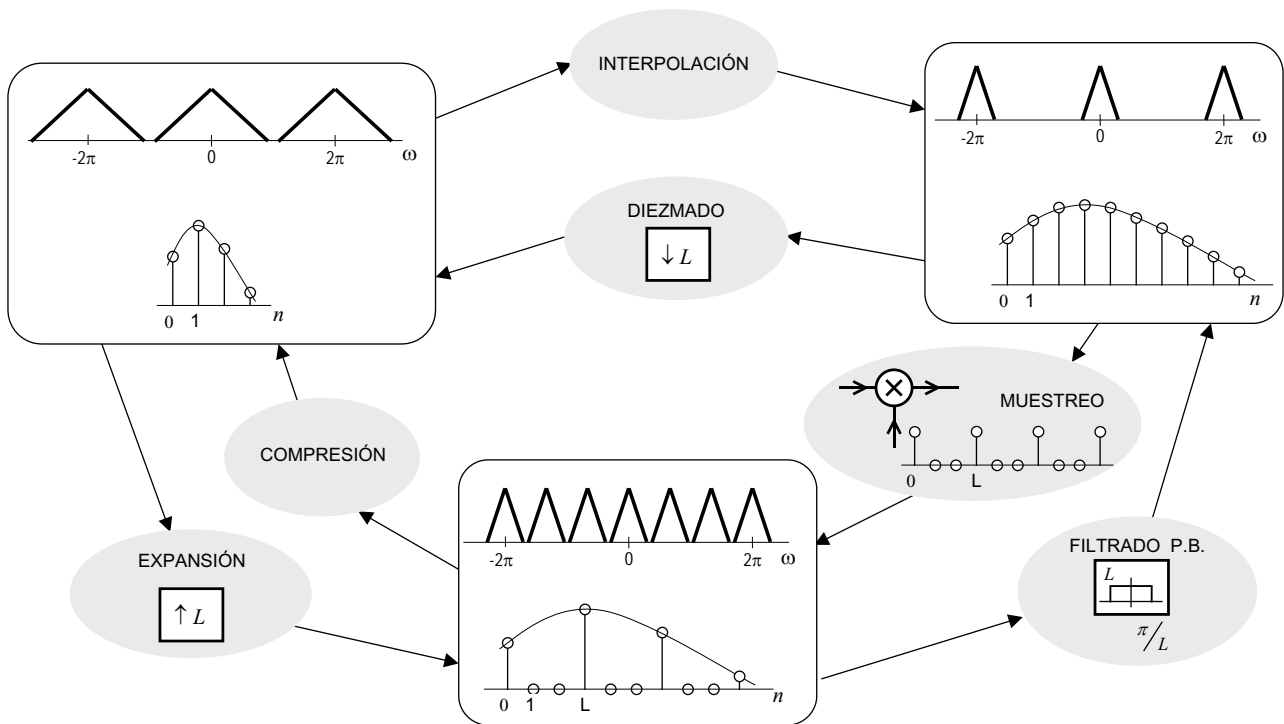
Reducción de la velocidad de muestreo

Reducción por factor entero M



Para evitar solapamiento
para cualquier señal de entrada:

Filtro paso bajo antes del diezmado

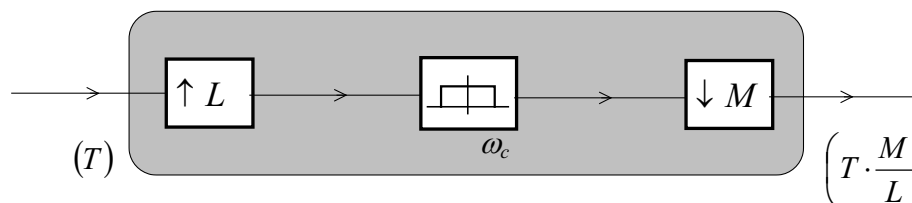
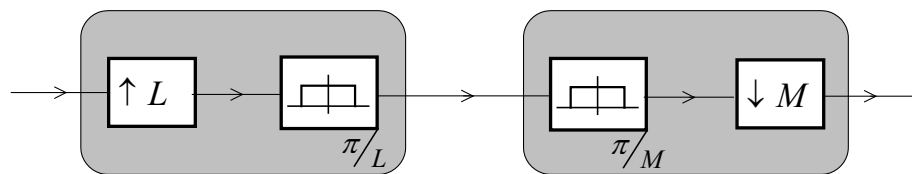
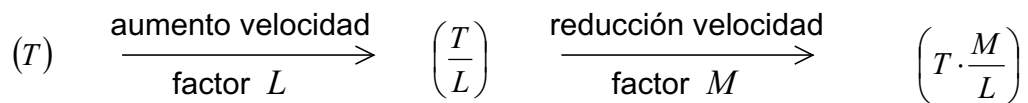


Tema 1 Procesado digital de señales analógicas

- PDS-A ideal
 - Conversión ideal continuo-discreta (C/D)
 - Conversión ideal discreto-continua (D/C)
 - PDS-A ideal
- PDS-A no ideal
 - Conversión analógico-digital (A/D)
 - Conversión digital-analógica (D/A)
 - Filtros antisolapamiento y anti-imagen
- **Cambio de la velocidad de muestreo**
 - Diezmado e interpolación → cambio de velocidad por factor racional
 - Técnicas de sobremuestreo para A/D y D/A

Cambio de la velocidad de muestreo por un número racional

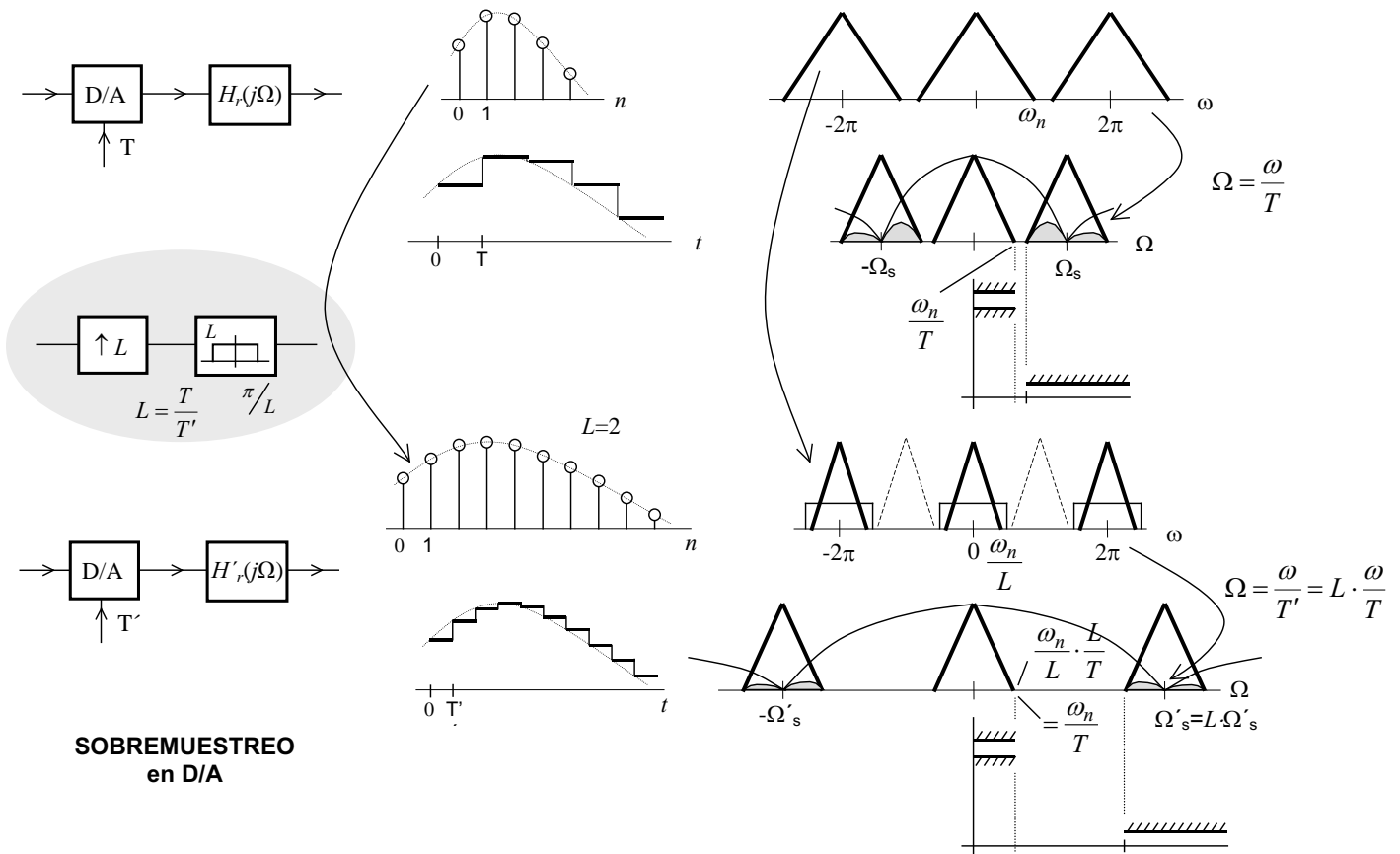
$$T' = \frac{M}{L} \cdot T$$

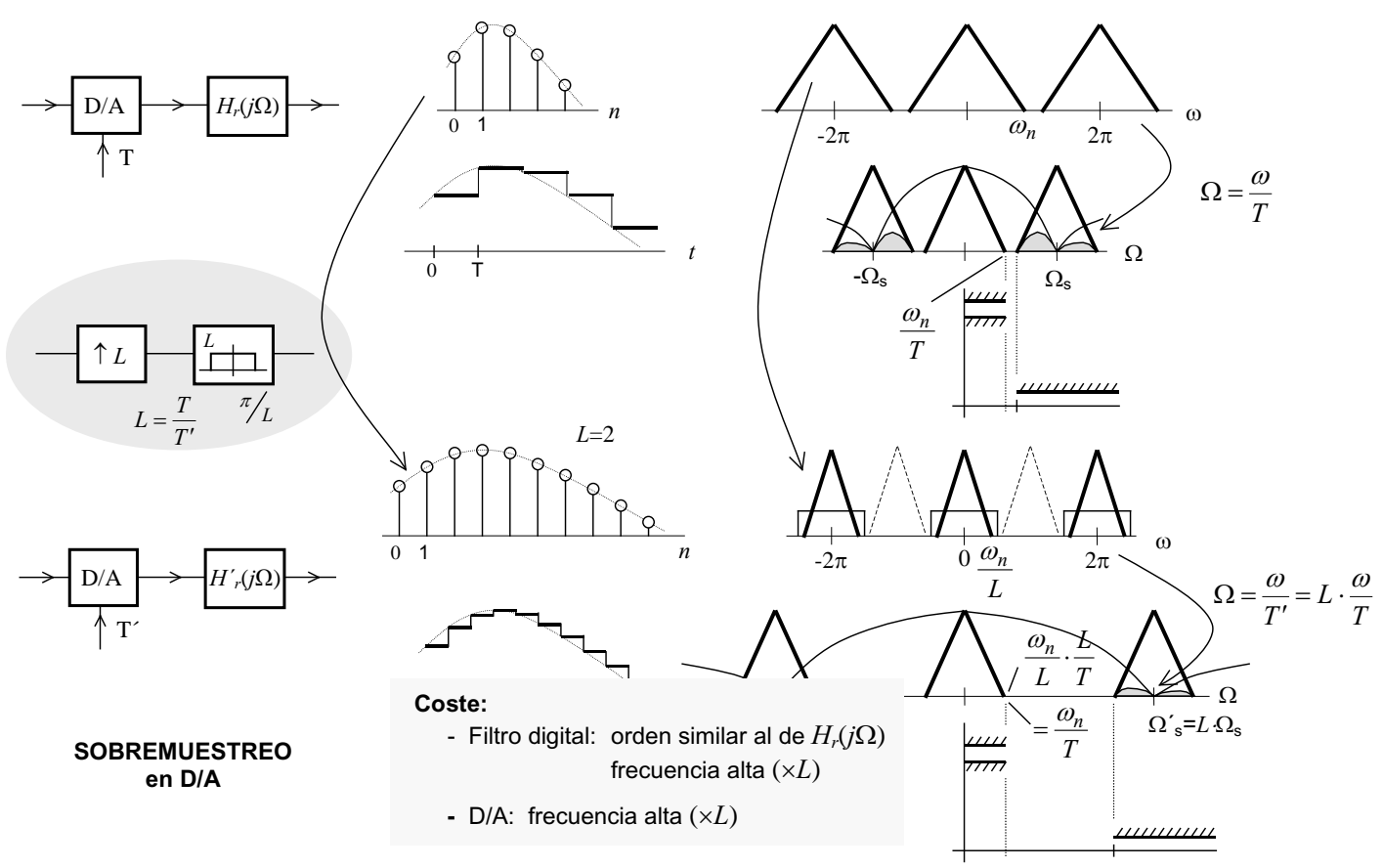


$$\omega_c = \min\left\{\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{M}\right\}$$

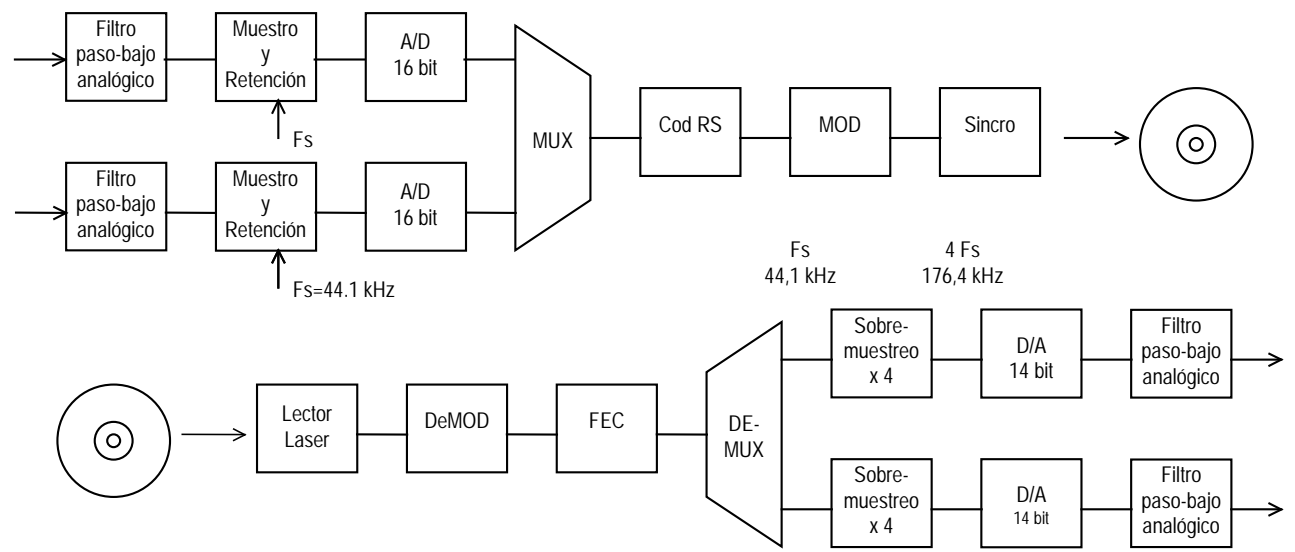
Tema 1 Procesado digital de señales analógicas

- PDS-A ideal
 - Conversión ideal continuo-discreta (C/D)
 - Conversión ideal discreto-continua (D/C)
 - PDS-A ideal
 - PDS-A no ideal
 - Conversión analógico-digital (A/D)
 - Conversión digital-analógica (D/A)
 - Filtros antisolapamiento y anti-imagen
 - Cambio de la velocidad de muestreo
 - Diezmado e interpolación
 - Técnicas de sobremuestreo para A/D y D/A
- | | | |
|----------------|---|----------------|
| D/A | } | D/A |
| A/D | | A/D |
| Banda estrecha | | Banda estrecha |

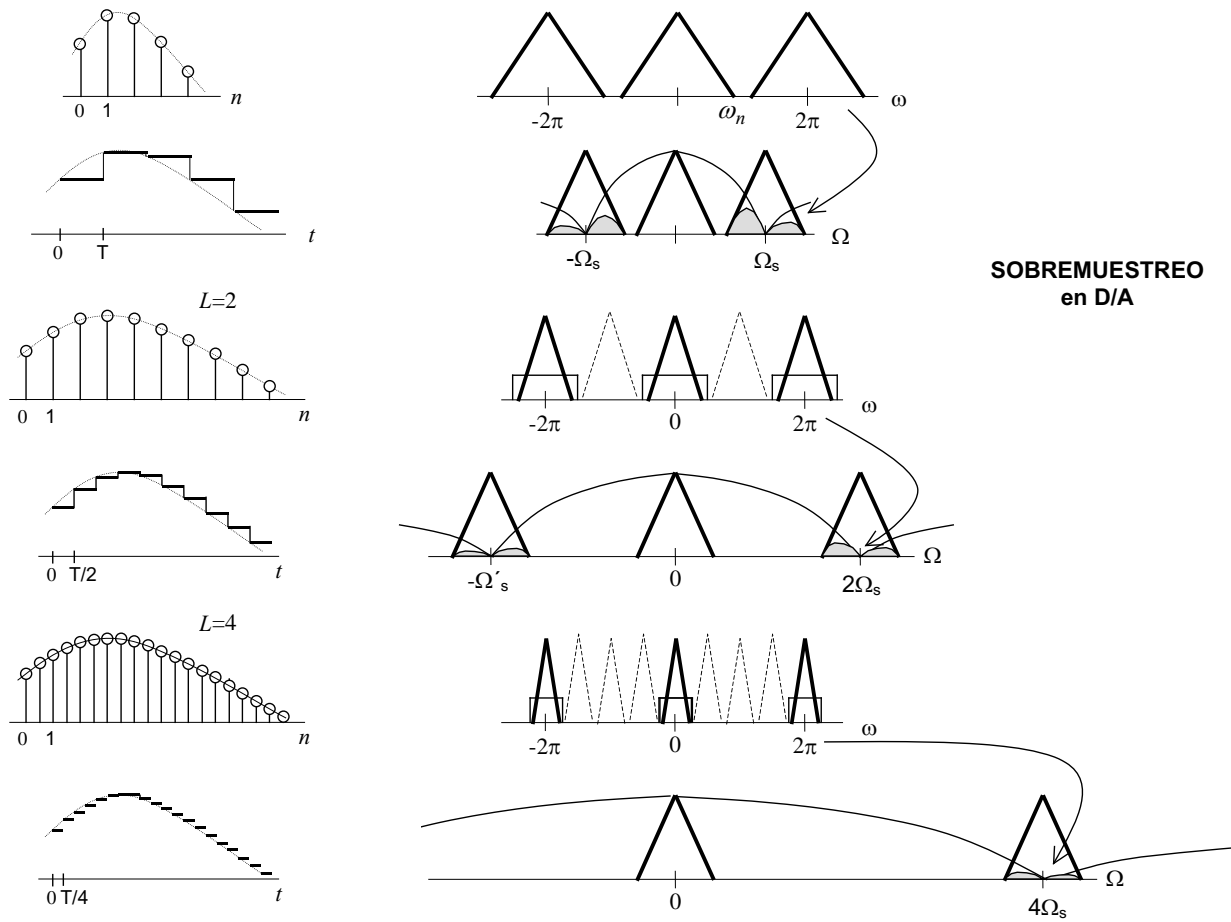




Sistema Compact-Disk
 Banda de paso: 20 kHz
 SNR: 90dB
 Frecuencia de muestreo F_s : 44,1 kHz
 Filtro reconstructor:
 - rechazo frecuencia imagen: 50 dB
 - fase lineal



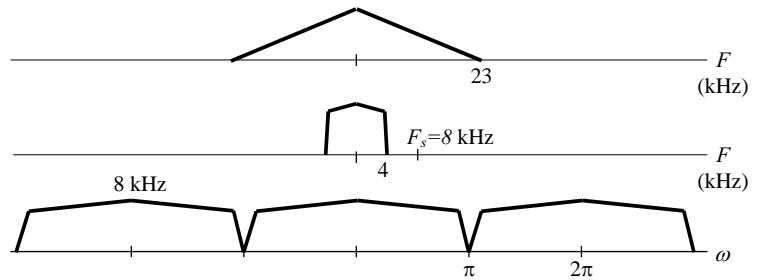
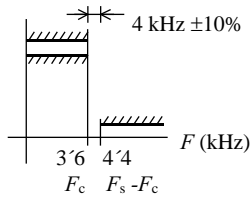
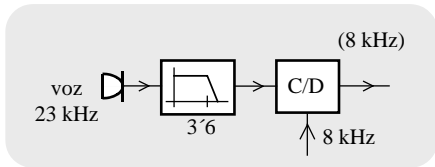
- Sobremuestro $\times 4$ y conformación de ruido (problema 1.4-5)
- Permiten quitar 2 bits en D/A



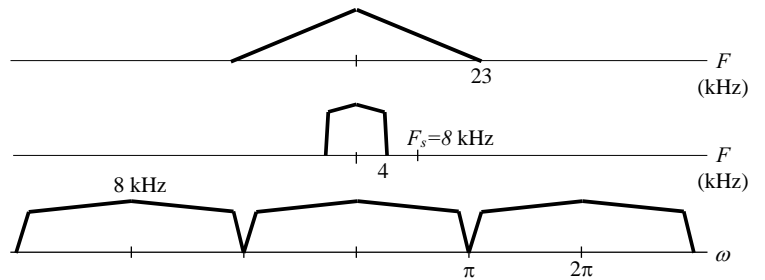
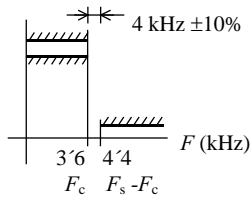
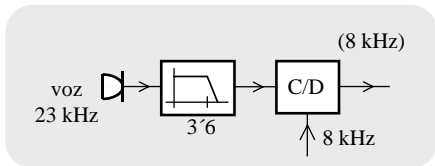
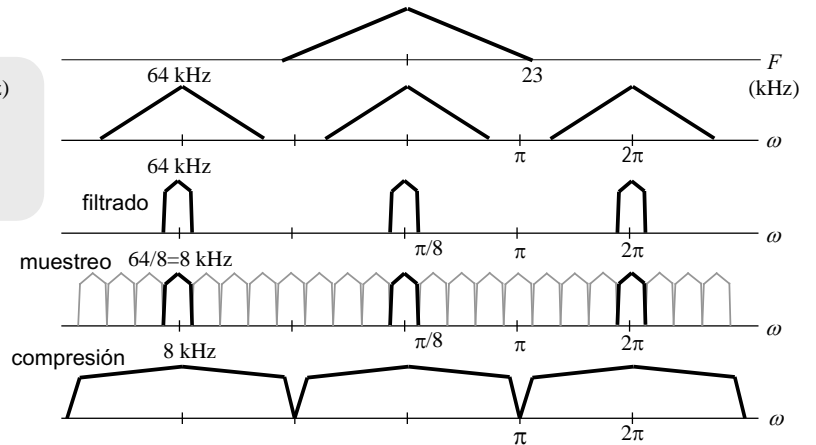
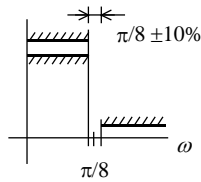
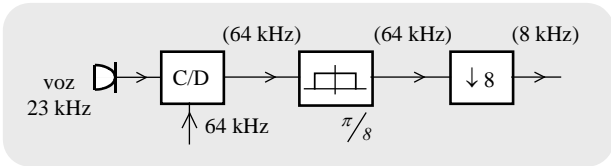
Tema 1 Procesado digital de señales analógicas

- PDS-A ideal
 - Conversión ideal continuo-discreta (C/D)
 - Conversión ideal discreto-continua (D/C)
 - PDS-A ideal
- PDS-A no ideal
 - Conversión analógico-digital (A/D)
 - Conversión digital-analógica (D/A)
 - Filtros antisolapamiento y anti-imagen
- **Cambio de la velocidad de muestreo**
 - Diezmado e interpolación
 - Técnicas de sobremuestreo para A/D y D/A

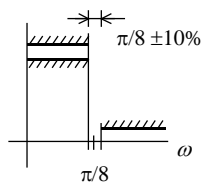
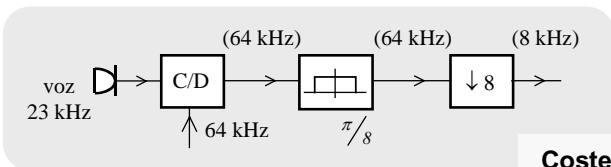
{ D/A
 A/D
 Banda estrecha



SOBREMUESTREO en A/D

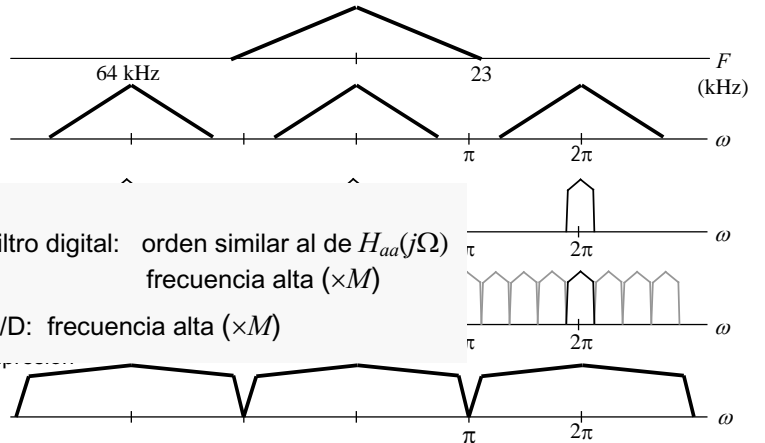


SOBREMUESTREO en A/D



Coste:

- Filtro digital: orden similar al de $H_{aa}(j\Omega)$ frecuencia alta ($\times M$)
- C/D: frecuencia alta ($\times M$)



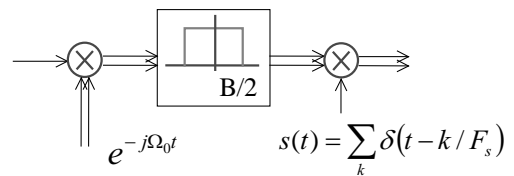
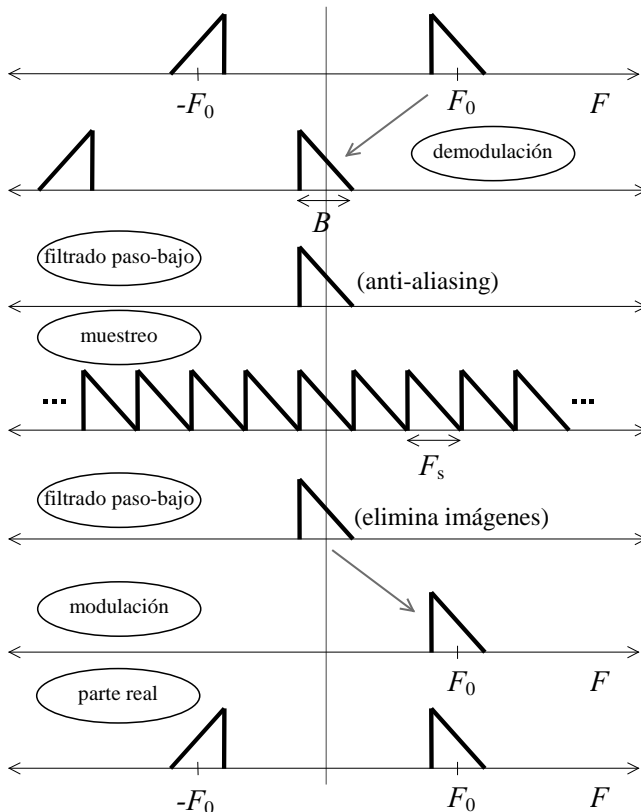
Tema 1 Procesado digital de señales analógicas

- PDS-A ideal
 - Conversión ideal continuo-discreta (C/D)
 - Conversión ideal discreto-continua (D/C)
 - PDS-A ideal
- PDS-A no ideal
 - Conversión analógico-digital (A/D)
 - Conversión digital-analógica (D/A)
 - Filtros antisolapamiento y anti-imagen
- Cambio de la velocidad de muestreo
 - Diezmado e interpolación

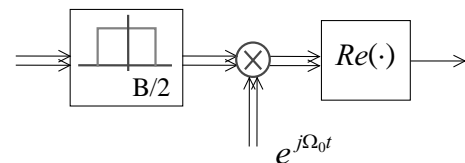
Técnicas de sobremuestreo para A/D y D/A

}

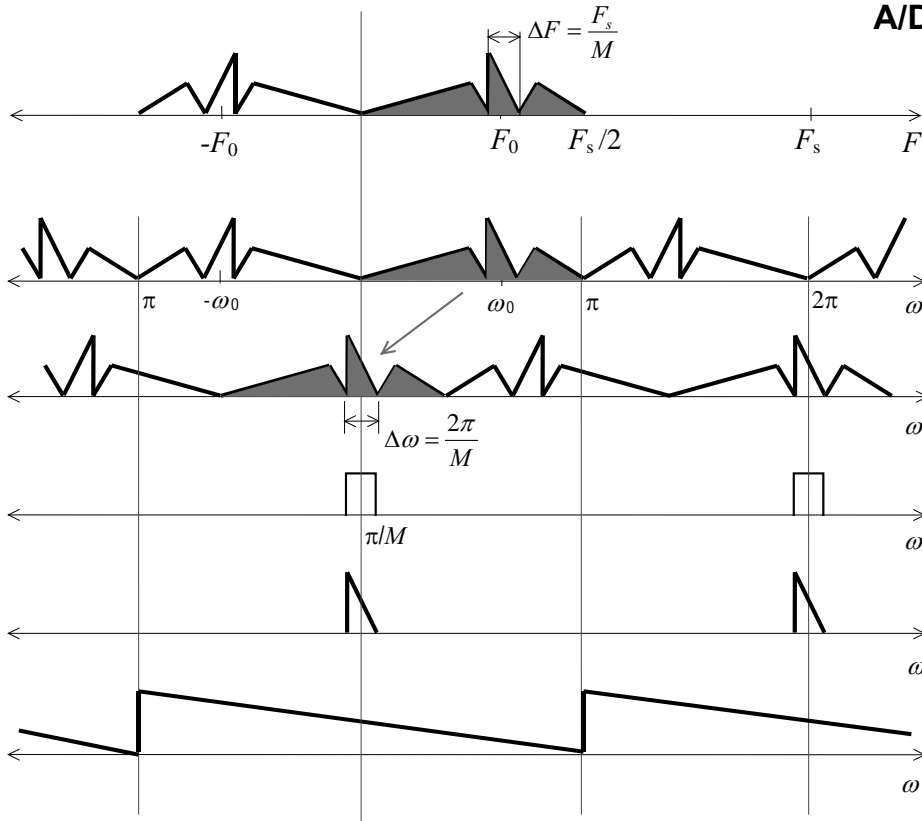
D/A
A/D
Banda estrecha



Muestreo y reconstrucción de señales paso banda

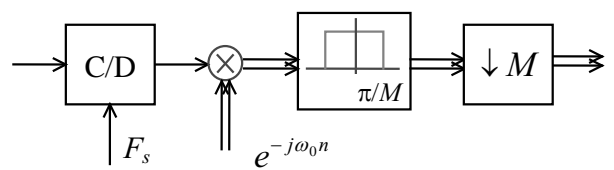
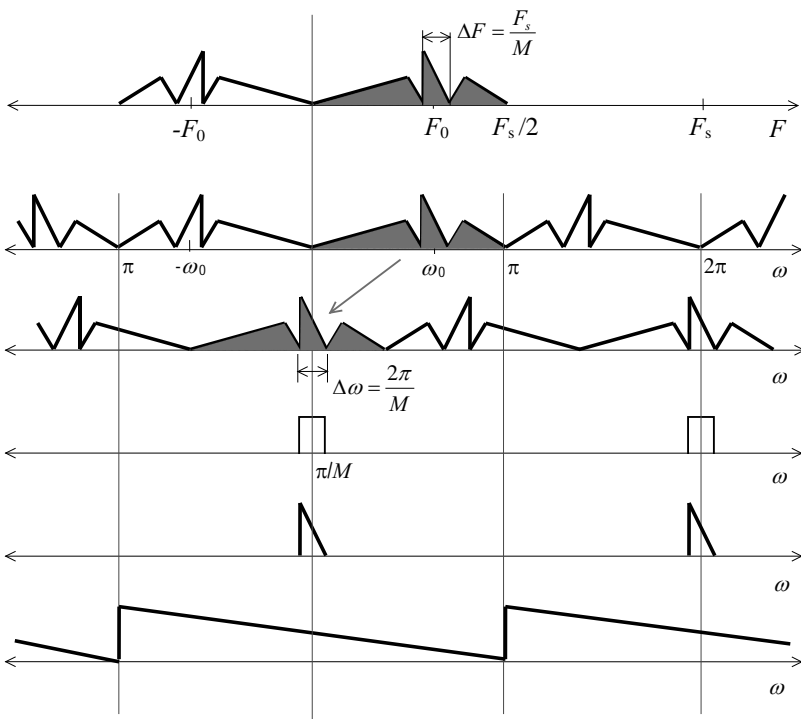


A/D señales de banda estrecha



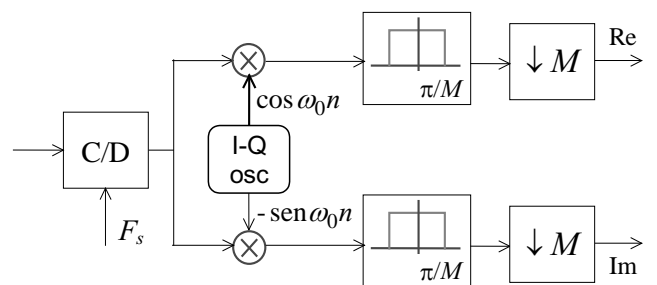
Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

A/D señales de banda estrecha



$$\text{Canal } F_o = \omega_0 \cdot \frac{F_s}{2\pi}$$

$$\text{Ancho de banda } \Delta F = \frac{F_s}{M}$$



Tema 2 Diseño de filtros digitales. Aproximación

Introducción: aproximación y especificación

Diseño de filtros IIR

Sistemas FIR de fase lineal

- Retardo ideal
- Distorsión de retardo. Sistemas de fase lineal
- Sistemas de fase lineal generalizada (FLG)
- Sistemas FIR-FLG

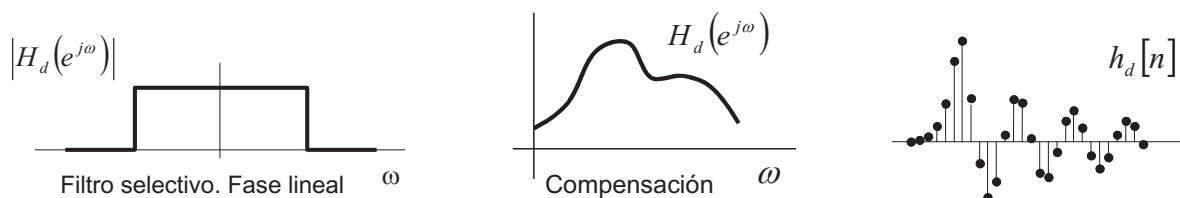
Diseño de filtros FIR de fase lineal

- Técnica de enventanado
- Uso de ventanas no rectangulares
- Método de la ventana de Kaiser
- Filtros óptimos. Método de Parks-McClellan

Tema 2 Diseño de filtros digitales. Aproximación

- Introducción: aproximación y especificación
- Diseño de filtros IIR
- Sistemas FIR de fase lineal
- Diseño de filtros FIR de fase lineal

Objetivos ideales



Aproximación

Buscar una $H(z)$ racional tal que $H(e^{j\omega})$ se aproxime a $H_d(e^{j\omega})$

Soluciones IIR	$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}$	polos y ceros
Soluciones FIR	$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}$	sólo ceros

orden M, N	b_0, b_1, \dots, b_M	a_0, a_1, \dots, a_N
--------------	------------------------	------------------------

Aproximación. Criterios

1 – Dados M, N encontrar b_k y a_k para minimizar el error

error cuadrático medio

$$\text{minimizar } \varepsilon_{\text{medio}} = \int_{-\pi}^{\pi} \left| H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega}) \right|^2 d\omega = \sum_n |h_d[n] - h[n]|^2$$

error máximo

$$\text{minimizar } \varepsilon_{\text{max}} = \max_{\omega} \left| H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega}) \right|$$

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}$$

Aproximación. Criterios

2 – Dados M, N encontrar b_k y a_k para minimizar el error ponderado:

(para dar más o menos importancia según la frecuencia)

$$\text{minimizar } \varepsilon_{\text{medio}} = \int_{-\pi}^{\pi} W(\omega) \cdot \left| H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega}) \right|^2 d\omega$$

$$\text{minimizar } \varepsilon_{\text{max}} = \max_{\omega} \left(W(\omega) \cdot \left| H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega}) \right| \right)$$

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}$$

Aproximación. Criterios

3 - Cumplir una **especificación** de **tolerancias** del error (dependientes de la frecuencia)

$$\left| H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega}) \right| < E(\omega)$$

Con zonas de transición (peso cero en el error donde no importa)

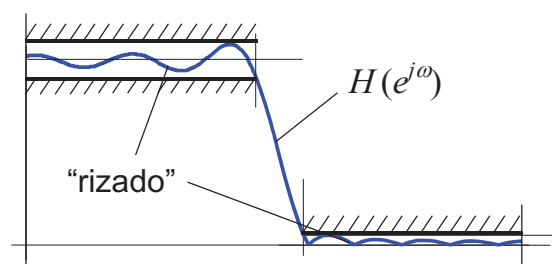
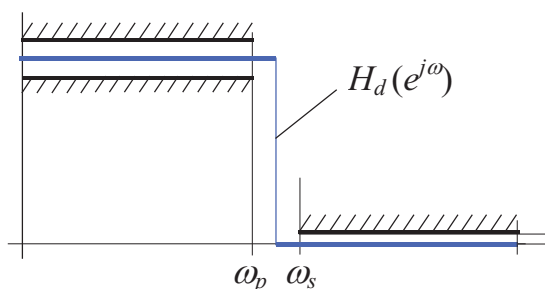
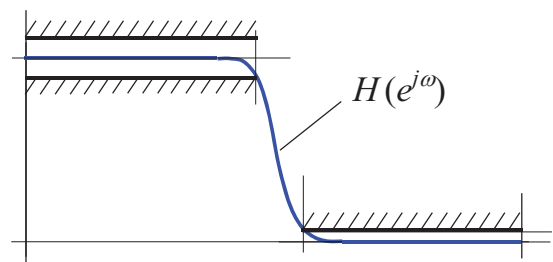
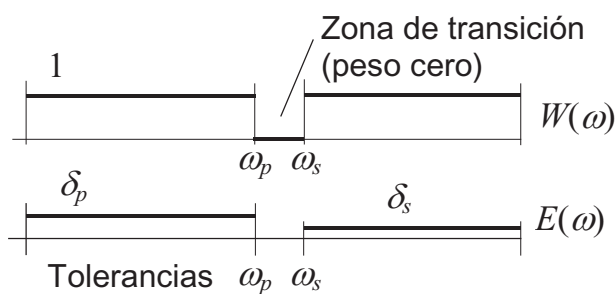
$$W(\omega) \cdot \left| H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega}) \right| < E(\omega)$$

Intentar cumplir con el mínimo orden M, N

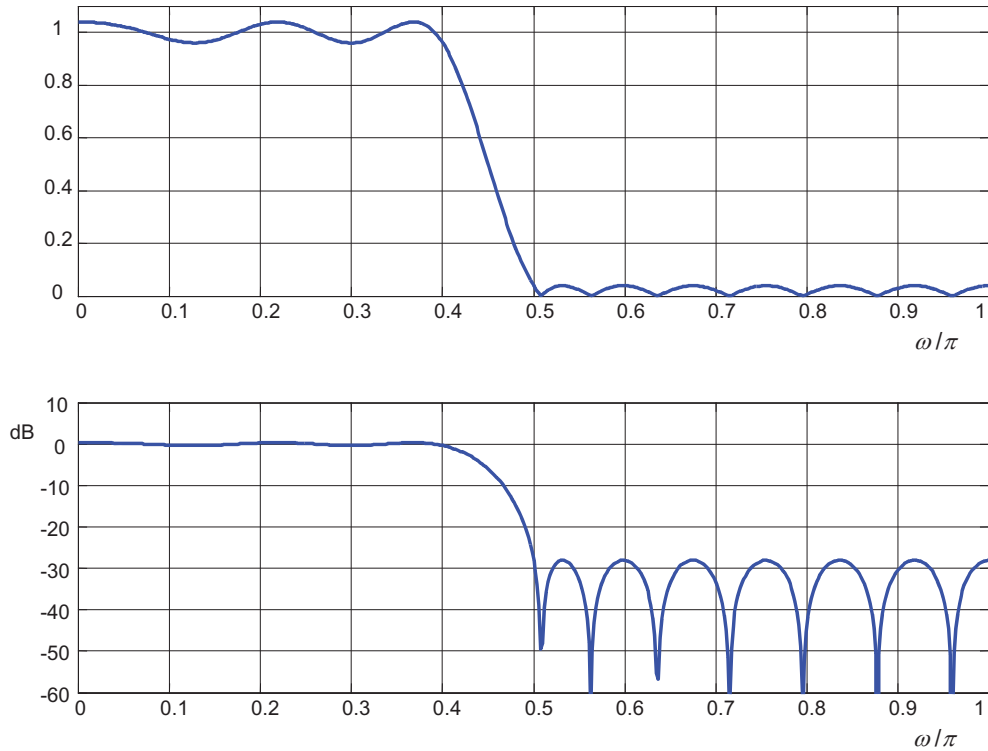
$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}$$

Especificación con tolerancias y zonas de transición

$$W(\omega) \cdot \left| H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega}) \right| < E(\omega)$$



Tolerancias / Rizado en dB



Tolerancias / Rizado en dB

Tolerancias en dB: valores máximos referidos a la ganancia nominal en banda de paso (1)

Ejemplo $\delta_p = 0,04$ $\delta_s = 0,04$

Ganancia nominal en banda de paso: 1 (referencia)

Banda de paso

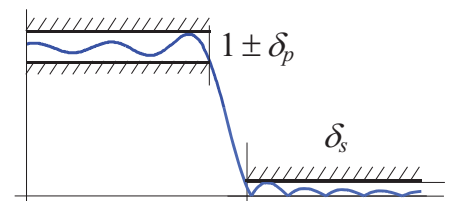
Relación valor máximo tolerado ($1 + \delta_p$) a valor nominal (1)

$$20 \log\left(\frac{1 + \delta_p}{1}\right) = 0,34 \text{ dB} \rightarrow \text{tolerancia } \pm 0,34 \text{ dB}$$

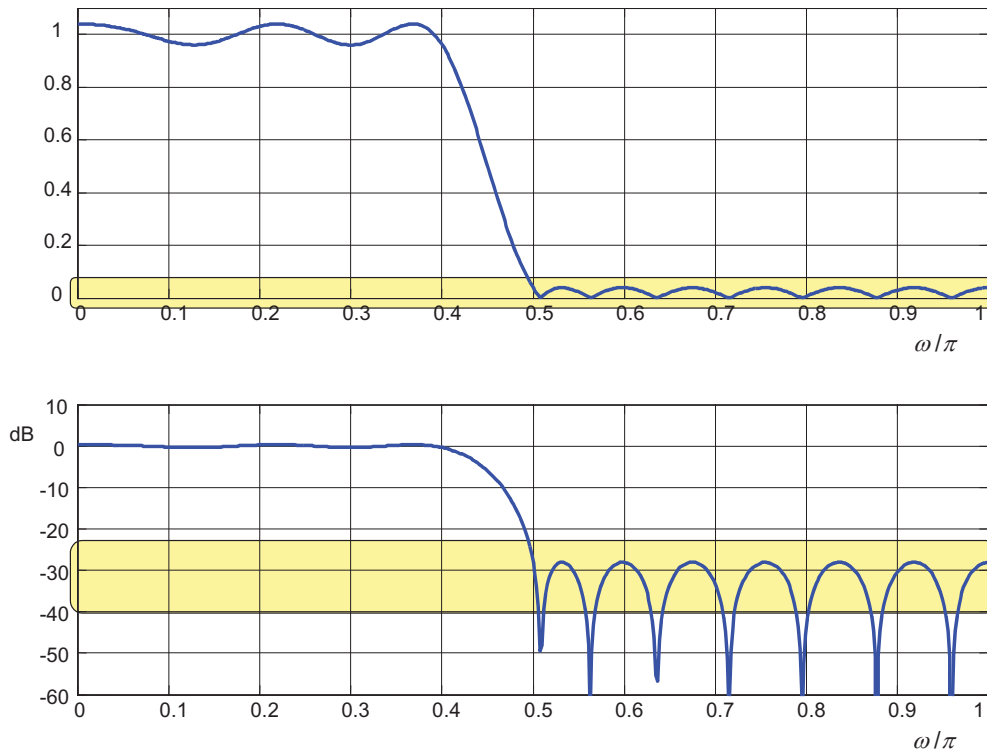
Banda de rechazo (eliminada)

Relación valor máximo tolerado (δ_s) a valor nominal (1)

$$20 \log(\delta_s) = -28 \text{ dB} \rightarrow \text{atenuación } 28 \text{ dB}$$

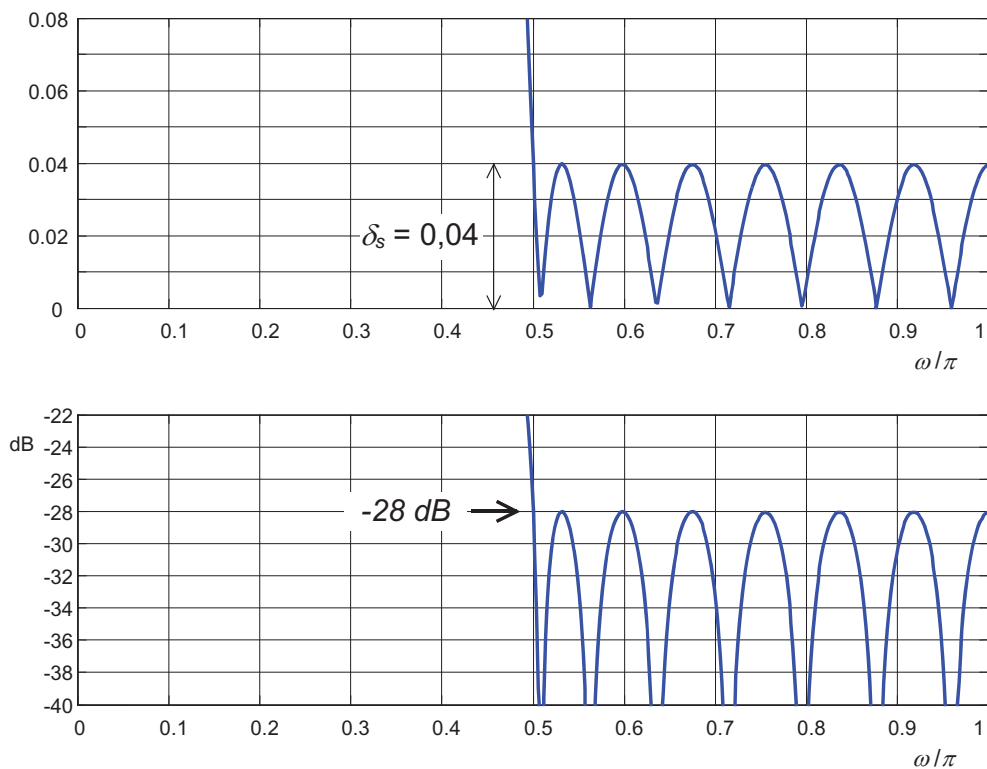


Tolerancias / Rizado en dB



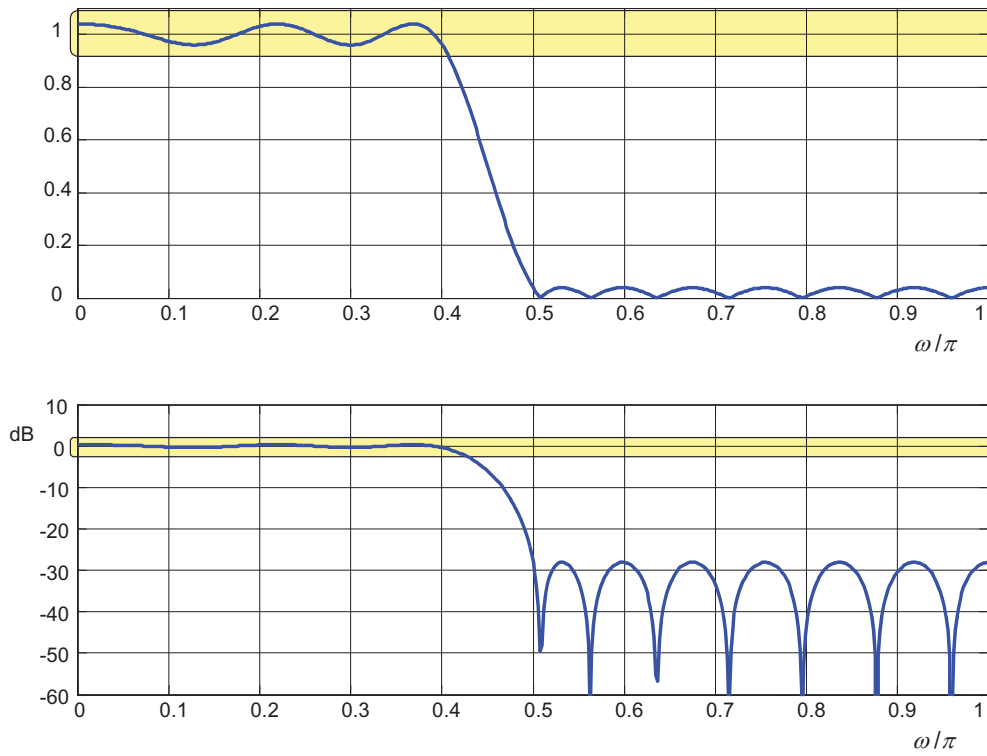
Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

Banda de rechazo (eliminada)

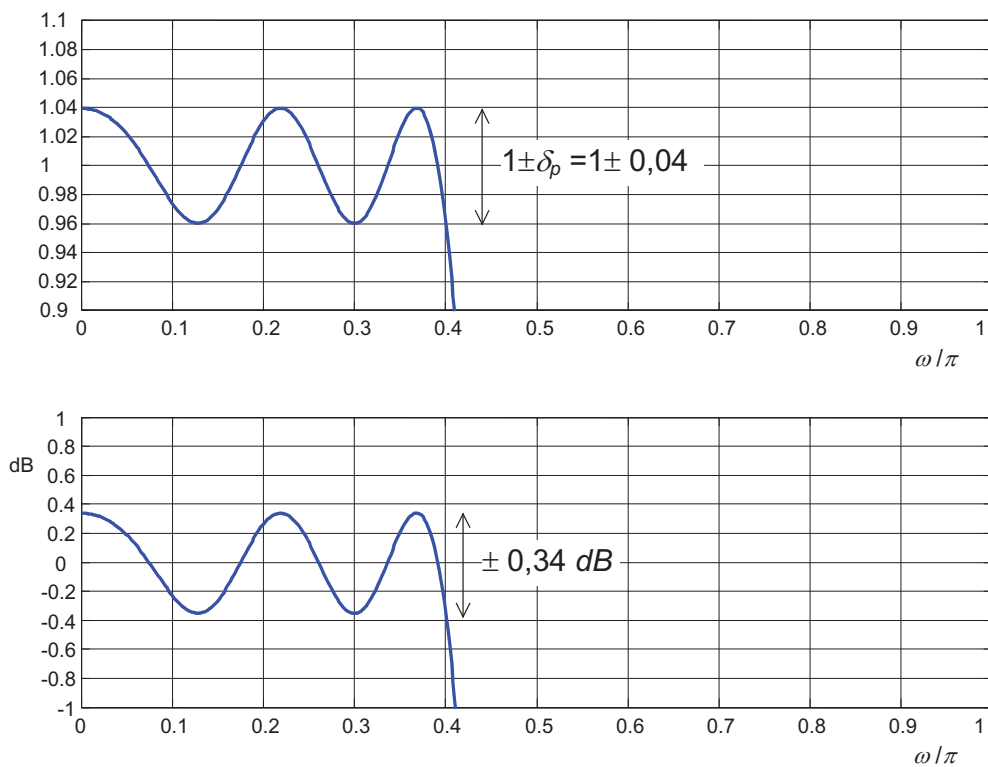


Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

Tolerancias / Rizado en dB

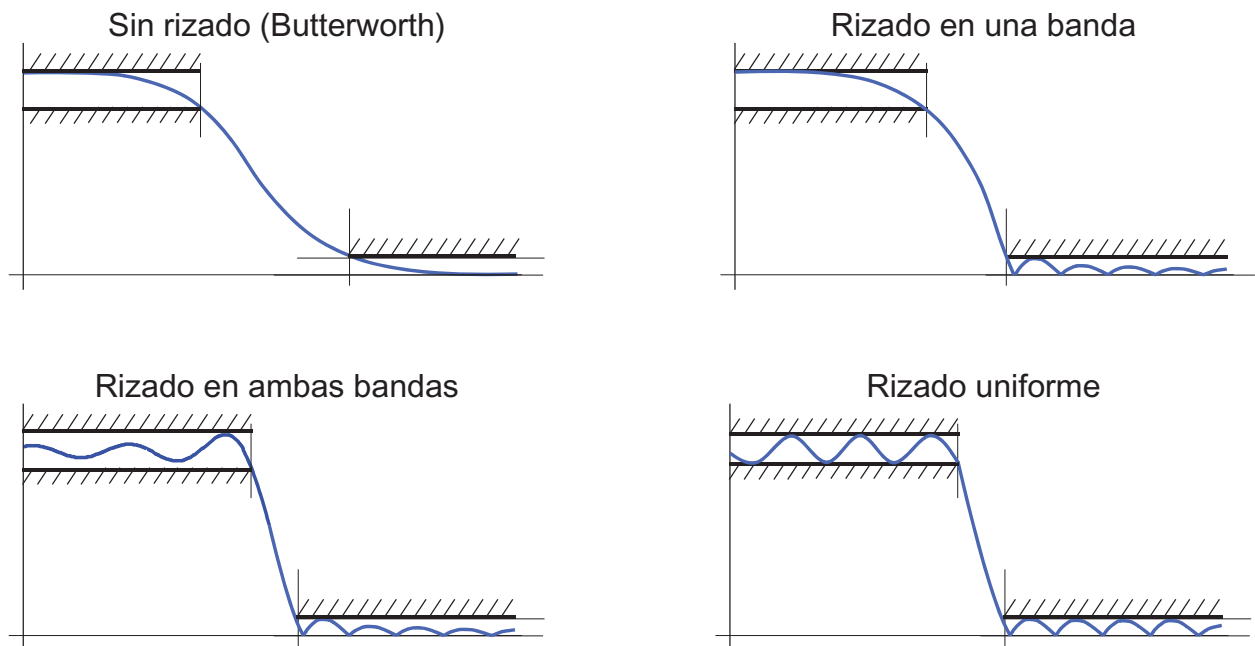


Banda de paso



Aproximación

Técnicas de aproximación

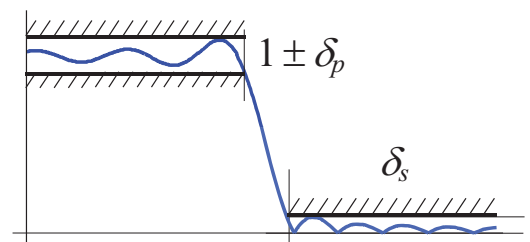


Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

Aproximación

Diseño de filtros selectivos a partir de especificaciones con tolerancias

- Decidir la solución IIR o FIR
- Decidir la técnica de aproximación
hay muchas, con y sin rizado
- Estimar el orden necesario para cumplir la especificación $\omega_p \ \omega_s \ \delta_p \ \delta_s \rightarrow M, N$
depende de la técnica
- Aplicar la técnica para calcular b_k y a_k $\omega_p \ \omega_s \ \delta_p \ \delta_s \rightarrow b_k \ a_k$



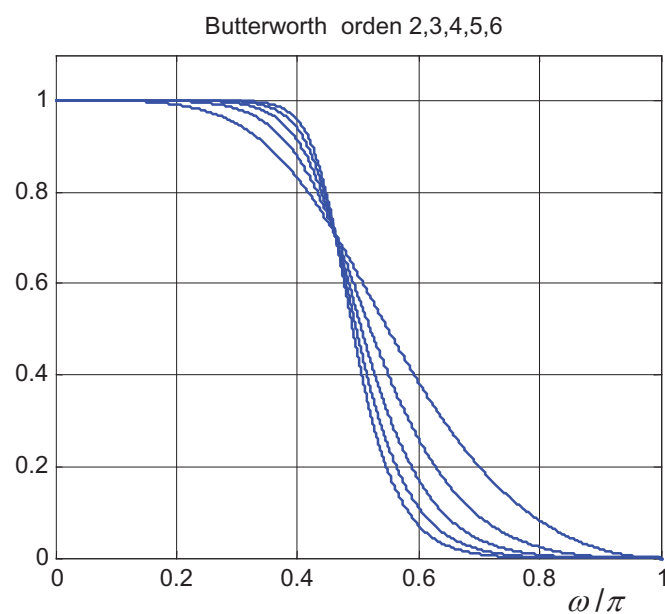
Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

Tema 2 Diseño de filtros digitales. Aproximación

- Introducción: aproximación y especificación
- Diseño de filtros IIR
- Sistemas FIR de fase lineal
- Diseño de filtros FIR de fase lineal

Filtros de Butterworth

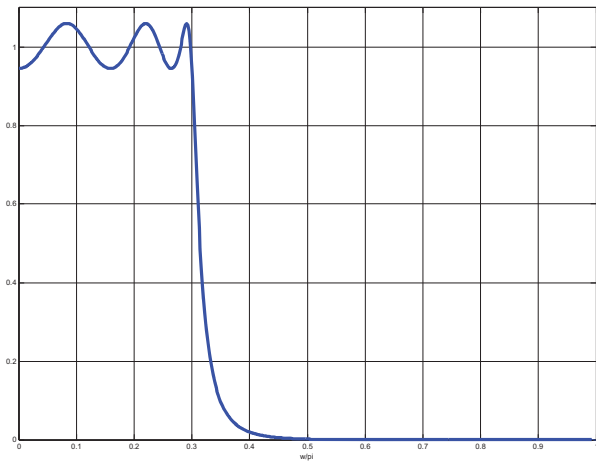
Sin rizado. Respuesta monótona y máximamente plana



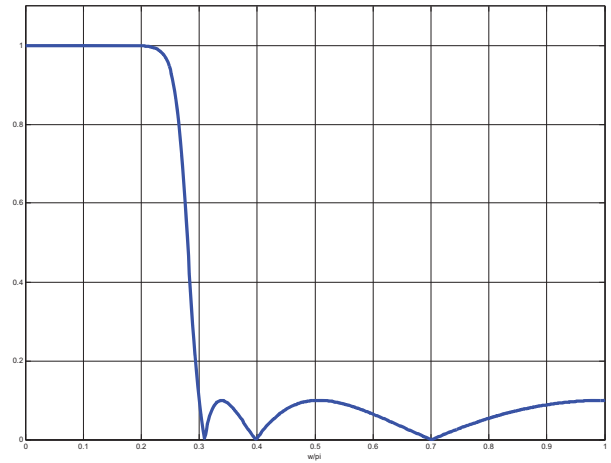
- Mayor pendiente en zona de transición al aumentar el orden

Filtros de Chebyshev

Rizado uniforme en una de las bandas



Tipo 1: rizado en banda de paso

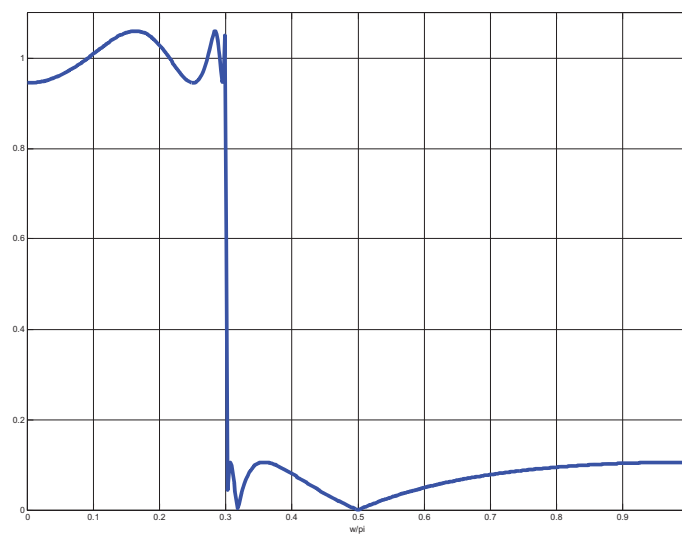


Tipo 2: rizado en banda de rechazo

- Mayor pendiente en zona de transición que los Butterworth
- Permite cumplir especificaciones con menor orden que los de Butterworth

Filtros elípticos

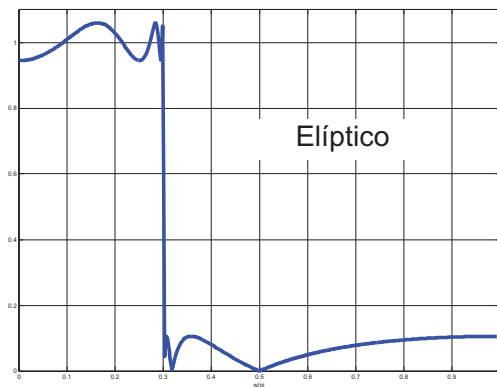
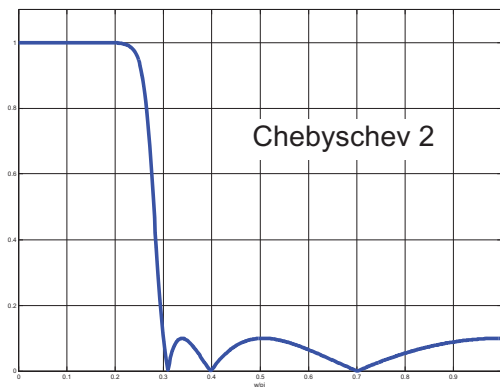
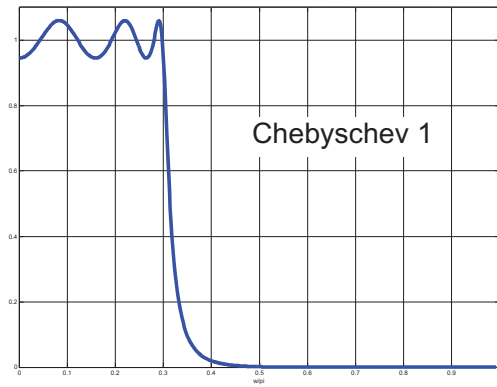
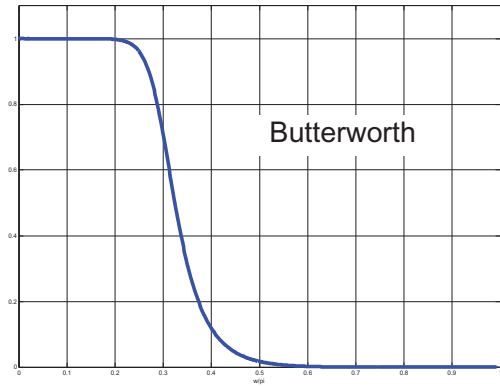
Rizado uniforme en ambas bandas



- Mayor pendiente en zona de transición que los anteriores
- Permite cumplir especificaciones con menor orden que los anteriores

Filtros IIR

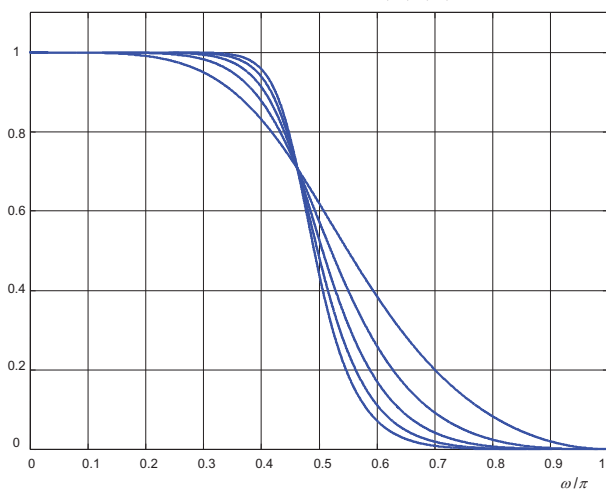
orden 6



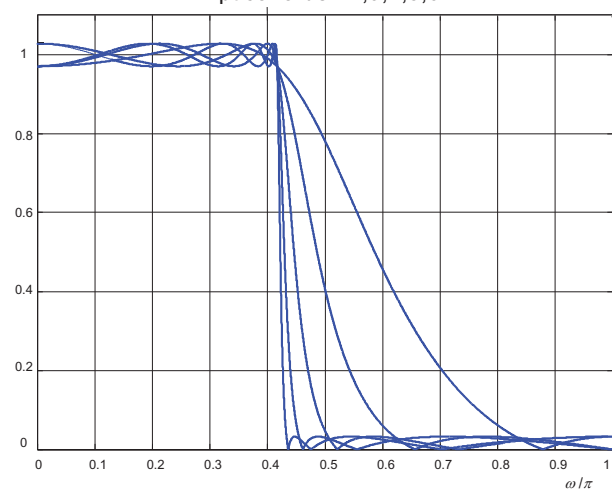
Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

Filtros IIR

Butterworth orden 2,3,4,5,6



Elíptico orden 2,3,4,5,6



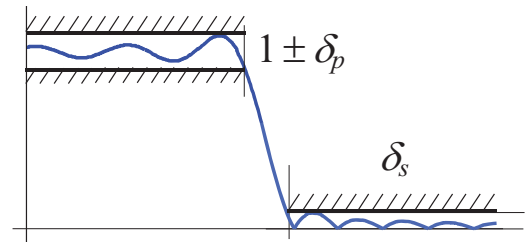
- Mayor pendiente en zona de transición al aumentar el orden

Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

Aproximación

Diseño de filtros selectivos a partir de especificaciones con tolerancias

- Decidir la solución IIR o FIR
- Decidir la técnica de aproximación
hay muchas, con y sin rizado
- Estimar el orden necesario para cumplir la especificación $\omega_p \omega_s \delta_p \delta_s \rightarrow M, N$
depende de la técnica
- Aplicar la técnica para calcular b_k y a_k $\omega_p \omega_s \delta_p \delta_s \rightarrow b_k a_k$



Estimación del orden

MATLAB

```
[N,Wn] = buttord (Wp,Ws,Rp,Rs);
```

```
[N,Wn] = cheby1ord (Wp,Ws,Rp,Rs);
```

```
[N,Wn] = cheby2ord (Wp,Ws,Rp,Rs);
```

```
[N,Wn] = ellipord (Wp,Ws,Rp,Rs);
```

entradas

Wp, Ws límites de la zona de transición normalizadas respecto a π

Rp banda de paso: atenuación (máxima) en dB referidos a ganancia nominal 1

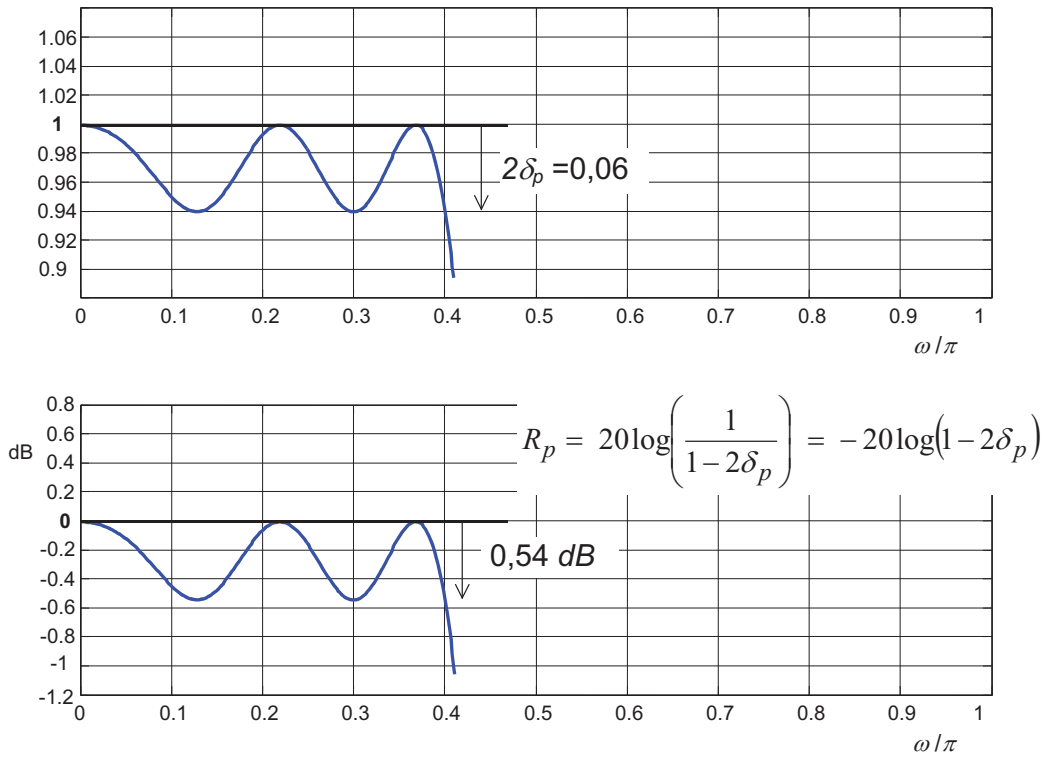
Rs banda de rechazo: atenuación (mínima) en dB referidos a ganancia nominal 1

salidas

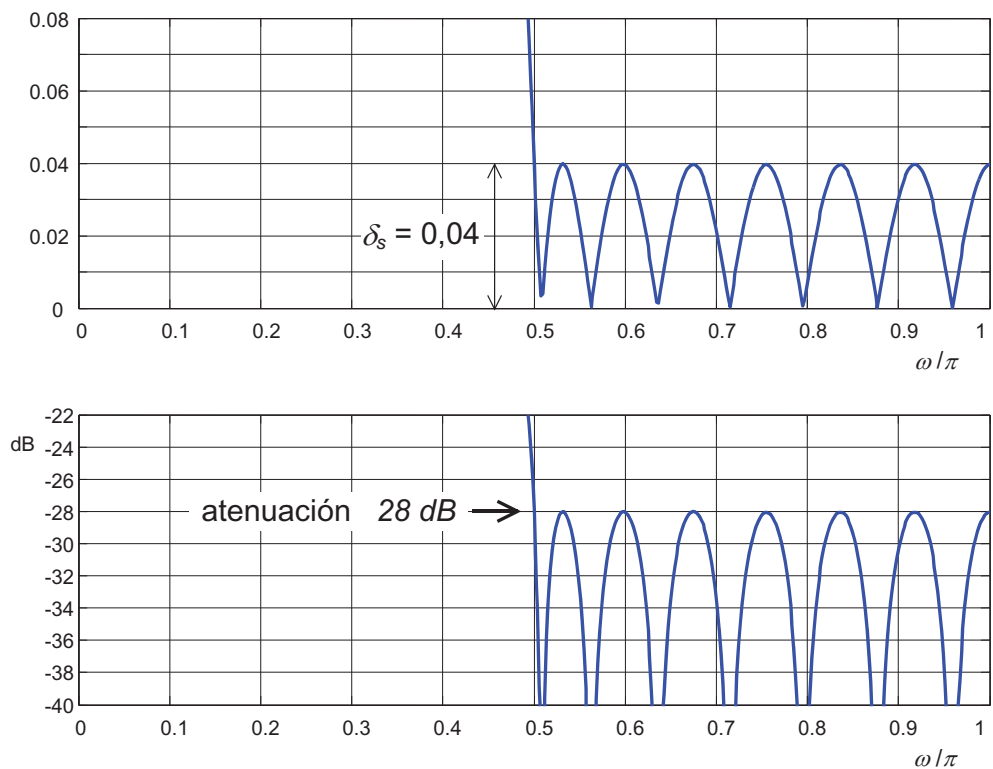
N orden ($M = N$)

Wn frecuencia normalizada (parámetro para la rutina de aproximación)

Banda de paso



Banda de rechazo (eliminada)



Cálculo de la $H(z)$ MATLAB

```
[b,a] = butter(N,Wn);  
[b,a] = cheby1(N,Rp,Wn);  
[b,a] = cheby2(N,Rs,Wn);  
[b,a] = ellip(N,Rp,Rs,Wn);
```

salidas

b=[b0, b1, b2, ... bN] coeficientes del polinomio numerador
a=[a0, a1, a2, ... aN] coeficientes del polinomio denominador

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}$$

Cálculo de la $H(z)$ MATLAB

```
[z,p,k] = butter(N,Wn);  
[z,p,k] = cheby1(N,Rp,Wn);  
[z,p,k] = cheby2(N,Rs,Wn);  
[z,p,k] = ellip(N,Rp,Rs,Wn);
```

salidas

z=[c1, c2, ... cN] ceros (raíces del polinomio numerador)
p=[p1, p2, ... pN] polos (raíces del polinomio denominador)
k ganancia **b0/a0**

$$H(z) = k \cdot \frac{\prod_{k=1}^N (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})}$$

Cálculo de la $H(z)$ MATLAB

Otros filtros selectivos MATLAB

`[N,Wn] = ellipord(Wp,Ws,Rp,Rs);`

`[b,a] = ellip(N,Rp,Rs,Wn);`

Wp, Ws límites de las zonas de transición normalizadas respecto a π

paso-bajo: $Wp = .1, \quad Ws = .2 \quad Ws > Wp$

paso-alto: $Wp = .2, \quad Ws = .1 \quad Ws < Wp$

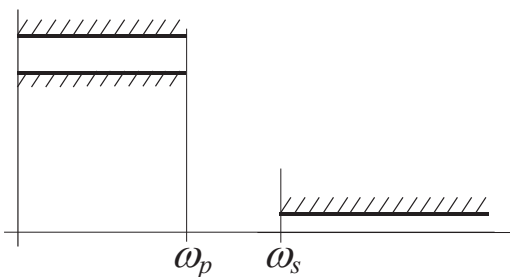
paso- banda: $Wp = [.2 \ .7], \quad Ws = [.1 \ .8] \quad Ws1 < Wp1 \quad Ws2 > Wp2$

banda eliminada: $Wp = [.1 \ .8], \quad Ws = [.2 \ .7] \quad Ws1 > Wp1 \quad Ws2 < Wp2$

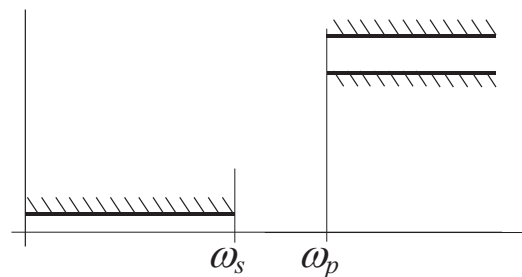
$Wp = [Wp1 \ Wp2] \quad Ws = [Ws1 \ Ws2] \quad (\text{vectores}(1,2))$

Cálculo de la $H(z)$ MATLAB

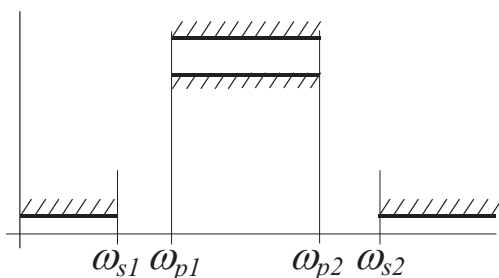
Otros filtros selectivos



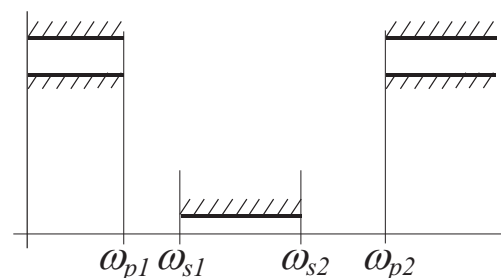
$Wp < Ws$



$Ws < Wp$



$Ws1 < Wp1 \quad Wp2 < Ws2$



$Wp1 < Ws1 \quad Ws2 < Wp2$

Tema 2 Diseño de filtros digitales. Aproximación

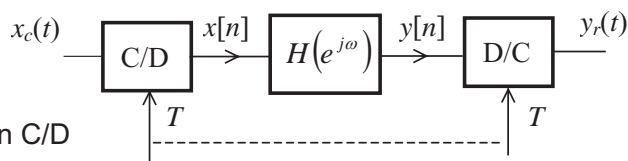
- Diseño de filtros IIR
- Sistemas FIR de fase lineal
 - Retardo ideal
 - Distorsión de retardo. Sistemas de fase lineal
 - Sistemas de fase lineal generalizada (FLG)
 - Sistemas FIR-FLG
- Diseño de filtros FIR de fase lineal
 - Técnica de enventanado
 - Uso de ventanas no rectangulares
 - Método de la ventana de Kaiser
 - Filtros óptimos. Método de Parks-McClellan

Retardo ideal

Sistema con respuesta en frecuencia:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\alpha}$$

En un sistema PDS-A:



- No solapamiento espectral en C/D
- C/D y D/C mismo T y sincronizados

$$H_{ef}(j\Omega) = e^{-j\Omega T\alpha} \quad |\Omega| < \frac{\pi}{T}$$

$$Y_r(j\Omega) = H_{ef}(j\Omega) \cdot X_c(j\Omega) = X_c(j\Omega) \cdot e^{-j\Omega\alpha T}$$

$$y_r(t) = x_c(t - \alpha T) \quad (\text{retardo})$$

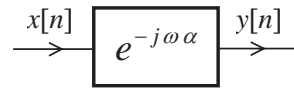
En telecomunicación:

Un retardo no se considera distorsión de la señal

La información que soporta $y_r(t)$ es la misma
(pero más tarde)

Retardo ideal

Comportamiento del sistema discreto

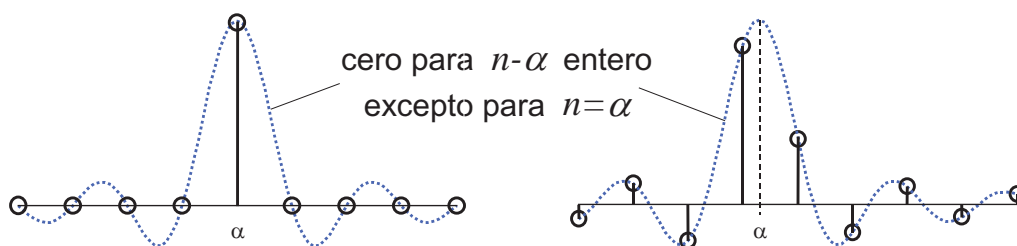


$$\alpha \text{ entero: } Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\omega\alpha} \xrightarrow{TF^{-1}} y[n] = x[n-\alpha] \quad (\text{retardo})$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\alpha} \xrightarrow{TF^{-1}} h[n] = \delta[n-\alpha] \quad (\text{retardo})$$

α no entero:

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega\alpha} \cdot e^{j\omega n} d\omega = \frac{\text{sen } \pi(n-\alpha)}{\pi(n-\alpha)}$$



Tema 2 Diseño de filtros digitales. Aproximación

- Diseño de filtros IIR
- Sistemas FIR de fase lineal
 - Retardo ideal
 - Distorsión de retardo. Sistemas de fase lineal
 - Sistemas de fase lineal generalizada (FLG)
 - Sistemas FIR-FLG
- Diseño de filtros FIR de fase lineal
 - Técnica de enventanado
 - Uso de ventanas no rectangulares
 - Método de la ventana de Kaiser
 - Filtros óptimos. Método de Parks-McClellan

Distorsión de retardo

Respuesta en Frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \underbrace{|H(e^{j\omega})|}_{\text{Respuesta de Amplitud}} \cdot e^{j \underbrace{\angle H(e^{j\omega})}_{\text{Respuesta de Fase}}}$$

Distorsión de amplitud: $|H(e^{j\omega})|$ no constante

Distorsión de fase: $\angle H(e^{j\omega})$ no lineal

Linealidad de fase se mide con:

Retardo de grupo: $\tau_g(\omega) = -\frac{d\angle H(e^{j\omega})}{d\omega}$

Distorsión de retardo (de grupo): $\tau_g(\omega)$ no constante (fase no lineal)

Sistemas de fase lineal

Respuesta en Frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \underbrace{|H(e^{j\omega})|}_{\text{real (+)}} \cdot e^{-j\omega\alpha + j\beta}$$

(real +)
(fase lineal)

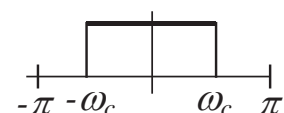
Retardo de grupo constante $\tau_g(\omega) = \alpha$

Ejemplo: Filtro paso bajo ideal de fase lineal

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & 0 < |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases} = \underbrace{e^{-j\omega\alpha}}_{\text{Retardo ideal (fase lineal)}} \cdot \begin{cases} 1 & 0 < |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

FPB de fase cero

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\alpha} \cdot e^{j\omega n} d\omega = \frac{\text{sen } \omega_c (n - \alpha)}{\pi(n - \alpha)}$$



Ejemplo: Filtro paso bajo ideal de fase lineal

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & 0 < |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

$$h[n] = \frac{\text{sen } \omega_c (n - \alpha)}{\pi (n - \alpha)}$$

$$h[n] = 0$$

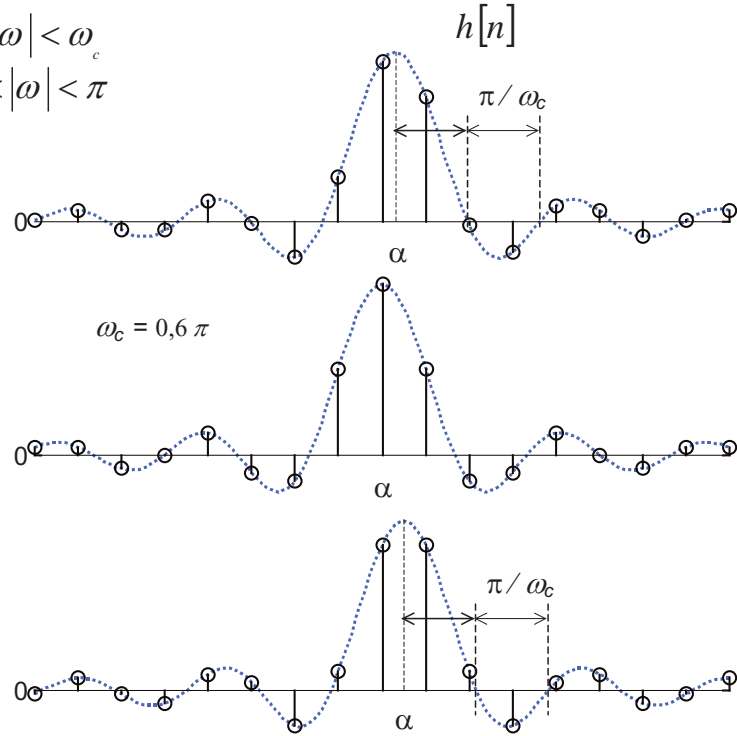
para $\omega_c (n - \alpha) = k\pi$

$$n - \alpha = k \frac{\pi}{\omega_c}$$

excepto

para $k = 0$ ($n = \alpha$)

$$h[\alpha] = \frac{\omega_c}{\pi}$$



Ejemplo: Filtro paso bajo ideal de fase lineal

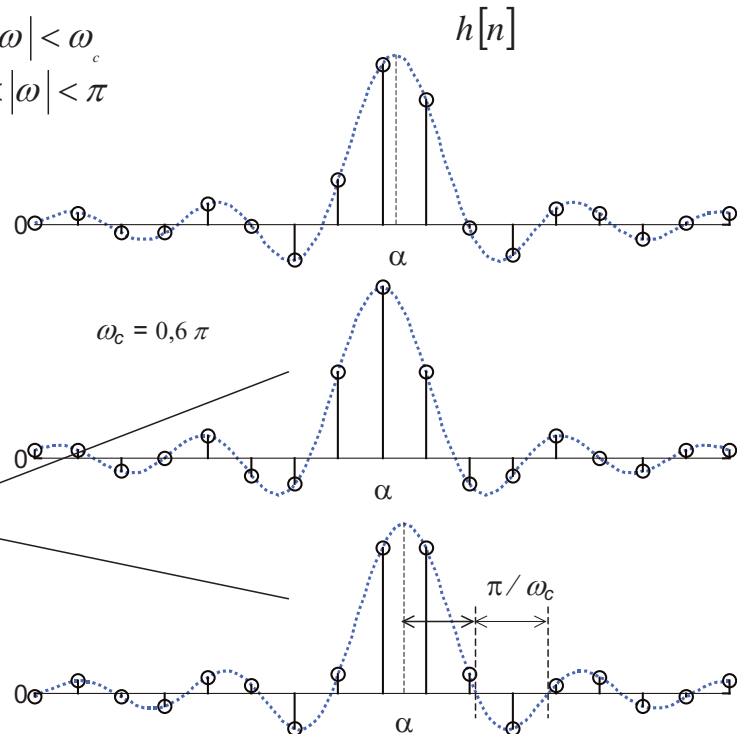
$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & 0 < |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

$$h[n] = \frac{\text{sen } \omega_c (n - \alpha)}{\pi (n - \alpha)}$$

IIR

No causal

$h[n]$ simétrica sólo si
 2α entero
 (α entero o)
 (α entero y medio)



Tema 2 Diseño de filtros digitales. Aproximación

- Diseño de filtros IIR
- Sistemas FIR de fase lineal
 - Retardo ideal
 - Distorsión de retardo. Sistemas de fase lineal
 - Sistemas de fase lineal generalizada (FLG)
 - Sistemas FIR-FLG
- Diseño de filtros FIR de fase lineal
 - Técnica de enventanado
 - Uso de ventanas no rectangulares
 - Método de la ventana de Kaiser
 - Filtros óptimos. Método de Parks-McClellan

Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

Sistemas de fase lineal generalizada (FLG)

Respuesta en
Frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = A(\omega) \cdot e^{-j\omega\alpha + j\beta}$$

real (+ ó -)
fase 0 ó π con saltos cuando
cambia de signo

término de fase lineal
con la frecuencia

Retardo de
grupo
constante

$$\tau_g(\omega) = \alpha \quad \text{para } A(\omega) \neq 0$$

Cuando $A(\omega)$ cambia de
signo, la fase salta π

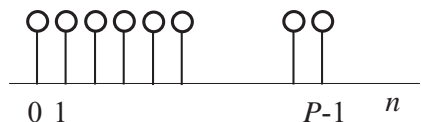
Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

Sistemas de fase lineal generalizada (FLG)

Respuesta en Frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = A(\omega) \cdot e^{-j\omega\alpha + j\beta}$$

Ejemplo: Pulso rectangular

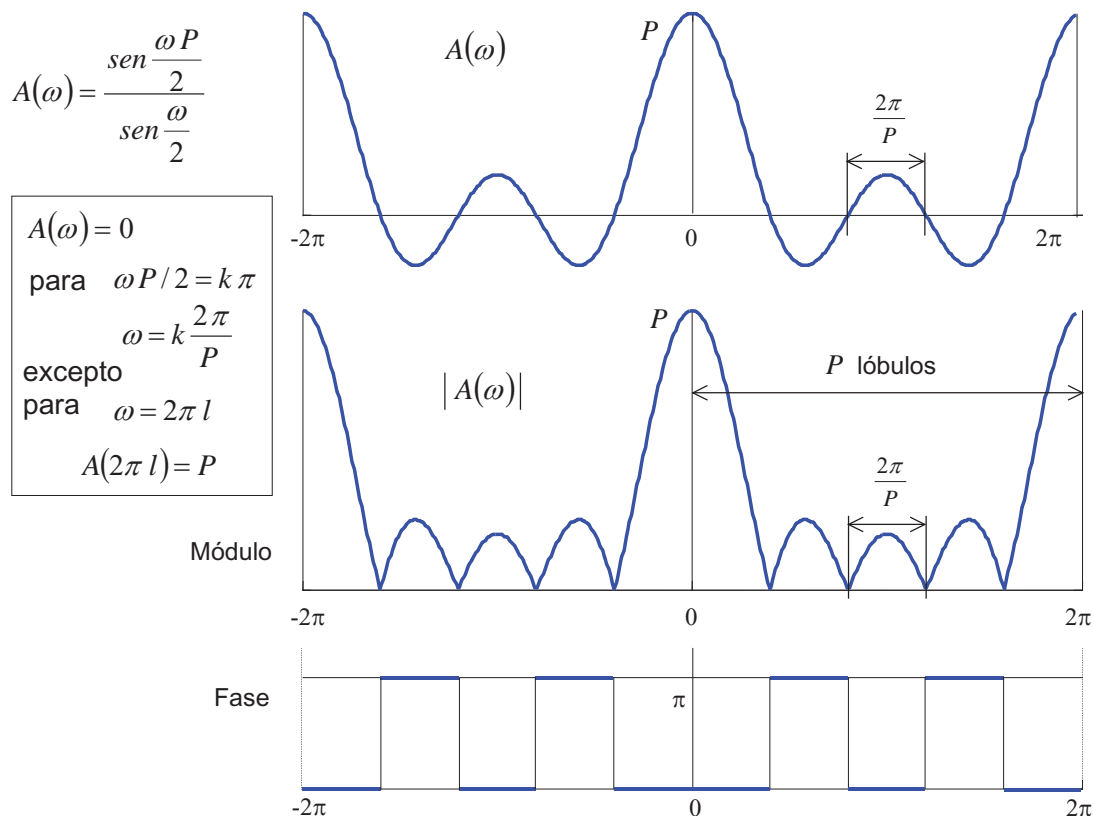


$$h[n] = \sum_{k=0}^{P-1} \delta[n-k]$$

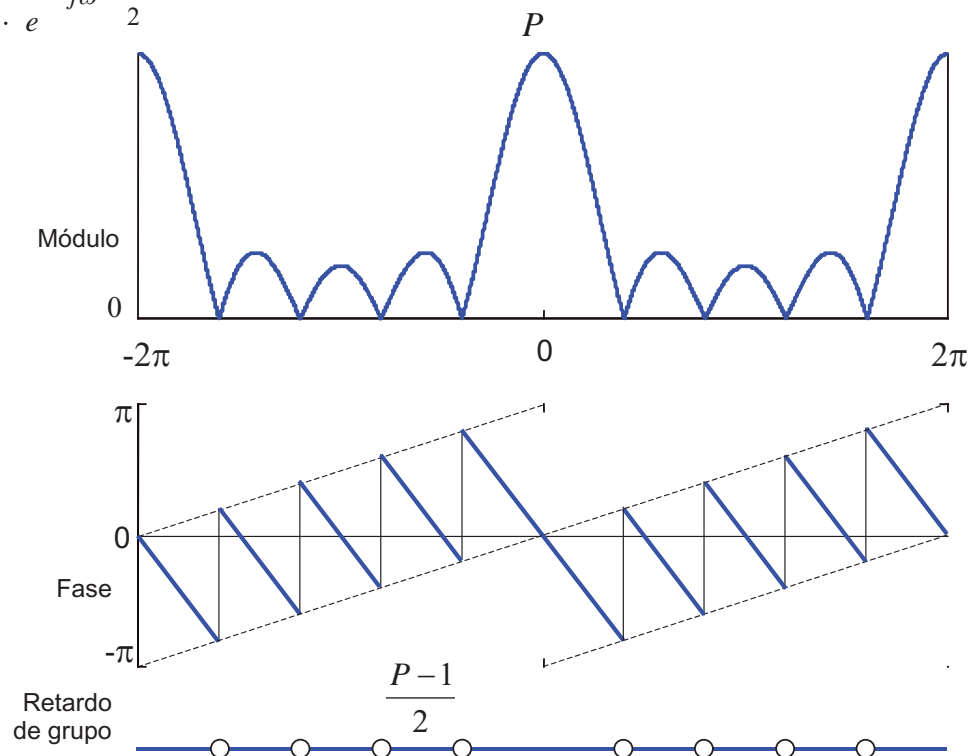
$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{P-1} e^{-j\omega k} = \frac{e^{-j\omega P} - 1}{e^{-j\omega} - 1} = \frac{e^{-j\omega P/2}}{e^{-j\omega/2}} \cdot \frac{e^{j\omega P/2} - e^{-j\omega P/2}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\text{sen} \frac{\omega P}{2}}{\text{sen} \frac{\omega}{2}} \cdot e^{-j\omega(P-1)/2} = \boxed{A(\omega) \cdot e^{-j\omega\alpha}}$$

real lineal



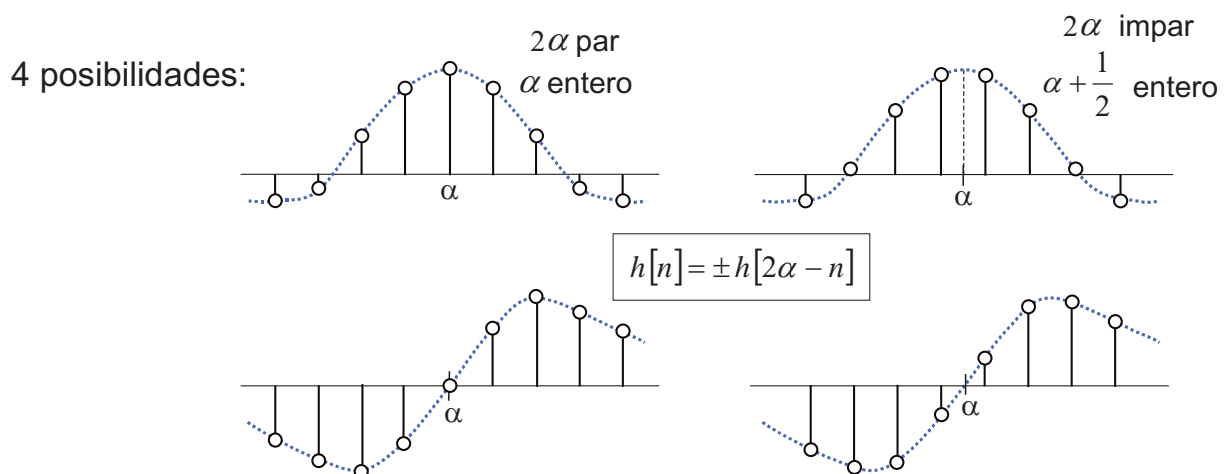
$$H(\omega) = \frac{\text{sen} \frac{\omega P}{2}}{\text{sen} \frac{\omega}{2}} \cdot e^{-j\omega \frac{P-1}{2}}$$

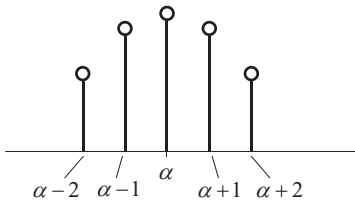


Sistemas de fase lineal generalizada (FLG)

Una condición suficiente para que un sistema sea FLG

- Respuesta al impulso **real** y **simétrica**
- Simetría par: $h[n] = h[2\alpha - n]$
- Simetría impar: $h[n] = -h[2\alpha - n]$





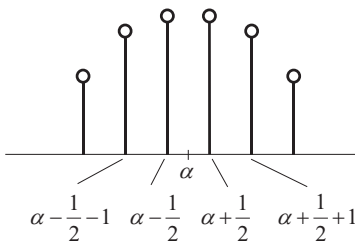
$$\begin{aligned}
 \alpha \text{ entero} \quad H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \cdot e^{-j\omega n} = \\
 &= h[\alpha] \cdot e^{-j\omega\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} h[\alpha+k] \cdot e^{-j\omega(\alpha+k)} + \sum_{k=1}^{\infty} h[\alpha-k] \cdot e^{-j\omega(\alpha-k)} = \\
 &= e^{-j\omega\alpha} \cdot \left\{ h[\alpha] + \sum_{k=1}^{\infty} \left(h[\alpha+k] \cdot e^{-j\omega k} + h[\alpha-k] \cdot e^{j\omega k} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

simetría par: $h[\alpha+k] = h[\alpha-k]$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\alpha} \cdot \underbrace{\left\{ h[\alpha] + \sum_{k=1}^{\infty} h[\alpha+k] \cdot 2 \cos \omega k \right\}}_{\text{real} = A(\omega)} = A(\omega) \cdot e^{-j\omega\alpha}$$

simetría impar: $h[\alpha+k] = -h[\alpha-k]$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\alpha} \cdot \underbrace{\left\{ h[\alpha] + \sum_{k=1}^{\infty} h[\alpha+k] \cdot (-2j) \sin \omega k \right\}}_{\text{imaginario} = -j \cdot A(\omega)} = A(\omega) \cdot e^{-j\omega\alpha - j\frac{\pi}{2}}$$



$$\begin{aligned}
 \alpha + \frac{1}{2} \text{ entero} \quad H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \cdot e^{-j\omega n} = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} h\left[\alpha + \frac{1}{2} + k\right] \cdot e^{-j\omega\left(\alpha + \frac{1}{2} + k\right)} + \sum_{k=0}^{\infty} h\left[\alpha - \frac{1}{2} - k\right] \cdot e^{-j\omega\left(\alpha - \frac{1}{2} - k\right)} = \\
 &= e^{-j\omega\alpha} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(h\left[\alpha + \frac{1}{2} + k\right] \cdot e^{-j\omega\left(k + \frac{1}{2}\right)} + h\left[\alpha - \frac{1}{2} - k\right] \cdot e^{j\omega\left(k + \frac{1}{2}\right)} \right)
 \end{aligned}$$

simetría par: $h\left[\alpha + \frac{1}{2} + k\right] = h\left[\alpha - \frac{1}{2} - k\right]$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\alpha} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} h\left[\alpha + \frac{1}{2} + k\right] \cdot 2 \cos\left(\omega\left(k + \frac{1}{2}\right)\right)}_{\text{real} = A(\omega)} = A(\omega) \cdot e^{-j\omega\alpha}$$

simetría impar: $h\left[\alpha + \frac{1}{2} + k\right] = -h\left[\alpha - \frac{1}{2} - k\right]$

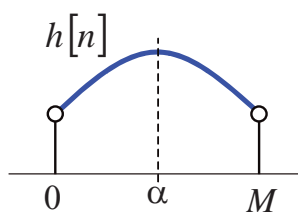
$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\alpha} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} h\left[\alpha + \frac{1}{2} + k\right] \cdot (-2j) \sin\left(\omega\left(k + \frac{1}{2}\right)\right)}_{\text{imaginario} = -j \cdot A(\omega)} = A(\omega) \cdot e^{-j\omega\alpha - j\frac{\pi}{2}}$$

Tema 2 Diseño de filtros digitales. Aproximación

- Diseño de filtros IIR
- Sistemas FIR de fase lineal
 - Retardo ideal
 - Distorsión de retardo. Sistemas de fase lineal
 - Sistemas de fase lineal generalizada (FLG)
 - Sistemas FIR-FLG
- Diseño de filtros FIR de fase lineal
 - Técnica de enventanado
 - Uso de ventanas no rectangulares
 - Método de la ventana de Kaiser
 - Filtros óptimos. Método de Parks-McClellan

Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

Sistemas FIR de fase lineal (generalizada)



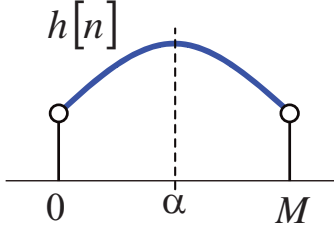
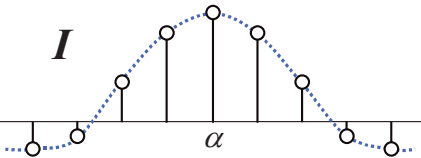
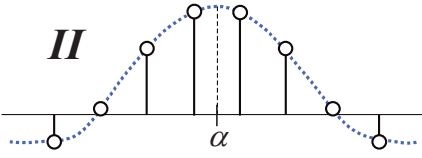
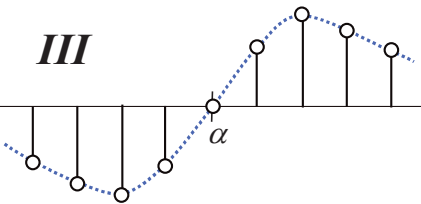
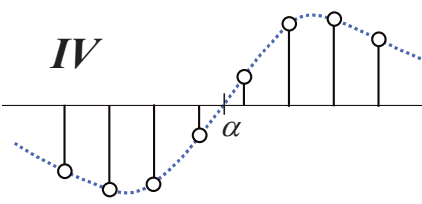
$$h[n] = 0 \quad n < 0$$
$$h[n] = 0 \quad n > 2\alpha = M$$

- Función de transferencia $H(z) = \sum_{n=0}^M h[n] z^{-n}$
- $H(z)$ es un polinomio en z^{-1} $h[n]$ son los coeficientes del polinomio
- M orden del sistema
 - Grado del polinomio
 - N° de raíces del polinomio (ceros de la función de transferencia $H(z)$)
- $h[n]$ tiene simetría respecto a $\alpha = \frac{M}{2}$

$$h[n] = \pm h[M - n] = \pm h[2\alpha - n]$$

Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

Sistemas FIR de fase lineal (generalizada)

		$M = 2\alpha$	
		M par α entero	M impar $\alpha + \frac{1}{2}$ entero
			
Simetría	Par $h[n] = h[M - n]$	I 	II 
	Impar $h[n] = -h[M - n]$	III 	IV 

Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

Sistemas FIR de fase lineal. Propiedades del diagrama polo-cero

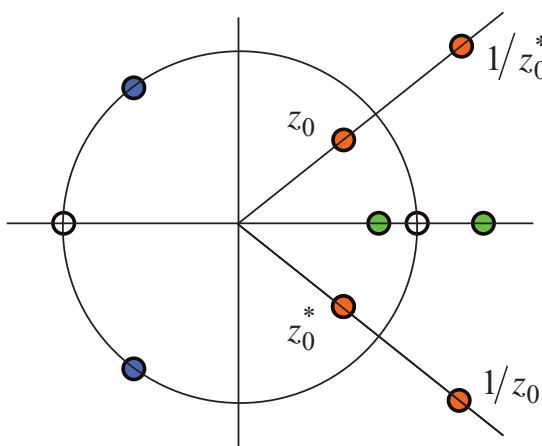
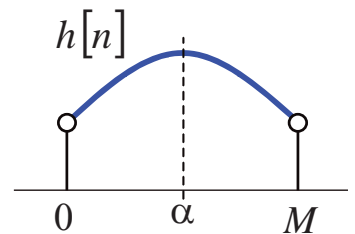
Simetría respuesta al impulso \rightarrow

$$h[n] = \pm h[M - n]$$

\Downarrow

Simetría función de transferencia \rightarrow

$$H(z) = \pm z^{-M} H(z^{-1})$$



Los ceros ocurren en cuartetos:

$$z_0, z_0^{-1}, z_0^* \text{ y } 1/z_0^*$$

excepto:

- si son reales - pareja de inversos
- si $|z_0| = 1$ - pareja de conjugados
- si $z_0 = \pm 1$ - sólo

Simetría respecto a $Im[z] = 0$ (eje real)

Simetría respecto a $|z| = 1$ (circunf. unidad)
(homotecia)

Sistemas FIR de fase lineal. Propiedades del diagrama polo-cero

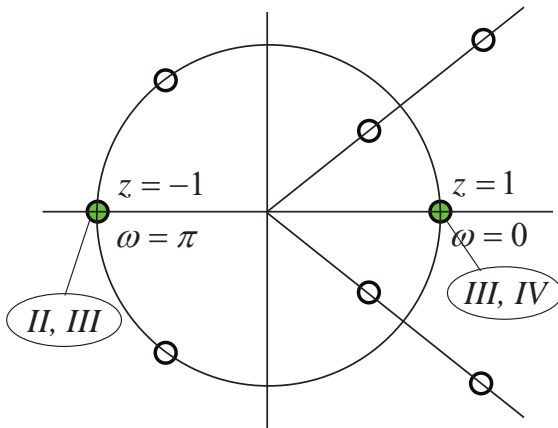
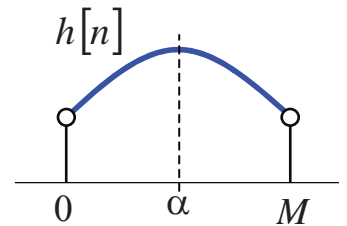
Simetría respuesta al impulso \rightarrow

$$h[n] = \pm h[M-n]$$

\Downarrow

Simetría función de transferencia \rightarrow

$$H(z) = \pm z^{-M} H(z^{-1})$$



tipos *III, IV* no pueden ser paso-bajo

tipos *II, III* no pueden ser paso-alto

Tema 2 Diseño de filtros digitales. Aproximación

- Diseño de filtros IIR
- Sistemas FIR de fase lineal
 - Retardo ideal
 - Distorsión de retardo. Sistemas de fase lineal
 - Sistemas de fase lineal generalizada (FLG)
 - Sistemas FIR-FLG
- Diseño de filtros FIR de fase lineal
 - Técnica de enventanado
 - Uso de ventanas no rectangulares
 - Método de la ventana de Kaiser
 - Filtros óptimos. Método de Parks-McClellan

Tema 2 Diseño de filtros digitales. Aproximación

- Sistemas FIR de fase lineal
 - Retardo ideal
 - Distorsión de retardo. Sistemas de fase lineal
 - Sistemas de fase lineal generalizada (FLG)
 - Sistemas FIR-FLG
- Diseño de filtros FIR de fase lineal
 - Introducción a la técnica de enventanado
 - Efecto del enventanado sobre la respuesta en frecuencia
 - Diseño con ventana rectangular
 - Uso de ventanas no rectangulares
 - Método de la ventana de Kaiser
 - Filtros óptimos. Método de Parks-McClellan

Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

Diseño de filtros FIR de fase lineal

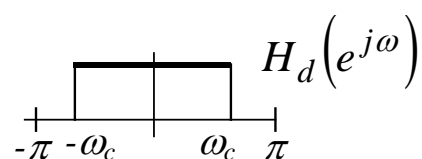
Se desea diseñar un filtro que:

- Aproxime una respuesta dada $H_d(e^{j\omega})$
- Tenga fase lineal exacta (generalizada)
- Sea causal (realizable)

-
- Se puede hacer con un filtro FIR-FLG
 - Ajustar valores de $h[n]$ para aproximar $H_d(e^{j\omega})$
 - Manteniendo $h[n]$ simétrica para asegurar FLG

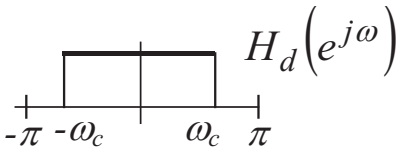
Ejemplo Filtro paso-bajo

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$



Diseño de filtros FIR de fase lineal

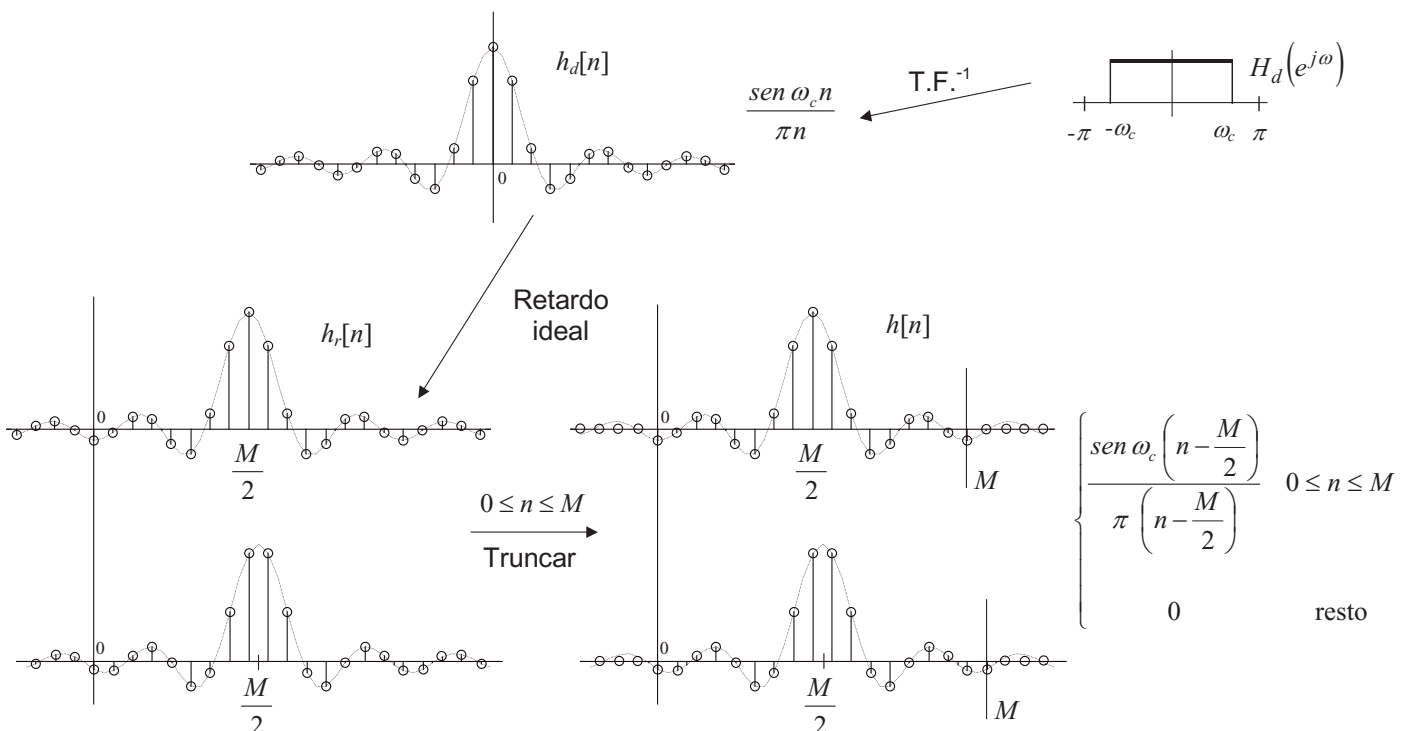
Ejemplo Filtro paso-bajo

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$


Método de enventanado

- $H_d(e^{j\omega})$ del FPB ideal es de fase cero
- Calcular la transformada inversa de $H_d(e^{j\omega}) \rightarrow h_d[n]$
 $h_d[n]$ es simétrica y decreciente con $|n|$
- Añadir un retardo ideal $e^{-j\omega M/2}$ con M entero ($M/2$ entero o entero y medio)
 M entero mantiene la simetría (introduce una fase lineal)
 M suficiente para que $h_r[n]$ sea despreciable para $n < 0$ (y $n > M$)
- Truncar quedándose con valores entre 0 y M (enventanar)
se hace causal
se mantiene la simetría y la fase lineal

Método de enventanado



Diseño de filtros FIR de fase lineal

Método de enventanado

- Calcular la transformada inversa de $H_d(e^{j\omega}) \rightarrow h_d[n]$
- Añadir un retardo ideal $e^{-j\omega M/2}$ con M entero
- Truncar quedándose con valores entre 0 y M (enventanar)

Aproximación

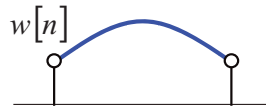
- ¿Aproximación en frecuencia? $H(e^{j\omega}) \leftrightarrow H_d(e^{j\omega})$
- Cuanto mayor M será mejor la aproximación
(truncación elimina menos energía de $h[n]$)
- ¿Cuánto mejor?
→ Efecto en frecuencia de la truncación

Tema 2 Diseño de filtros digitales. Aproximación

- Sistemas FIR de fase lineal
 - Retardo ideal
 - Distorsión de retardo. Sistemas de fase lineal
 - Sistemas de fase lineal generalizada (FLG)
 - Sistemas FIR-FLG
- Diseño de filtros FIR de fase lineal
 - Introducción a la técnica de enventanado
 - Efecto del enventanado sobre la respuesta en frecuencia
 - Diseño con ventana rectangular
 - Uso de ventanas no rectangulares
 - Método de la ventana de Kaiser
 - Filtros óptimos. Método de Parks-McClellan

Enventanado

- Enventanar una señal: multiplicarla por otra de longitud finita (ventana)



- Truncación (0 a M): enventanar con una ventana rectangular

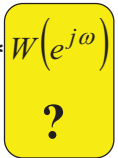
$$h[n] = h_r[n] \cdot w[n]$$

$$w[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

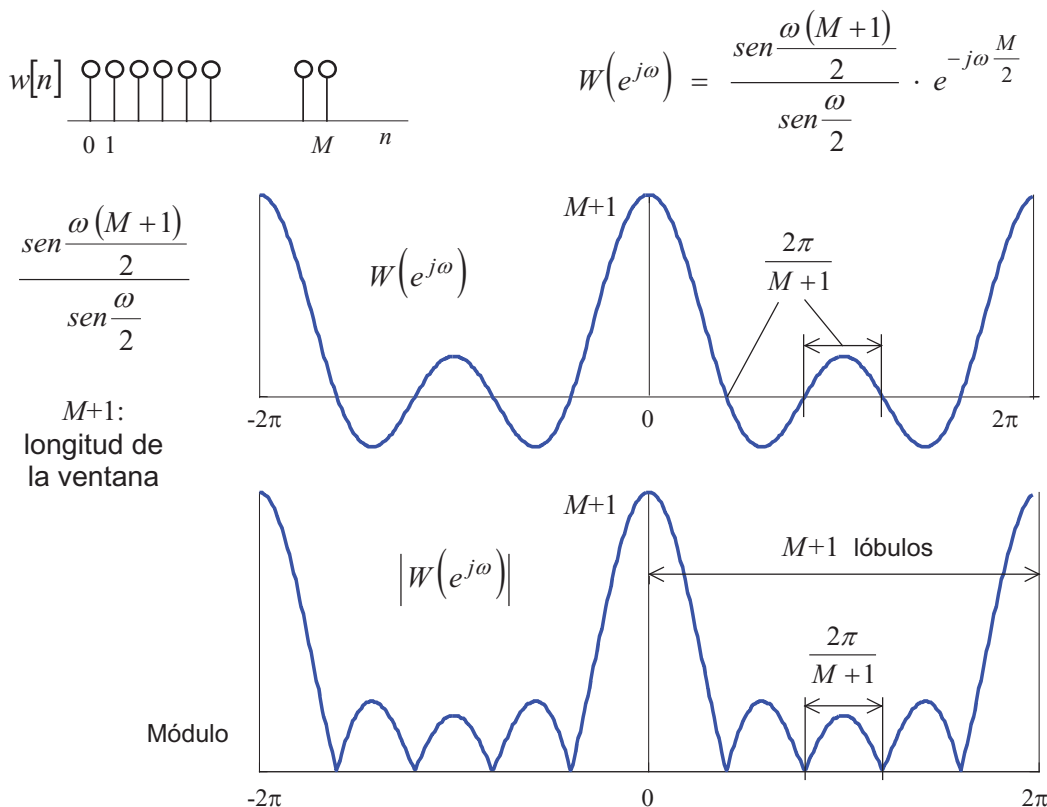
(quedarse con lo que se vé a través de una ventana)

- Enventanado: generalización a ventanas no rectangulares

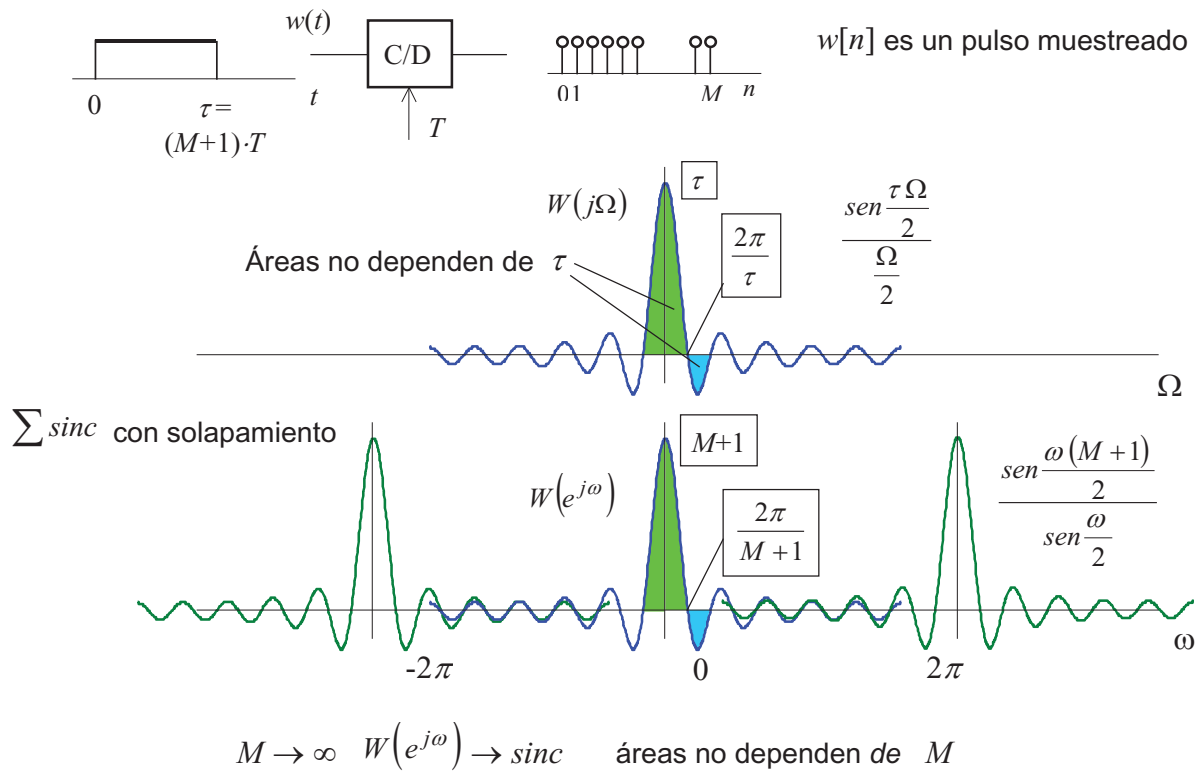
→ Efecto en frecuencia del enventanado: convolución $H(e^{j\omega}) = H_r(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$



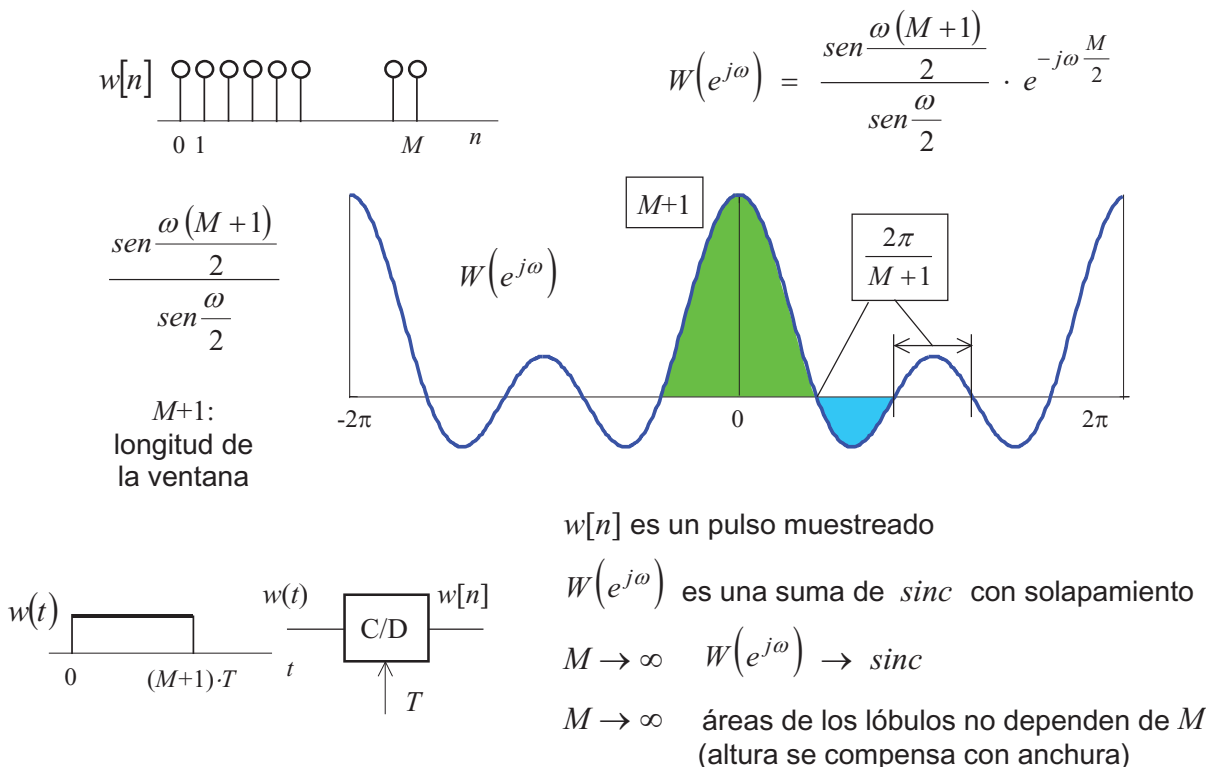
Transformada de Fourier de la ventana rectangular



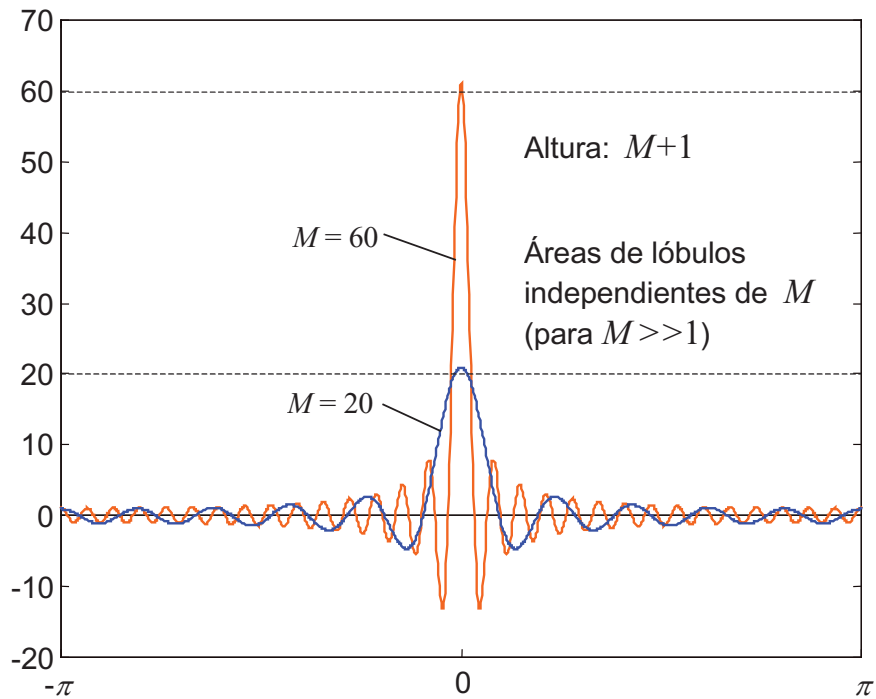
Tranformada de Fourier de la ventana rectangular



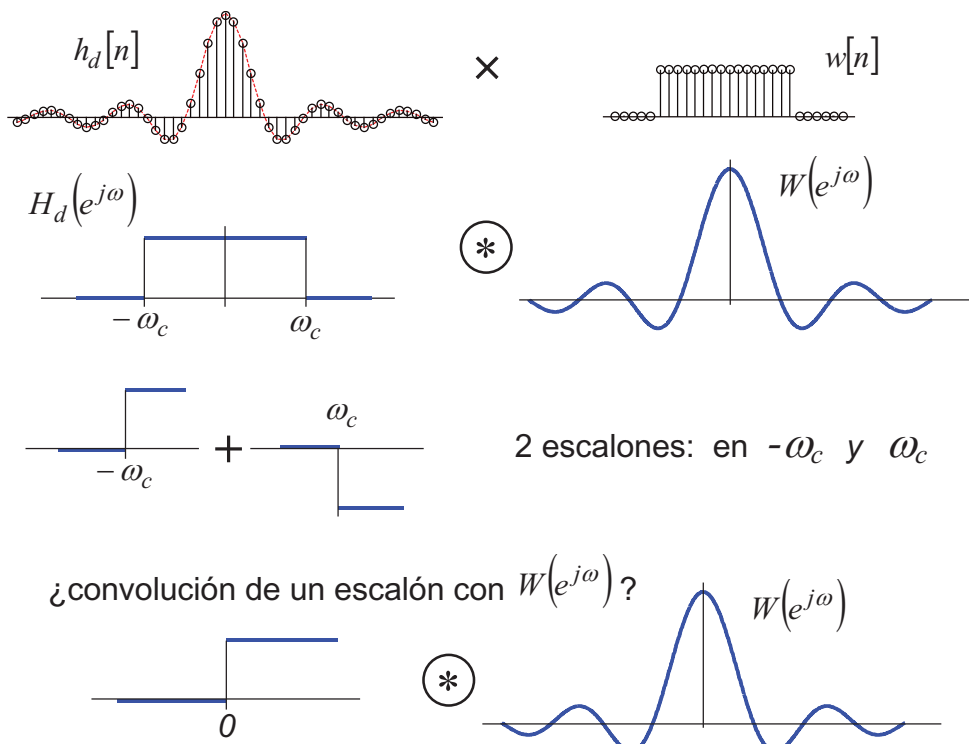
Tranformada de Fourier de la ventana rectangular



Transformada de Fourier de la ventana rectangular



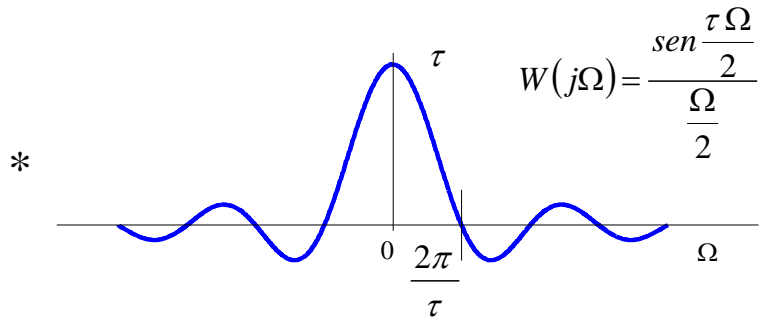
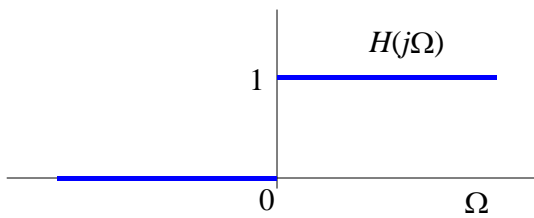
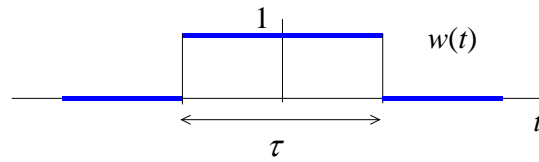
Efecto en frecuencia del inventariado



Convolución

escalón * sinc

(señales continuas $\approx M \gg 1$)



$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\theta) \cdot H(j\Omega - j\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\Omega} W(j\theta) d\theta$$

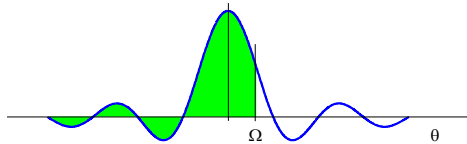
Función integral

$$= \begin{cases} 0 & \theta > \Omega \\ 1 & \theta < \Omega \end{cases}$$

Convolución escalón * sinc

Función integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\Omega} W(j\theta) d\theta$$

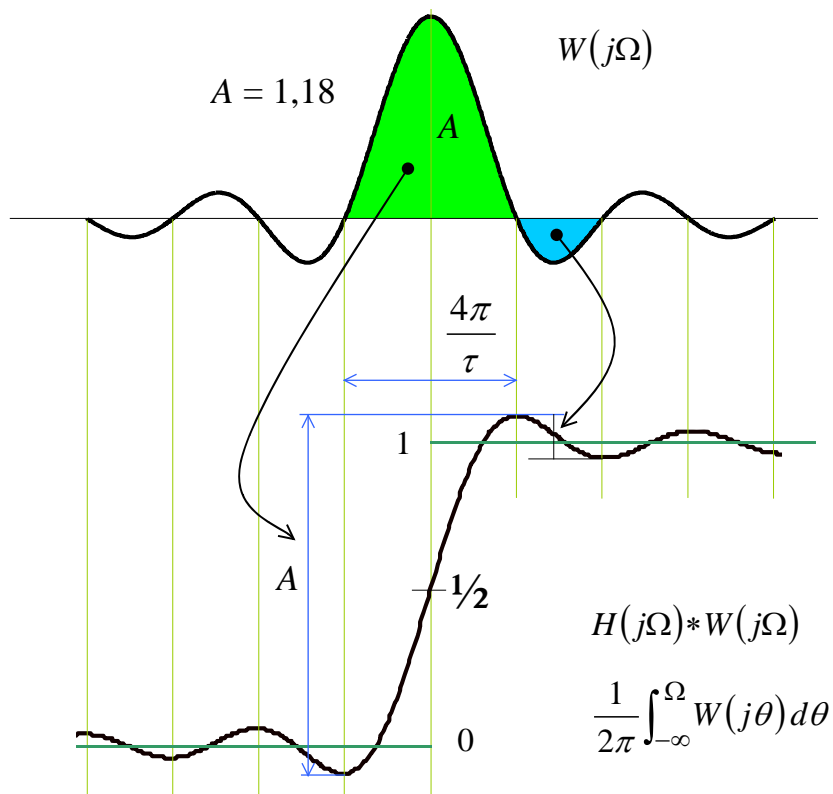


Área total

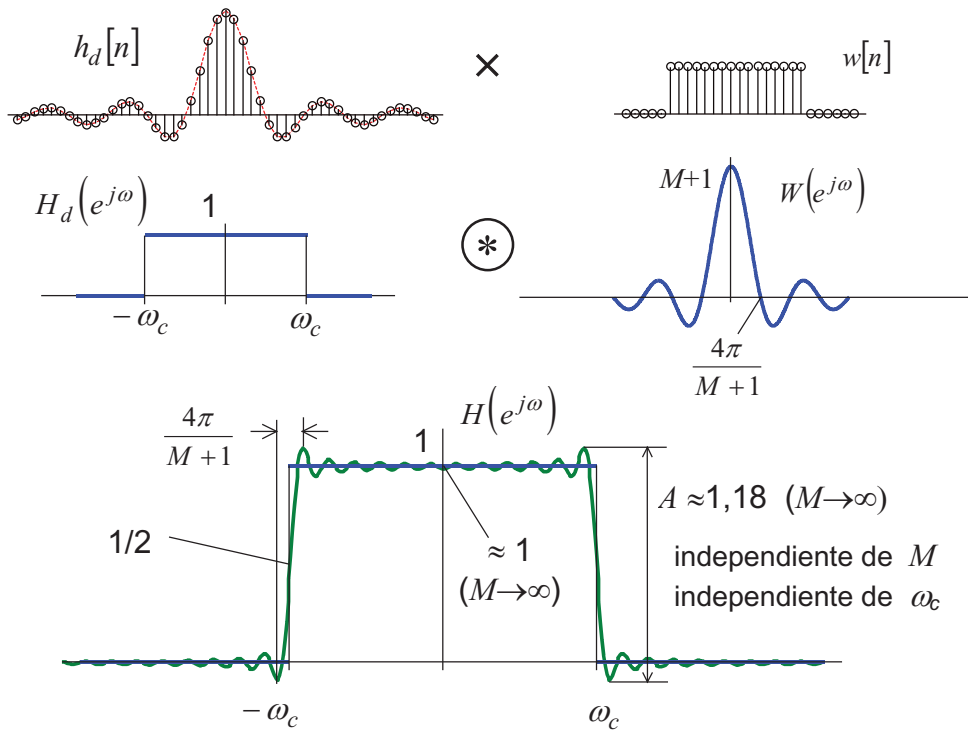
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\theta) d\theta = w(0) = 1$$

Área lóbulo principal $A=1,18$
= diferencia entre máximos

Separación máximos $\Delta\omega = 4\pi/\tau$
= ancho lóbulo principal

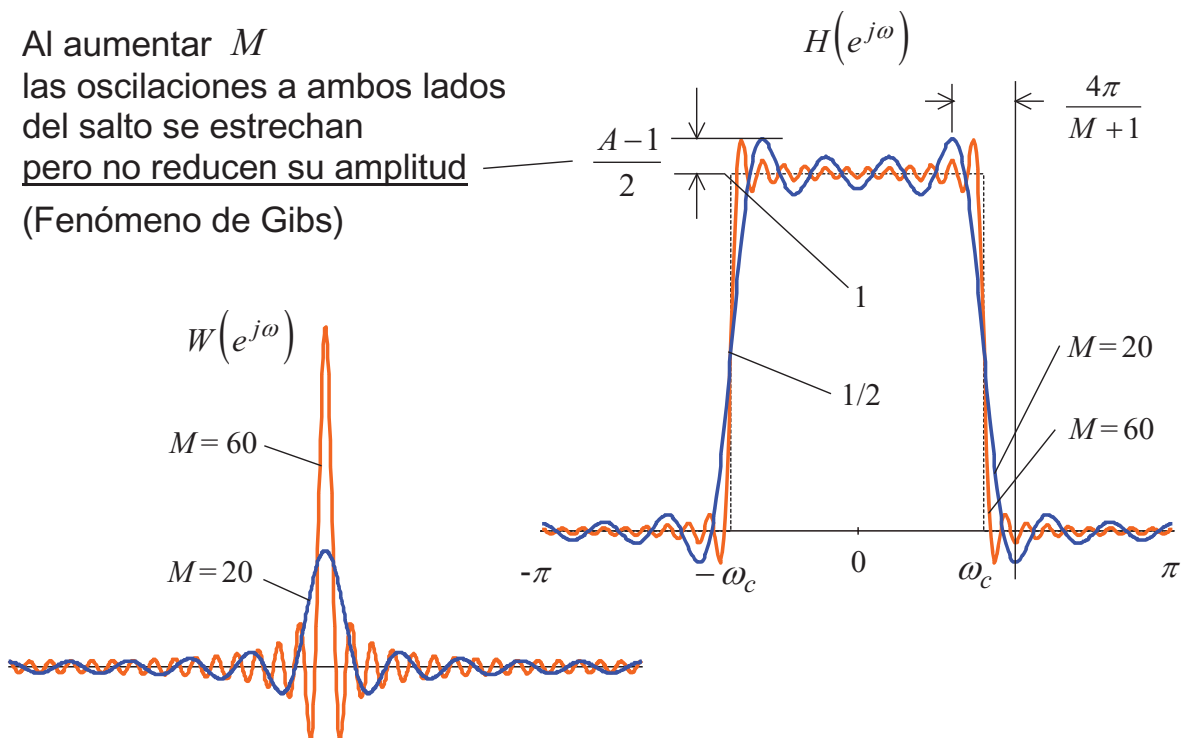


Efecto en frecuencia del inventanado



Efecto en frecuencia del inventanado

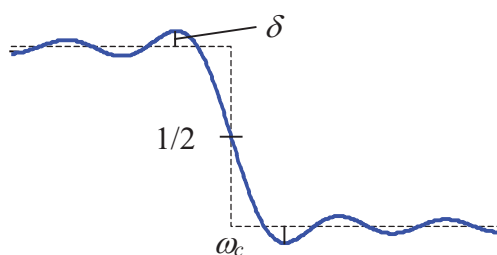
Al aumentar M
 las oscilaciones a ambos lados
 del salto se estrechan
pero no reducen su amplitud
 (Fenómeno de Gibbs)



Tema 2 Diseño de filtros digitales. Aproximación

- Sistemas FIR de fase lineal
 - Retardo ideal
 - Distorsión de retardo. Sistemas de fase lineal
 - Sistemas de fase lineal generalizada (FLG)
 - Sistemas FIR-FLG
- Diseño de filtros FIR de fase lineal
 - Introducción a la técnica de enventanado
 - Efecto del enventanado sobre la respuesta en frecuencia
 - Diseño con ventana rectangular
 - Uso de ventanas no rectangulares
 - Método de la ventana de Kaiser
 - Filtros óptimos. Método de Parks-McClellan

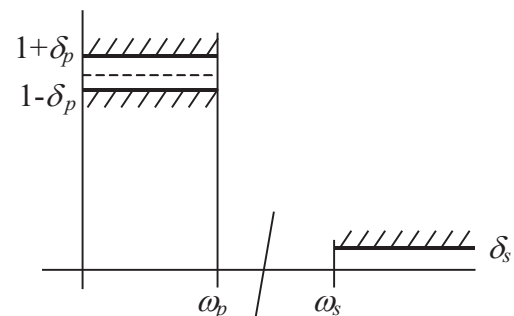
¿Cómo relacionar forma de $H(e^{j\omega})$ con una especificación con tolerancias?



Simetría respecto a $(\omega_c, 1/2)$

$$\text{Máxima oscilación: } \delta = \frac{A-1}{2} = \frac{0,18}{2} = 0,09$$

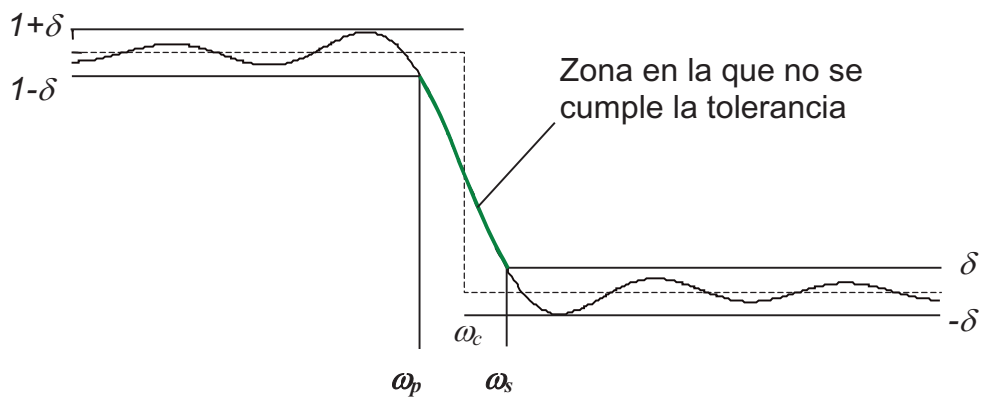
Oscilaciones decrecientes al alejarse de ω_c



Zona de transición
(donde no hay que cumplir)

δ_p y $\delta_s = 0,09$ tolerancia (rizado) igual en ambas bandas
 ω_p y ω_s simétricas respecto a ω_c
(frecuencias en las que la curva $H(e^{j\omega})$ se sale de la tolerancia)

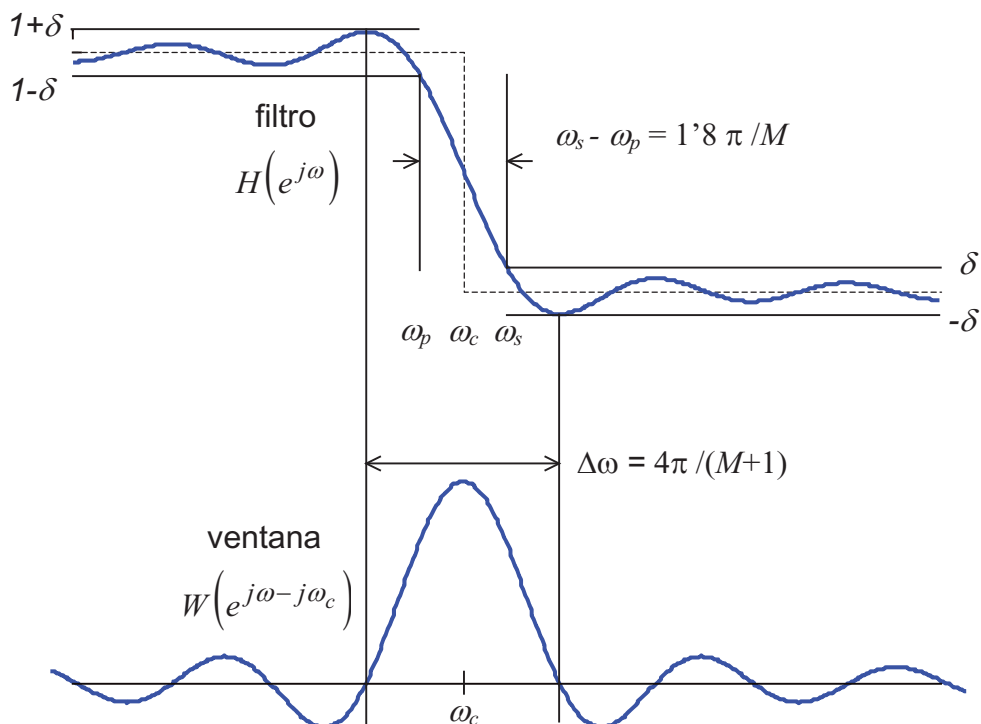
Tolerancias y zona de transición



- Trazar límites de tolerancia ($1+\delta$, $-\delta$)
- Trazar límites simétricos de los anteriores ($1-\delta$, δ)
- Donde corten a $H(e^{j\omega})$ son los límites de la zona de transición (donde no se cumple la tolerancia)

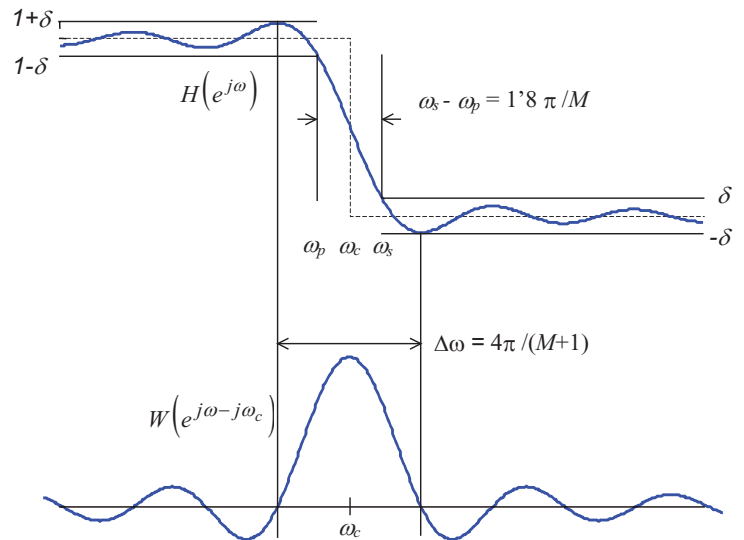
$$\text{simetría} \rightarrow \omega_s - \omega_c = \omega_c - \omega_p = 0,9 \pi / M$$

Tolerancias y zona de transición



Zona de transición

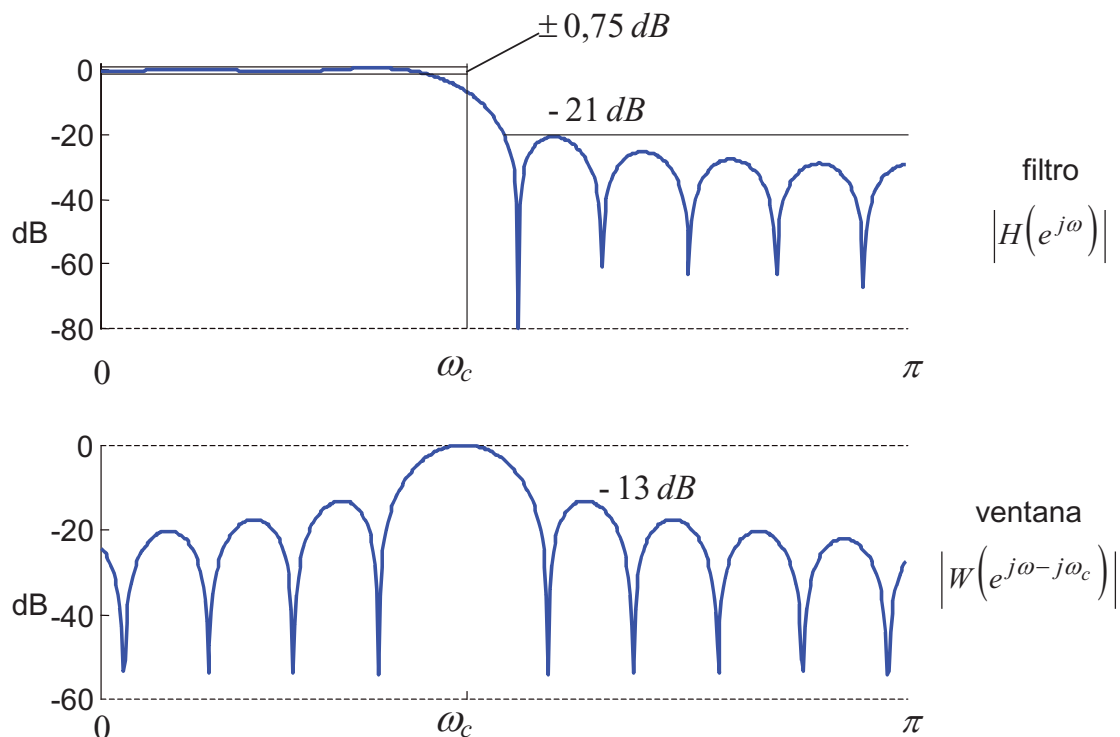
- Simetría respecto a ω_c
- Ancho decrece con M
- Ancho $\omega_s - \omega_p = 1,81 \pi / M$
algo menor que $\Delta\omega = 4\pi / (M+1)$



Rizado

- Siempre el mismo $\delta = 0,09$
- Banda de rechazo: $20\log(\delta) = -21\text{dB}$
menor que atenuación lóbulo secundario de TF de la ventana (-13dB)
- Banda de paso: $20\log\left(\frac{1+\delta}{1}\right) = 0,75\text{dB} \rightarrow \pm 0,75\text{dB}$

Tolerancias y zona de transición (escala logarítmica)

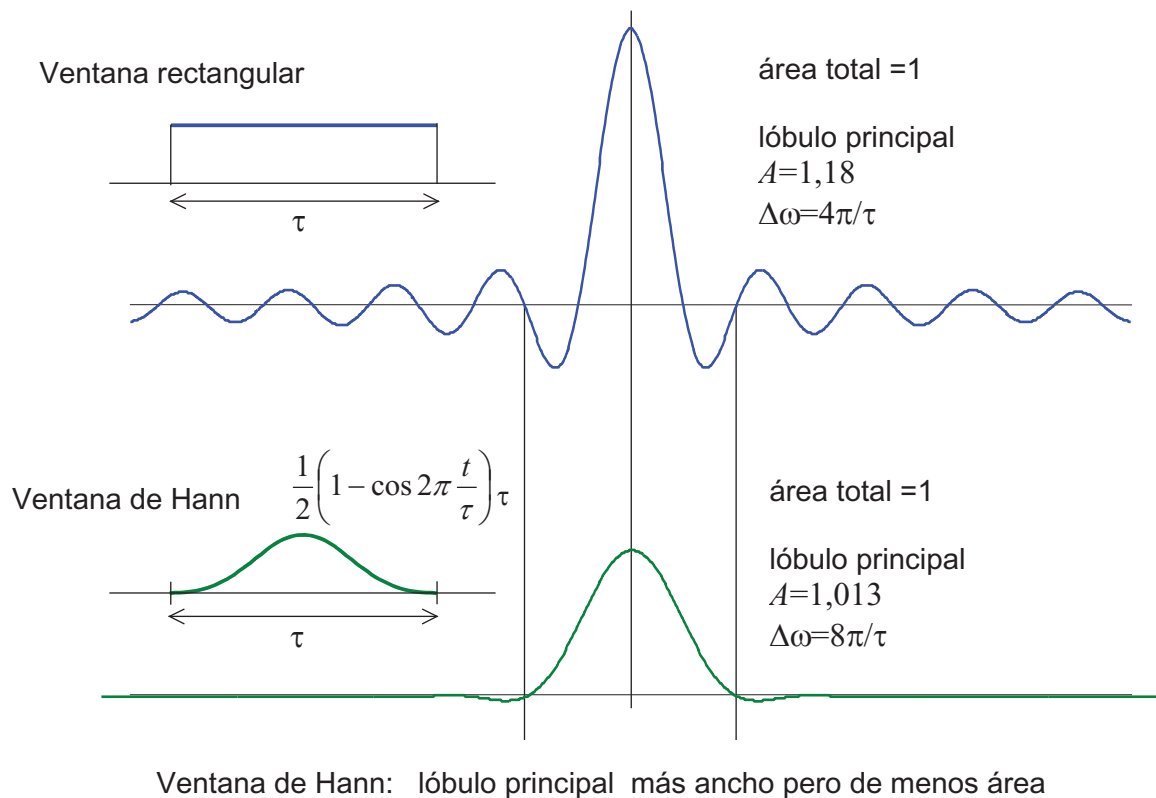


Tema 2 Diseño de filtros digitales. Aproximación

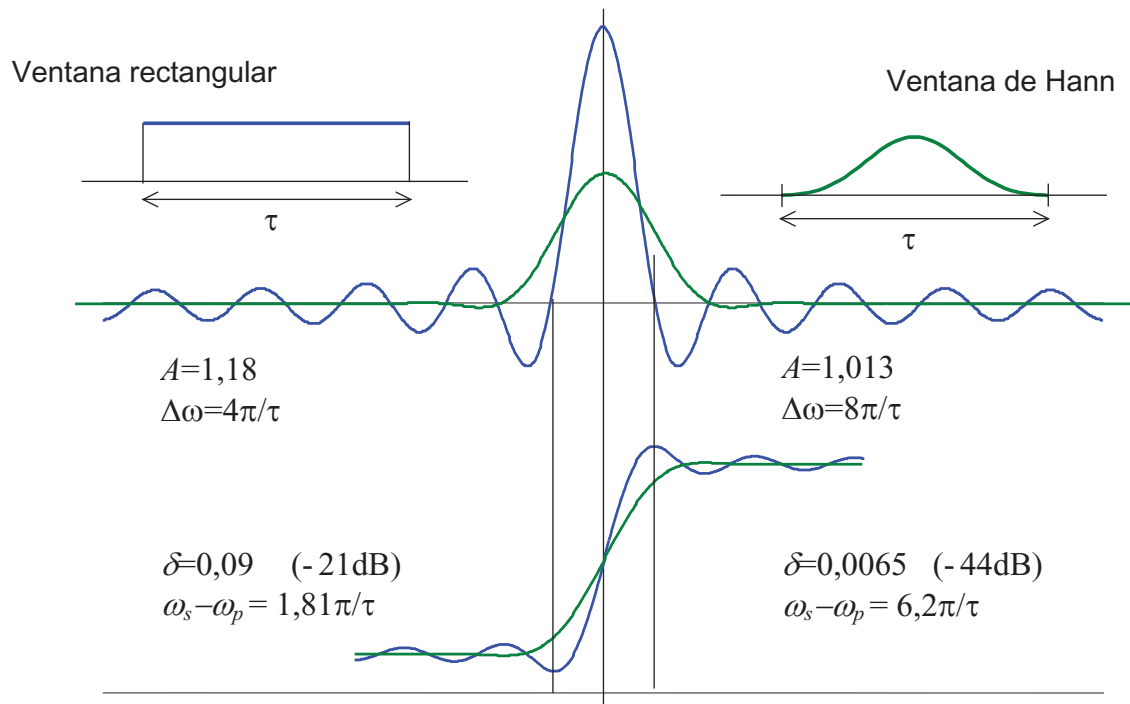
- Sistemas FIR de fase lineal
 - Retardo ideal
 - Distorsión de retardo. Sistemas de fase lineal
 - Sistemas de fase lineal generalizada (FLG)
 - Sistemas FIR-FLG
- Diseño de filtros FIR de fase lineal
 - Introducción a la técnica de enventanado
 - Efecto del enventanado sobre la respuesta en frecuencia
 - Diseño con ventana rectangular
 - Uso de ventanas no rectangulares
 - Método de la ventana de Kaiser
 - Diseño de otros sistemas (no FPB)
 - Filtros óptimos. Método de Parks-McClellan

Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

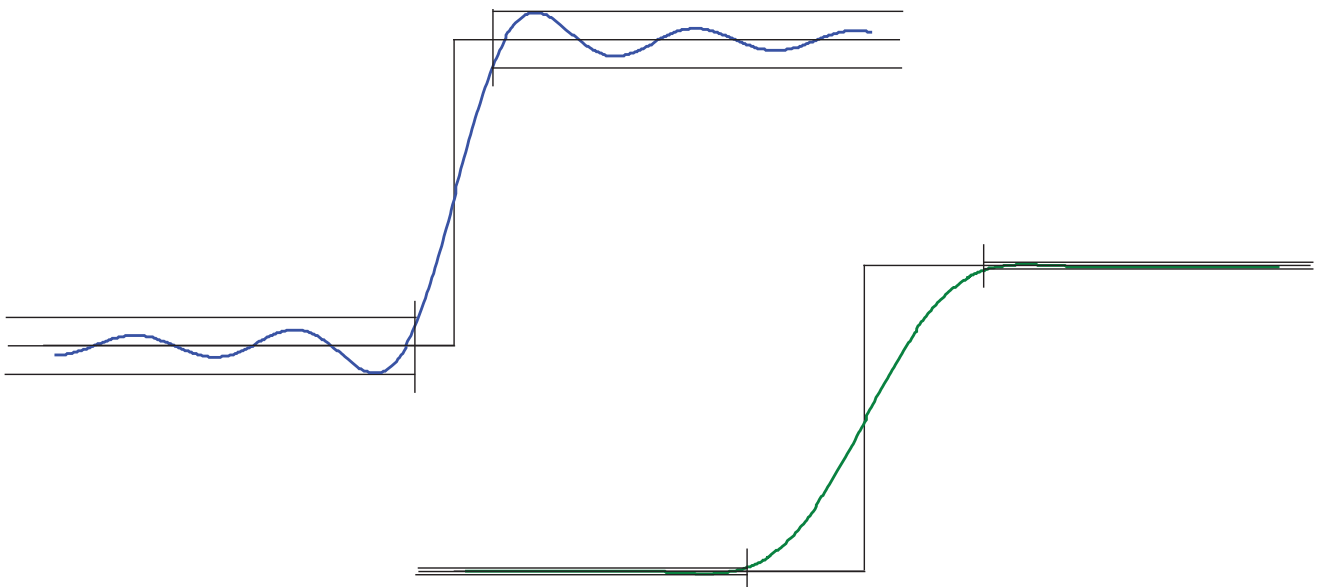
Ventanas no rectangulares



Ventanas no rectangulares



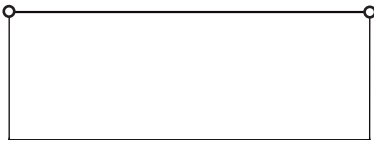
Ventana de Hann: zona de transición más ancha pero menos rizado



Ventana de Hann:

- áreas lóbulos laterales menores → menores oscilaciones
- zona de transición más ancha

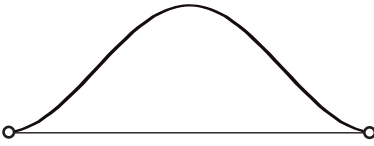
Formas de ventana



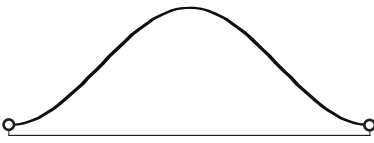
Rectangular $w[n] = 1 \quad 0 \leq n \leq M$



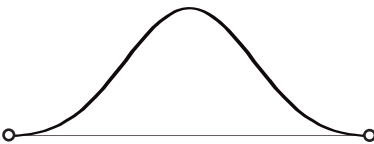
Bartlett $w[n] = \begin{cases} 2n/M & 0 \leq n \leq M/2 \\ 2 - 2n/M & M/2 < n \leq M \end{cases}$



Hann $w[n] = 0,5 - 0,5 \cos(2\pi n / M)$

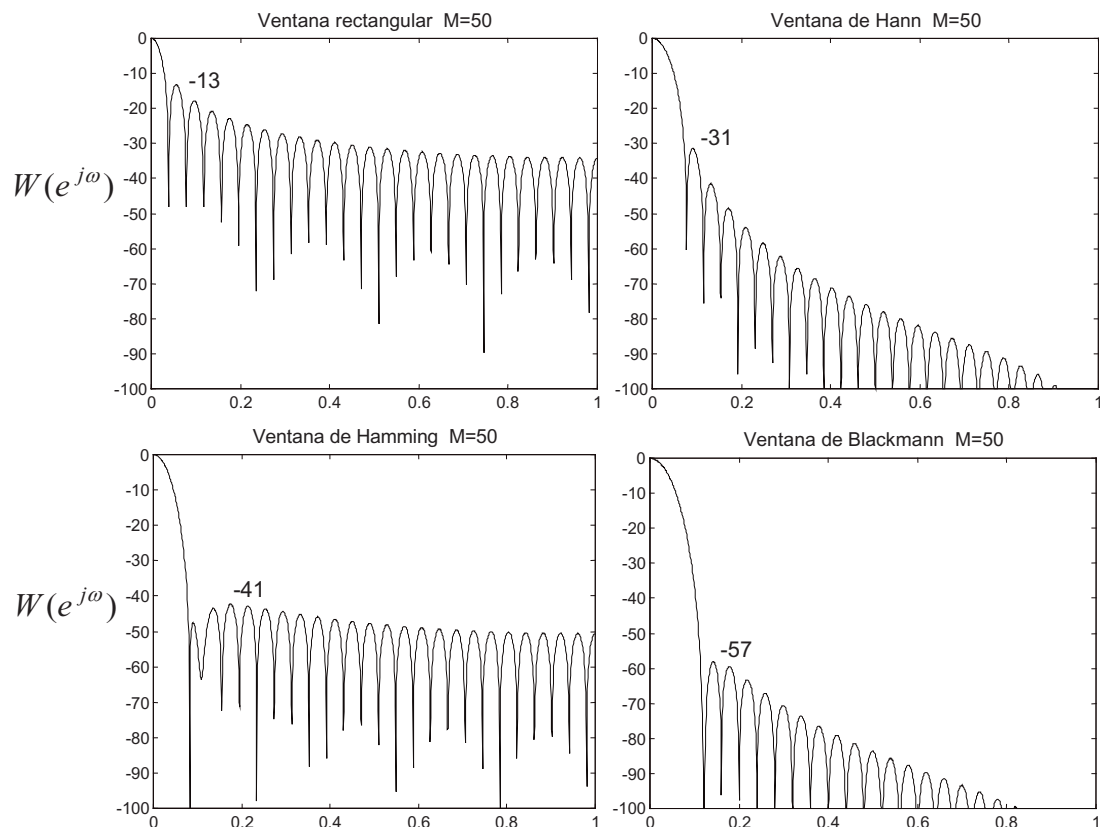


Hamming $w[n] = 0,54 - 0,46 \cos(2\pi n / M)$



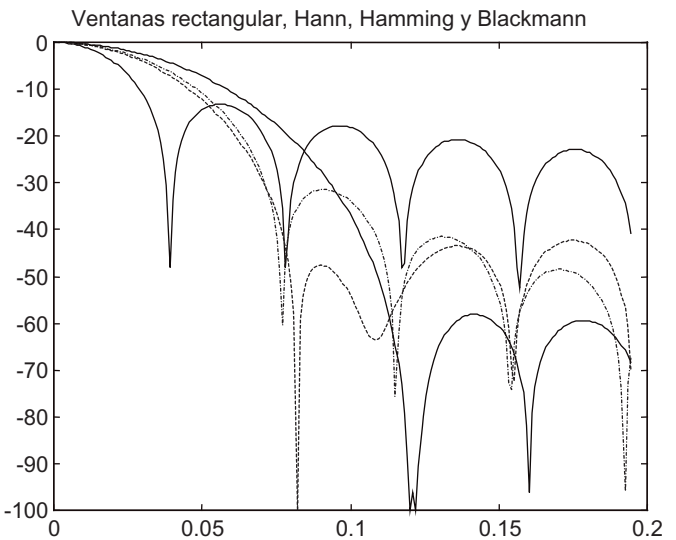
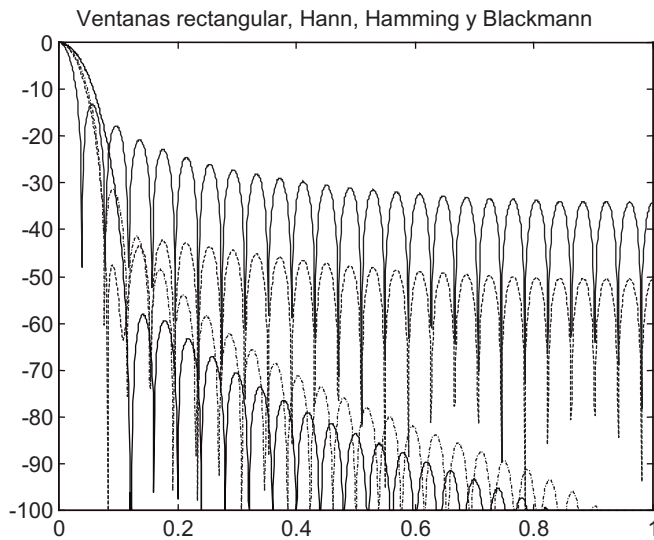
Blackman $w[n] = 0,42 - 0,5 \cos(2\pi n / M) + 0,08 \cos(4\pi n / M)$

Transformada de Fourier de la ventana



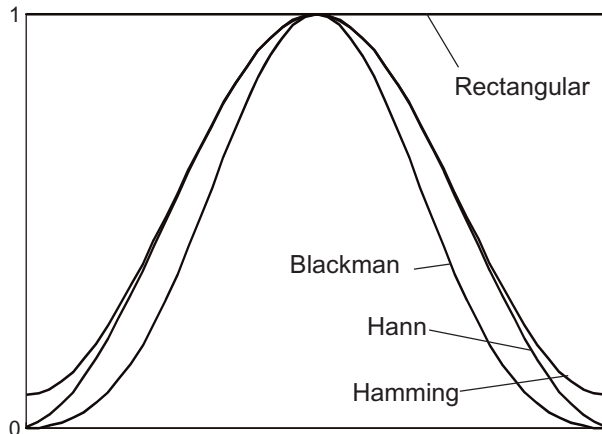
Transformada de Fourier de la ventana

$$W(e^{j\omega})$$



Menores lóbulos secundarios
a costa de mayor ancho del lóbulo principal

Ventanas



Rectangular $w[n] = 1 \quad 0 \leq n \leq M$

Bartlett $w[n] = \begin{cases} 2n/M & 0 \leq n \leq M/2 \\ 2-2n/M & M/2 < n \leq M \end{cases}$

Hamming $w[n] = 0,54 - 0,46 \cos(2\pi n/M)$

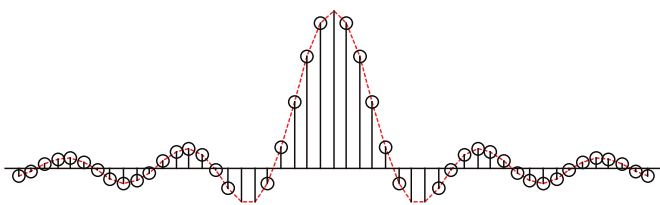
Hanning $w[n] = 0,5 - 0,5 \cos(2\pi n/M)$

Blackman $w[n] = 0,42 - 0,5 \cos(2\pi n/M) + 0,08 \cos(4\pi n/M)$

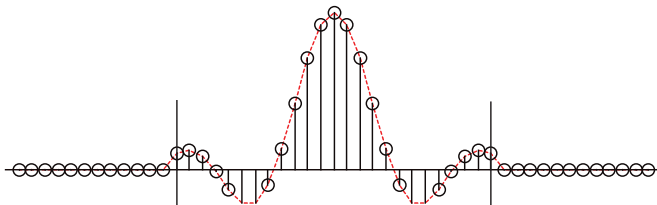
Tipo	Ventana	
	Anchura lóbulo principal $\Delta\omega$	Atenuación lóbulo secundario α (dB)
Rectangular	$4\pi/(M+1)$	13
Bartlett	$8\pi/M$	25
Hanning	$8\pi/M$	31
Hamming	$8\pi/M$	41
Blackman	$12\pi/M$	57

menores lóbulos secundarios
a costa de
mayor ancho del lóbulo principal

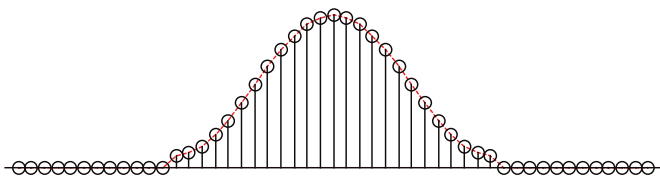
Filtro paso-bajo ideal $\omega_c=0.3 \pi$ $h[n]$



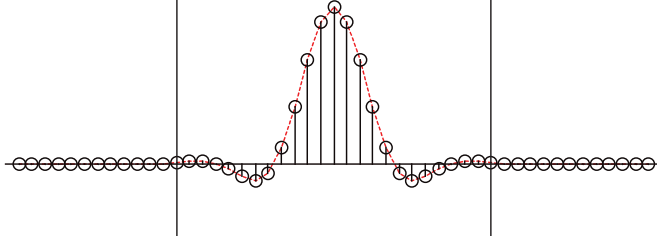
$h[n]*w[n]$ (rectangular $M=24$)



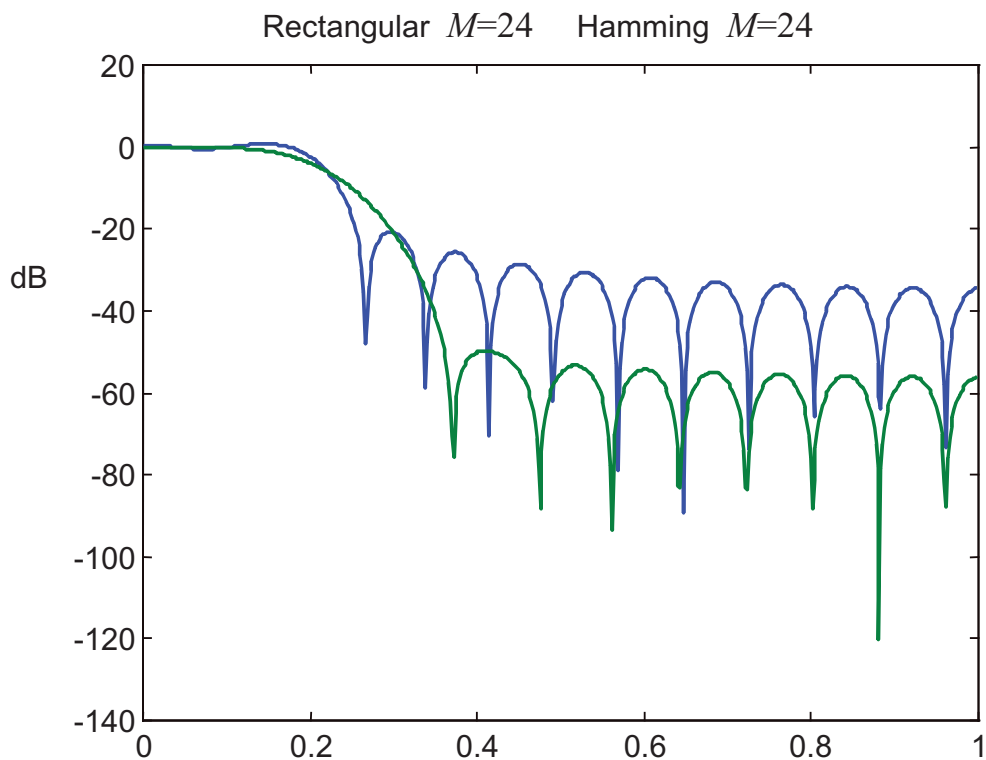
Ventana de Hamming $M=24$



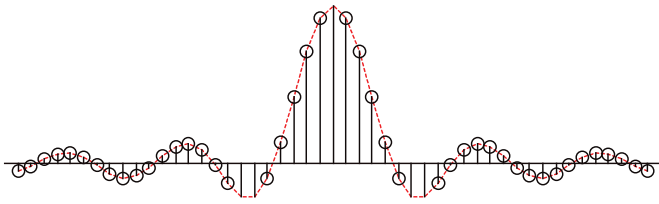
$h[n]*w[n]$ (Hamming $M=24$)



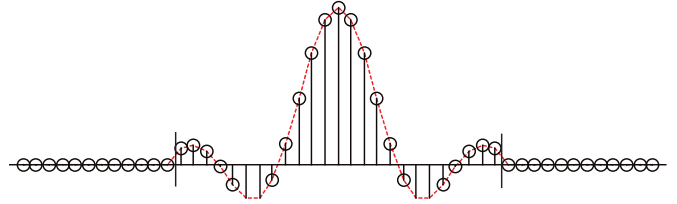
Filtro paso bajo



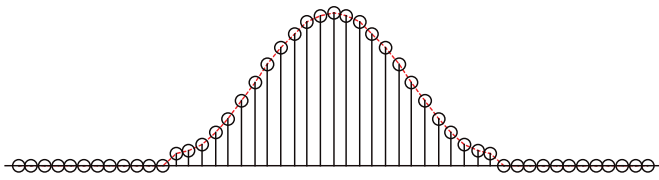
Filtro paso-bajo ideal $\omega_c=0.3 \pi$ $h[n]$



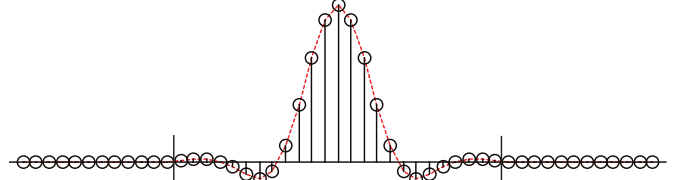
$h[n]*w[n]$ (rectangular $M=24$)



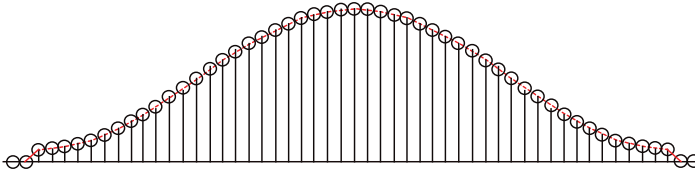
Ventana de Hamming $M=24$



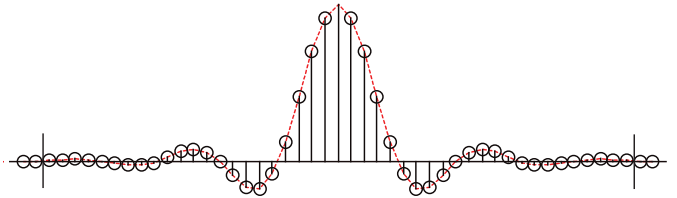
$h[n]*w[n]$ (Hamming $M=24$)



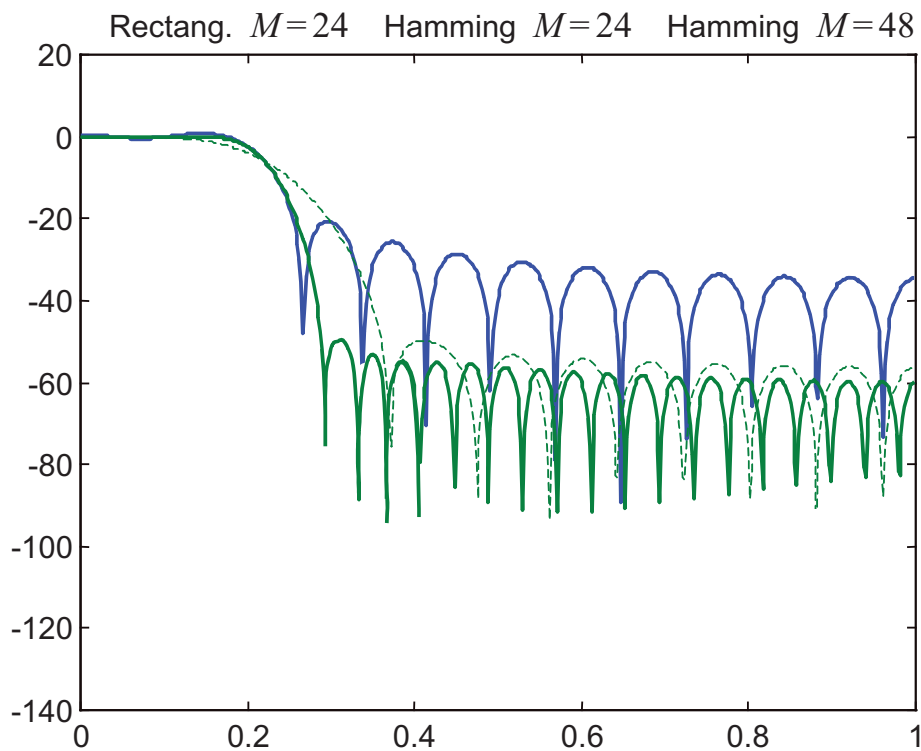
Ventana de Hamming $M=48$



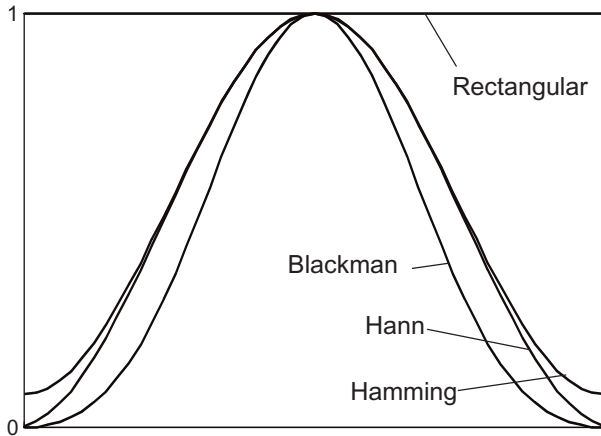
$h[n]*w[n]$ (Hamming $M=48$)



Filtro paso bajo



Ventanas



Rectangular $w[n] = 1 \quad 0 \leq n \leq M$

Bartlett $w[n] = \begin{cases} 2n/M & 0 \leq n \leq M/2 \\ 2-2n/M & M/2 < n \leq M \end{cases}$

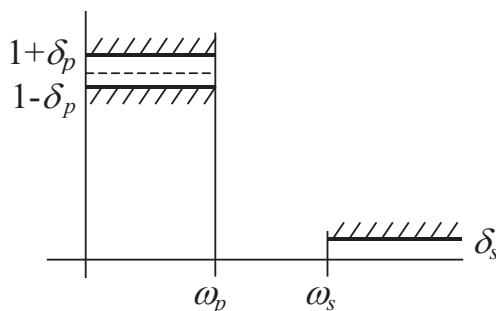
Hamming $w[n] = 0,54 - 0,46 \cos(2\pi n/M)$

Hanning $w[n] = 0,5 - 0,5 \cos(2\pi n/M)$

Blackman $w[n] = 0,42 - 0,5 \cos(2\pi n/M) + 0,08 \cos(4\pi n/M)$

Tipo	Ventana		Filtro FIR	
	Anchura lóbulo principal $\Delta\omega$	Atenuación lóbulo secundario α (dB)	Anchura zona de transición $\omega_s - \omega_p$	Rizado $A = -20 \log_{10} \delta$
Rectangular	$4\pi / (M+1)$	13	$1,81\pi / M$	21
Bartlett	$8\pi / M$	25		
Hanning	$8\pi / M$	31	$6,2\pi / M$	44
Hamming	$8\pi / M$	41	$6,6\pi / M$	53
Blackman	$12\pi / M$	57	$11\pi / M$	74

Diseño



$$\delta = \min(\delta_p, \delta_s) \rightarrow A = -20 \log_{10} \delta$$

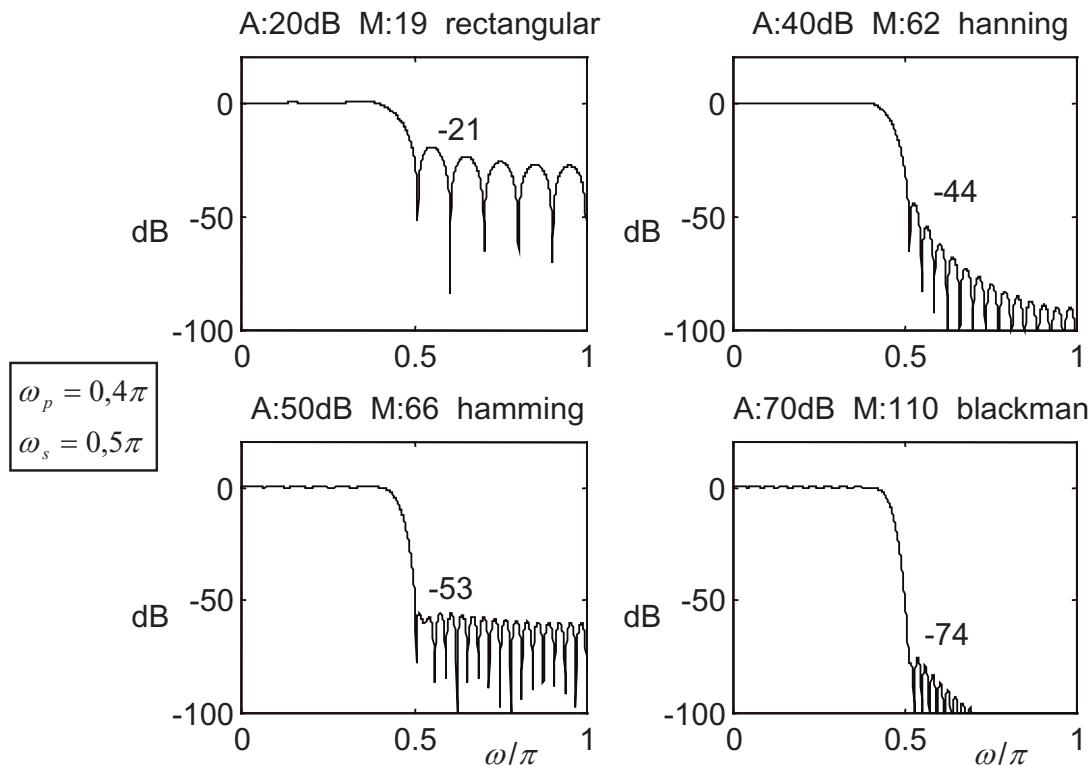
$$\omega_s - \omega_p$$

- Rizado $A \rightarrow$ forma de ventana $w[n]$
- Ventana: expresión ancho zona de transición = $(\omega_s - \omega_p) \rightarrow$ orden M (entero)
- Centro de la zona de transición $\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_s}{2}$

Respuesta al impulso

$$h[n] = \frac{\text{sen } \omega_c \left(n - \frac{M}{2} \right)}{\pi \left(n - \frac{M}{2} \right)} \cdot w[n]$$

Ejemplo

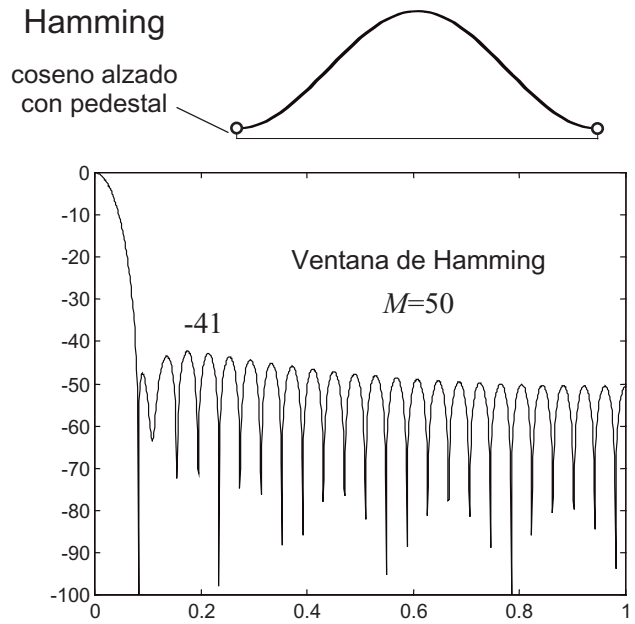
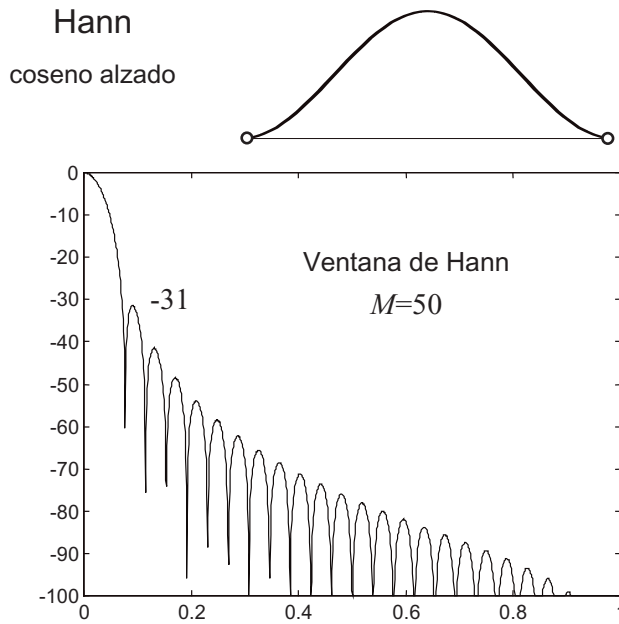


Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

Tema 2 Diseño de filtros digitales. Aproximación

- Sistemas FIR de fase lineal
 - Retardo ideal
 - Distorsión de retardo. Sistemas de fase lineal
 - Sistemas de fase lineal generalizada (FLG)
 - Sistemas FIR-FLG
- Diseño de filtros FIR de fase lineal
 - Introducción a la técnica de enventanado
 - Efecto del enventanado sobre la respuesta en frecuencia
 - Diseño con ventana rectangular
 - Uso de ventanas no rectangulares
 - Método de la ventana de Kaiser
 - Diseño de otros sistemas (no FPB)
 - Filtros óptimos. Método de Parks-McClellan

Ventanas óptimas

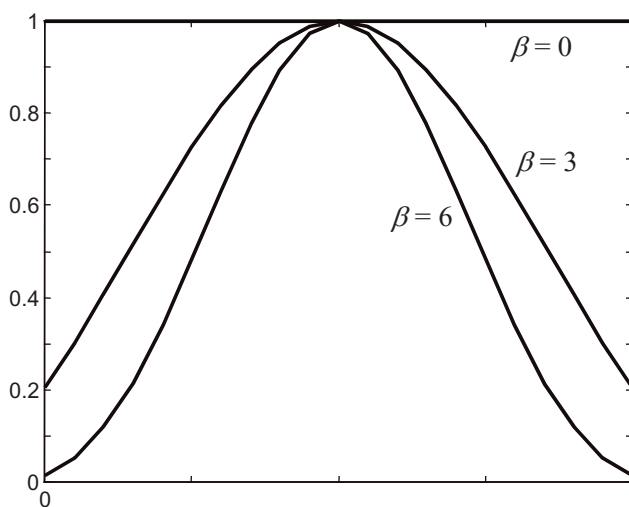


- La dos tiene igual ancho de lóbulo principal $\Delta\omega$
- Hamming: menor (max) lóbulo secundario (a costa de forma más complicada)
- ¿Existe otra forma de ventana con (max) lóbulo secundario aún menor?

Ventana óptima de Kaiser

¿Puede encontrarse una ventana óptima?

Dado un ancho de lóbulo principal $\Delta\omega \leftrightarrow$ ventana con *min* (*max*) lóbulo secundario



Ventana de Kaiser

$$w[n] = \frac{I_0\left(\beta\sqrt{1-(1-2n/M)^2}\right)}{I_0(\beta)} \quad 0 \leq n \leq M$$

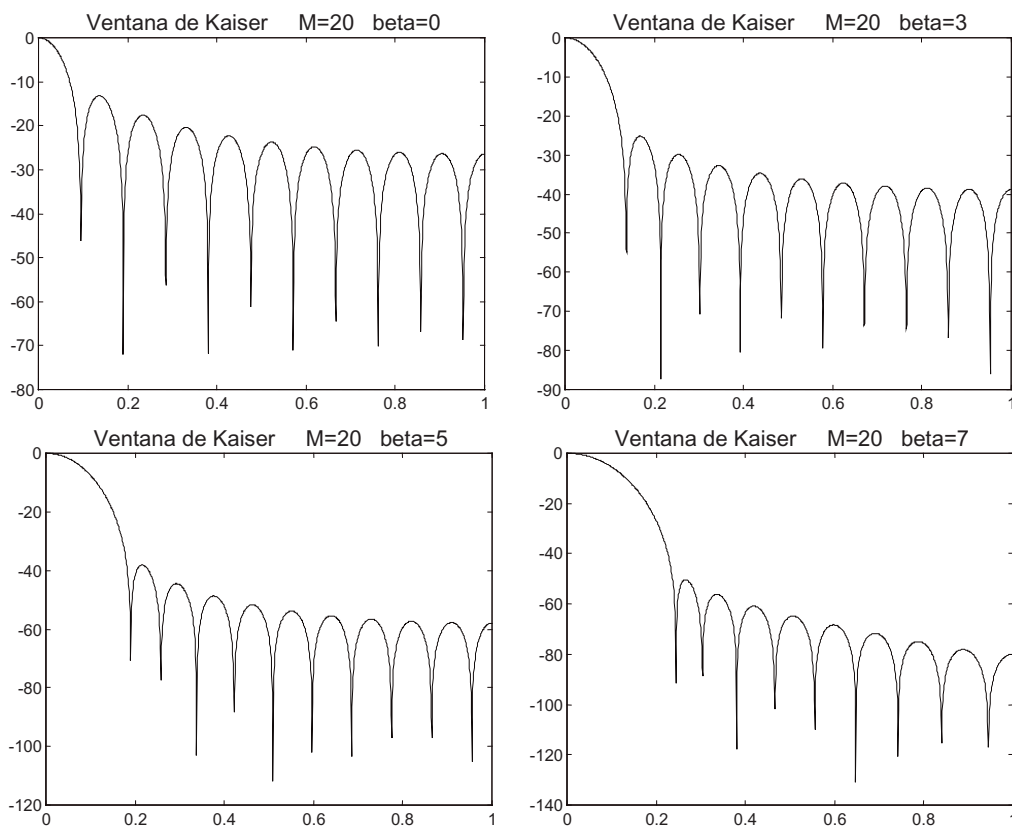
I_0 : Función de Bessel modificada de 1ª especie, de orden 0

Dos parámetros:

M : orden ($M+1$): longitud
 β : parámetro de forma

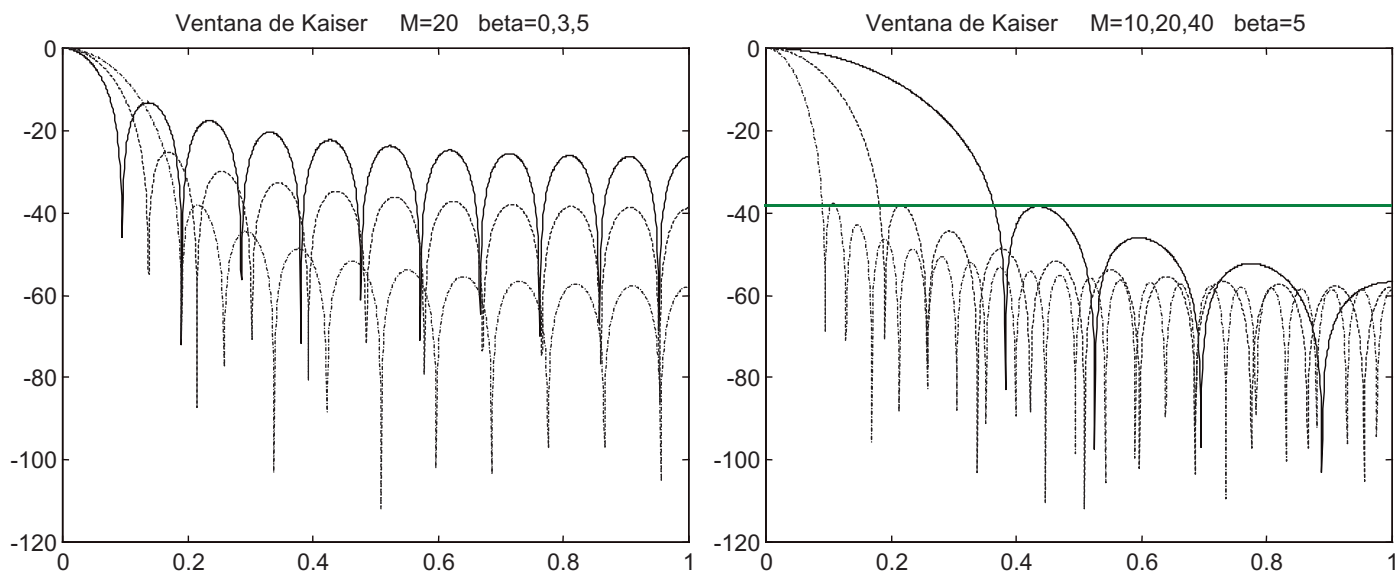
Ajustando β se pueden conseguir ventanas similares a las anteriores

Ventana óptima de Kaiser



Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

Ventana óptima de Kaiser



Ajustando β se intercambia:

- ancho lóbulo principal con
- atenuación lóbulo secundario

β constante:

- atenuación lóbulos secundarios no varía
- variando M se puede ajustar $\Delta\omega$

Filtros FIR con la ventana de Kaiser

Factor de forma	β	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anchura zona de transición	$\omega_s - \omega_p$ ($\times 2\pi / M$)	1,5	2	2,6	3,2	3,8	4,5	5,1	5,7	6,4
Rizado	$A = -20 \log_{10} \delta$	29	37	45	54	63	72	81	90	99

Tipo	Filtro FIR		Kaiser
	Anchura de la zona de transición $\omega_s - \omega_p$	Rizado $A(\text{dB}) = -20 \log \delta$	β para igual rizado
Rectangular	$1,81\pi/M$	21	0
Hanning	$6,2\pi/M$	44	3,86
Hamming	$6,6\pi/M$	53	4,86
Blackman	$11\pi/M$	74	7,04

Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

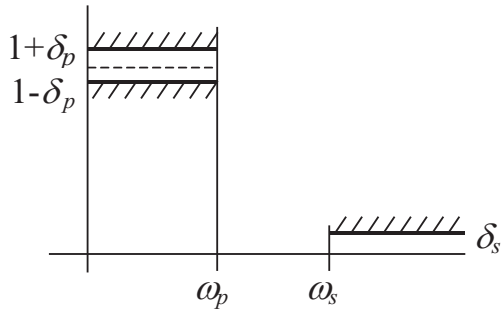
Filtros FIR con la ventana de Kaiser

Factor de forma	β	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anchura zona de transición	$\omega_s - \omega_p$ ($\times 2\pi / M$)	1,5	2	2,6	3,2	3,8	4,5	5,1	5,7	6,4
Rizado	$A = -20 \log_{10} \delta$	29	37	45	54	63	72	81	90	99

Tipo	Filtro FIR		Kaiser	
	Anchura de la zona de transición $\omega_s - \omega_p$	Rizado $A(\text{dB}) = -20 \log \delta$	β para igual rizado	Anchura de la zona de transición $\omega_s - \omega_p$
Rectangular	$1,81\pi/M$	21	0	$1,81\pi/M$
Hanning	$6,2\pi/M$	44	3,86	$5,01\pi/M$
Hamming	$6,6\pi/M$	53	4,86	$6,27\pi/M$
Blackman	$11\pi/M$	74	7,04	$9,19\pi/M$

Para igual rizado: con ventana de Kaiser → zona de transición más estrecha

Diseño con la ventana de Kaiser



$$\delta = \min(\delta_p, \delta_s) \rightarrow A = -20 \log_{10} \delta$$

$$\omega_s - \omega_p$$

- Rizado $A \rightarrow$ forma de ventana (β)
- Ventana: $\beta \rightarrow$ expresión ancho zona de transición = $(\omega_s - \omega_p) \rightarrow$ orden M
- Centro de la zona de transición $\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_s}{2}$

Respuesta al impulso

$$0 \leq n \leq M$$

$$h[n] = \frac{\text{sen } \omega_c \left(n - \frac{M}{2} \right)}{\pi \left(n - \frac{M}{2} \right)} \cdot w[n]$$

con

$$w[n] = \frac{I_0 \left(\beta \sqrt{1 - \left(1 - 2n/M \right)^2} \right)}{I_0(\beta)}$$

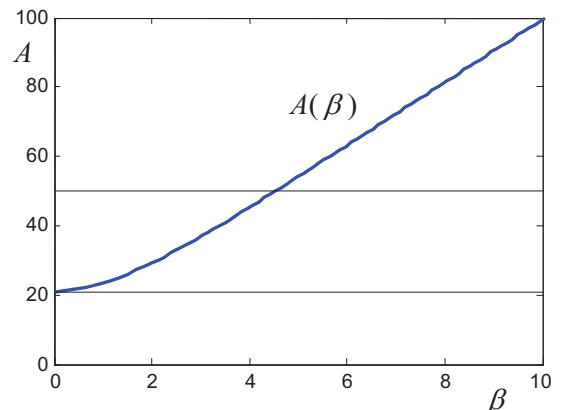
Diseño con la ventana de Kaiser

Factor de forma	β	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anchura zona de transición	$\frac{\omega_s - \omega_p}{\times 2\pi / M}$	1,5	2	2,6	3,2	3,8	4,5	5,1	5,7	6,4
Rizado	$A = -20 \log_{10} \delta$	29	37	45	54	63	72	81	90	99

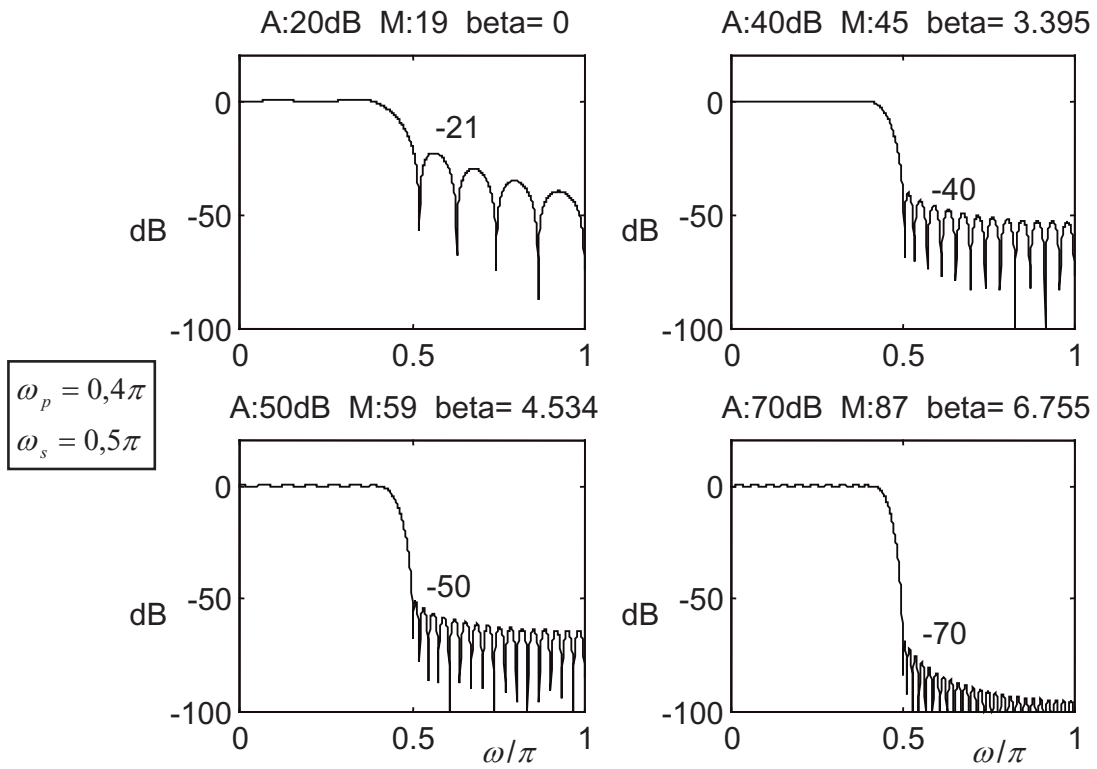
Fórmulas de Kaiser Permiten ajustar mejor β al rizado

$$\beta = \begin{cases} 0,1102(A - 8,7) & A \geq 50 \\ 0,5842(A - 21)^{0,4} + 0,07886(A - 21) & 21 < A < 50 \\ 0 & A \leq 21 \end{cases}$$

$$M = \frac{A - 8}{2,285(\omega_s - \omega_p)} \quad (A \geq 21)$$

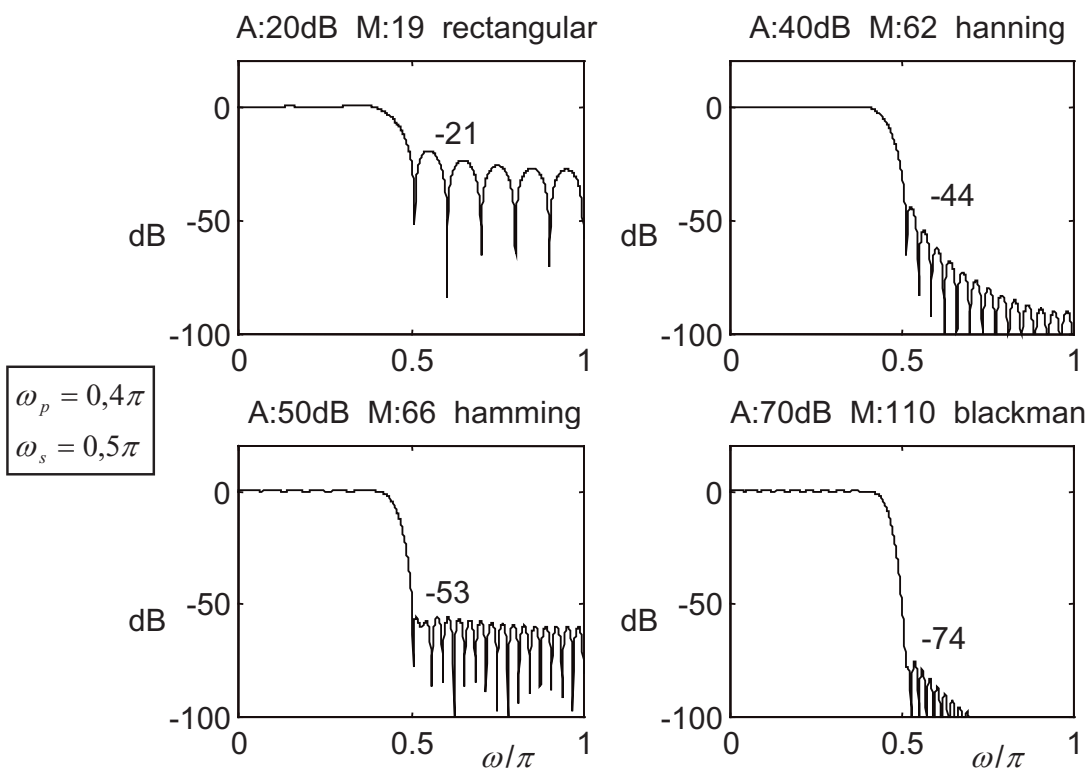


Ejemplo



Menor M que con ventanas clásicas: menor $(\omega_s - \omega_p) \cdot M$ y mejor ajuste de forma a rizado

Ejemplo



Tema 2 Diseño de filtros digitales. Aproximación

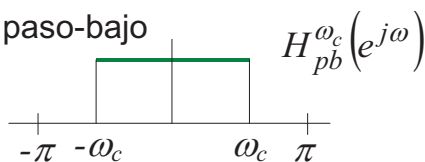
- Sistemas FIR de fase lineal
 - Retardo ideal
 - Distorsión de retardo. Sistemas de fase lineal
 - Sistemas de fase lineal generalizada (FLG)
 - Sistemas FIR-FLG

- Diseño de filtros FIR de fase lineal
 - Introducción a la técnica de enventanado
 - Efecto del enventanado sobre la respuesta en frecuencia
 - Diseño con ventana rectangular
 - Uso de ventanas no rectangulares
 - Método de la ventana de Kaiser
 - Diseño de otros sistemas (no FPB)
 - Filtros óptimos. Método de Parks-McClellan

Diseño con enventanado

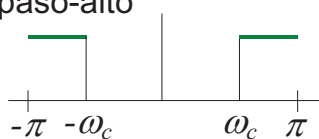
$$\begin{array}{ccccc}
 H_d(e^{j\omega}) & \rightarrow & h_r[n] = T.F.^{-1} \left\{ H_d(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\omega \frac{M}{2}} \right\} & \rightarrow & h[n] = h_r[n] \cdot w[n] \\
 \text{deseada} & & \text{retardada} & & \text{enventanada}
 \end{array}$$

Filtro paso-bajo



$$h_r[n] = \frac{\text{sen } \omega_c(n - \alpha)}{\pi(n - \alpha)} \quad \alpha = \frac{M}{2}$$

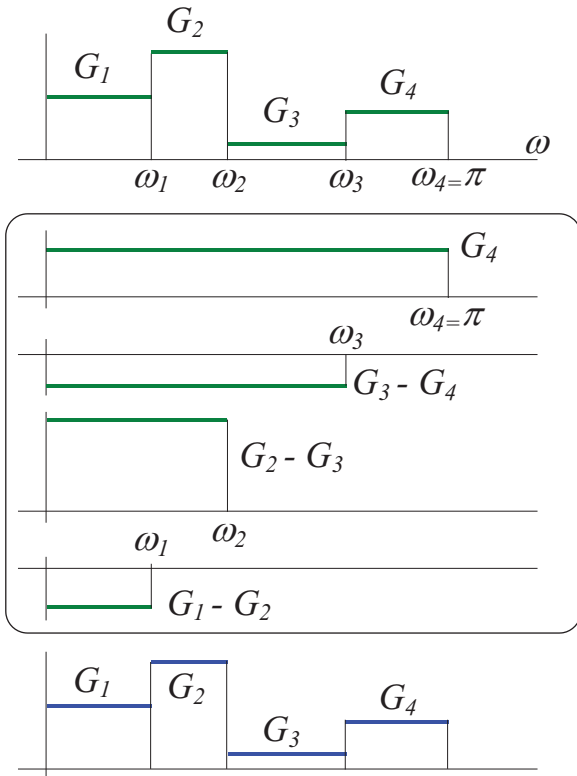
Filtro paso-alto



$$H_d(e^{j\omega}) = 1 - H_{pb}^{\omega_c}(e^{j\omega}) = H_{pb}^{\pi}(e^{j\omega}) - H_{pb}^{\omega_c}(e^{j\omega})$$

$$\begin{aligned}
 h_r[n] &= \frac{\text{sen } \pi(n - \alpha)}{\pi(n - \alpha)} - \frac{\text{sen } \omega_c(n - \alpha)}{\pi(n - \alpha)} \quad \alpha = \frac{M}{2} \\
 &= \delta[n - \alpha] \quad \text{sólo si } \alpha \text{ entero (} M \text{ par)}
 \end{aligned}$$

Diseño de filtros multibanda



$$H_d(e^{j\omega}) = G_4 \cdot H_{pb}^{\omega_4}(e^{j\omega}) + (G_3 - G_4) \cdot H_{pb}^{\omega_3}(e^{j\omega}) + (G_2 - G_3) \cdot H_{pb}^{\omega_2}(e^{j\omega}) + (G_1 - G_2) \cdot H_{pb}^{\omega_1}(e^{j\omega})$$

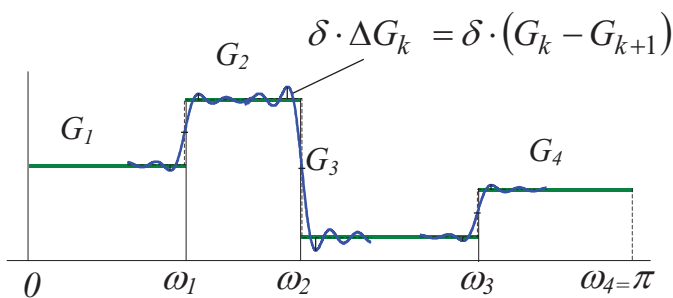
Para N bandas

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{k=1}^N (G_k - G_{k+1}) \cdot H_{pb}^{\omega_k}(e^{j\omega})$$

con $G_{N+1} = 0$ y $\omega_N = \pi$

$$h_r[n] = \sum_{k=1}^N (G_k - G_{k+1}) \cdot \frac{\text{sen } \omega_k (n - \alpha)}{\pi (n - \alpha)}$$

Diseño de filtros multibanda



$$h_r[n] = \sum_{k=1}^N (G_k - G_{k+1}) \cdot \frac{\text{sen } \omega_k (n - \alpha)}{\pi (n - \alpha)}$$

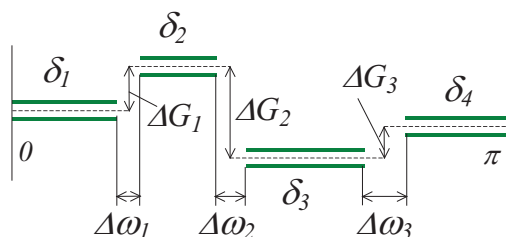
$$h[n] = h_r[n] \cdot w[n]$$

Rizados

- iguales a ambos lados de cada salto
- proporcionales al salto ΔG_k
- Si $M \gg 1$ no influyen en otras bandas

Diseño

- El menor rizado en proporción al salto
- La zona de transición más estrecha



$$\delta = \min \left(\frac{\delta_1}{\Delta G_1}, \frac{\delta_2}{\Delta G_1}, \frac{\delta_2}{\Delta G_2}, \frac{\delta_3}{\Delta G_2}, \frac{\delta_3}{\Delta G_3}, \frac{\delta_4}{\Delta G_3} \right) \rightarrow \text{ventana}$$

$$\Delta \omega = \min(\Delta \omega_k) \rightarrow \text{orden } M$$

Tema 2 Diseño de filtros digitales. Aproximación

- Sistemas FIR de fase lineal
 - Retardo ideal
 - Distorsión de retardo. Sistemas de fase lineal
 - Sistemas de fase lineal generalizada (FLG)
 - Sistemas FIR-FLG
- Diseño de filtros FIR de fase lineal
 - Introducción a la técnica de enventanado
 - Efecto del enventanado sobre la respuesta en frecuencia
 - Diseño con ventana rectangular
 - Uso de ventanas no rectangulares
 - Método de la ventana de Kaiser
 - Diseño de otros sistemas (no FPB)
 - Filtros óptimos. Método de Parks-McClellan

Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

Filtros óptimos

Ventana rectangular

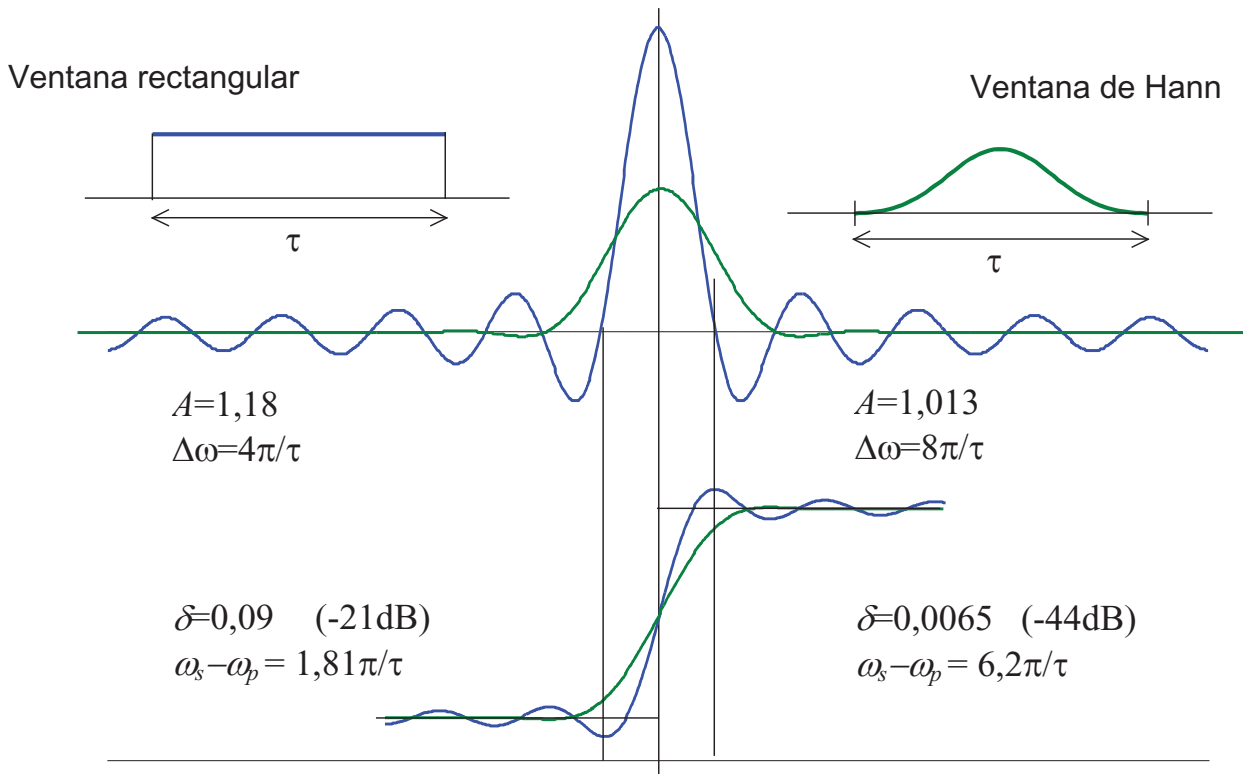
- Óptima en cuanto a error cuadrático medio

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega}) \right|^2 d\omega$$

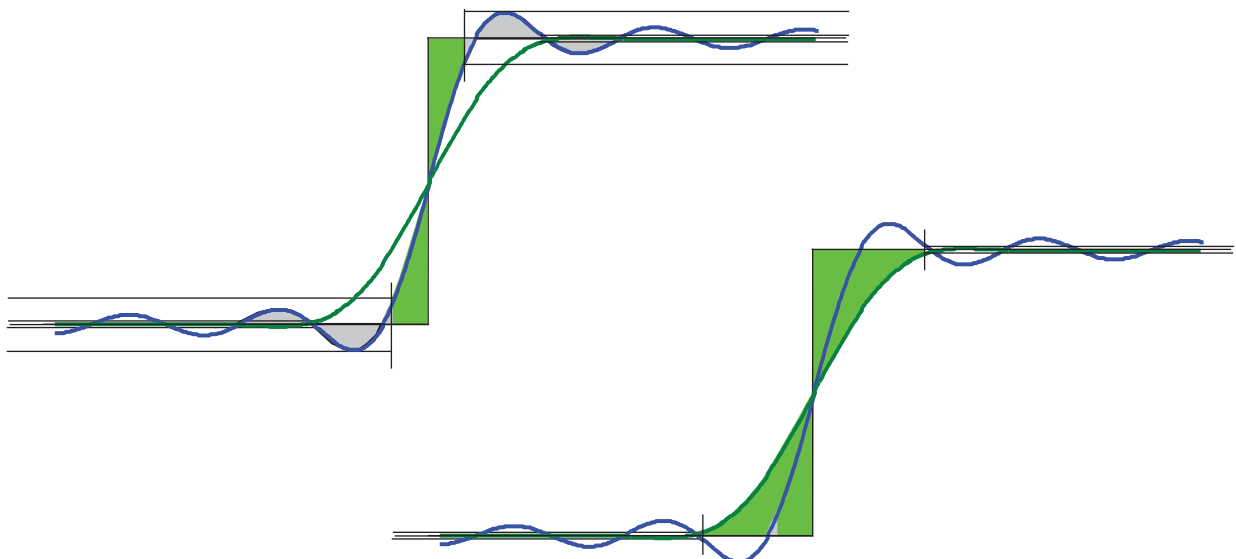
El error se concentra a los lados de la zona de transición (Z.T.)

La mayor parte del error está en la propia Z.T.

- Otras ventanas tiene más error total pero más error en la Z.T. (más ancha) y menos error fuera de ella



Ventana de Hann: zona de transición más ancha pero menos rizado



Ventana de Hann:

- más error total
- pero muy poco fuera de la zona de transición

Filtros óptimos

Ventana rectangular

- Óptima en cuanto a error cuadrático medio

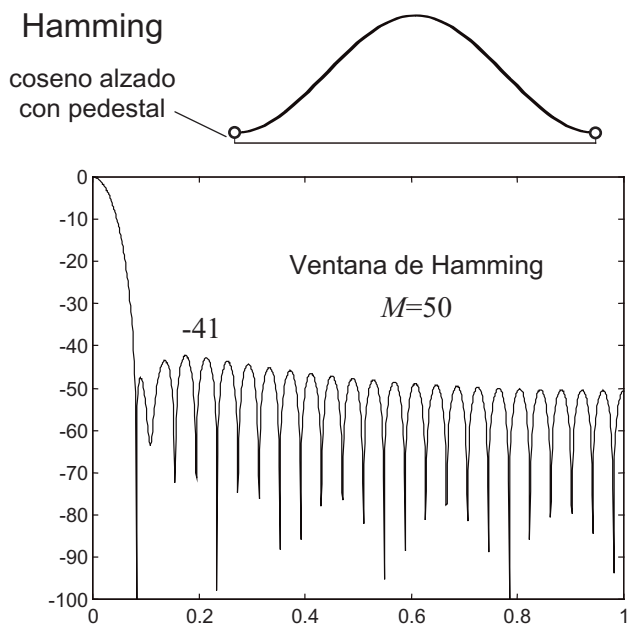
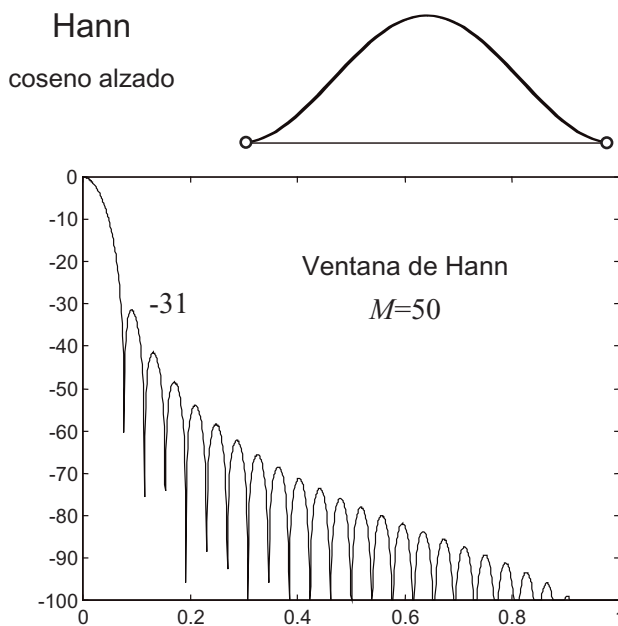
$$\int_{-\pi}^{\pi} |H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

El error se concentra a los lados de la zona de transición (Z.T.)
 La mayor parte del error está en la propia Z.T.

- Otras ventanas tiene más error total pero
 más error en la Z.T. (más ancha) y menos error fuera de ella

Ventanas de Hann y Hamming (igual ancho)

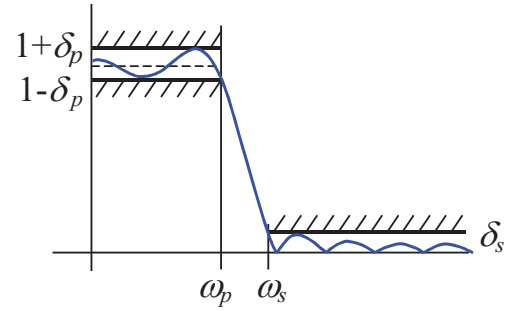
- Hay el mismo error total en la Z.T. y fuera de ella
- Con **Hann** el error se concentra junto a la Z.T.
- Con **Hamming** el error se reparte y se obtiene menor rizado máximo
- Esto sugiere que repartiendo mejor el error se tendrá menor rizado máximo



- La dos tiene igual ancho de lóbulo principal $\Delta\omega$
- Hamming: menor (max) lóbulo secundario (a costa de forma más complicada)

Filtros óptimos

- Para especificaciones con tolerancias, los filtros diseñados con ventanas no son óptimos (*min M*):
 - Igual rizado en ambas bandas
 - Rizado decrece al alejarse de la Z.T.

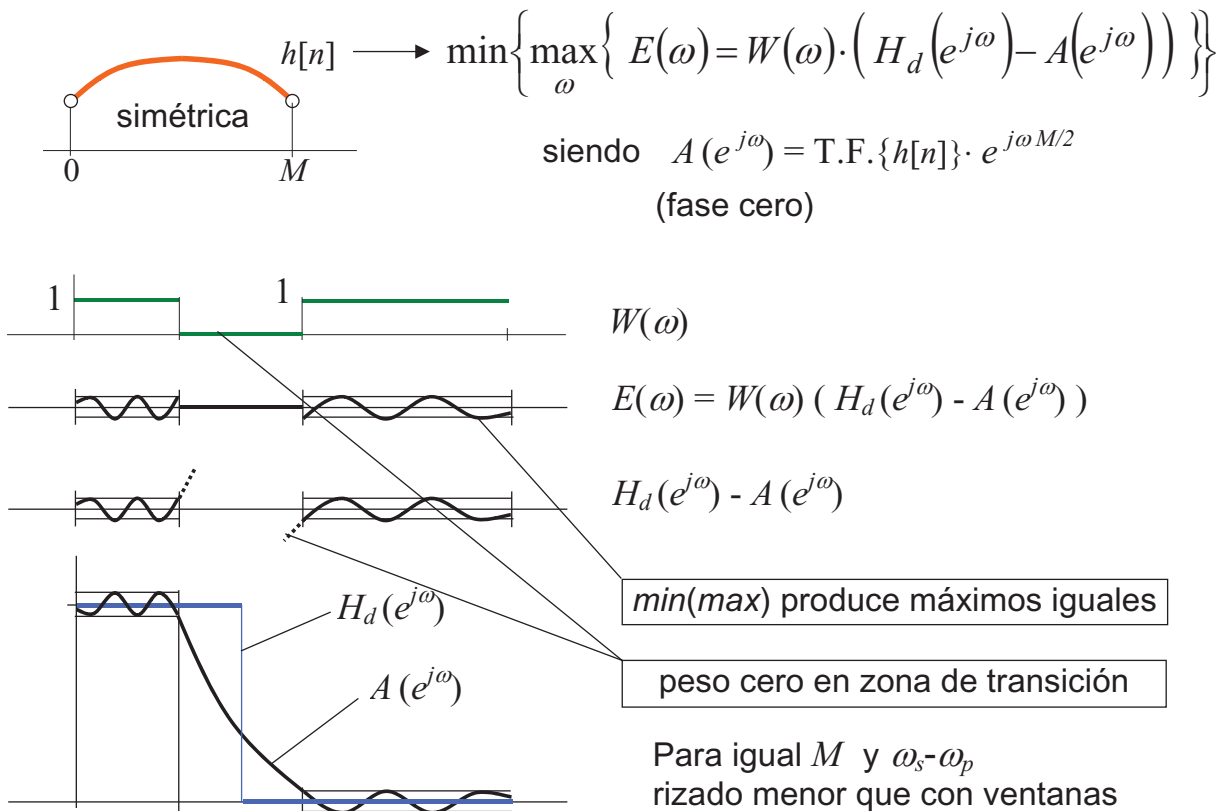


- Con método de Kaiser se consiguen filtros de menor orden

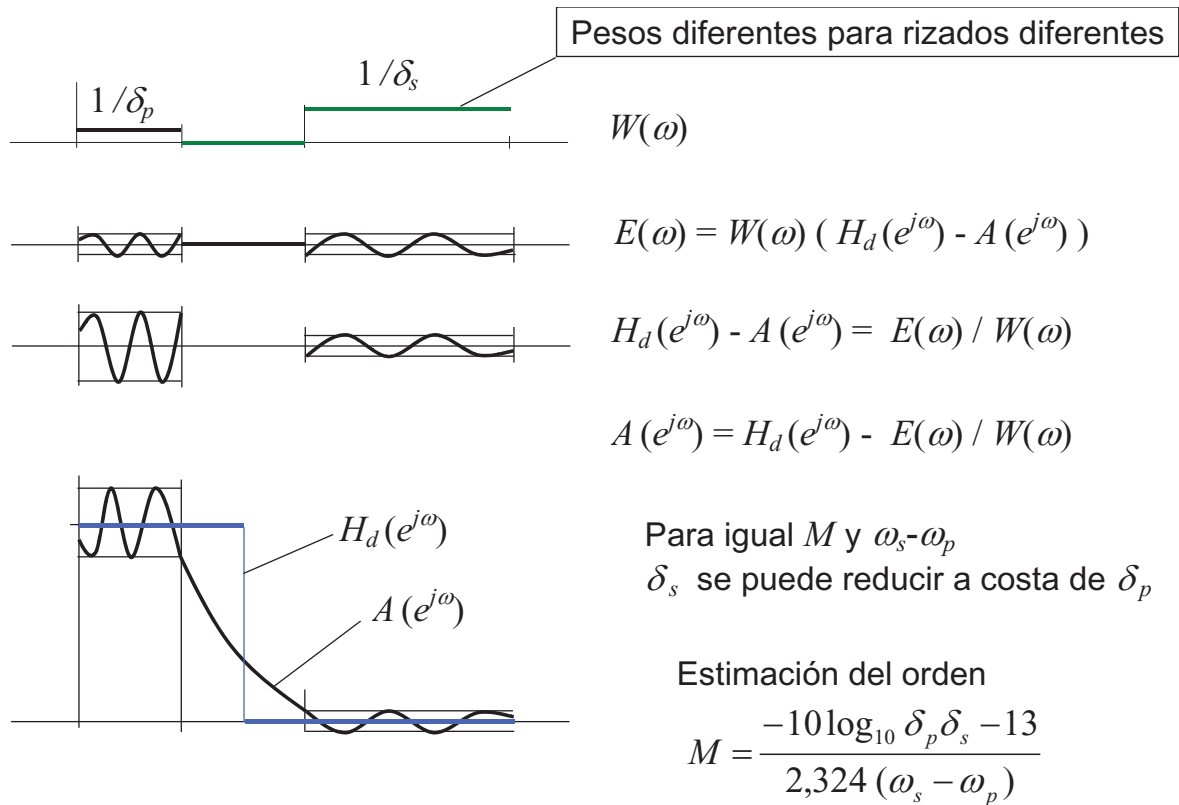
Método de Parks-McClellan

- Sin la restricción: $h[n]$ es $h_d[n]$ por una función dada $w[n]$
- Optimiza directamente los valores de $h[n]$ (manteniendo la simetría para FLG)
- Busca minimizar el error máximo fuera de la zona de transición
(no el error cuadrático medio total como la ventana rectangular)
- Produce rizado uniforme
- Pondera diferente el error en cada banda para conseguir diferente rizado

Método de Parks- McClellan



Método de Parks- McClellan



Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

Método de Parks- McClellan

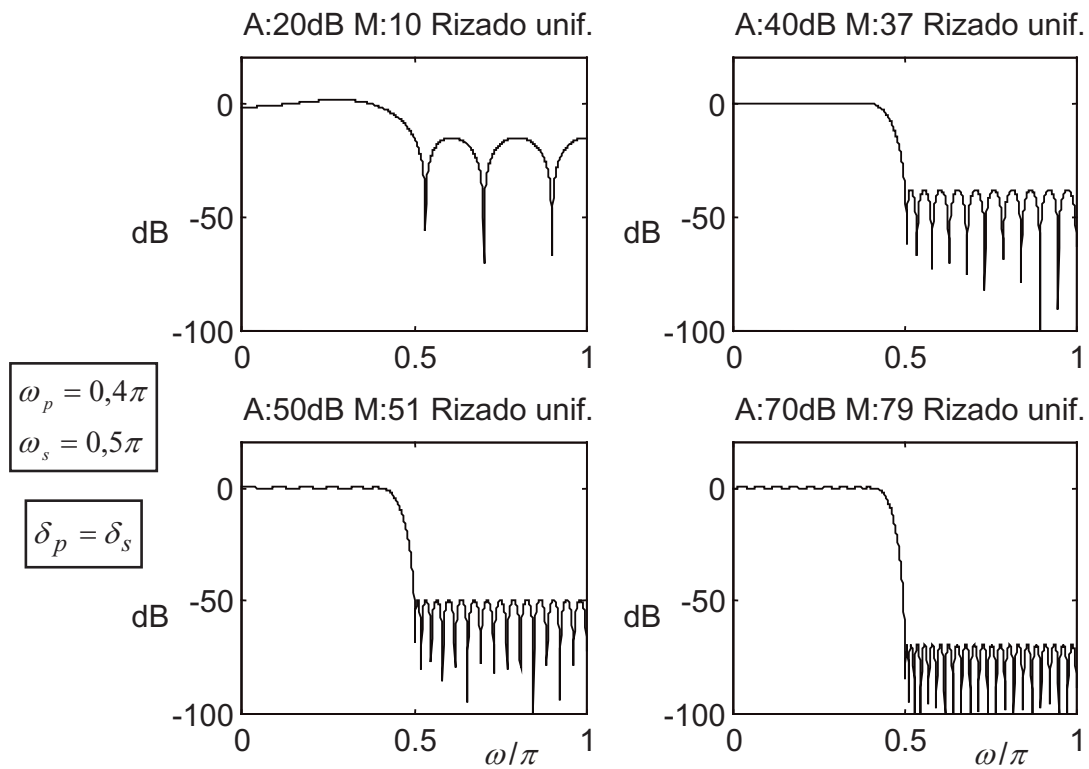
MATLAB: rutina *remez*

- $H_d(\omega)$ puede ser cualquiera: multibanda con zonas de transición
- Con $\delta_p \delta_s \omega_p \omega_s \rightarrow$ estimar el orden M
- Con $\delta_p \delta_s \omega_p \omega_s \rightarrow$ crear la función de pesos $W(\omega)$
 cero en zonas de transición 0
 inversamente proporcional a rizados en bandas de paso

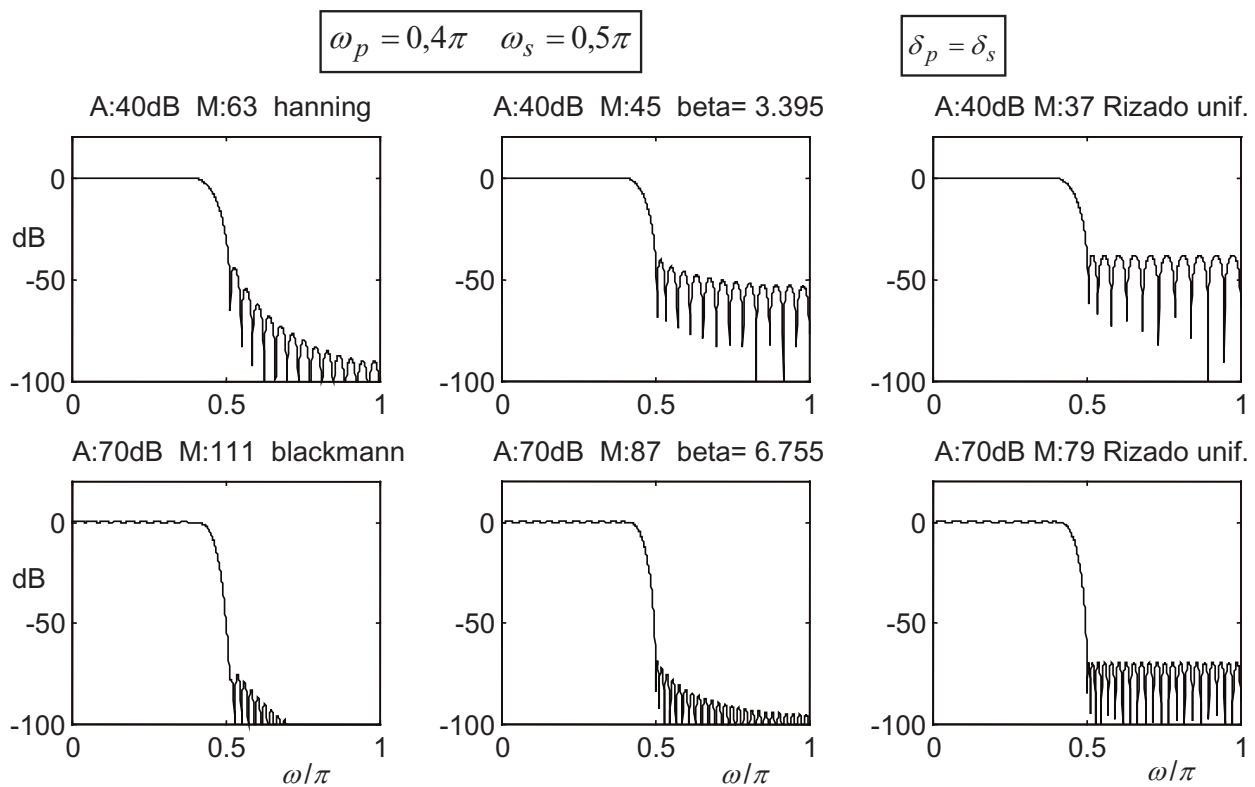
function *remez* (M, w, H, W)

- M orden
- w vector de frecuencias
- H vector de valores de la respuesta de amplitud para cada frecuencia
- W vector de pesos para cada frecuencia

Ejemplo



Ejemplo



Resumen

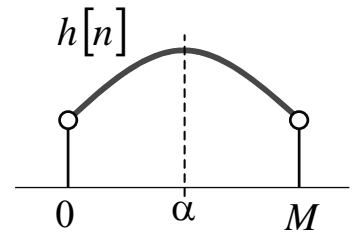
- Una respuesta FLG (retardo de grupo constante) no es distorsión
- Simetría de la respuesta al impulso $h[n] = \pm h[M-n]$ asegura FLG
- Diseño de filtros FIR-FLG: T.F.⁻¹($H(e^{j\omega})$) → retardo ideal → enventanar
- Ventana rectangular: óptima $\left(\varepsilon = \int |E(\omega)|^2 d\omega\right)$ pero con mucho rizado $\max(|E(\omega)|)$ fuera de la Z.T.
- Aumentar M reduce el error total (ε), estrechando la Z.T. pero no reduce el rizado $\max(|E(\omega)|)$
- Otras ventanas permiten reducir el rizado $\max(|E(\omega)|)$ deformando la señal en el tiempo para truncar suavemente
- Kaiser permite ajustar finamente la forma (β) al rizado necesario y es siempre mejor en anchura de Z.T. que las formas clásicas (ventana óptima)
- Si no se impone que $h[n]$ sea el producto de la deseada por una ventana predefinida, y se ajustan sus valores directamente para $\min(\max(|E(\omega)|))$ se obtienen filtros de menor orden M con rizado uniforme

Sistemas FIR de fase lineal

Propiedades del diagrama polo-cero

Simetría respuesta al impulso \rightarrow

$$h[n] = \pm h[M - n]$$



$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^M h[n] z^{-n} = \pm \sum_{n=0}^M h[M - n] z^{-n} && \text{(cambio de índice: } M - n = k \text{)} \\ &= \pm \sum_{k=M}^0 h[k] z^{(k-M)} = \pm \sum_{k=0}^M h[k] z^k z^{-M} = \pm z^{-M} \sum_{k=0}^M h[k] z^k = \pm z^{-M} H(z^{-1}) \end{aligned}$$

Simetría función de transferencia \rightarrow

$$H(z) = \pm z^{-M} H(z^{-1})$$

Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

Simetría función de transferencia $\rightarrow H(z) = \pm z^{-M} H(z^{-1})$

Si z_0 es un cero de $H(z)$:

$$0 = H(z_0) = \pm z_0^{-M} \cdot H(z_0^{-1}) = 0$$

z_0^{-M} no puede ser cero:

$$z_0^{-M} = 0 \Rightarrow z_0^{-1} = 0 \Rightarrow H(z_0) = \sum_{n=0}^M h[n] \cdot (z_0^{-1})^n = h[0] \neq 0 \Rightarrow$$

z_0 no sería un cero de $H(z)$

Por lo tanto: $H(z_0^{-1}) = 0$ z_0^{-1} también es un cero de $H(z)$:

Simetría función de transferencia $\rightarrow H(z) = \pm z^{-M} H(z^{-1})$

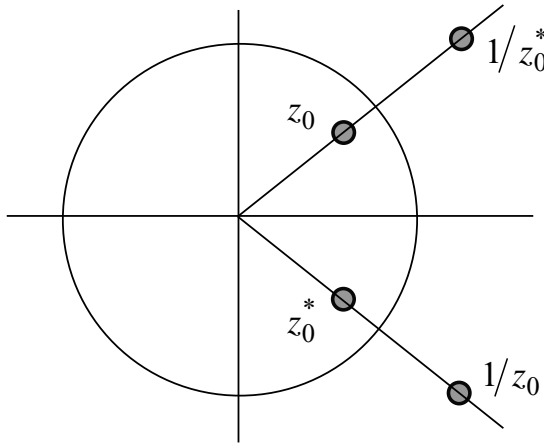
Si z_0 es un cero de $H(z)$:

$$0 = H(z_0) = \pm z_0^{-M} H(z_0^{-1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad H(z_0^{-1}) = 0$$

z_0^{-1} también es un cero de $H(z)$:

Como $h[n]$ es real, las raíces del polinomio $H(z)$ son parejas complejas conjugadas

z^* y $1/z^*$ también son ceros de $H(z)$:



Los ceros ocurren en cuartetos excepto:

Simetría función de transferencia $\rightarrow H(z) = \pm z^{-M} H(z^{-1})$

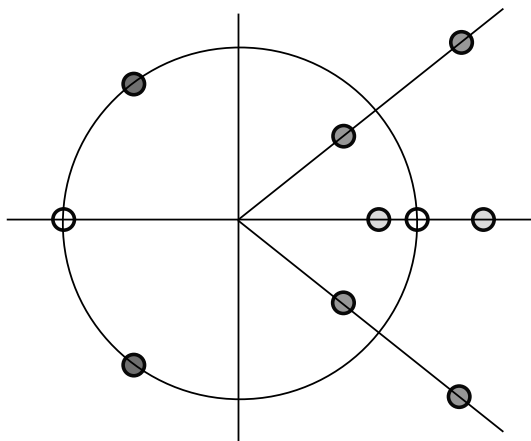
Si z_0 es un cero de $H(z)$:

$$0 = H(z_0) = \pm z_0^{-M} H(z_0^{-1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad H(z_0^{-1}) = 0$$

z_0^{-1} también es un cero de $H(z)$:

Como $h[n]$ es real, las raíces del polinomio $H(z)$ son parejas complejas conjugadas

z^* y $1/z^*$ también son ceros de $H(z)$:



Los ceros ocurren en cuartetos excepto:

- Si z_0 es real sólo su pareja inversa $1/z_0$
- Si $|z_0|=1$ sólo su pareja conjugada z^*
- Si $z_0 = \pm 1$ no tiene acompañantes

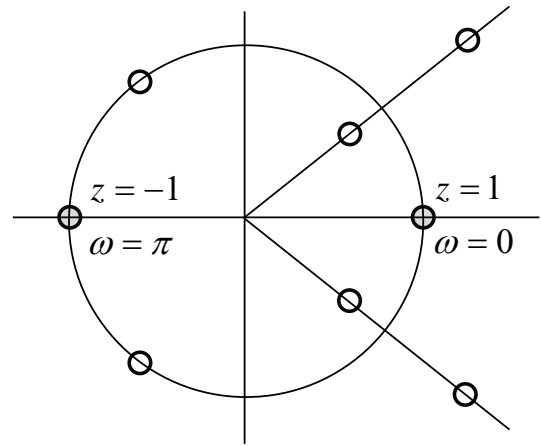
Simetría respecto a $Im[z]=0$ (eje real)

Simetría respecto a $|z|=1$ (circunf. unidad)
(homotecia)

Sistemas FIR de fase lineal

Respuesta en $\omega = 0$ y $\omega = \pi$

$$H(z) = \pm z^{-M} H(z^{-1})$$



$\omega = 0$ ($z = 1$)

$$H(1) = \pm 1^{-M} H(1)$$

simetría impar: $H(1) = -H(1) \Rightarrow H(1) = 0$ tipos III y IV

$\omega = \pi$ ($z = -1$)

$$H(-1) = \pm (-1)^{-M} H(-1)$$

simetría impar, M par: $H(-1) = -(+)H(-1) \Rightarrow H(-1) = 0$ tipos II y III

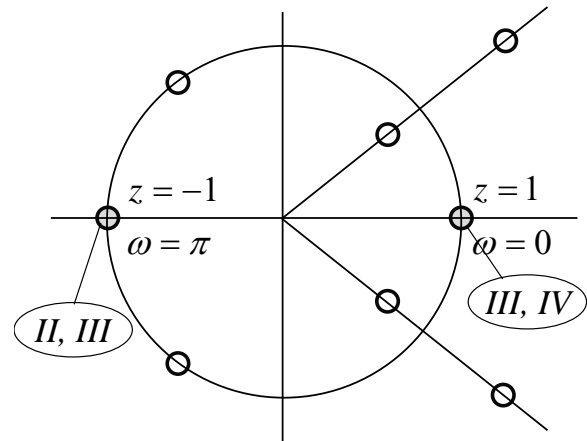
simetría par, M impar: $H(-1) = +(-)H(-1) \Rightarrow H(-1) = 0$

Sistemas FIR de fase lineal

Respuesta en $\omega = 0$ y $\omega = \pi$

tipos III, IV no pueden ser paso-bajo

tipos II, III no pueden ser paso-alto



$\omega = 0$ ($z = 1$)

$$H(1) = \pm 1^{-M} H(1)$$

simetría impar: $H(1) = -H(1) \Rightarrow H(1) = 0$ tipos III y IV

$\omega = \pi$ ($z = -1$)

$$H(-1) = \pm (-1)^{-M} H(-1)$$

simetría impar, M par: $H(-1) = -(+)H(-1) \Rightarrow H(-1) = 0$ tipos II y III

simetría par, M impar: $H(-1) = +(-)H(-1) \Rightarrow H(-1) = 0$

Tema 2 Diseño de filtros digitales. Aproximación

Introducción: aproximación y especificación

Diseño de filtros IIR

Sistemas FIR de fase lineal

- Retardo ideal
- Distorsión de retardo. Sistemas de fase lineal
- Sistemas de fase lineal generalizada (FLG)
- Sistemas FIR-FLG

Diseño de filtros FIR de fase lineal

- Técnica de enventanado
- Uso de ventanas no rectangulares
- Método de la ventana de Kaiser
- Filtros óptimos. Método de Parks-McClellan

Tema 3 Diseño de filtros digitales. Realización

- Realización de sistemas
 - Estructuras
 - Representación con grafos orientados
- Estructuras IIR
 - Directas, en cascada y en paralelo
 - Estructuras transpuestas
- Estructuras FIR
 - Directa y su transpuesta. Estructuras para sistemas FLG
 - Estructuras para interpolación y diezmado
- Efectos de precisión finita
 - Cuantificación de constantes
 - Ruido de redondeo
 - Desbordamiento
- Construcción de sistemas digitales de tratamiento de señal

Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. **GITT-FPDS**

Estructuras

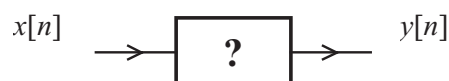
Fase de aproximación

- Aproximar el comportamiento por otro más realizable
- Objetivo: obtener una $H(z)$ racional FIR o IIR
 - que cumpla la especificación o se aproxime
 - simple (mínimo orden)

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

Fase de realización

- Objetivo: obtener un algoritmo
 - Cálculo de las muestras de la salida
 - De manera que el comportamiento sea $H(z)$



Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. **GITT-FPDS**

Estructuras. Ejemplo

$$H(z) = \frac{b}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

- Ecuación entrada/salida en el dominio z

$$Y(z) - a_1 z^{-1} Y(z) - a_2 z^{-2} Y(z) = b \cdot X(z)$$

- Transformada z inversa

$$y[n] - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] = b \cdot x[n]$$

- Despejar $y[n]$

$$y[n] = b \cdot x[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2]$$

- Descripción textual del algoritmo:

para calcular la salida en este instante, multiplicar la entrada en este instante por b y sumarle los dos valores anteriormente calculados de la salida, multiplicados, respectivamente, por a_2 y a_1

- Es un algoritmo realizable:

Suma, multiplica y almacena valores

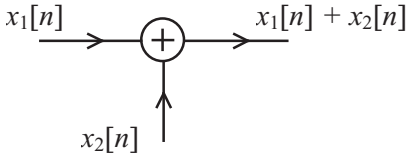
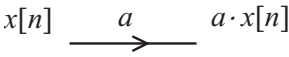
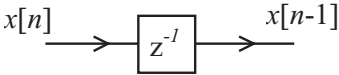
No requiere valores futuros ni no disponibles

Estructuras. Ejemplo

$$H(z) = \frac{b}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$

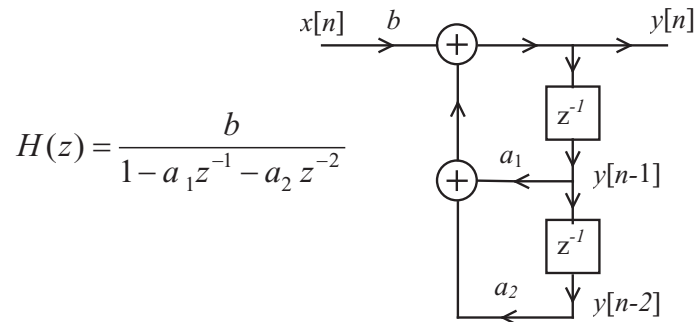
Algoritmo: $y[n] = b \cdot x[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2]$

Elementos necesarios para la realización:

<p>Suma de señales</p> <p>En cada instante, la salida es la suma de las muestras de las señales de entrada en ese instante</p>	
<p>Multiplicación de una señal por una constante</p> <p>En cada instante, la salida es el producto de la muestra de entrada en ese instante por una constante</p>	
<p>Almacenaje de una muestra de señal</p> <p>En cada instante, la salida es la muestra de entrada en el instante anterior (requiere memorizarla)</p>	

Estructuras. Ejemplo

- Algoritmo $y[n] = b \cdot x[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2]$
- Representación gráfica

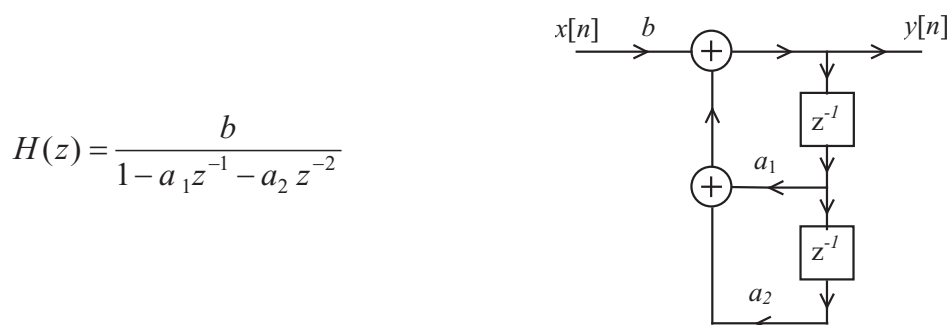


Estructura

- Conjunto ordenado de operaciones (para calcular la salida)
- El orden no está del todo determinado
- Posible paralelismo

Estructuras. Ejemplo

$$y[n] = b \cdot x[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2]$$



Complejidad

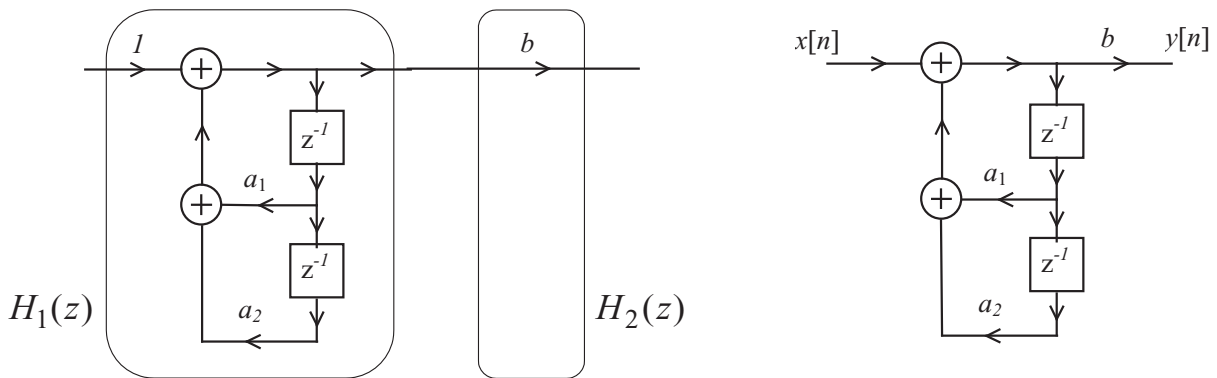
- Número de operaciones para calcular una muestra de la salida (o entrada)
 - 3 multiplicaciones de señal por constante
 - 2 sumas de (2) señales
- Memoria para almacenar valores
 - 2 registros de una muestra

Estructuras. Ejemplo

Otras estructuras

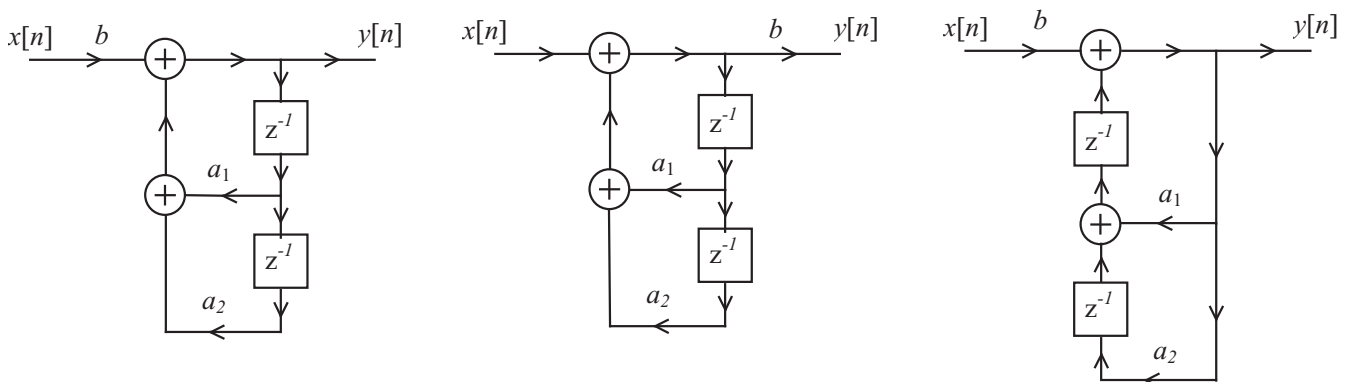
$$H(z) = \frac{b}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} \cdot b = H_1(z) \cdot H_2(z)$$

- Dos sistemas en cascada: la salida del 1º es la entrada del 2º



Estructuras

$$H(z) = \frac{b}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$



- Diferentes algoritmos
- Igual complejidad
- Mismas constantes
- Un mismo comportamiento puede realizarse con diferentes estructuras

Estructura directa

Normalización de coeficientes

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b'_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a'_k z^{-k}} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad \text{con } b_k = \frac{b'_k}{a'_0} \text{ y } a_k = \frac{-a'_k}{a'_0}$$

Ecuación entrada/salida

$$Y(z) - \sum_{k=1}^N a_k Y(z) z^{-k} = \sum_{k=0}^M b_k X(z) z^{-k}$$

Transformada Z inversa

$$y[n] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (\text{ecuación en diferencias})$$

Despejar $y[n]$

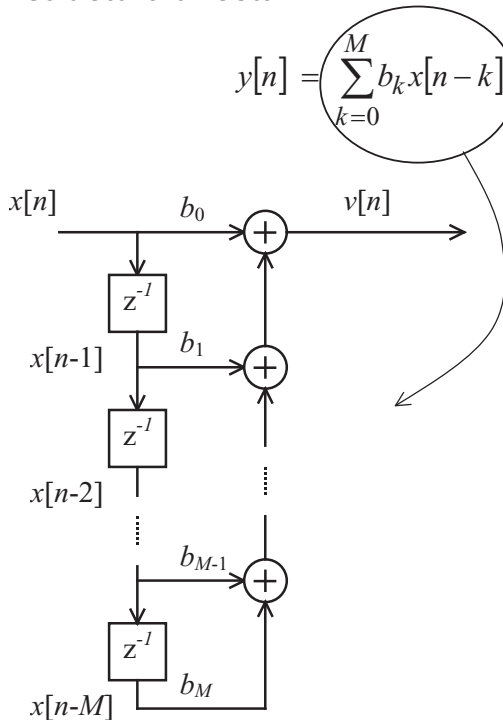
$$y[n] = \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

Algoritmo de cálculo de la salida

Usa valores anteriores de entradas y salidas

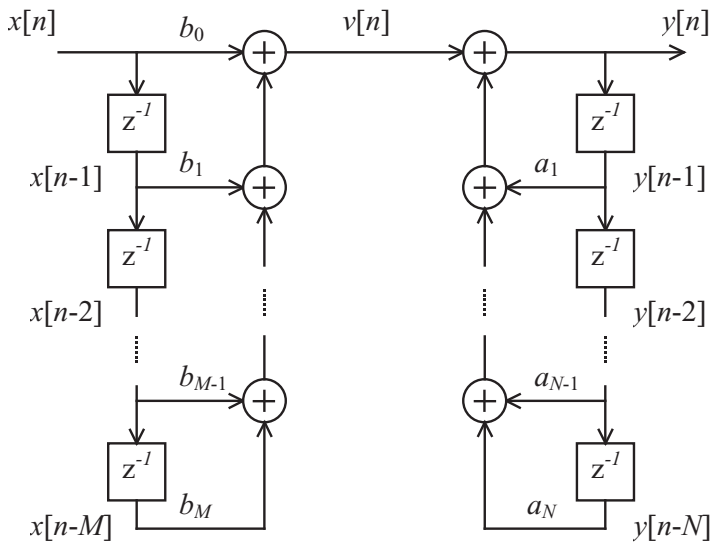
Estructura directa I

$$y[n] = \left(\sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \right) + \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] = v[n] + \sum_{k=1}^N a_k y[n-k]$$



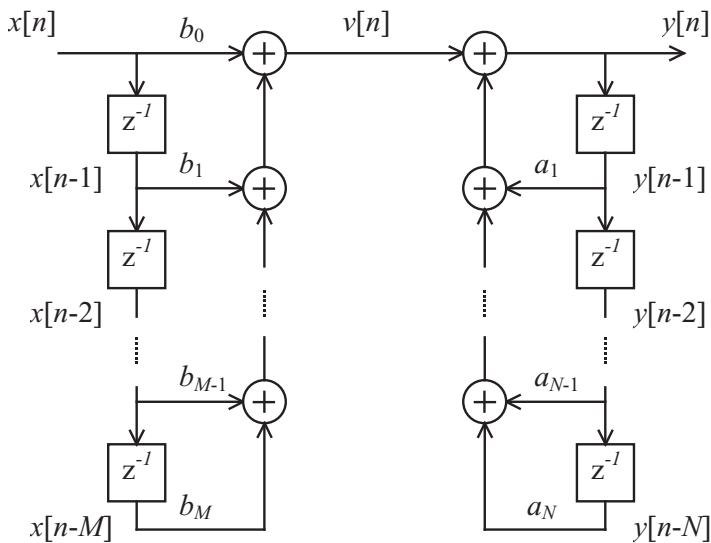
Estructura directa I

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] + \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] = v[n] + \sum_{k=1}^N a_k y[n-k]$$



Estructura directa I

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] + \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] = v[n] + \sum_{k=1}^N a_k y[n-k]$$

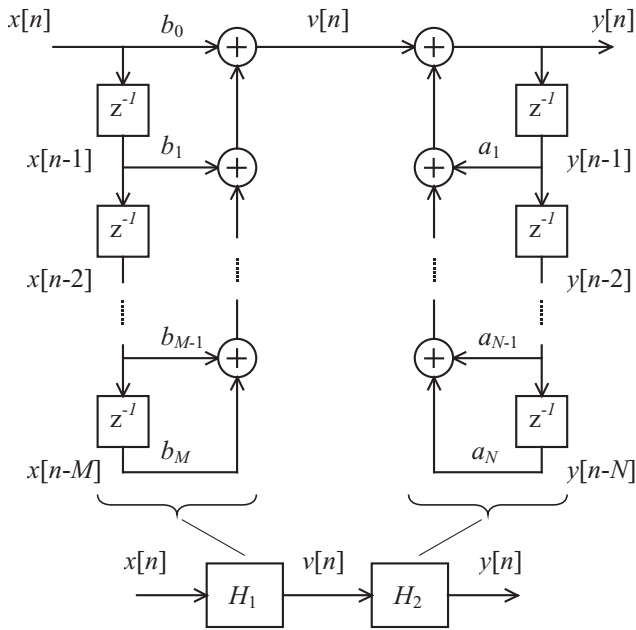


- Hay que guardar M entradas anteriores y N salidas anteriores
- Multiplicar entrada actual y entradas anteriores por constantes b_k y sumarlas ($v[n]$)
- Multiplicar salidas anteriores por constantes a_k , sumarlas y sumar a $v[n]$

El algoritmo se describe con

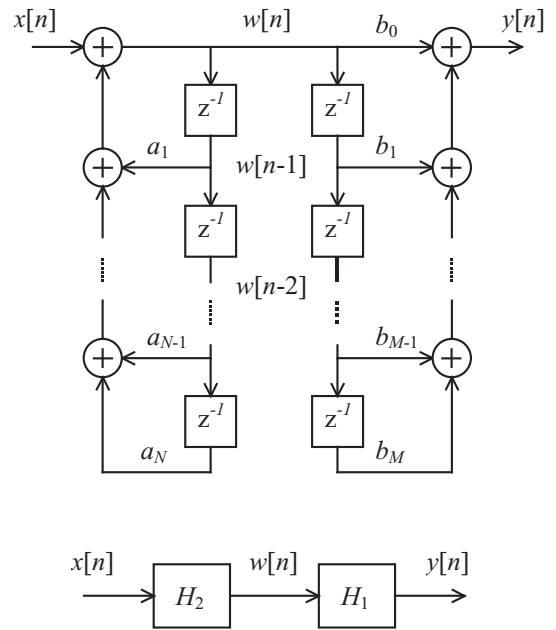
- Almacenamiento de muestras
- Multiplicaciones por cte.
- Suma de señales

Estructura directa I



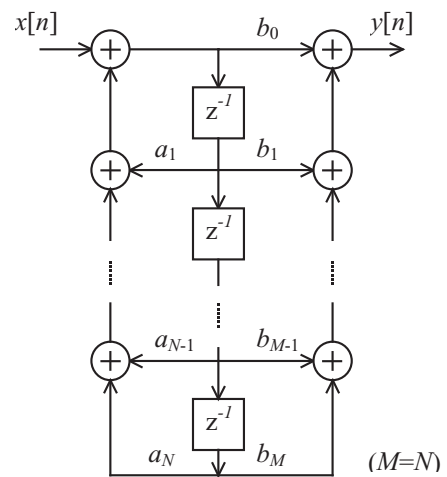
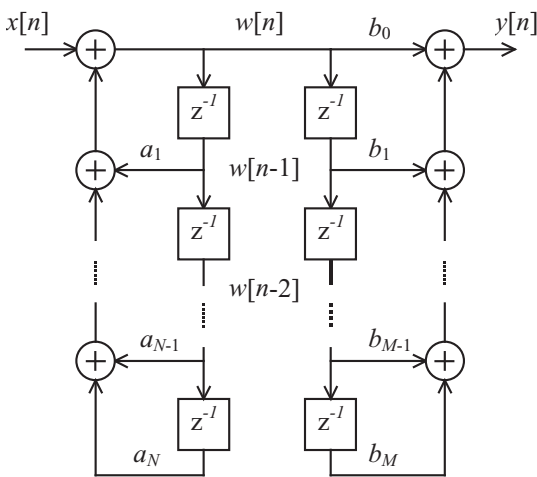
$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \cdot \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = H_1(z) \cdot H_2(z)$$

Estructura directa II



$$H(z) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \cdot \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} = H_2(z) \cdot H_1(z)$$

Estructura directa II



$$H(z) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \cdot \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} = H_2(z) \cdot H_1(z)$$

necesita menos memoria que la directa I

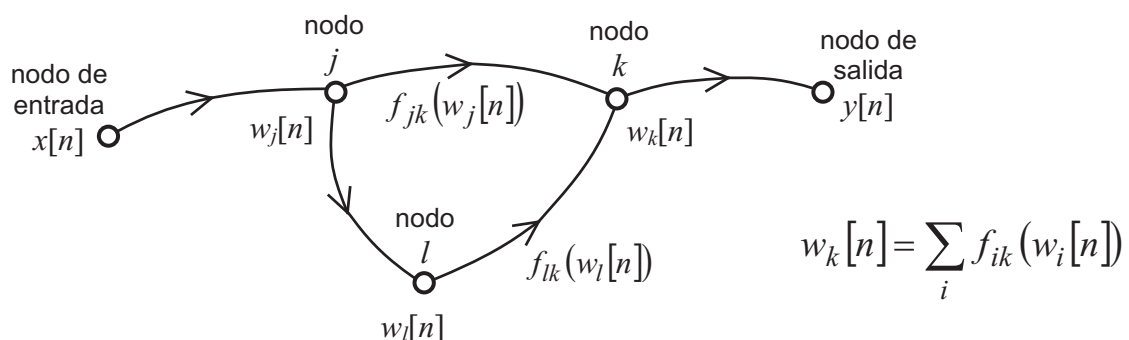
Tema 3 Diseño de filtros digitales. Realización

- Realización de sistemas
 - Estructuras
 - Representación con grafos orientados
- Estructuras IIR
 - Directas, en cascada y en paralelo
 - Estructuras transpuestas
- Estructuras FIR
 - Directa y su transpuesta. Estructuras para sistemas FLG
 - Estructuras para interpolación y diezmado
- Efectos de precisión finita
 - Cuantificación de constantes
 - Ruido de redondeo
 - Desbordamiento
- Construcción de sistemas digitales de tratamiento de señal

Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

Representación con grafos orientados

Grafos de flujo de señal: representan cómo calcular $y[n]$ a partir de $x[n]$



- Cada nodo una señal
 - Cada rama una transformación que se aplica a la señal en su origen
 - Señal en cada nodo: suma de las señales transformadas por las ramas que le llegan
-
- Si la rama es LTI (lineal e invariante) se representa por $h[n]$ o $H(z)$
 - Si en una rama no se pone nada es la transformación identidad: $H(z) = 1$
 - Normalmente se usa sólo: $H(z) = 1, -1, \text{ una constante o } z^{-M}$ (retardo entero)

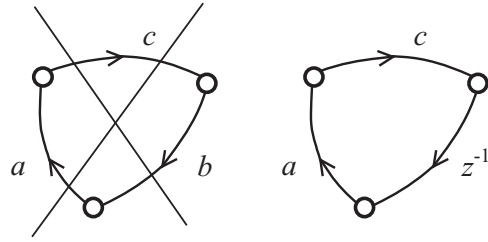
Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

Representación con grafos orientados

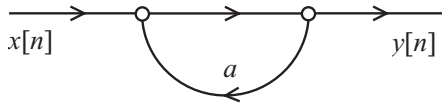
Ciclos

Puede haber ciclos pero sólo si incluyen algún retardo

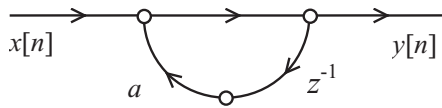
Si hay ciclos sin retardo, el grafo no representa un algoritmo



Ejemplo



$y[n] = x[n] + a \cdot y[n]$ esto no es un algoritmo (aunque sí una ecuación) para calcular una cosa se necesita ella misma (ciclo)

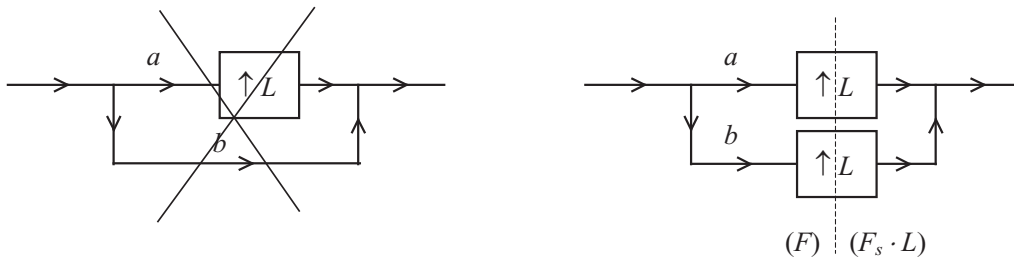


$y[n] = x[n] + a \cdot y[n-1]$ esto si es un algoritmo es posible disponer de los datos requeridos

Representación con grafos orientados ó

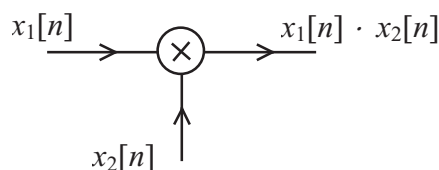
Cambios de velocidad

- Puede haber expansiones o diezmados
- Pero sólo pueden sumarse señales de igual velocidad



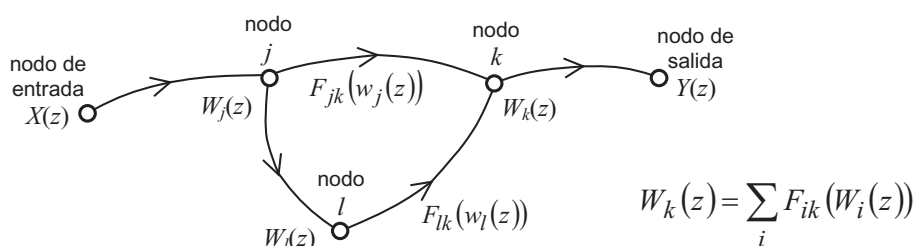
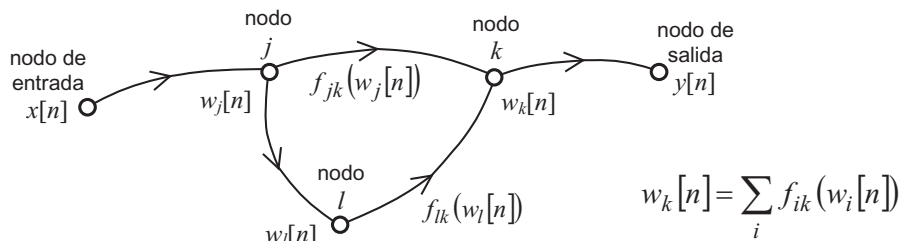
Multiplicación de señales

- Se pueden añadir pero el grafo deja de ser lineal



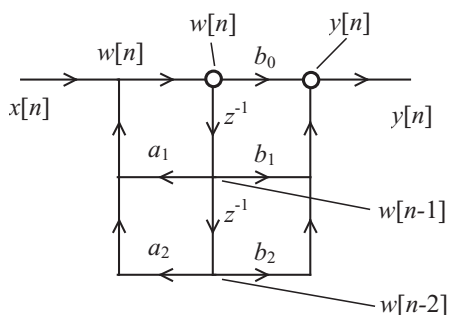
Análisis de estructuras

- Escribir las ecuaciones de los nodos a los que llega más de una rama
- Resolver el sistema de ecuaciones eliminando señales hasta obtener una relación entrada/salida
- Obtener el cociente salida/entrada en el dominio z (Función de transferencia)



Análisis de estructuras

- Escribir las ecuaciones de los nodos a los que llega más de una rama
- Resolver el sistema de ecuaciones eliminando señales hasta obtener una relación entrada/salida
- Obtener el cociente salida/entrada en el dominio z (Función de transferencia)

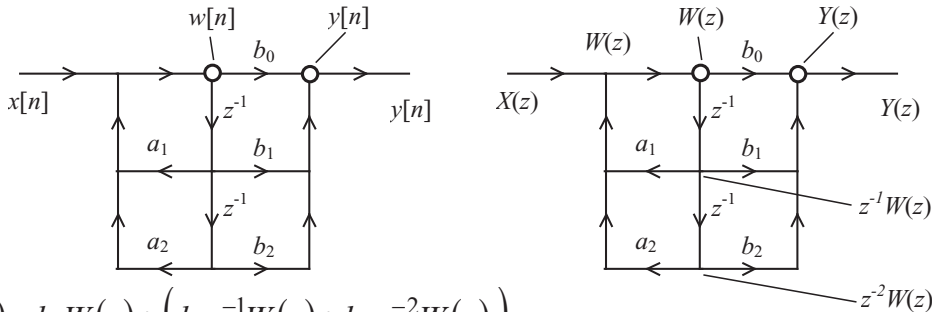


Ejemplo: Estructura directa II

$$M = N = 2$$

Análisis de estructuras

- Escribir las ecuaciones de los nodos a los que llega más de una rama
- Resolver el sistema de ecuaciones eliminando señales hasta obtener una relación entrada/salida
- Obtener el cociente salida/entrada en el dominio z (Función de transferencia)

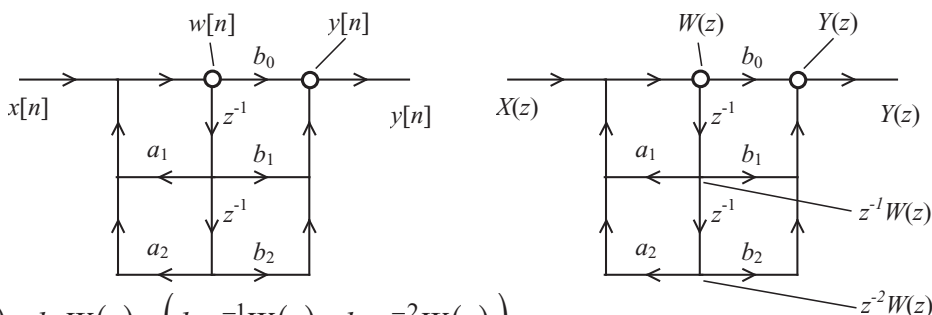


$$Y(z) = b_0 W(z) + (b_1 z^{-1} W(z) + b_2 z^{-2} W(z))$$

$$W(z) = X(z) + (a_1 z^{-1} W(z) + a_2 z^{-2} W(z))$$

Análisis de estructuras

- Escribir las ecuaciones de los nodos a los que llega más de una rama
- Resolver el sistema de ecuaciones eliminando señales hasta obtener una relación entrada/salida
- Obtener el cociente salida/entrada en el dominio z (Función de transferencia)



$$Y(z) = b_0 W(z) + (b_1 z^{-1} W(z) + b_2 z^{-2} W(z))$$

$$W(z) = X(z) + (a_1 z^{-1} W(z) + a_2 z^{-2} W(z)) \rightarrow X(z) = W(z) - a_1 z^{-1} W(z) - a_2 z^{-2} W(z)$$

$$Y(z) = W(z) \cdot (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})$$

$$X(z) = W(z) \cdot (1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2})$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$

Tema 3 Diseño de filtros digitales. Realización

- Realización de sistemas
 - Estructuras
 - Representación con grafos orientados
- Estructuras IIR
 - Directas, en cascada y en paralelo
 - Estructuras transpuestas
- Estructuras FIR
 - Directa y su transpuesta. Estructuras para sistemas FLG
 - Estructuras para interpolación y diezmado
- Efectos de precisión finita
 - Cuantificación de constantes
 - Ruido de redondeo
 - Desbordamiento
- Construcción de sistemas digitales de tratamiento de señal

Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

Estructuras IIR

- Directa
- En cascada
- En paralelo

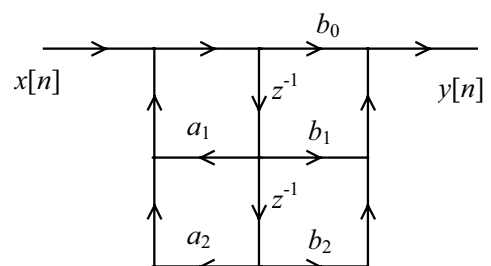
Estructuras directas

- Factorizar en dos funciones de transferencia una con los polos y otra con los ceros

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \underbrace{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}_{\text{directa I}} \cdot \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}_{\text{directa II}}$$

Ejemplo: sistema de 2º orden

$$\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$



Estructura IIR en cascada

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Factorización en secciones de 2º orden

- Calcular raíces de polinomios $B(z)$ y $A(z)$ y factorizar en binomios $(1 - r_k z^{-1})$
- Agrupar binomios de dos en dos y multiplicar:

$$A(z) = \prod_k (1 - p_k z^{-1}) = \prod_k (1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2})$$

(agrupar raíces complejas conjugadas para obtener polinomios de coeficientes reales)

- Agrupar dos polos y dos ceros y formar fracciones de segundo orden

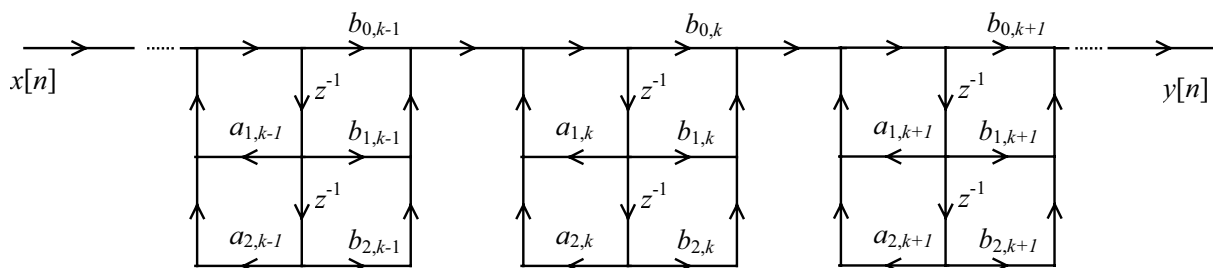
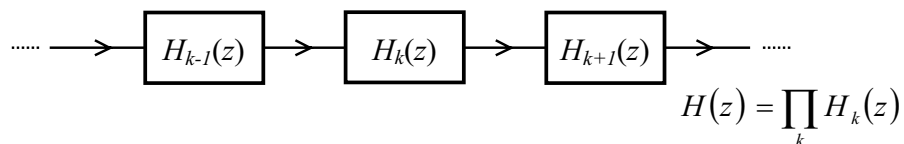
$$\prod_k \frac{b_{0,k} + b_{1,k} z^{-1} + b_{2,k} z^{-2}}{1 - a_{1,k} z^{-1} - a_{2,k} z^{-2}}$$

- Realizar las fracciones con la estructura directa II

Estructura IIR en cascada

$$H(z) = b_0 \cdot \prod_k \frac{(1 - c_k z^{-1})}{(1 - p_k z^{-1})} \cdot \prod_k \frac{(1 - d_k z^{-1}) \cdot (1 - d_k^* z^{-1})}{(1 - q_k z^{-1}) \cdot (1 - q_k^* z^{-1})} = \prod_k \frac{b_{0,k} + b_{1,k} z^{-1} + b_{2,k} z^{-2}}{1 - a_{1,k} z^{-1} - a_{2,k} z^{-2}}$$

$$b_0 = \prod_k b_{0,k}$$



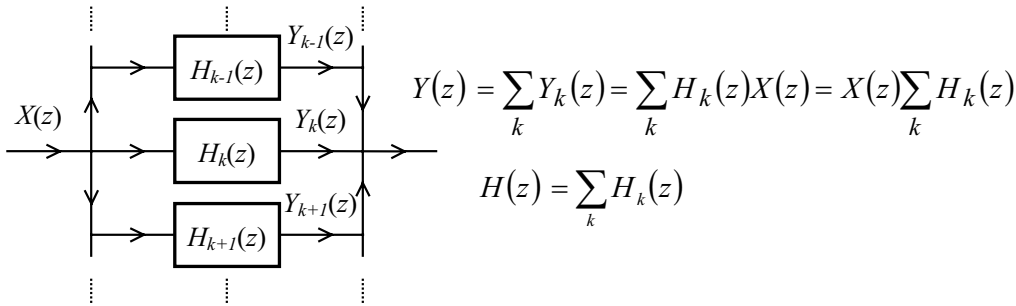
Estructura IIR en paralelo

Descomposición en fracciones simples

$$H(z) = \underbrace{\sum_{k=0}^{M-N} c_k z^{-k}}_{\text{Parte entera}} + \underbrace{\sum_k \frac{P_k}{1-p_k z^{-1}} + \sum_k \left(\frac{Q_k}{(1-q_k z^{-1})} + \frac{Q_k^*}{(1-q_k^* z^{-1})} \right)}_{\text{Parte fraccionaria}}$$

$$H(z) = \sum_k c_k z^{-k} + \sum_k \frac{e_{0,k} + e_{1,k} z^{-1}}{1 - a_{1,k} z^{-1} - a_{2,k} z^{-2}}$$

coeficientes reales



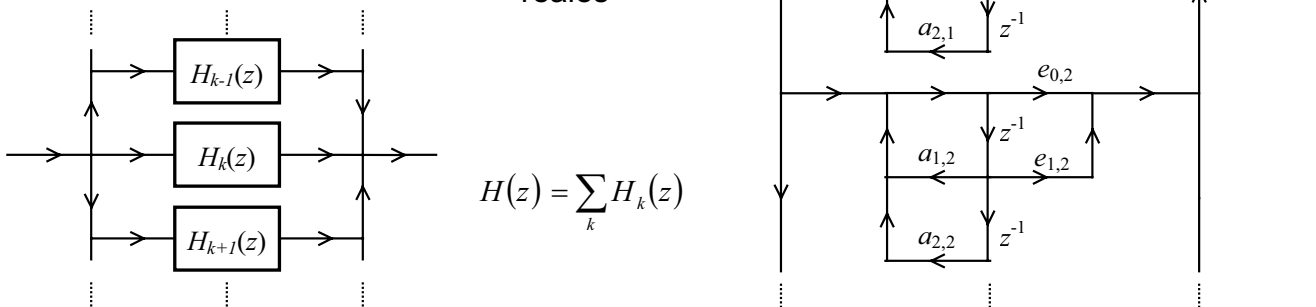
Estructura IIR en paralelo

Descomposición en fracciones simples

$$H(z) = \underbrace{\sum_{k=0}^{M-N} c_k z^{-k}}_{\text{Parte entera}} + \underbrace{\sum_k \frac{P_k}{1-p_k z^{-1}} + \sum_k \left(\frac{Q_k}{(1-q_k z^{-1})} + \frac{Q_k^*}{(1-q_k^* z^{-1})} \right)}_{\text{Parte fraccionaria}}$$

$$H(z) = \sum_k c_k z^{-k} + \sum_k \frac{e_{0,k} + e_{1,k} z^{-1}}{1 - a_{1,k} z^{-1} - a_{2,k} z^{-2}}$$

coeficientes reales

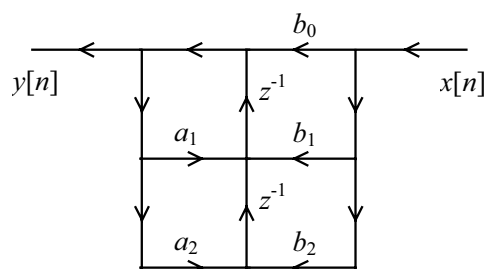
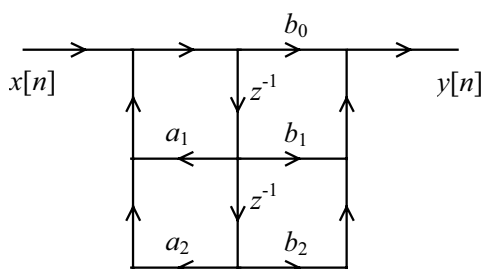


Tema 3 Diseño de filtros digitales. Realización

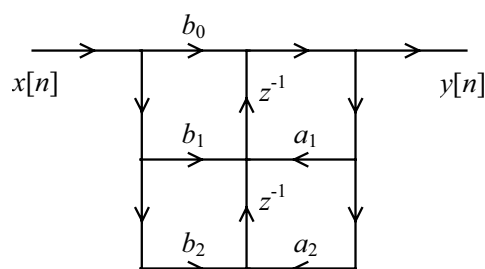
- Realización de sistemas
 - Estructuras
 - Representación con grafos orientados
- Estructuras IIR
 - Directas, en cascada y en paralelo
 - Estructuras transpuestas
- Estructuras FIR
 - Directa y su transpuesta. Estructuras para sistemas FLG
 - Estructuras para interpolación y diezmado
- Efectos de precisión finita
 - Cuantificación de constantes
 - Ruido de redondeo
 - Desbordamiento
- Construcción de sistemas digitales de tratamiento de señal

Formas transpuestas

- Transponer un grafo: cambiar de sentido a todas las ramas e intercambiar entrada y salida
- El grafo transpuesto de un grafo lineal tiene la misma función de transferencia

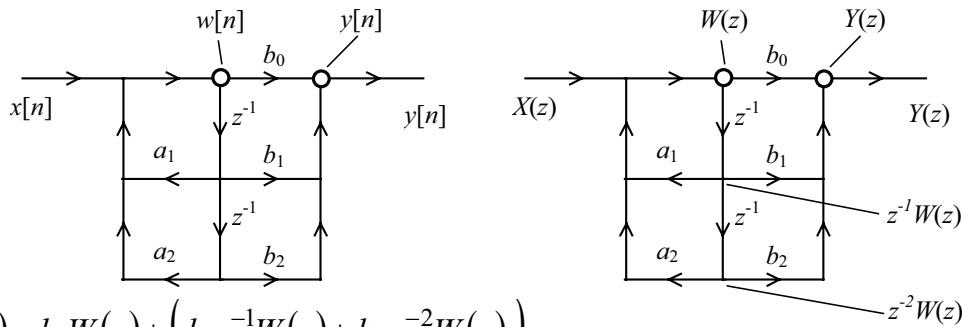


estructura
directa II
transpuesta



Análisis de estructuras

- Escribir las ecuaciones de los nodos a los que llega más de una rama
- Resolver el sistema de ecuaciones eliminando señales hasta obtener una relación entrada/salida
- Obtener el cociente salida/entrada en el dominio z (Función de transferencia)



$$Y(z) = b_0 W(z) + (b_1 z^{-1} W(z) + b_2 z^{-2} W(z))$$

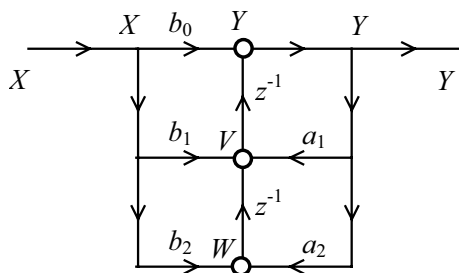
$$W(z) = X(z) + (a_1 z^{-1} W(z) + a_2 z^{-2} W(z)) \rightarrow X(z) = W(z) - a_1 z^{-1} W(z) - a_2 z^{-2} W(z)$$

$$Y(z) = W(z) \cdot (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})$$

$$X(z) = W(z) \cdot (1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2})$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$

Análisis



$$\boxed{1} \quad Y(z) = b_0 X(z) + z^{-1} V(z)$$

$$\boxed{2} \quad V(z) = b_1 X(z) + a_1 Y(z) + z^{-1} W(z)$$

$$\boxed{3} \quad W(z) = b_2 X(z) + a_2 Y(z)$$

sustituyendo $\boxed{3}$ en $\boxed{2}$ $V(z) = b_1 X(z) + a_1 Y(z) + b_2 z^{-1} X(z) + a_2 z^{-1} Y(z)$

y sustituyendo en $\boxed{1}$ $Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + b_2 z^{-2} X(z) + a_2 z^{-2} Y(z)$

Agrupando Xs e Ys $Y(z) - a_1 z^{-1} Y(z) - a_2 z^{-2} Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + b_2 z^{-2} X(z)$

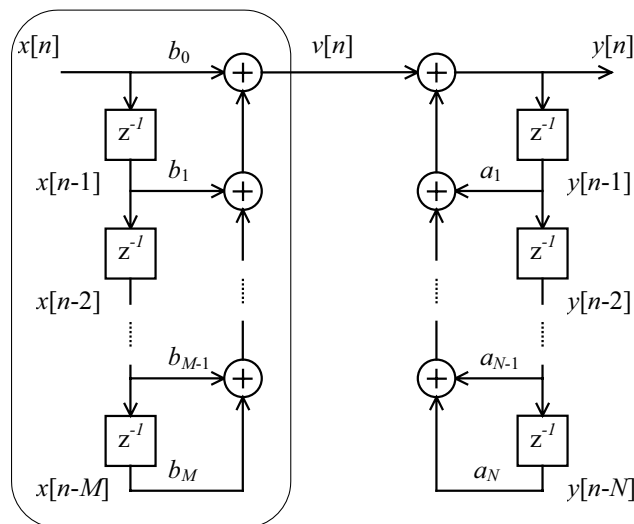
$$Y(z) \cdot (1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}) = X(z) \cdot (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$

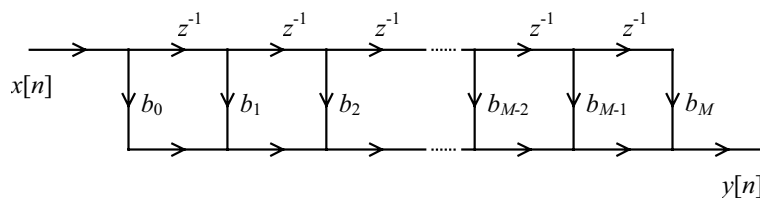
Tema 3 Diseño de filtros digitales. Realización

- Realización de sistemas
 - Estructuras
 - Representación con grafos orientados
- Estructuras IIR
 - Directas, en cascada y en paralelo
 - Estructuras transpuestas
- Estructuras FIR
 - Directa y su transpuesta. Estructuras para sistemas FLG
 - Estructuras para interpolación y diezmado
- Efectos de precisión finita
 - Cuantificación de constantes
 - Ruido de redondeo
 - Desbordamiento
- Construcción de sistemas digitales de tratamiento de señal

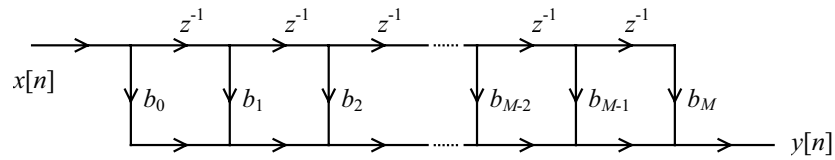
Estructura FIR directa



Estructura FIR directa



Estructura FIR directa



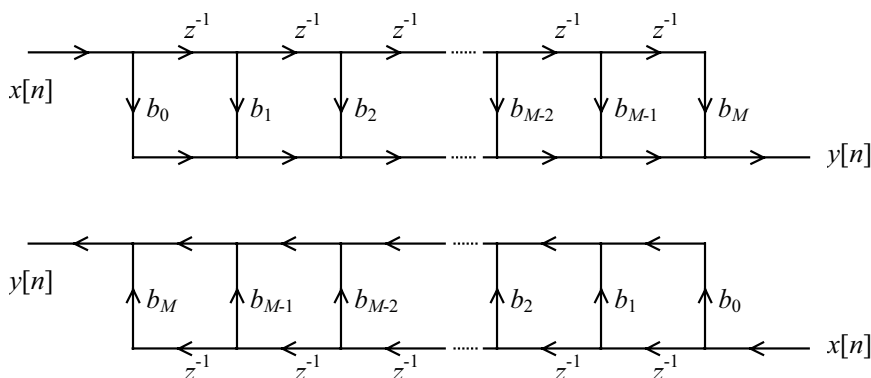
$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] = h[n] * x[n] \quad \text{con} \quad h[n] = \begin{cases} b_n & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} = \sum_{k=0}^M h[k] z^{-k}$$

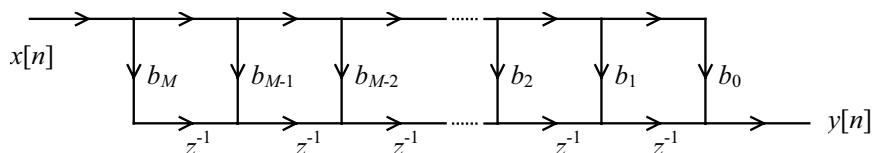
- Las constantes del algoritmo son las muestras de la respuesta al impulso
- Construcción sencilla:
 - En una memoria el vector $B = [b_0, b_1, \dots, b_M]$
 - En un registro de desplazamiento el vector $X = [x[n], x[n-1], \dots, x[n-M]]$
 - La salida se calcula como el producto escalar $B * X^T = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$
- DSP tienen la instrucción MAC (*multiply-accumulate*) para hacer el producto escalar

Estructuras FIR

Estructura directa

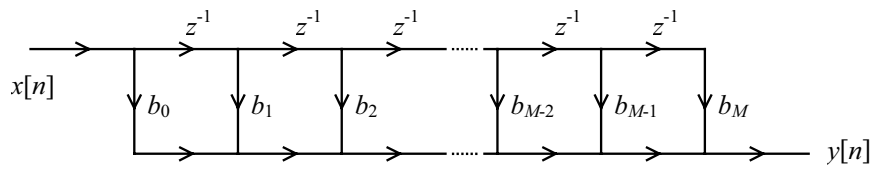


Estructura directa transpuesta



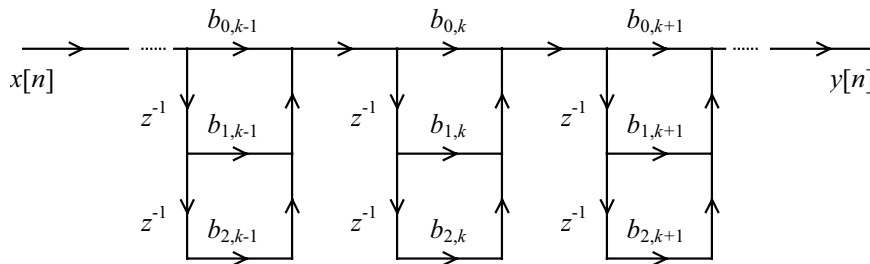
Estructuras FIR

Estructura directa



Estructura en cascada

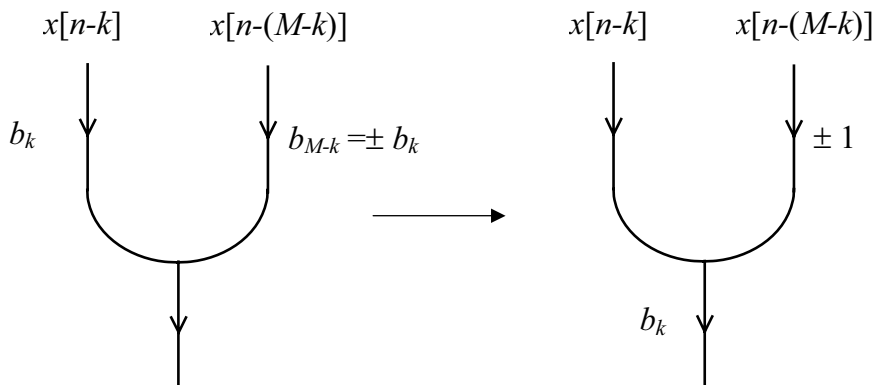
$$H(z) = \prod (b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2})$$



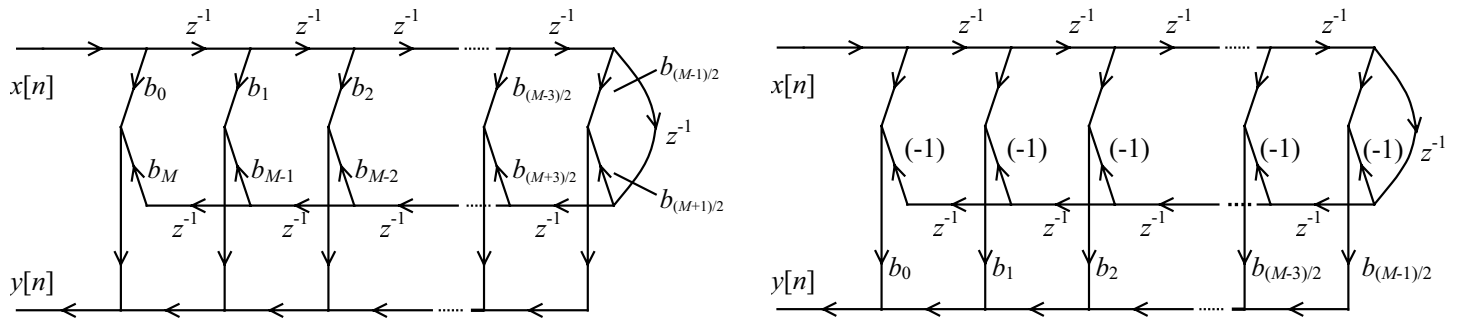
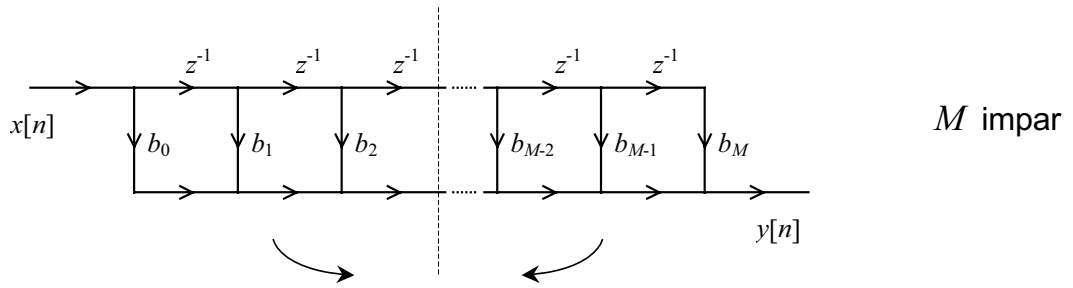
Estructuras FIR-FLG

- Aprovechar la simetría $b_k = \pm b_{M-k}$ para ahorrar la mitad de las multiplicaciones

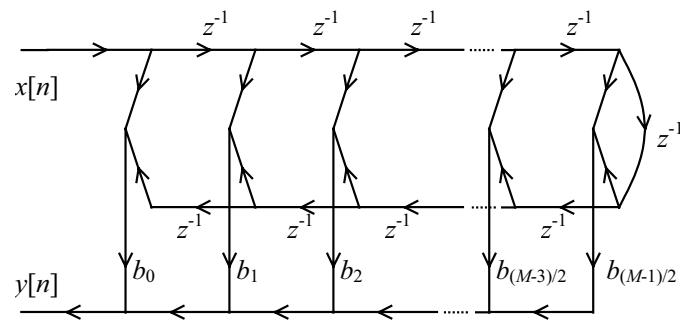
$$\begin{aligned} b_k x[n-k] + b_{M-k} x[n-(M-k)] &= b_k x[n-k] \pm b_k x[n-(M-k)] = \\ &= b_k \cdot (x[n-k] \pm x[n-(M-k)]) \end{aligned}$$



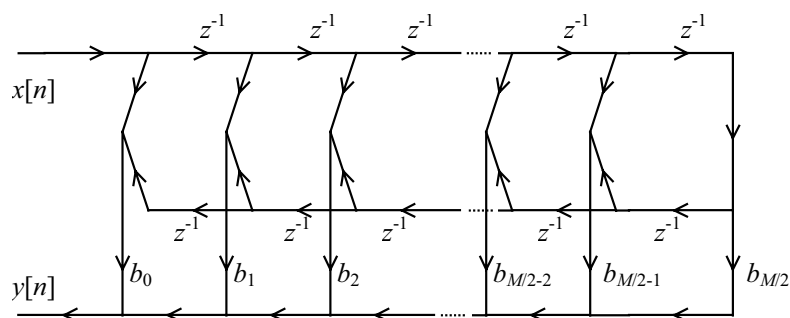
Estructuras FIR-FLG



Estructuras FIR-FLG



FIR fase lineal (M impar)

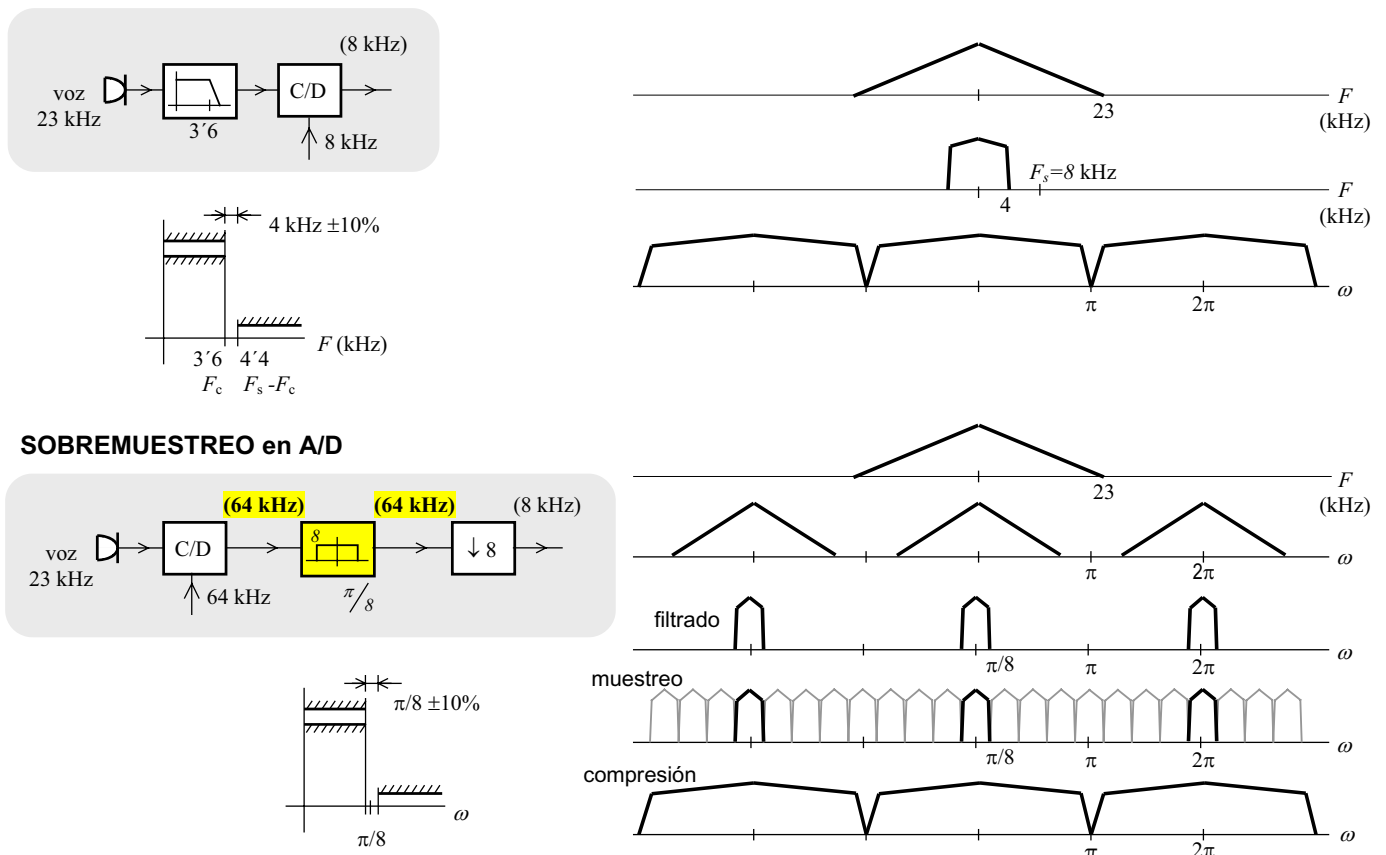


FIR fase lineal (M par)

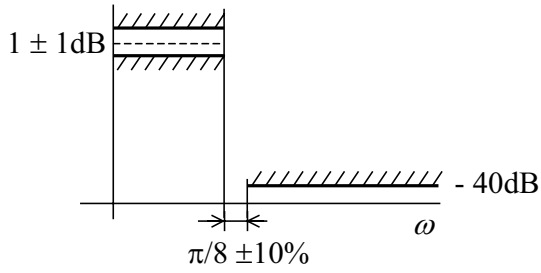
Tema 3 Diseño de filtros digitales. Realización

- Realización de sistemas
 - Estructuras
 - Representación con grafos orientados
- Estructuras IIR
 - Directas, en cascada y en paralelo
 - Estructuras transpuestas
- Estructuras FIR
 - Directa y su transpuesta. Estructuras para sistemas FLG
 - Estructuras para interpolación y diezmado
- Efectos de precisión finita
 - Cuantificación de constantes
 - Ruido de redondeo
 - Desbordamiento
- Construcción de sistemas digitales de tratamiento de señal

Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS



Filtro de diezrado. Aproximación



$$A_s = 40\text{dB} = -20\log_{10} \delta_s$$

$$\rightarrow \delta_s = 10^{\frac{-40\text{dB}}{20}} = 0,01$$

$$A_p = 1\text{dB} = 20\log_{10} \frac{1 + \delta_p}{1} = 20\log_{10}(1 + \delta_p)$$

$$\rightarrow \delta_p = 10^{\frac{A_p}{20}} - 1 = 10^{\frac{1\text{dB}}{20}} - 1 = 0,12$$

$$\omega_s - \omega_p = 2 \cdot \left(\frac{\pi}{8} \cdot 10\% \right) = \frac{\pi}{40}$$

Ventanas clásicas

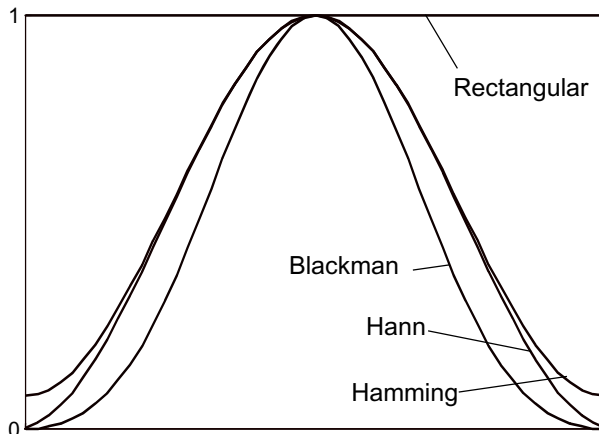
$$\delta = \min(\delta_p, \delta_s) = \delta_s \rightarrow A = 40 \rightarrow \text{Hann}$$

$$\omega_s - \omega_p = \frac{6,2\pi}{M} \rightarrow M = \frac{6,2\pi}{\omega_s - \omega_p} = \frac{6,2\pi}{\pi/40} \rightarrow M = 248$$

Parks-McClellan

$$M = \frac{-10\log_{10}(\delta_s \cdot \delta_p) - 13}{2,324 \cdot (\omega_s - \omega_p)} = \frac{-10\log_{10}(0,01 \cdot 0,12) - 13}{2,324 \cdot (\pi/40)} = 88,8 \rightarrow M_{\min} = 89$$

Ventanas



$$\text{Rectangular } w[n] = 1 \quad 0 \leq n \leq M$$

$$\text{Bartlett } w[n] = \begin{cases} 2n/M & 0 \leq n \leq M/2 \\ 2 - 2n/M & M/2 < n \leq M \end{cases}$$

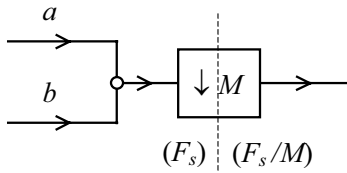
$$\text{Hamming } w[n] = 0,54 - 0,46 \cos(2\pi n/M)$$

$$\text{Hann } w[n] = 0,5 - 0,5 \cos(2\pi n/M)$$

$$\text{Blackman } w[n] = 0,42 - 0,5 \cos(2\pi n/M) + 0,08 \cos(4\pi n/M)$$

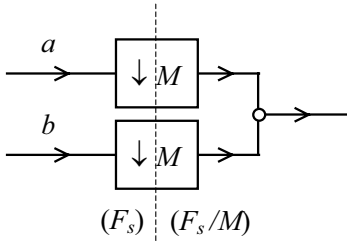
Tipo	Ventana		Filtro FIR	
	Anchura lóbulo principal $\Delta\omega$	Atenuación lóbulo secundario α (dB)	Anchura zona de transición $\omega_s - \omega_p$	Rizado $A = -20\log_{10} \delta$
Rectangular	$4\pi/(M+1)$	13	$1,81\pi/M$	21
Bartlett	$8\pi/M$	25		
Hann	$8\pi/M$	31	$6,2\pi/M$	44
Hamming	$8\pi/M$	41	$6,6\pi/M$	53
Blackman	$12\pi/M$	57	$11\pi/M$	74

Filtrado y Diezmado. Realización

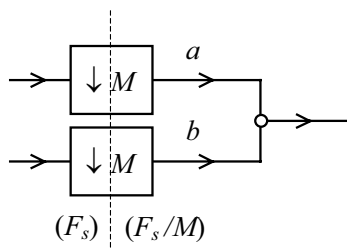


Complejidad: 2 mult. / muestra de entrada
 $2 \cdot F_s$ mult. / segundo

Hacer la suma sólo si se va a usar el resultado

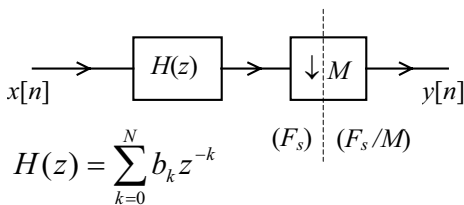


Hacer multiplicaciones sólo si se va a usar el resultado

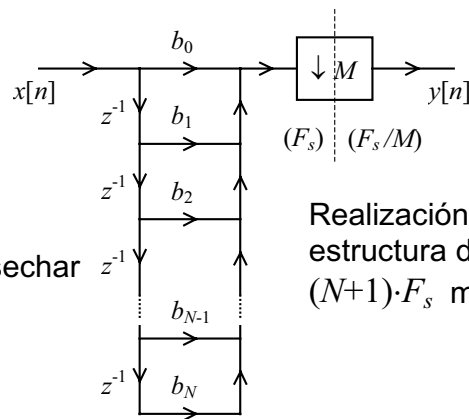


Las operaciones se hacen a F_s/M en vez de a F_s

Complejidad: 2 mult. / muestra de salida
 $2 \cdot F_s/M$ mult. / segundo

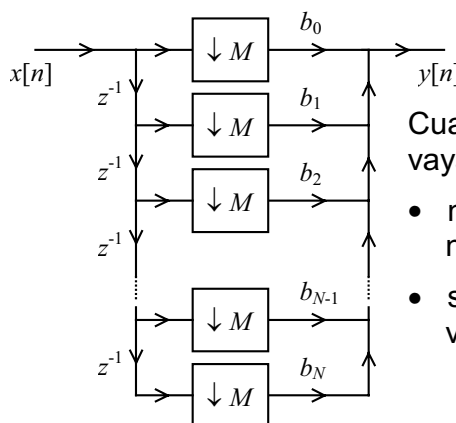
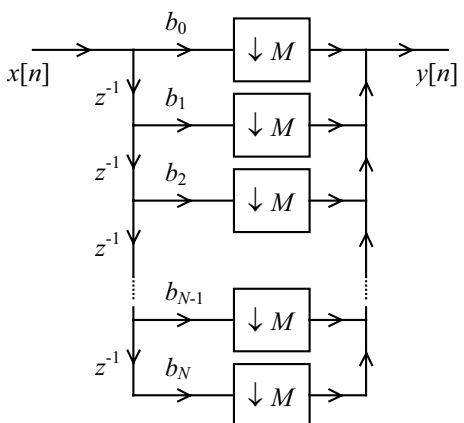


Calcular la salida sólo cuando no se va a desechar



Realización con estructura directa
 $(N+1) \cdot F_s$ mult./s

Estructura para diezmado

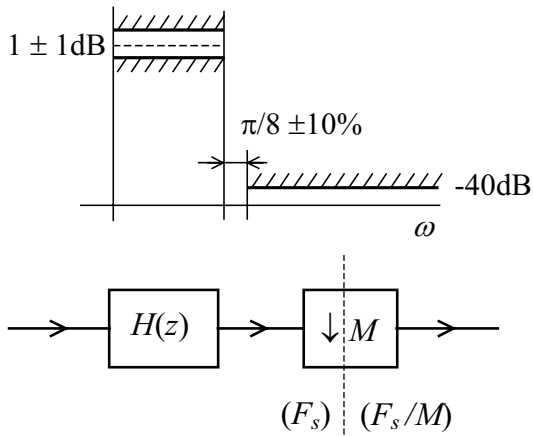


Cuando la muestra de salida se vaya a desechar:

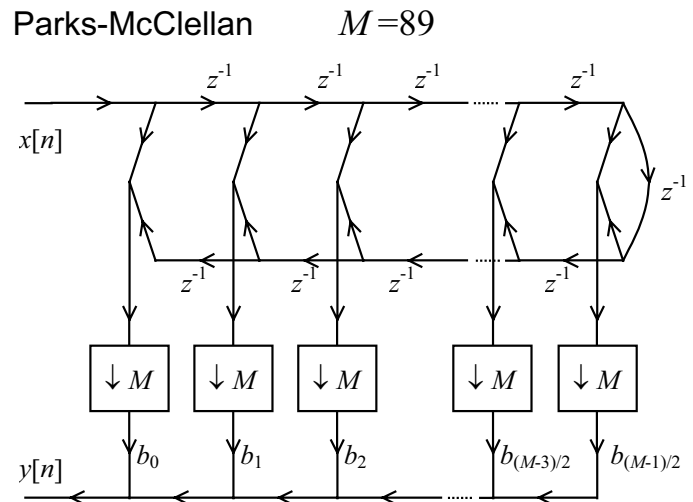
- no hacer las multiplicaciones ni las sumas
- sí hay que actualizar las variables de estado

$(N+1) \cdot F_s/M$ mult./s

Diezmado + filtro A-A. Realización



Estructura directa plegada con diezmado



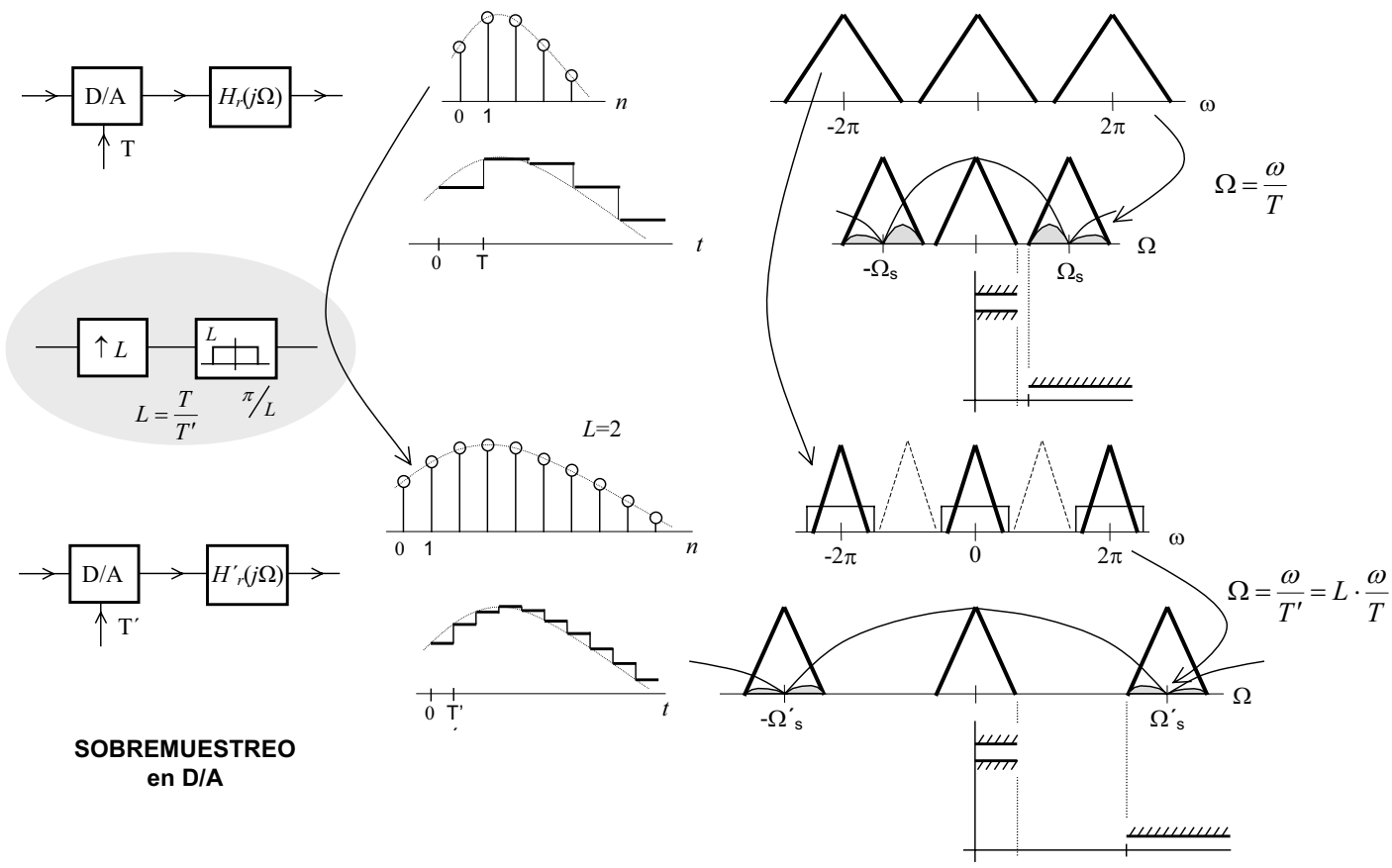
Complejidad

- Operaciones por muestra: $(M+1)/2 = 45$ multiplicaciones / muestra de salida
- Operaciones por segundo: $((M+1)/2) \cdot F_s/M = 45 \times 8 \text{ kHz}$

360.000 multiplicaciones /segundo

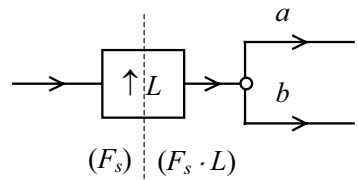
Tema 3 Diseño de filtros digitales. Realización

- Realización de sistemas
 - Estructuras
 - Representación con grafos orientados
- Estructuras IIR
 - Directas, en cascada y en paralelo
 - Estructuras transpuestas
- Estructuras FIR
 - Directa y su transpuesta. Estructuras para sistemas FLG
 - Estructuras para interpolación y diezmado
- Efectos de precisión finita
 - Cuantificación de constantes
 - Ruido de redondeo
 - Desbordamiento
- Construcción de sistemas digitales de tratamiento de señal



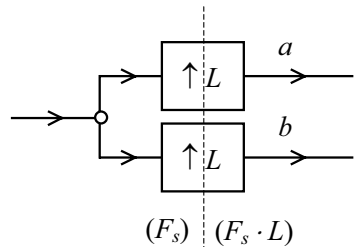
SOBREMUESTRO en D/A

Expansión y filtrado. Realización

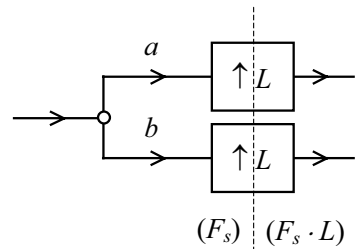


Complejidad: 2 mult. / muestra de salida
 $2 \cdot F_s \cdot L$ mult. / segundo

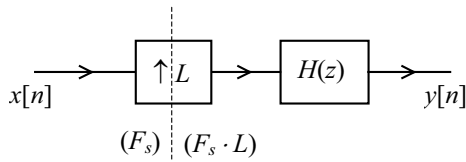
La expansión intercala ceros
 Replicar la expansión no añade operaciones



No hacer las multiplicaciones por los ceros
 Generar los ceros directamente con la expansión



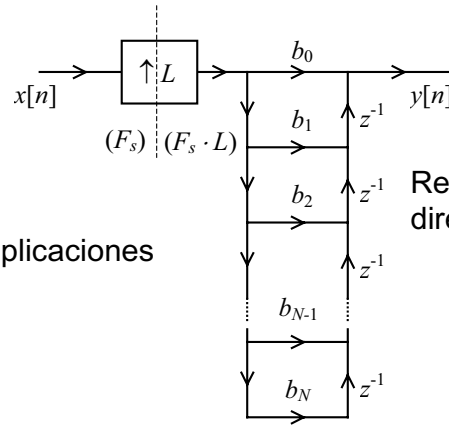
Las operaciones se hacen a F_s en vez de a $F_s \cdot L$
 Complejidad: 2 mult. / muestra de entrada
 $2 \cdot F_s$ mult. / segundo



$$H(z) = \sum_{k=0}^N b_k z^{-k}$$

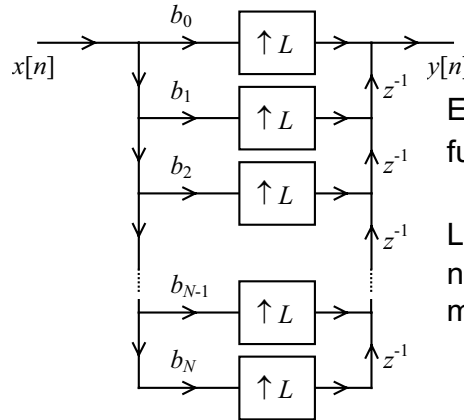
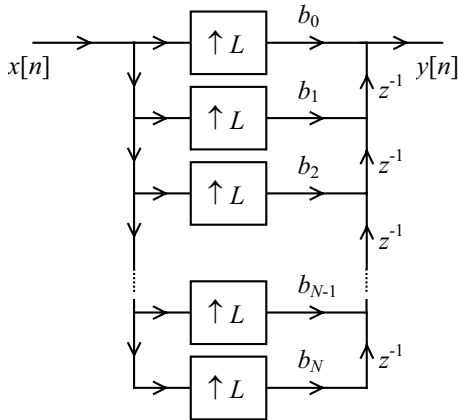
Eliminar multiplicaciones por cero

Estructura para interpolación



Realización con estructura directa transpuesta

$$(N+1) \cdot F_s \cdot L \text{ mult./s}$$



El registro de desplazamiento funciona a $F_s \cdot L$

La sumas al registro sólo es necesario hacerlas cada L muestras

$$(N+1) \cdot F_s \text{ mult./s}$$

Tema 3 Diseño de filtros digitales. Realización

- Realización de sistemas
 - Estructuras
 - Representación con grafos orientados
- Estructuras IIR
 - Directas, en cascada y en paralelo
 - Estructuras transpuestas
- Estructuras FIR
 - Directa y su transpuesta. Estructuras para sistemas FLG
 - Estructuras para interpolación y diezmado
- Efectos de precisión finita
 - Cuantificación de constantes
 - Ruido de redondeo
 - Desbordamiento
- Construcción de sistemas digitales de tratamiento de señal

Tema 3 Diseño de filtros digitales. Realización

- Realización de sistemas
 - Estructuras
 - Representación con grafos orientados
- Estructuras IIR
 - Directas, en cascada y en paralelo
 - Estructuras transpuestas
- Estructuras FIR
 - Directa y su transpuesta. Estructuras para sistemas FLG
 - Estructuras para interpolación y diezmado
- Efectos de precisión finita
 - Cuantificación de constantes
 - Ruido de redondeo
 - Desbordamiento
- Construcción de sistemas digitales de tratamiento de señal

Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

Filtros digitales. Realización.

Representación de valores con precisión finita

- Las **muestras de señal** se almacenan en registros binarios de longitud finita
- Las **constantes del algoritmo** (ganancias de rama) también
- Una palabra binaria, sólo puede representar:
 - un **rango** de valores,
 - con una **precisión** limitada

Hay que tener en cuenta ...

- **Cuantificación** de señales y **constantes**
- **Redondeo** después de una multiplicación (para poder almacenar el resultado)
- **Desbordamiento**: el resultado de una operación supera el rango representable

Los **efectos** del uso de aritmética de precisión finita... dependen de la estructura

Representación con precisión finita

Coma fija



1 bit de signo

B_e bits parte entera

B_f bits parte fraccionaria

$b=1+B_e+B_f$ total bits

$X_m = 2^{B_e}$ fondo de escala

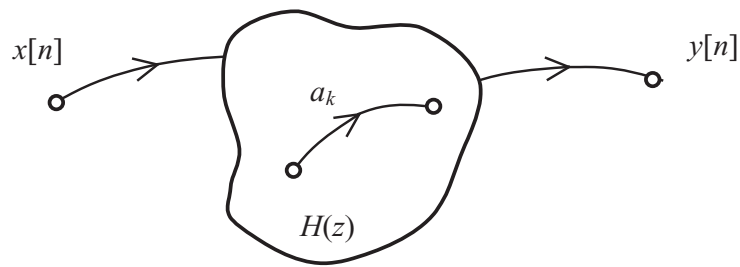
$\Delta = 2^{-B_f}$ separación entre niveles

Números representables: de -2^{B_e} a $2^{B_e} - \Delta$

Tema 3 Diseño de filtros digitales. Realización

- Realización de sistemas
 - Estructuras
 - Representación con grafos orientados
- Estructuras IIR
 - Directas, en cascada y en paralelo
 - Estructuras transpuestas
- Estructuras FIR
 - Directa y su transpuesta. Estructuras para sistemas FLG
 - Estructuras para interpolación y diezmado
- Efectos de precisión finita
 - Cuantificación de constantes
 - Ruido de redondeo
 - Desbordamiento
- Construcción de sistemas digitales de tratamiento de señal

Cuantificación de constantes



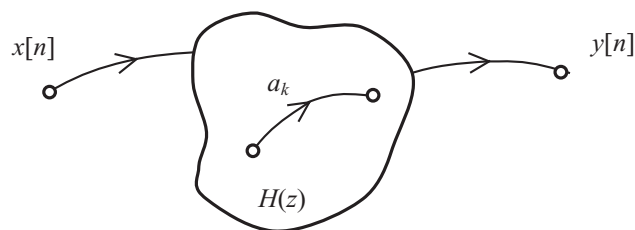
- Las constantes se cuantifican $a_k \rightarrow \hat{a}_k = a_k + \Delta a_k$

$$\text{error: } |\Delta a_k| \leq \frac{\Delta}{2} \quad \text{con} \quad \Delta = 2^{-B_f}$$

- ¿Cómo afecta este error al comportamiento?
- Comportamiento relacionado con la posición de los ceros y, sobre todo, de los polos
- ¿Cómo se desplaza un polo al cuantificar una constante?

$$a_k + \Delta a_k \rightarrow p_i + \Delta p_i$$

Cuantificación de constantes



- La posición de los polos es una función de las constantes $p_i(a_1, a_2, \dots, a_N)$

- Se calculan las sensibilidades $\frac{\partial p_i}{\partial a_k}$

- Desplazamiento debido a Δa_k : $|\Delta p_i| \approx \left| \frac{\partial p_i}{\partial a_k} \cdot \Delta a_k \right| \leq \left| \frac{\partial p_i}{\partial a_k} \right| \cdot \frac{\Delta}{2}$

- $\Delta = 2^{-B_f}$ puede reducirse tanto como se quiera aumentando el número de bits

pero $\left| \frac{\partial p_i}{\partial a_k} \right|$ puede ser muy grande

Estructura directa

$$y[n] = \sum_{k=1}^N \hat{a}_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M \hat{b}_k x[n-k]$$

- Las constantes que se cuantifican son los coeficientes de la función de transferencia

Cálculo de las sensibilidades

- Relación entre los polos y las constantes del algoritmo $p_i(a_1, a_2, \dots, a_N)$

$$1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} = \prod_{i=1}^N (1 - p_i z^{-1})$$

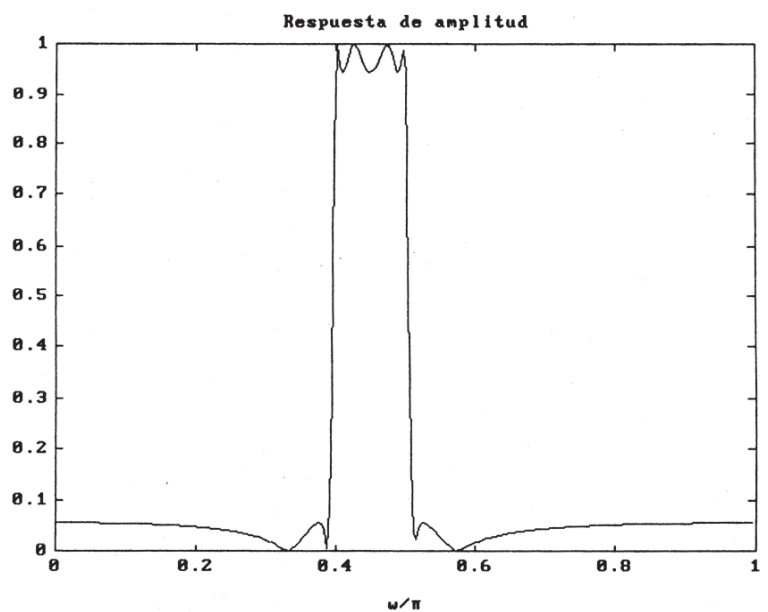
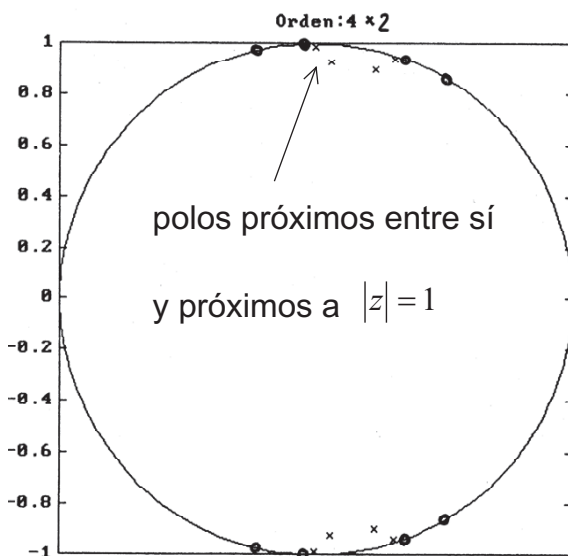
- Derivando y calculando el resultado para $z = p_i$ se obtienen las derivadas parciales:

$$\frac{\partial p_i}{\partial a_k} = \frac{p_i^{N-k}}{\prod_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^N (p_i - p_j)} \leftarrow \text{producto de las } \underline{\text{distancias}} \text{ a otros polos}$$

- Polos próximos \rightarrow desplazamiento grande Problemas con polos próximos a $|z|=1$

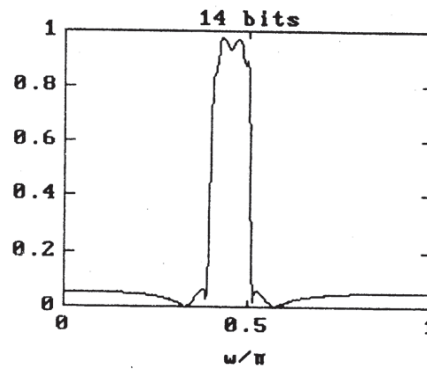
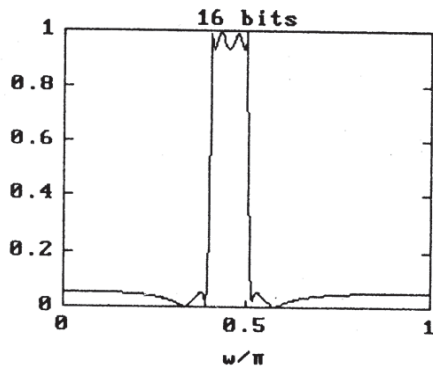
Ejemplo

Filtro paso banda orden 8



Precisión infinita

Estructura directa con precisión finita

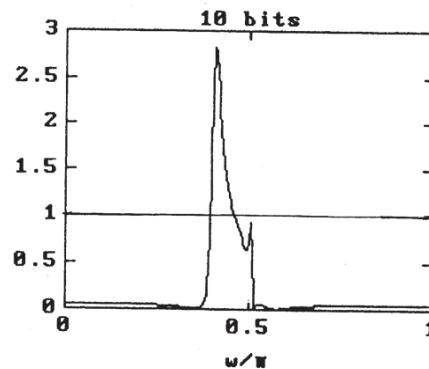
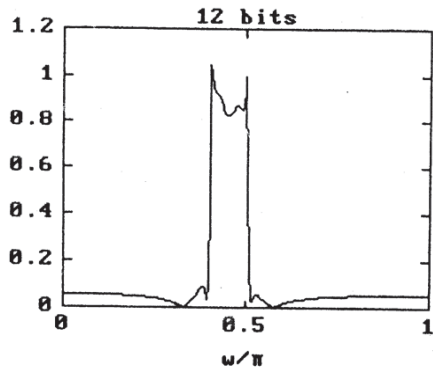


$$b = 1 + B$$

$$B = B_e + B_f$$

$$B_e = 2$$

$$\Delta = 2^{-B_f}$$



$$B_f = 13 \text{ bits}$$

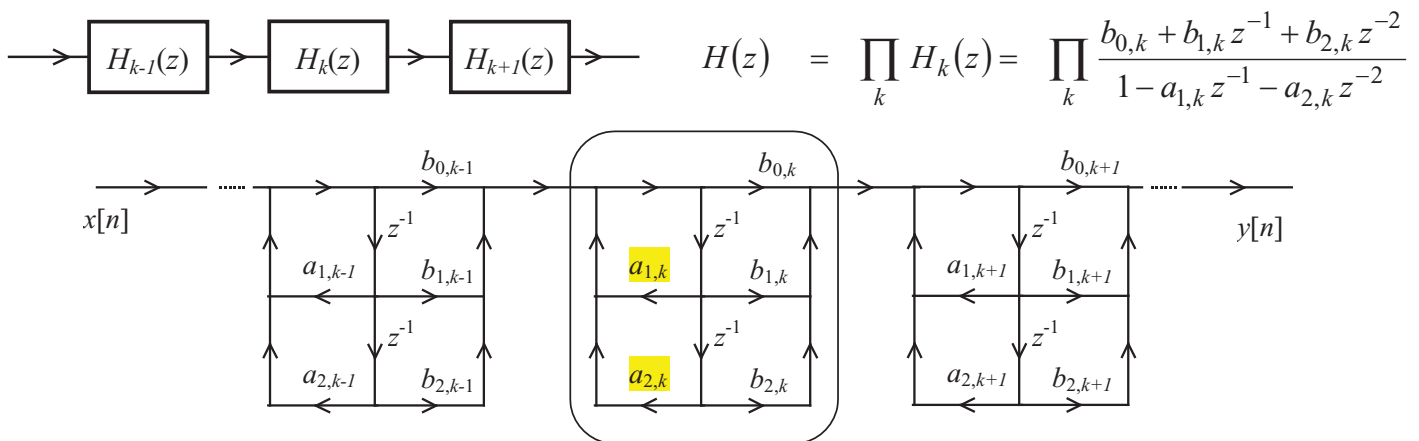
$$11 \text{ bits}$$

$$9 \text{ bits}$$

$$7 \text{ bits}$$

El filtro puede hacerse inestable

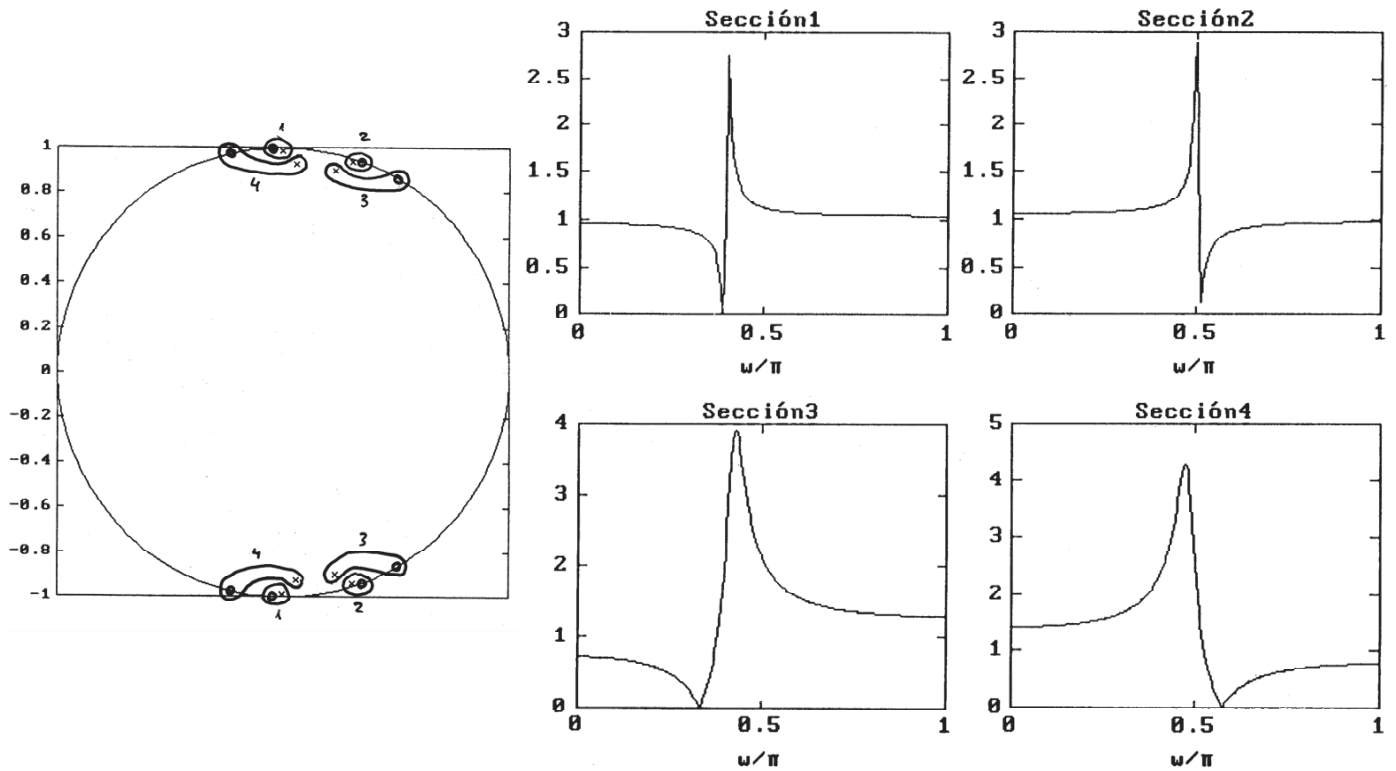
Solución: estructura IIR en cascada:



Las constantes que se cuantifican

- No son los coeficientes de $H(z)$ sino los de cada una de las secciones $H_k(z)$
- El comportamiento $H_k(z)$ de cada sección no depende de la cuantificación en las otras
- El efecto de las constantes sobre los polos de distintas secciones está desacoplado

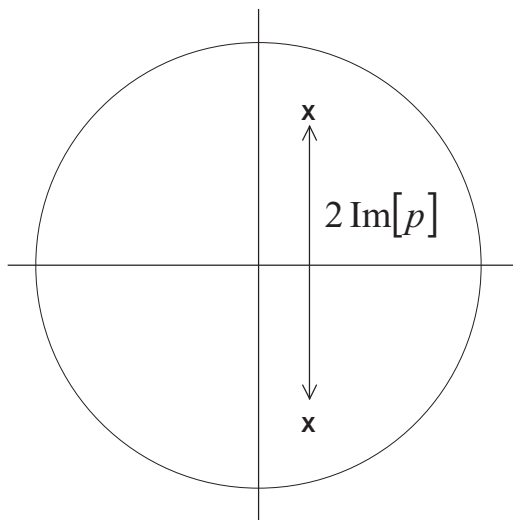
Estructura en cascada



Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

Estructura en cascada

- En cada sección dos polos p y p^* separados $2 \operatorname{Im}[p]$
- Su posición sólo depende de las dos constantes de su sección a_1 y a_2



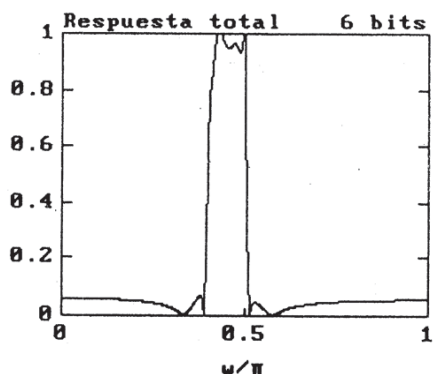
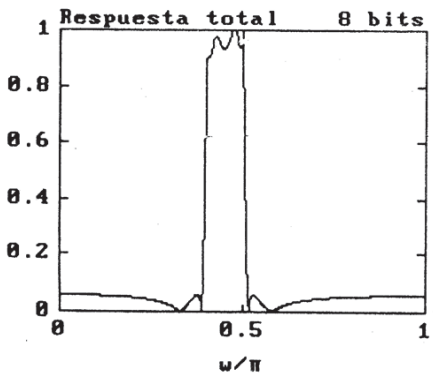
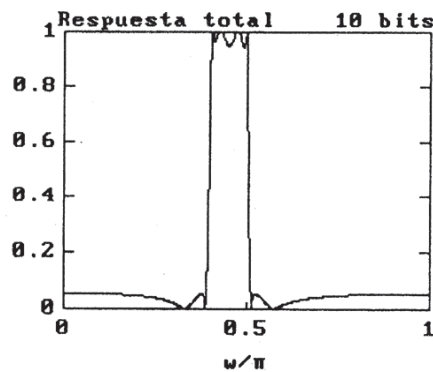
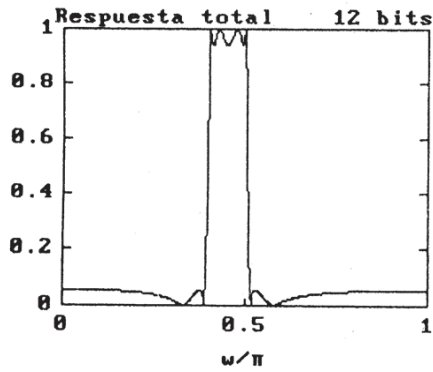
$$A(z) = 1 - a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial a_k} = \frac{p_i^{N-k}}{\prod_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^N (p_i - p_j)}$$

$$\left| \frac{\partial p}{\partial a_1} \right| = \frac{|p|}{2 |\operatorname{Im}[p]|}$$

$$\left| \frac{\partial p}{\partial a_2} \right| = \frac{1}{2 |\operatorname{Im}[p]|}$$

Estructura en cascada



$$b = 1 + B$$

$$B = B_e + B_f$$

$$B_e = 0$$

$$\Delta = 2^{-B_f}$$

$$B_f = 11 \text{ bits}$$

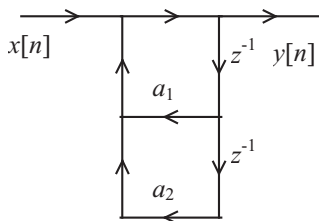
$$19 \text{ bits}$$

$$7 \text{ bits}$$

$$5 \text{ bits}$$

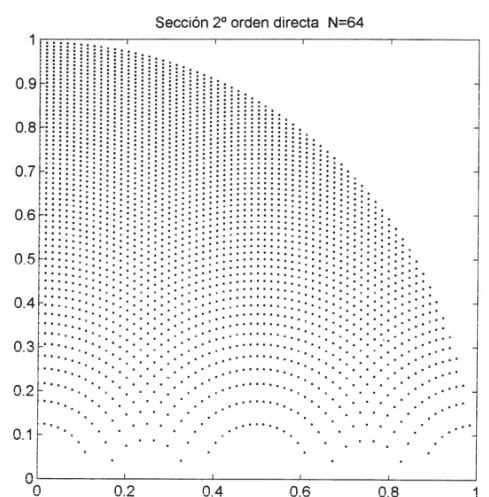
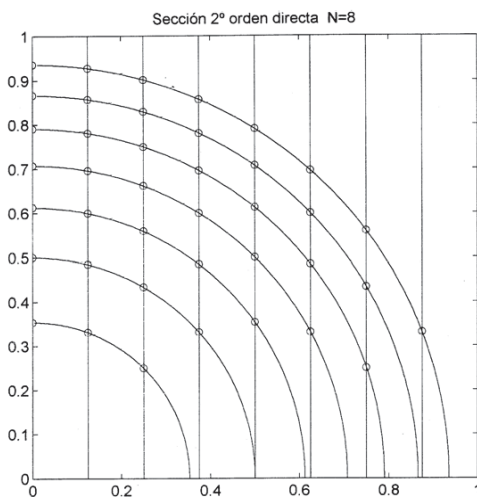
Estructura de 2º orden directa

$$A(z) = 1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} = 1 - 2 \operatorname{Re}(p) z^{-1} + |p|^2 z^{-2}$$



$$a_1 = 2 \operatorname{Re}[p]$$

$$a_2 = -|p|^2$$

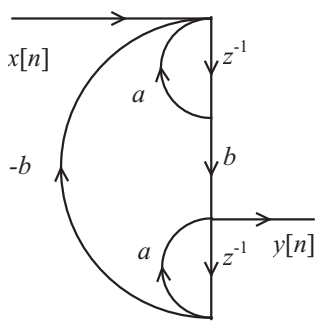


- Mayor error junto al eje real

- Sensibilidades $\left| \frac{\partial p}{\partial a_1} \right| = \frac{|p|}{2 |\operatorname{Im}[p]|}$ $\left| \frac{\partial p}{\partial a_2} \right| = \frac{1}{2 |\operatorname{Im}[p]|}$

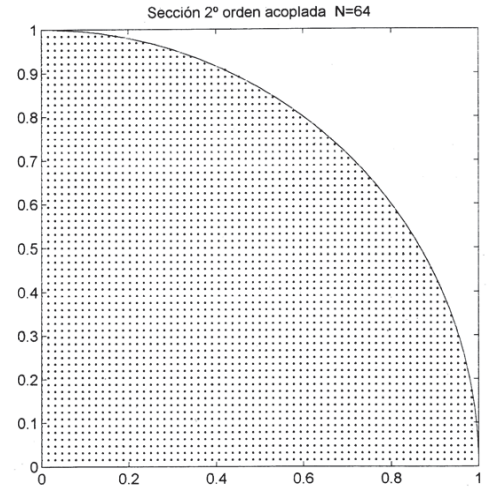
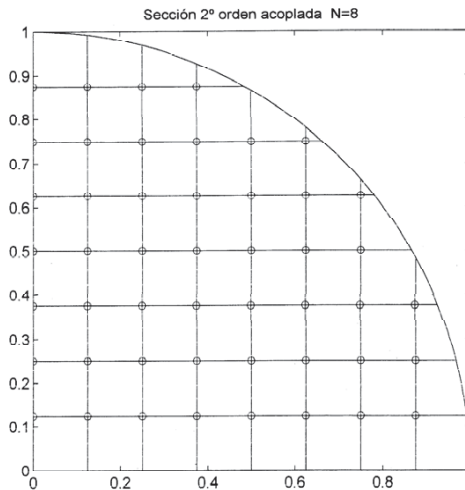
Estructura de 2º orden acoplada

$$A(z) = 1 - 2az^{-1} + (a^2 + b^2)z^{-2}$$



$$a = \text{Re}[p]$$

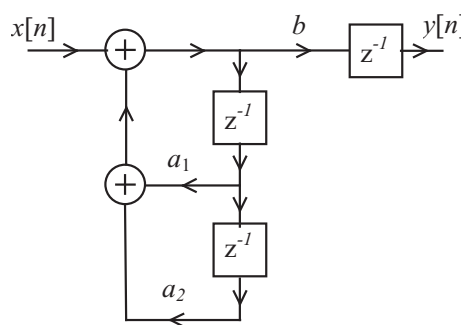
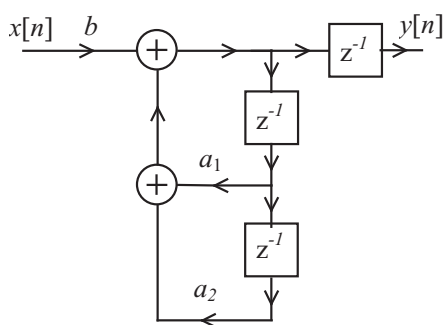
$$b = \text{Im}[p]$$



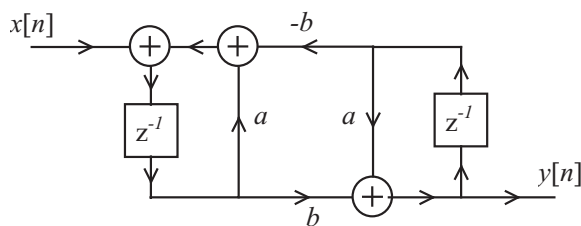
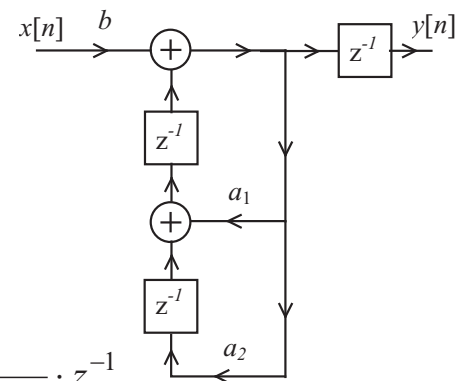
$$p_{1,2} = a \pm jb \quad \left| \frac{\partial p_{1,2}}{\partial a} \right| = \left| \frac{\partial p_{1,2}}{\partial b} \right| = 1 \quad \text{error} \quad \Delta p_{1,2} < \frac{\Delta}{2} = 2^{-B_f - 1}$$

- Sensibilidades y errores no dependen de la posición del polo

Estructuras



$$H(z) = \frac{b}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} \cdot z^{-1}$$



$$H(z) = \frac{b}{1 - 2az^{-1} + (a^2 + b^2)z^{-2}} \cdot z^{-1}$$

$$a_1 = 2a \quad a_2 = -(a^2 + b^2)$$

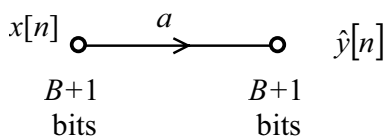
- Un mismo comportamiento puede realizarse con diferentes estructuras

Tema 3 Diseño de filtros digitales. Realización

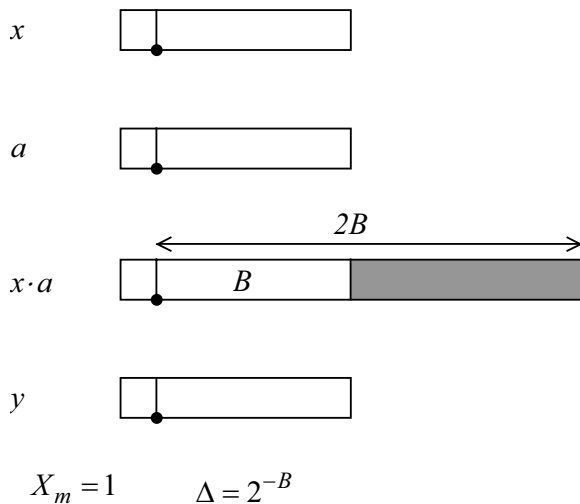
- Realización de sistemas
 - Estructuras
 - Representación con grafos orientados
- Estructuras IIR
 - Directas, en cascada y en paralelo
 - Estructuras transpuestas
- Estructuras FIR
 - Directa y su transpuesta. Estructuras para sistemas FLG
 - Estructuras para interpolación y diezmado
- Efectos de precisión finita
 - Cuantificación de constantes
 - Ruido de redondeo
 - Desbordamiento
- Construcción de sistemas digitales de tratamiento de señal

Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

Redondeo en las multiplicaciones



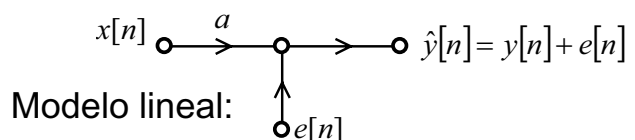
- Coma a la izquierda para evitar desbordamiento $|x[n]| < 1$
- El resultado requiere doble precisión
- Hay que truncarlo para seguir usando el mismo número de bits



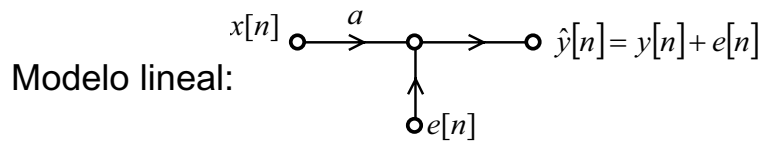
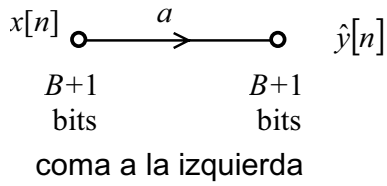
Cuantificación



truncación: $(0, \Delta)$
 error redondeo: $(-\Delta/2, \Delta/2)$



Ruido de redondeo. Modelo



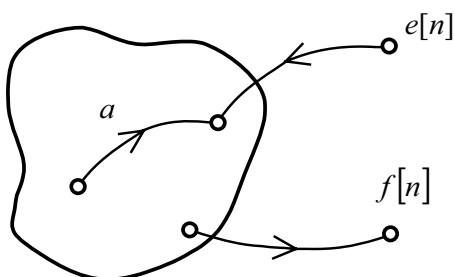
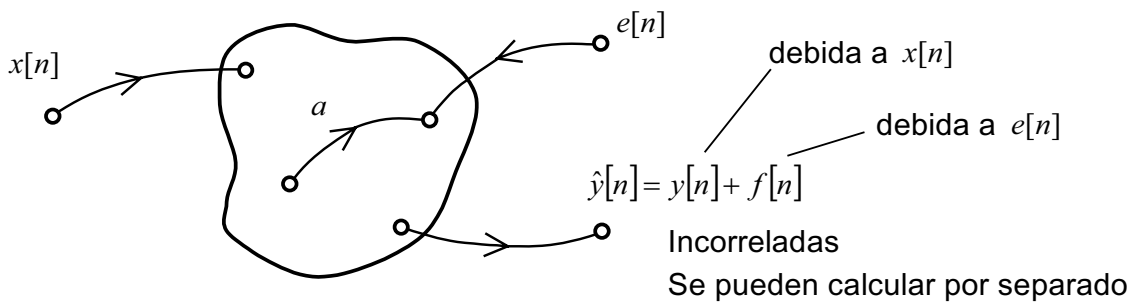
- Señal aleatoria estacionaria blanca (incorrelada consigo misma)
- Incorrelada con la señal
- Incorrelada con otras fuentes de ruido de redondeo
- Valores distribuidos uniformemente en $(-\Delta/2, \Delta/2)$ con $\Delta = 2^{-B}$

potencia	autocorrelación	Densidad espectral de potencia
$\sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12}$	$\phi_{ee}[m] = \sigma_e^2 \delta[m]$	$\Phi_{ee}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2$

Ruido de redondeo

Efecto a la salida

- Una fuente de ruido blanco por cada multiplicación



$e[n]$ blanca de potencia $\sigma_e^2 = \Delta^2/12$

Respuesta al ruido de redondeo

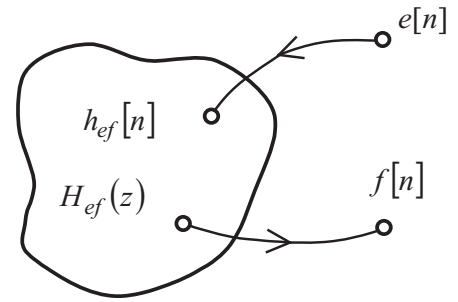
$$H_{ef}(z) \quad h_{ef}[n] \quad H_{ef}(e^{j\omega})$$

Ruido de redondeo

Efecto de una fuente a la salida

Densidad espectral de potencia (d.e.p.)

$$\Phi_{ff}(e^{j\omega}) = |H_{ef}(e^{j\omega})|^2 \cdot \Phi_{ee}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2 \cdot |H_{ef}(e^{j\omega})|^2$$



Potencia

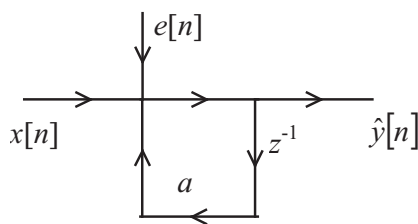
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{ff}(e^{j\omega}) d\omega = \sigma_e^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_{ef}(e^{j\omega})|^2 d\omega = \sigma_e^2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_{ef}[n]|^2$$

Ruido total a la salida

- Fuentes de ruido incorreladas de potencia σ_e^2
- Calcular la respuesta a la salida de cada una de las fuentes de ruido y sumar

$$\text{potencia } \sigma_e^2 \cdot \sum_k \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_{e_k f}[n]|^2 \right) \quad \text{d.e.p. } \sigma_e^2 \cdot \sum_k \left(|H_{e_k f}(e^{j\omega})|^2 \right)$$

Ejemplo. Sistema con un polo: Amplificación de ruido

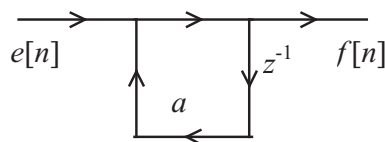


$$0 < a < 1$$

Función de transferencia para la señal

$$H(z) = \frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}}$$

Equivalentente para ruido $e[n]$



Función de transferencia para el ruido

$$H_{ef}(z) = H(z) = \frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}} \quad h_{ef}[n] = a^n \cdot u[n]$$

($a < 1$: decreciente)

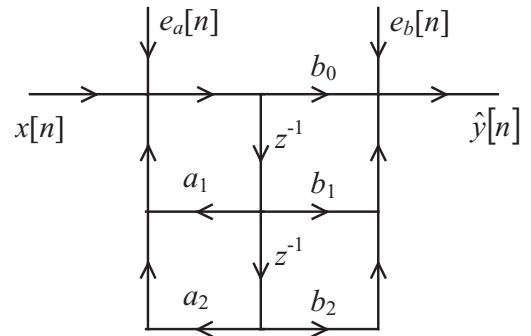
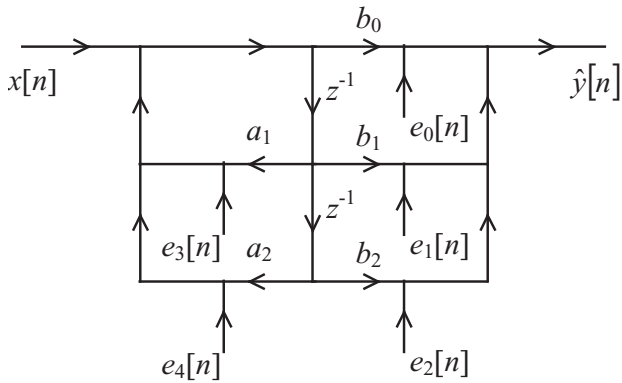
Potencia de ruido a la salida

$$\sigma_e^2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_{ef}[n]|^2 = \sigma_e^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |a^n|^2 = \sigma_e^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (a^2)^n = \frac{\sigma_e^2}{1 - a^2}$$

- Cuando $a \rightarrow 1$ la potencia tiende a infinito
- Polos próximos a la circunferencia unidad producen amplificación de ruido

Ruido de redondeo. Estructura directa II

2º orden



$e_0[n]$ a $e_4[n]$ fuentes aleatorias con iguales parámetros

- blancas
- potencia $\Delta^2 / 12$
- incorreladas entre sí

Pueden agruparse sumando potencias:

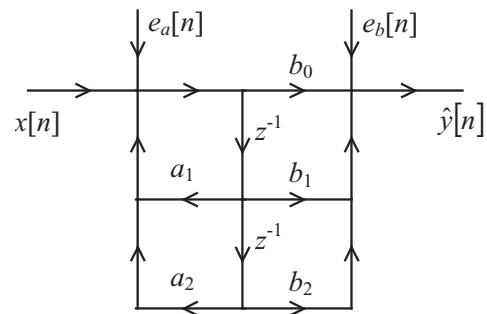
$$e_a[n] = e_3[n] + e_4[n] \quad \rightarrow \quad \sigma_a^2 = 2\sigma^2$$

$$e_b[n] = e_0[n] + e_1[n] + e_2[n] \quad \rightarrow \quad \sigma_b^2 = 3\sigma^2$$

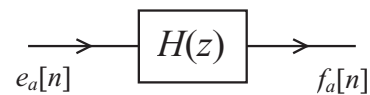
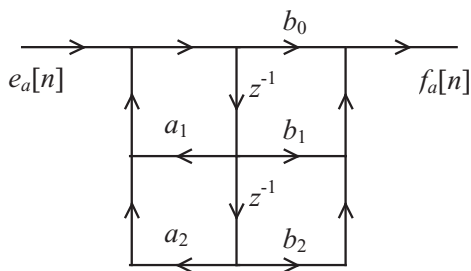
Ruido de redondeo. Estructura directa II

Fuentes incorreladas:

su efecto a la salida puede calcularse por separado y sumar en potencia



Equivalente para $e_a[n]$



d.e.p. $2\sigma^2 |H(e^{j\omega})|^2$

potencia $2\sigma^2 \sum |h[n]|^2$

Equivalente para $e_b[n]$

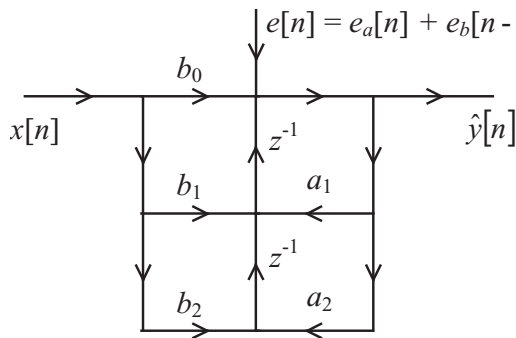
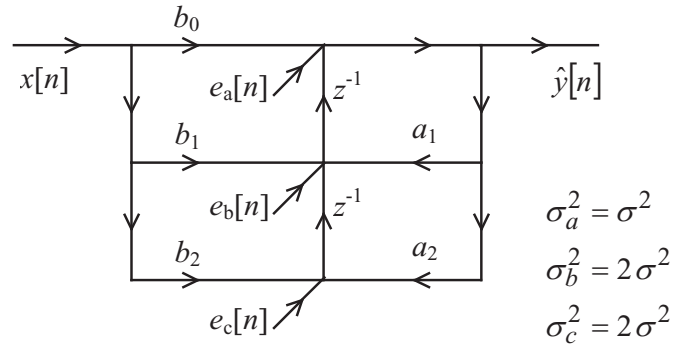
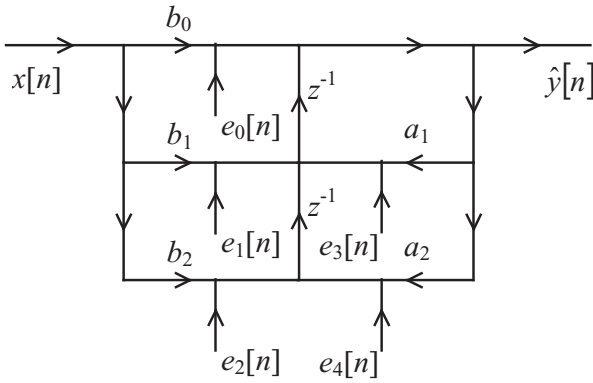


d.e.p. $3\sigma^2$

potencia $3\sigma^2$

Ruido de redondeo. Estructura directa II transpuesta

2º orden

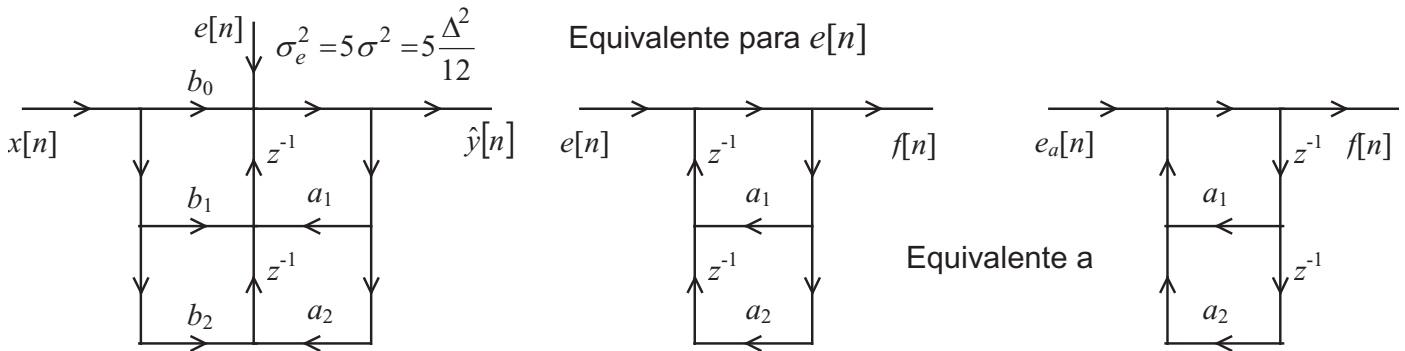


Una señal estacionaria retrasada tiene los mismos parámetros

$$\sigma_e^2 = 5\sigma^2 = 5\frac{\Delta^2}{12}$$

Ruido de redondeo. Estructura directa II transpuesta

2º orden



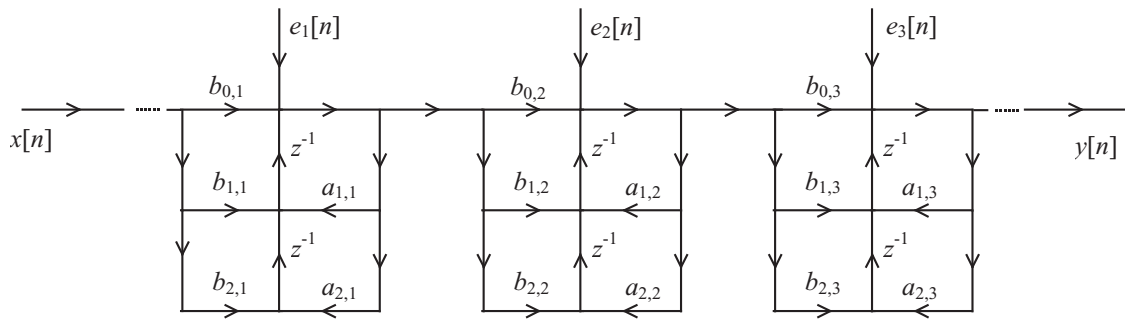
$$H_{ef}(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} = \frac{1}{A(z)}$$

d.e.p. $\frac{5\sigma^2}{|1 - a_1 e^{-j\omega} - a_2 e^{-j2\omega}|^2}$

potencia $5\sigma^2 \sum_{n=0}^{\infty} |h_{ef}[n]|^2$

- El efecto a la salida es equivalente al de un sistema con solo polos
- Si los polos están cerca de $|z|=1$ el ruido se amplifica
- En la estructura directa II no ocurre (los polos se cancelan algo con los ceros)

Ruido de redondeo. Estructura en cascada. Secciones directas II transpuestas



$$e_1[n] \rightarrow H_{e_{1f}}(z) = \frac{1}{A_1(z)} \cdot H_2(z) \cdot H_3(z)$$

$$e_2[n] \rightarrow H_{e_{2f}}(z) = \frac{1}{A_2(z)} \cdot H_3(z)$$

$$e_3[n] \rightarrow H_{e_{3f}}(z) = \frac{1}{A_3(z)}$$

Densidad espectral de potencia

$$5\sigma^2 \cdot \left(|H_{e_{1f}}(e^{j\omega})|^2 + |H_{e_{2f}}(e^{j\omega})|^2 + |H_{e_{3f}}(e^{j\omega})|^2 \right)$$

$$\frac{5\sigma^2 |H_2(e^{j\omega})|^2 |H_3(e^{j\omega})|^2}{|A_1(e^{j\omega})|^2} + \frac{5\sigma^2 |H_3(e^{j\omega})|^2}{|A_2(e^{j\omega})|^2} + \frac{5\sigma^2}{|A_3(e^{j\omega})|^2}$$

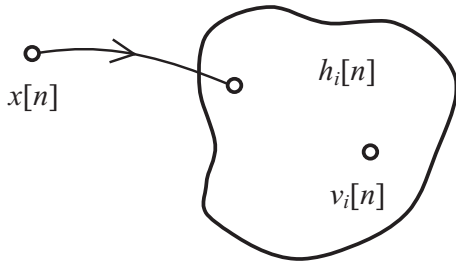
Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

Tema 3 Diseño de filtros digitales. Realización

- Realización de sistemas
 - Estructuras
 - Representación con grafos orientados
- Estructuras IIR
 - Directas, en cascada y en paralelo
 - Estructuras transpuestas
- Estructuras FIR
 - Directa y su transpuesta. Estructuras para sistemas FLG
 - Estructuras para interpolación y diezmado
- Efectos de precisión finita
 - Cuantificación de constantes
 - Ruido de redondeo
 - Desbordamiento
- Construcción de sistemas digitales de tratamiento de señal

Desbordamiento

- Coma fija a la izquierda $B_e=0$ $X_m=1$



Señal de entrada $|x[n]| < 1$

En todo el grafo:
sólo son representables
valores absolutos < 1

Para evitar desbordamientos: asegurar en todos los nodos $|v_i[n]| < 1$

$$v_i[n] = \sum_k h_i[k] \cdot x[n-k]$$

$h_i[n]$ respuesta al impulso desde la entrada al nodo i

Desbordamiento

$$\begin{aligned} |v_i[n]| &= \left| \sum_k h_i[k] \cdot x[n-k] \right| \leq \sum_k |h_i[k] \cdot x[n-k]| = \\ &= \sum_k |h_i[k]| \cdot |x[n-k]| < \sum_k |h_i[k]| \end{aligned}$$

Nodo i

$$|x[n]| < 1 \text{ y } \sum_k |h_i[k]| < 1 \Rightarrow |v_i[n]| < 1$$

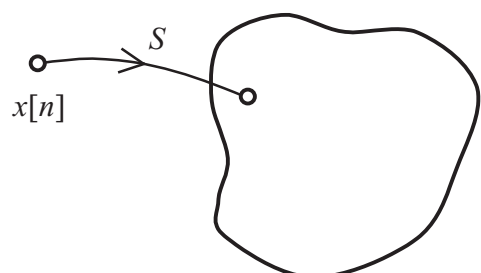
Una condición suficiente para evitar el desbordamiento si $|x[n]| < 1$

$$\sum_k |h_i[k]| < 1 \quad \forall i$$

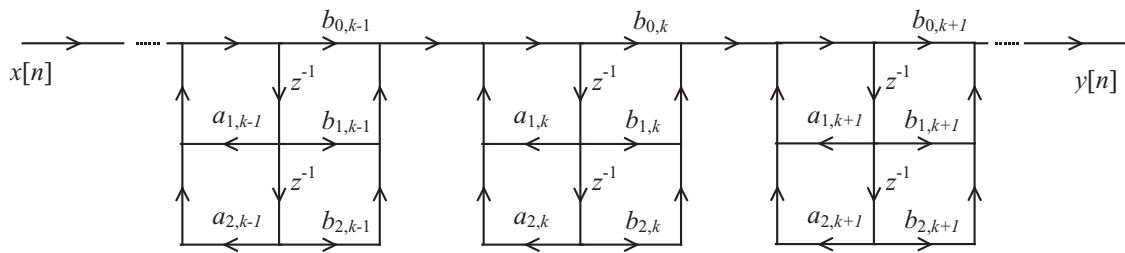
para todos los nodos del sistema

Si no se cumple se puede aplicar un **factor de escala** a la entrada:

$$S = \frac{1}{\max_i \sum_k |h_i[k]|}$$



Estructura en cascada



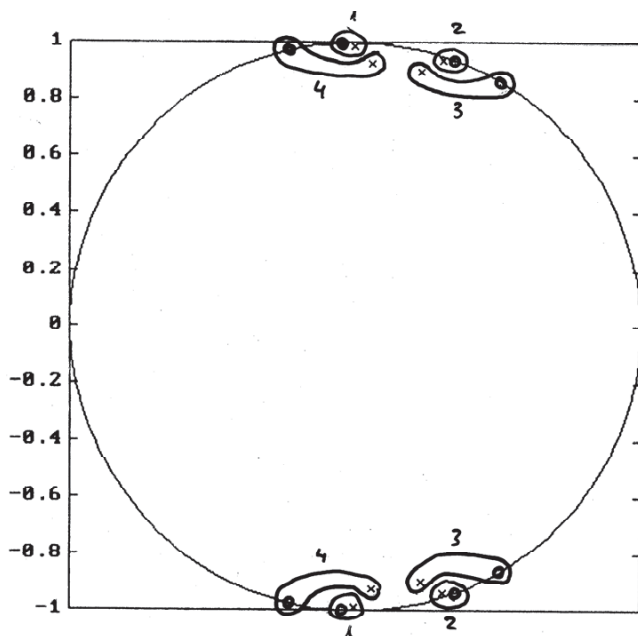
$$H(z) = b_0 \cdot \prod_k \frac{(1 - c_k z^{-1})}{(1 - p_k z^{-1})} \cdot \prod_k \frac{(1 - d_k z^{-1}) \cdot (1 - d_k^* z^{-1})}{(1 - q_k z^{-1}) \cdot (1 - q_k^* z^{-1})} = \prod_k \frac{b_{0,k} + b_{1,k} z^{-1} + b_{2,k} z^{-2}}{1 - a_{1,k} z^{-1} + a_{2,k} z^{-2}}$$

$$b_0 = \prod_k b_{0,k}$$

¿Cómo agrupar polos y ceros?

¿Cómo repartir b_0 entre las secciones?

Estructura en cascada



Agrupación de polos y ceros

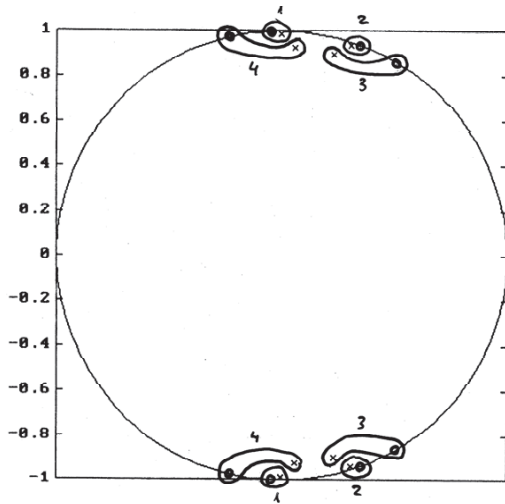
- Cancelar polos con ceros
- para evitar desbordamiento

Procedimiento

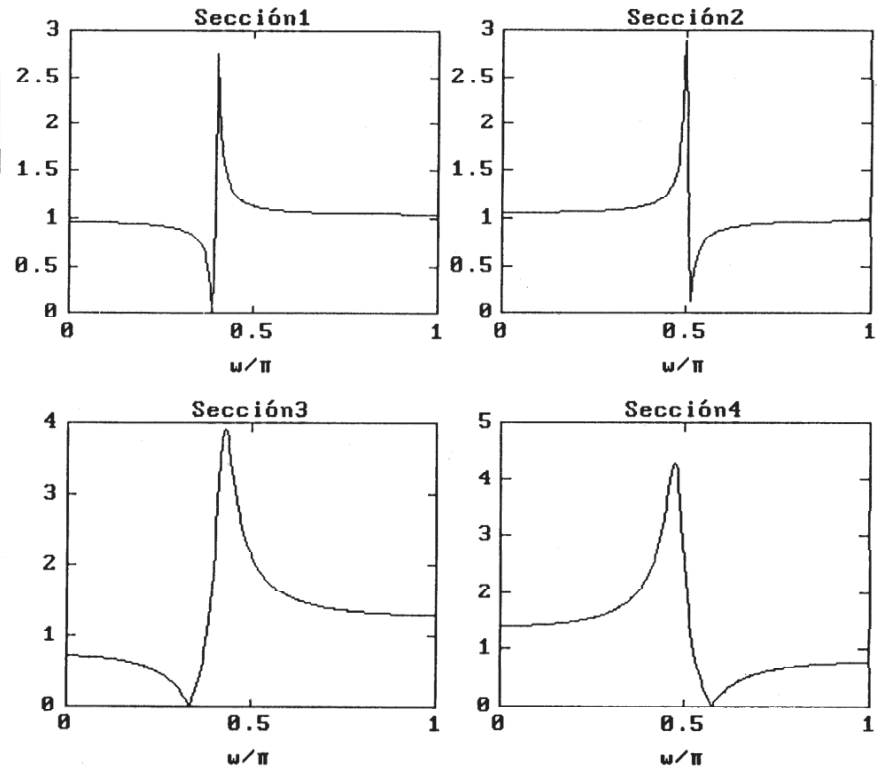
- Polo más próximo a $|z|=1$
- Asociarle el cero más próximo a él
- Siguiendo polo más próximo a $|z|=1$
- Asociarle el cero más próximo a él de los restantes

...

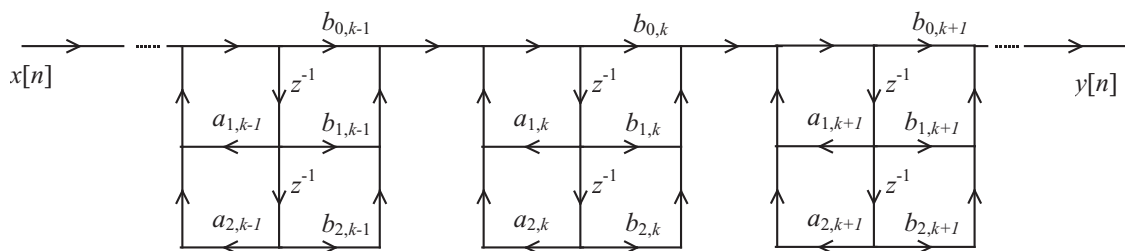
Estructura en cascada



Cancelar polos con ceros para reducir los picos de ganancia



Estructura en cascada



$$H(z) = \prod_k \frac{b_{0,k} + b_{1,k}z^{-1} + b_{2,k}z^{-2}}{1 - a_{1,k}z^{-1} + a_{2,k}z^{-2}}$$

$$b_0 = \prod_k b_{0,k}$$

¿Cómo repartir b_0 entre las secciones?

$ b_0 > 1$	<ul style="list-style-type: none"> para evitar el riesgo de desbordamiento: al final para reducir el ruido añadido a lo largo de la estructura: al principio
$ b_0 < 1$	<ul style="list-style-type: none"> para reducir riesgo de desbordamiento: al principio para reducir ruido añadido a lo largo de la estructura: al final

Repartir uniformemente

Tema 3 Diseño de filtros digitales. Realización

- Realización de sistemas
 - Estructuras
 - Representación con grafos orientados
- Estructuras IIR
 - Directas, en cascada y en paralelo
 - Estructuras transpuestas
- Estructuras FIR
 - Directa y su transpuesta. Estructuras para sistemas FLG
 - Estructuras para interpolación y diezmado
- Efectos de precisión finita
 - Cuantificación de constantes
 - Ruido de redondeo
 - Desbordamiento
- Construcción de sistemas digitales de tratamiento de señal

Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

FILTROS DIGITALES. CONSTRUCCIÓN

Ejecución cableada (<i>concurrente</i>)	Ejecución programada (<i>secuencial</i>)
Registros, sumadores, multiplicadores	Procesador digital de señal (DSP): Registros, Unidad de Control, ALU, multiplicador, memoria para datos y programa
Algoritmo (estructura) definido mediante un cableado	Algoritmo (estructura) definido mediante un programa
Puede haber operaciones simultáneas (concurrentes) si el algoritmo lo permite	Todas las operaciones son secuenciales
ejecución rápida	ejecución lenta
↑ Complejidad algoritmo: ↑ Tamaño ↑ Consumo = Tiempo de procesado de una muestra	↑ Complejidad algoritmo: = Consumo, Tamaño (excepto memoria) ↑ Tiempo de procesado de una muestra ↓ Frecuencia de muestreo admisible

FILTROS DIGITALES. CONSTRUCCIÓN

Ejecución cableada (*concurrente*)

- Aritmética discreta
 - registros, sumadores, multiplicadores

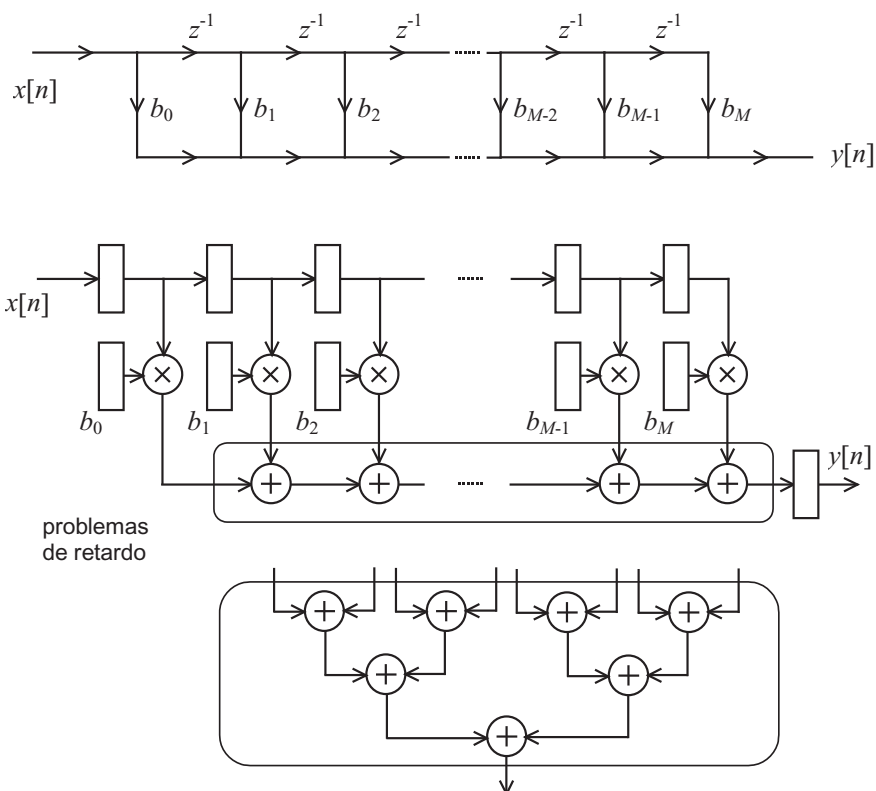
Ejecución programada (*secuencial*)

- Procesador digital de señal (DSP):
 - registros, ALU, Multiplicador, Unidad de Control, Memoria para datos y programa

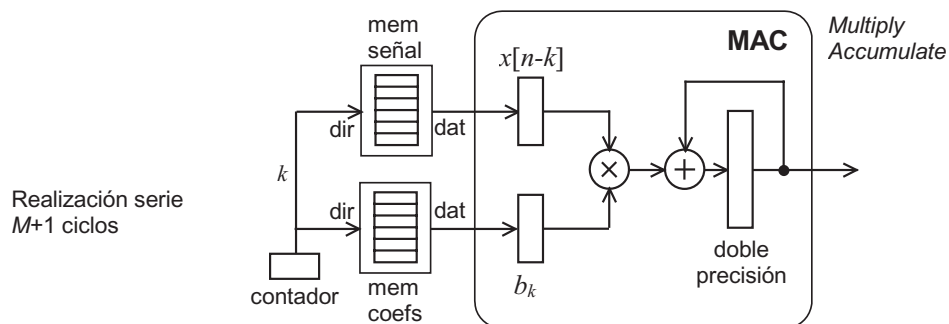
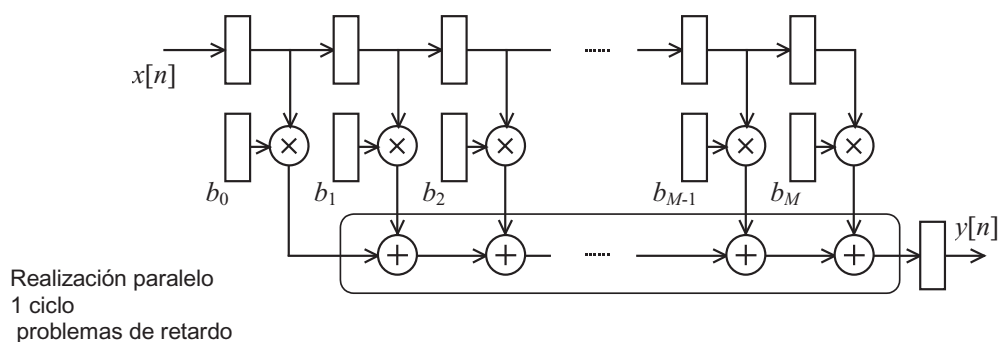
Ejecución mixta

- Procesador con paralelismo
 - varios multiplicadores, varias ALU, memorias separadas, etc.

Realización de Filtros FIR



Realización de Filtros FIR



FILTROS DIGITALES. CONSTRUCCIÓN

Ejecución cableada (*concurrente*)

- Aritmética discreta
 - registros, sumadores, multiplicadores

Ejecución programada (*secuencial*)

- Procesador digital de señal (DSP):
 - registros, ALU, Multiplicador, Unidad de Control, Memoria para datos y programa
 - instrucciones especiales:
 - FIR: *Multiply-Accumulate* (MAC) en un ciclo
 - FFT: *butterfly*

Ejecución mixta

- Procesador con paralelismo
 - varios multiplicadores, varias ALU, memorias separadas, etc.
- Ejecución cableada serie: FIR con MAC, contador y memorias (uno para cada filtro)

FILTROS DIGITALES. REALIZACIÓN - CONSTRUCCIÓN

Los efectos del uso de aritmética de precisión finita...

- **Sólo dependen de la estructura**
- **No dependen de la construcción** (a igualdad de longitud de palabra)

La estructura abstrae el tiempo (de ejecución de las operaciones y de muestreo)

La estructura puede representar	La estructura no puede representar
Complejidad número de operaciones por muestra memoria para variables de estado	Tamaño HW
Comportamiento con precisión finita (de señales y constantes)	Frecuencia máxima de las señales por tiempo de procesado de una muestra
	Consumo de energía crece con tamaño y velocidad de funcionamiento (<i>dependen del tipo y tecnología de ejecución</i>)

Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

Tema 3 Diseño de filtros digitales. Realización

- Realización de sistemas
 - Estructuras
 - Representación con grafos orientados
- Estructuras IIR
 - Directas, en cascada y en paralelo
 - Estructuras transpuestas
- Estructuras FIR
 - Directa y su transpuesta. Estructuras para sistemas FLG
 - Estructuras para interpolación y diezmado
- Efectos de precisión finita
 - Cuantificación de constantes
 - Ruido de redondeo
 - Desbordamiento
- Construcción de sistemas digitales de tratamiento de señal

Estructura directa. Cálculo de las sensibilidades

- Relación entre las raíces y los coeficientes del polinomio $p_i(a_1, a_2, \dots, a_N)$

$$A(z) = 1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} = \prod_{i=1}^N (1 - p_i z^{-1})$$

- Derivando respecto a a_k o p_i

$$A(z) = 1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \quad \frac{\partial A(z)}{\partial a_k} = -z^{-k}$$

$$A(z) = \prod_{i=1}^N (1 - p_i z^{-1}) \quad \frac{\partial A(z)}{\partial p_i} = -z^{-1} \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (1 - p_j z^{-1}) = -z^{-N} \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (z - p_j)$$

- Relacionando las derivadas parciales y calculando para $z = p_i$

$$\frac{\partial A(z)}{\partial a_k} = \sum_j \frac{\partial A(z)}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial a_k} \quad \left. \frac{\partial A(z)}{\partial a_k} \right|_{z=p_i} = \left. \frac{\partial A(z)}{\partial p_i} \right|_{z=p_i} \frac{\partial p_i}{\partial a_k}$$

(al ser $A(z)|_{z=p_i} = 0$ las otras derivadas son nulas)

- Despejando la sensibilidad

$$\frac{\partial p_i}{\partial a_k} = \frac{\left. \frac{\partial A(z)}{\partial a_k} \right|_{z=p_i}}{\left. \frac{\partial A(z)}{\partial p_i} \right|_{z=p_i}} = \frac{-p_i^{-k}}{-p_i^{-N} \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (p_i - p_j)} = \frac{p_i^{N-k}}{\prod_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^N (p_i - p_j)}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial a_k} = \frac{p_i^{N-k}}{\prod_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^N (p_i - p_j)} \leftarrow \text{producto de las } \underline{\text{distancias}} \text{ a otros polos}$$

Tema 4 Transformada discreta de Fourier

Introducción

- Series de Fourier discretas (DFS)
- Muestreo en frecuencia

Transformada discreta de Fourier

- Propiedades de la DFT

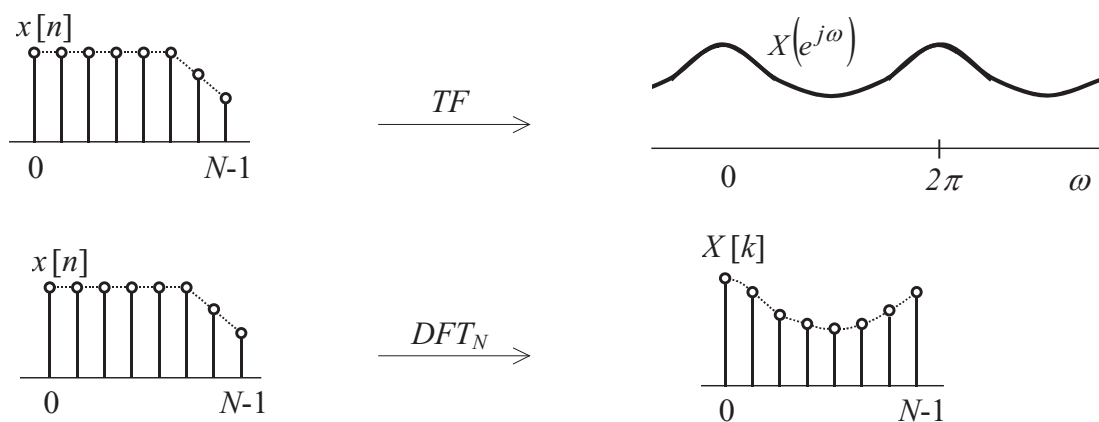
Cálculo eficiente de la DFT

Tema 4 Transformada discreta de Fourier

- Introducción
 - Series de Fourier discretas (DFS)
 - Muestreo en frecuencia
- Transformada discreta de Fourier
 - Propiedades de la DFT
- Cálculo eficiente de la DFT

Introducción

- TF es una función continua → inconveniente para PDS
- DFT de N puntos: N muestras equiespaciadas de la TF entre 0 y 2π



Para su estudio es preciso previamente recordar

- Series de Fourier discretas
- Muestreo en frecuencia

Tema 4 Transformada discreta de Fourier

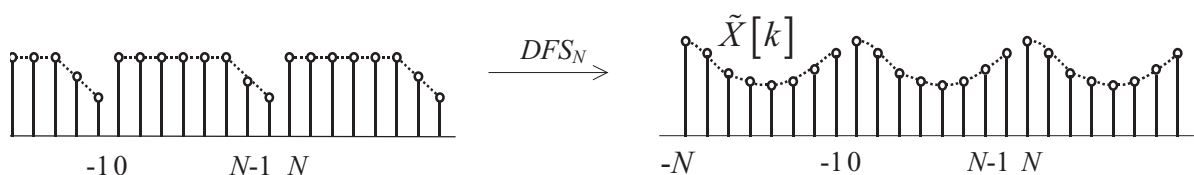
- Introducción
 - Series de Fourier discretas (DFS)
 - Muestreo en frecuencia
- Transformada discreta de Fourier
 - Propiedades de la DFT
- Cálculo eficiente de la DFT

DFS. Definición

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{x}[n] & \xrightarrow{DFS_N} & \tilde{X}[k] \\
 \text{periódica} & & \text{periódica} \\
 \tilde{x}[n] = \tilde{x}[n + N] & & \tilde{X}[k] = \tilde{X}[k + N]
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 DFS_N \\
 IDFS_N
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\
 \tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\
 \text{periódica en } k \text{ y en } n \\
 \tilde{x}[n] \text{ y } \tilde{X}[k] \\
 \text{definidas por } N \text{ valores}
 \end{array}$$



DFS. Propiedades

Linealidad

$$a \tilde{x}_1[n] + b \tilde{x}_2[n] \xrightarrow{DFS_N} a \tilde{X}_1[k] + b \tilde{X}_2[k]$$

Desplazamiento

$$\tilde{x}[n-m] \xrightarrow{DFS_N} \tilde{X}[k] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}km}$$

$$\tilde{x}[n] \cdot e^{\frac{2\pi}{N}kl} \xleftarrow{IDFS_N} \tilde{X}[k-l]$$

Dualidad

$$\tilde{X}[k] \xrightarrow{IDFS_N} \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \tilde{x}[n]$$

$$\tilde{X}[k] \xrightarrow{DFS_N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = N \cdot \tilde{x}[-n]$$

Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

DFS. Propiedades

Simetría

$$\text{Si } \tilde{x}[n] \text{ real} \quad \tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \tilde{X}^*[-k] \quad \text{simétrica conjugada}$$

Convolución

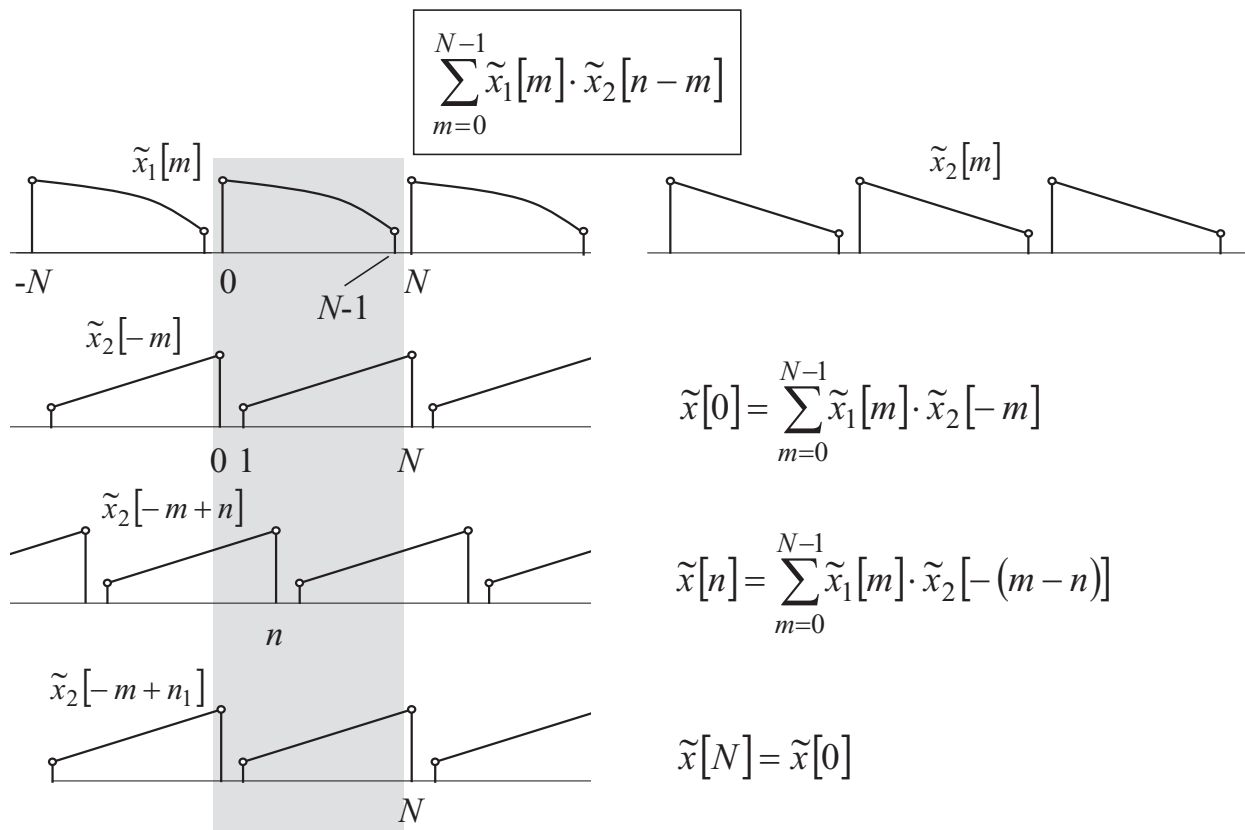
$$\tilde{x}_1[n] \xrightarrow{DFS_N} \tilde{X}_1[k] \quad \text{todas periódicas de periodo } N$$

$$\tilde{x}_2[n] \xrightarrow{DFS_N} \tilde{X}_2[k]$$

$$\tilde{X}_1[k] \cdot \tilde{X}_2[k] \xrightarrow{IDFS_N} \sum_{\text{periodo}} \tilde{x}_1[m] \cdot \tilde{x}_2[n-m] = \tilde{x}_1[n] \otimes \tilde{x}_2[n]$$

convolución periódica

Convolución periódica

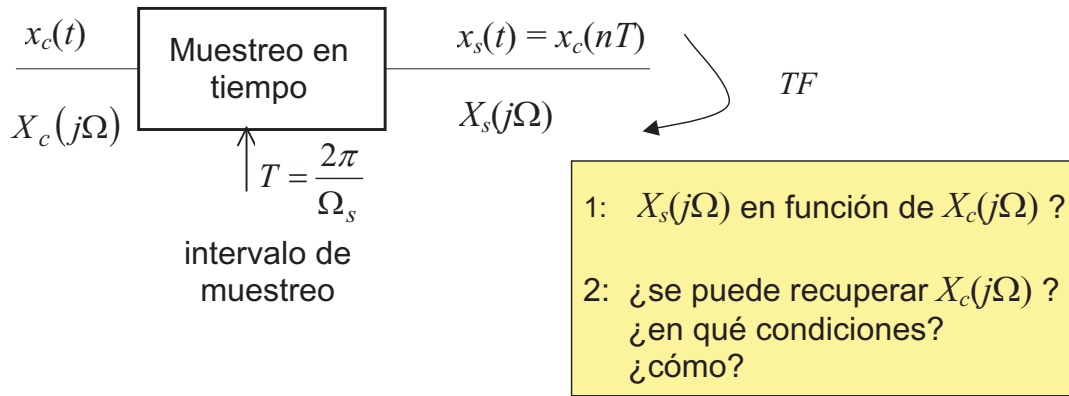


Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

Tema 4 Transformada discreta de Fourier

- Introducción
 - Series de Fourier discretas (DFS)
 - Muestreo en frecuencia
- Transformada discreta de Fourier
 - Propiedades de la DFT
- Cálculo eficiente de la DFT

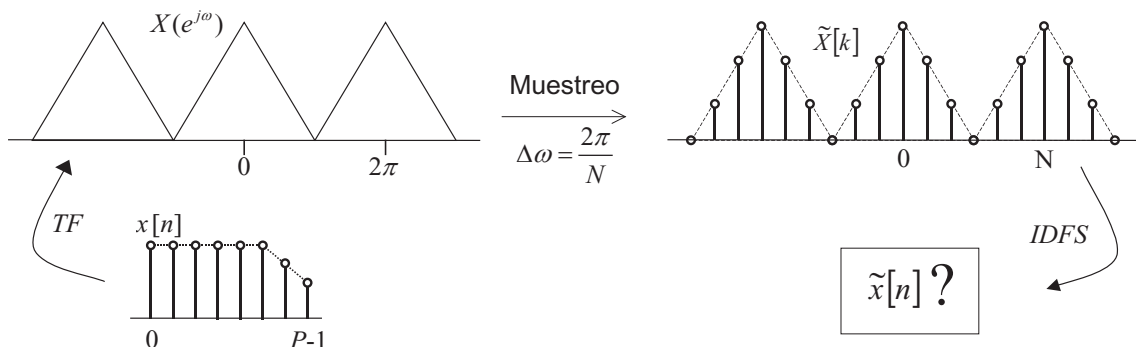
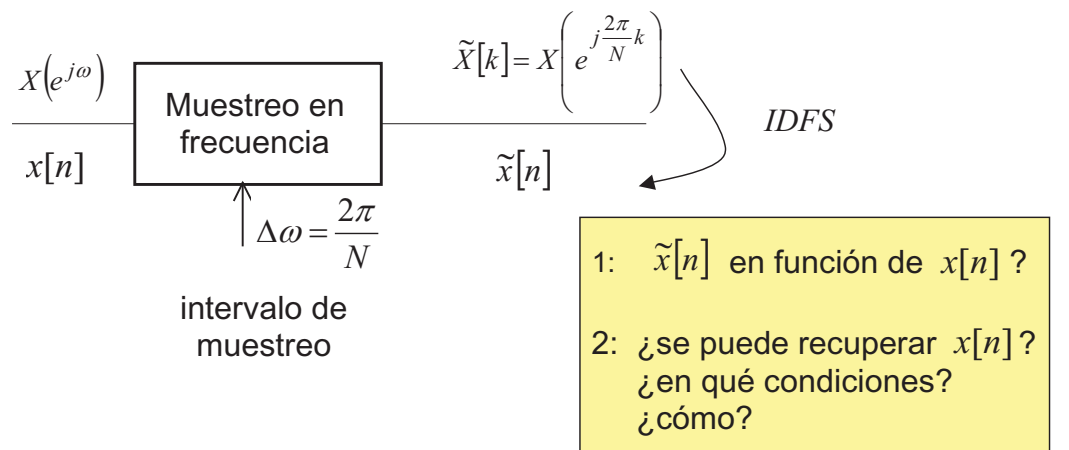
Muestreo en tiempo



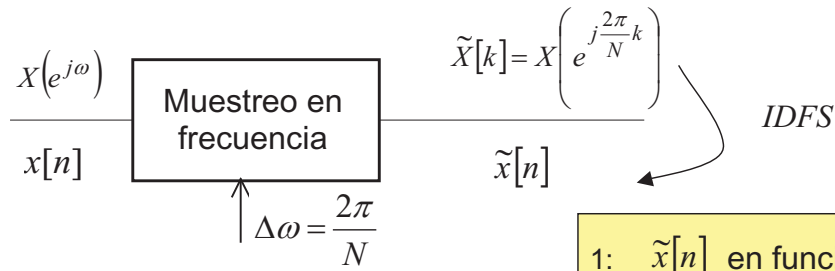
1:
$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_k X_c(j\Omega - jk\Omega_s)$$

2: Si $X_c(j\Omega)$ es limitada en banda a $(-\Omega_n, \Omega_n)$ y $\Omega_s \geq 2\Omega_n$ se puede recuperar con un filtro paso bajo con $\Omega_c = \Omega_s/2$

Muestreo en frecuencia



Muestreo en frecuencia



intervalo de muestreo
 N entero
 N muestras en 2π

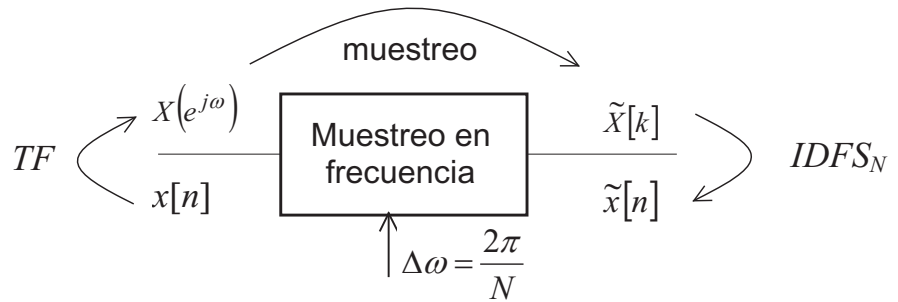
- 1: $\tilde{x}[n]$ en función de $x[n]$?
- 2: ¿se puede recuperar $x[n]$?
 ¿en qué condiciones?
 ¿cómo?

1:
$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - rN]$$

Copias separadas N

- 2: Si $x[n]$ es de longitud limitada P y $N \geq P$
 se puede recuperar con una ventana rectangular de longitud N

Muestreo en frecuencia



- 1 1 Tr. Fourier

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\omega m}$$

- 2 2 muestreo

$$\tilde{X}[k] = X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\frac{2\pi}{N}km}$$

- 3 3 IDFS_N

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \begin{cases} N & n - m = rN \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \right] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k(n-m)} \right] = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m=n-rN \\ r \text{ entero}}}^{\infty} x[m]$$

Muestreo en frecuencia

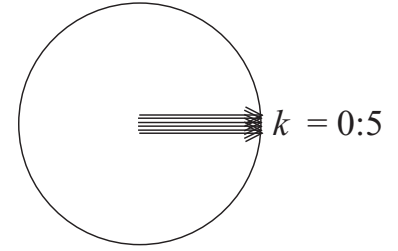
$(n - m) = rN$ con r entero:

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k(n-m)} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}krN} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi(kr)} = \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N$$

$$n - m = 6 = N$$

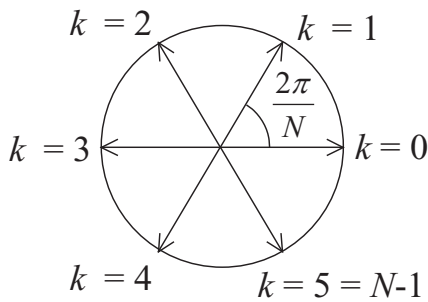
$(n - m)$ no múltiplo de N

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\left(\frac{(n-m)}{N}\right) \cdot k \cdot 2\pi} = 0$$

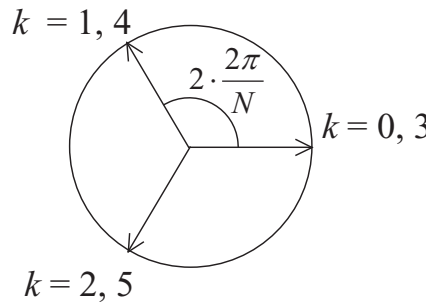


Ejemplo $N=6$

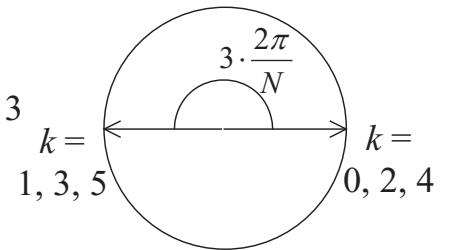
$$n - m = 1$$



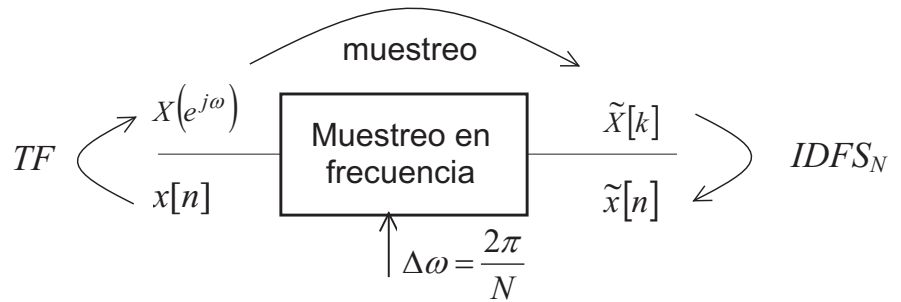
$$n - m = 2$$



$$n - m = 3$$



Muestreo en frecuencia



$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \right] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k(n-m)} \right] = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m=n-rN \\ r \text{ entero}}}^{\infty} x[m]$$

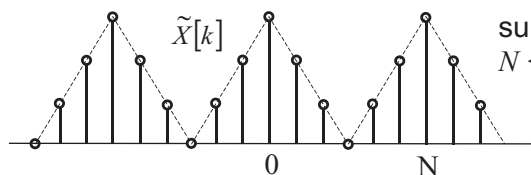
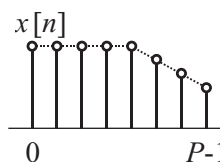
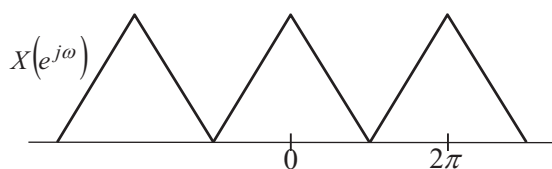
$$= \begin{cases} N & n - m = rN \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Para cada n : suma de todas las muestras separadas un múltiplo de N

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - rN]$$

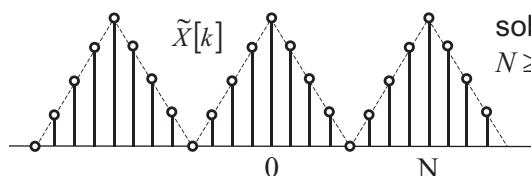
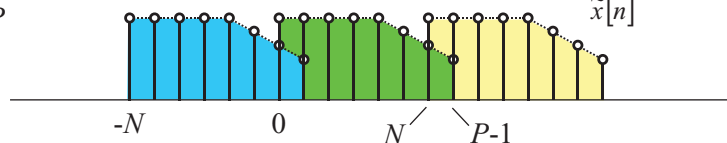
Muestreo en frecuencia Señales de longitud finita

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN]$$



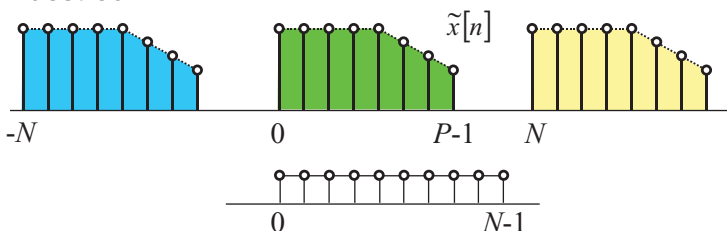
submuestreo \rightarrow solapamiento temporal

$$N < P$$



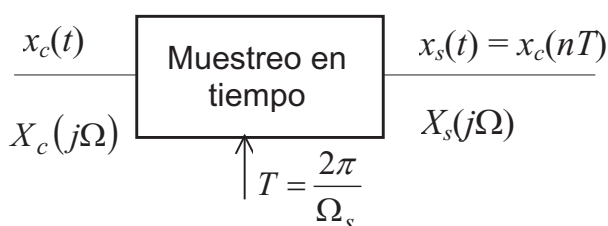
sobremuestreo

$$N \geq P$$



- Si $N \geq P$ la señal puede recuperarse eventanando entre 0 y $N-1$
- $N \geq P$: al menos tantas muestras por periodo de $X(e^{j\omega})$ como tiene la señal en el tiempo

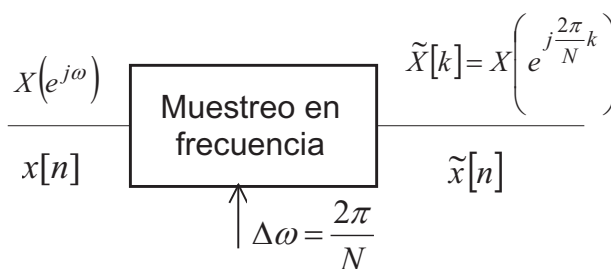
Muestreo



$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_k X_c(j\Omega - jk\Omega_s)$$

solapamiento frecuencial
(aliasing)

Condición de no Solapamiento
 $\Omega_s \geq 2\Omega_n$



$$\tilde{x}[n] = \sum_r x[n-rN]$$

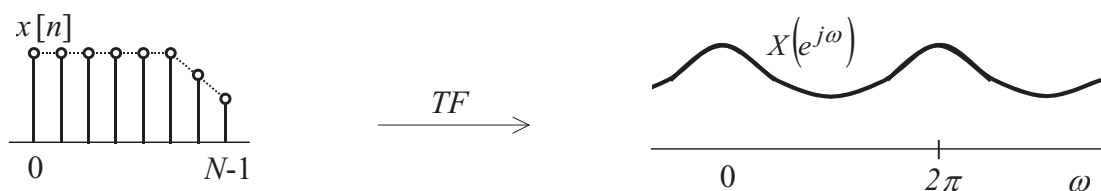
solapamiento temporal
(aliasing)

Condición de no Solapamiento
 $N \geq P$

Tema 4 Transformada discreta de Fourier

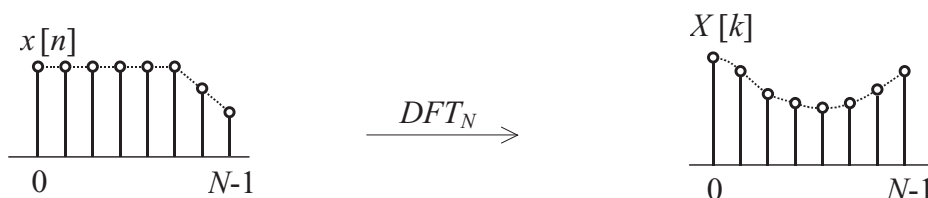
- Introducción
 - Series de Fourier discretas (DFS)
 - Muestreo en frecuencia
- Transformada discreta de Fourier
 - Propiedades de la DFT
- Cálculo eficiente de la DFT

Representación en frecuencia de secuencias de longitud finita (N)



- Dominio del tiempo: la señal se representa con N valores
- Dominio de la frecuencia:
 - TF es una función continua
 - ¿se podría representar la señal con un número finito de valores?
 - Muestreo en frecuencia sugiere que sí (N valores)

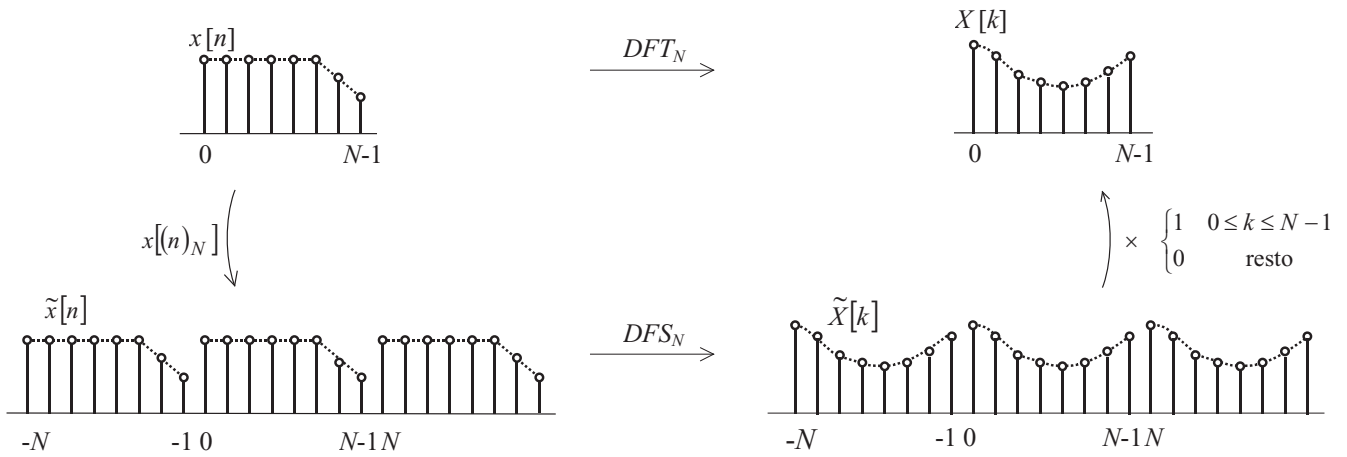
Transformada discreta de Fourier (DFT)



Transformada discreta de Fourier

Definición 1

- Suponer que $x[n]$ es el período principal de su *extensión periódica* $\tilde{x}[n] = x[(n)_N]$
- Calcular su DFS_N
- Coger los puntos o a $N-1$ (período principal)

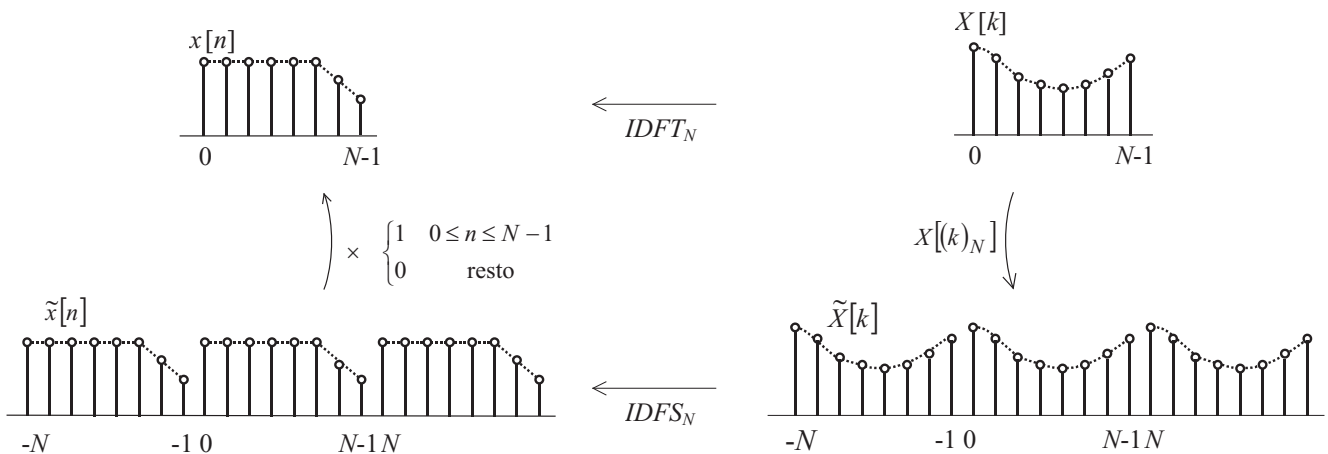


¿es una transformada? ¿hay vuelta atrás?

Transformada discreta de Fourier

Definición 1. Transformada inversa

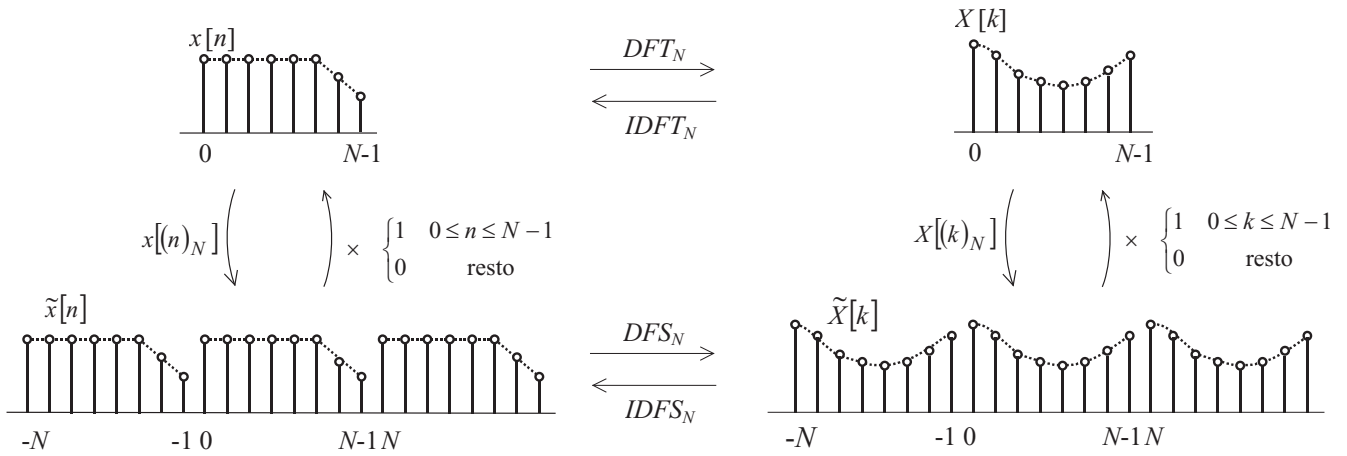
- Suponer que $X[k]$ es el período principal de su *extensión periódica* $\tilde{X}[k] = X[(k)_N]$
- Calcular su $IDFS_N$
- Coger los puntos o a $N-1$ (período principal)



Transformada discreta de Fourier

Definición 1

- $DFT_N \{x[n]\}$ período (0:N-1) de la DFS_N de su extensión periódica $\tilde{x}[n] = x[(n)_N]$
- $IDFT_N \{X[k]\}$ período (0:N-1) de la $IDFS_N$ de su extensión periódica $\tilde{X}[k] = X[(k)_N]$



Transformada discreta de Fourier

- $DFT_N \{x[n]\}$ período (0:N-1) de la DFS_N de su extensión periódica $\tilde{x}[n] = x[(n)_N]$
- $IDFT_N \{X[k]\}$ período (0:N-1) de la $IDFS_N$ de su extensión periódica $\tilde{X}[k] = X[(k)_N]$

$$X[k] = \begin{cases} 0 \leq k \leq N-1 & \tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[(n)_N] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ \text{resto} & 0 \end{cases}$$

$$x[n] = \begin{cases} 0 \leq n \leq N-1 & \tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[(k)_N] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \\ \text{resto} & 0 \end{cases}$$

DFT_N	$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$	$0 \leq n \leq N-1$
$IDFT_N$	$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$	$0 \leq k \leq N-1$

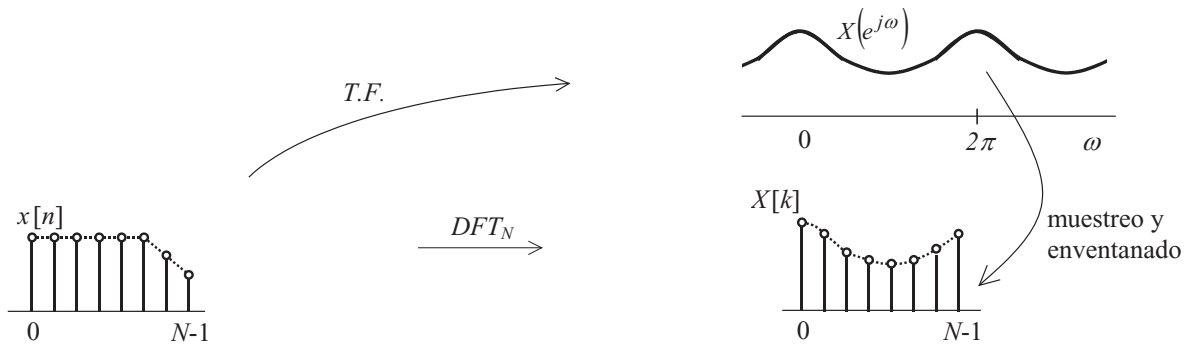
Transformada discreta de Fourier

Definición 2

- $DFT_N \{x[n]\}$ son las N muestras equiespaciadas de su TF en el intervalo $[0, 2\pi)$

$$TF \quad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$$DFT_N \quad X[k] = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad 0 \leq k \leq N-1$$

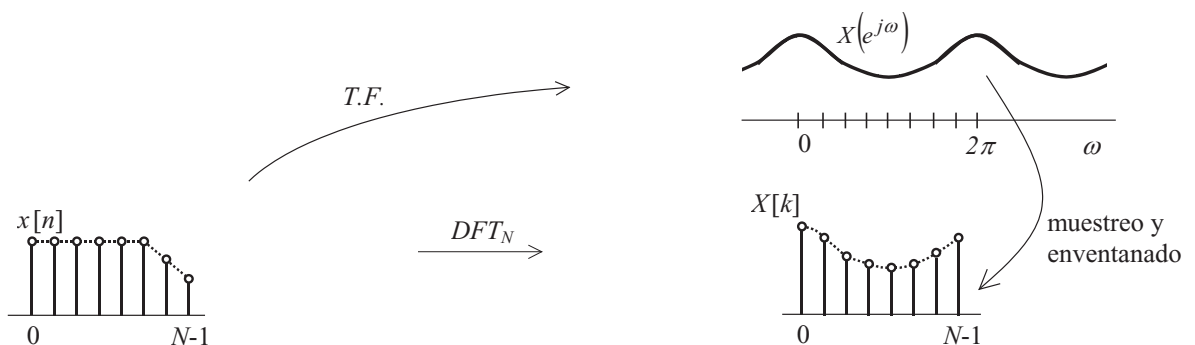


Transformada discreta de Fourier

Definición 2

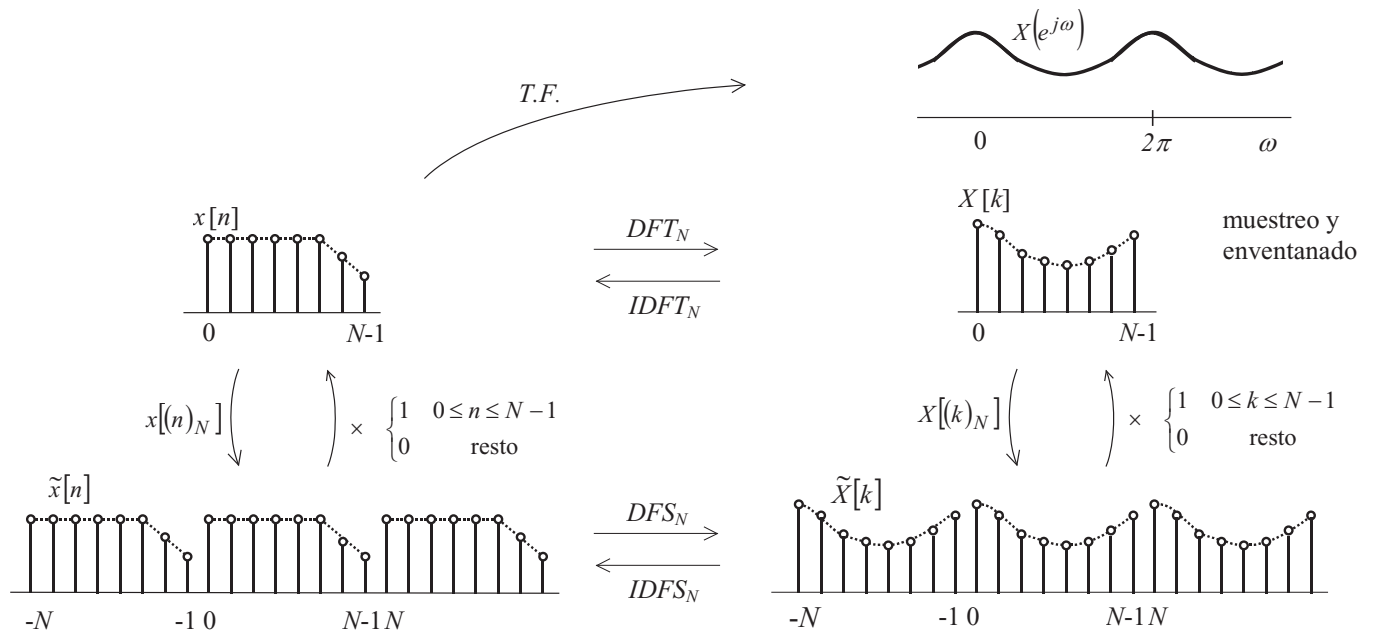
$$DFT_N \quad X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad 0 \leq k \leq N-1$$

- La expresión es la misma de la definición 1
- Se puede recuperar $x[n]$ como se vio en “muestreo en frecuencia”



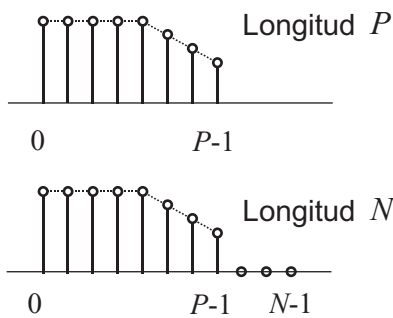
Transformada discreta de Fourier

Definición



Uso de la DFT_N con señales de duración $P < N$

- A veces se hace. Por eso: poner el subíndice (N)



$$DFT_P \sum_{n=0}^{P-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{P}kn}$$

$$DFT_N \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{P-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

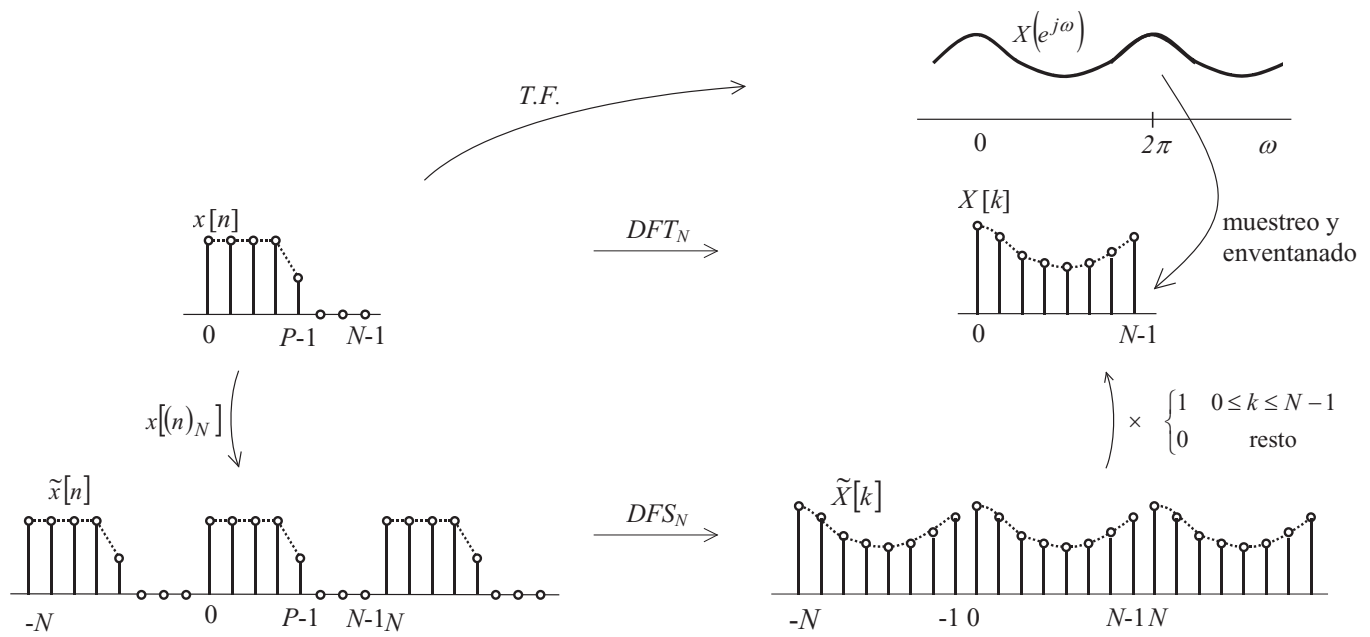
¿Qué representa cada una?

DFT_P muestras de la $T.F.$ separadas $\frac{2\pi}{P}$

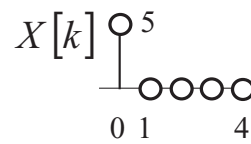
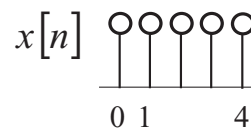
DFT_N muestras de la $T.F.$ separadas $\frac{2\pi}{N}$

- DFT_N también representa a $x[n]$
- P es el mínimo número de puntos de la DFT para que no se pierda información

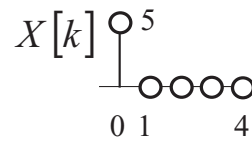
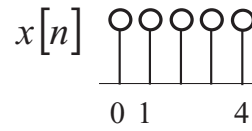
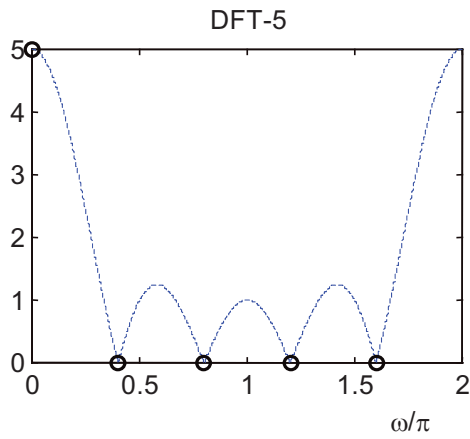
Uso de la DFT_N con señales de duración $P < N$



Ejemplo

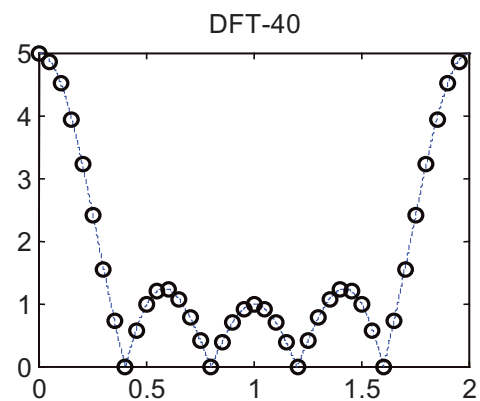
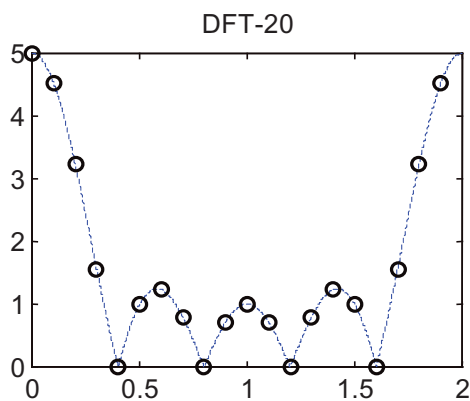
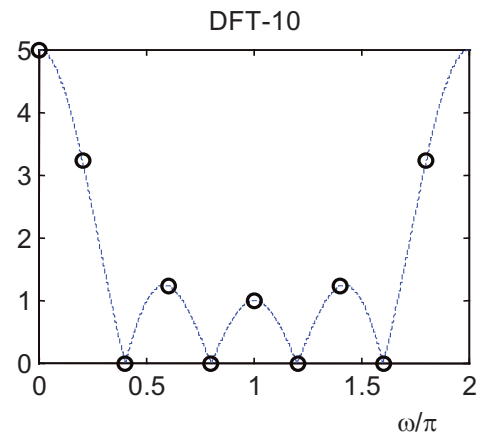
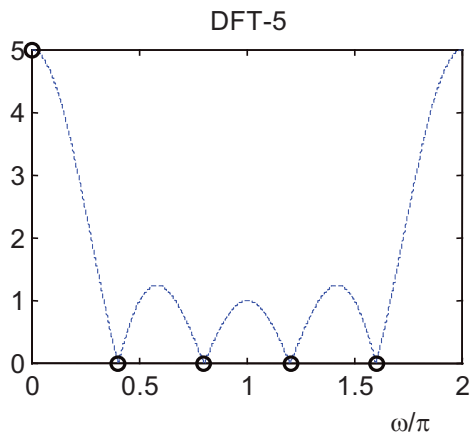


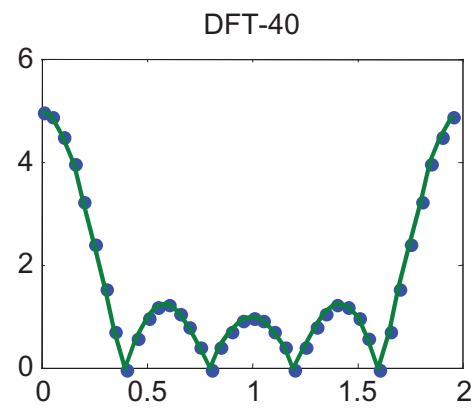
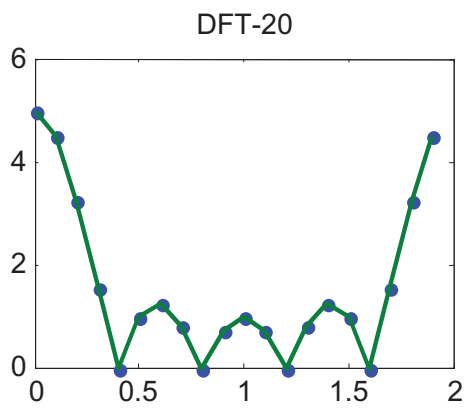
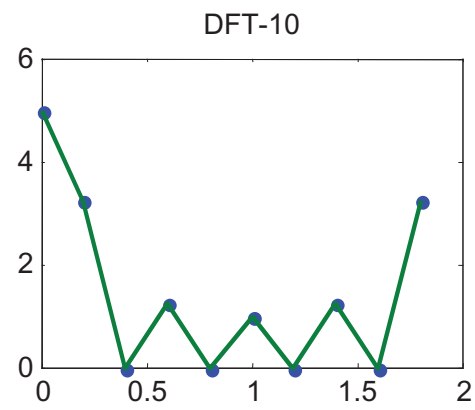
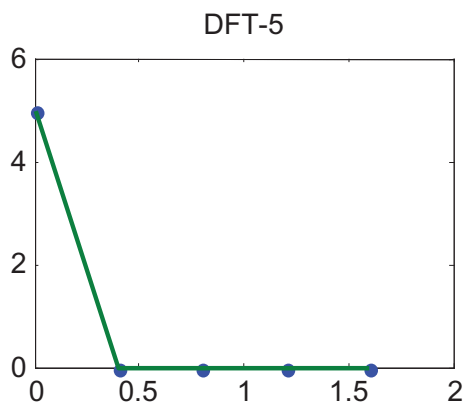
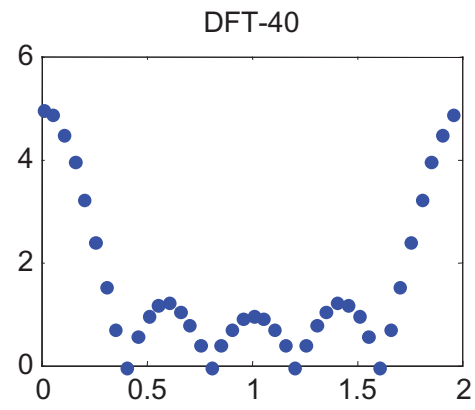
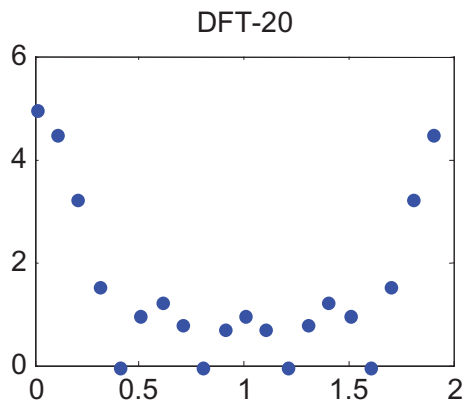
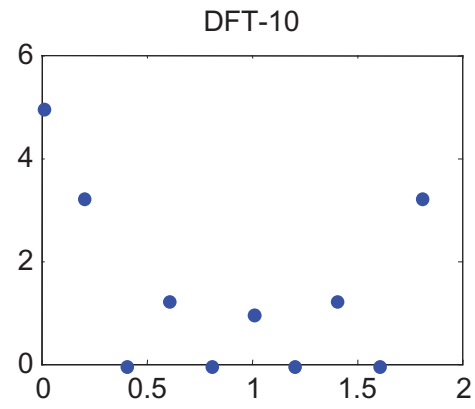
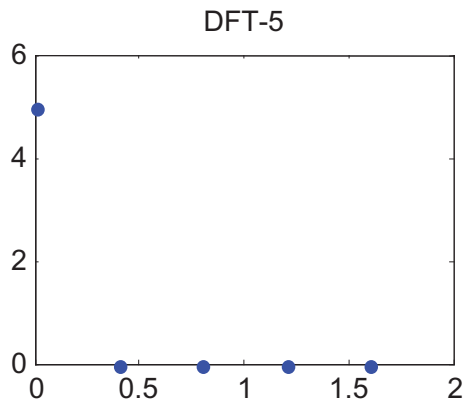
$$DFT_5 \quad X[k] = \sum_{n=0}^4 x[n] e^{-j\frac{2\pi}{5}kn} = \begin{cases} 5 & k=0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



$$DFT_5 \quad X[k] = \sum_{n=0}^4 x[n] e^{-j\frac{2\pi}{5}kn} = 5\delta[k]$$

$$DFT_5 \quad X[k] = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{5}k}$$





Tema 4 Transformada discreta de Fourier

- Introducción
 - Series de Fourier discretas (DFS)
 - Muestreo en frecuencia
- Transformada discreta de Fourier
 - Propiedades de la DFT
- Cálculo eficiente de la DFT

DFT. Propiedades

- Linealidad
- Desplazamiento
- Dualidad
- Simetría
- Convolución

DFT. Propiedades

Linealidad

$x_1[n]$ longitud N_1

$$N \geq \max\{N_1, N_2\}$$

$x_2[n]$ longitud N_2

$$x_1[n] \xrightarrow{DFT_N} X_1[k]$$

$$x_2[n] \xrightarrow{DFT_N} X_2[k]$$

$$a x_1[n] + b x_2[n] \xrightarrow{DFT_N} a X_1[k] + b X_2[k]$$

- Combinar en frecuencia sólo DFTs del mismo número de puntos N
- Sólo así se combinan muestras correspondientes a la misma frecuencia

DFT. Propiedades

Desplazamiento

$$X[k] \xrightarrow{IDFT_N} x[n]$$

$$X[k] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \xrightarrow{IDFT_N} ? \quad \text{¿desplazamiento?}$$

$$\text{sean } \tilde{x}[n] = x[(n)_N]$$

$$\tilde{X}[k] = X[(k)_N]$$

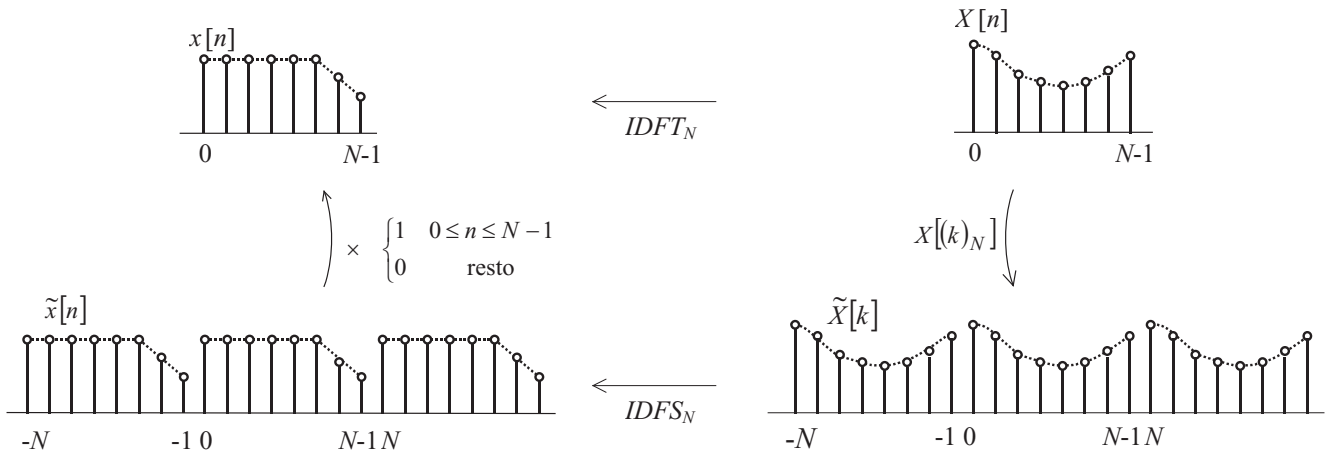
extensiones
periodicas

$$\text{por definición de DFT } \tilde{x}[n] = x[(n)_N] \xrightarrow{DFS_N} \tilde{X}[k] = X[(k)_N]$$

Transformada discreta de Fourier

Definición 1. Transformada inversa

- Suponer que $X[k]$ es el período principal de su extensión periódica $\tilde{X}[k] = X[(k)_N]$
- Calcular su $IDFS_N$
- Coger los puntos o a $N-1$ (período principal)



DFT. Propiedad de desplazamiento

$$\begin{aligned}
 & X[k] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \\
 & \downarrow \text{extensión periódica} \\
 & \tilde{X}[k] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}km} = X[(k)_N] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}(k)_N m} \\
 & \downarrow IDFS_N \text{ (prop. desplazamiento)} \\
 & \tilde{x}[n-m] = x[(n-m)_N] \\
 & \downarrow 0:N-1 \\
 & \begin{cases} x[(n-m)_N] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} = \begin{cases} \tilde{x}[n-m] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}
 \end{aligned}$$

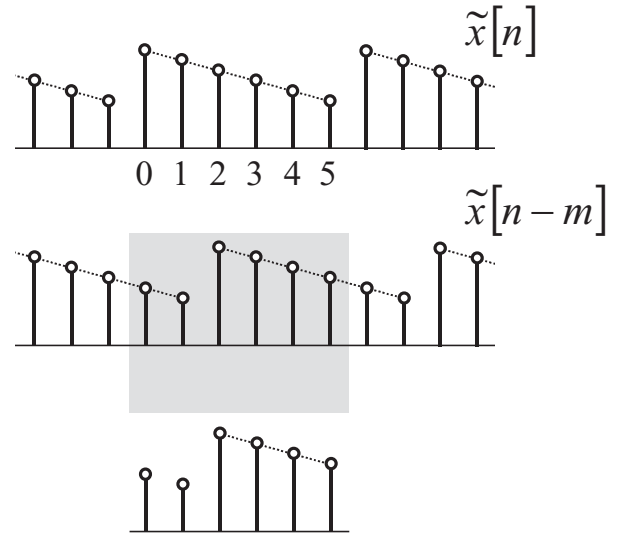
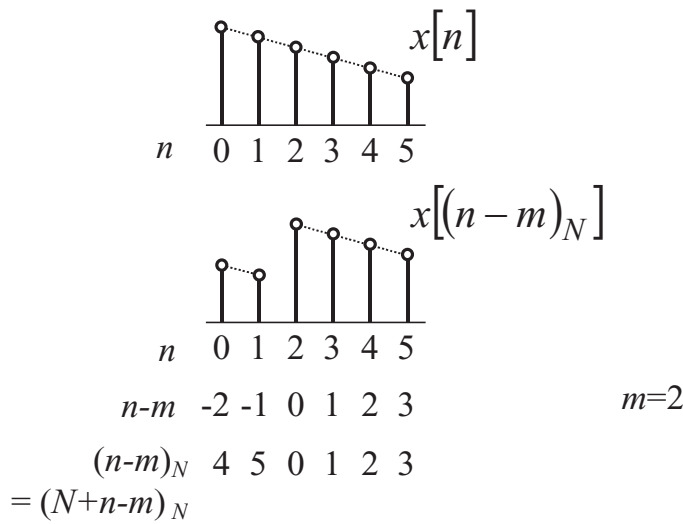
DFT. Propiedad de desplazamiento

$$x[(n-m)_N] \quad 0 \leq n \leq N-1$$

desplazamiento circular

$$\begin{cases} \tilde{x}[n-m] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

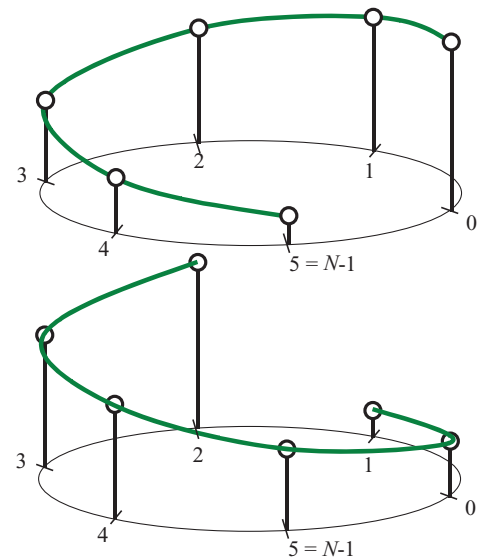
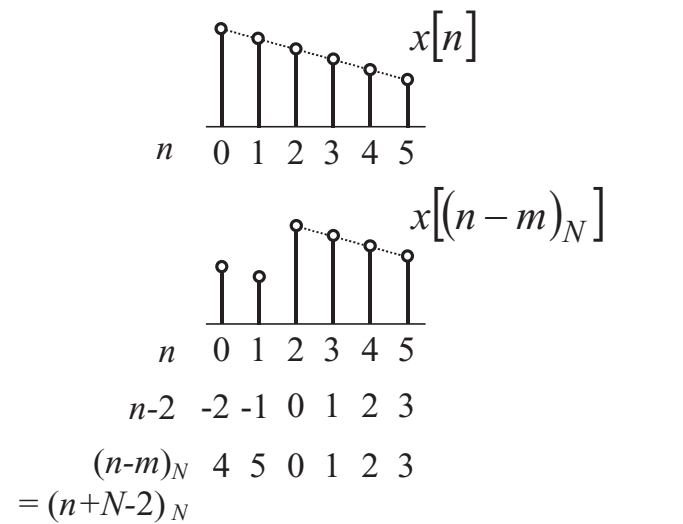
periodo (0 : N-1) de un desplazamiento periódico



DFT. Propiedad de desplazamiento

$$x[(n-m)_N] \quad 0 \leq n \leq N-1$$

desplazamiento circular



DFT. Propiedades

Dualidad

$$x[n] \xrightarrow{DFT_N} X[k] \xrightarrow{DFT_N} ? \quad \text{¿relación con } x[n]?$$

- $X[k]$ es una secuencia de N muestras
- Se puede calcular su DFT_N (directa)
- ¿Que relación hay entre esa DFT_N y la señal $x[n]$?

$$\text{sean } \begin{aligned} \tilde{x}[n] &= x[(n)_N] \\ \tilde{X}[k] &= X[(k)_N] \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{extensiones} \\ \text{periodicas} \end{array}$$

$$\text{por definición de DFT } \tilde{x}[n] = x[(n)_N] \xrightarrow{DFS_N} \tilde{X}[k] = X[(k)_N]$$

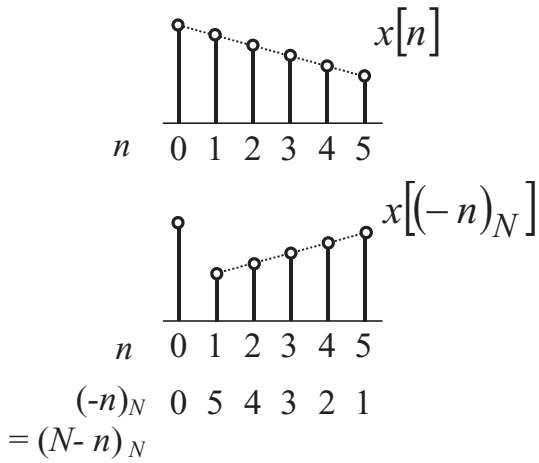
DFT. Propiedad de dualidad

$$\begin{aligned} & X[k] \\ & \downarrow \text{extensión periódica} \\ & \tilde{X}[k] = X[(k)_N] \\ & \downarrow DFS_N \text{ (dualidad } \rightarrow \text{ simetría)} \\ & N \cdot \tilde{x}[-n] = N \cdot x[(-n)_N] \\ & \downarrow 0:N-1 \\ & \begin{cases} N \cdot \tilde{x}[-n] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} = \begin{cases} N \cdot x[(-n)_N] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \end{aligned}$$

DFT. Propiedad de dualidad

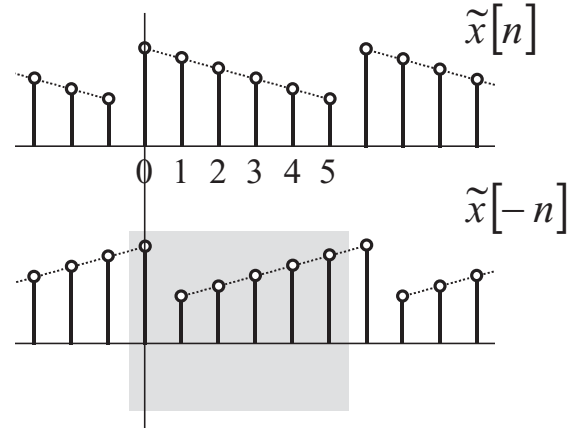
$$N \cdot x[(-n)_N] \quad 0 \leq n \leq N-1$$

simetría cicular



$$\begin{cases} N \cdot \tilde{x}[-n] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

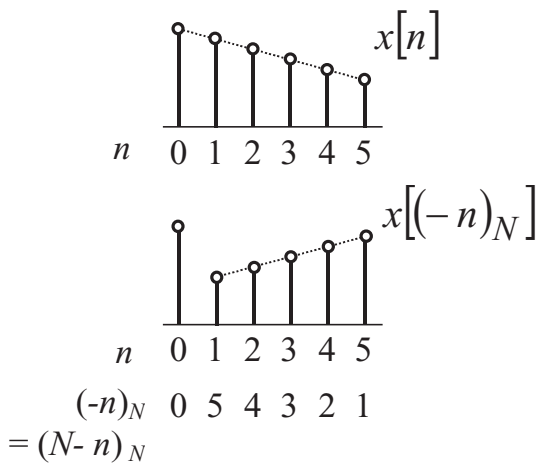
periodo $(0 : N-1)$ de señal simétrica



DFT. Propiedad de dualidad

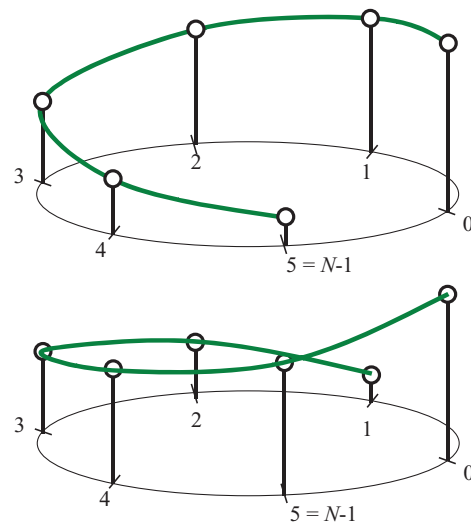
$$N \cdot x[(-n)_N] \quad 0 \leq n \leq N-1$$

simetría cicular



$$\begin{cases} N \cdot \tilde{x}[-n] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

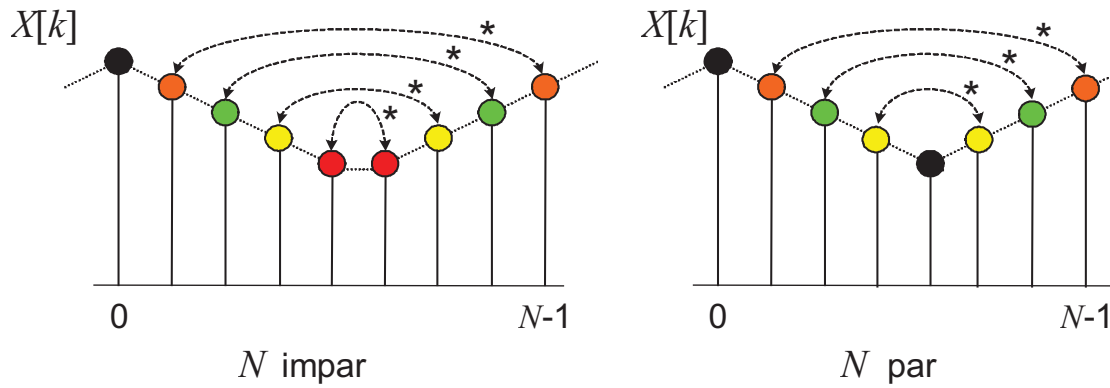
periodo $(0 : N-1)$ de señal simétrica



DFT. Propiedad de Simetría

Si $x[n]$ es real $\rightarrow X[k] = X^* [(-k)_N]$

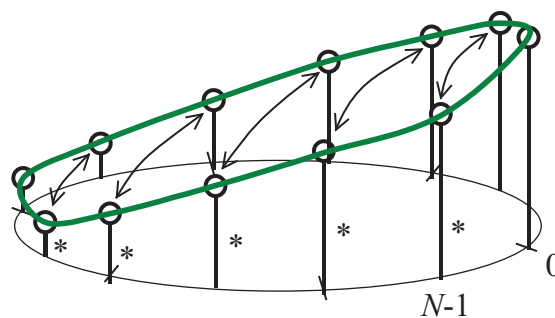
- Si $x[n]$ es real $X[k]$ tiene simetría conjugada **circular**



DFT. Propiedad de Simetría

Si $x[n]$ es real $\rightarrow X[k] = X^* [(-k)_N]$

- Si $x[n]$ es real $X[k]$ tiene simetría conjugada **circular**



DFT. Propiedades

- Linealidad
- Desplazamiento
- Dualidad
- Simetría

- **Convolución**

DFT. Propiedades

Convolución

$$x_1[n] \xrightarrow{DFT_N} X_1[k]$$

$$x_2[n] \xrightarrow{DFT_N} X_2[k]$$

todas de longitud N

$$X_1[k] \cdot X_2[k] \xrightarrow{IDFT_N} ?$$

sean $\tilde{x}_1[n] = x_1[(n)_N]$ $\tilde{x}_2[n] = x_2[(n)_N]$
 $\tilde{X}_1[k] = X_1[(k)_N]$ $\tilde{X}_2[k] = X_2[(k)_N]$ extensiones periodicas

por definición de DFT

$$\tilde{x}_1[n] = x_1[(n)_N] \xrightarrow{DFS_N} \tilde{X}_1[k] = X_1[(k)_N]$$
$$\tilde{x}_2[n] = x_2[(n)_N] \xrightarrow{DFS_N} \tilde{X}_2[k] = X_2[(k)_N]$$

DFT. Propiedad de convolución

$$\begin{aligned}
 & X_1[k] \cdot X_2[k] \\
 & \quad \downarrow \text{extensión periódica} \\
 & \tilde{X}_1[k] \cdot \tilde{X}_2[k] = X_1[(k)_N] \cdot X_2[(k)_N] \\
 & \quad \downarrow IDFS_N \text{ (prop. convolución)} \\
 & \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] \cdot \tilde{x}_2[n-m] = \sum_{m=0}^{N-1} x[(m)_N] \cdot x[(n-m)_N] \\
 & \quad \downarrow 0:N-1 \\
 & \begin{cases} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] \cdot \tilde{x}_2[n-m] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} = \begin{cases} \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \cdot x[(n-m)_N] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

DFT. Propiedad de convolución

$$\begin{aligned}
 & X_1[k] \cdot X_2[k] \\
 & \quad \downarrow IDFT_N \\
 & \begin{cases} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] \cdot \tilde{x}_2[n-m] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} = \begin{cases} \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] \cdot x_2[(n-m)_N] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}
 \end{aligned}$$

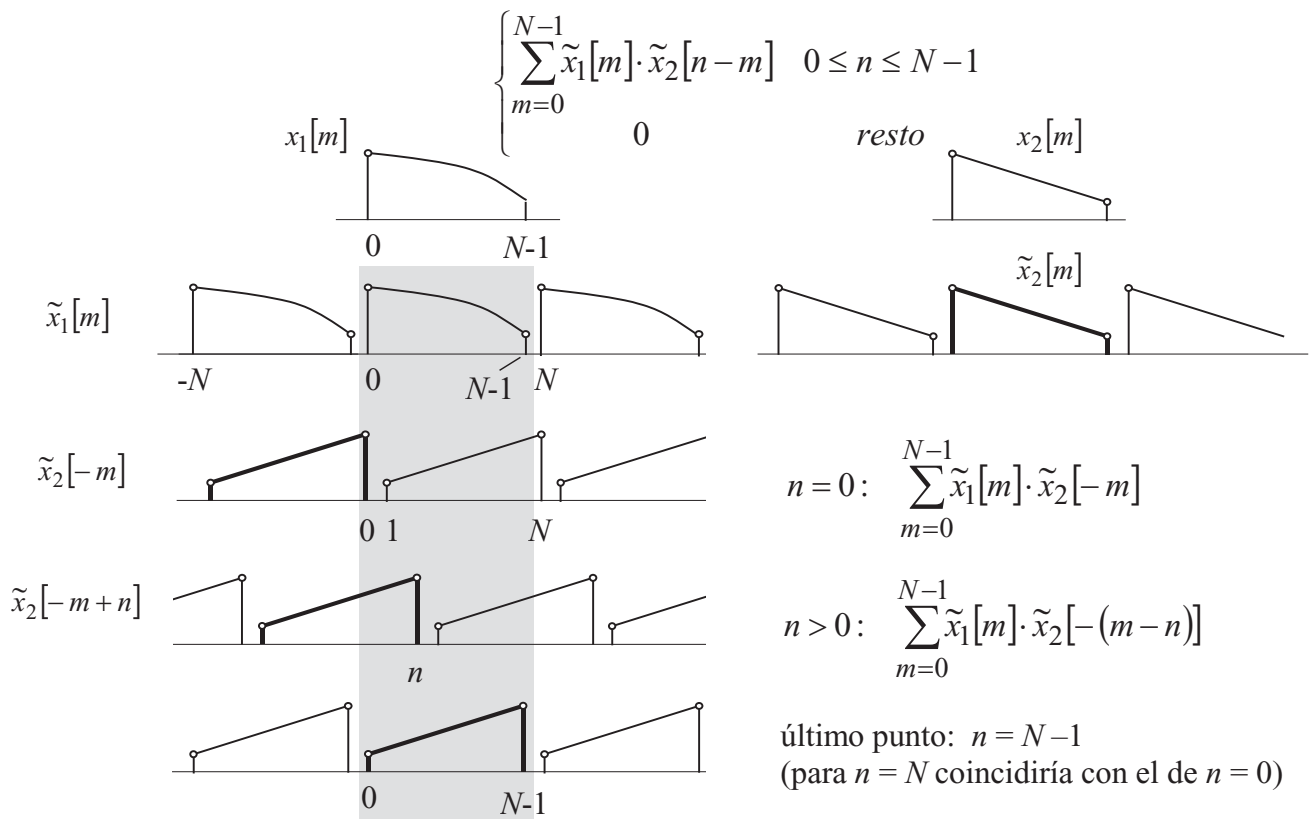
periodo (0 : N-1) de la
convolución periódica

“convolución” con
desplazamientos circulares

Convolución circular de N puntos

$$x_1[n] \circledast x_2[n] = \begin{cases} \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] \cdot x_2[(n-m)_N] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Convolución circular



DFT. Propiedad de convolución

$$X_1[k] \cdot X_2[k] \xrightarrow{IDFT_N} \begin{cases} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] \cdot \tilde{x}_2[n-m] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} = \begin{cases} \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] \cdot x_2[(n-m)_N] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

periodo (0 : N-1) de la convolución periódica

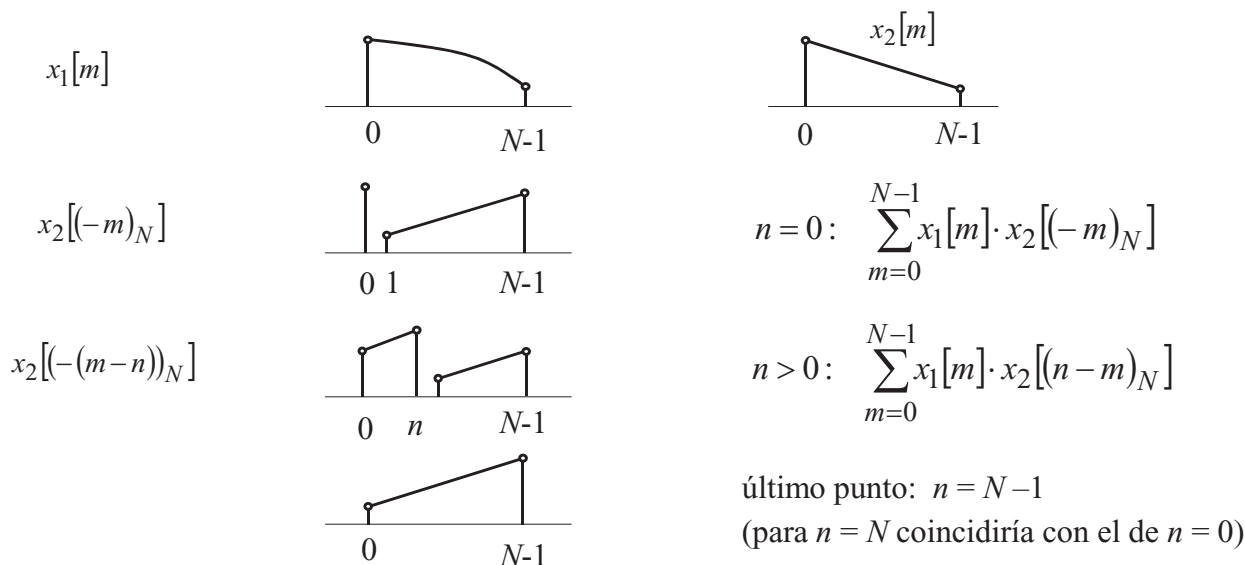
“convolución” con desplazamientos circulares

Convolución circular de N puntos

$$x_1[n] \circledN x_2[n] = \begin{cases} \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] \cdot x_2[(n-m)_N] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Convolución circular

$$x_1[n] \circledast x_2[n] = \begin{cases} \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] \cdot x_2[(n-m)_N] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



DFT. Propiedades

Desplazamiento

$$X[k] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \xrightarrow{IDFT_N} \begin{cases} x[(n-m)_N] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} = \begin{cases} \tilde{x}[n-m] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Dualidad

$$x[n] \xrightarrow{DFT_N} X[k] \xrightarrow{DFT_N} \begin{cases} N \cdot x[(-n)_N] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} = \begin{cases} N \cdot \tilde{x}[-n] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Simetría

$$\text{Si } x[n] \text{ es real} \rightarrow X[k] = X^*[(-k)_N]$$

Convolución

$$X_1[k] \cdot X_2[k] \xrightarrow{IDFT_N} \begin{cases} \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] \cdot x_2[(n-m)_N] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} = \begin{cases} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] \cdot \tilde{x}_2[n-m] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Tema 4 Transformada discreta de Fourier

- Introducción
 - Series de Fourier discretas (DFS)
 - Muestreo en frecuencia
- Transformada discreta de Fourier
 - Propiedades de la DFT
- Cálculo eficiente de la DFT

Cálculo eficiente de la DFT

Algoritmo FFT de diezmado en tiempo por factor 2

- Introducción
- Descripción del algoritmo
- Complejidad

Variantes:

- Entradas ordenadas
- Estructura transpuesta: diezmado en frecuencia
- Simplificación de mariposas

Reordenación

Cálculo de la DFT

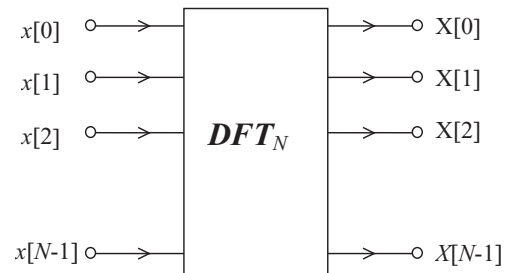
$$DFT_N \quad X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Realización

- Algoritmos eficientes para hacer ese cálculo
- Sistema lineal (MIMO) sin memoria
- Comportamiento (ecuación E/S): DFT_N
- Representación con grafos orientados



Cálculo de la DFT

Realización "directa": Complejidad

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

Para cada muestra de $X[k]$: N multiplicaciones complejas
 $N-1$ sumas complejas

Total: N^2 multiplicaciones complejas
 $N(N-1)$ sumas complejas

Multiplicación compleja:	2 multiplicaciones reales 4 sumas reales
Suma compleja:	2 sumas reales

- Orden de complejidad $O(N^2)$ Ejemplo: $N=1024$ $N^2 \approx 10^6$
- Interesa disponer de algoritmos cuya complejidad no crezca tan rápido
- Algoritmos FFT: $O(N \log N)$

Cálculo eficiente de la DFT

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

Propiedades de W_N^{kn}

$$W_N^{kN} = W_N^{Nn} = 1$$

$$W_N^{kn} = W_N^{k(n+N)} = W_N^{(k+N)n} \quad \text{periodicidad (N) en } k \text{ y en } n$$

$$W_N^{k(N-n)} = W_N^{-kn} = (W_N^{kn})^* \quad \text{simetría}$$

$$W_N^{2kn} = W_{N/2}^{kn}$$

- Simetría y periodicidad
- Muchas de las constantes W_N^{kn} son iguales o con signo cambiado
- Se pueden agrupar sumandos para reducir multiplicaciones

Cálculo eficiente de la DFT

Algoritmo FFT de diezmado en tiempo por factor 2

- Introducción
- Descripción del algoritmo
- Complejidad

Variantes:

- Entradas ordenadas
- Estructura transpuesta: diezmado en frecuencia
- Simplificación de mariposas

Reordenación

Algoritmo FFT de diezrado en el tiempo por factor 2

$x[n]$ longitud $N = 2^m$ potencia de 2

$$\begin{aligned}
 X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} & X[k] &= \sum_{n \text{ par}} x[n] W_N^{kn} + \sum_{n \text{ impar}} x[n] W_N^{kn} = \\
 &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] W_N^{k \cdot 2r} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] W_N^{k(2r+1)} = & W_N^{k(2r+1)} &= W_N^{2kr} \cdot W_N^k \\
 &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] W_N^{2kr} + W_N^k \cdot \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] W_N^{2kr} = & W_N^{2kr} &= W_{N/2}^{kr} \\
 &= \underbrace{\sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] W_{N/2}^{kr}}_{G[k]} + W_N^k \cdot \underbrace{\sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] W_{N/2}^{kr}}_{H[k]} = \\
 &= G[k] + W_N^k \cdot H[k] & k &= 0, 1, \dots, N-1
 \end{aligned}$$

Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

Algoritmo FFT de diezrado en el tiempo por factor 2

$$X[k] = \underbrace{\sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] W_{N/2}^{kr}}_{G[k]} + W_N^k \cdot \underbrace{\sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] W_{N/2}^{kr}}_{H[k]} =$$

$$\boxed{X[k] = G[k] + W_N^k \cdot H[k]} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

para $k = 0, 1, \dots, N/2 - 1$

$G[k]$ Es la $DFT_{N/2}$ de $x[n]$ diezrada por 2, tomando las muestras pares

$H[k]$ Es la $DFT_{N/2}$ de $x[n]$ diezrada por 2, tomando las muestras impares

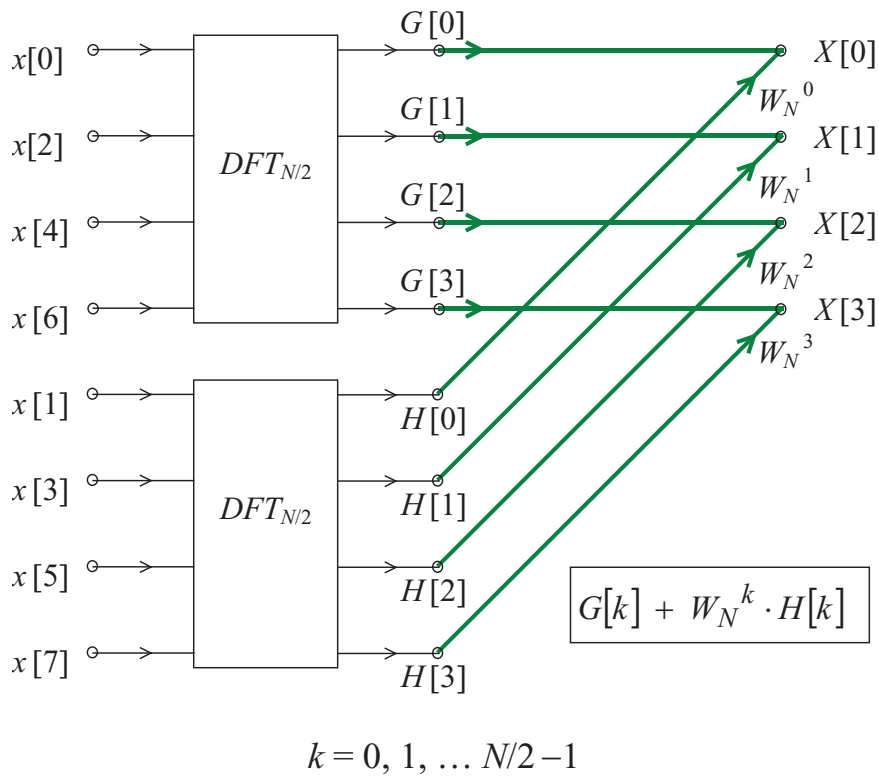
para $k = N/2, N/2+1, \dots, N-1$

$W_{N/2}^{kr}$ es periódica ($N/2$) en $k \rightarrow G[k]$ y $H[k]$ son periódicas ($N/2$)

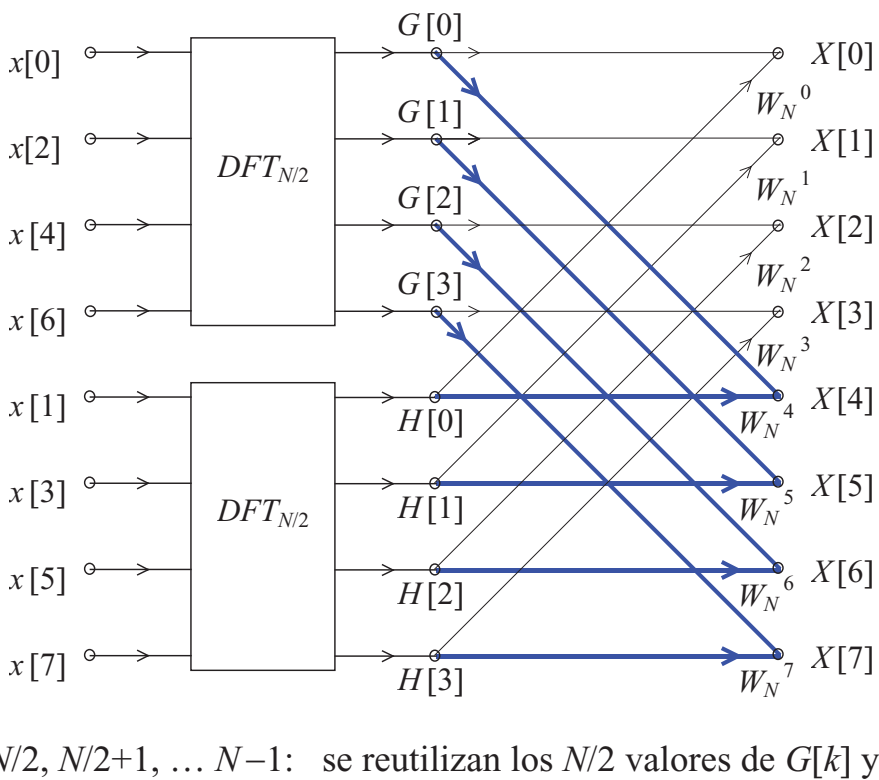
$G[k]$ y $H[k]$ repiten los valores de $k \in (0, N/2 - 1)$

pero W_N^k no repite: es de periodo N

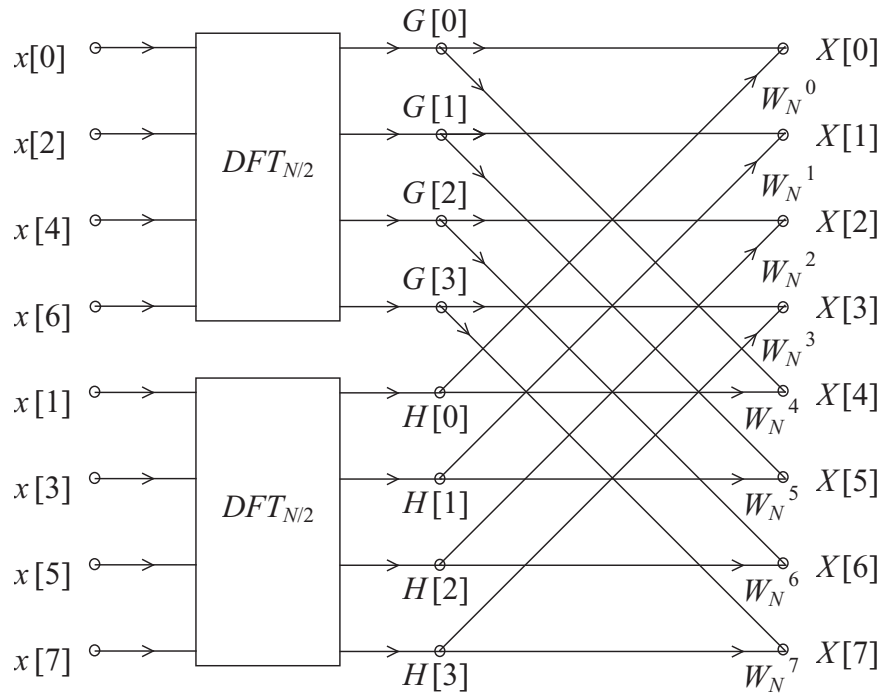
FFT Diezmado en tiempo



FFT Diezmado en tiempo

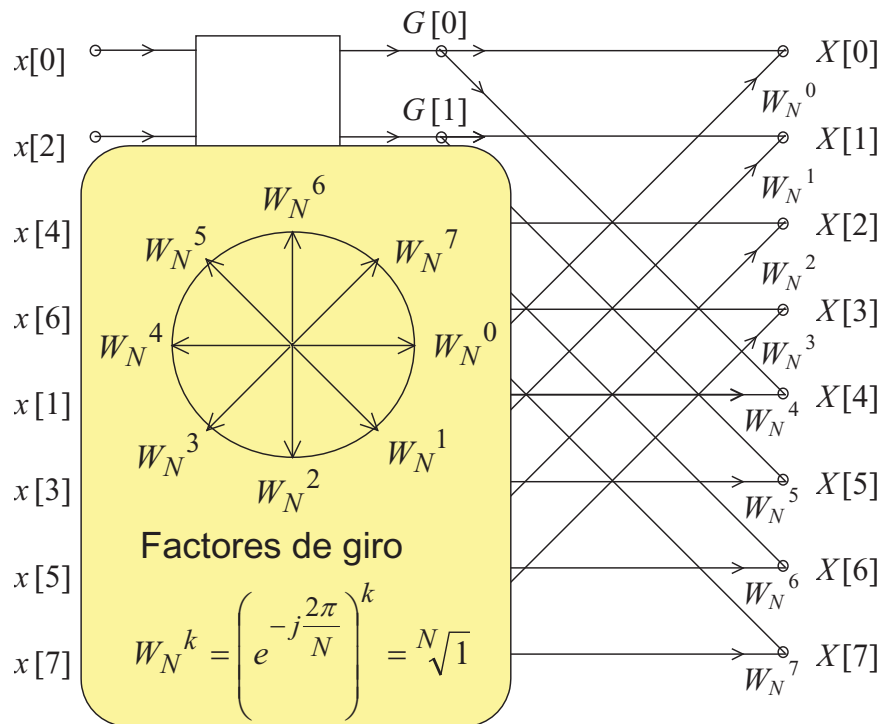


FFT Diezmado en tiempo



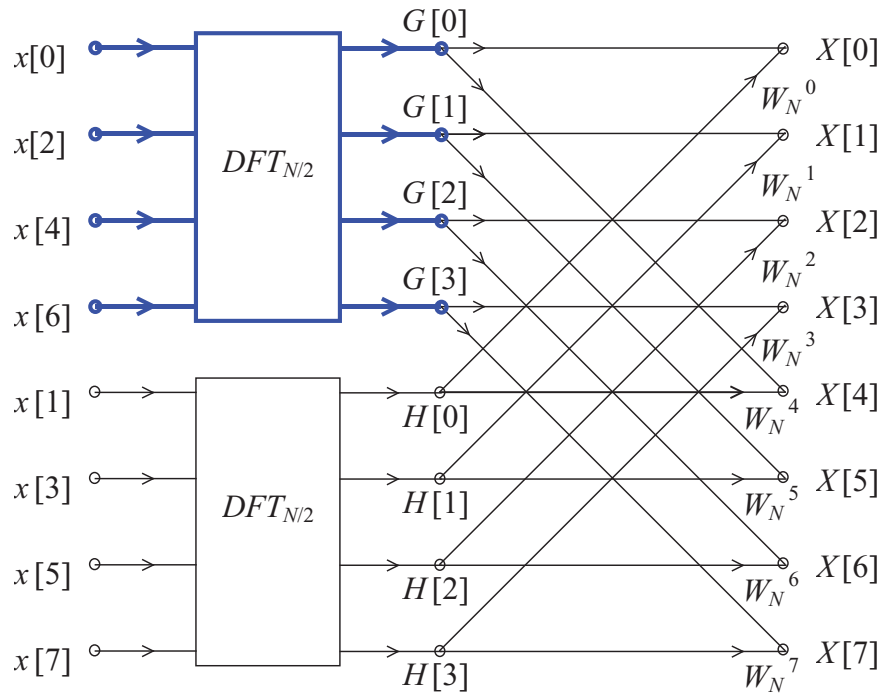
$$X[k] = G[k] + W_N^k \cdot H[k]$$

FFT Diezmado en tiempo

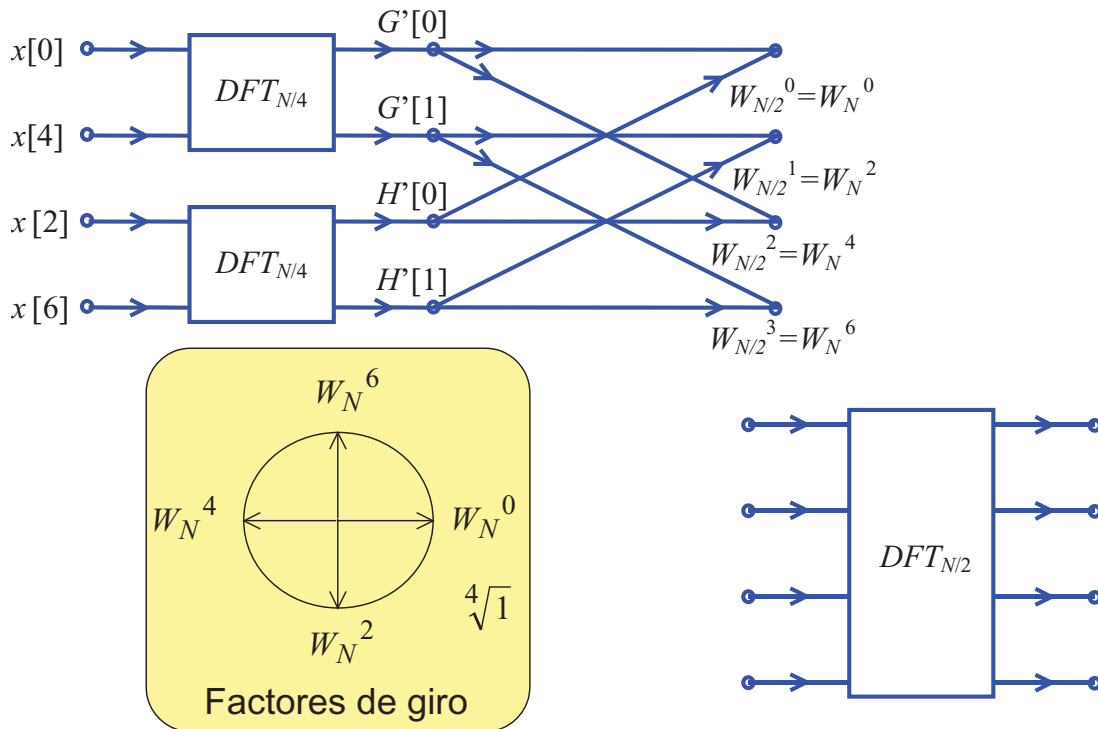


$$X[k] = G[k] + W_N^k \cdot H[k]$$

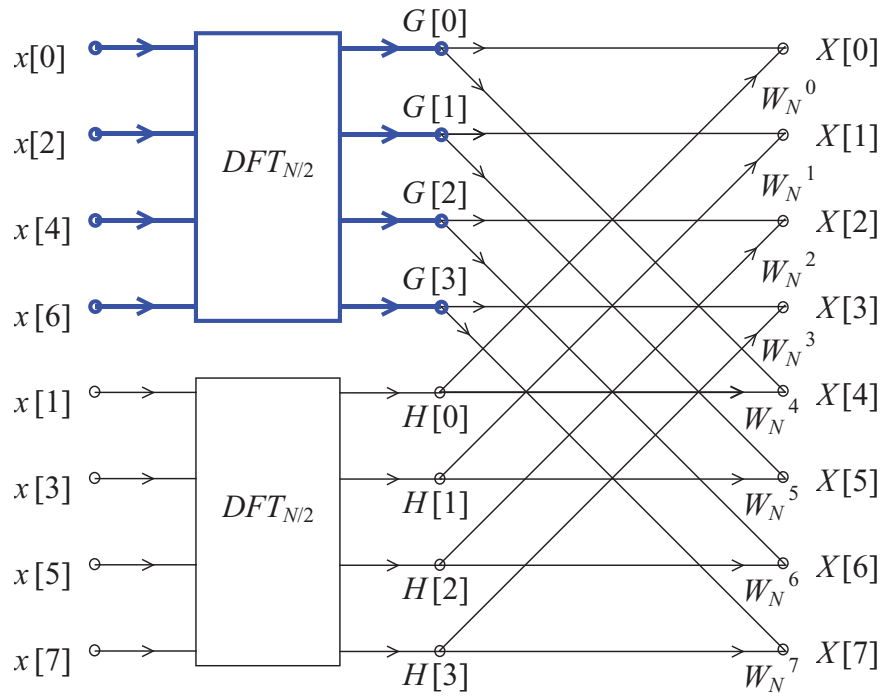
FFT Diezmado en tiempo



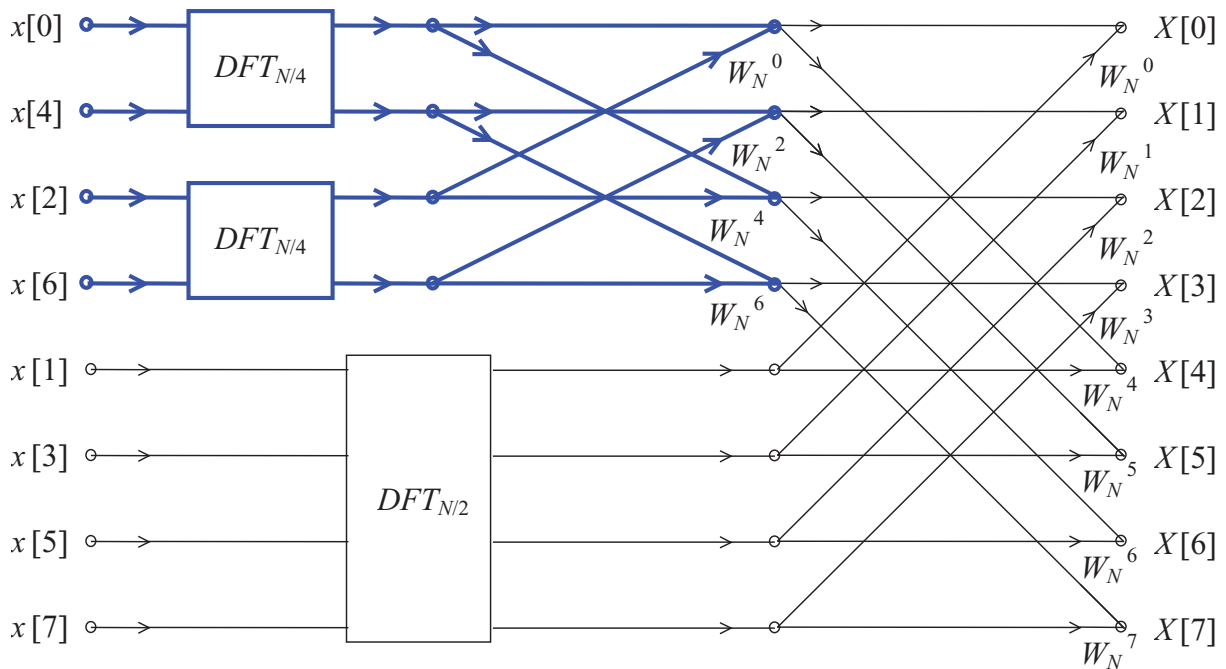
FFT Diezmado en tiempo



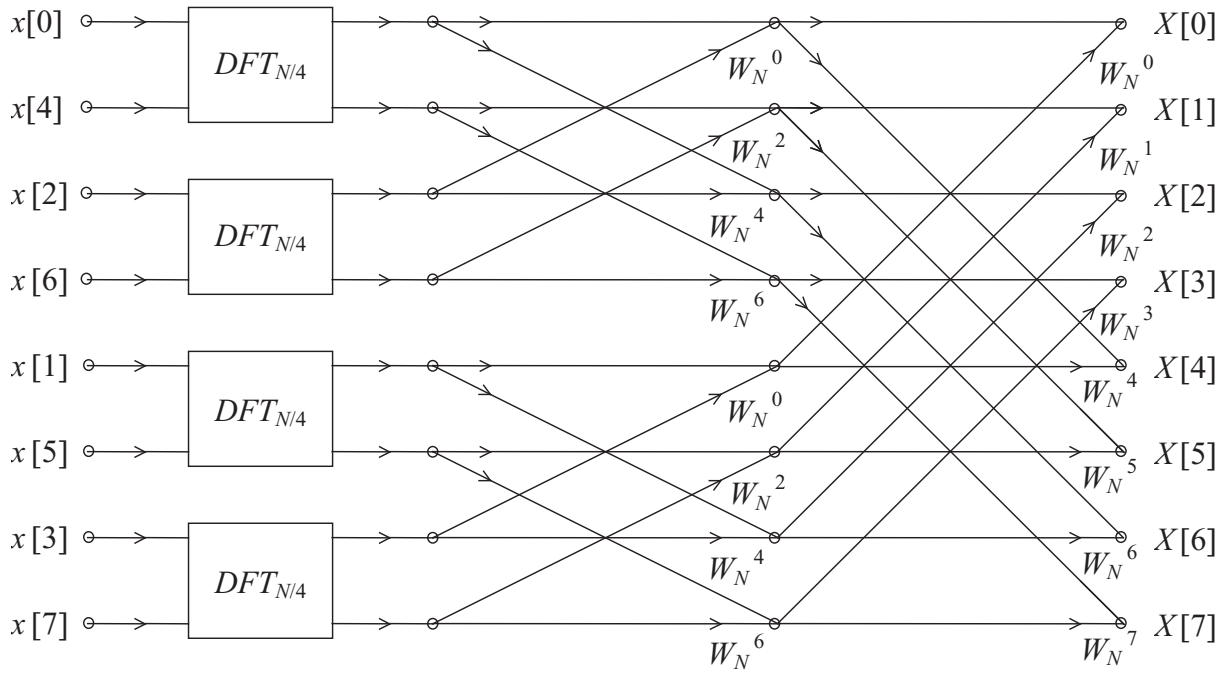
FFT Diezmado en tiempo



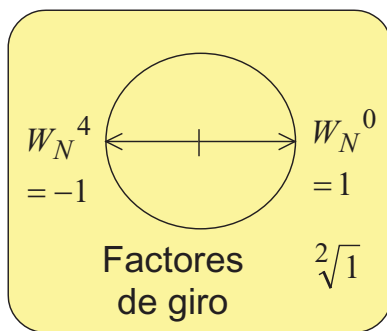
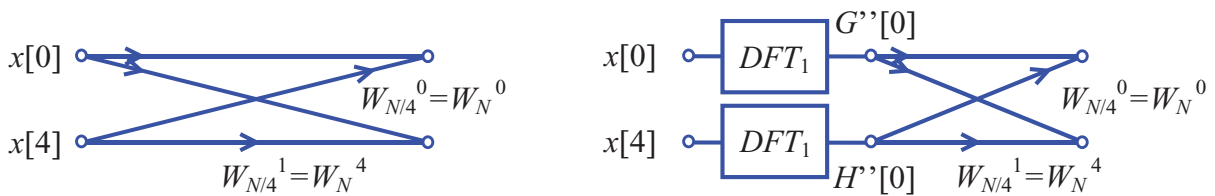
FFT Diezmado en tiempo



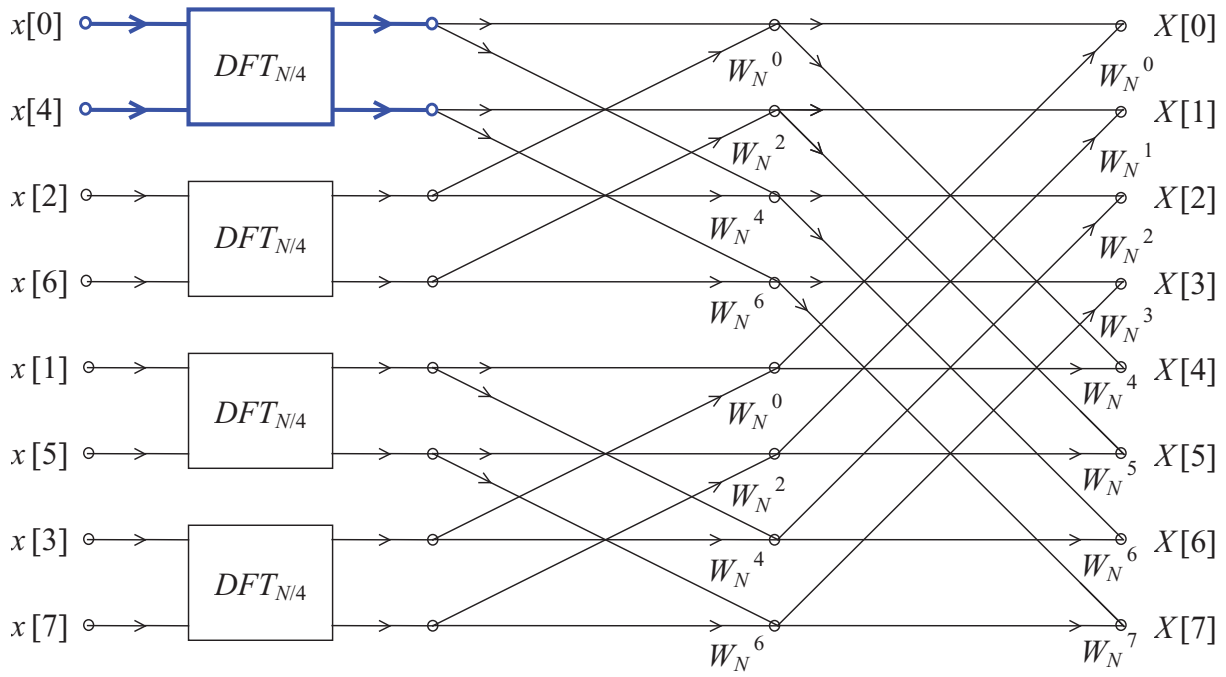
FFT Diezmado en tiempo



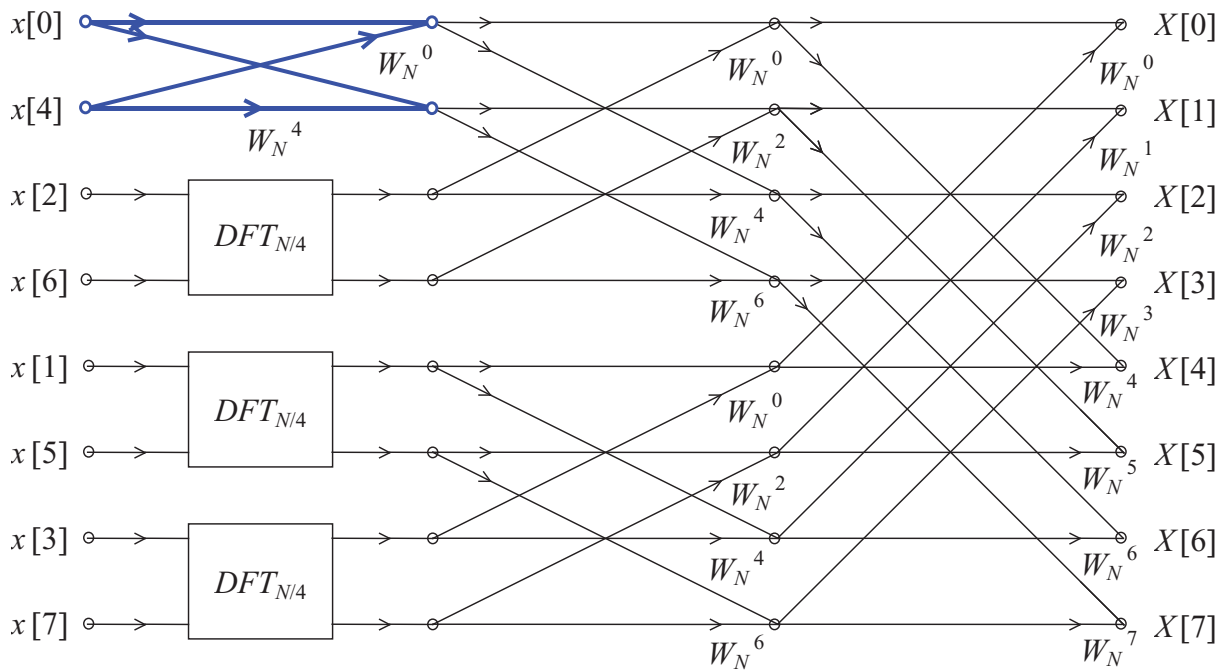
FFT Diezmado en tiempo



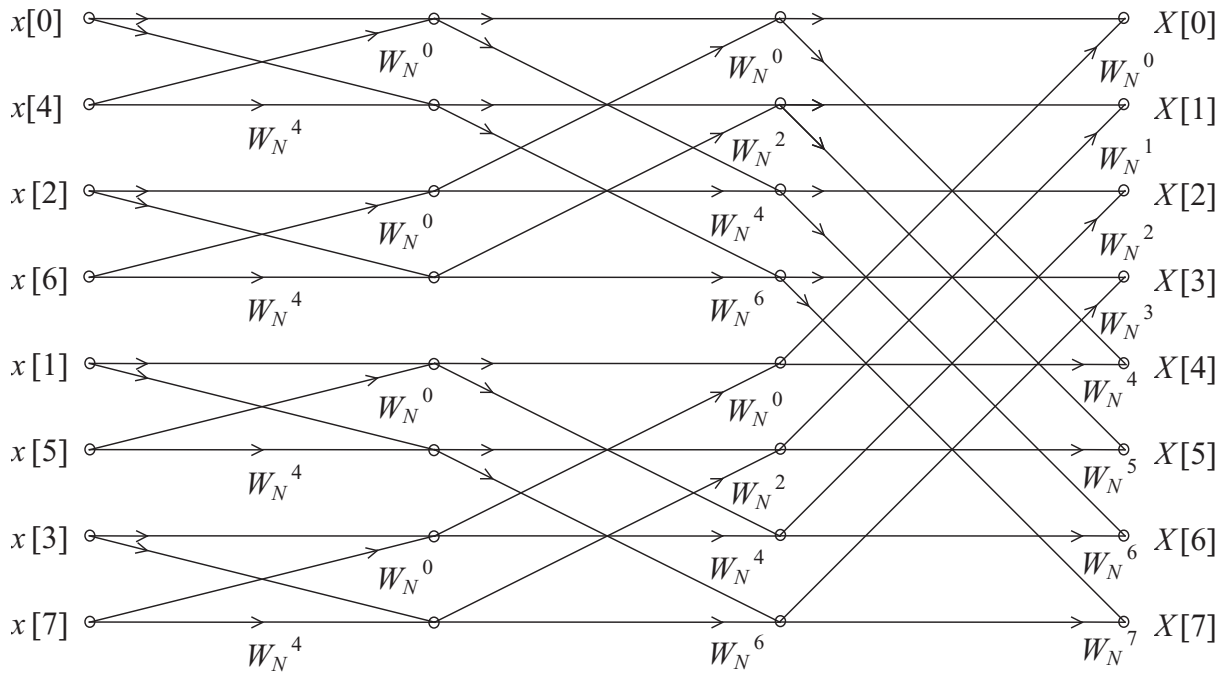
FFT Diezmado en tiempo



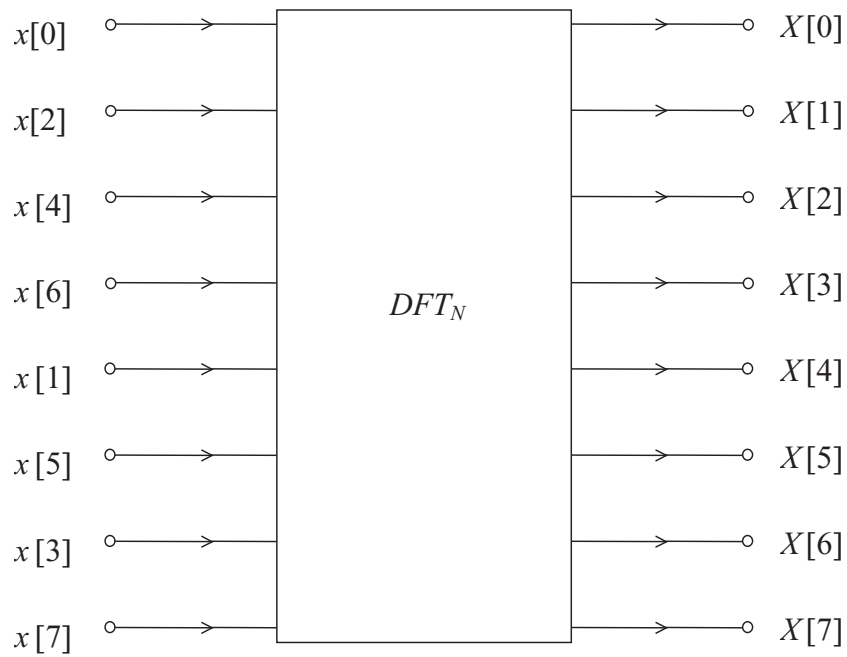
FFT Diezmado en tiempo



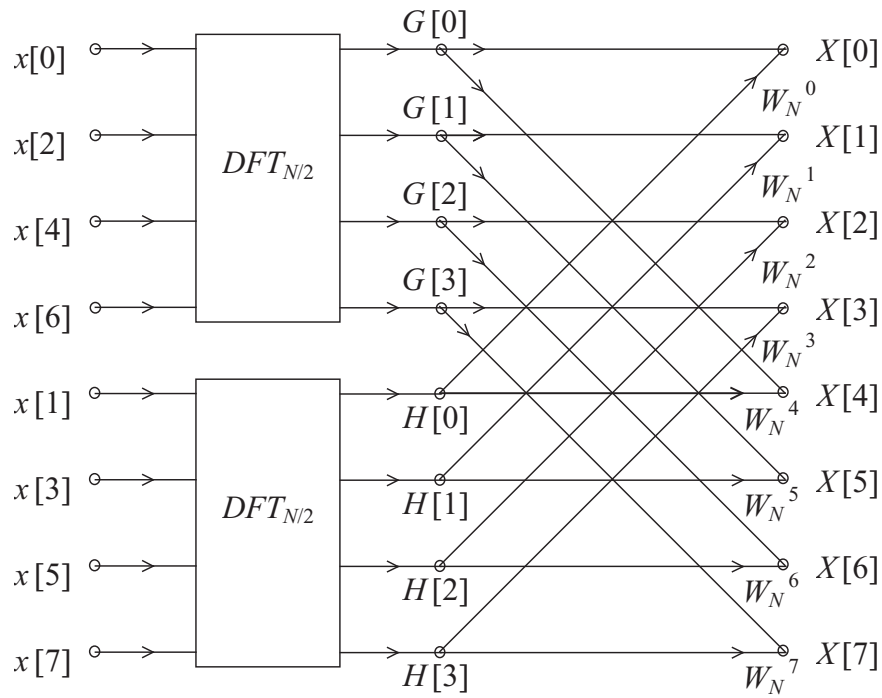
FFT Diezmado en tiempo



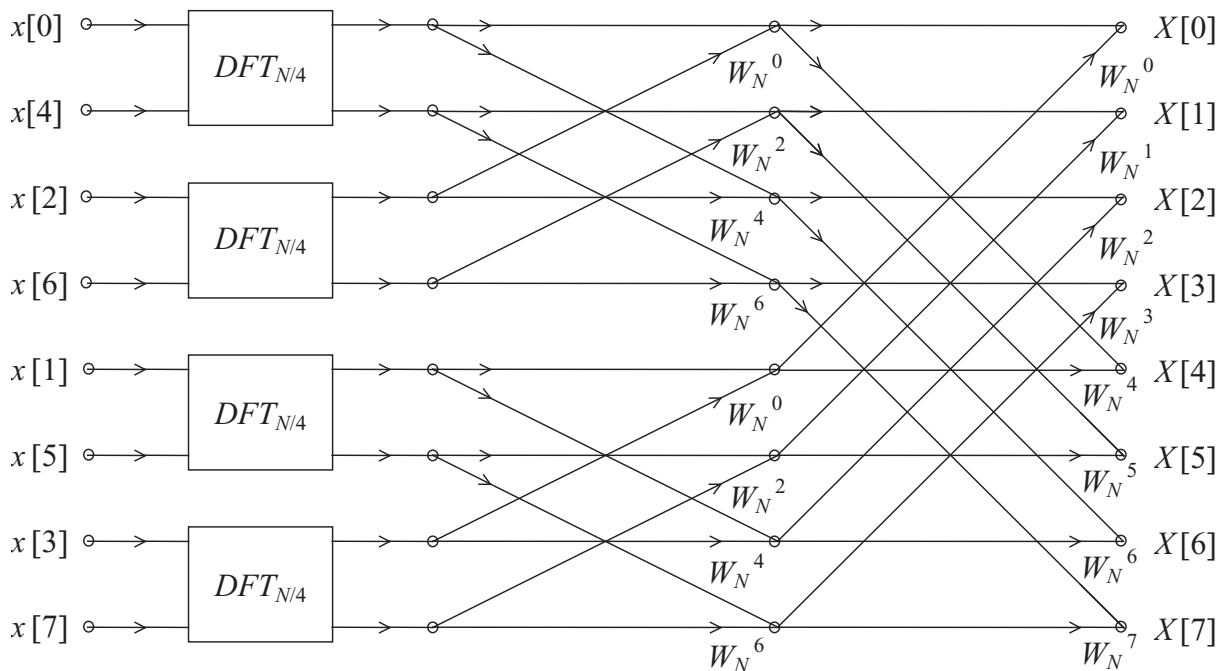
FFT Diezmado en tiempo



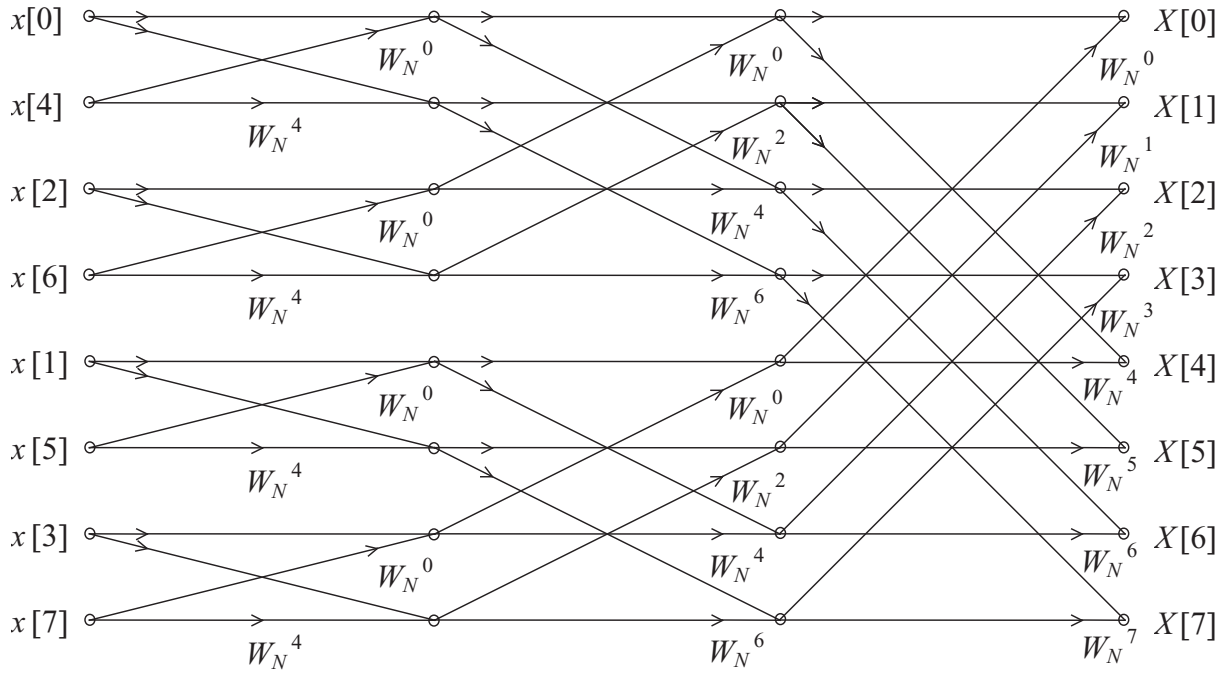
FFT Diezmado en tiempo



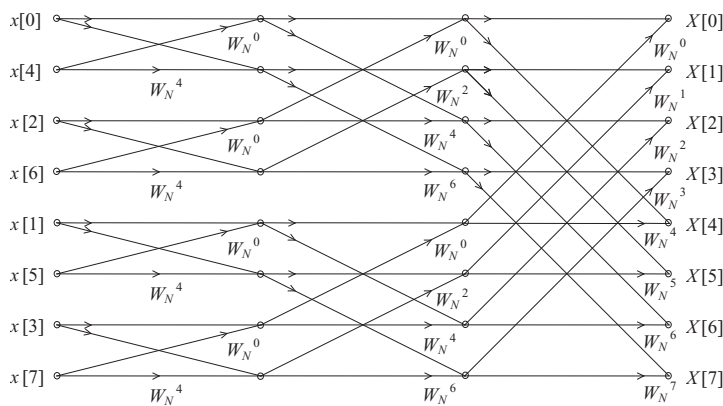
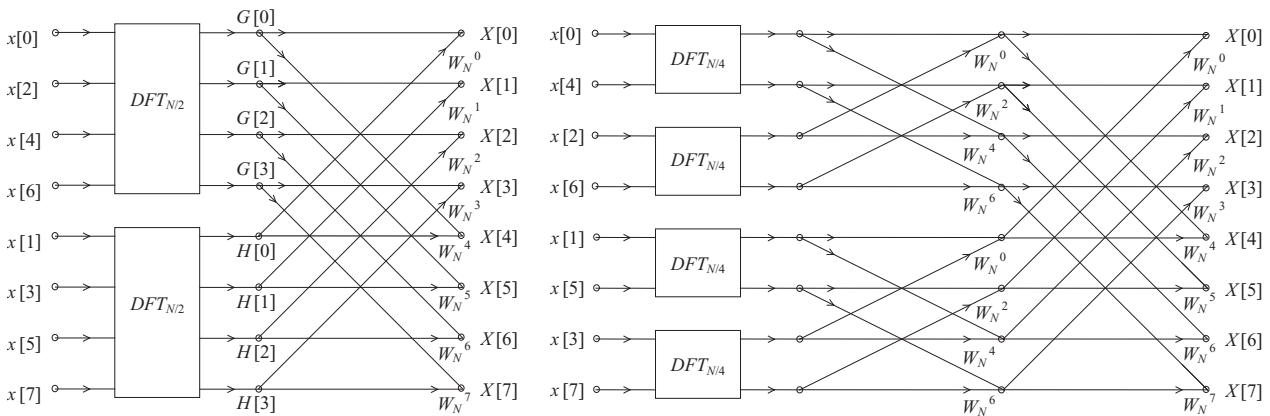
FFT Diezmado en tiempo



FFT Diezmado en tiempo



Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS



Cálculo eficiente de la DFT

Algoritmo FFT de diezmado en tiempo por factor 2

- Introducción
- Descripción del algoritmo
- Complejidad
 - número de operaciones
 - memoria – operaciones “in situ”

Variantes:

- Entradas ordenadas
- Estructura transpuesta: diezmado en frecuencia
- Simplificación de mariposas

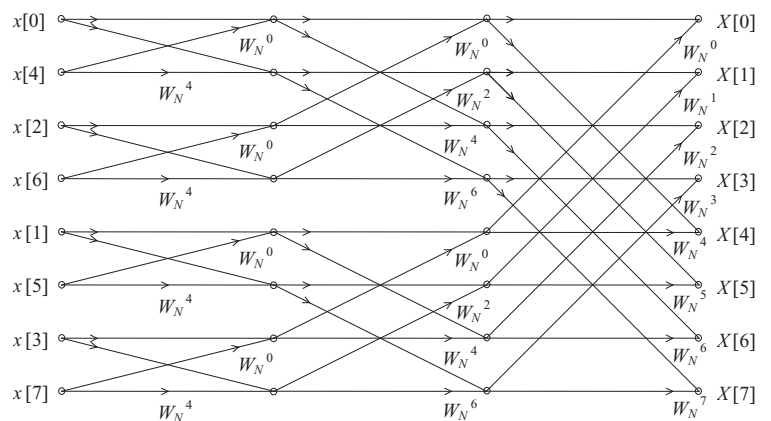
Reordenación

Algoritmo FFT de diezmado en el tiempo por factor 2:

Complejidad: número de operaciones

etapas de diezmado: $\log_2 N$

cada etapa		N multiplicaciones
		N sumas
Total:		$N \log_2 N$ multiplicaciones
		$N \log_2 N$ sumas



- Orden de complejidad $O(N \log_2 N)$
- Ejemplo: $N=1024 = 2^{10}$

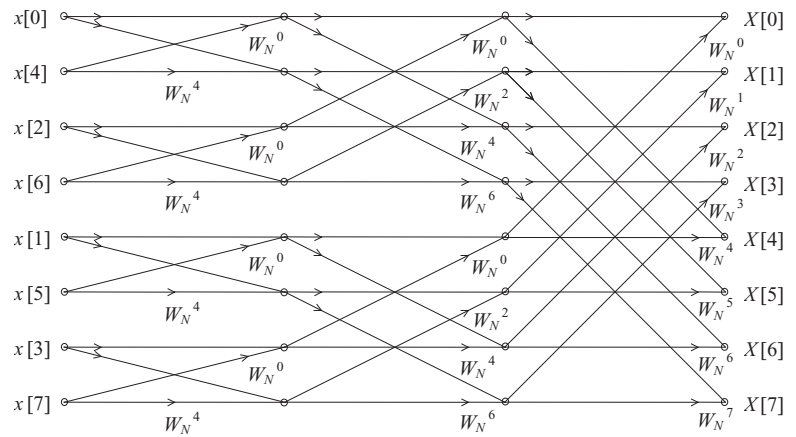
cálculo directo | $N^2 \approx 10^6$

algoritmo FFT | $N \log_2 N \approx 1000 \times 10 = 10^4$

Algoritmo FFT de diezclado en el tiempo por factor 2:

Complejidad: memoria

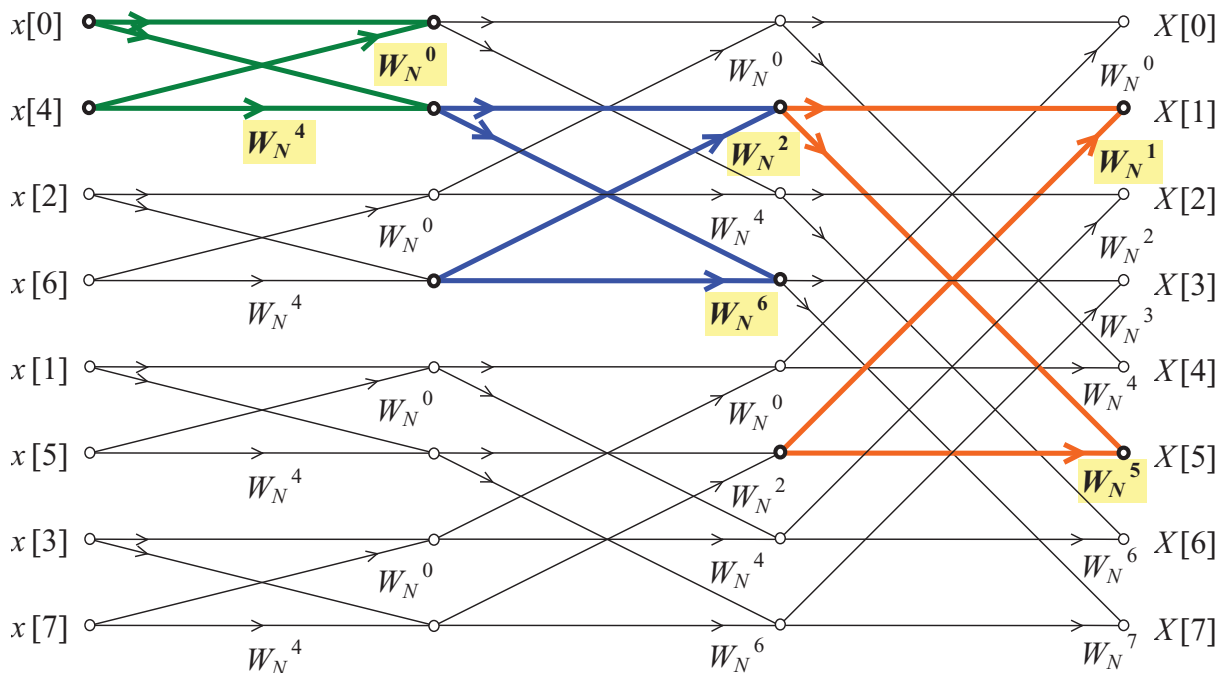
- se parte de la secuencia reordenada
- se puede ejecutar en fases (etapas) sucesivas



- en cada etapa se calculan N valores de salida a partir de N valores de entrada
- los N valores de entrada no se vuelven a usar
- los valores de salida puede almacenarse en el mismo sitio que los de entrada: “**in situ**”
- sólo hacen falta en total N posiciones de memoria

Algoritmo FFT de diezclado en el tiempo por factor 2:

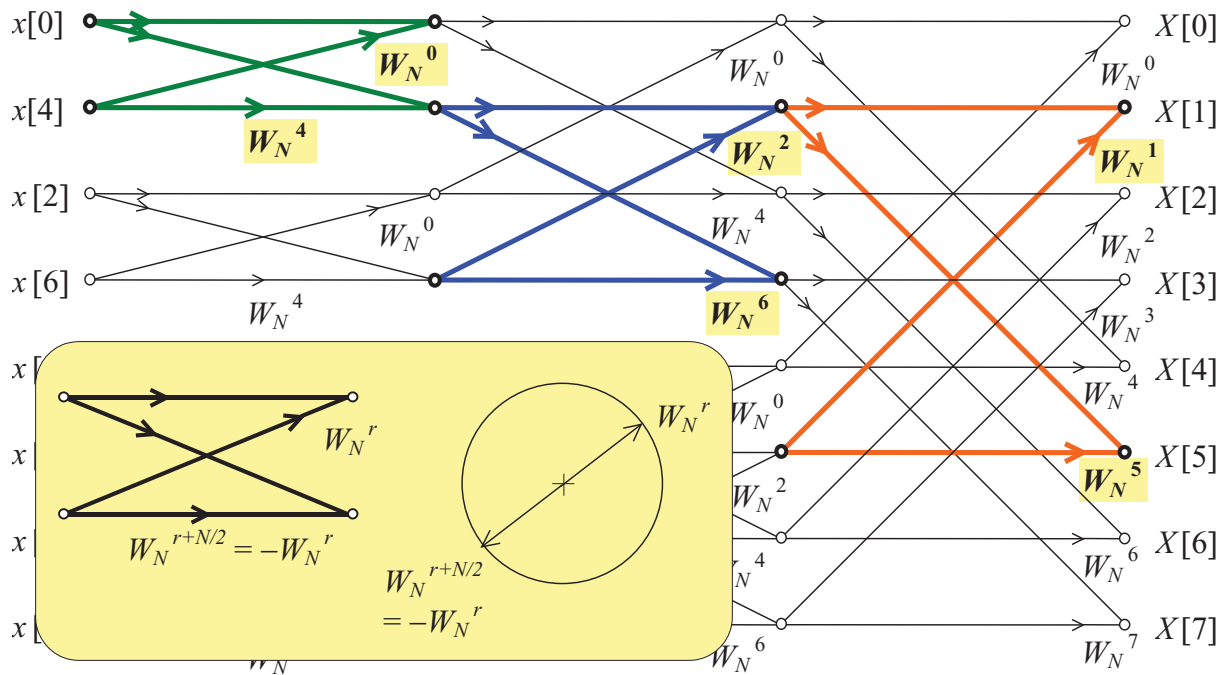
Complejidad: memoria



en cada etapa se calculan $N/2$ “mariposas”

Algoritmo FFT de diezrado en el tiempo por factor 2:

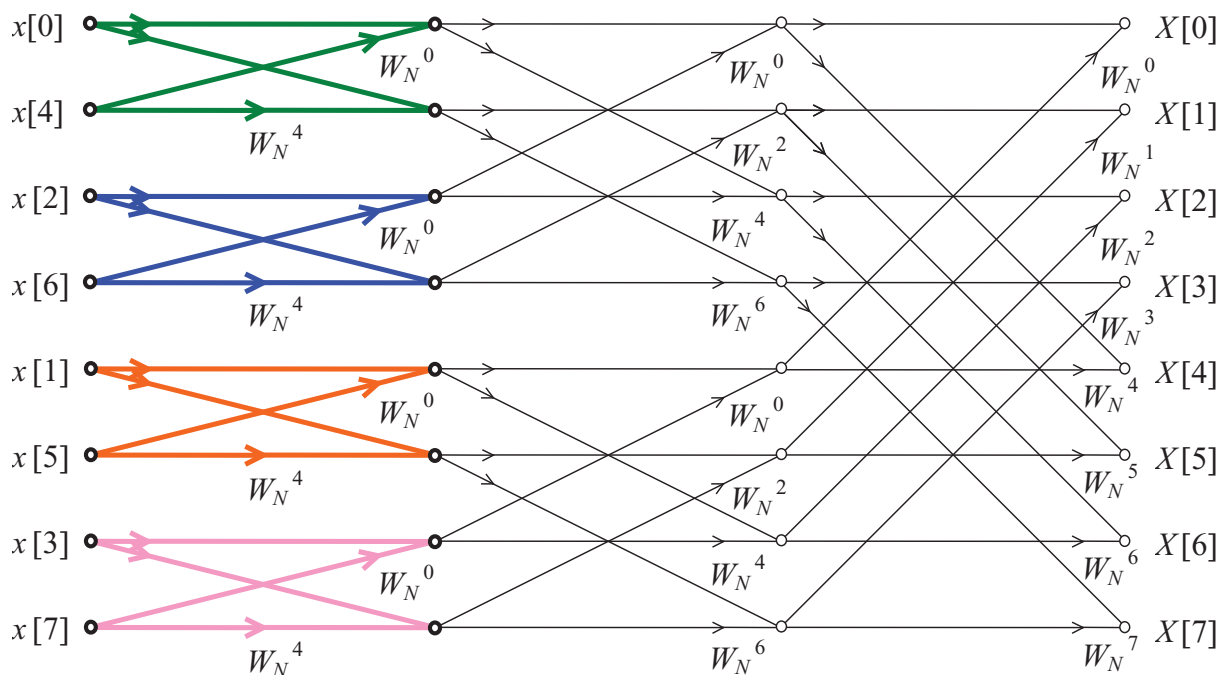
Complejidad: memoria



en cada etapa se calculan $N/2$ "mariposas"

Algoritmo FFT de diezrado en el tiempo por factor 2:

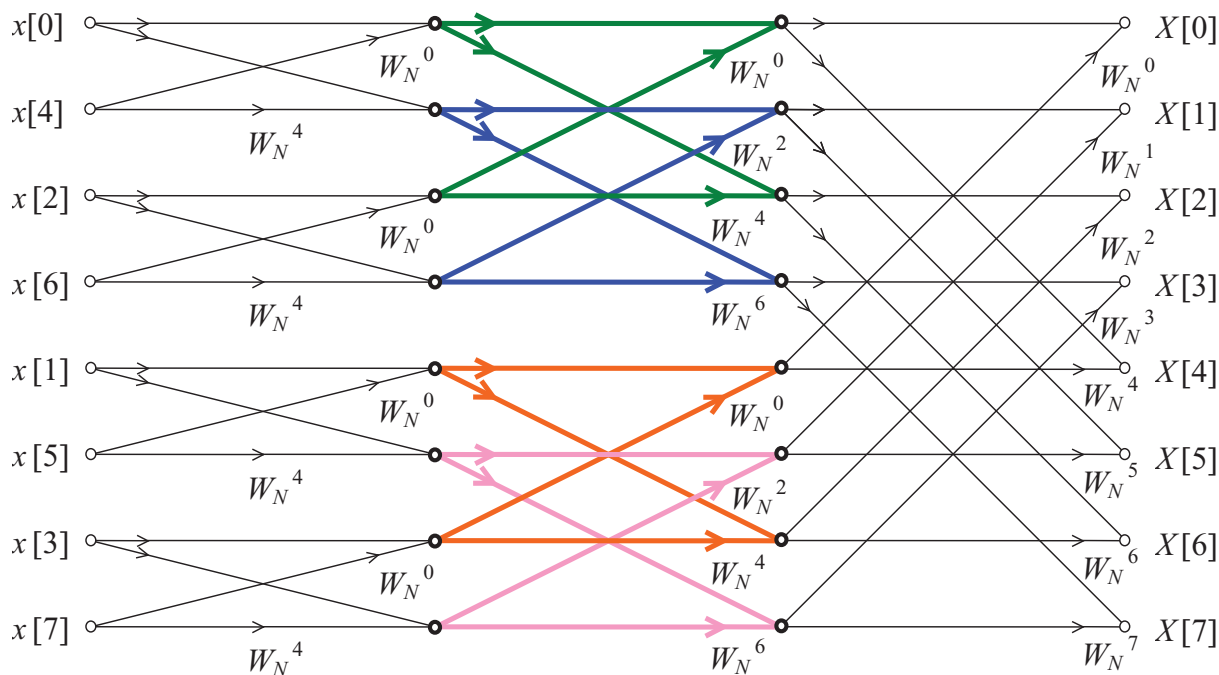
Complejidad: memoria



en cada etapa se calculan $N/2$ "mariposas"

Algoritmo FFT de diezrado en el tiempo por factor 2:

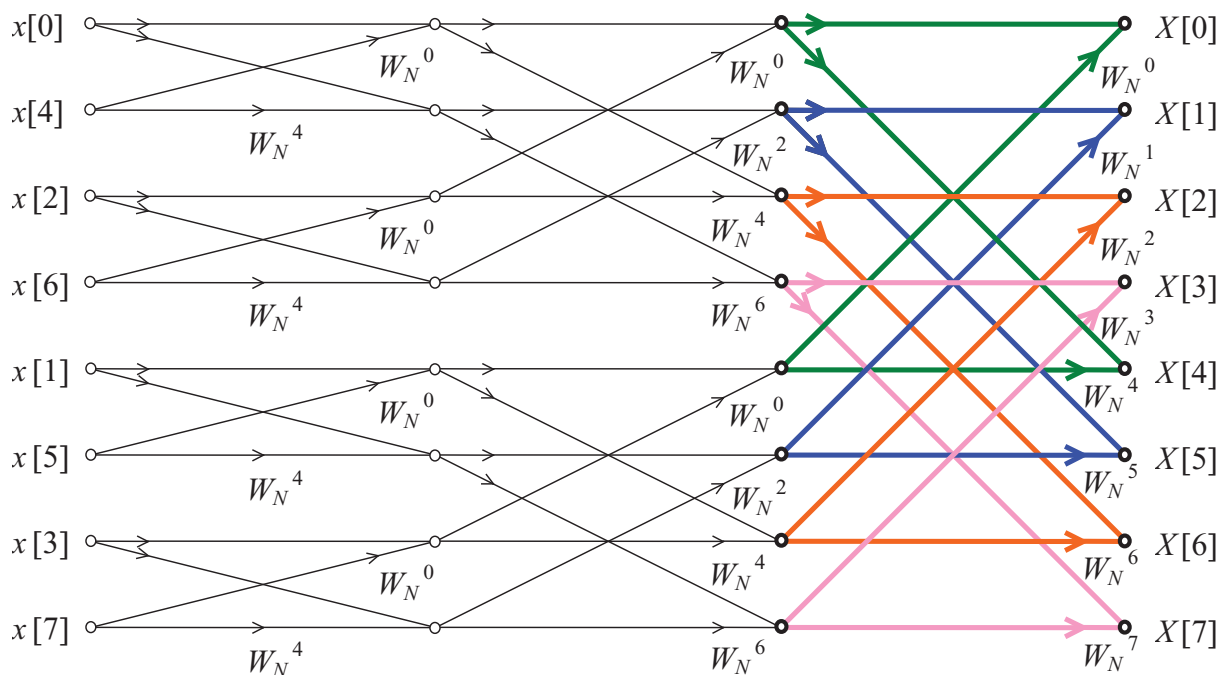
Complejidad: memoria



en cada etapa se calculan $N/2$ "mariposas"

Algoritmo FFT de diezrado en el tiempo por factor 2:

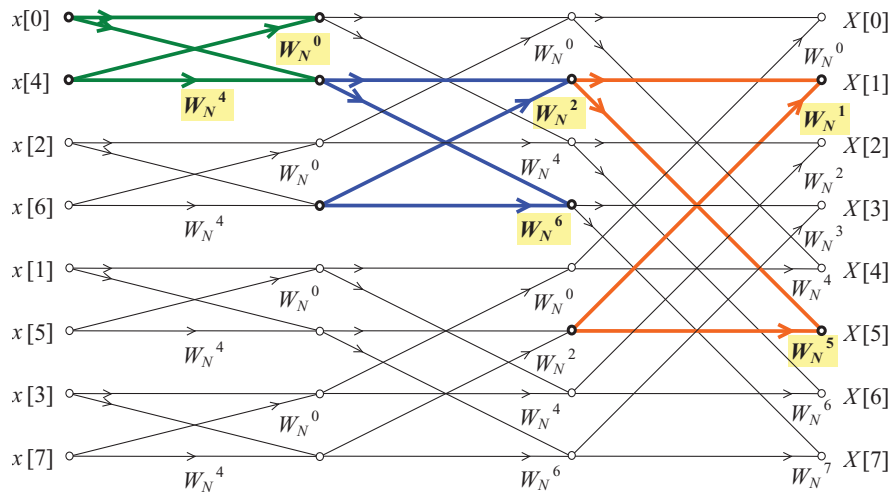
Complejidad: memoria



en cada etapa se calculan $N/2$ "mariposas"

Algoritmo FFT de diezrado en el tiempo por factor 2:

Complejidad: memoria

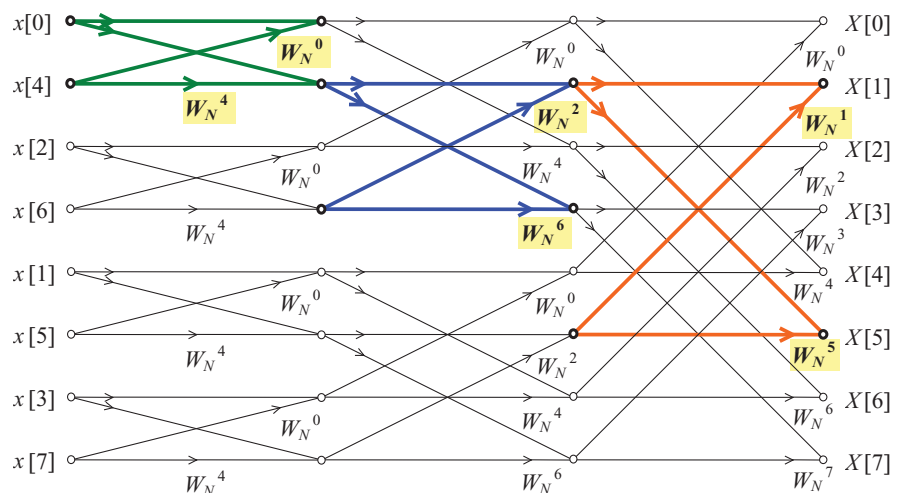


Mariposas "in situ"

- se calculan 2 valores de salida a partir de 2 valores de entrada
- los 2 valores de entrada no se vuelven a usar
- los 2 valores de salida puede almacenarse en el mismo sitio que los de entrada

Algoritmo FFT de diezrado en el tiempo por factor 2:

Complejidad: memoria



Ejecución secuencial

- las $\log_2 N$ etapas se ejecutan secuencialmente
- en cada etapa se ejecutan las $N/2$ mariposas secuencialmente
- almacenando las dos salidas en la misma memoria que las dos entradas
- No se requiere memoria para cálculos intermedios (max 1 valor)

Cálculo eficiente de la DFT

Algoritmo FFT de diezmado en tiempo por factor 2

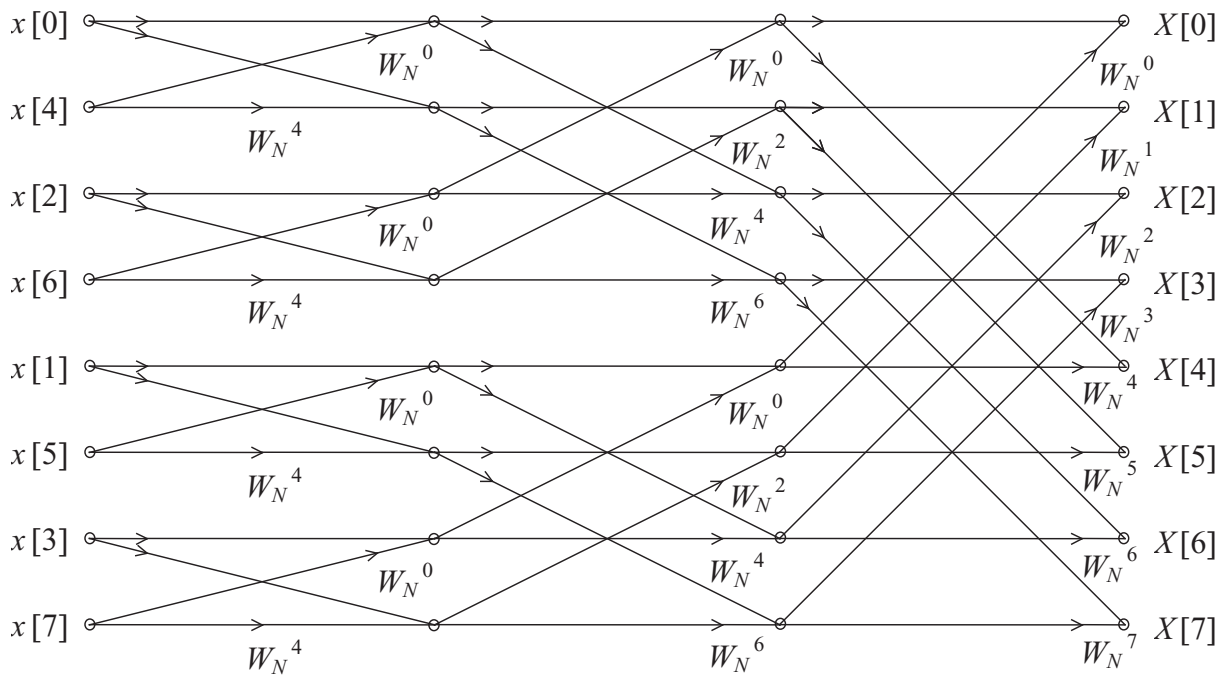
- Introducción
- Descripción del algoritmo
- Complejidad

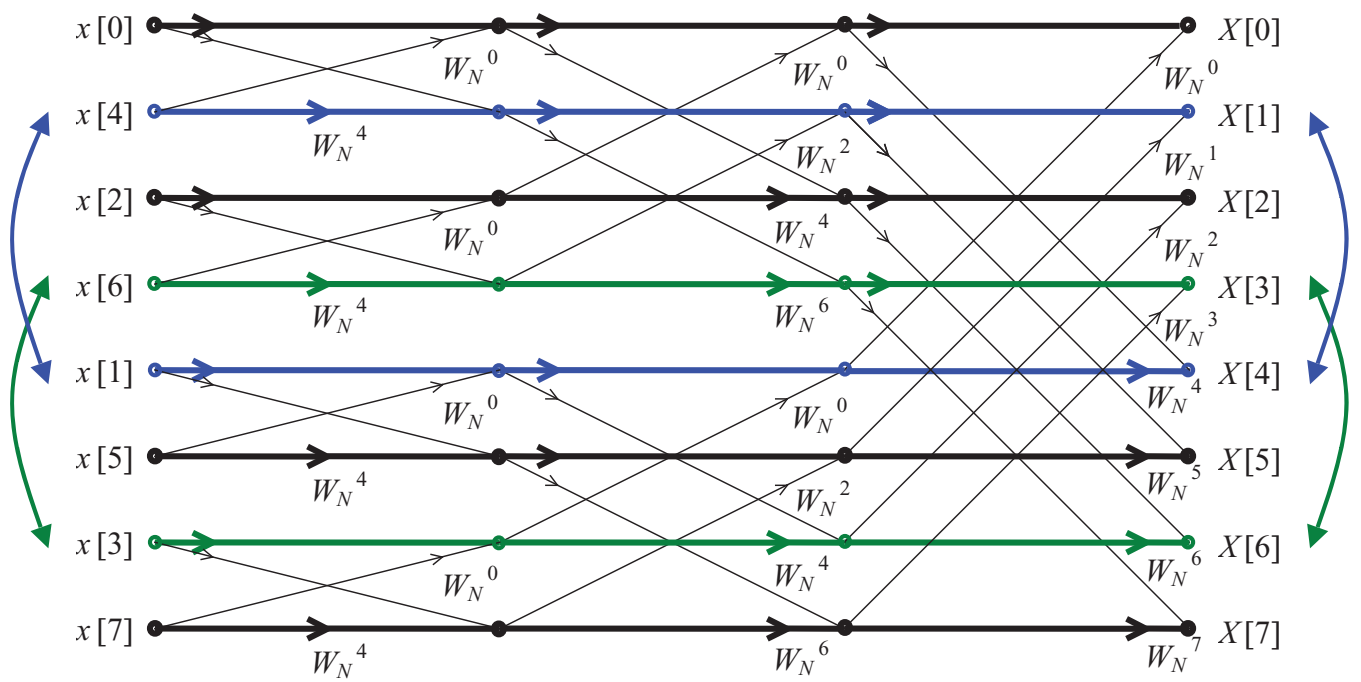
Variantes:

- Entradas ordenadas
- Estructura transpuesta: diezmado en frecuencia
- Simplificación de mariposas

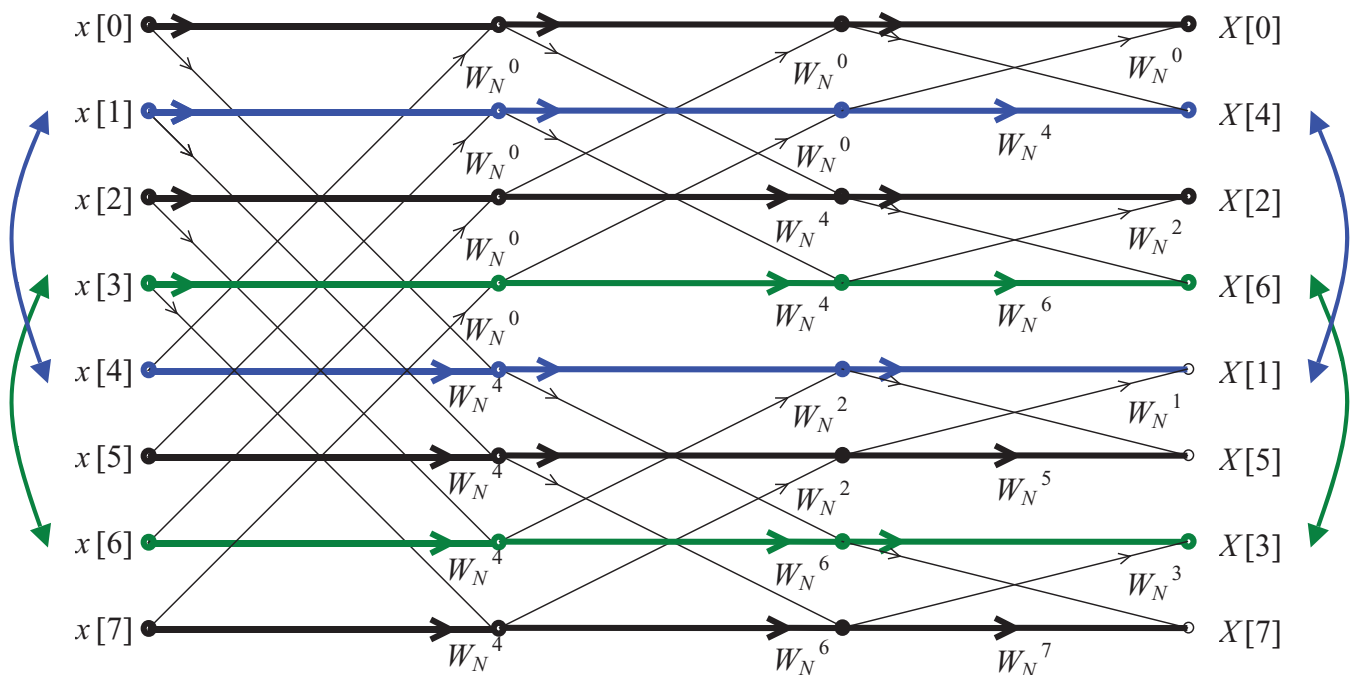
Reordenación

FFT Diezmado en tiempo



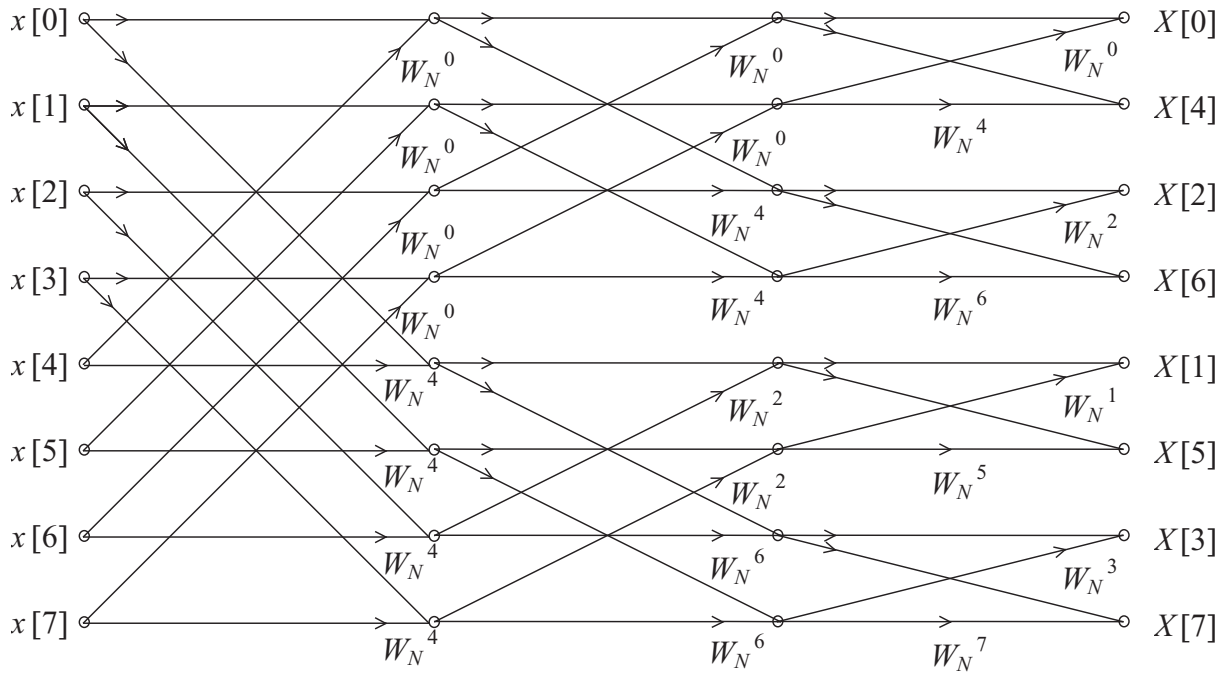


- Horizontales rígidas; inclinadas elásticas
- Desplazar verticalmente intercambiando posiciones



- Horizontales rígidas; inclinadas elásticas
- Desplazar verticalmente intercambiando posiciones

FFT Diezmado en tiempo – Entradas ordenadas



- Entrada ordenada pero... salida desordenada

Cálculo eficiente de la DFT

Algoritmo FFT de diezmado en tiempo por factor 2

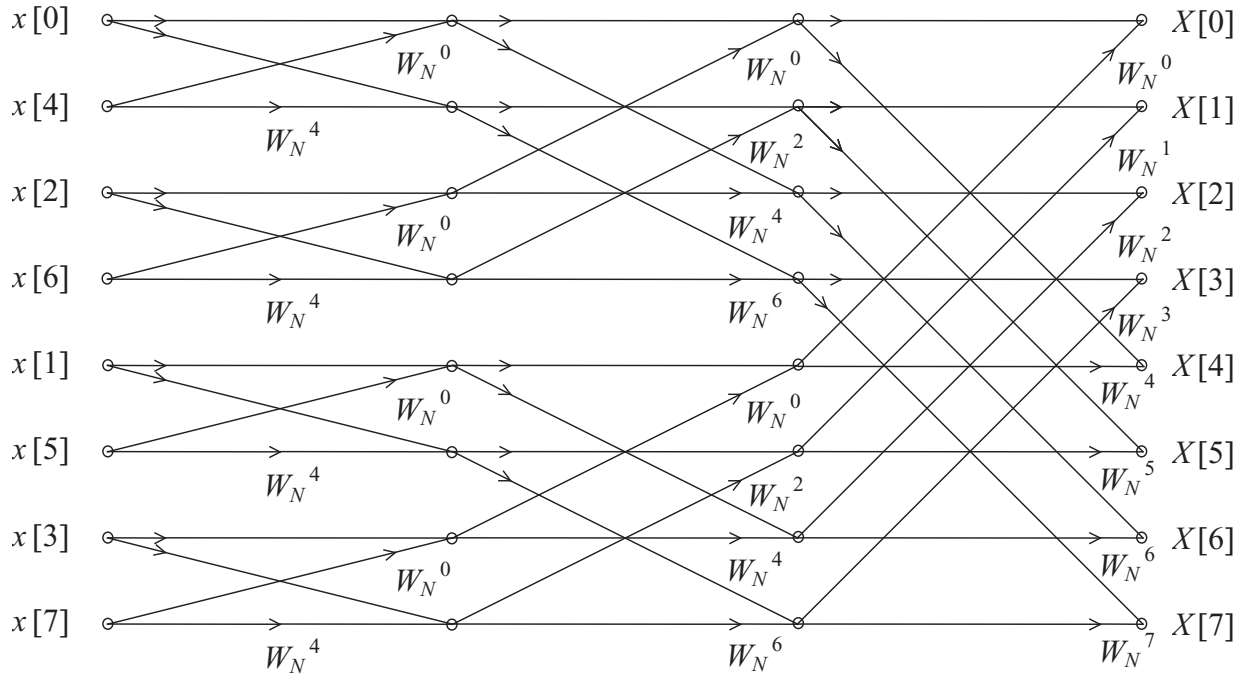
- Introducción
- Descripción del algoritmo
- Complejidad

Variantes:

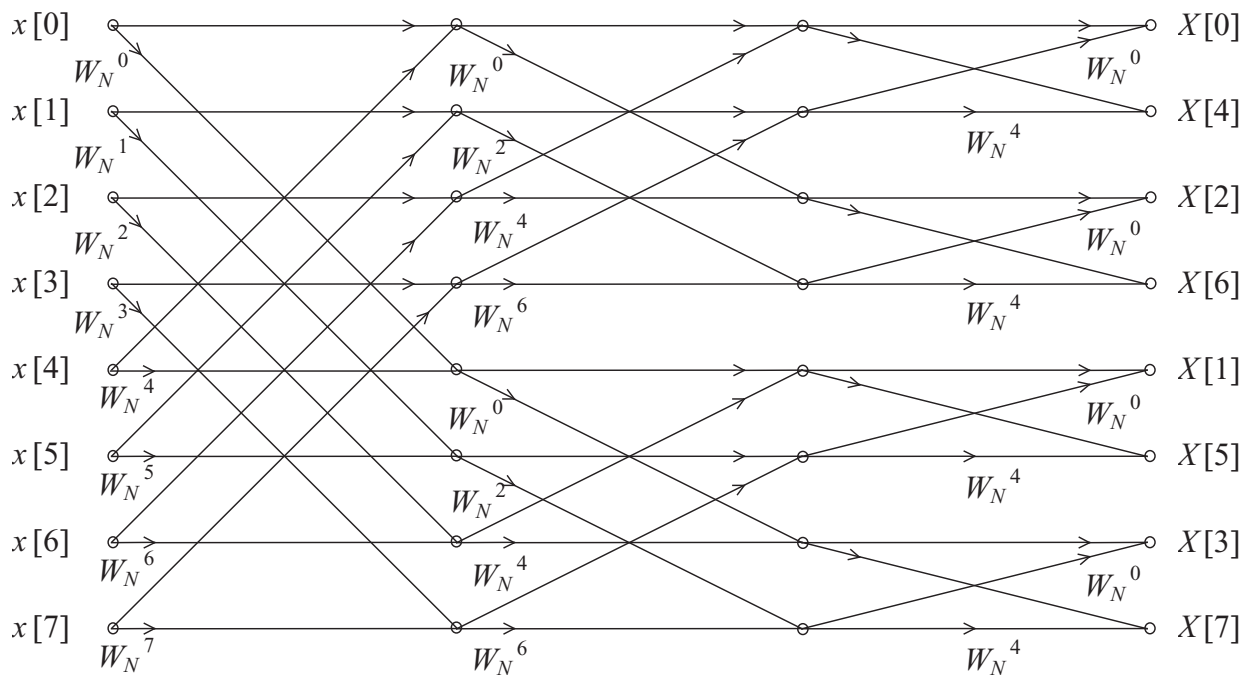
- Entradas ordenadas
- Estructura transpuesta: diezmado en frecuencia
- Simplificación de mariposas

Reordenación

FFT Diezmado en tiempo

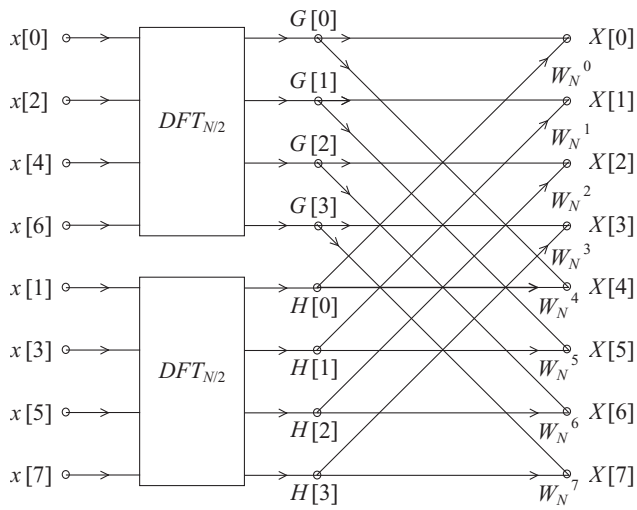


FFT Diezmado en tiempo - Transpuesta

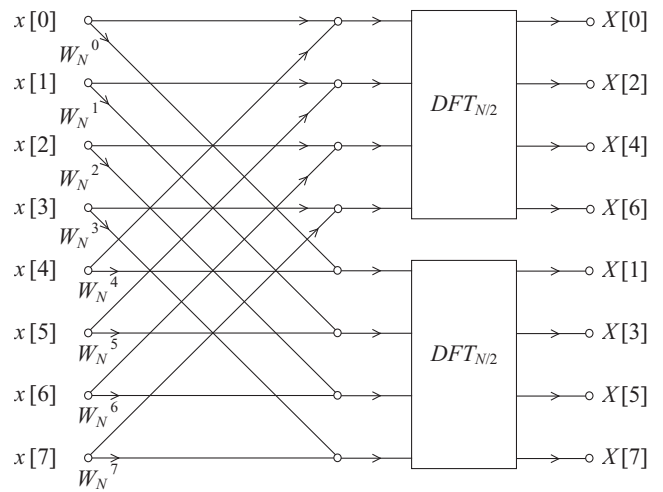


- Equivale a algoritmo de diezmado en frecuencia

FFT Diezmado en tiempo



FFT Diezmado en frecuencia



Cálculo eficiente de la DFT

Algoritmo FFT de diezmado en tiempo por factor 2

- Introducción
- Descripción del algoritmo
- Complejidad

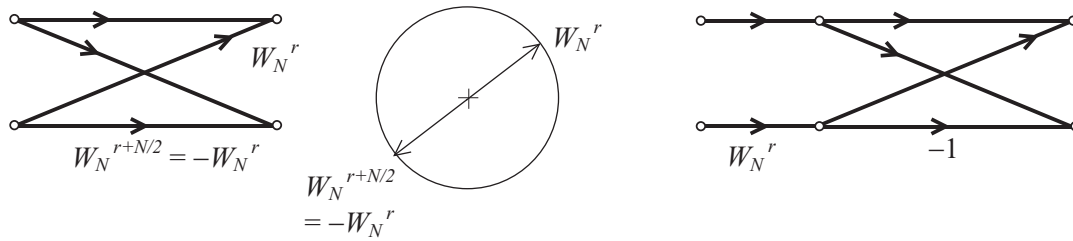
Variantes:

- Entradas ordenadas
- Estructura transpuesta: diezmado en frecuencia
- Simplificación de mariposas

Reordenación

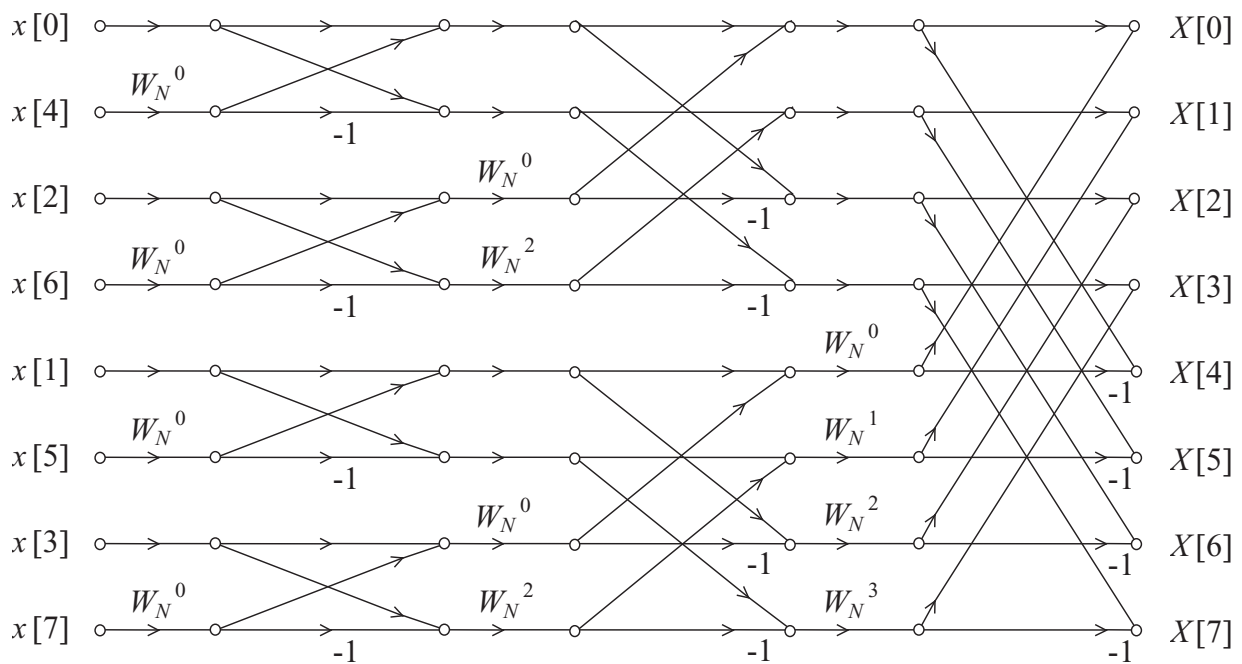
Algoritmos FFT

Simplificación de las mariposas

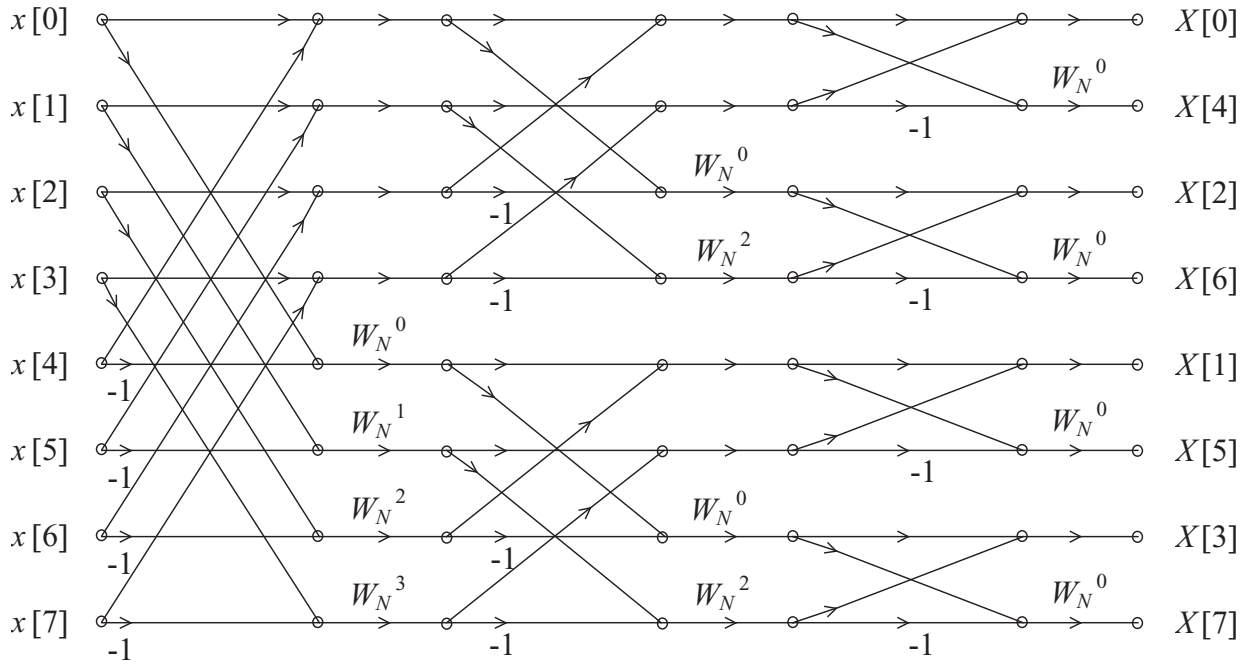


1 mariposa | 1 multiplicación
2 sumas

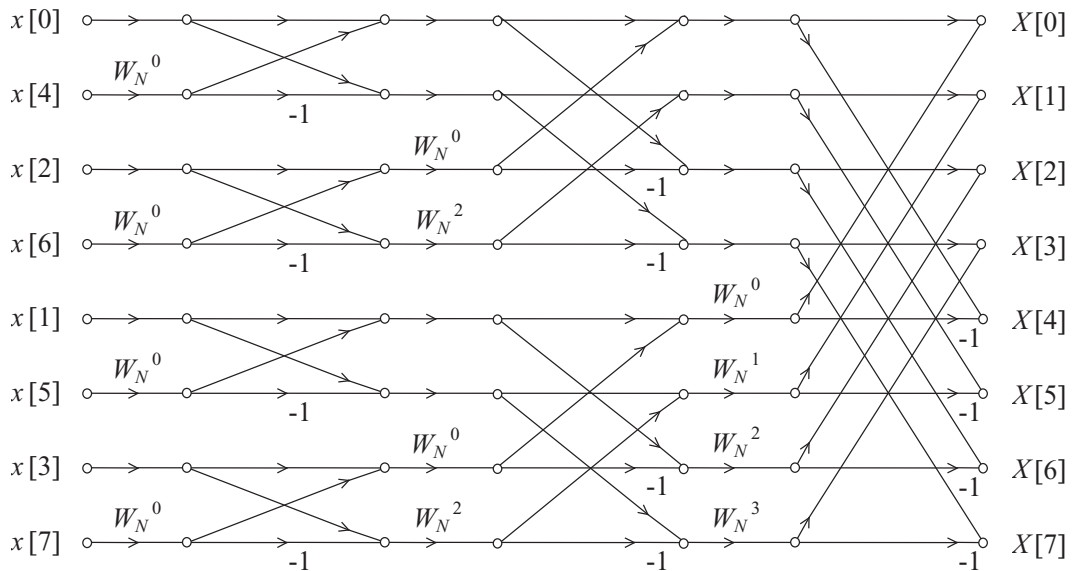
FFT Diezmado en tiempo



FFT Diezmado en frecuencia



Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS



Complejidad

FFT : etapas \times mariposas / etapa \times operaciones / mariposa

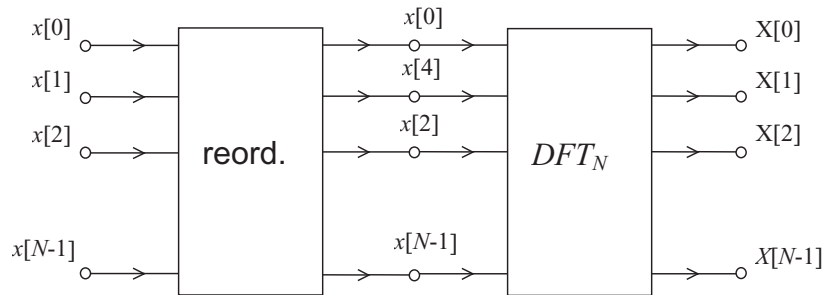
FFT	:	$\log_2 N$	\times	$N/2$	\times	$\begin{matrix} 1 (\times) \\ 2 (+) \end{matrix}$	=	$\begin{matrix} (N/2)\log_2 N & \text{multiplicaciones} \\ N\log_2 N & \text{sumas} \end{matrix}$
-----	---	------------	----------	-------	----------	---	---	---

Cálculo eficiente de la DFT

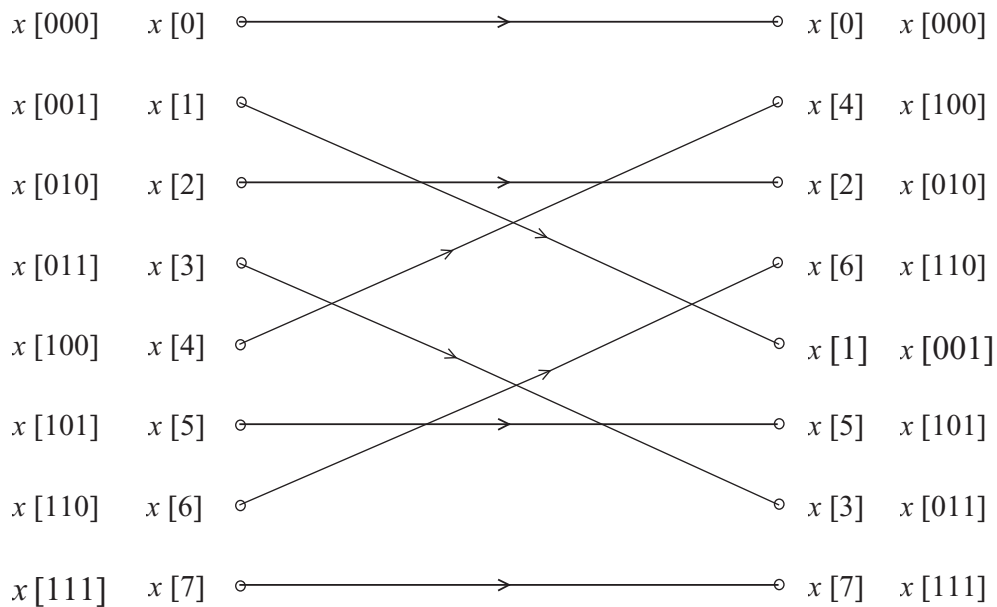
Algoritmo FFT de diezclado en tiempo por factor 2

Variantes:

Reordenación



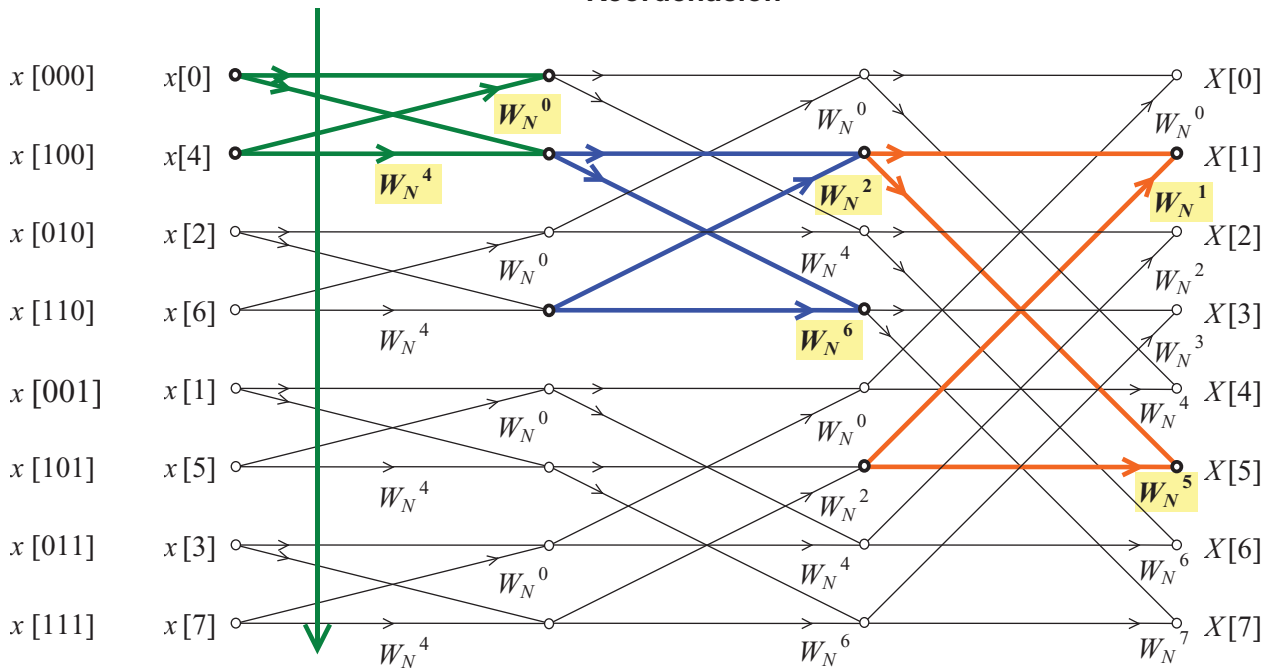
Reordenación



Con dos memorias:

- Lectura de una memoria con contador normal
- Escritura en la otra memoria con contador con bits en orden inverso (*bit reverse*)

Reordenación



Ejecución secuencial:

- Leer el vector de entrada con contador usado en orden inverso

Cálculo eficiente de la DFT

Algoritmo FFT de diezrado en tiempo por factor 2

- Introducción
- Descripción del algoritmo
- Complejidad

Variantes:

- Entradas ordenadas
- Estructura transpuesta: diezrado en frecuencia
- Simplificación de mariposas

Reordenación

Tema 5 Aplicaciones de la DFT

Análisis espectral con DFT

- Objetivo y realización
- Efecto del enventanado
- Efecto del muestreo espectral
- Parámetros de un analizador de espectros

Realización de filtros FIR (convolución)

- Objetivo
- Convolución lineal con DFT
- Convolución por bloques

Compensación de canal FIR (deconvolución)

- Descripción del problema
- Transmisión por bloques separados. Uso del prefijo cíclico
- Compensación en el dominio de la frecuencia (FEQ)
- Multiplexación por División Ortogonal en Frecuencia (OFDM)

Tema 5 Aplicaciones de la DFT

- Análisis espectral
- Realización en el dominio de la frecuencia

Análisis espectral con DFT

- Objetivo y realización
- Efecto del enventanado
- Efecto del muestreo espectral
- Parámetros de un analizador de espectros

Análisis espectral con DFT

Objetivo: (Analizador de espectros digital)

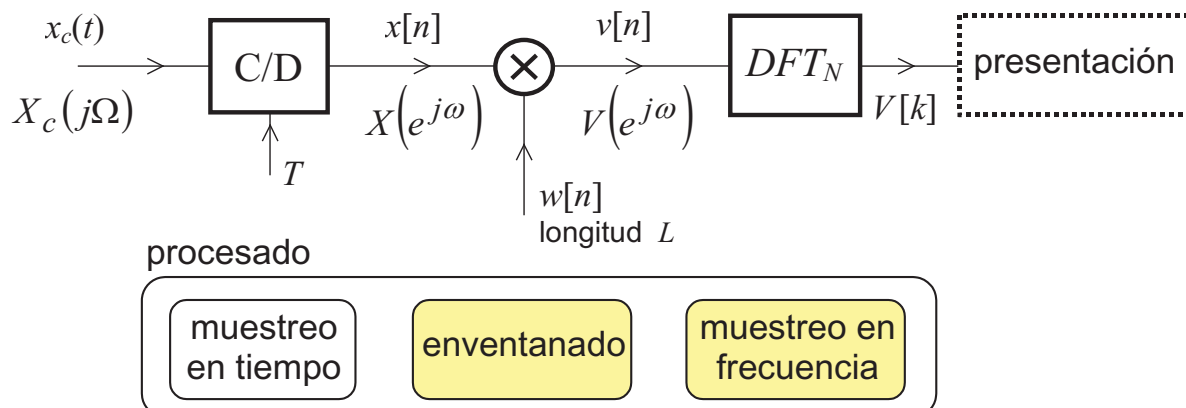
Obtener una aproximación de la Transformada de Fourier de una señal continua mediante procesado digital a partir de una observación de duración finita.



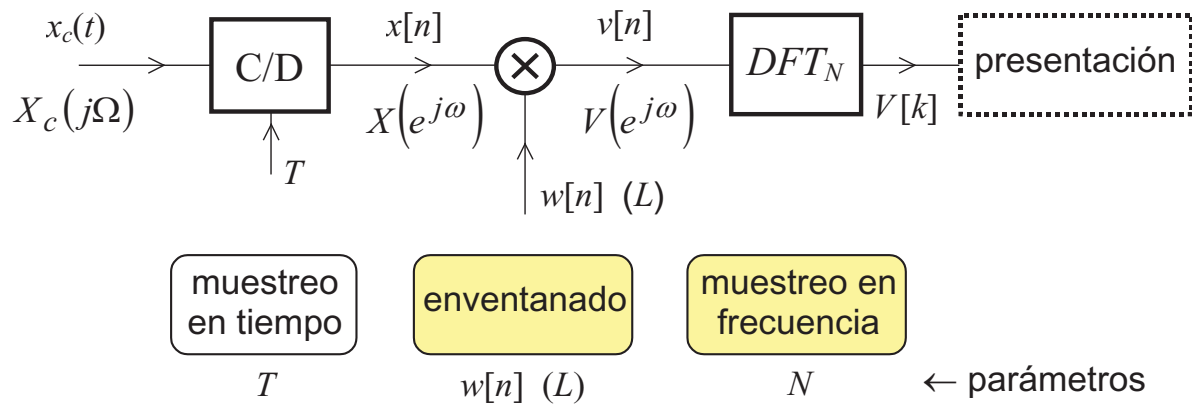
Análisis espectral con DFT

Objetivo: (Analizador de espectros digital)

Obtener una aproximación de la Transformada de Fourier de una señal continua mediante procesado digital a partir de una observación de duración finita.



Análisis espectral con DFT



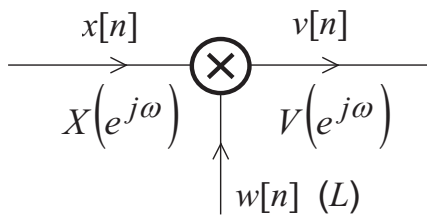
Aproximación:

- Muestreo en tiempo ideal:
 - no hay solapamiento espectral en el muestreo (aliasing)
 - no hay cuantificación de señales
- Sólo se consideran los efectos de:
 - enventanado
 - muestreo en frecuencia

Análisis espectral con DFT

- Objetivo y realización
- Efecto del enventanado
- Efecto del muestreo espectral
- Parámetros de un analizador de espectros

Análisis espectral. Efecto del enventanado



¿error T.F. $X(e^{j\omega}) \rightarrow V(e^{j\omega})$
 ¿cómo elegir la $w[n]$ adecuada?

Enventanado

$$v[n] = x[n] \cdot w[n] \rightarrow V(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

$$W(e^{j\omega}) = T.F.\{w[n]\}$$

Error debido al enventanado:

$$X(e^{j\omega}) \rightarrow \text{convolución con T.F. de la ventana}$$

Si la ventana fuera constante e infinita: $W(e^{j\omega}) = 2\pi \delta(\omega)$

no habría error: convolución con $\delta(\omega)$

Análisis espectral. Efecto del enventanado

Ejemplo: senoide

$$x_c(t) = \cos \Omega_1 t$$

$$x[n] = \cos \omega_1 n = \frac{1}{2} e^{j\omega_1 n} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_1 n} \quad \omega_1 = \Omega_1 T$$

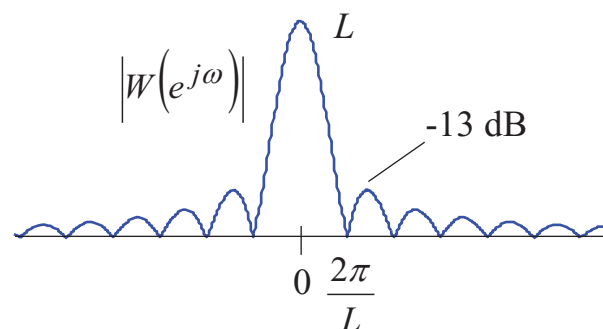
$$v[n] = x[n] \cdot w[n] = \frac{1}{2} w[n] \cdot e^{j\omega_1 n} + \frac{1}{2} w[n] \cdot e^{-j\omega_1 n}$$

$$V(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} W(e^{j(\omega-\omega_1)}) + \frac{1}{2} W(e^{j(\omega+\omega_1)})$$

copias de $W(e^{j\omega})$ desplazadas a ω_1 y $-\omega_1$

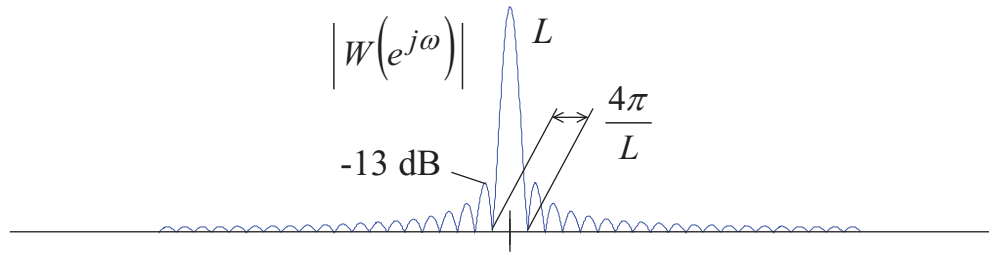
Ventana rectangular:

$$\left| W(e^{j\omega}) \right| = \left| \frac{\text{sen } \frac{\omega}{2} L}{\text{sen } \frac{\omega}{2}} \right|$$

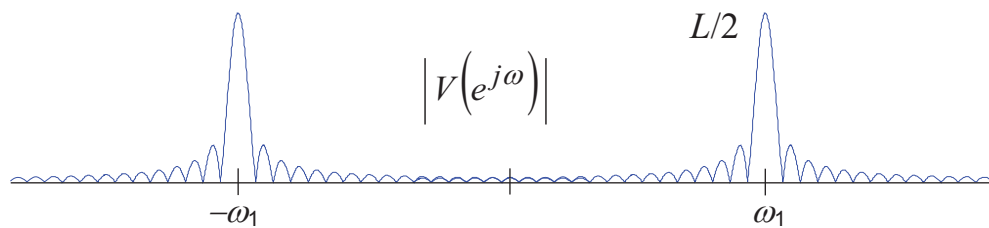


Análisis espectral. Efecto del enventanado

Ejemplo: senoide



$$V(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}W(e^{j(\omega-\omega_1)}) + \frac{1}{2}W(e^{j(\omega+\omega_1)})$$



Análisis espectral. Efecto del enventanado

Ejemplo: senoide

$$x_c(t) = \cos \Omega_1 t$$

$$x[n] = \cos \omega_1 n = \frac{1}{2}e^{j\omega_1 n} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_1 n} \quad \omega_1 = \Omega_1 T$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\delta(\omega - \omega_1) + \frac{1}{2}\delta(\omega + \omega_1)$$

Enventanado:

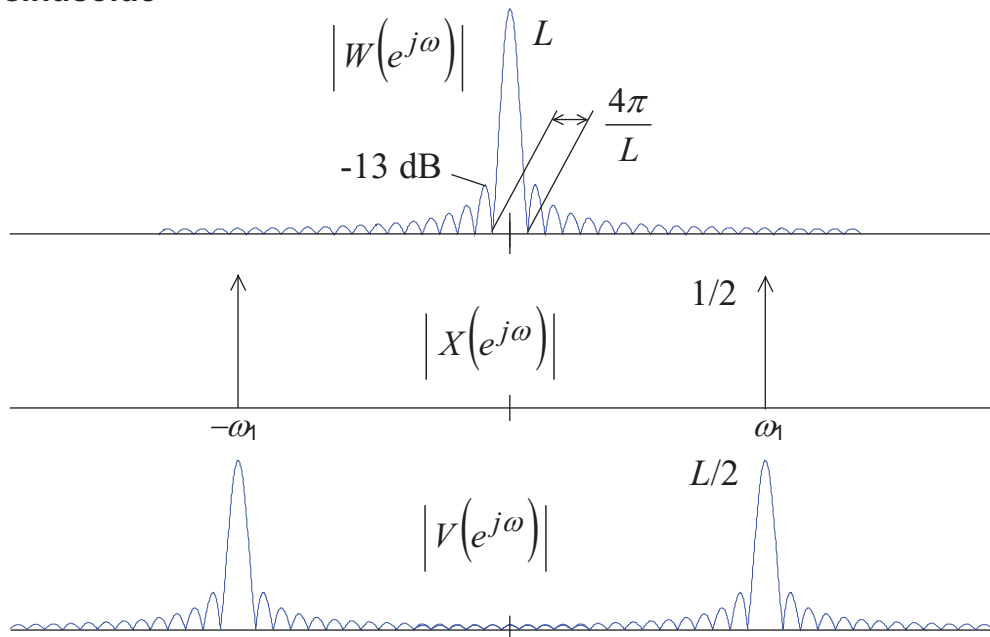
$$v[n] = x[n] \cdot w[n] \rightarrow V(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) \otimes W(e^{j\omega}) \quad \text{convolución}$$

$$V(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}W(e^{j(\omega-\omega_1)}) + \frac{1}{2}W(e^{j(\omega+\omega_1)})$$

- convolución con deltas
- copias de $W(e^{j\omega})$ desplazadas a ω_1 y $-\omega_1$

Análisis espectral. Efecto del enventanado

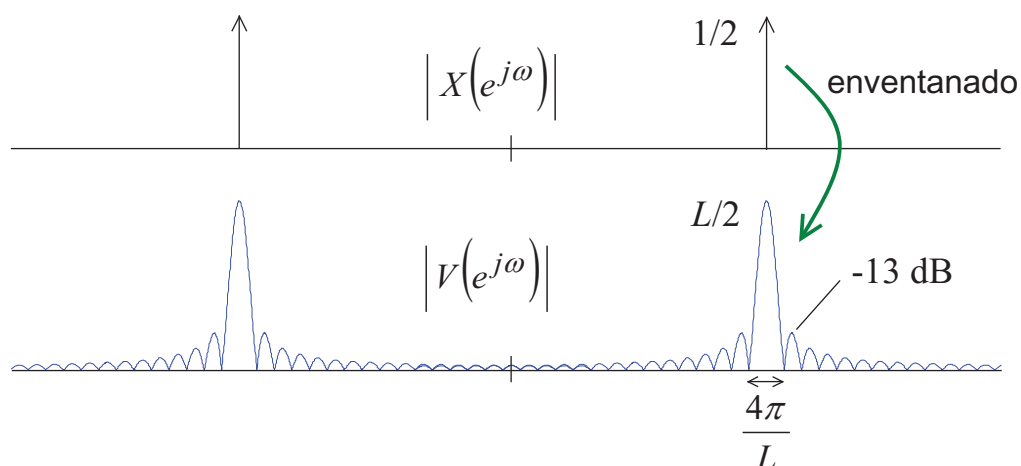
Ejemplo: senoide



- Convolución de funciones delta $\delta(\omega)$ con la T.F. de la ventana
- Copias centradas en las frecuencias de la senoide

Análisis espectral. Efecto del enventanado

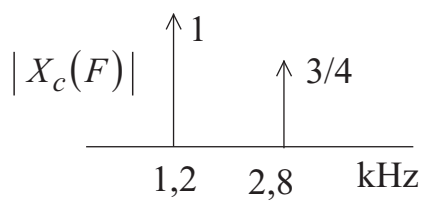
Ejemplo: senoide



- La energía de la $\delta(\omega)$ se ensancha (lóbulo principal)
- La energía de la $\delta(\omega)$ se escapa (fuga) a unos lóbulos laterales (aparece energía en otras frecuencias a ambos lados de ω_1)

Análisis espectral. Efecto del enventanado

Ejemplo: dos sinusoides

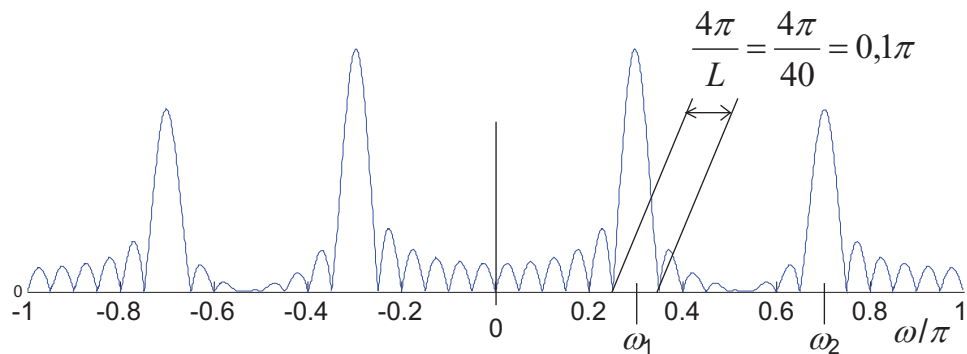


$$F_1 = 1,2 \text{ kHz}$$
$$F_2 = 2,8 \text{ kHz}$$

$$F_s = 8 \text{ kHz}$$
$$L = 40$$

$$\omega_1 = \Omega_1 T = 2\pi \cdot \frac{F_1}{F_s} = 2\pi \cdot 0,15 = 0,3\pi$$

$$\omega_2 = \Omega_2 T = 2\pi \cdot \frac{F_2}{F_s} = 2\pi \cdot 0,35 = 0,7\pi$$



Análisis espectral con DFT

- Objetivo y realización
- Efecto del enventanado
 - Resolución y fugas con ventana rectangular
 - Uso de otras ventanas
- Efecto del muestreo espectral

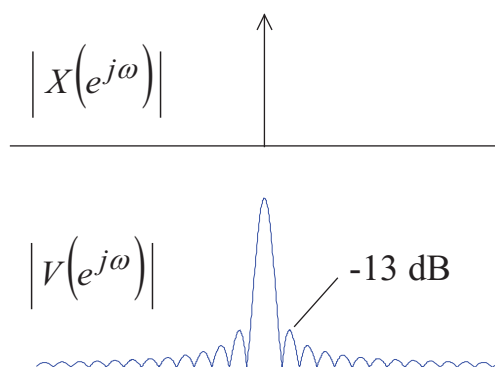
Análisis espectral. Efecto del enventanado

Errores

Fugas	enmascaran sinusoides débiles próximas
Lóbulo principal ancho	limita la resolución (capacidad de distinguir sinusoides próximas)

Análisis espectral. Efecto del enventanado

Fugas



Fugas: energía en otras frecuencias a ambos lados de ω_1

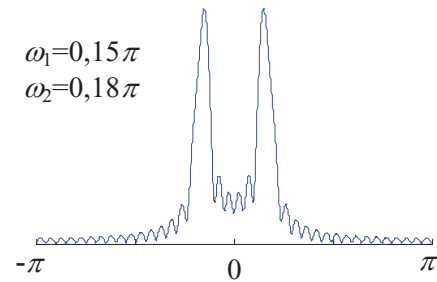
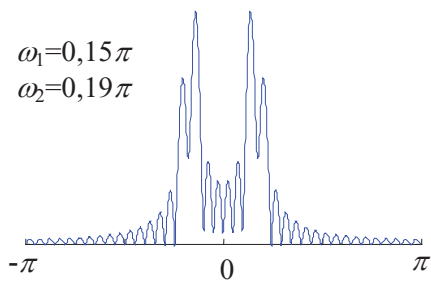
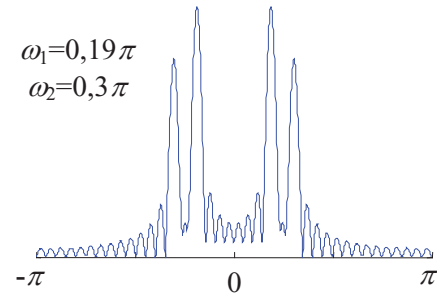
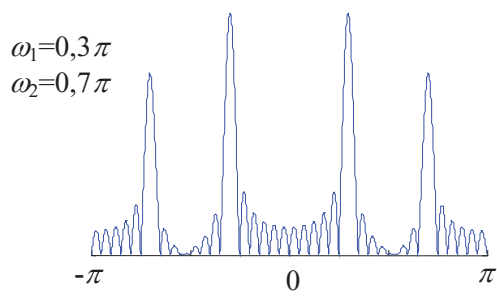
Fugas pueden enmascarar sinusoides cercanas más débiles

Atenuación del lóbulo secundario ($\alpha = -13 \text{ dB}$ del principal)

Análisis espectral. Efecto del enventanado

Resolución

Sinusoides de frecuencias próximas pueden confundirse

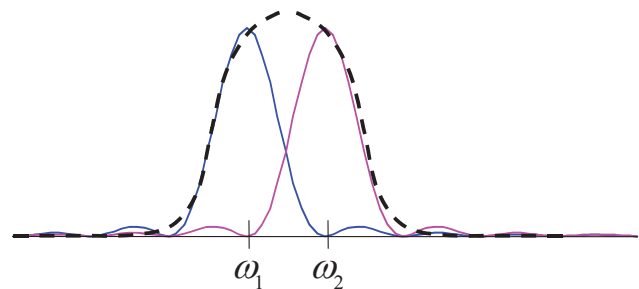
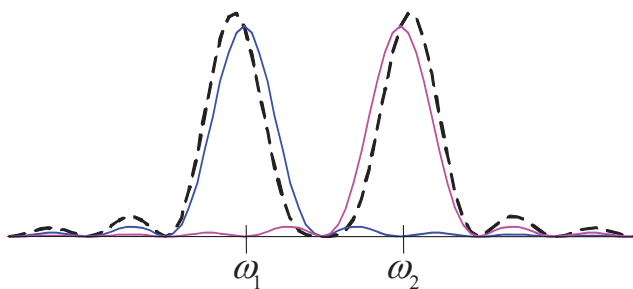


Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

Análisis espectral. Efecto del enventanado

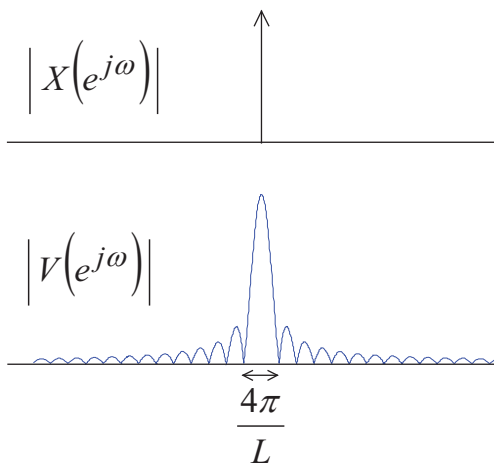
Resolución

Se considera que dos tonos se pueden distinguir si su separación es mayor al ancho del lóbulo principal



Análisis espectral. Efecto del enventanado

Resolución



Resolución:

Capacidad de **resolver** o **separar**

Separación mínima en frecuencia para que dos sinusoides sean distinguibles

Resolución = anchura lóbulo principal

Ventana rectangular:

$$\Delta\omega = \frac{4\pi}{L}$$

En Hz:

$$\Delta F = \Delta\omega \cdot \frac{F_s}{2\pi} = \frac{4\pi}{L} \cdot \frac{F_s}{2\pi} = 2 \cdot \frac{1}{LT}$$

$$\Delta F = 2 \cdot \frac{1}{LT}$$

LT : duración de la ventana de observación

Análisis espectral con DFT

- Objetivo y realización
- Efecto del enventanado
 - Resolución y fugas con ventana rectangular
 - Uso de otras ventanas
- Efecto del muestreo espectral

Análisis espectral. Efecto del enventanado

¿Cómo mejorar resolución y fugas?

• Resolución

$$\Delta\omega = \frac{4\pi}{L}$$

aumentando L (duración de la ventana) ...

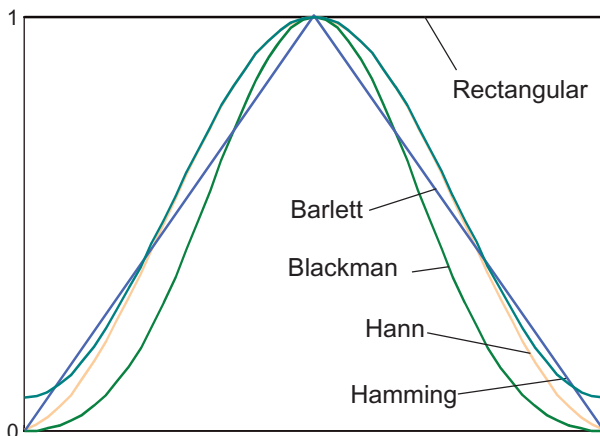
$$\Delta F = \frac{2}{LT}$$

... se puede obtener tanta resolución como se desee

• Fugas

- Se deben al enventanado brusco
- Se pueden reducir con otras “formas de la ventana”
- Ventanas no rectangulares: reducen α pero aumentando $\Delta\omega$

Ventanas



Rectangular $w[n] = 1 \quad 0 \leq n \leq M$

Bartlett $w[n] = \begin{cases} 2n/M & 0 \leq n \leq M/2 \\ 2-2n/M & M/2 < n \leq M \end{cases}$

Hamming $w[n] = 0,54 - 0,46 \cos(2\pi n/M)$

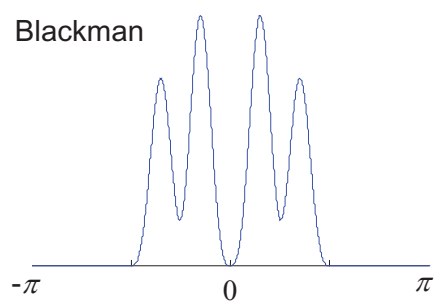
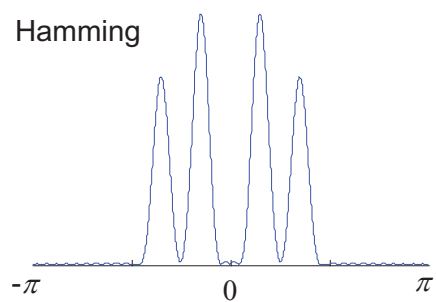
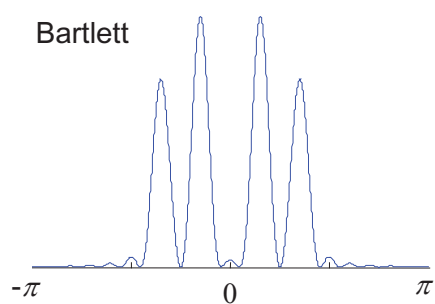
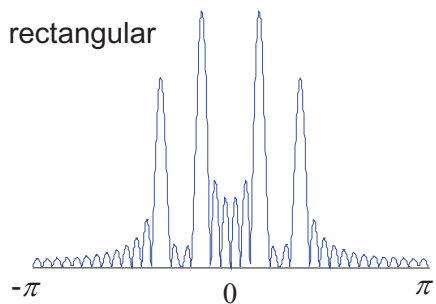
Hann $w[n] = 0,5 - 0,5 \cos(2\pi n/M)$

Blackman $w[n] = 0,42 - 0,5 \cos(2\pi n/M) + 0,08 \cos(4\pi n/M)$

Tipo	Ventana		Filtro FIR	
	Anchura lóbulo principal $\Delta\omega$	Atenuación lóbulo secundario α (dB)	Anchura zona de transición $\omega_s - \omega_p$	Rizado $A = -20 \log_{10} \delta$
Rectangular	$4\pi/(M+1)$	13	$1,81\pi/M$	21
Bartlett	$8\pi/M$	25		
Hann	$8\pi/M$	31	$6,2\pi/M$	44
Hamming	$8\pi/M$	41	$6,6\pi/M$	53
Blackman	$12\pi/M$	57	$11\pi/M$	74

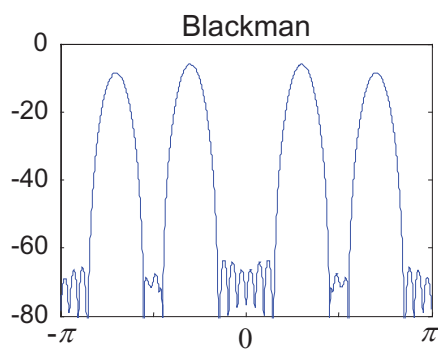
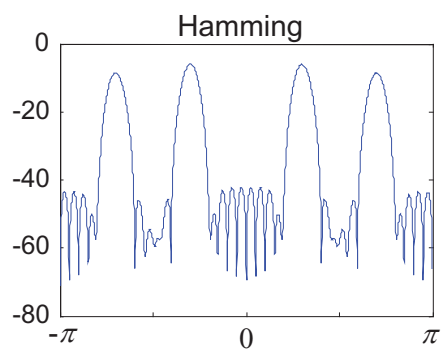
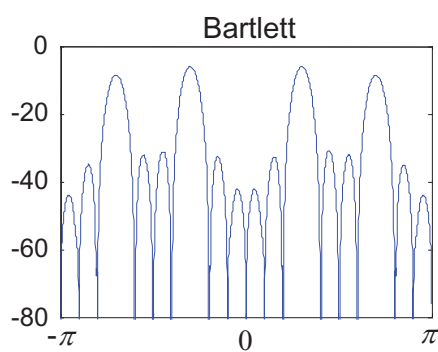
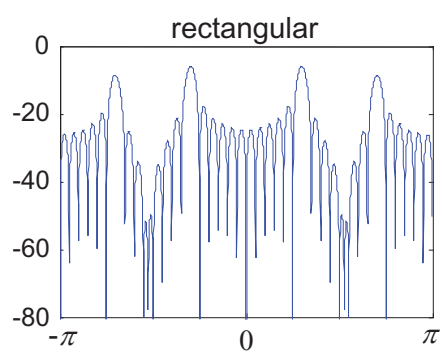
Análisis espectral. Enventanado

Efecto de la forma de ventana sobre las fugas



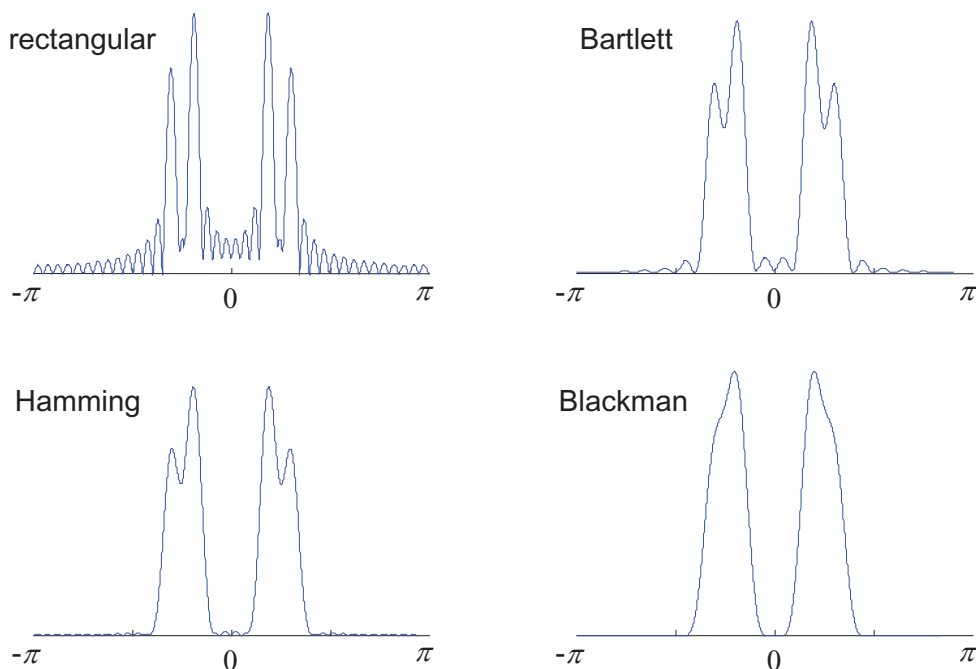
Análisis espectral. Enventanado

Efecto de la forma de ventana sobre las fugas



Análisis espectral. Enventanado

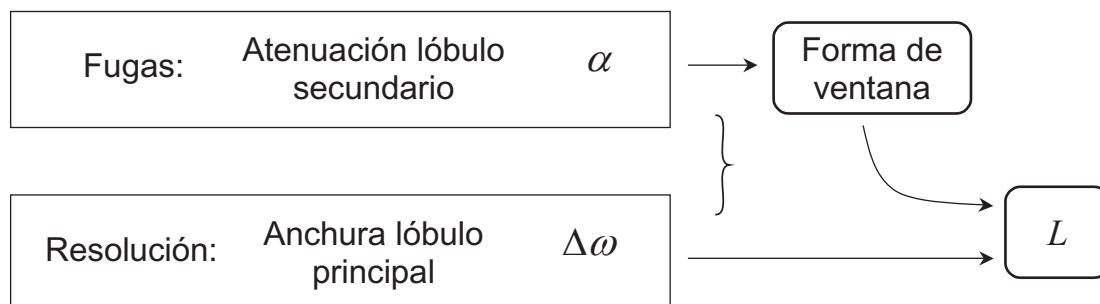
Efecto de la forma de ventana sobre la resolución



Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

Análisis espectral. Efecto del enventanado

Diseño



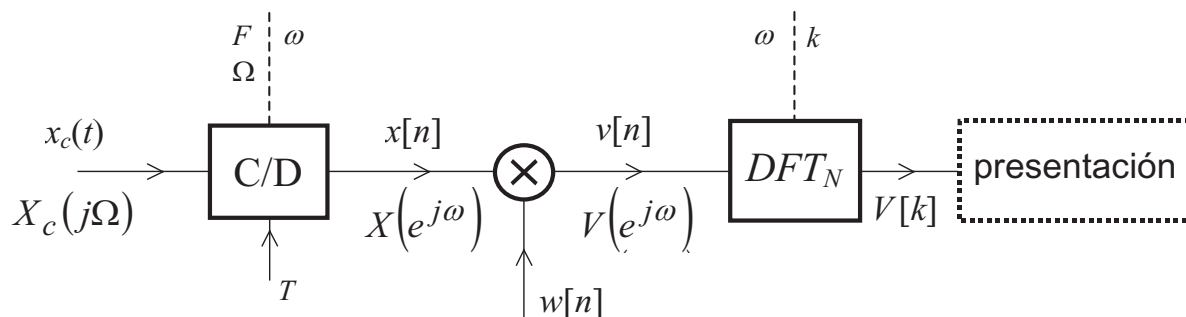
Tipo	Ventana	
	Anchura lóbulo principal $\Delta\omega$	Atenuación lóbulo secundario α (dB)
Rectangular	$4\pi/L$	13
Bartlett	$8\pi/(L-1)$	25
Hann	$8\pi/(L-1)$	31
Hamming	$8\pi/(L-1)$	41
Blackman	$12\pi/(L-1)$	57

Análisis espectral con DFT

- Objetivo y realización
- Efecto del enventanado
- Efecto del muestreo espectral
- Parámetros de un analizador de espectros

Análisis espectral con DFT

Efecto del muestreo espectral



- ¿a qué frecuencia F_k de $x_c(t)$ corresponde la muestra $V[k]$? ←

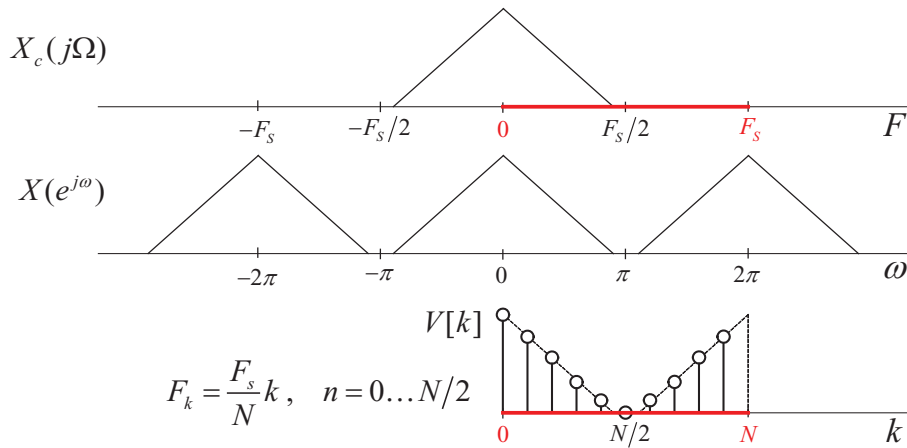
Muestreo en tiempo (C/D) $\omega = \Omega T$

Muestreo en frecuencia (DFT) $\omega_k = \frac{2\pi}{N} \cdot k$ N muestras en 2π

$$\Omega_k = \frac{\omega_k}{T} = \frac{2\pi}{NT} \cdot k$$

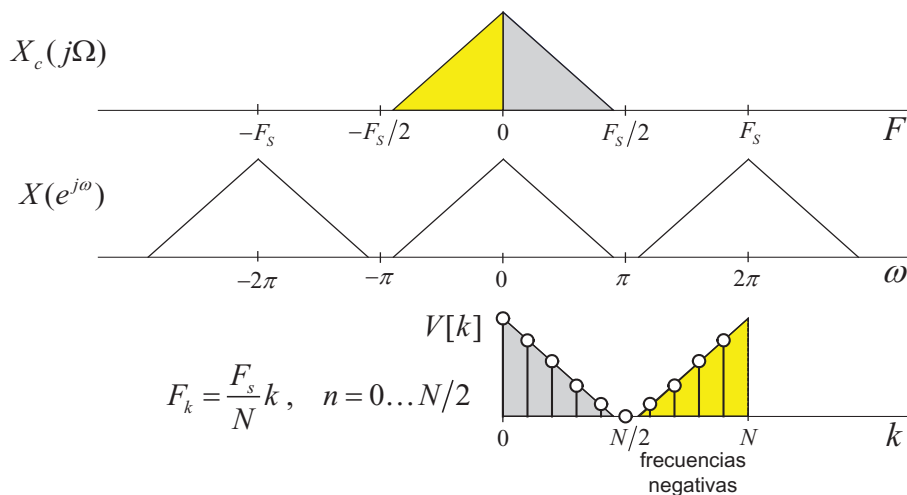
$$F_k = \frac{\Omega_k}{2\pi} = \boxed{F_k = \frac{k}{NT} = F_s \cdot \frac{k}{N}}$$

Efecto del muestreo espectral



- Normalización $F_s \leftrightarrow N$
- Separación (Hz) entre muestras de frecuencia $\frac{F_s}{N}$ N muestras en F_s
- DFT son las muestras para $\omega \in (0, 2\pi)$ $F \in (0, F_s)$ ¿ $F > F_s/2$?

Efecto del muestreo espectral

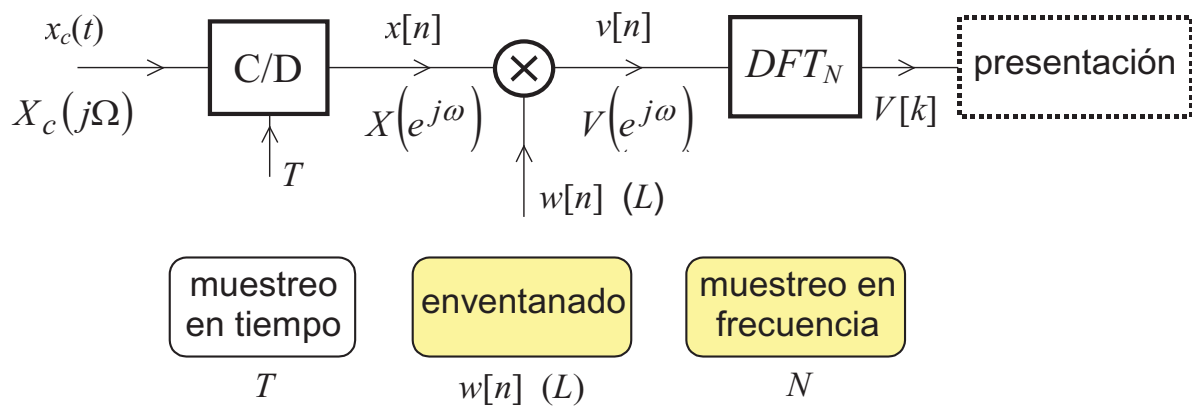


- Normalización $F_s \leftrightarrow N$
- Separación (Hz) entre muestras de frecuencia $\frac{F_s}{N}$ N muestras en F_s
- para $k > N/2$ ($F_k > F_s/2$) las muestras corresponden a frecuencias negativas

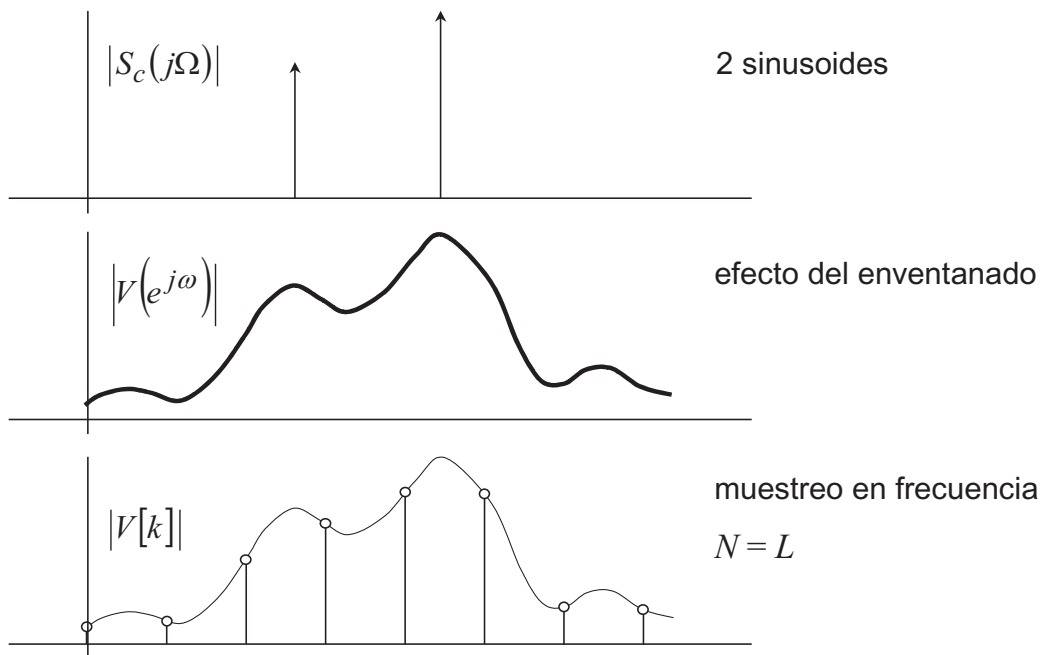
$$F_k = F_s \cdot \frac{k}{N} - F_s$$

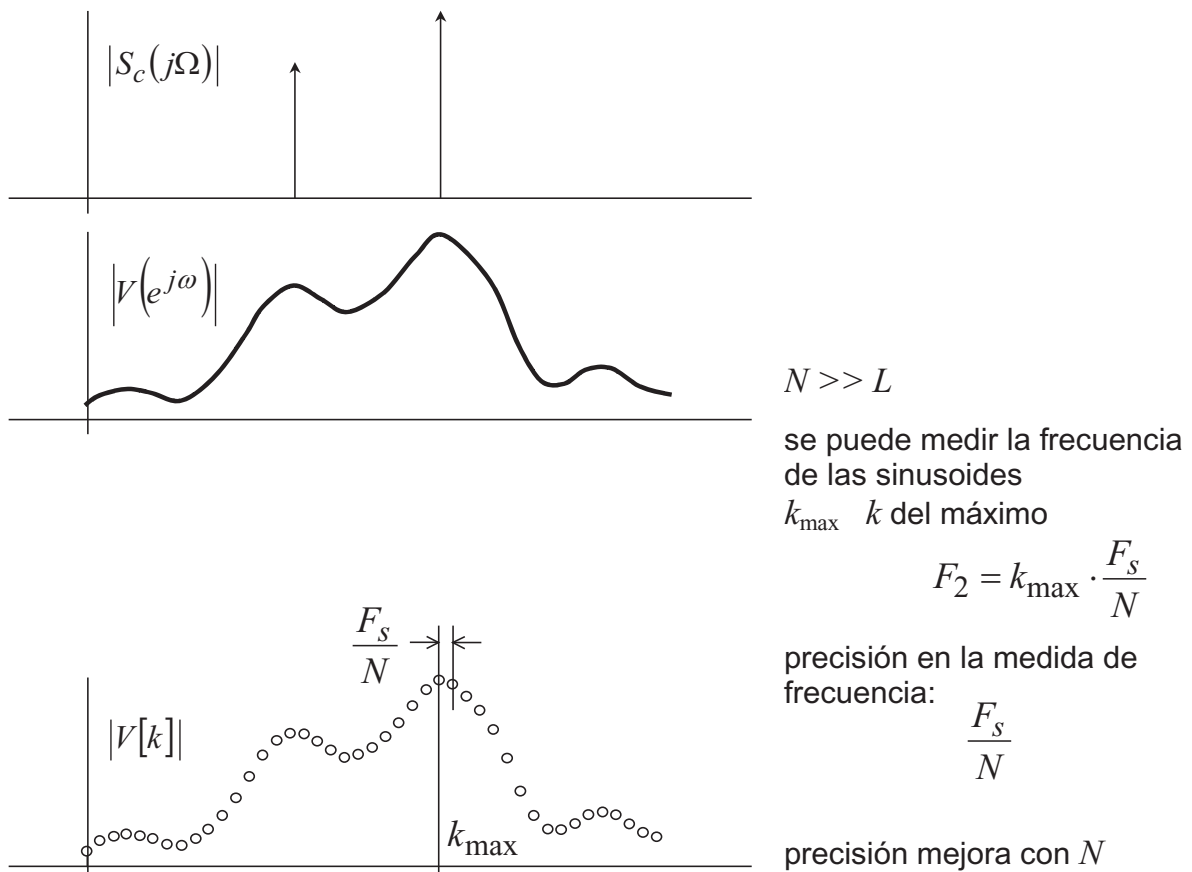
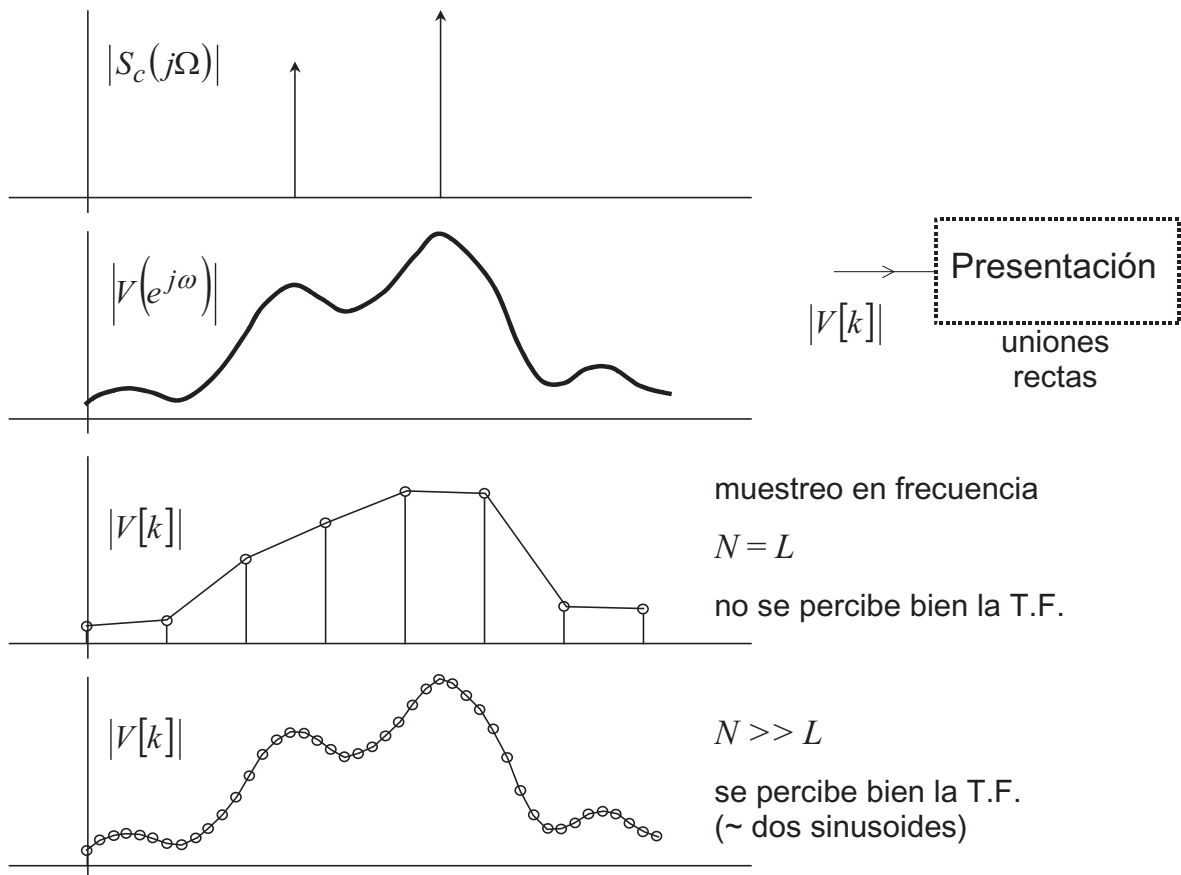
Análisis espectral con DFT

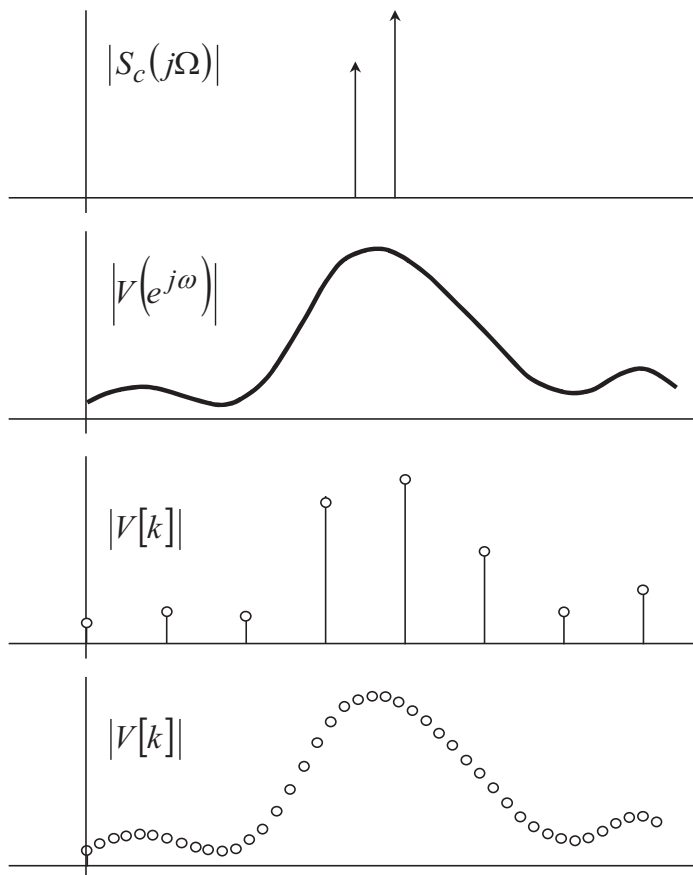
Efecto del muestreo espectral



- ¿a qué frecuencia F_k de $x_c(t)$ corresponde la muestra $V[k]$?
- ¿cómo elegir el parámetro N ? ←



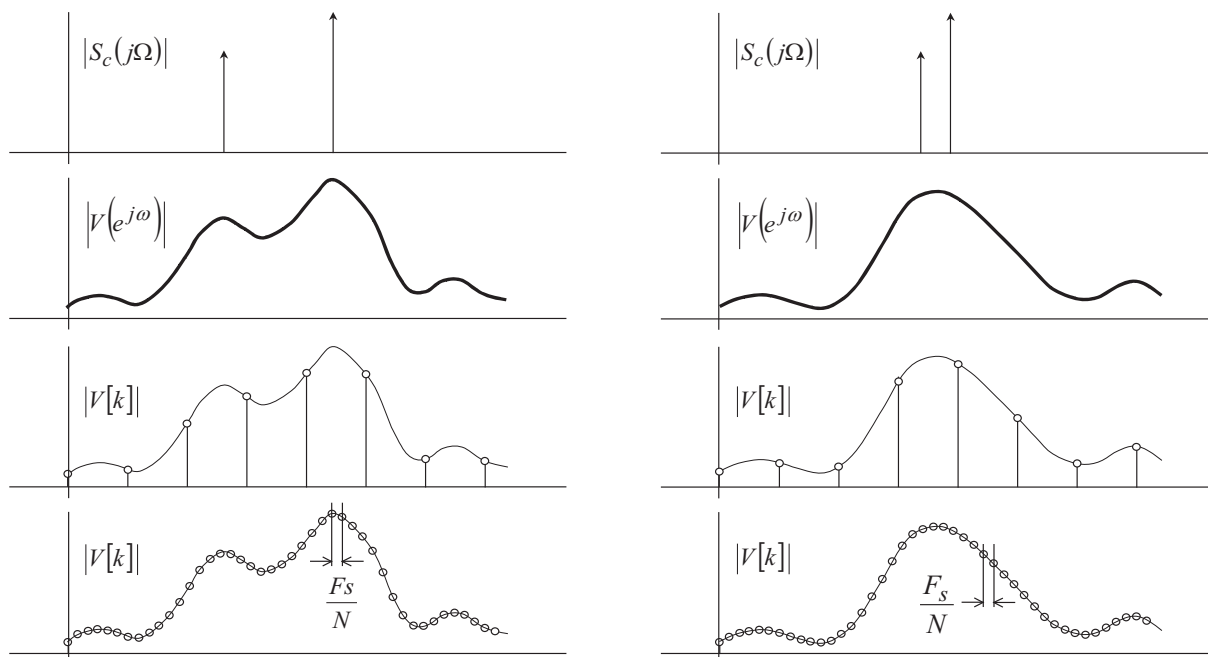




Si la sinusoides están muy próximas

A menor distancia que la resolución

No se resuelven
Aunque $N \gg L$



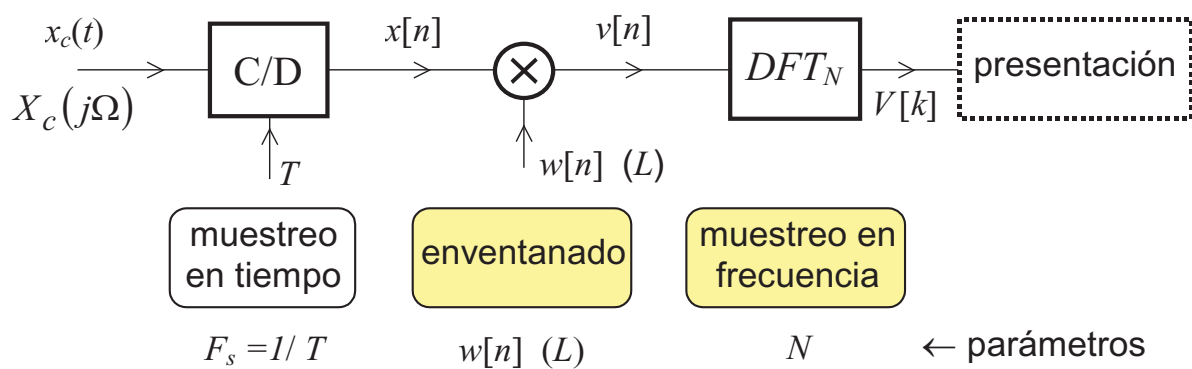
- Aumentar el número de puntos N de la DFT
aumenta la precisión de medida de frecuencia pero no la resolución

Análisis espectral con DFT

- Objetivo y realización
- Efecto del enventanado
- Efecto del muestreo espectral
- Parámetros de un analizador de espectros

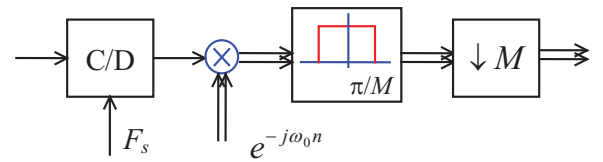
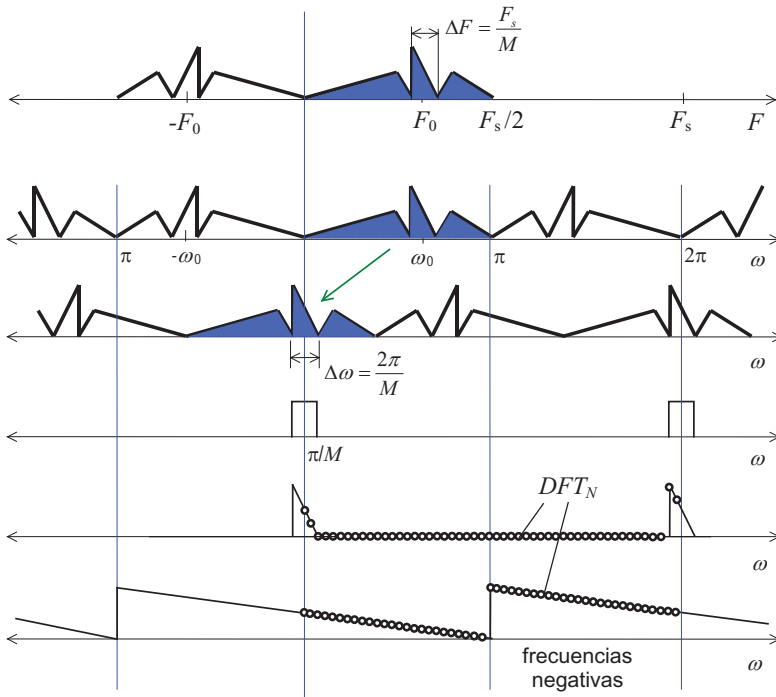
Análisis espectral con DFT

Parámetros



$F_s = 1/T$	→ suficiente para no <i>aliasing</i>
forma $w[n]$	→ para nivel permitido de lóbulos secundarios
L	→ para resolución requerida
N	→ para precisión de medida en frecuencia

Analizador de espectros de banda estrecha



Canal $F_0 = \omega_0 \cdot \frac{F_s}{2\pi}$

Ancho de banda $\Delta F = \frac{F_s}{M}$

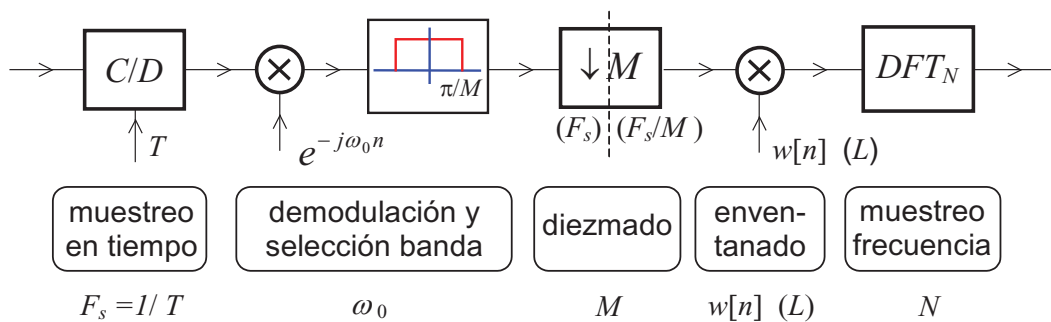
Banda de frecuencias $F_0 \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{F_s}{M}$

precisión $\frac{F_s}{N}$

precisión $\frac{F_s'}{N} = \frac{1}{M} \frac{F_s}{N}$

- Diezmado reduce la F_s efectiva y mejora la precisión en frecuencia

Analizador de espectros de banda estrecha



Banda de frecuencias analizada $\rightarrow F_0 \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{F_s}{M}$

Frecuencia de muestreo efectiva (después del diezmado) $\rightarrow F_s' = \frac{F_s}{M}$

Resolución $\rightarrow \Delta\omega \cdot \frac{F_s'}{2\pi} = \Delta\omega \cdot \frac{F_s}{2\pi} \cdot \frac{1}{M}$

Precisión en frecuencia (separación entre muestras) $\rightarrow \frac{F_s'}{N} = \frac{F_s}{M \cdot N}$

Tema 5 Aplicaciones de la DFT

- Análisis espectral
- Realización en el dominio de la frecuencia
 - Realización de filtros FIR (convolución)
 - Compensación de canal (deconvolución)

Realización de filtros FIR (Filtrado con DFT)

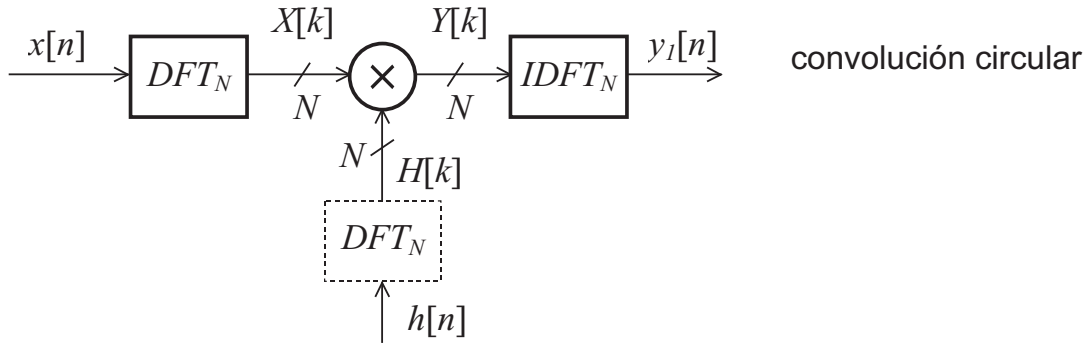
- Objetivo
- Convolución lineal con DFT
- Convolución por bloques

Filtrado con DFT

- Filtro FIR respuesta al impulso $h[n]$ longitud P
- Realización en el dominio del tiempo – estructura directa

$$y[n] = \sum_{k=0}^{P-1} h[k] \cdot x[n-k] \quad y[n] = h[n] * x[n] \quad \text{convolución lineal}$$

- Si $x[n]$ es de longitud finita L ...



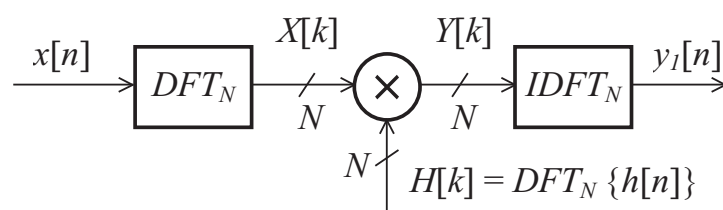
Filtrado con DFT

Realización en el
dominio del
tiempo

$$y[n] = \sum_{k=0}^{P-1} h[k] \cdot x[n-k]$$

convolución
lineal

Realización en el
dominio de la
frecuencia



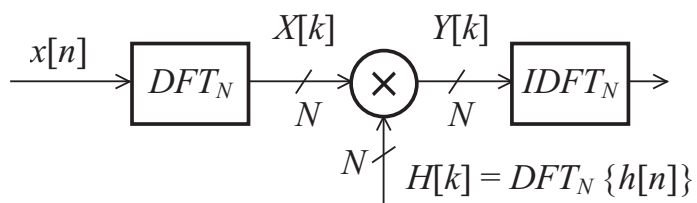
convolución
circular

- ¿son iguales $y[n]$, $y_I[n]$?
- ¿cuál es el valor adecuado de N el que represente bien $h[n]$, $x[n]$, $y[n]$
- Complejidad: ¿qué realización tiene menos operaciones?

Filtrado con DFT

- Objetivo
- Convolución lineal con DFT
- Convolución por bloques

convolución con DFT



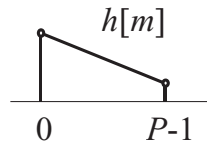
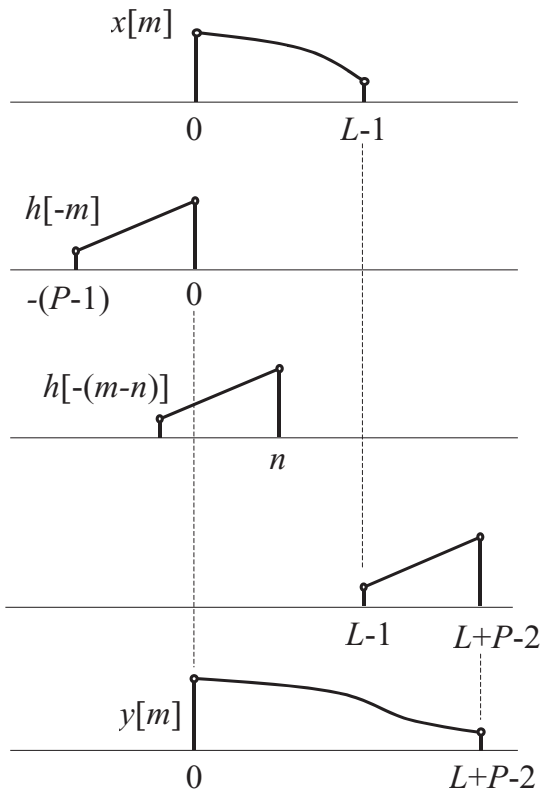
convolución lineal

$$y[n] = \sum_{k=0}^{P-1} h[k] \cdot x[n-k]$$

convolución circular

$$y_1[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}[m] \cdot \tilde{h}[-m+n]$$

Convolución lineal



$n = 0$ 1^{er} punto $\neq 0$

$$y[n] = \sum_{m=0}^{L-1} x[m] \cdot h[-m+n]$$

último punto $\neq 0$
 $n = L+P-2$

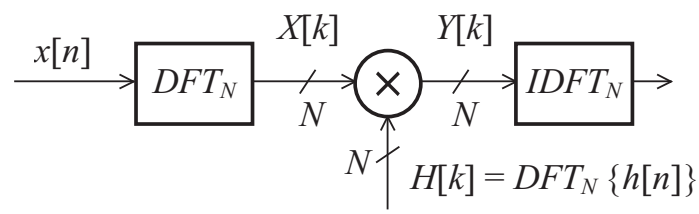
La respuesta de la última muestra se extiende P-1 más

longitud: $L+P-1$

convolución lineal

$$y[n] = \sum_{k=0}^{P-1} h[k] \cdot x[n-k]$$

convolución con DFT



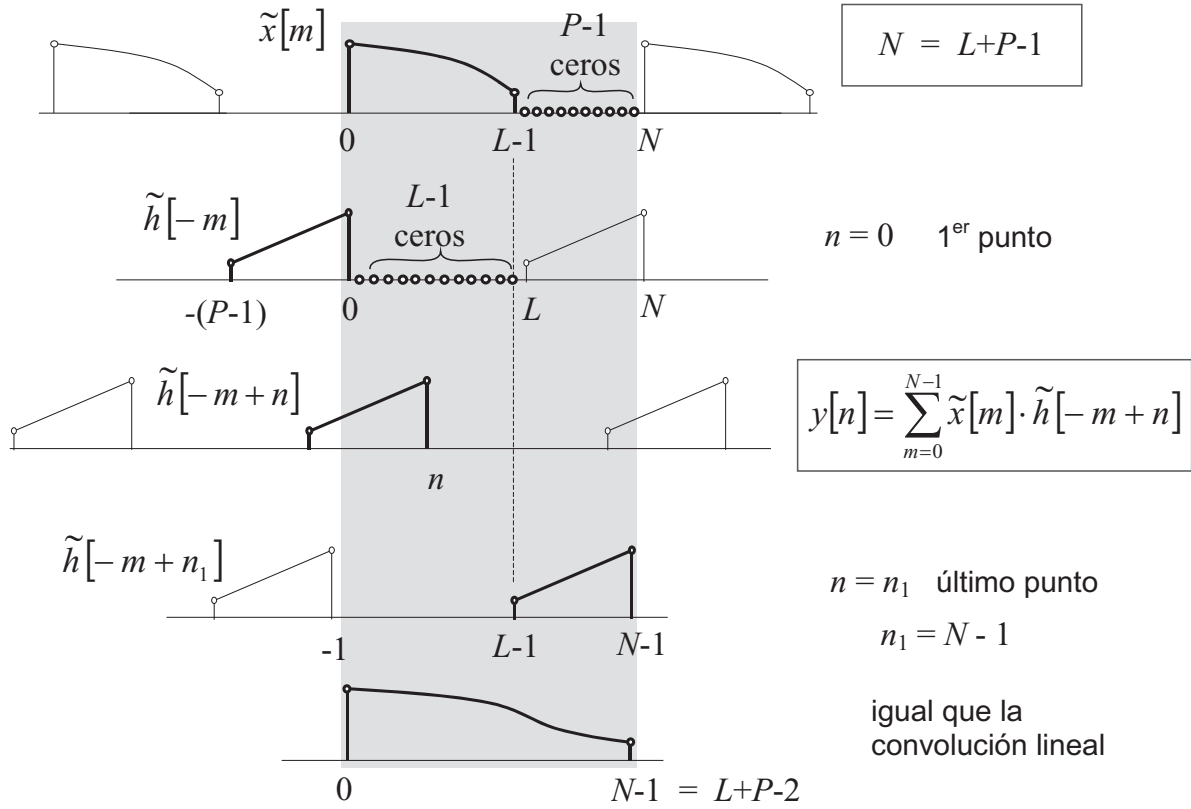
convolución circular

$$y_1[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}[m] \cdot \tilde{h}[-m+n]$$

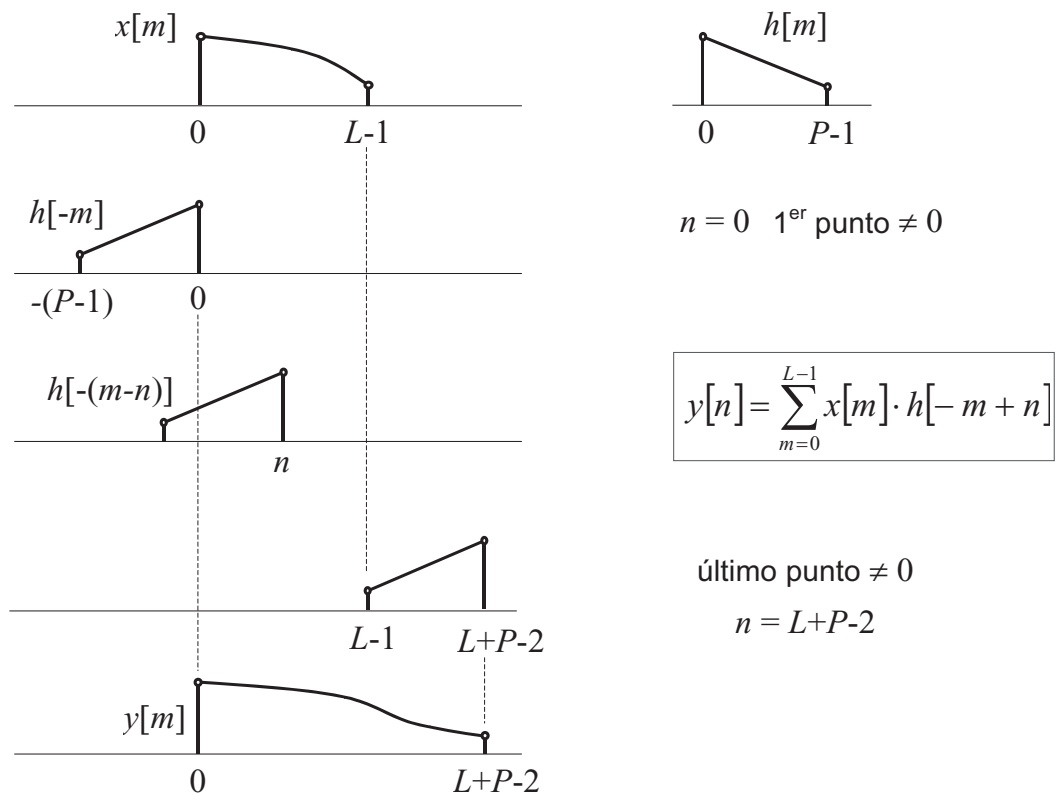
- Se elige N de manera que las DFT_N puedan representar todas las señales

$x[n]$	$N \geq L$
$h[n]$	$N \geq P$
$y[n] = h[n] * x[n]$	$N \geq L+P-1$

Convolución circular



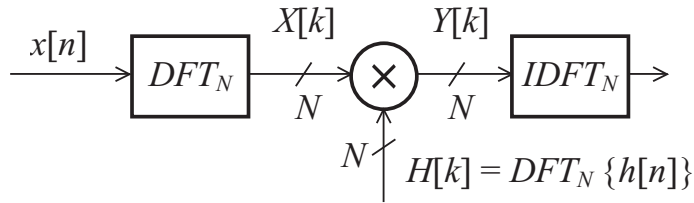
Convolución lineal



convolución lineal

$$y[n] = \sum_{k=0}^{P-1} h[k] \cdot x[n-k]$$

convolución con DFT



convolución circular

$$y_1[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}[m] \cdot \tilde{h}[-m+n]$$

- Si se elige N de manera que las DFT_N puedan representar todas las señales ...

$$N \geq L+P-1 \Rightarrow$$

convolución circular

= convolución lineal

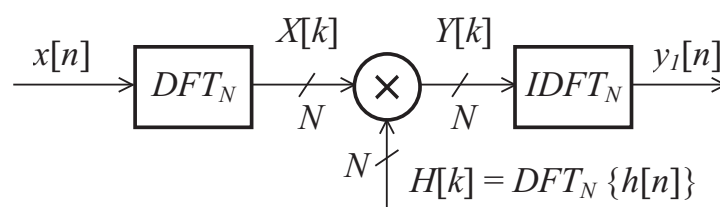
Filtrado con DFT

Realización en el dominio del tiempo

$$y[n] = \sum_{k=0}^{P-1} h[k] \cdot x[n-k]$$

convolución lineal

Realización en el dominio de la frecuencia



convolución circular

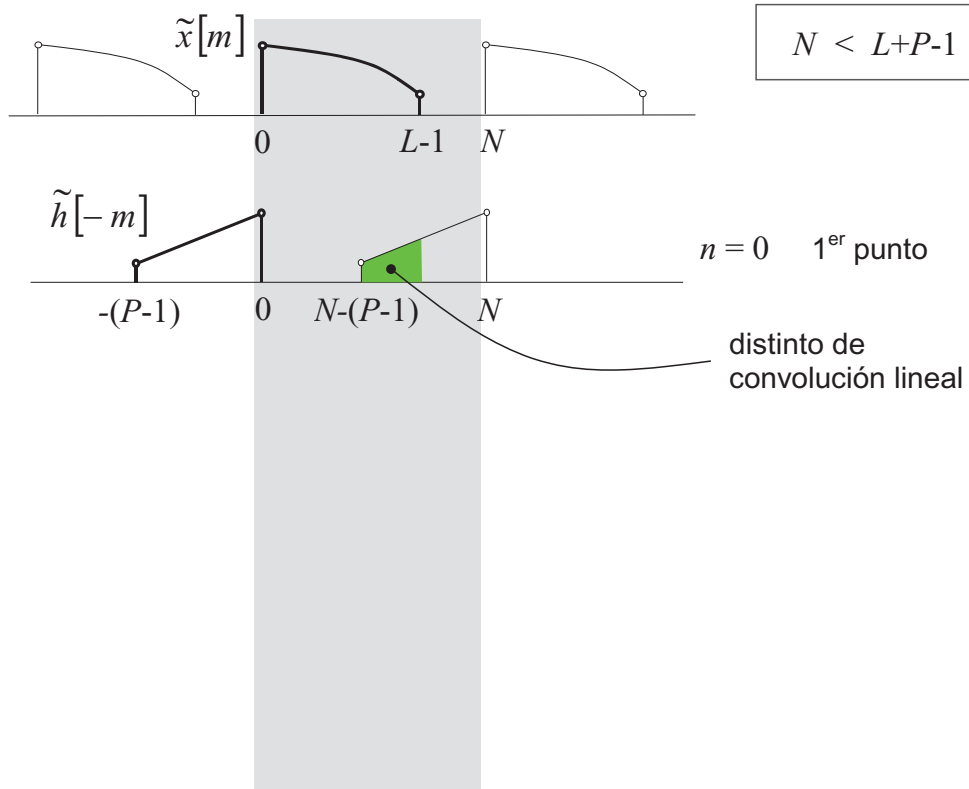
- ¿son iguales $y[n]$, $y_1[n]$?
- ¿cuál es el valor adecuado de N ?

el que represente bien $h[n]$, $x[n]$, $y[n]$:

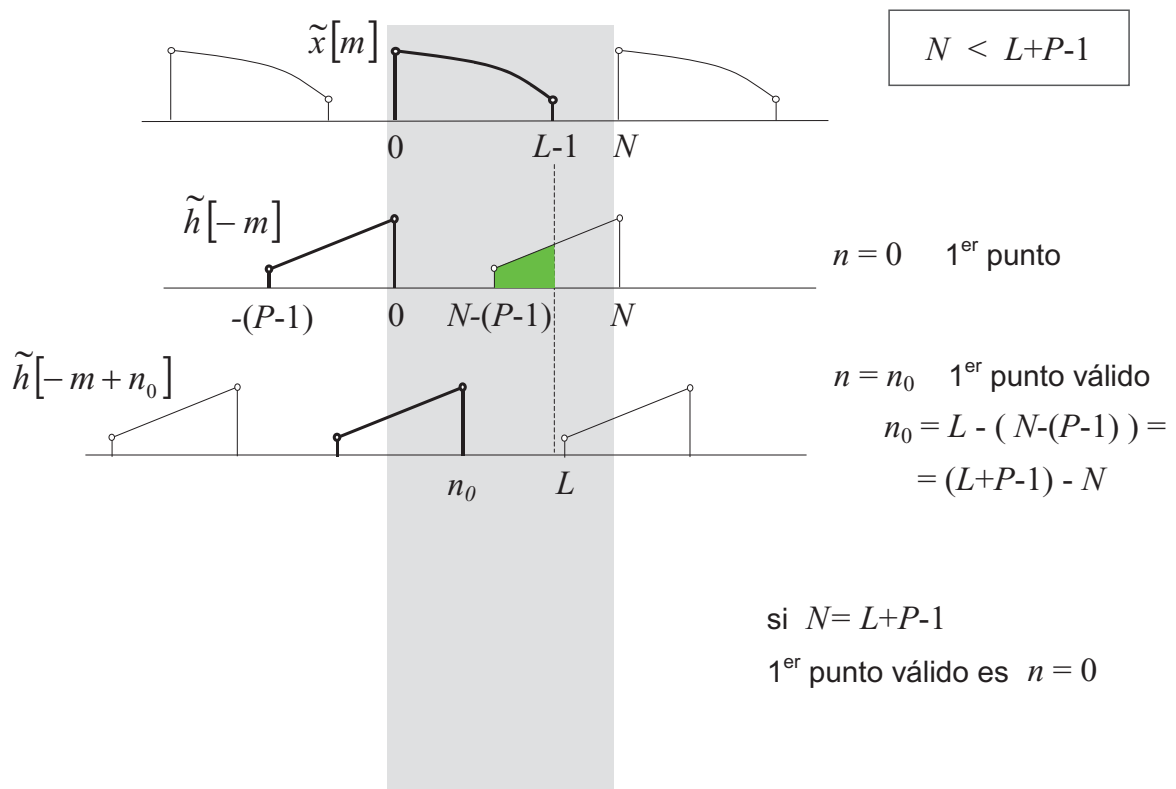
$$N \geq L+P-1$$

- Complejidad: ¿qué realización tiene menos operaciones?
- ¿qué ocurre si $N < L+P-1$? ←

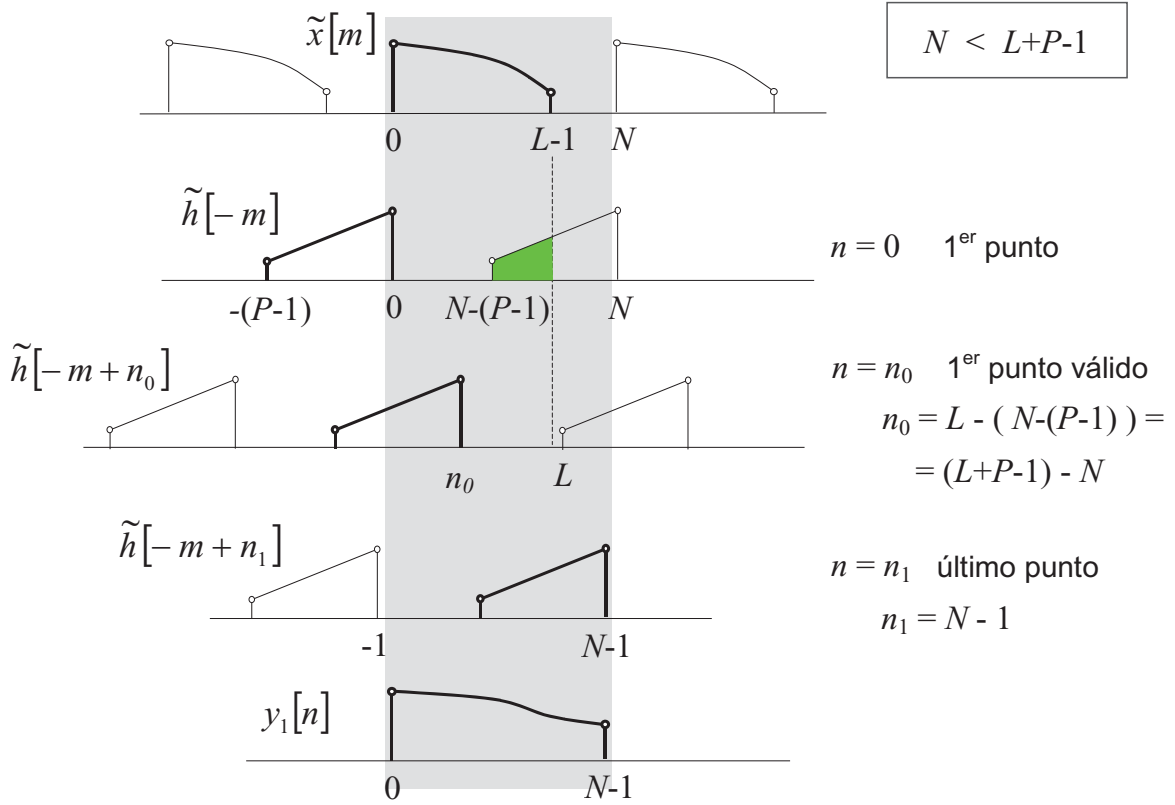
Convolución circular



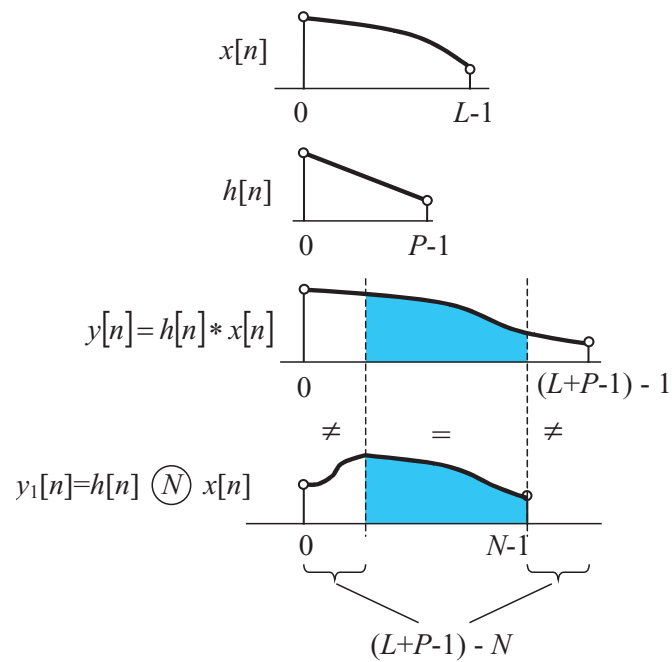
Convolución circular



Convolución circular



Convolución circular $N < L+P-1$



- Los primeros $(L+P-1) - N$ puntos son distintos
- La convolución lineal tiene $(L+P-1) - N$ más

Convolución circular $N < L+P-1$

Realización en el dominio de la frecuencia

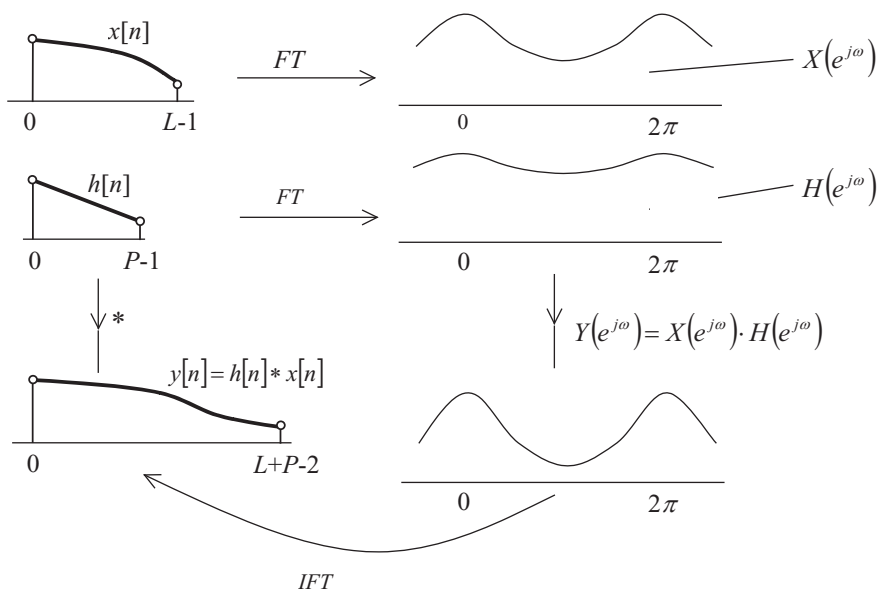
$$x[n] \xrightarrow{DFT_N} X[k]$$

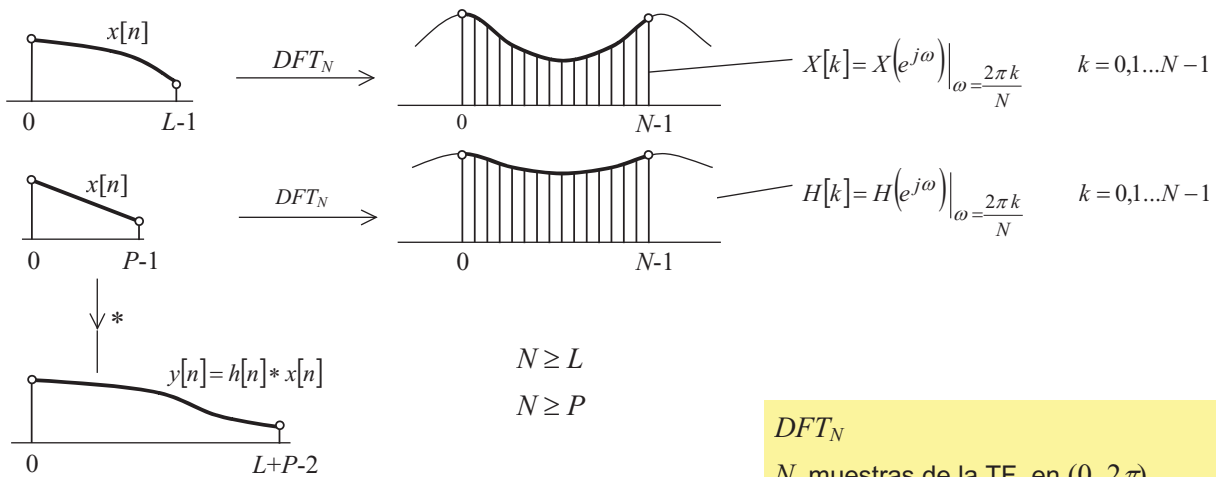
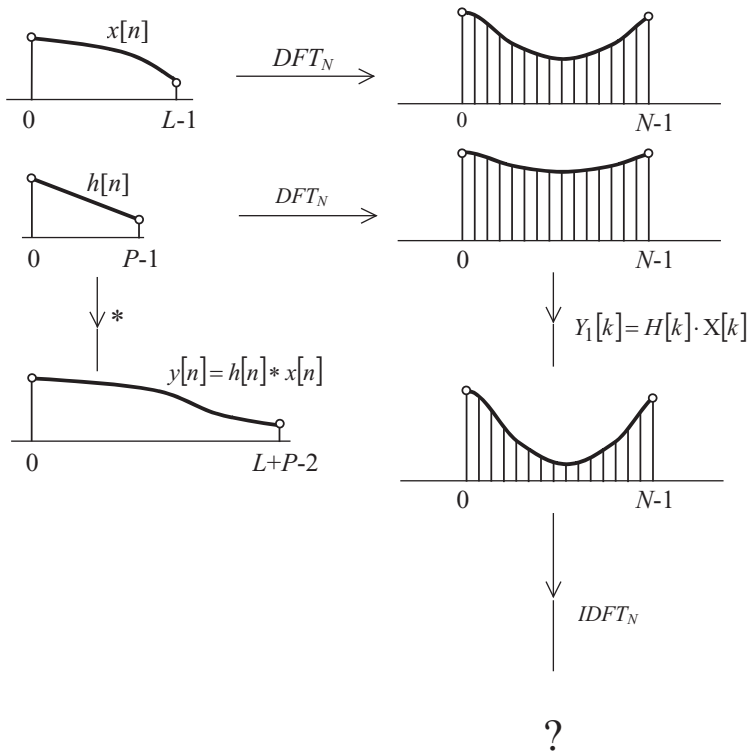
$$Y_1[k] = H[k] \cdot X[k] \xrightarrow{IDFT_N} y_1[n]$$

$$h[n] \xrightarrow{DFT_N} H[k]$$

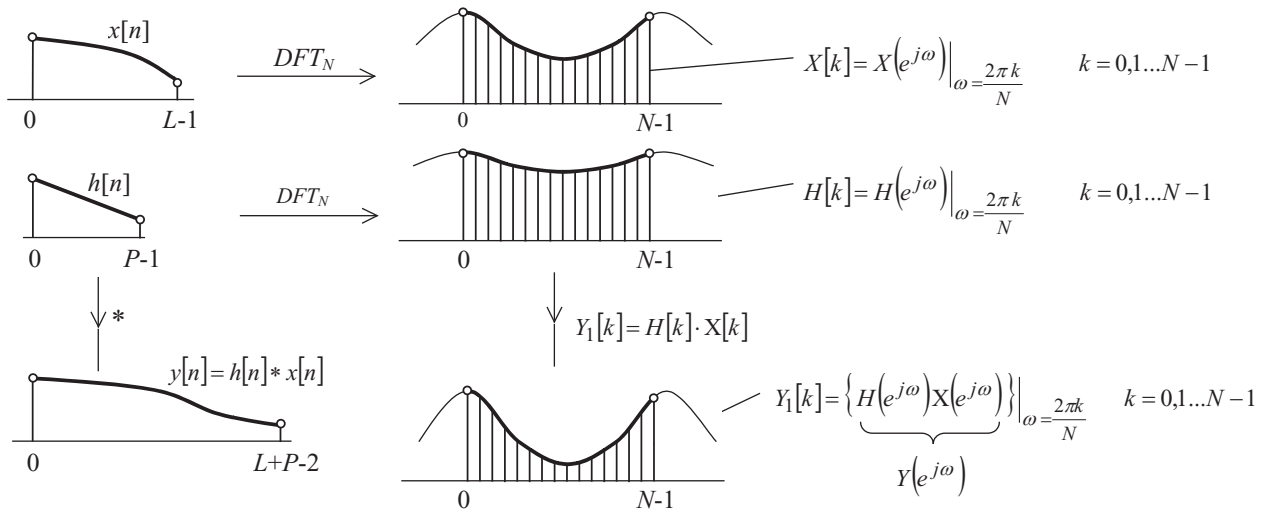
$$N \geq L$$

$$N \geq P$$





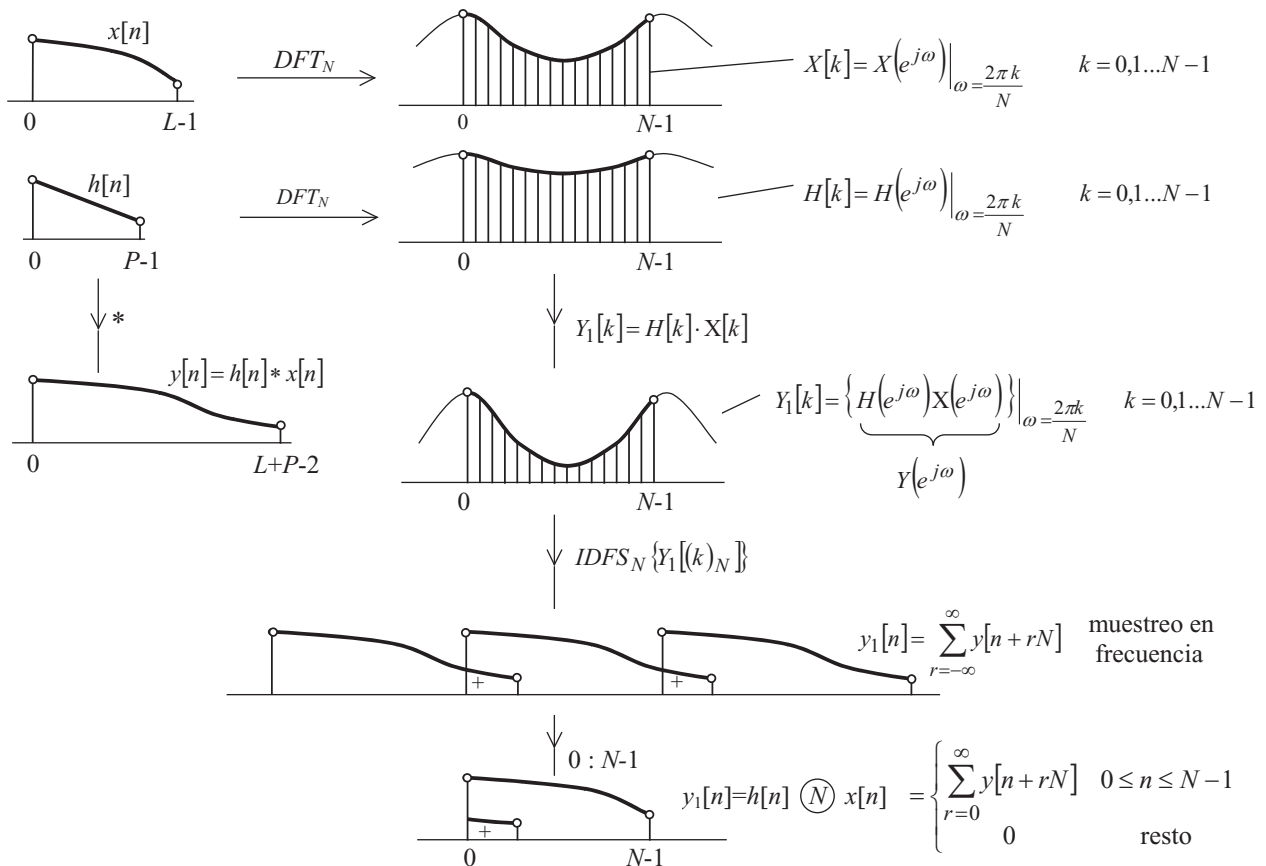
DFT_N
 N muestras de la TF en $(0, 2\pi)$
 suficientes para representar $x[n]$ y $x[n]$

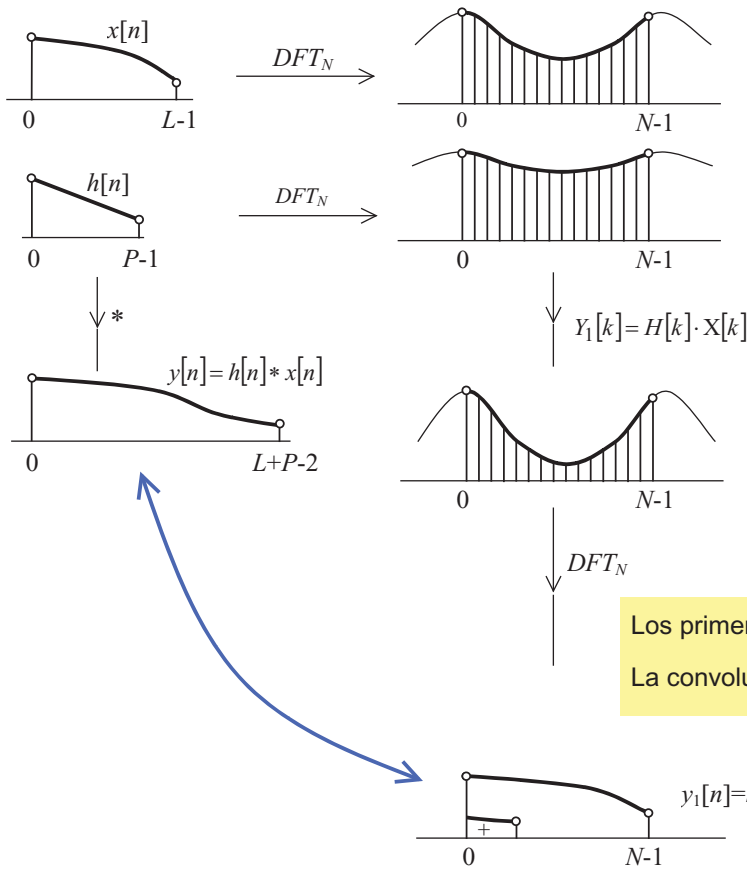


$$N < L+P-1$$

DFT_N

N muestras de la TF en $(0, 2\pi)$
 insuficientes para representar $y[n]$
 (submuestreo en frecuencia)



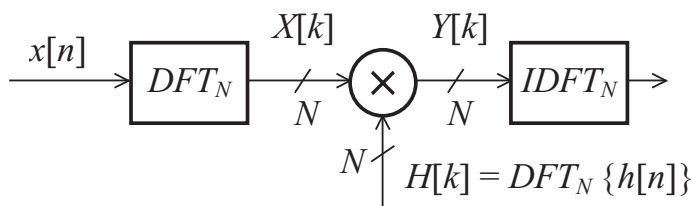


Los primeros $(L+P-1) - N$ puntos son distintos
 La convolución lineal tiene $(L+P-1) - N$ más

convolución lineal

$$y[n] = \sum_{k=0}^{P-1} h[k] \cdot x[n-k]$$

convolución con DFT



convolución circular

$$y_1[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}[m] \cdot \tilde{h}[-m+n]$$

$$N \geq L+P-1 \Rightarrow$$

convolución circular

=

convolución lineal

$$N < L+P-1 \Rightarrow$$

convolución circular

=

convolución lineal con aliasing
(solapamiento temporal)

los últimos $(L+P-1) - N$ puntos se suman a los primeros

Filtrado con DFT

- Objetivo
- Convolución lineal con DFT
- Convolución por bloques

Filtrado con DFT

- Filtro FIR respuesta al impulso $h[n]$ longitud P
- Si $x[n]$ no es de longitud finita ...
¿se puede hacer una realización en el dominio de la frecuencia?

Filtrado (convolución) por bloques

Opción 1

- descomponer la entrada en trozos contiguos de longitud L
- calcular la respuesta a cada trozo
- combinar las respuestas a cada trozo para obtener la salida

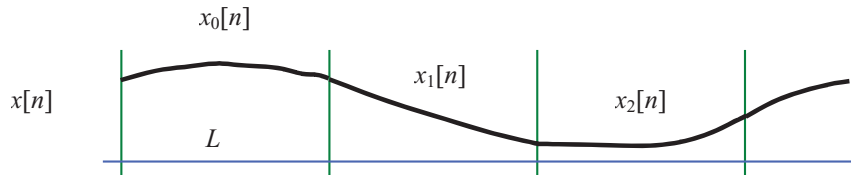
Opción 2

- descomponer el tiempo de la salida en trozos contiguos de longitud L
- calcular cada trozo de salida usando el trozo de la entrada que sea necesario
- concatenar (unir secuencialmente) los trozos de salida

Filtrado (convolución) por bloques

Opción 1

- descomponer la entrada en trozos contiguos de longitud L
- calcular la respuesta a cada trozo
- combinar las respuestas a cada trozo para obtener la salida



$$x_r[n] = \begin{cases} x[n + rL] & 0 \leq n \leq L - 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad \text{trozos desplazados al origen } [0, L-1]$$

$$x[n] = \sum_{r=0}^{\infty} x_r[n - rL]$$

suma de trozos volviendo a desplazarlos a su lugar
= señal original

trozos no solapados:
sumar equivale a concatenar

Filtrado (convolución) por bloques

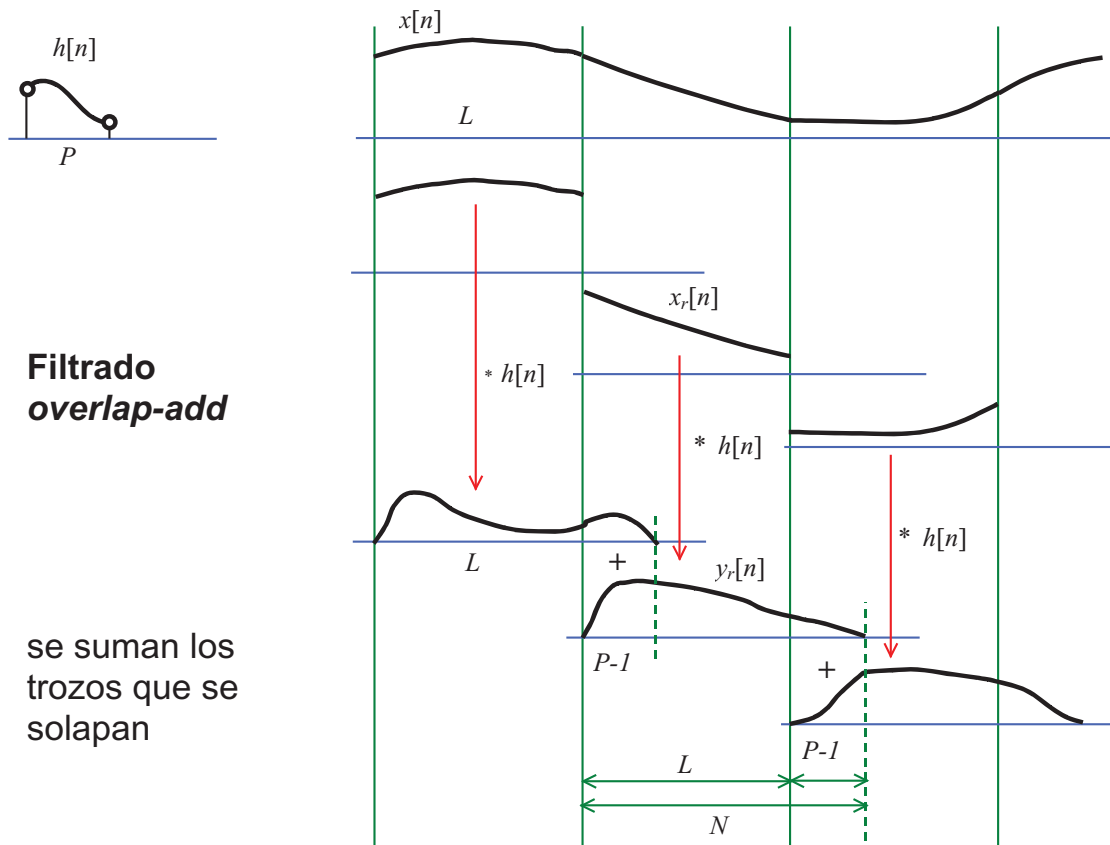
Opción 1

- descomponer la entrada en trozos contiguos de longitud L
- calcular la respuesta a cada trozo
- combinar las respuestas a cada trozo para obtener la salida

entrada	respuesta	
$x_r[n]$	$y_r[n] = h[n] * x_r[n]$	respuesta a un trozo
$x_r[n - rL]$	$y_r[n - rL]$	(invarianza tiempo)
$x[n] = \sum_{r=0}^{\infty} x_r[n - rL]$	$y[n] = \sum_{r=0}^{\infty} y_r[n - rL]$	(linealidad)

Combinación para obtener la salida:

- desplazar respuesta de cada trozo a su lugar y sumar trozos
- los trozos de salida son de longitud $L+P-1$ → se solapan → hay que sumar

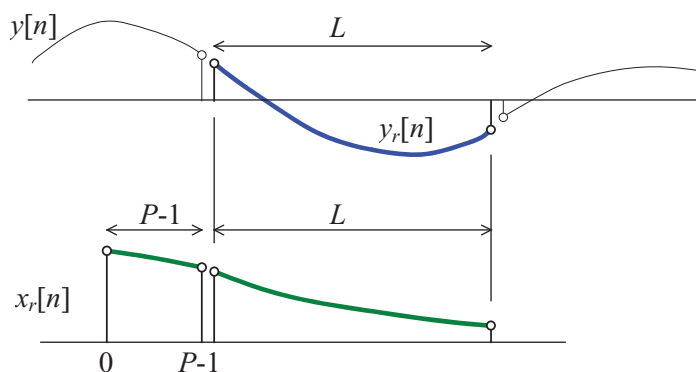


Los trozos de salida: pueden obtenerse con convoluciones circulares de $N=L+P-1$ puntos

Filtrado (convolución) por bloques

Opción 2

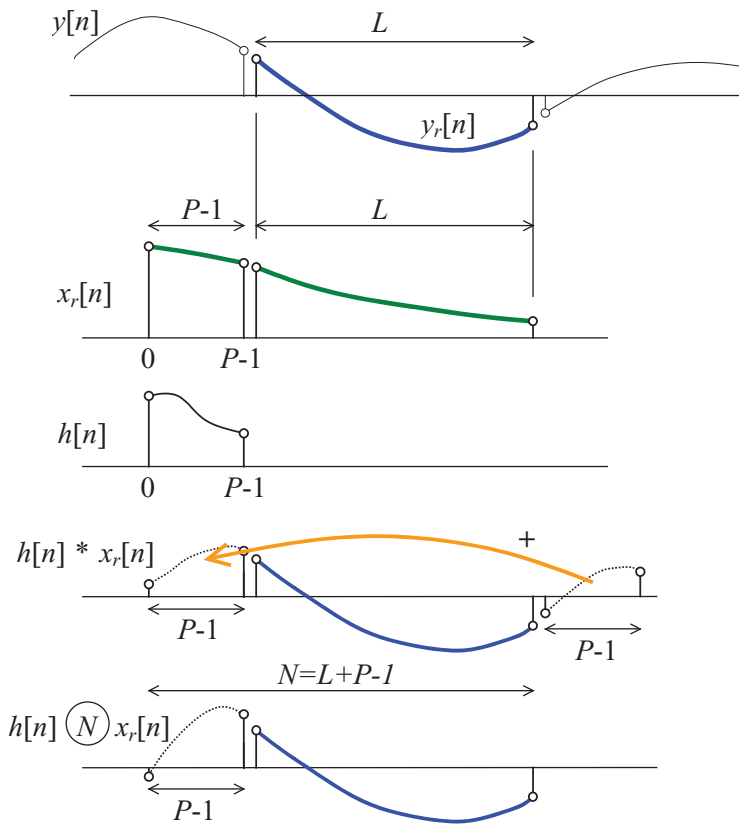
- descomponer el tiempo de la salida en trozos contiguos de longitud L
- calcular cada trozo de salida usando el trozo de la entrada que sea necesario
- concatenar (unir secuencialmente) los trozos de salida



para calcular un trozo de la salida ...
¿hace falta tener toda la señal de entrada?

- el sistema es causal
- el sistema es FIR (longitud de respuesta P)

- Las muestras posteriores no hacen falta (el sistema es causal)
- Sólo hacen falta la $P-1$ muestras anteriores (el sistema es FIR)



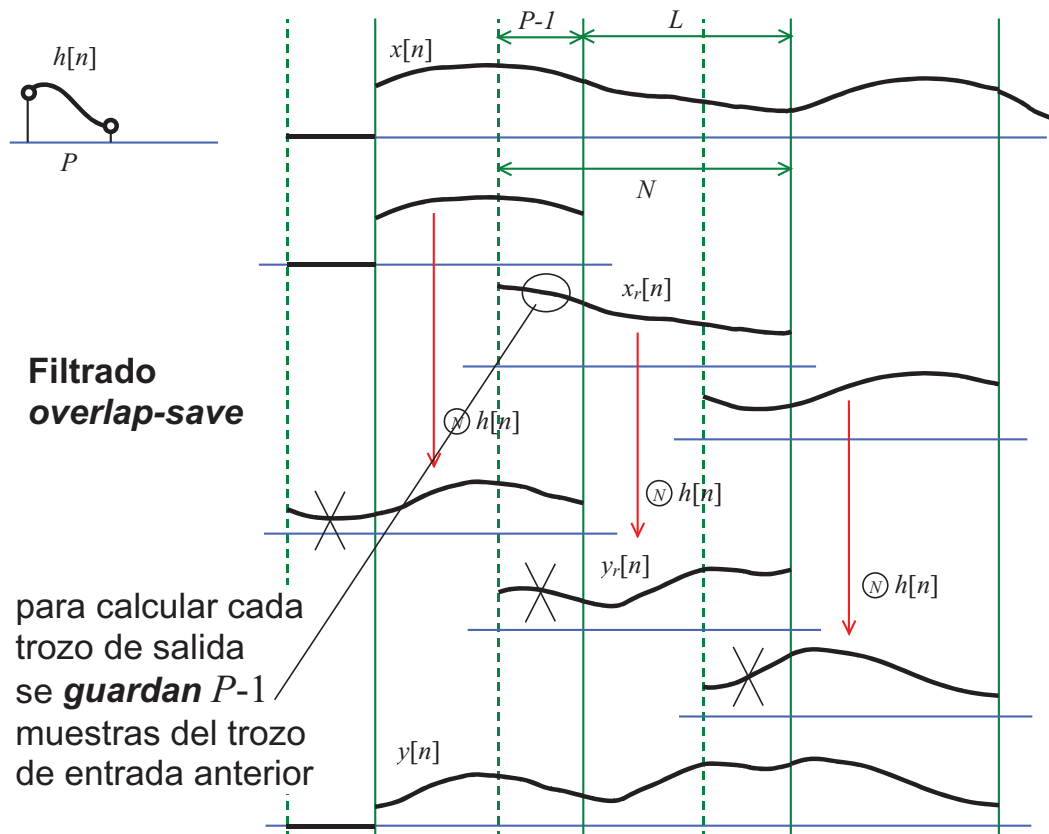
para calcular un trozo de la salida ...

- no hacen falta muestras posteriores
- sólo hacen falta $P-1$ muestras anteriores

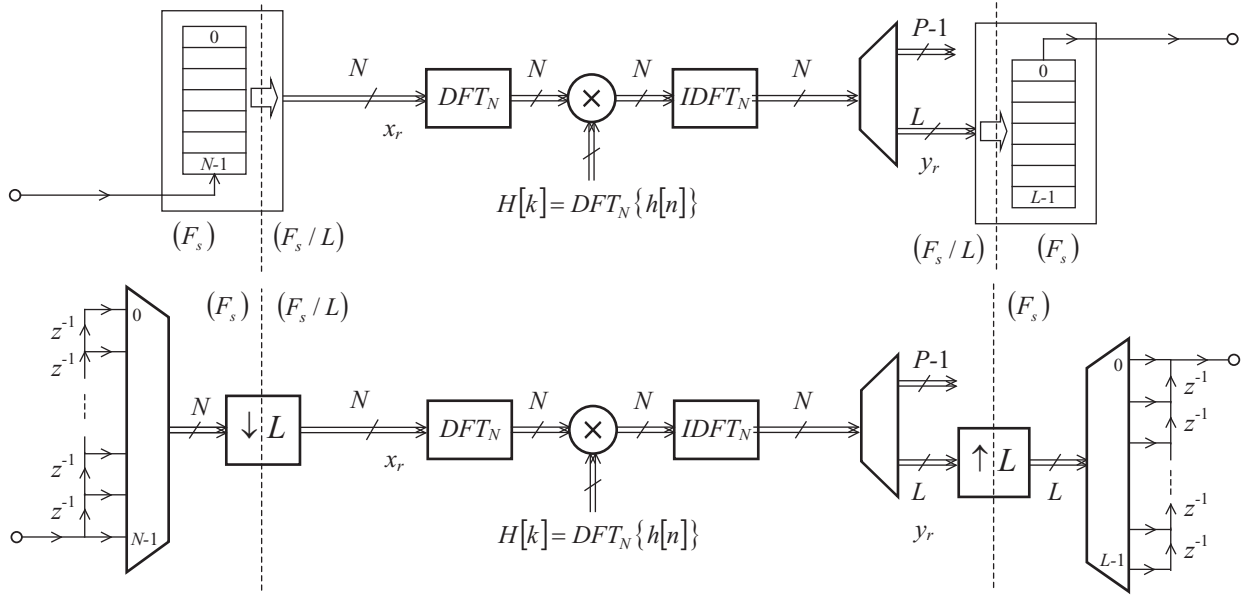
- calcular convolución lineal
- descartar los $P-1$ primeros y últimos

o bien:

- calcular convolución circular (N)
- descartar los $P-1$ primeros



Filtrado por bloques - overlap-save



Un registro almacena las últimas N muestras

Cada L instantes:

- convolución circular con $h[n]$ de esas N muestras
- descartar los primeros $P-1$ puntos del resultado
- sacar las L muestras obtenidas en serie

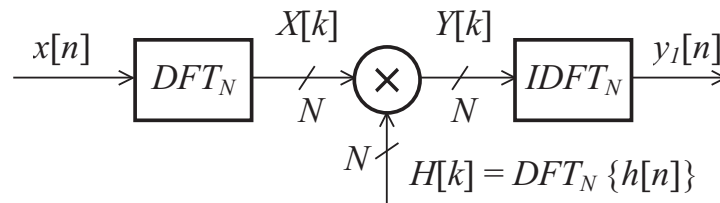
Filtrado con DFT

Realización en el dominio del tiempo

$$y[n] = \sum_{k=0}^{P-1} h[k] \cdot x[n-k]$$

convolución lineal

Realización en el dominio de la frecuencia

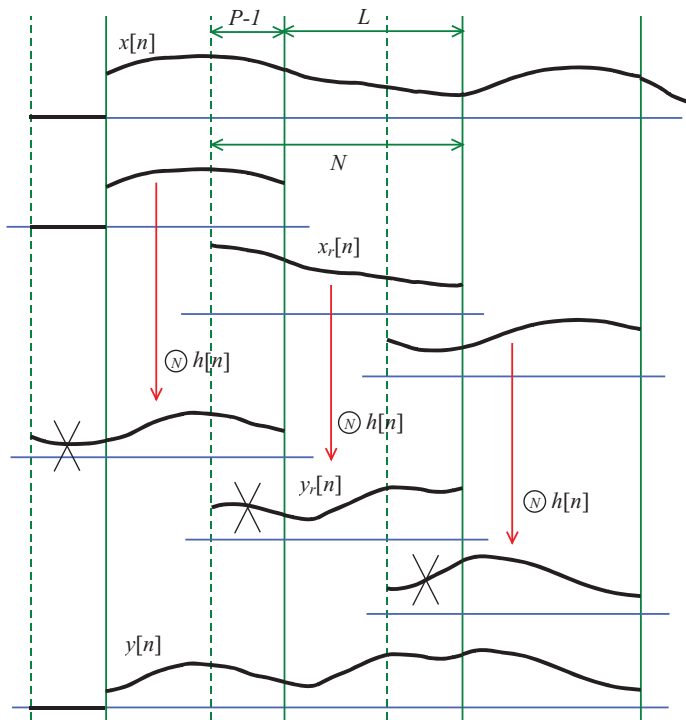


convolución circular

- **Complejidad:** ¿qué realización tiene menos operaciones?

Filtrado (convolución) por bloques - Complejidad

Opción 2 overlap-save

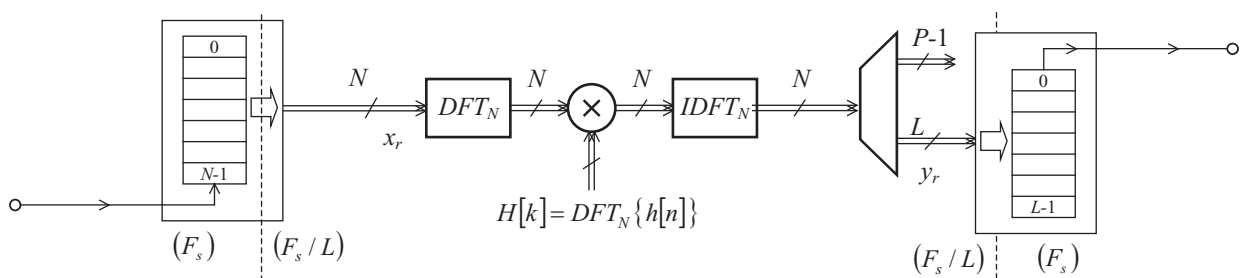


- Se avanza en bloques de longitud L
- Para cada bloque se hace una convolución circular de N puntos:

1 DFT_N ,
 1 $IDFT_N$
 N multiplicaciones

Filtrado (convolución) por bloques - Complejidad

Opción 2 overlap-save

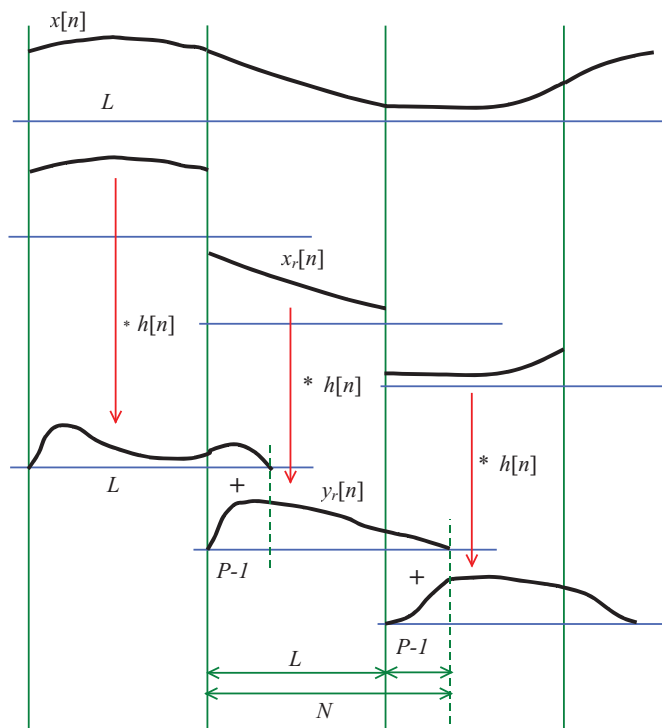


- Se avanza en bloques de longitud L
- Para cada bloque se hace 1 DFT_N , 1 $IDFT_N$ y N multiplicaciones

	operaciones por bloque de L muestras	operaciones por muestra
multiplicaciones	$N + 2 \times \frac{N}{2} \log_2 N$	$\frac{N(1 + \log_2 N)}{L}$
sumas	$2 \times N \log_2 N$	$\frac{2N \log_2 N}{L}$

Filtrado (convolución) por bloques - Complejidad

Opción 2 overlap-add



- Se avanza en bloques de longitud L
- Para cada bloque se hace una convolución circular de N puntos:

1 DFT_N ,

1 $IDFT_N$

N multiplicaciones

$P-1$ sumas

Filtrado (convolución) por bloques - Complejidad

Opción 2 overlap-add

- Se avanza en bloques de longitud L
- Para cada bloque se hace una convolución circular de N puntos:

1 DFT_N ,

1 $IDFT_N$

N multiplicaciones

$P-1$ sumas

	operaciones por bloque de L muestras	operaciones por muestra
multiplicaciones	$N + 2 \times \frac{N}{2} \log_2 N$	$\frac{N(1 + \log_2 N)}{L}$
sumas	$2 \times N \log_2 N + (P - 1)$	$\frac{2N \log_2 N + (P - 1)}{L}$

Filtrado (convolución) por bloques - Complejidad

Ejemplo FIR-FLG P = 200 overlap save Fs = 8kHz

- a) Número de multiplicaciones/s para N=1024 y comparación con estructura directa
- b) Retardo de grupo
- c) Número de multiplicaciones y retardo para N=2048

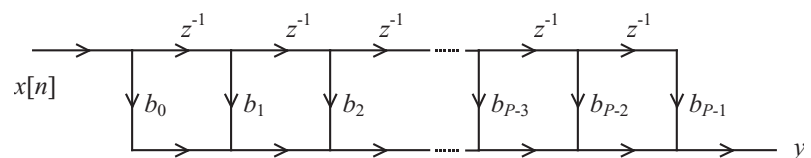
Ejemplo FIR-FLG P = 200 Fs = 8kHz

Overlap save

Tamaño bloques (L)	$N - (P - 1)$	$1024 - 200 + 1 = 825$
multiplicaciones / bloque	$N(1 + \log_2 N)$	$1024 \times (1+10) = 11.264$
multiplicaciones / muestra	$\frac{N(1 + \log_2 N)}{L}$	$\frac{11.264}{825} = \mathbf{13,65}$
multiplicaciones / segundo	$\frac{N(1 + \log_2 N)}{L} \cdot F_s$	$13,65 \times 8.000\text{Hz} = \mathbf{109.227}$

Estructura FIR directa

$$y[n] = \sum_{k=0}^{P-1} b_k x[n-k]$$



multiplicaciones / muestra	P	$\mathbf{200}$
multiplicaciones / segundo	$P \cdot F_s$	$200 \times 8.000\text{Hz} = \mathbf{1.600.000}$

Ejemplo FIR-FLG P = 200 overlap save Fs = 8kHz

	muestras	tiempo ($\times 1/F_s$)
Retardo de grupo de la respuesta al impulso:	$\frac{(P-1)}{2} = 99,5$	12,4 ms
Retardo debido al procesamiento por bloques	$L = 825$	103,1 ms
Retardo total (overlap-save)	$\left(L + \frac{P-1}{2}\right) = 924,5$	115,7 ms

Filtrado (convolución) por bloques - Complejidad

Ejemplo FIR-FLG P = 200 overlap save Fs = 8kHz

Número puntos FFTs	Tamaño bloques L	multiplicaciones/segundo	retardo de proceso por bloques	retardo de grupo total
	$N - (P - 1)$	$\frac{N(1 + \log_2 N)}{L} \cdot F_s$	$L \cdot \frac{1}{F_s}$	$\left(L + \frac{P-1}{2}\right) \cdot \frac{1}{F_s}$
2048	1849	$13,3 \times F_s = 106.000$	231 ms	218 ms
1024	845	$13,6 \times F_s = 109.000$	103 ms	115 ms

- La complejidad es similar pero ...
- para $N = 2048$ el retardo es el doble

Filtrado (convolución) por bloques - Complejidad

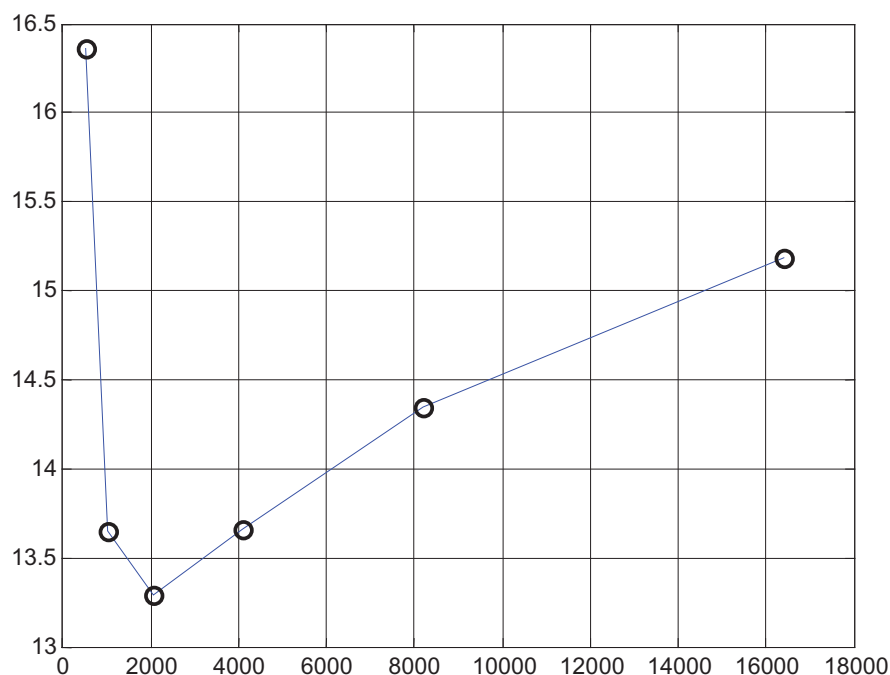
Ejemplo FIR-FLG P = 200 overlap save Fs = 8kHz

Número puntos FFTs	Tamaño bloques L	multiplicaciones/segundo	retardo de proceso por bloques	retardo de grupo total
	$N - (P - 1)$	$\frac{N(1 + \log_2 N)}{L} \cdot F_s$	$L \cdot \frac{1}{F_s}$	$\left(L + \frac{P-1}{2}\right) \cdot \frac{1}{F_s}$
2048	1849	$13,3 \times F_s = 106.000$	231 ms	218 ms
1024	845	$13,6 \times F_s = 109.000$	103 ms	115 ms
512	313	$16,3 \times F_s = 130.000$	39 ms	51 ms
256	57	$40,4 \times F_s = 323.000$	7,1 ms	19 ms

- La complejidad aumenta al reducir el tamaño de los bloques pero ...
- el retardo es menor
- Valor de compromiso: N potencia de 2 y $N \approx 4P$
(en el ejemplo $4P = 800 \rightarrow 1024$)

Filtrado (convolución) por bloques - Complejidad

Ejemplo FIR-FLG P = 200 overlap save Fs = 8kHz



Tema 5 Aplicaciones de la DFT

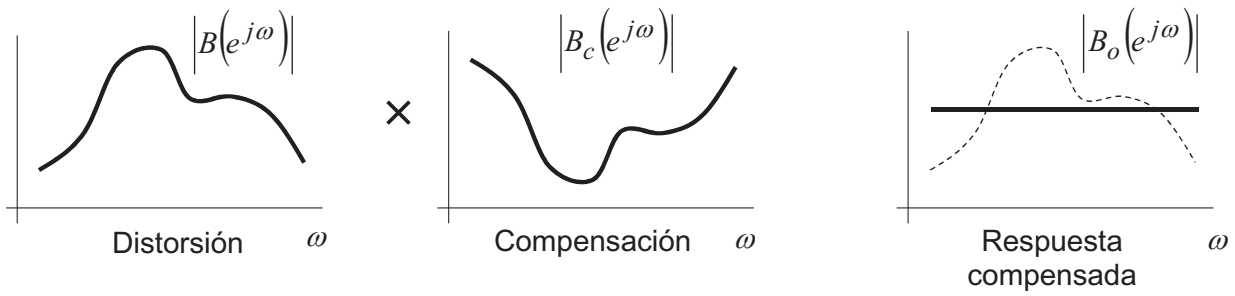
- Análisis espectral
- Realización en el dominio de la frecuencia
 - Realización de filtros FIR (convolución)
 - Compensación de canal FIR (deconvolución)

Tema 5 Aplicaciones de la DFT

- **Compensación de canal FIR (deconvolución)**
 - Descripción del problema
 - Transmisión por bloques separados
 - Transmisión por bloques con prefijo cíclico
 - Compensación en el dominio de la frecuencia (FEQ)
 - Multiplexación por División Ortogonal en Frecuencia (OFDM)

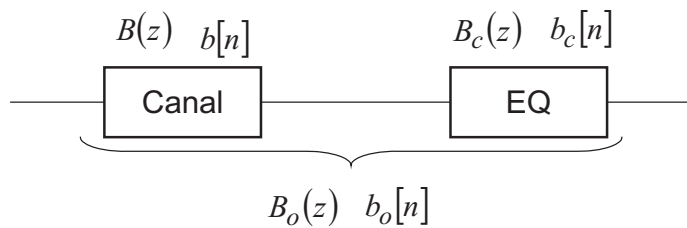
Compensación de la distorsión de canales

(igualación – ecualización)



- Igualador de amplitud
- Igualador de retardo

→ Igualador de la respuesta en frecuencia (amplitud y retardo)

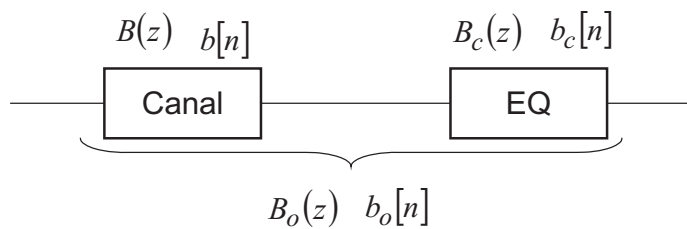


$$B_o(z) = B(z) \cdot B_c(z)$$

$$b_o[n] = b[n] * b_c[n]$$

Compensación de la distorsión de canales

Compensación (igualación) ideal



$$B_o(z) = B(z) \cdot B_c(z)$$

$$b_o[n] = b[n] * b_c[n]$$

- el igualador ideal es el **filtro inverso**

$$B_c(z) = 1/B(z) \quad b[n] * b_c[n] = \delta[n]$$

o admitiendo retardo: $b[n] * b_c[n] = \delta[n - \alpha]$

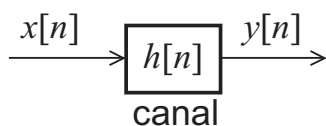
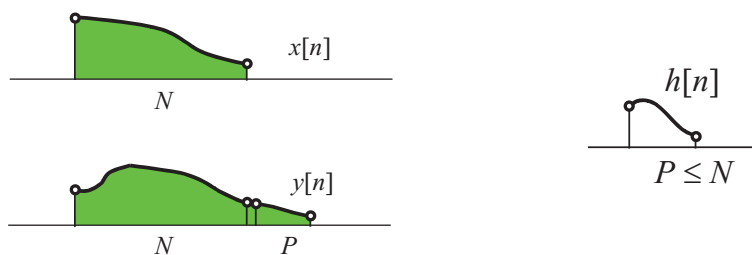
- para muchos canales su igualador ideal no es realizable (causal y estable)
ej.: si $B(z)$ tiene ceros fuera de la circunferencia unidad, $1/B_c(z)$ tiene polos
- normalmente se hace una igualación aproximada

Tema 5 Aplicaciones de la DFT

- **Compensación de canal FIR (deconvolución)**

- Descripción del problema
- Transmisión por bloques separados
- Transmisión por bloques con prefijo cíclico
- Compensación en el dominio de la frecuencia (FEQ)
- Multiplexación por División Ortogonal en Frecuencia (OFDM)

Compensación de un canal FIR para una señal de duración finita



$$y[n] = h[n] * x[n]$$

- (si se conoce $h[n]$) ¿Se puede recuperar la señal original $x[n]$?

Deconvolución lineal dividiendo polinomios

$h[n]$	$x[n]$	$y[n]$
$H(z) = \sum_{n=0}^{P-1} h[n]z^{-n}$	$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]z^{-n}$	$Y(z) = \sum_{n=0}^{N+P-1} y[n]z^{-n}$

convolución: $y[n] = h[n] * x[n] \rightarrow Y(z) = H(z) \cdot X(z)$

- Señales de duración finita: $X(z)$ $Y(z)$ $H(z)$ son polinomios
- Se puede obtener $x[n]$ dividiendo los polinomios $Y(z) \div H(z)$

$$X(z) = \frac{Y(z)}{H(z)} \rightarrow \text{coeficientes} \rightarrow x[n]$$

Deconvolución lineal con DFT

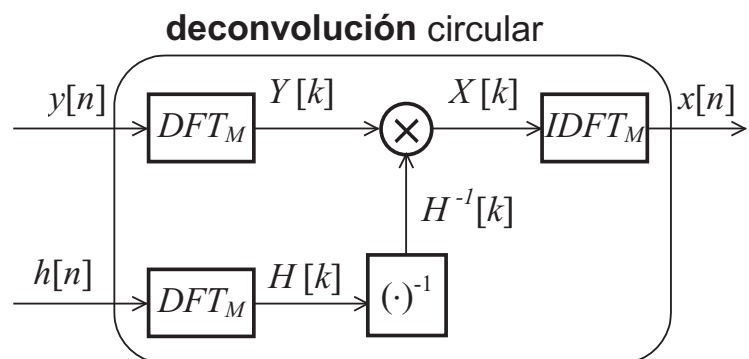
Convolución lineal $y[n] = x[n] * h[n]$ longitud $M = N+P$

Convolución circular (M) $y[n] = x[n] \text{ (M) } h[n]$ igual que la lineal

DFT_M:

$$Y[k] = X[k] \cdot H[k]$$

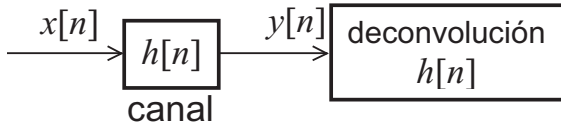
$$X[k] = Y[k] \cdot H^{-1}[k]$$



Deconvolución circular con longitud suficiente $M = N+P \dots$

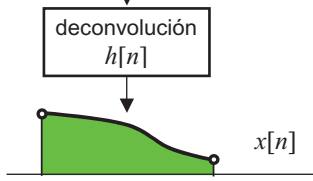
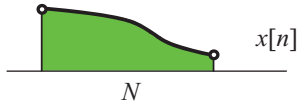
\dots es igual a la deconvolución lineal

Compensación de un canal FIR para una señal de duración finita

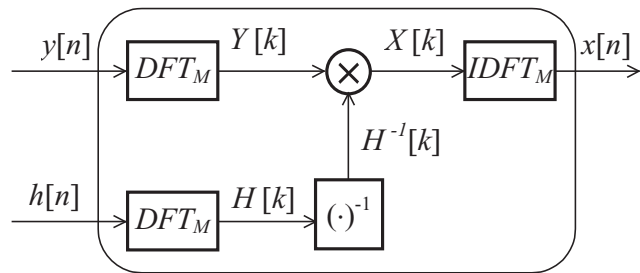


división de polinomios

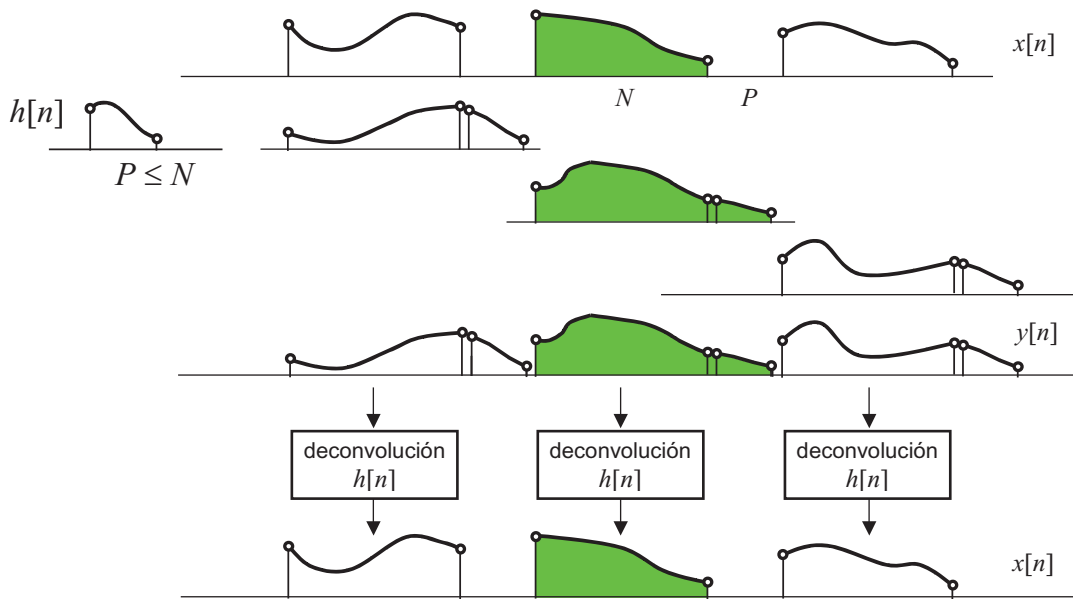
$$X(z) = \frac{Y(z)}{H(z)}$$



deconvolución circular (N+P) con DFT



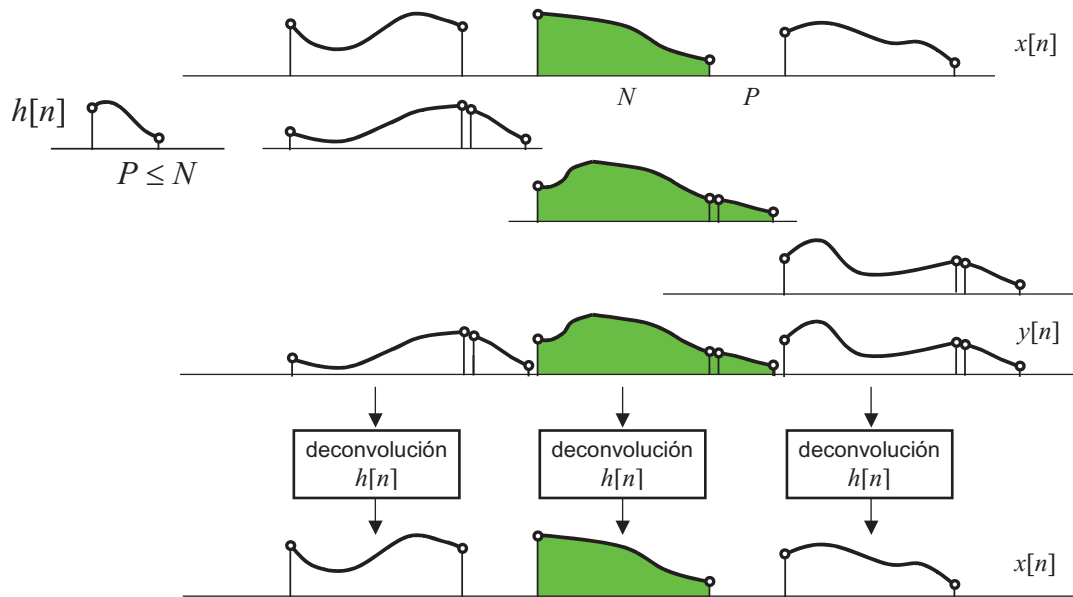
Transmisión por bloques separados



- Bloques separados al menos la duración de la respuesta del canal

Deconvolución: $Y(z) \div H(z)$ o circular (N+P) con DFT_{N+P}

Transmisión por bloques separados

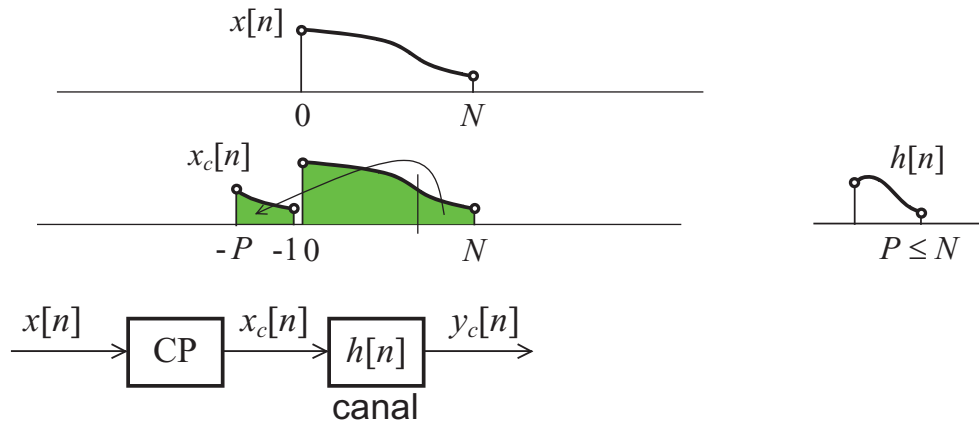


- Pérdida por separación: $P/(N+P)$
- Para que la pérdida sea pequeña: $N \gg P$ (longitud de la respuesta del canal)

Tema 5 Aplicaciones de la DFT

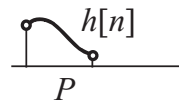
- **Compensación de canal FIR (deconvolución)**
 - Descripción del problema
 - Transmisión por bloques separados
 - Transmisión por bloques con prefijo cíclico
 - Compensación en el dominio de la frecuencia (FEQ)
 - Multiplexación por División Ortogonal en Frecuencia (OFDM)

Compensación de un canal FIR para una señal de duración finita con prefijo cíclico

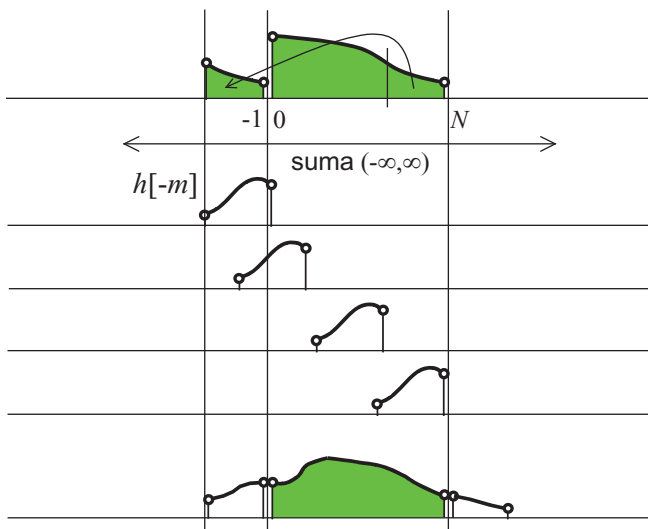


- (si se conoce $h[n]$) ¿Se puede recuperar la señal original $x[n]$?

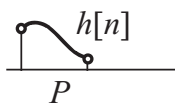
Filtrado FIR de una señal con prefijo cíclico



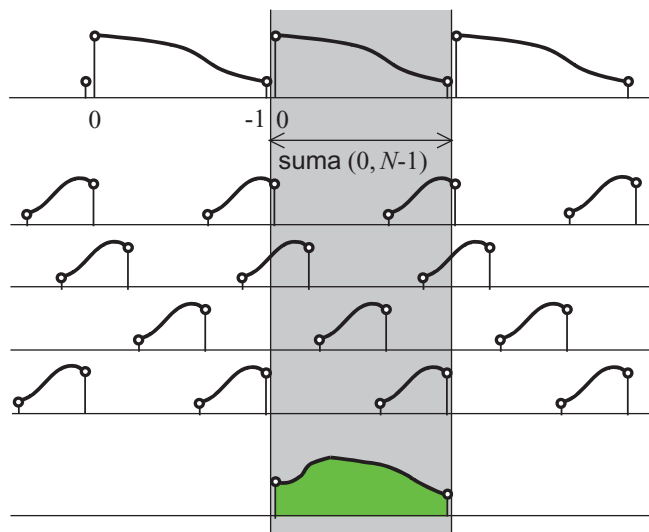
$x_c[n]$: convolución lineal con $h[n]$



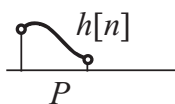
Filtrado FIR de una señal con prefijo cíclico



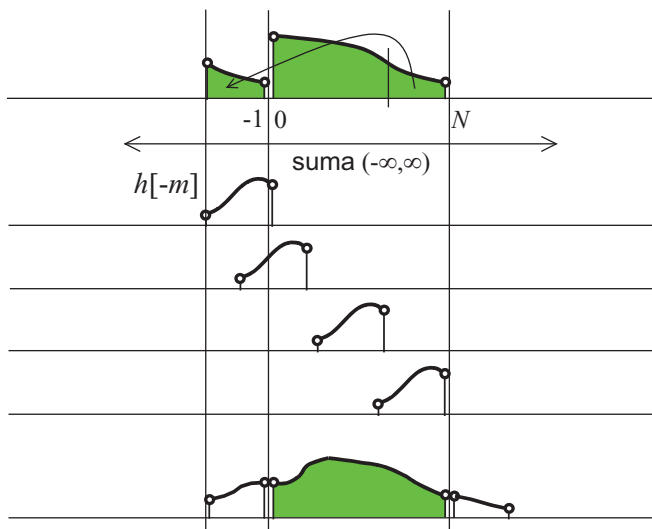
$x[n]$: convolución circular con $h[n]$



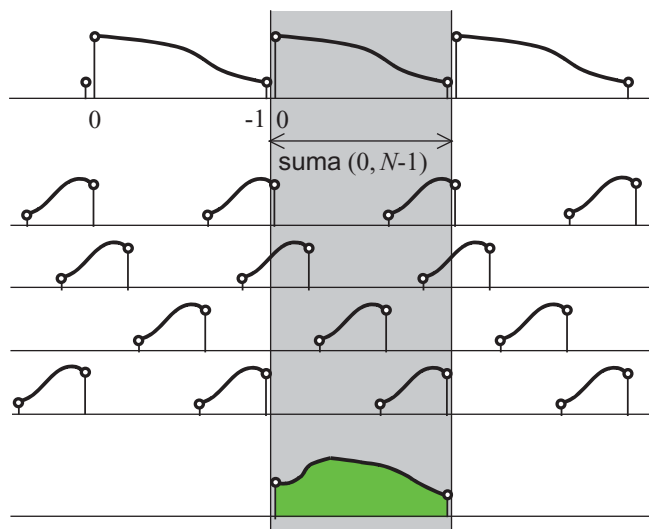
Filtrado FIR de una señal con prefijo cíclico



$x_c[n]$: convolución lineal con $h[n]$

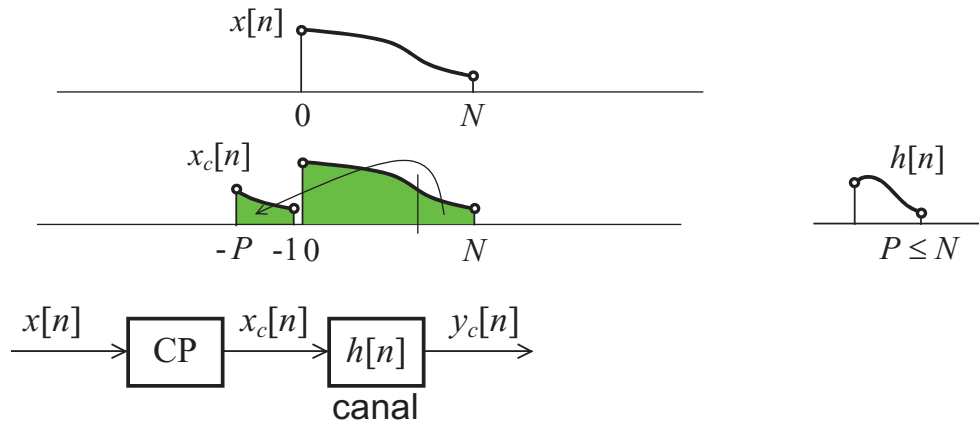


$x[n]$: convolución circular con $h[n]$



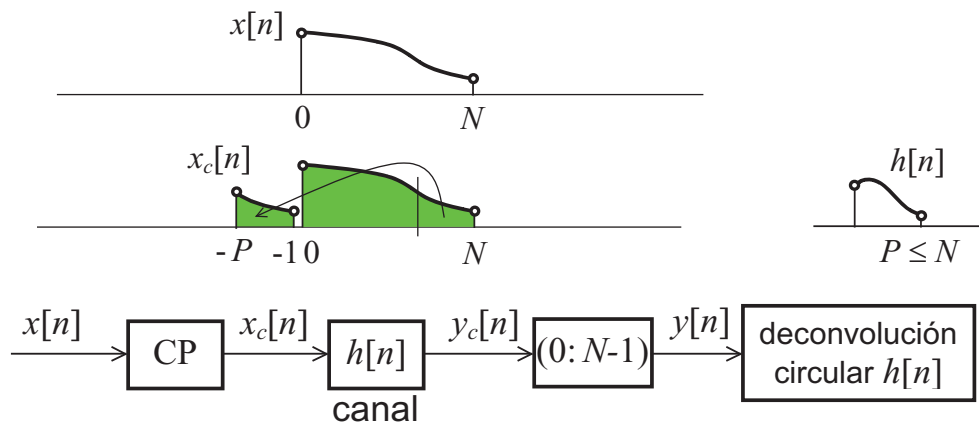
En $(0 : N-1)$ son iguales

Compensación de un canal FIR para una señal de duración finita con prefijo cíclico



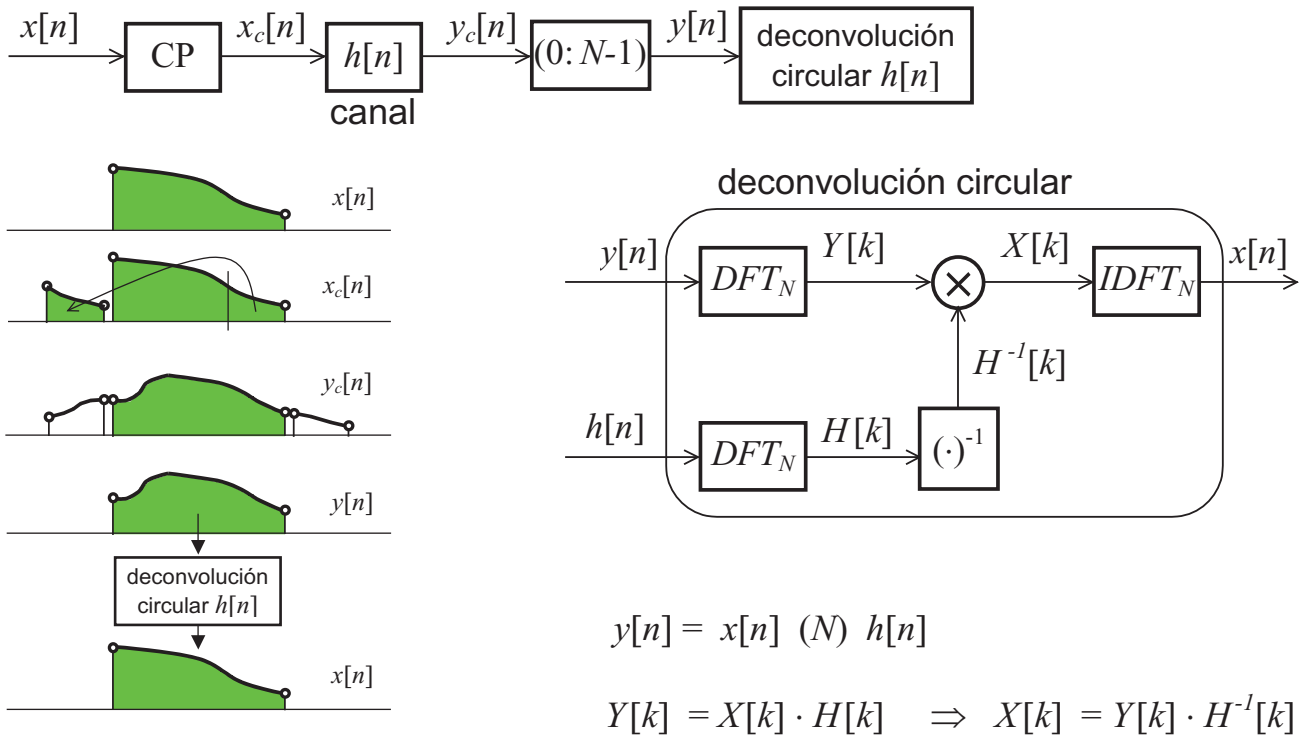
- (si se conoce $h[n]$) ¿Se puede recuperar la señal original $x[n]$?
- La salida $y_c[n]$ en $(0 : N-1)$ es la convolución circular (N) de $x[n]$ y $h[n]$

Compensación de un canal FIR para una señal de duración finita con prefijo cíclico



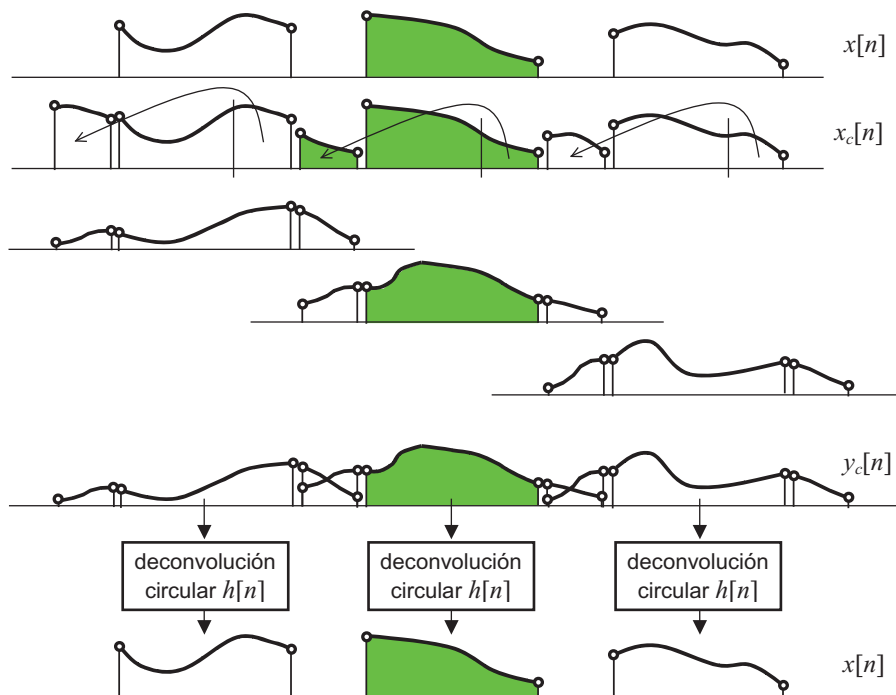
- (si se conoce $h[n]$) ¿Se puede recuperar la señal original $x[n]$?
- La salida $y_c[n]$ en $(0 : N-1)$ es la convolución circular (N) de $x[n]$ y $h[n]$
- Se puede recuperar exactamente $x[n]$, a partir del trozo $y[n]$, mediante su deconvolución circular (N) con $h[n]$

Compensación de un canal FIR para una señal de duración finita con prefijo cíclico



Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

Transmisión por bloques con compensación en el dominio de la frecuencia



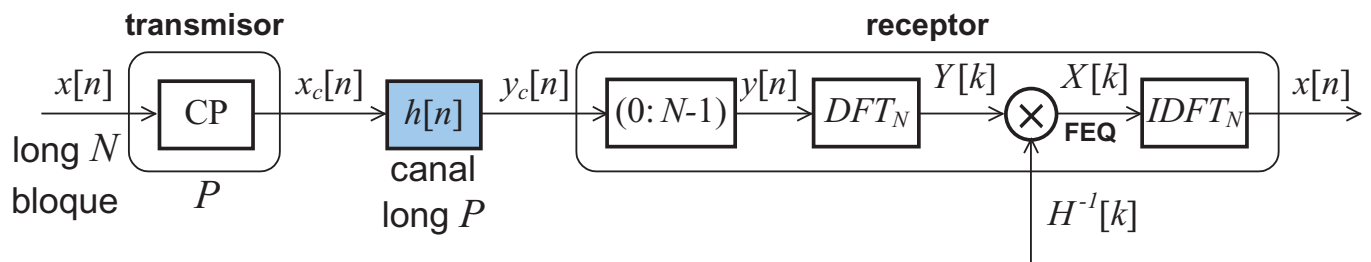
- Pérdida por redundancia: $P/(N+P)$
- Para que la pérdida sea pequeña: $N \gg P$ (longitud de la respuesta del canal)

Tema 5 Aplicaciones de la DFT

- **Compensación de canal FIR (deconvolución)**
 - Descripción del problema
 - Transmisión por bloques separados
 - Transmisión por bloques con prefijo cíclico
 - Compensación en el dominio de la frecuencia (FEQ)
 - Multiplexación por División Ortogonal en Frecuencia (OFDM)

Universidad de Málaga. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. GITT-FPDS

Transmisión por bloques con compensación en el dominio de la frecuencia



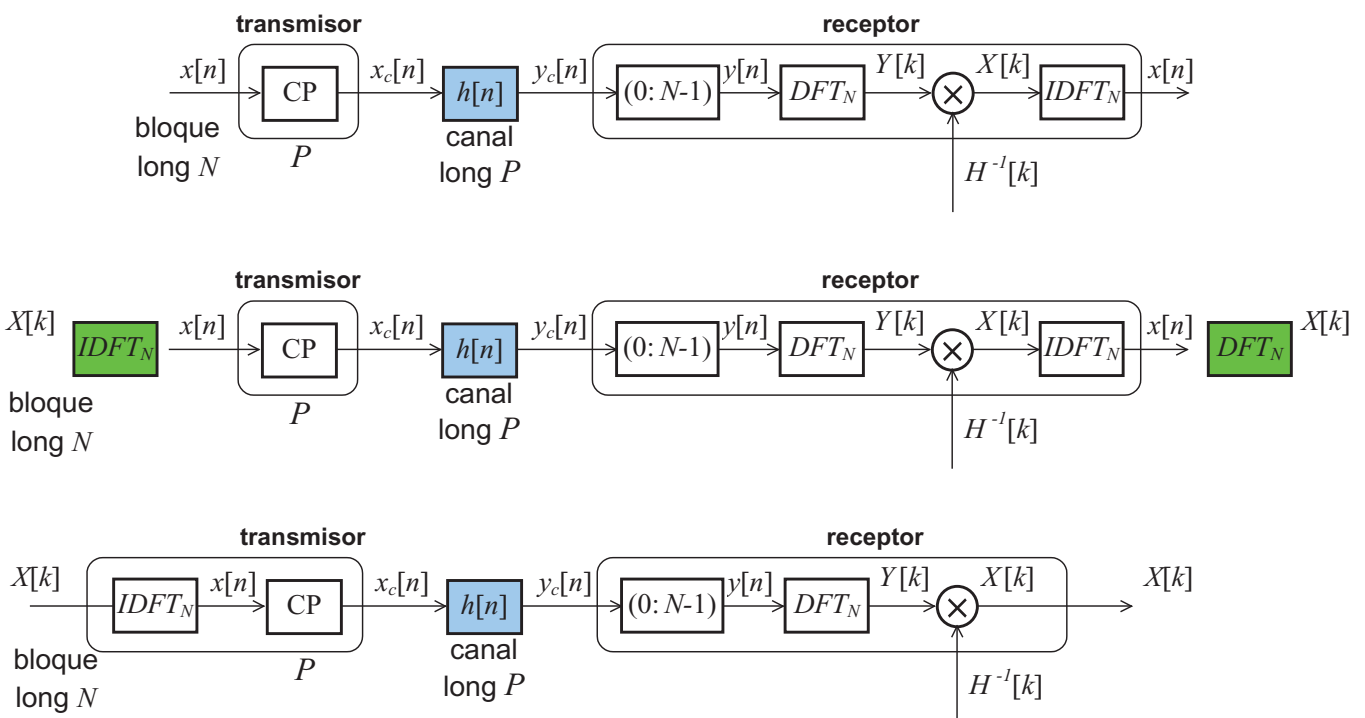
- Si se conoce el canal...
- Añadiendo redundancia (prefijo cíclico) al transmitir...
- Se puede recuperar exactamente la señal mediante una deconvolución circular
 - Deconvolución circular: $DFT \rightarrow FEQ (H^{-1}) \rightarrow IDFT$
 - **FEQ**: *F*requency *d*omain *E*qualizer

Tema 5 Aplicaciones de la DFT

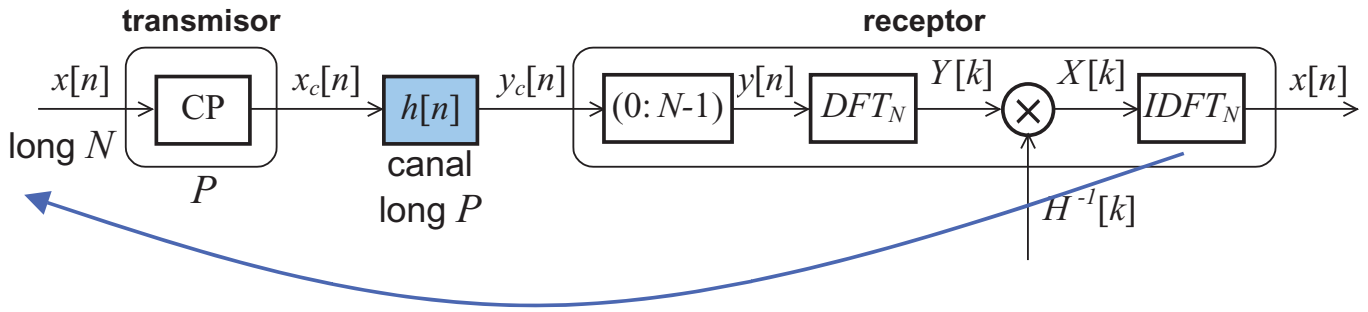
- **Compensación de canal FIR (deconvolución)**

- Descripción del problema
- Transmisión por bloques separados
- Transmisión por bloques con prefijo cíclico
- Compensación en el dominio de la frecuencia (FEQ)
- Multiplexación por División Ortogonal en Frecuencia (OFDM)

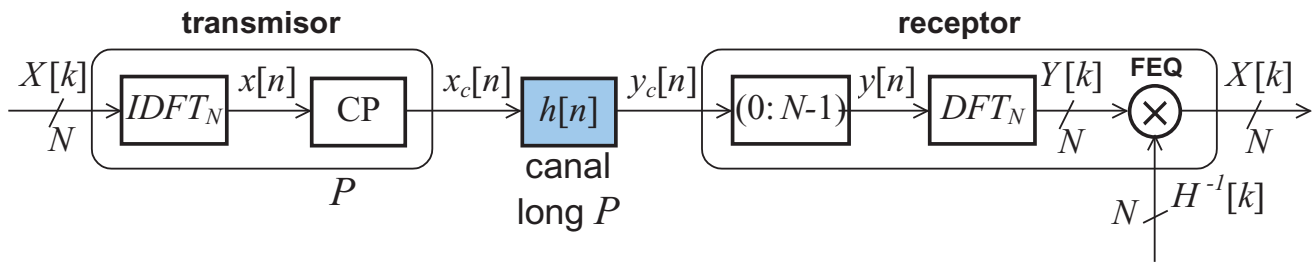
Transmisión por bloques con compensación en el dominio de la frecuencia



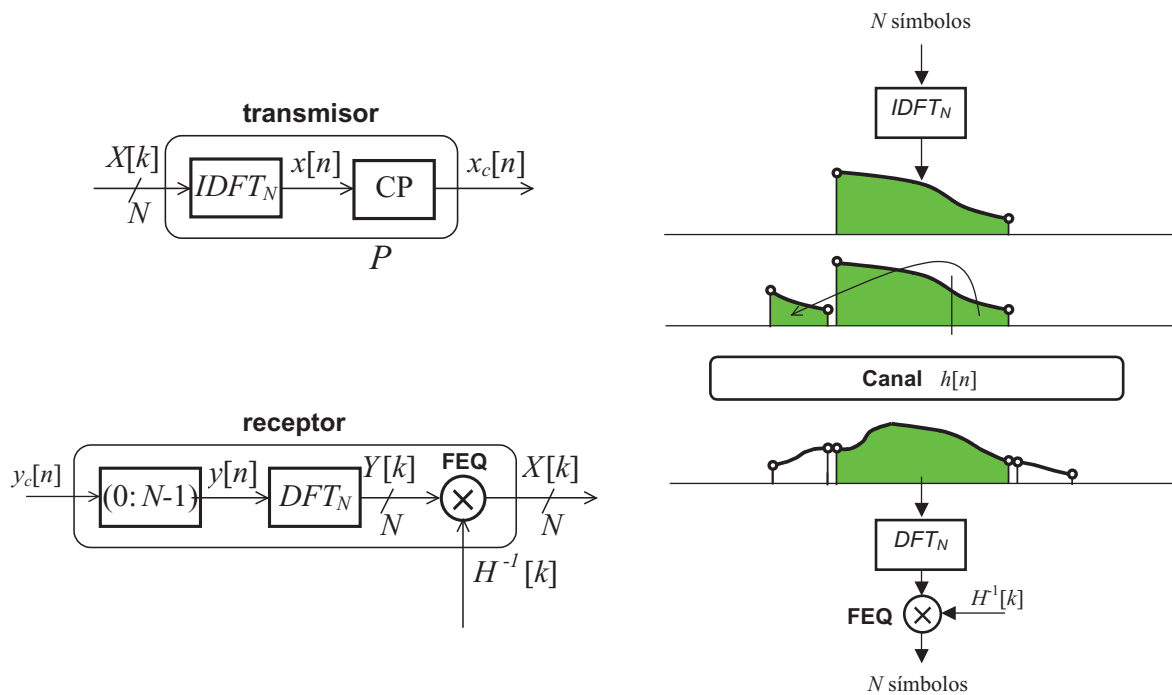
Transmisión por bloques con compensación en el dominio de la frecuencia



Multiplexación por División Ortogonal en Frecuencia

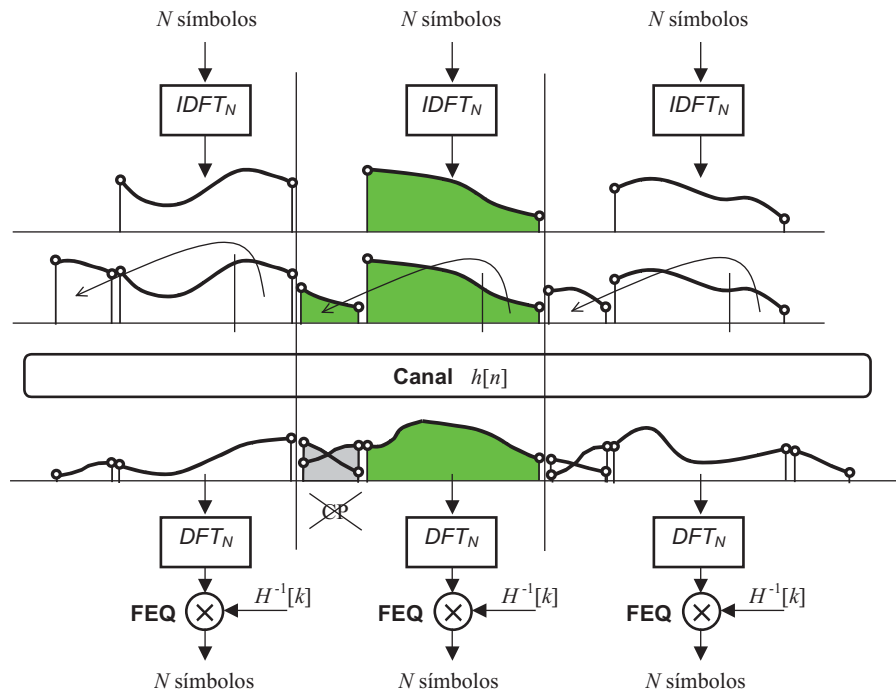


Multiplexación por División Ortogonal en Frecuencia



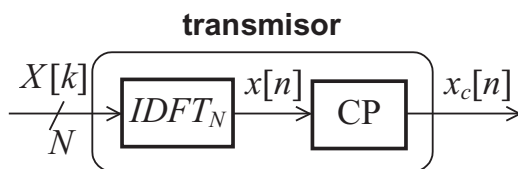
- Recuperación exacta de los N símbolos

Multiplexación por División Ortogonal en Frecuencia



- Recuperación exacta con canales FIR de longitud $\leq P$
- Pérdida por redundancia: $P/(N+P)$

Multiplexación por División Ortogonal en Frecuencia

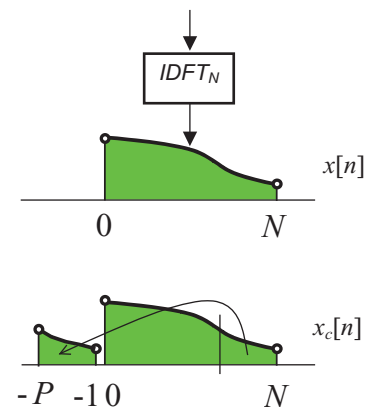


$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j \frac{2\pi k}{N} n} \quad n = 0 : N-1$$

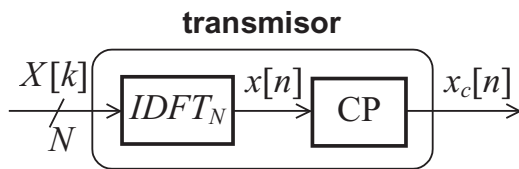
$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot w[n] e^{j \frac{2\pi k}{N} n} \quad w[n] \text{ ventana rectangular de } 0 \text{ a } N-1$$

$$x_c[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j \frac{2\pi k}{N} n} \quad n = -P : N-1$$

$$x_c[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot w_e[n] e^{j \frac{2\pi k}{N} n} \quad w_e[n] \text{ ventana rectangular de } -P \text{ a } N-1$$



Multiplexación por División Ortogonal en Frecuencia



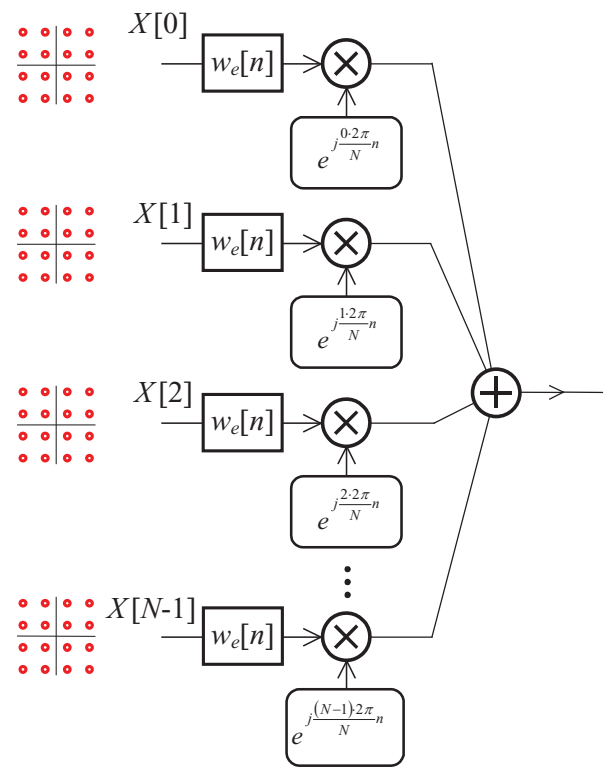
$$x_c[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot w_e[n] e^{j \frac{2\pi k}{N} n}$$

pulso de transmisión rectangular de $-P$ a $N-1$

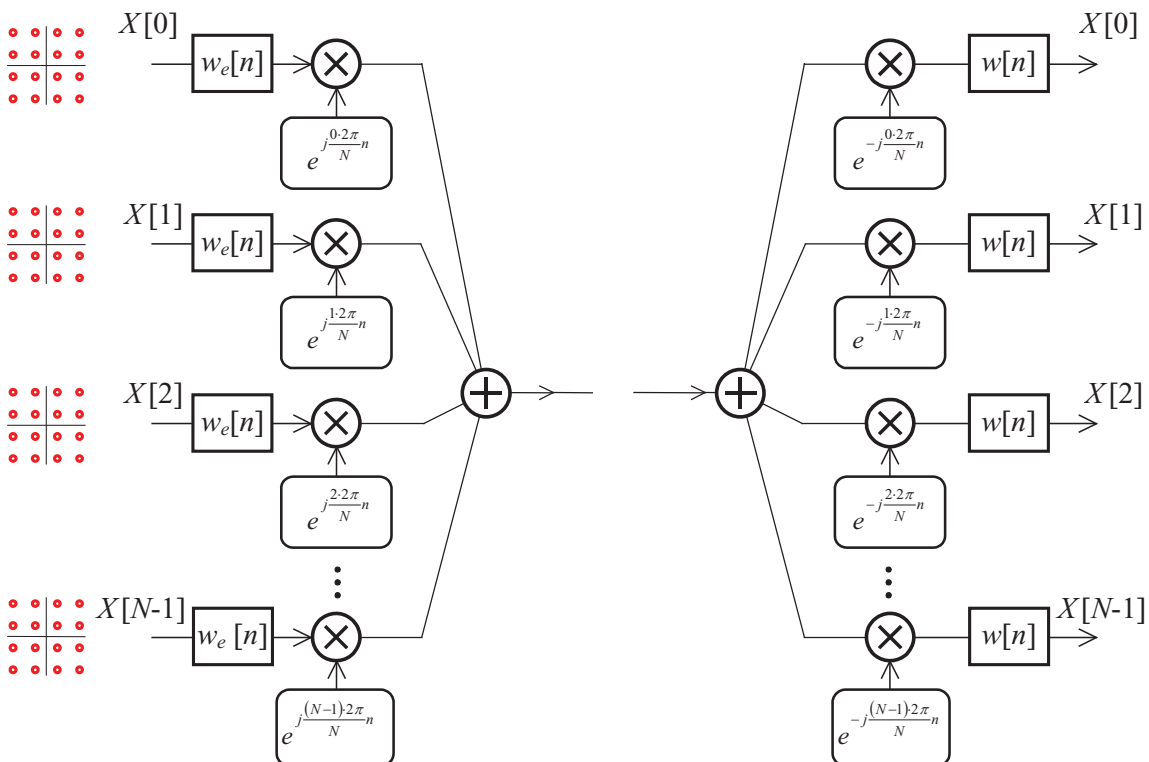
modulación con portadoras armónicas

$$\omega_k = k \cdot \frac{2\pi}{N} \quad k = 0 : N-1$$

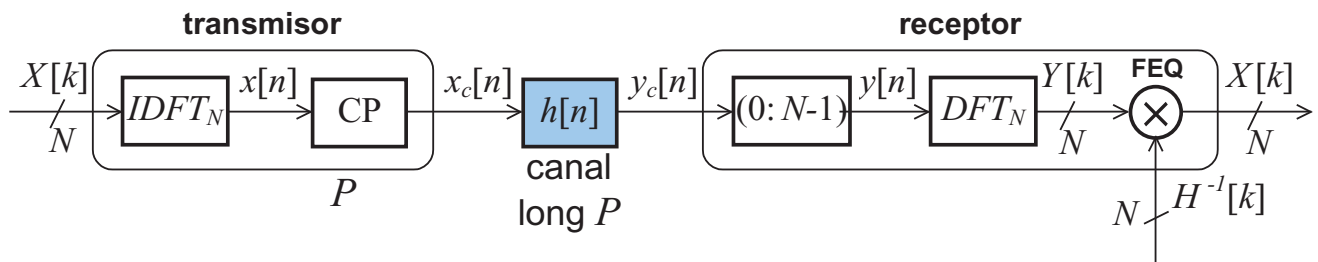
Se envían N símbolos
multiplexados en frecuencia (FDM)



Multiplexación por División Ortogonal en Frecuencia



Multiplexación por División Ortogonal en Frecuencia



- Se envían N señales **multiplexadas en frecuencia (FDM)** con portadoras armónicas
- Las señales se recuperan exactamente (gracias a **CP**, "**demultiplexación**" y **FEQ**)
- Multiplexación por División **Ortogonal** en frecuencia:
 - **OFDM** *Orthogonal Frequency Division Multiplexing*
- Usado en: ADSL, TDT, WiFi, PLC, WiMAX, LTE
- Realización del procesado mediante FFTs

Tema 5 Aplicaciones de la DFT

- **Compensación de canal FIR (deconvolución)**
 - Descripción del problema
 - Transmisión por bloques separados
 - Transmisión por bloques con prefijo cíclico
 - Compensación en el dominio de la frecuencia (FEQ)
 - Multiplexación por División Ortogonal en Frecuencia (OFDM)

