

PNA

| | |
|---|---|
| <i>Editora</i> | |
| María C. Cañadas | <i>Universidad de Granada, España</i> |
| <i>Editores Asociados</i> | |
| Jesús Gallardo | <i>Universidad de Málaga, España</i> |
| Alvaro Gómez | <i>Universidad de Granada, España</i> |
| María Molina | <i>Universidad de Granada, España</i> |
| <i>Asistentes de Edición</i> | |
| María Gutiérrez, Miguel Picado, Tamara Polo y Gabriela Valverde | |
| <i>Comité Editorial</i> | |
| Raham Arcavi | <i>Weizmann Institute of Science, Israel</i> |
| Nicolas Balacheff | <i>Leibniz Laboratory, Francia</i> |
| João Pedro da Ponte | <i>Universidade de Lisboa, Portugal</i> |
| Marcelo D'Ambrosio | <i>Universidade Estadual de Campinas, Brasil</i> |
| María Ampia Figueras | <i>CINVESTAV, México</i> |
| John Kilpatrick | <i>Georgia University, Estados Unidos</i> |
| Giuliana Malara | <i>Università degli studi di Modena e Reggio Emilia, Italia</i> |
| María María Mesa | <i>University of Michigan, Estados Unidos</i> |
| John Radford | <i>Laurentian University, Canadá</i> |
| María Jesús Recio | <i>Universidad de Cantabria, España</i> |
| Henning Valero | <i>Aalborg University, Dinamarca</i> |

PNA es una publicación trimestral seriada editada por el grupo *Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico* (FQM-193), del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (PAIDI). Los artículos publicados en PNA se ajustan a las normas APA y han sido revisados por pares. PNA está incluida en los principales índices y bases de datos: AERA, BIMPE, CBNE, Dialnet, DICE, DOAJ, ERIHON, EDNA, ICAAP, Informe Académico, INRECS, IRESIE, Latindex, MathEduc, OJS, OEI, REBIUM, ScientificCommons y ZDB.

Teléfono: 1886-1350 • Depósito legal: 468/06

Departamento de Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada
Campus de Cartuja s/n
Granada, 18071
España
E-mail: pna@ugr.es
www.pna.es

PNA

Volumen 4, número 3

M. Cinta Muñoz-Catalán, Nuria Climent, José Carrillo, and
Luis Carlos Contreras
*Cognitive Processes Associated with the Professional
Development of the Mathematics Teacher*

87

Fernando Cerdán
*Las Igualdades Incorrectas Producidas en el Proceso de
Traducción Algebraico: un Catálogo de Errores*

99

Wenceslao Quispe, Jesús Gallardo y José Luis González
*¿Qué Comprensión de la Fracción Fomentan los Libros de
Texto de Matemáticas Peruanos?*

111

¿QUÉ COMPRENSIÓN DE LA FRACCIÓN FOMENTAN LOS LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICAS PERUANOS?

Wenceslao Quispe, Jesús Gallardo y José Luis González

Para valorar la comprensión de la fracción en Perú desde una perspectiva curricular, realizamos un análisis de 20 libros de texto peruanos de matemáticas (1963-2005). El análisis se fundamenta en la dimensión fenómeno-epistemológica de un modelo operativo para la interpretación de la comprensión en matemáticas. Se pone la atención sobre los significados, las representaciones e ilustraciones, la fenomenología y la orientación metodológica. Atendiendo a estos elementos, identificamos tres periodos con carencias en la comprensión pero con una cierta evolución positiva en el tratamiento didáctico de la fracción. Con el propósito de mejorar esta situación, presentamos algunas recomendaciones que pueden resultar eficaces en el desarrollo de la comprensión de la fracción.

Términos clave: Análisis fenomenológico y epistemológico; Comprensión en matemáticas; Fracción; Libros de texto de matemáticas

What Understanding of Fraction do the Peruvian Mathematics Textbooks Support?

To assess the understanding of fraction in Peru from a curricular perspective, we performed an analysis of 20 Peruvian mathematics textbooks (1963-2005). The analysis is based on the phenomenon-epistemological dimension of an operative model for interpreting the understanding in mathematics. The attention is focused on the meanings, representations and illustrations, the phenomenology and the methodological orientation. From these elements, we identify three periods with limitations in the understanding but with a certain positive evolution in the pedagogical treatment of fraction. With the purpose of improving this situation, we present some recommendations that can help to develop the understanding of fraction.

Keywords: Fraction; Mathematics textbooks; Phenomenological and epistemological analysis; Understanding in mathematics

Quispe, W., Gallardo, J. y González, J. L. (2010). ¿Qué comprensión de la fracción fomentan los libros de texto de matemáticas peruanos? *PNA*, 4(3), 111-131.

En los últimos años, el Ministerio de Educación del Perú ha venido poniendo de manifiesto carencias significativas en el aprendizaje y la comprensión matemática del alumnado peruano. Entre otras conclusiones, encontramos que en tercer grado de secundaria “el 94,0% de estudiantes muestra no haber desarrollado adecuadamente las habilidades matemáticas requeridas para el grado que están culminando” (Unidad de Medición de la Calidad Educativa del Ministerio de Educación del Perú [UMCE], 2004, p. 219). En particular, el concepto de número racional suele mostrarse entre los más afectados por tales dificultades de comprensión. Así por ejemplo, se concluye que la mayoría de estudiantes peruanos de sexto de primaria presentan limitaciones a la hora de representar cantidades y operar con fracciones homogéneas y expresiones decimales (UMCE, 2001). En nuestra opinión, resultados desfavorables como éstos reclaman la necesidad de realizar esfuerzos más intensos y sistemáticos que los hasta ahora desplegados para mejorar la educación matemática en Perú, en especial la de aquellos conocimientos que gozan de una importante presencia curricular como es el caso de las fracciones.

En Didáctica de la Matemática, el análisis de manuales escolares se considera una vía eficaz y útil para identificar los posibles orígenes epistemológicos y metodológicos de los problemas de aprendizaje de los estudiantes. La pertinencia de este análisis está justificada sobre todo porque los libros de texto continúan siendo el principal documento curricular utilizado por el profesorado para enseñar matemáticas en el aula, al tiempo que son generadores potenciales de inconsistencias, ambigüedades, omisiones y otros conflictos a la hora de presentar los contenidos matemáticos (Gómez, 2009; Kajander y Lovric, 2009). Por nuestra parte, con el análisis de libros de texto que aquí se presenta, aspiramos a proporcionar algunas claves curriculares con las que aproximarnos a las posibles causas de la deficiente comprensión de las fracciones por parte de los escolares peruanos.

El análisis realizado se fundamenta en la *dimensión fenómeno-epistemológica* de un modelo operativo para la interpretación de la comprensión en matemáticas sobre el que venimos trabajando en los últimos años (Gallardo y González, 2006a, 2006b; Gallardo, González y Quispe, 2008a, 2008b). En esta dimensión asumimos que la comprensión del conocimiento matemático está ligada a las experiencias matemáticas que se producen en aquellas situaciones donde interviene como medio de resolución, pudiendo ser inferida o abordada indirectamente a través del análisis de las acciones que se llevan a cabo al intentar resolver tales situaciones. Es decir, que el uso intencional del conocimiento matemático en actividades pertenecientes a su ámbito fenómeno-epistemológico, como forma de acción observable e interpretable, es lo que da cuenta de la comprensión de los estudiantes. En base a este supuesto interpretativo, pretendemos analizar cómo los libros de texto peruanos utilizan en su enseñanza la estructura fenómeno-epistemológica vinculada a la fracción como medio para desarrollar su comprensión.

El análisis de textos desarrollado constituye la parte curricular de una investigación más amplia que tiene por objeto interpretar aquellas particularidades sobre la comprensión de la fracción relacionadas con las prioridades que surgen en el uso de sus significados (Quispe, 2008). Dicha investigación incluye también una parte cognitiva donde, a través de un estudio empírico exploratorio realizado con profesores de secundaria en formación, se evidencia y caracteriza, en términos de comprensión, el fenómeno de interferencia entre significados que se produce al utilizar la fracción en distintas situaciones de su esfera epistemológica y fenomenológica (Gallardo, González y Quispe, 2008a).

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Partimos del reconocimiento básico de que el uso del conocimiento matemático desempeña un papel relevante en la interpretación y valoración de la comprensión de los alumnos. De ello concluimos la necesidad de emplear estrategias de acercamiento a la comprensión centradas en sus manifestaciones externas observables y en las particularidades del conocimiento matemático. La dimensión fenómeno-epistemológica de nuestro modelo atiende este reclamo proponiendo unos referentes operativos sobre el conocimiento matemático y sobre la comprensión en matemáticas y su interpretación.

El Conocimiento Matemático como Objeto de Comprensión

Con fines valorativos, el conocimiento matemático es considerado en nuestro enfoque como una entidad concreta con dos estructuras básicas específicas y exclusivas que delimitan su naturaleza y existencia: (a) la estructura epistemológica y (b) la estructura fenomenológica.

Por una parte, los conocimientos matemáticos no siempre se utilizan del mismo modo y son sus componentes caracterizadores los que establecen en cada caso los distintos requisitos condicionantes de su empleo intencionado por parte del estudiante. La estructura epistemológica propia de cada conocimiento matemático incluye significados, representaciones externas, propiedades y relaciones con otros conocimientos, entre otros componentes.

Por otra parte, el conocimiento matemático puesto en acción también permite estudiar las diferentes relaciones existentes con las situaciones problemáticas en las que tiene sentido su uso. Por ejemplo, el hecho de que un conocimiento matemático intervenga en una tarea de forma necesaria, en una o varias formas de uso determinadas, o bien como alternativa entre otros conocimientos, se aplica aquí como criterio fenomenológico para establecer diferencias en términos de comprensión.

La Comprensión y su Interpretación en Matemáticas

Afirmamos que lo que un individuo utiliza y cómo lo utiliza para elaborar y emitir voluntariamente una respuesta adaptada a una situación proporciona informa-

ción específica sobre lo que comprende y cómo lo comprende. En base a ello, consideramos que un estudiante comprende un conocimiento matemático si es capaz de emplearlo, en alguna de sus formas posibles, en todas aquellas situaciones pertenecientes a su esfera fenómeno-epistemológica. Esta premisa trae consigo la consecuencia metodológica de que para sustentar la interpretación de la comprensión en el empleo del conocimiento matemático se requiere profundizar en la naturaleza de dicho empleo mediante la caracterización de las circunstancias, particularidades o eventos más significativos que acontecen en las distintas oportunidades de uso. En principio, las manifestaciones de comprensión idónea vendrían dadas por la aplicación del conocimiento matemático en su forma precisa en toda situación de su esfera fenómeno-epistemológica. No obstante, esta condición ideal difiere en numerosas ocasiones del desempeño real de los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones de distinto tipo, dando lugar a una variedad de sucesos interpretables en términos de comprensión.

A nivel curricular, nuestra aproximación también establece para los libros de texto el objetivo didáctico de completar o cubrir en lo posible las estructuras fenomenológica y epistemológica asociadas a los conocimientos matemáticos como vía para el desarrollo de la comprensión. En primer lugar, el estudio sobre dónde utilizan los textos escolares el conocimiento matemático —esto es, en qué tareas matemáticas— y establecen el correspondiente vínculo fenomenológico conocimiento-situación permite concretar la extensión de su uso. En segundo lugar, el análisis de cómo se emplea en ellos el conocimiento matemático en sus distintas variantes abre la vía de acceso a la naturaleza de los vínculos epistemológicos. Desde nuestro enfoque estas dos facetas específicas se muestran como indicadores esenciales de la comprensión, siendo el origen y la referencia que proponemos para la interpretación de los libros de texto.

METODOLOGÍA

La metodología empleada se pormenoriza describiendo las características de la muestra de libros de texto, los elementos del análisis y el instrumento de recogida de datos.

Muestra de Libros de Texto

Nos interesa garantizar en lo posible que la mayoría de los alumnos y profesores peruanos hayan estudiado la fracción a través de alguno de los textos analizados, razón por la cual decidimos iniciar el análisis en los años 60. Asimismo, dado que los profesores participantes en la fase cognitiva del estudio enseñan a nivel de secundaria, optamos por delimitar el análisis de los libros de texto al mismo nivel educativo, a pesar de que la enseñanza de la fracción en el sistema educativo peruano comienza en tercer curso de primaria y se prolonga de forma continuada (Arellano, 2006). Finalmente, nos decantamos por una muestra compuesta por 20 libros de texto de matemáticas de secundaria, 16 de primero y 4 de segun-

do grado.¹ Todos los textos fueron publicados por editoriales o filiales peruanas, principalmente de Lima. En la Tabla 1 presentamos los datos bibliográficos de los libros de texto de matemática analizados, organizados por periodos (A, B y C)² e incluyéndose un código para cada libro a fin de simplificar su identificación.

Tabla 1

Muestra de libros de texto peruanos de matemáticas (1963-2005)

| Códigos | Referencias |
|-----------|---|
| Periodo A | |
| LT1963A | Vega, F. (1963). <i>Matemática. Primer año de educación secundaria</i> . Callao, Perú: Colegio Militar Leoncio Prado. |
| LT1963B | Romero, R. (1963). <i>Matemática. Primer año</i> . Callao, Perú: Colegio Militar Leoncio Prado. |
| Periodo B | |
| LT1974 | De la Cruz, M. (1974). <i>Matemática moderna 1</i> . Lima, Perú: Arica. |
| LT1975 | De la Cruz, M. (1975). <i>Matemática moderna 2</i> . Lima, Perú: Labrusa. |
| LT1976A | Vega, F. (1976). <i>Matemática moderna 2</i> . Callao, Perú: Colegio Militar Leoncio Prado. |
| LT1976B | Romero, R. (1976). <i>Matemática moderna 2</i> . Lima, Perú: Universal. |
| LT1982 | De la Cruz, M. (1982). <i>Matemática. Segundo grado de educación secundaria</i> . Lima, Perú: Brasa. |
| LT1990 | Romero, R. (1990). <i>Matemática 1. La nueva estructura de la matemática</i> . Lima, Perú: Autor.* |
| LT1991 | Vásquez, C. E. (1991). <i>El mundo de la matemática 1</i> . Lima, Perú: Stella. |
| LT1992 | Rojas, G. (1992). <i>Matemática 1. Teoría y práctica</i> . Lima, Perú: Ambers. |

¹ Entre 1975 y 1982 el estudio de los números racionales estaba incluido en libros de texto de segundo grado. Esta es la razón que justifica la aparente desproporción en número entre los textos de primero y segundo grado de la muestra.

² Estos periodos tienen su origen en la forma de presentar la construcción del número racional y los significados vinculados a la fracción en los libros de texto. En la exposición de resultados profundizaremos en las características de cada uno de ellos.

Tabla 1

Muestra de libros de texto peruanos de matemáticas (1963-2005)

| Códigos | Referencias |
|-----------|--|
| LT1993 | Gutiérrez, V. (1993). <i>Matemática. Primer grado de secundaria</i> . Lima, Perú: Omega. |
| LT1995 | Romero, R. (1995). <i>Matemática I</i> . Lima, Perú: Magisterio. |
| Periodo C | |
| LT1997 | Ibarra, C. (Coord.) (1997). <i>Matemática I secundaria</i> . Lima, Perú: Santillana. |
| LT2000A | Lohmann, C. (Coord.) (2000). <i>Símbolo I. Matemática secundaria</i> . Lima, Perú: Santillana. |
| LT2000B | Valencia, V. H. y Candia, H. (2000). <i>Matemática I</i> . Puno, Perú: Cadena del Sur Ñaupá's. |
| LT2003A | Coveñas, M. (2003). <i>Matemática I. Educación secundaria</i> . Lima, Perú: Bruño. |
| LT2003B | Rojas, A. (2003). <i>Matemática I. Educación secundaria</i> . Lima, Perú: San Marcos.* |
| LT2003C | Bustamante, P. (2003). <i>Matemática I. Texto integrado</i> . Arequipa, Perú: Independencia.* |
| LT2003D | Quijano, J. y Carretero, G. (2003). <i>Matemática I</i> . Lima, Perú: Kano. |
| LT2005 | Vera, C. E. (2005). <i>Matemática primer grado</i> . Lima, Perú: El Nosedal. |

* Esta editorial no suele consignar el año de edición por razones comerciales y, en tal caso, optamos por estimar dicho año.

Elementos del Análisis

La estrategia sugerida por nuestra propuesta radica en determinar la parte de la estructura fenómeno-epistemológica del conocimiento matemático cuya comprensión se desea valorar. En ello se manifiesta un claro interés por profundizar en la complejidad del conocimiento matemático y por establecer dimensiones, categorías o componentes con las que controlar dicha complejidad de forma efectiva y operativa. Como ya hemos indicado, esta opción demanda, de una parte, analizar la naturaleza del conocimiento matemático para identificar los componentes caracterizadores de su estructura epistemológica, y de otra, considerar sus relaciones con los fenómenos y situaciones que lo hacen significativo para establecer la correspondiente estructura fenomenológica. Para el caso específico de la

fracción, nuestro modelo de análisis exige la caracterización de las componentes que detallamos a continuación.

Estructura Epistemológica

Desde una perspectiva epistemológica, centramos la atención en el análisis de los significados y las representaciones más significativos dentro de cada texto.

En primer lugar, identificamos los cinco significados de la fracción constatados por autores como Behr, Harel, Post y Lesh (1992), Escolano y Gairín (2005) y Kieren (1993):

Parte-todo. Es el significado manifestado al considerar la fracción $\frac{a}{b}$ como la relación existente entre dos cantidades específicas: un todo o unidad b , continua o discreta, representando un número total de partes iguales, y una parte a , destacando un número particular de esas partes iguales tomadas del total.

Cociente. Significado que enfatiza la fracción $\frac{a}{b}$ como operación de dividir un número natural por otro no nulo. En este caso, la fracción es el resultado de una situación de reparto donde se busca conocer el tamaño de cada una de las partes resultantes al distribuir a unidades en b partes iguales.

Medida. Significado que tiene su origen al medir cantidades de magnitudes que, siendo conmensurables, no se corresponden con un múltiplo entero de la unidad de medida. La fracción $\frac{a}{b}$ emerge entonces de la necesidad natural de dividir la unidad de medida en b subunidades iguales y de tomar a de ellas hasta completar la cantidad exacta deseada.

Razón. Este significado muestra a la fracción como índice comparativo entre dos cantidades o conjuntos de unidades. La fracción $\frac{a}{b}$ como razón evidencia la comparación bidireccional entre los valores a y b , siendo esencial el orden en el que se citan las magnitudes comparadas.

Operador. Significado que hace actuar a la fracción como transformador o función de cambio de un determinado estado inicial. Así, la fracción $\frac{a}{b}$ empleada como operador es el número que modifica un valor particular n multiplicándolo por a y dividiéndolo por b .

En segundo lugar, nuestro modelo comparte con la visión representacional de la comprensión en matemáticas la recomendación de exigir al alumnado el dominio de las representaciones externas de la fracción y las conexiones entre ellas. En este sentido, se concretan los sistemas de representación más utilizados en el tex-

to escolar, incluidas las ilustraciones, y se describen las principales transformaciones dentro de cada representación y conversiones entre los registros de representación (Duval, 1993, 2006).

Estructura Fenomenológica

Desde un punto de vista fenomenológico, en cada libro se analizan: (a) el empleo de elementos históricos en su desarrollo didáctico y (b) la contextualización de la fracción y sus aplicaciones en las tareas propuestas. En estas situaciones resulta legítimo emplear la fracción con algún significado, lo que posibilita interpretar la comprensión de la fracción en función de su disponibilidad a ser empleada.

Orientación Metodológica

Como complemento, el análisis fenómeno-epistemológico se amplía con otro de carácter metodológico destinado a: (a) identificar los objetivos didácticos del texto respecto a la enseñanza de la fracción, (b) caracterizar sus orientaciones metodológicas a través de las actividades propuestas y (c) subrayar posibles errores de concepción en la presentación de los contenidos matemáticos.

Instrumento para la Recogida de Datos

Para el registro de la información utilizamos el instrumento presentado en la Tabla 2. En esencia, se trata de una parrilla destinada al registro pormenorizado de los elementos del análisis ya descritos. Los interrogantes asociados sirven para orientar la recolección de los datos.

Tabla 2

Instrumento para la valoración cualitativa de la fracción en los libros de texto

| Elementos del análisis | Cuestiones |
|---------------------------|--|
| Significados y conceptos | ¿Cuál es la definición de número racional que expone el texto? ¿Qué significados están presentes en la exposición de la fracción? |
| Ilustraciones | ¿Qué variedad de ilustraciones interpretan los significados de la fracción? ¿Cuáles destacan por su representatividad? |
| Análisis representacional | ¿Qué representaciones se utilizan para exponer el concepto y significados de fracción? ¿Qué tipo de transformaciones y conversiones se realizan en la exposición del contenido? |

Tabla 2

Instrumento para la valoración cualitativa de la fracción en los libros de texto

| Elementos del análisis | Cuestiones |
|-------------------------|---|
| Análisis fenomenológico | <p>¿Qué elementos históricos de la matemática se utilizan como auxiliares didácticos? ¿Cómo se utilizan?</p> <p>¿Los ejemplos, ejercicios y problemas están contextualizados en la vida cotidiana del estudiante?</p> <p>¿El desarrollo de la fracción muestra aplicaciones y situaciones que modelan fenómenos de la realidad?</p> |
| Aspectos metodológicos | <p>¿Se enuncian los objetivos e intenciones de la unidad o capítulo del libro de texto?</p> <p>¿Qué orientaciones metodológicas se encuentran en los textos, de forma explícita o implícita?</p> <p>¿Qué caracteriza la presentación y formato de los ejercicios y problemas de referencia?</p> <p>¿Se logra percibir errores en la presentación de los contenidos?</p> |

RESULTADOS

Los resultados obtenidos tras el análisis de libros de texto centran la atención sobre los siguientes elementos de enseñanza de la fracción: los significados y sus relaciones, las representaciones y sus transformaciones y conversiones, las situaciones y tareas problemáticas y los enfoques metodológicos.

Significados de la Fracción en la Construcción del Concepto de Número Racional

Por la forma como se presentan la construcción del número racional y los significados vinculados a la fracción, llegamos a establecer tres periodos diferentes en los libros de texto analizados.

Periodo A (Década de los 60)

La ruta de construcción del concepto de número racional en este periodo se ajusta al diagrama de la Figura 1. En este periodo, representado por los textos LT

1963A y LT1963B³, se introduce la fracción como resultado de la partición de una unidad en partes iguales (alícuotas), revelándose mayoritariamente el significado de medida. También el significado parte-todo comparte protagonismo con el de medida como soporte didáctico para la enseñanza de la fracción. No se aprecian evidencias suficientes de que otros significados distintos hayan sido considerados de manera intencional como objeto de estudio, aunque alguno de ellos llega a localizarse eventualmente entre las actividades matemáticas propuestas a los alumnos.

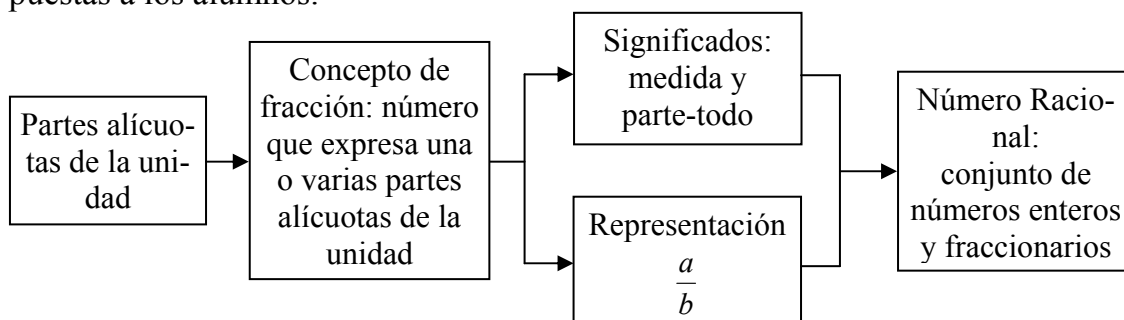


Figura 1. Ruta de construcción del concepto de número racional en el periodo A

Periodo B (Desde los 70 hasta Medios de los 90)

En este periodo ubicamos los libros de texto editados entre los años 1974 y 1995. A diferencia del periodo anterior, la fracción se introduce ahora por la necesidad de ampliar el conjunto de los números enteros ante la imposibilidad de realizar divisiones como 5 entre 3 (LT1990) o resolver ecuaciones del tipo $b \cdot x = a$ con $b \neq 0$ (Figura 2). La fracción se muestra como par ordenado que actúa como representante canónico de cada una de las clases de equivalencias que conforman el conjunto de los números racionales. El número racional es, por tanto, un conjunto de fracciones equivalentes entre sí que se representa generalmente por la más simple (LT1976A, LT1995). Como consecuencia, el significado usado para introducir el concepto de fracción es esencialmente el de cociente, aunque de nuevo se pone de manifiesto la presencia del significado parte-todo como apoyo didáctico. El significado de razón, por su parte, aparece con posterioridad a estos significados en el estudio de las razones y proporciones.

³ En la década de los 60 no era mucha la variedad de editoriales y ediciones diferentes publicadas. Esto y la dificultad para acceder de manera efectiva a libros de texto de esta época justifican el que hayamos analizado tan sólo dos volúmenes en este periodo A.

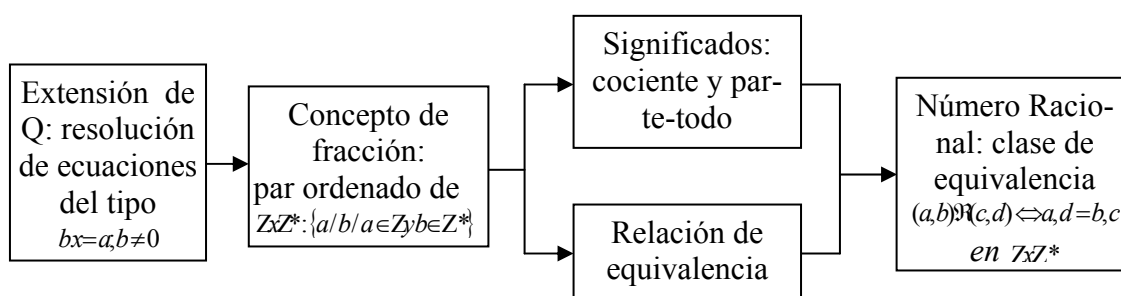


Figura 2. Ruta de construcción del concepto de número racional en el periodo B

Periodo C (Desde Mediados de los 90 hasta Mediados de 2000)

Este periodo coincide con los años en que irrumpe el constructivismo en las aulas escolares en Perú y con el inicio de la reforma de la educación secundaria. Los libros de texto analizados se sitúan en los años comprendidos entre 1997 y 2005. En este periodo, se mantiene el interés por introducir la fracción como representante canónico de una clase de equivalencia, que sería el número racional (Figura 3). Como novedad, se incrementa el interés por priorizar y consolidar el significado parte-todo frente a otros. Es importante resaltar que en esta época se opta por definiciones menos formales del tipo: “Fracción es cada una de las partes en las que se ha dividido un todo” (LT2000B, p. 118). En menor medida, también se contempla el significado de cociente indicado como consecuencia de la necesidad de ampliar y extender el conjunto de los números enteros (LT2005).

El resto de significados también están presentes aunque son subsidiarios en este periodo. Sólo dos textos, LT1997 y LT2000A, realizan una revisión ordenada de los significados de la fracción: (a) como parte de la unidad, (b) como resultado de una medida, (c) como cociente de dos números enteros y (d) como operador. Asimismo, desarrollan a posteriori el significado de razón a través del estudio de la proporcionalidad numérica: “La comparación de un número con otro mediante el cociente indicado de dichos números se llama razón” (LT2000A, p. 166).

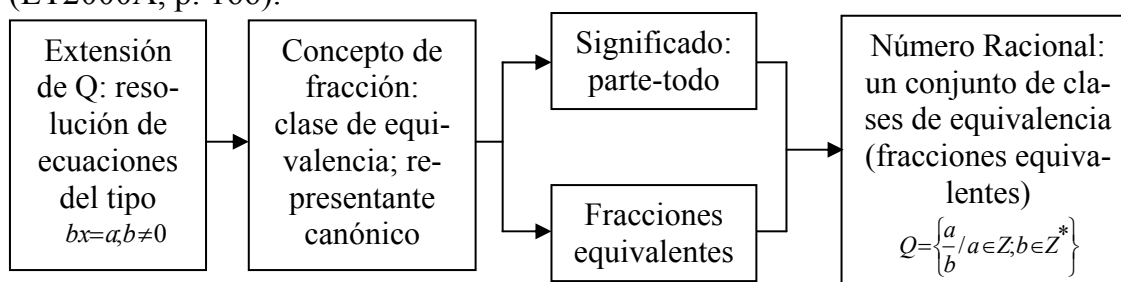


Figura 3. Ruta de construcción del concepto de número racional en el periodo C

Relaciones entre Significados

Nos interesa subrayar que, en el análisis de la relación entre los significados de la fracción a lo largo de los periodos, observamos como hecho destacable la presencia de un fenómeno de interferencia en el uso de algunos de los significados,

manifestado en versiones diferentes. Una de ellas tiene lugar al introducir el concepto de fracción. En ocasiones, se acude al empleo conjunto y colaborativo de dos significados distintos durante la conceptualización, uno de ellos ejerciendo de significado principal en la definición de fracción y otro como auxiliar didáctico para consolidar su comprensión. Así sucede en LT1992 para el caso de los significados cociente y parte-todo. En la Figura 4 (LT1992, pp. 98-99) se puede ver, en primera instancia, a la fracción presentada como cociente durante la caracterización de los números racionales pero, a continuación, como parte-todo al profundizar en su nomenclatura.

¿Cuáles son los elementos de Q?

- Todos los números que pueden ser expresados de la forma $\frac{a}{b}$ con a, b enteros y $b \neq 0$

Estos números $\frac{a}{b}$ llamados **fracciones**, se dice, representan al **cociente** de dos números enteros.

En consecuencia son números racionales:

- Todos los números naturales

¿ $4 \in Q$? Sí, porque $4 = \frac{4}{1}$

¿ $8 \in Q$? Sí, porque $8 = \frac{8}{1}$

- Todos los números enteros

¿ $-7 \in Q$? Sí, porque $-7 = \frac{-7}{1}$ ¿ $0 \in Q$? Sí, porque $0 = \frac{0}{5}$


- Todos los decimales periódicos, como veremos en páginas posteriores.

FRACCIONES

En una fracción $\frac{a}{b}$

Al número entero a se le denomina **numerador**.
 Al número entero $b \neq 0$ se le denomina **denominador**.
 El denominador indica que la unidad ha sido dividida en b partes iguales.
 El numerador indica que de estas partes iguales, se están considerando a .

Así, en la fracción $\frac{2}{3}$



El **denominador** indica que la unidad ha sido dividida en 3 partes iguales.
 El **numerador** indica que de estas 3 partes estamos considerando 2.

Figura 4. Ejemplo de interferencia en los significados de la fracción

Otro tipo de interferencia se aprecia en las actividades matemáticas propuestas por los libros de texto. Tras conceptuar la fracción mediante uno de sus significados, suele ser usual encontrar ejercicios y problemas para resolver con otros

significados distintos al de referencia pero no introducidos teóricamente. Es decir, también se manifiesta en los textos un uso independiente de los significados de la fracción. Por ejemplo, en el caso de LT2005, la fracción se presenta como cociente: "...la existencia de otros números que se llaman números racionales, que son aquellos números que provienen de la división de dos números enteros y son de la forma a/b , con $b \neq 0$." (LT2005, p. 70). Sin embargo, este libro de texto propone más adelante tareas que requieren implícitamente el significado operador para su resolución: "Calcula $4/5$ de 225 m.", o también, " $3/5$ de 60 cuadernos, ¿cuántos cuadernos son?" (LT2005, p. 74).

Representaciones e Ilustraciones

Sobre las representaciones, los tres periodos identificados en el análisis de los significados de la fracción coinciden en emplear mayoritariamente los sistemas de representación simbólico (numérico y algebraico) y verbal. Éste último se emplea esencialmente para hacer lecturas de fracciones representadas en forma simbólica. Sólo se aprecia un uso considerable del lenguaje conjuntista en el periodo B, a través de registros del tipo $Q = \{Q^- \cup 0 \cup Q^+\}$ (LT1982, LT1995) o mediante explicaciones acompañadas de diagramas de Venn.

Las representaciones gráficas vinculadas a la fracción (ilustraciones) se utilizan, principalmente, como recurso para ejemplificar las representaciones simbólica y verbal y para afianzar algún significado concreto de la fracción, destacando más por su variedad de registro que por su uso dilatado. De todas ellas, la más común en la mayoría de los textos es la de carácter pictórico —por ejemplo, diagramas de sectores—, que tiene por objeto primordial transmitir el significado parte-todo. En general, se aprecian diferencias sustanciales en la naturaleza de las distintas ilustraciones empleadas a lo largo de los periodos.

Periodo A

Predominan (a) el segmento de recta, para transmitir el significado medida como resultado de dividir un segmento en partes congruentes y asignar una fracción a cada parte (ver Figura 5, extraída de LT1963A, p. 142); y (b) los organizadores visuales, como los cuadros sinópticos que explicitan la inclusión de los números enteros y fraccionarios en el conjunto de los racionales (LT1963B).

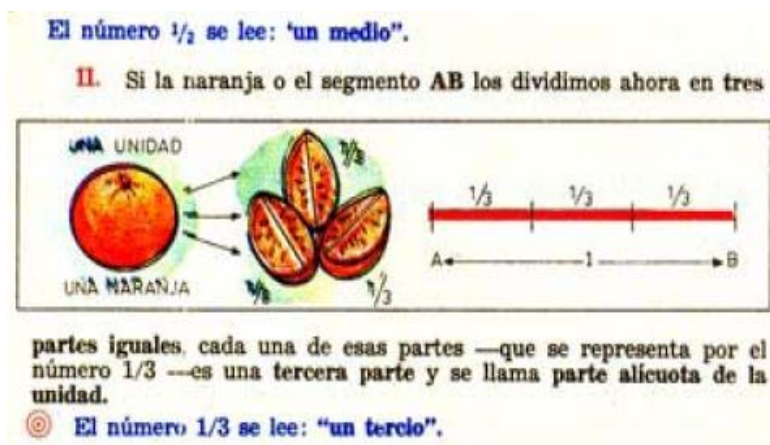


Figura 5. Ejemplo de representación pictórica y segmento de recta

Periodo B

Son característicos de este periodo: (a) los diagramas conjuntistas, para puntualizar la inclusión de conjuntos numéricos como, por ejemplo, $N \subset Z \subset Q$ (LT1975, LT1992), o indicar que el conjunto de los racionales está conformado por los racionales positivos, el cero y los negativos (LT1990); (b) las viñetas, para facilitar el nexo entre la noción de clase de equivalencia y el significado parte-todo (LT1976A, ver Figura 6); (c) las representaciones gráficas en la recta numérica, para vincular fracciones con puntos de la recta (LT1976A, LT1993); y (d) las tablas, para explicar la generación de clases de equivalencia como resultado de multiplicar un par ordenado por un número entero no nulo (LT1982).

82. La siguiente ilustración nos muestra como se adquiere el concepto de número racional.

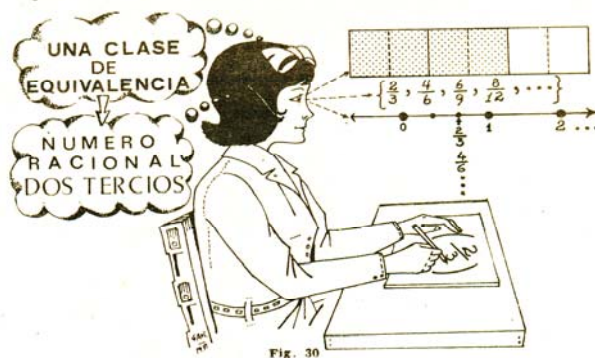


Figura 6. Ejemplo de viñeta y pictograma (LT1976A, p. 123)

Periodo C

Se percibe una intención más clara por aprovechar el potencial didáctico de las ilustraciones. Se mantiene el uso de segmentos de recta (LT2000A), organizadores visuales como mapas conceptuales (LT2003A) o gráficos relacionales (LT2003B), diagramas conjuntistas (LT2003B), representaciones gráficas en la recta numérica (LT2003D) y viñetas (LT2003B, LT2003D y LT2005). Pero además, se introducen otros registros, como son: (a) el diagrama sagital, para el

estudio del significado de operador del número racional (LT2000A); (b) las figuras geométricas (LT2000A), para explicar razones iguales; y (c) el sistema de ejes coordenados (LT2003B), utilizado para introducir la noción de fracciones equivalentes. En la Figura 7 mostramos un ejemplo de representación pictórica (LT1997, p. 100) y otro de diagrama sagital (LT2000A, p. 129).

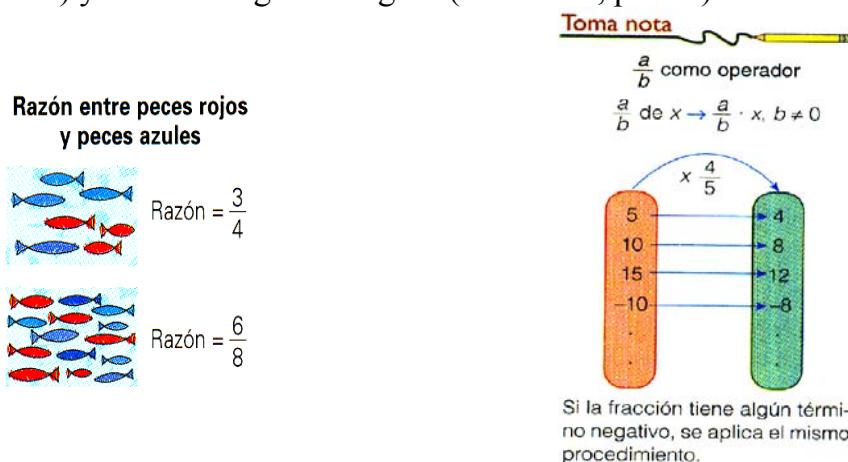


Figura 7. Ejemplos de representación pictórica y de diagrama sagital

Transformaciones y Conversiones

Las transformaciones en el sistema de representación simbólico son las de mayor incidencia en los tres periodos. Ejemplos de ellas son: la simplificación para encontrar el representante canónico, la reducción de fracciones heterogéneas a mínimo común denominador, la generación de fracciones equivalentes, la realización del cociente indicado (periodos B y C), la construcción de clases de equivalencia o la aplicación ocasional de la fracción como operador (periodo C), entre otras (LT1963A, LT1994, LT1997). A partir del periodo C también destaca la presencia de transformaciones en el sistema de representación gráfico pictórico (LT1995), sobre todo para ilustrar fracciones equivalentes. La Figura 8 (LT1995, p. 95) muestra un ejemplo de ello.

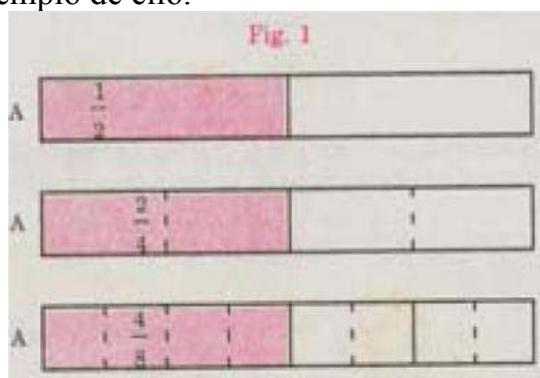


Figura 8. Transformación pictórica en la equivalencia de fracciones

Respecto a las *conversiones*, son diversas en los tres periodos y más acentuadas en los periodos A y B en comparación con el C. Las conversiones mayoritarias

acontecen entre los sistemas de representación simbólico, verbal y gráfico en sus modalidades pictórico y recta numérica. Con una clara función mediadora, el registro simbólico numérico también suele actuar como enlace entre las conversiones cuando éste no aparece como representación origen o destino de la conversión. La Figura 9 ilustra esta situación con un esquema de los principales tipos de conversiones y la posición central del registro simbólico numérico en ellas. Asimismo, muestra dos ejemplos distintos de conversiones desde lo gráfico pictórico a lo simbólico numérico. El primer ejemplo, perteneciente al periodo A, enfatiza el significado medida (LT1963A, p. 185), mientras que el segundo, propio del periodo C, está destinado a practicar la conversión bajo el significado parte-todo (LT2000B, p. 119).

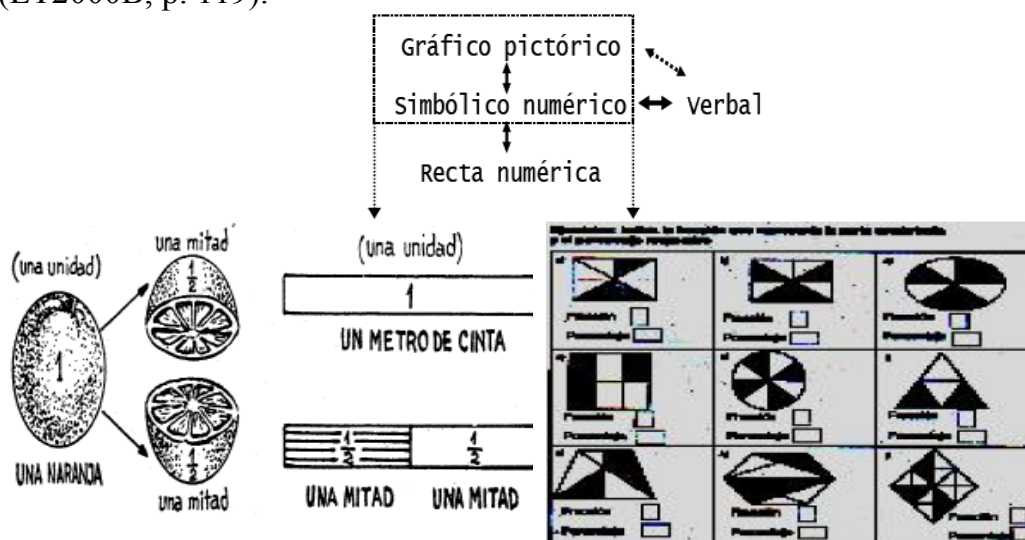


Figura 9. Mediación de la representación simbólica y ejemplos

Fenomenología de la Fracción

A continuación, dirigimos la atención hacia el carácter histórico y las aplicaciones de la fracción en los libros de texto.

Elementos Históricos

La presentación de la fracción en los textos analizados refleja un claro divorcio con la componente histórica de este conocimiento matemático, especialmente durante el periodo B. De manera específica, tan sólo cuatro libros (LT1974, LT1982, LT1997, LT2005) hacen alusión a hechos históricos relacionados con la fracción continua, los decimales, la división de fracciones o el origen etimológico de la palabra *quotiente*, aunque siempre de forma tangencial y sin hacer un uso explícito de ello como organizador curricular. En el resto de textos escolares no se aprecia rastro alguno de elementos históricos relacionados con el número racional o la fracción.

Contextualización y Aplicaciones

En los periodos A y B el tratamiento es totalmente descontextualizado. En el periodo A, las aplicaciones de la fracción a la vida cotidiana son ocasionales y se restringen a presentar situaciones con objetos físicos, como las que involucran partes alícuotas de una naranja tomada como unidad (LT1963A). En el periodo B, tan sólo en algún caso se apela a situaciones del tipo “dividir 5 panes entre 6 personas” (LT1990) para justificar la necesidad de ampliar el conjunto de los enteros a los racionales.

A diferencia de los periodos anteriores, en el C se percibe una cierta evolución hacia la contextualización, por ejemplo al considerarse situaciones reales cotidianas del tipo “comprar medio kilogramo de azúcar” o “son las ocho y cuarto de la mañana” (LT2005). En algunos libros se incluyen incluso secciones completas de problemas contextualizados como “Las matemáticas... de todos los días” (LT2003B) o “Matemáticas en la práctica” (LT1997).

Elementos Metodológicos

En el periodo A, los textos desarrollan una enseñanza basada en el enunciado de conceptos, en la formulación de ejemplos y en la proposición de ejercicios reiterativos que incluyen interrogantes abiertas como “¿qué es una fracción?” (LT1963A) o “¿qué indica el numerador y el denominador de una fracción?” (LT1963B). En este punto, llama la atención que se propongan cuestiones de esta naturaleza cuando en los textos analizados no se encuentran los elementos teóricos ni los significados necesarios para elaborar una conceptualización completa del número racional.

En el periodo B, se enfatiza en los conceptos recurriendo al razonamiento lógico y a la ejemplificación. La proposición de múltiples ejercicios resueltos y propuestos revela la intención de adiestrar al estudiante en el cálculo operativo. En algunos textos, se recomienda al alumno enfatizar en la necesidad de practicar con lápiz y papel ejercicios que lo llevarán a aprender haciendo (LT1975, LT1976B).

En el periodo C, los textos se ven en la necesidad de adecuarse a dos enfoques curriculares distintos. De un lado, un programa de objetivos conductuales, y de otro, una propuesta de diseño curricular por competencias y capacidades. Algunos libros de este periodo también pretenden satisfacer las demandas de una instrucción preuniversitaria basada en la automatización de algoritmos y la memorización de fórmulas (LT2003A). En términos genéricos, la enseñanza en este periodo está organizada de acuerdo con las siguientes fases: (a) entrada y motivación, (b) sección de conocimientos previos, (c) momento básico de ejercicios resueltos y propuestos, (d) momento de repaso y extensión, y (e) momento de evaluación (LT2000A, LT2003B).

DISCUSIÓN

En los libros de texto analizados destaca el predominio del significado parte-todo en la conceptualización de la fracción. El hecho de compartir protagonismo con los significados de medida y cociente en los periodos A y B, respectivamente, y de mostrarse como principal opción para el periodo C, respalda la idea del origen didáctico del significado parte-todo como recurso introducido por el sistema educativo para abreviar el periodo de instrucción de la fracción y facilitar su enseñanza (Escolano y Gairín, 2007).

El fenómeno de interferencia observado en el uso de los significados de la fracción pone de manifiesto las limitaciones epistemológicas de algunos de los libros de texto analizados. Este hecho, unido a las evidencias empíricas expuestas recientemente en Gallardo, González y Quispe (2008a) acerca de la presencia del mismo fenómeno de interferencia a nivel cognitivo, nos hace pensar en una probable influencia negativa de estos libros de texto en el desarrollo de la comprensión de la fracción en Perú. En nuestra opinión, se trata de un ejemplo del potencial papel que juegan los libros de texto en el fomento de inconsistencias en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Kajander y Lovric, 2009).

El propósito mantenido en los tres periodos de mostrar el conjunto de los números racionales como una entidad formalizada obliga a la mayoría de los libros de textos analizados a enfatizar en la representación simbólica (algebraica y numérica). Como consecuencia, el registro gráfico (ilustraciones) aparece subordinado al simbólico, fundamentalmente con propósitos explicativos y de ejemplificación. De ello podemos concluir que el uso de la representación (ilustraciones, transformaciones y conversiones) no se dirige explícitamente a completar o cubrir en lo posible la estructura epistemológica de la fracción, como cabría esperarse según nuestros planteamientos. Por el contrario, su uso tiene más bien el propósito didáctico de servir de apoyo para ilustrar y afianzar algún significado concreto —sobre todo, la parte-todo— e instruir en la manipulación simbólica de las fracciones.

La realidad fenomenológica descrita en los libros de texto demanda una mayor atención sobre el carácter histórico y las aplicaciones de las fracciones. El periodo C revela, respecto a los anteriores, una mayor conciencia acerca de la importancia de contextualizar los contenidos matemáticos para lograr una mejor comprensión. No obstante, en ningún caso se llega a analizar en profundidad el vínculo fracción-tarea centrado en las relaciones de la fracción con las situaciones en las que tiene sentido su uso. Ello exigirá, entre otras cosas, trabajar aspectos de modelización de los fenómenos y de matematización de la realidad cotidiana, características que no se encuentran en los textos analizados.

La visible reducción de formalización apreciada en la metodología, desde el periodo A hasta el C, no elimina el carácter tradicional con el que se presenta la fracción en los libros de texto revisados. En líneas generales, aún se mantiene la estrategia de una exposición teórica limitada en significados seguida de la reso-

lución mayoritaria de ejercicios descontextualizados en los que interviene un número reducido de representaciones.

En definitiva, aunque la configuración adoptada por los libros de texto peruanos tenga como objetivo el desarrollo de la comprensión de la fracción, bajo la óptica de nuestro modelo es restringida. Como alternativa, sugerimos las siguientes acciones a considerar por estos textos: (a) realización de un análisis epistemológico y fenomenológico de la fracción; (b) identificación de los elementos fenómeno-epistemológicos de la fracción influyentes a nivel cognitivo, que son los responsables, entre otros aspectos, de la caracterización de los alumnos en términos de comprensión; (c) organización de las situaciones y tareas matemáticas que dan sentido a la fracción, en base al resultado de los análisis previos; (d) garantía de que los estudiantes se enfrenten a situaciones pertenecientes a las distintas categorías surgidas del cruce de las estructuras epistemológica y fenomenológica de la fracción; y (e) interpretación de la comprensión de los escolares en términos de capacidad para enfrentar con éxito tales situaciones. A través de este enfoque quedaría garantizado, entre otros aspectos, la introducción de los cinco significados asociados a la fracción, la eliminación de interferencias entre significados, el uso de las representaciones con fines epistemológicos y el desarrollo del vínculo fracción-situación.

CONCLUSIÓN

El tratamiento dado a la fracción en los textos escolares analizados pone de manifiesto una situación en la que hay que reconocer aspectos positivos para la comprensión de la fracción, como son la progresiva consideración de un mayor número de significados, el uso variado de ilustraciones con propósito didáctico, la creciente introducción de situaciones contextualizadas o la incipiente disminución del formalismo en la presentación de la fracción. Ahora bien, a pesar de estos avances, las carencias manifestadas por estos libros todavía resultan evidentes, sobre todo a nivel epistemológico y fenomenológico, poniéndose de relieve una situación curricular sustancialmente mejorable en lo que respecta a la enseñanza para la comprensión de la fracción en Perú. Por nuestra parte, con la intención de mejorar esta situación, hemos presentado algunos referentes teórico-metodológicos, derivados de un modelo operativo para la comprensión del conocimiento matemático, que pueden resultar eficaces en el desarrollo de la comprensión de la fracción.

REFERENCIAS

Arellano, T. (2006). La educación matemática en el Perú. *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 5, 53-89.

- Behr, M., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 233-296). New York: MacMillan Publishing Company.
- Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.
- Escolano, R. y Gairín, J. M. (2005). Modelos de medida para la enseñanza de números racionales en educación primaria. *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 1, 17-35.
- Escolano, R. y Gairín, J. M. (2007). Enseñanza del número racional positivo en educación primaria: propuesta didáctica con modelos de medida. En E. Castro y J. L. Lupiáñez (Eds.), *Investigaciones en Educación Matemática: pensamiento numérico* (pp. 185-212). Granada, España: Editorial Universidad de Granada.
- Kajander, A. y Lovric, M. (2009). Mathematics textbooks and their potential role in supporting misconceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(2), 173-181.
- Kieren, T. (1993). Rational and fractional numbers: from quotient fields to recursive understanding. En T. P. Carpenter, E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: an integration of research* (pp. 49-84). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Gallardo, J. y González, J. L. (2006a). Assessing understanding in mathematics: steps towards an operative model. *For the Learning of Mathematics*, 26(2), 10-15.
- Gallardo, J. y González, J. L. (2006b). Una aproximación operativa al diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. *PNA*, 1(1), 21-31.
- Gallardo, J., González, J. L. y Quispe, W. (2008a). Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración. Un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, 11(3), 355-382.
- Gallardo, J., González, J. L. y Quispe, W. (2008b). Rastros de comprensión en la acción matemática. La dimensión hermenéutica de un modelo operativo para la interpretación en matemáticas. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. J. Blanco (Eds.), *Actas del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 283-293). Badajoz, España: Sociedad Extremeña de Educación Matemática y SEIEM.
- Gómez, B. (2009). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en didáctica de las matemáticas. En M. J. González, M. T.

- González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 21-35). Santander, España: SEIEM.
- Quispe, W. (2008). *Interferencias en la comprensión de los significados del número racional*. Tesis de Maestría. Cusco, Perú: Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco-CUES.
- Unidad de Medición de la Calidad Educativa del Ministerio de Educación (2001). *Como rinden los estudiantes peruanos en comunicación y matemática. Resultados de la evaluación nacional 2001. Informe pedagógico: sexto grado de primaria*. Lima, Perú: Autor.
- Unidad de Medición de la Calidad Educativa del Ministerio de Educación del Perú (2004). *Evaluación nacional del rendimiento estudiantil 2004. Informe pedagógico de resultados. Formación matemática: tercer grado de secundaria y quinto grado de secundaria*. Lima, Perú: Autor.

Una versión previa de este documento se publicó originalmente como Quispe, W. y Gallardo, J. (2009). Una aproximación a la comprensión de la fracción en Perú a través de los libros de texto. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Actas del XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 389-401). Santander, España: SEIEM.

Wenceslao Quispe
Universidad Nacional del Altiplano de Puno
collasuyow@yahoo.com

Jesús Gallardo
Universidad de Málaga
gallardoromero@telefonica.es

José Luis González
Universidad de Málaga
gmari@uma.es