



UNIVERSIDAD  
DE MÁLAGA



**ESCUELA DE INGENIERÍAS INDUSTRIALES**

**Ingeniería mecánica, térmica y de fluidos**

**Mecánica de fluidos**

# **TRABAJO FIN DE GRADO**

**Mejora de la metodología docente en campus virtual para la consecución de los objetivos de aprendizaje en asignaturas de turbomáquinas hidráulicas.**

Grado en

**GRADO EN INGENIERÍA DE ORGANIZACIÓN INDUSTRIAL**

Autor: Nicolás Ankersmit Moreno

Tutor: Jose Manuel Lopez Alonso

Cotutor: Carlos del Pino Peñas

MÁLAGA, 12 de junio de 2.023

## INDICE

|        |  |    |
|--------|--|----|
| 1.     | INTRODUCCIÓN.....                                    | 4  |
| 1.1.   | Objeto y alcance del TFG.....                        | 4  |
| 1.2.   | Objetivos de aprendizaje.....                        | 4  |
| 1.3.   | Motivación del trabajo.....                          | 5  |
| 1.4.   | Estructura del trabajo.....                          | 6  |
| 1.5.   | Metodología.....                                     | 7  |
| 2.     | TRIGONOMETRIA.....                                   | 8  |
| 2.1.   | Introducción.....                                    | 8  |
| 2.2.   | Ejercicios propuestos y resolución paso a paso.....  | 8  |
| 2.2.1. | Pregunta 1.....                                      | 9  |
| 2.2.2. | Pregunta 2.....                                      | 10 |
| 2.2.3. | Pregunta 3.....                                      | 11 |
| 2.2.4. | Pregunta 4.....                                      | 13 |
| 2.2.5. | Pregunta 5.....                                      | 15 |
| 2.2.6. | Pregunta 6.....                                      | 17 |
| 3.     | DERIVADAS.....                                       | 20 |
| 3.1.   | Introducción.....                                    | 20 |
| 3.2.   | Ejercicios propuestos y resolución paso a paso.....  | 20 |
| 3.2.1. | Pregunta 1.....                                      | 20 |
| 3.2.2. | Pregunta 2.....                                      | 21 |
| 3.2.3. | Pregunta 3.....                                      | 21 |
| 3.2.4. | Pregunta 4.....                                      | 22 |
| 3.2.5. | Pregunta 5.....                                      | 23 |
| 3.2.6. | Pregunta 6.....                                      | 25 |
| 4.     | DISEÑO.....  | 28 |
| 4.1.   | Introducción.....                                    | 28 |
| 4.2.   | Ejercicios propuestos y resolución paso a paso.....  | 28 |
| 4.2.1. | Pregunta 1.....                                      | 29 |
| 4.2.2. | Pregunta 2.....                                      | 30 |
| 4.2.3. | Pregunta 3.....                                      | 33 |
| 4.2.4. | Pregunta 4.....                                      | 35 |
| 4.2.5. | Pregunta 5.....                                      | 38 |
| 4.2.6. | Pregunta 6.....                                      | 40 |
| 5.     | INSTALACIONES.....                                   | 44 |
| 5.1.   | Introducción.....                                    | 44 |
| 5.2.   | Problemas de instalaciones con una turbomáquina..... | 44 |

|        |                                   |    |
|--------|-----------------------------------|----|
| 5.2.1. | Pregunta 1 .....                  | 44 |
| 5.2.2. | Pregunta 2 .....                  | 47 |
| 5.2.3. | Pregunta 3 .....                  | 51 |
| 5.2.4. | Pregunta 4 .....                  | 56 |
| 5.2.5. | Pregunta 5 .....                  | 58 |
| 5.2.6. | Pregunta 6 .....                  | 61 |
| 5.3.   | Problemas de grupo de bombeo..... | 64 |
| 5.3.1. | Pregunta 1 .....                  | 64 |
| 5.3.2. | Pregunta 2 .....                  | 65 |
| 5.3.3. | Pregunta 3 .....                  | 66 |
| 5.3.4. | Pregunta 4 .....                  | 67 |
| 5.3.5. | Pregunta 5 .....                  | 68 |
| 5.3.6. | Pregunta 6 .....                  | 69 |
| 6.     | CONCLUSIONES .....                | 71 |
| 7.     | TRABAJOS FUTUROS.....             | 72 |
|        | BIBLIOGRAFÍA.....                 | 73 |
|        | ANEXOS .....                      | 74 |
|        | ANEXO I .....                     | 74 |
|        | ANEXO II .....                    | 74 |
|        | ANEXO III .....                   | 75 |
|        | ANEXO IV.....                     | 76 |

# 1. INTRODUCCIÓN

## 1.1. Objeto y alcance del TFG

El objeto del presente Trabajo de Fin de Grado (TFG) es analizar, evaluar y proponer mejoras en la metodología docente utilizada en el campus virtual para las asignaturas de turbomáquinas hidráulicas. El enfoque se centra en optimizar el proceso de enseñanza-aprendizaje, brindando a los estudiantes nuevas herramientas y recursos necesarios para comprender y aplicar los conceptos relacionados con las turbomáquinas hidráulicas de manera efectiva.

El alcance del TFG abarca diferentes aspectos relacionados con la mejora de la metodología docente. En primer lugar, se llevará a cabo un análisis exhaustivo de la metodología docente actual, identificando sus fortalezas y debilidades en relación con la consecución de los objetivos de aprendizaje. Tras un exhaustivo análisis de los errores más frecuentes que los estudiantes cometen en la actualidad, los cuales pueden ser atribuidos a la metodología de aprendizaje vigente, hemos identificado la oportunidad de aprovechar las funcionalidades ofrecidas por el campus virtual para mejorar el proceso de aprendizaje y prevenir la aparición de dichos errores.

Se investigarán herramientas y recursos digitales que puedan complementar y enriquecer la enseñanza de turbomáquinas hidráulicas, promoviendo la comprensión, la interacción y la participación de los estudiantes.

En resumen, el objeto y alcance del TFG consisten en investigar, analizar y proponer mejoras en la metodología docente en el campus virtual para las asignaturas de turbomáquinas hidráulicas, con el objetivo de optimizar el proceso de enseñanza-aprendizaje y mejorar la experiencia educativa de los estudiantes en este campo específico.

## 1.2. Objetivos de aprendizaje

En concreto, hay seis objetivos de aprendizaje en la asignatura que son:

- O1.- Analizar el flujo de fluido en una máquina centrífuga.
- O2.- Resolver los flujos que aparecen en sistemas complejos de tuberías.
- O3.- Seleccionar bombas/turbinas para instalaciones hidráulicas.
- O4.- Escribir informes técnicos apropiadamente.
- O5.- Analizar sistemas de instalaciones hidráulicas aportando aspectos novedosos.
- O6.- Manejar software de cálculo numérico para la resolución de problemas de fluidos.

Pues bien, el alcance de este trabajo sólo se centrará en los tres primeros objetivos de aprendizaje.

Se ha de recordar que estos tres objetivos de aprendizaje, tal y como aparecen en la guía docente de la asignatura, se relacionan con estas competencias básicas (CB), generales (CG) y específicas (CE) del grado en ingeniería en organización industrial:

- CB2 Que los estudiantes sepan aplicar sus conocimientos a su trabajo o vocación de una forma profesional y posean las competencias que suelen demostrarse por medio de la elaboración y defensa de argumentos y la resolución de problemas dentro de su área de estudio.
- CB3 Que los estudiantes tengan la capacidad de reunir e interpretar datos relevantes (normalmente dentro de su área de estudio) para emitir juicios que incluyan una reflexión sobre temas relevantes de índole social, científica y ética.
- CB4 Que los estudiantes puedan transmitir información, ideas, problemas y soluciones a un público tanto especializado como no especializado
- CB5 Que los estudiantes hayan desarrollado aquellas habilidades de aprendizaje necesarias para emprender estudios posteriores con un alto grado de autonomía.
- CG1 Capacidad para aplicar conocimientos de: Matemáticas, Ciencias e Ingeniería.
- CG2 Capacidad para diseñar y conducir experimentos y también para analizar e interpretar la información.
- CG9 Comprensión de la responsabilidad ética y profesional
- CE Conocer y aplicar los fundamentos de los sistemas y máquinas fluidodinámicas.

### 1.3. Motivación del trabajo

La motivación que me ha llevado realizar este TFG es principalmente para la obtención de los créditos que otorga la asignatura de Trabajo Fin de Grado y terminar así todos los créditos para la obtención del título del grado.

También el poder aplicar y desarrollar las habilidades y conocimientos adquiridos a lo largo de la carrera, poner en práctica los conceptos teóricos y las competencias específicas relacionadas con el área de las máquinas e instalaciones, lo que contribuye a consolidar y ampliar la formación académica.

Y finalmente, contribuir al conocimiento existente realizando una aportación original y significativa al conocimiento existente en el campo de la mecánica de fluidos, generando nuevas ideas, dejando así un legado académico.

#### 1.4. Estructura del trabajo

El trabajo se estructura en seis capítulos y cuatro anexos, con el objetivo de proporcionar una descripción exhaustiva y minuciosa de todas las actividades llevadas a cabo. A continuación, se muestra, la distribución del trabajo:

- Capítulo 1, en este primer capítulo nos encontramos con una pequeña introducción, dónde se explica el objetivo del trabajo y la justificación de la realización de este.
- Capítulo 2, en este segundo capítulo nos encontramos con una serie de ejercicios de tipo test diseñados para cubrir las diferentes operaciones de cálculo trigonométrico que pueden aparecer al resolver problemas de diseño de turbomáquinas.
- Capítulo 3, en este tercer capítulo nos encontramos con una serie de ejercicios de tipo test diseñados para desarrollar operaciones de cálculo de derivadas que pueden aparecer al resolver problemas de diseño de turbomáquinas.
- Capítulo 4, este cuarto capítulo contiene una serie de ejercicios de tipo test diseñados para abordar problemas de diseño de rodets de bombas o turbinas centrífugas. El objetivo es que, al realizarlos, el estudiante se haya enfrentado en al menos una ocasión algún ejemplo de problemas que existen para diseñar el rodete de una bomba o turbina centrífuga.
- Capítulo 5, este quinto capítulo está compuesto de dos partes, una primera parte sobre problemas de instalaciones con una turbomáquina, dónde se trabaja la obtención de las ecuaciones de nodos y mallas para la resolución de estos problemas, y una segunda parte de problemas de grupo de bombeo, dónde se trabaja las diferentes distribuciones que se pueden colocar las turbomáquinas.
- Capítulo 6, y en este último capítulo se realiza una serie de conclusiones tras finalizar el trabajo y una vista al futuro para añadir posibles mejoras a este.
- Anexos, nos encontramos con cuatro anexos dónde el primero es el formulario necesario para el diseño de rodets de turbomáquinas. Los otros tres anexos son los códigos desarrollados en MATLAB para la resolución de problemas del capítulo 5.

El proceso de selección de respuestas incorrectas en los problemas que se exponen en cada capítulo se lleva a cabo considerando los cálculos que los alumnos realizan con mayor frecuencia, lo cual resulta en la identificación de errores comunes. Esta estrategia se basa en el análisis exhaustivo de los patrones de errores cometidos por los estudiantes a lo largo del tiempo. Al recopilar datos de múltiples sesiones de evaluación, se detectan las tendencias y los conceptos erróneos más recurrentes. Este aspecto no busca generar confusión en el estudiante, sino más bien sorpresa al no haber acertado una respuesta que quizás daba por segura. Creemos que esto puede despertar una mayor curiosidad por el proceso de resolución del problema.

### 1.5. Metodología

La metodología seguida para el desarrollo de este TFG se resume principalmente en, la definición del tema, elegido entre el tutor y yo mismo, una exhaustiva revisión bibliográfica, realizando una búsqueda en fuentes académicas, libros y otros recursos para obtener una comprensión sólida sobre el área de conocimiento, una recopilación y análisis de datos, en este ámbito el tutor y el cotutor me han ayudado mucho, al ser ellos quienes conocen a los estudiantes y los errores más comunes que se cometen, con esta recopilación de datos realizamos la redacción de la memoria con los resultados obtenidos del análisis de los datos [1-10]. Y, por último, tenemos la presentación y defensa del TFG, exponiendo los resultados que hemos obtenido.

## 2. TRIGONOMETRIA

### 2.1. Introducción

La resolución de los "triángulos de velocidad" que aparecen en problemas de diseño de bombas y turbinas necesita la aplicación de relaciones trigonométricas. Estas operaciones pertenecen a la matemática básica, y en principio no deberían suponer ningún problema para estudiantes de un grado de ingeniería. Sin embargo, es común encontrar estudiantes que no hacen bien estos ejercicios debido a una incorrecta aplicación de estas fórmulas, especialmente en casos que no son tan habituales, como aquellos donde aparece un ángulo obtuso, o se han de calcular los elementos del triángulo de velocidades a partir de dos ángulos y un lado.

Esta sección contiene una serie de ejercicios de tipo test diseñados para cubrir las diferentes operaciones de cálculo trigonométrico que pueden aparecer al resolver problemas de diseño de turbomáquinas.

El objetivo principal de estos ejercicios es brindar al estudiante la oportunidad de enfrentarse al menos una vez a cada una de estas situaciones, minimizando así el riesgo de cometer errores en este tipo de problemas. Mediante la resolución de estos ejercicios, se busca fortalecer la comprensión y la aplicación precisa de las fórmulas trigonométricas, lo que proporcionará una base sólida para abordar de manera eficiente y precisa los problemas de diseño de turbomáquinas.

### 2.2. Ejercicios propuestos y resolución paso a paso

A continuación, se presentan los ejercicios diseñados junto con una lista de posibles soluciones donde solo una respuesta es correcta. Estos enunciados han sido redactados cuidadosamente, priorizando una descripción clara y concisa de los datos e incógnitas del problema para que se puedan entender sin ambigüedades. Cada ejercicio incluye una resolución paso a paso, junto con gráficas ilustrativas de los triángulos de velocidad que se están resolviendo. Estos procesos de resolución también estarán disponibles para los estudiantes al finalizar la actividad en el campus virtual. Las respuestas incorrectas han sido construidas a partir de errores comunes en los estudiantes de este tipo de asignaturas.

### 2.2.1. Pregunta 1

Dada una bomba sin prerrotación, con una velocidad absoluta a la entrada del rotor,  $v_1 = 5 \text{ m/s}$ , y una velocidad de arrastre a la entrada,  $u_1 = 4,5 \text{ m/s}$ . Obtenga los demás elementos del triángulo de entrada:  $\beta_1$  y  $w_1$ .

Posibles respuestas:

- a.  $w_1 = 6,05 \text{ m/s}$   
 $\beta_1 = 41,98^\circ$
- b.  $w_1 = 3,34 \text{ m/s}$   
 $\beta_1 = 41,98^\circ$
- c.  $w_1 = 3,01 \text{ m/s}$   
 $\beta_1 = 48,01^\circ$
- d.  $w_1 = 6,73 \text{ m/s}$   
 $\beta_1 = 48,01^\circ$**
- e.  $w_1 = 7,47 \text{ m/s}$   
 $\beta_1 = 48,01^\circ$
- f. NINGUNA ES CORRECTA

#### 2.2.1.1. Respuesta pregunta 1

Para la resolución de este problema hacemos uso del triángulo de velocidades de la bomba a la entrada del rotor. En bombas sin prerrotación, el ángulo que forma la velocidad absoluta con la velocidad de arrastre a la entrada del rotor es  $\alpha_1 = 90^\circ$ , situación que podemos ver en la Figura 1:

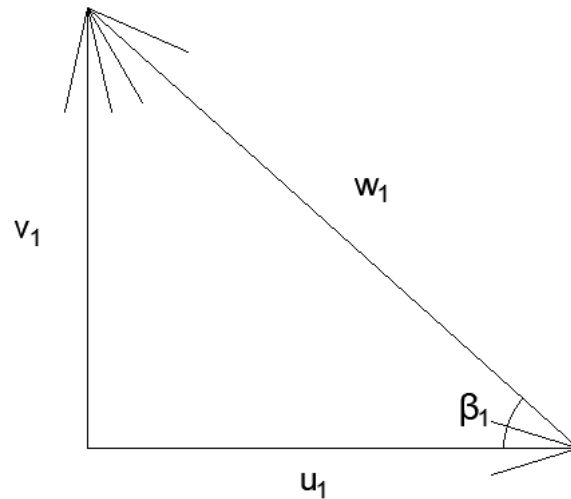


Figura 1. Triángulo de velocidades a la entrada

1º

$$\tan \beta_1 = \frac{v_1}{u_1} = \frac{5}{4,5} = 1,1 \rightarrow \beta_1 = 48,01^\circ$$

2º

$$\cos \beta_1 = \frac{u_1}{w_1} \rightarrow w_1 = \frac{u_1}{\cos \beta_1} = \frac{4,5}{\cos 48,01} = 6,73 \text{ m/s}$$

### 2.2.2. Pregunta 2

Dada una bomba sin prerrotación, cuya velocidad absoluta a la entrada del rotor es  $v_1 = 2,8 \text{ m/s}$ , y que tiene un ángulo  $\beta_1 = 65^\circ$  entre la velocidad relativa y de arrastre a la entrada. Obtenga los otros elementos del triángulo de velocidades a la entrada:  $w_1$  y  $u_1$ .

Posibles respuestas:

- a.  $w_1 = 6,62 \text{ m/s}$   
 $u_1 = 15,68 \text{ m/s}$
- b.  $w_1 = 1,18 \text{ m/s}$   
 $u_1 = 0,5 \text{ m/s}$
- c.  $w_1 = 3,089 \text{ m/s}$   
 $u_1 = 1,305 \text{ m/s}$**
- d.  $w_1 = 3,089 \text{ m/s}$   
 $u_1 = 3,41 \text{ m/s}$

e.  $w_1 = 2,54 \text{ m/s}$

$u_1 = 2,8 \text{ m/s}$

f. NINGUNA ES CORRECTA

### 2.2.2.1. Respuesta pregunta 2

Para la resolución de este problema hacemos uso del triángulo de velocidades a la entrada de la bomba. Al igual que en el problema anterior, la bomba no tiene prerrotación, por lo que el ángulo que forma la velocidad absoluta con la velocidad de arrastre a la entrada del rotor es  $\alpha_1 = 90^\circ$  (ver figura 2):

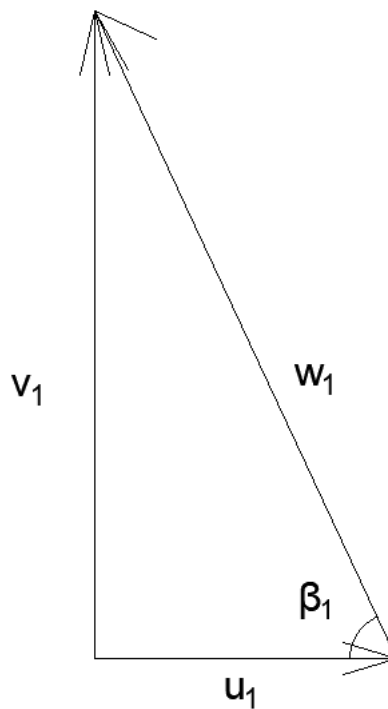


Figura 2. Triángulo de velocidades a la entrada

1º

$$\sin \beta_1 = \frac{v_1}{w_1} \rightarrow w_1 = \frac{v_1}{\sin \beta_1} = \frac{2,8}{\sin 65} = 3,089 \text{ m/s}$$

2º

$$\cos \beta_1 = \frac{u_1}{w_1} \rightarrow u_1 = w_1 \cdot \cos \beta_1 = 3,089 \cdot \cos 65 = 1,305 \text{ m/s}$$

### 2.2.3. Pregunta 3

Dada una bomba que está prerrotada a favor de la velocidad de arrastre con un ángulo  $\alpha_1=20^\circ$ , con velocidad meridional a la entrada  $v_{m1}=2,5 \text{ m/s}$  y ángulo entre las velocidades de

arrastre y relativa  $\beta_1 = 20^\circ$ . Obtenga los otros elementos del triángulo de velocidades a la entrada:  $w_1$ ,  $v_1$  y  $u_1$ .

Posibles respuestas:

a.  $w_1 = 7,31 \text{ m/s}$

$v_1 = 2,66 \text{ m/s}$

$u_1 = 13,74 \text{ m/s}$

b.  $w_1 = 7,31 \text{ m/s}$

$v_1 = 2,66 \text{ m/s}$

$u_1 = 1,82 \text{ m/s}$

c.  $w_1 = 0,86 \text{ m/s}$

$v_1 = 2,66 \text{ m/s}$

$u_1 = 7,78 \text{ m/s}$

d.  $w_1 = 7,31 \text{ m/s}$

$v_1 = 7,31 \text{ m/s}$

$u_1 = 25,74 \text{ m/s}$

e.  **$w_1 = 7,31 \text{ m/s}$**

**$v_1 = 7,31 \text{ m/s}$**

**$u_1 = 13,74 \text{ m/s}$**

f. NINGUNA ES CORRECTA

#### 2.2.3.1. *Respuesta pregunta 3*

Para la resolución de este problema hacemos uso del triángulo de velocidades a la entrada de la bomba, cuando el ángulo que forma la velocidad absoluta y la velocidad relativa con la velocidad de arrastre a la entrada del rotor es  $\alpha_1 = 20^\circ$  y  $\beta_1 = 20^\circ$ , respectivamente, situación que podemos ver en la Figura 3:

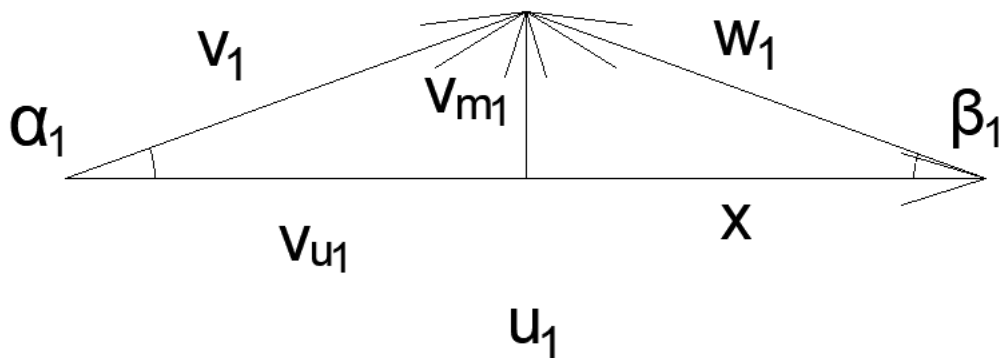


Figura 3. Triángulo de velocidades a la entrada

1º

$$\tan \alpha_1 = \frac{v_{m1}}{v_{u1}} \rightarrow v_{u1} = \frac{v_{m1}}{\tan \alpha_1} = \frac{2,5}{\tan 20} = 6,87 \text{ m/s}$$

$$v_1 = \sqrt{v_{u1}^2 + v_{m1}^2} = \sqrt{6,87^2 + 2,5^2} = 7,31 \text{ m/s}$$

2º

$$\tan \beta_1 = \frac{v_{m1}}{x} \rightarrow x = \frac{v_{m1}}{\tan \beta_1} = \frac{2,5}{\tan 20} = 6,87 \text{ m/s}$$

$$u_1 = v_{u1} + x = 6,87 + 6,87 = 13,74 \text{ m/s}$$

3º

$$\sin \beta_1 = \frac{v_{m1}}{w_1} \rightarrow w_1 = \frac{v_{m1}}{\sin \beta_1} = \frac{2,5}{\sin 20} = 7,31 \text{ m/s}$$

#### 2.2.4. Pregunta 4

Dada una bomba con prerrotación a favor de la velocidad de arrastre, cuyos valores de la velocidad absoluta, velocidad meridional y ángulo entre las velocidades de arrastre y relativa a la entrada del rotor son respectivamente  $v_1 = 6,7 \text{ m/s}$ ,  $v_{m1} = 1,8 \text{ m/s}$  y  $\beta_1 = 15^\circ$ . Obtenga los otros elementos del triángulo de velocidades a la entrada:  $u_1$ ,  $w_1$  y  $\alpha_1$ .

Posibles respuestas:

a.  $w_1 = 6,95 \text{ m/s}$

$\alpha_1 = 15,58^\circ$

$u_1 = 13,16 \text{ m/s}$

- b.  $w_1 = 6,95 \text{ m/s}$   
 $\alpha_1 = 74,29^\circ$   
 $u_1 = 13,65 \text{ m/s}$
- c.  $w_1 = 0,47 \text{ m/s}$   
 $\alpha_1 = 74,29^\circ$   
 $u_1 = 13,65 \text{ m/s}$
- d.  $w_1 = 6,95 \text{ m/s}$   
 $\alpha_1 = 15,58^\circ$   
 $u_1 = 13,65 \text{ m/s}$
- e.  $w_1 = 0,47 \text{ m/s}$   
 $\alpha_1 = 15,58^\circ$   
 $u_1 = 6,9 \text{ m/s}$
- f. NINGUNA ES CORRECTA

2.2.4.1. *Respuesta pregunta 4*

Para la resolución de este problema hacemos uso del triángulo de velocidades a la entrada de la bomba, cuando el ángulo que forma la velocidad relativa con la velocidad de arrastre a la entrada del rotor es  $\beta_1 = 15^\circ$ , que podemos ver en la siguiente Figura 4:

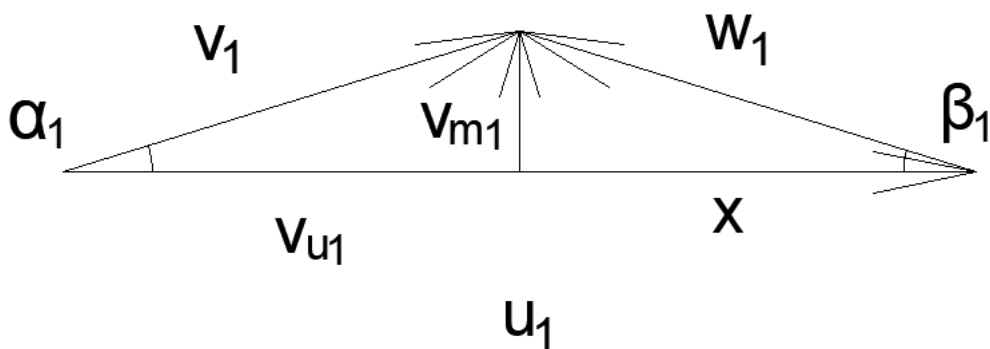


Figura 4. Triángulo de velocidades a la entrada

1º

$$\sin \beta_1 = \frac{v_{m1}}{w_1} \rightarrow w_1 = \frac{v_{m1}}{\sin \beta_1} = \frac{1,8}{\sin 15} = 6,95 \text{ m/s}$$

2º

$$\sin \alpha_1 = \frac{v_{m1}}{v_1} = \frac{1,8}{6,7} = 0,27 \rightarrow \alpha_1 = 15,58^\circ$$

3º

$$\cos \beta_1 = \frac{x}{w_1} \rightarrow x = w_1 \cdot \cos \beta_1 = 6,95 \cdot \cos 15 = 6,71 \text{ m/s}$$

$$v_1 = \sqrt{v_{m1}^2 + v_{u1}^2}$$

$$v_{u1} = \sqrt{v_1^2 - v_{m1}^2} = \sqrt{6,7^2 - 1,8^2} = 6,45 \text{ m/s}$$

$$u_1 = v_{u1} + x = 6,45 + 6,71 = 13,16 \text{ m/s}$$

### 2.2.5. Pregunta 5

Dada una bomba con prerrotación a favor de la velocidad de arrastre, donde se conocen los ángulos que forman la velocidad absoluta y la velocidad relativa con la velocidad de arrastre a la entrada del rotor,  $\alpha_1 = 60^\circ$  y  $\beta_1 = 12^\circ$ , respectivamente, así como el valor de la velocidad de arrastre en dicha sección de la bomba,  $u_1 = 17,84 \text{ m/s}$ . Obtenga los otros elementos del triángulo de velocidades a la entrada:  $v_1$ ,  $w_1$ ,  $v_{u1}$  y  $v_{m1}$ .

Posibles respuestas:

a.  $w_1 = 0,7 \text{ m/s}$

$$v_1 = 2,93 \text{ m/s}$$

$$v_{m1} = 3,38 \text{ m/s}$$

$$v_{u1} = 5,85 \text{ m/s}$$

b.  $w_1 = 1,44 \text{ m/s}$

$$v_1 = 0,35 \text{ m/s}$$

$$v_{m1} = 0,3 \text{ m/s}$$

$$v_{u1} = 0,17 \text{ m/s}$$

c.  $w_1 = 16,26 \text{ m/s}$

$$v_1 = 2,93 \text{ m/s}$$

$$v_{m1} = 3,38 \text{ m/s}$$

$$v_{u1} = 5,85 \text{ m/s}$$

d.  $w_1 = 0,06 \text{ m/s}$

$$v_1 = 0,26 \text{ m/s}$$

$$v_{m1} = 0,3 \text{ m/s}$$

$$v_{u1} = 0,52 \text{ m/s}$$

e.  $w_1 = 16,26 \text{ m/s}$

$$v_1 = 3,9 \text{ m/s}$$

$$v_{m1} = 3,38 \text{ m/s}$$

$$v_{u1} = 1,95 \text{ m/s}$$

f. NINGUNA ES CORRECTA

#### 2.2.5.1. Respuesta pregunta 5

Para la resolución de este problema hacemos uso del triángulo de velocidades a la entrada de la bomba, cuando el ángulo que forma la velocidad absoluta y la velocidad relativa con la velocidad de arrastre a la entrada del rotor es  $\alpha_1 = 60^\circ$  y  $\beta_1 = 12^\circ$ , respectivamente, situación que podemos ver en la Figura 5:

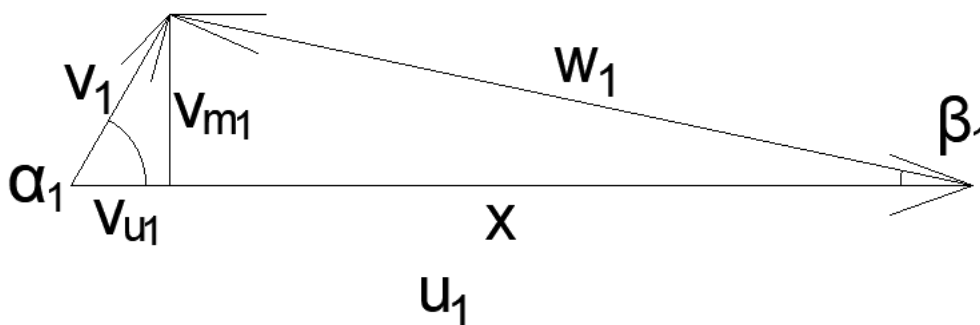


Figura 5. Triángulo de velocidades a la entrada

1º

$$\tan \alpha_1 = \frac{v_{m1}}{v_{u1}} \rightarrow v_{u1} = \frac{v_{m1}}{\tan \alpha_1}$$

$$\tan \beta_1 = \frac{v_{m1}}{x} \rightarrow x = \frac{v_{m1}}{\tan \beta_1}$$

$$u_1 = v_{u1} + x = \frac{v_{m1}}{\tan \alpha_1} + \frac{v_{m1}}{\tan \beta_1} = \frac{v_{m1} \cdot \tan \beta_1 + v_{m1} \cdot \tan \alpha_1}{\tan \alpha_1 \cdot \tan \beta_1}$$

$$v_{m1} = \frac{u_1 \cdot \tan \beta_1 \cdot \tan \alpha_1}{\tan \alpha_1 + \tan \beta_1} = \frac{17,84 \cdot \tan 12 \cdot \tan 60}{\tan 60 + \tan 12} = 3,38 \text{ m/s}$$

2º

$$v_{u1} = \frac{v_{m1}}{\tan \alpha_1} = \frac{3,38}{\tan 60} = 1,95 \text{ m/s}$$

3º

$$\sin \alpha_1 = \frac{v_{m1}}{v_1} \rightarrow v_1 = \frac{v_{m1}}{\sin \alpha_1} = \frac{3,38}{\sin 60} = 3,9 \text{ m/s}$$

4º

$$\sin \beta_1 = \frac{v_{m1}}{w_1} \rightarrow w_1 = \frac{v_{m1}}{\sin \beta_1} = \frac{3,38}{\sin 12} = 16,26 \text{ m/s}$$

### 2.2.6. Pregunta 6

Dada una bomba con prerrotación en contra de la velocidad de arrastre, donde se conocen la velocidad meridional,  $v_{m1} = 2,3 \text{ m/s}$ , la velocidad de arrastre,  $u_1 = 8,7 \text{ m/s}$  y el ángulo entre la velocidad de arrastre y la absoluta,  $\alpha_1 = 107^\circ$ , a la entrada del rotor. Obtenga los otros elementos del triángulo de velocidad a la entrada:  $w_1$ ,  $v_1$  y  $\beta_1$ .

Posibles respuestas:

a.  $w_1 = 16,38 \text{ m/s}$

$v_1 = 7,86 \text{ m/s}$

$\beta_1 = 8,07^\circ$

b.  $w_1 = 9,68 \text{ m/s}$

$v_1 = 2,4 \text{ m/s}$

$\beta_1 = 3,92^\circ$

c.  $w_1 = 9,68 \text{ m/s}$

$v_1 = 2,4 \text{ m/s}$

$\beta_1 = 13,75^\circ$

d.  $w_1 = 16,38 \text{ m/s}$

$v_1 = 7,86 \text{ m/s}$

$\beta_1 = 81,93^\circ$

e.  $w_1 = 11,02 \text{ m/s}$

$v_1 = 2,4 \text{ m/s}$

$\beta_1 = 13,75^\circ$

f. NINGUNA ES CORRECTA

2.2.6.1. RESPUESTA PREGUNTA 6

Para la resolución de este problema hacemos uso del triángulo de velocidades a la entrada del rotor, cuando el ángulo que forma la velocidad absoluta con la velocidad de arrastre a la entrada del rotor es  $\alpha_1 = 107^\circ$ , respectivamente, situación que podemos ver en la Figura 6:

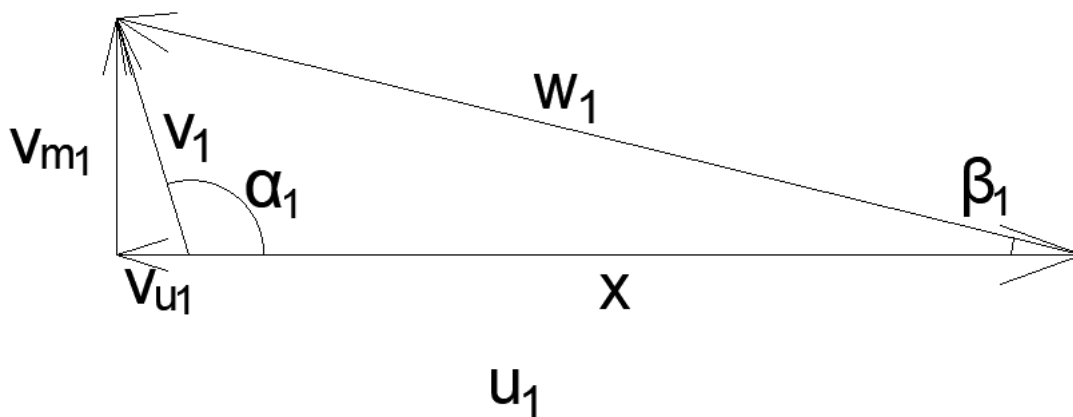


Figura 6. Triángulo de velocidades a la entrada

1º

$$\tan(180 - \alpha_1) = \frac{v_{m1}}{v_{u1}} \rightarrow v_{u1} = \frac{v_{m1}}{\tan \alpha_1} = \frac{2,3}{\tan(180 - 107)} = 0,703 \text{ m/s}$$

$$v_1 = \sqrt{v_{u1}^2 + v_{m1}^2} = \sqrt{0,703^2 + 2,3^2} = 2,4 \text{ m/s}$$

2º

$$w_1 = \sqrt{v_{m1}^2 + (v_{u1} + u_1)^2} = \sqrt{2,3^2 + (0,703 + 8,7)^2} = 9,68 \text{ m/s}$$

3º

$$\tan \beta_1 = \frac{v_{m1}}{v_{u1} + u_1} = \frac{2,3}{0,703 + 8,7} = 0,245 \rightarrow \beta_1 = 13,75^\circ$$

Estos ejercicios serán implantados como tarea en el campus virtual, y a continuación se presenta un ejemplo de cómo se visualizarían para que los estudiantes puedan trabajar con ellos (ver Figura 7).

The screenshot shows a virtual campus interface for a course titled "Asignatura de prácticas de Ciencias Básicas, Física". The main content area displays a problem statement: "Dada una bomba que está prerrotada a favor de la velocidad de arrastre con un ángulo  $\alpha_1 = 20^\circ$ , con velocidad meridional a la entrada  $v_{u1} = 2,5 \text{ m/s}$  y ángulo entre las velocidades de arrastre y relativa  $\beta_1 = 20^\circ$ . Obtenga los otros elementos del triángulo de velocidades a la entrada:  $w_1$ ,  $v_1$  y  $u_1$ ." Below the text are six multiple-choice options (a-f) for the values of  $w_1$ ,  $v_1$ , and  $u_1$ . Option f is "NINGUNA ES CORRECTA". The interface also includes a navigation menu on the left with categories like "Identificación", "Navegación", and "Administración".

Figura 7. Visualización de un ejemplo de cómo se vería estos problemas de trigonometría en el campus virtual

## 3. DERIVADAS

### 3.1. Introducción

En problemas de diseño de turbomáquinas hidráulicas es habitual que se necesite calcular el caudal ( $Q$ ) que maximiza la potencia ( $W$ ) o el rendimiento ( $\eta$ ) de estas máquinas. Matemáticamente, esto implica encontrar el máximo de las funciones  $W(Q)$  o  $\eta(Q)$ , respectivamente, es decir, encontrar un valor de  $Q$  para el cual la derivada de estas funciones sea igual a cero.

Existen diversas reglas de derivación, y dependiendo de la función a derivar, esta operación puede tener cierta complejidad. Sin embargo, las funciones que se encuentran en problemas de turbomáquinas hidráulicas suelen ser polinómicas, las cuales son las más simples de derivar. Además, las reglas de derivación necesarias son la del producto y el cociente de funciones, que son dos de las más comúnmente utilizadas.

A pesar de que estas operaciones parecen sencillas en principio, los estudiantes suelen cometer errores al derivar, especialmente cuando se trata de un cociente entre funciones.

En esta sección, se presentan una serie de ejercicios de tipo test que abarcan los distintos tipos de derivadas que pueden surgir en los problemas de estas asignaturas. Estos ejercicios tienen como objetivo ayudar a los estudiantes a recordar y reforzar sus habilidades en el cálculo de derivadas.

### 3.2. Ejercicios propuestos y resolución paso a paso

A continuación, se muestran los 6 problemas diseñados junto con varias posibles respuestas y su resolución detallada. Nótese, que al igual que en la sección anterior, las respuestas incorrectas han sido construidas a partir de errores comunes en los estudiantes de esta asignatura.

#### 3.2.1. Pregunta 1

Determinar la derivada de la función  $f(x) = \frac{H(x)}{H_t(x)}$ , donde  $H(x) = 50 - 427x^2$  y  $H_t(x) = 85 - 230x$ .

Posibles respuestas:

a.  $f'(x) = \frac{-854x}{-230}$

b.  $f'(x) = \frac{98210x^2 + 72590x - 11500}{7225 - 39100x + 52900x^2}$

c.  $f'(x) = \frac{98210x^2 - 72590x + 11500}{1225 - 16100x + 52900x^2}$

d.  $f'(x) = \frac{98210x^2 - 72590x + 11500}{85 - 230x}$

e.  $f'(x) = \frac{98210x^2 - 72590x + 11500}{7225 - 39100x + 52900x^2}$

f. NINGUNA ES CORRECTA

### 3.2.1.1. Respuesta pregunta 1

$$f'(x) = \frac{-854x \cdot (85 - 230x) - (50 - 427x^2) \cdot (-230)}{(85 - 230x)^2} =$$

$$= \frac{-72590x + 196420x^2 + 11500 - 98210x^2}{(85 - 230x)^2} = \frac{98210x^2 - 72590x + 11500}{7225 - 39100x + 52900x^2}$$

### 3.2.2. Pregunta 2

Determinar la derivada de la función  $f(x) = k \cdot x \cdot H(x)$ , donde  $k = 12$  y  $H(x) = 135 - 574x^2$ .

Posibles respuestas:

a.  $f'(x) = 1620 - 20664x^2$

b.  $f'(x) = -13776x$

c.  $f'(x) = 12 \cdot (135 - 1722x^2)$

d.  $f'(x) = 1620 - 13776x$

e.  $f'(x) = a$  y  $c$  son correctas

f. NINGUNA ES CORRECTA

### 3.2.2.1. Respuesta pregunta 2

$$f'(x) = 12 \cdot (1 \cdot (135 - 574x^2) + x \cdot (-1148x)) = 12 \cdot (135 - 574x^2 - 1148x^2)$$

$$= 12 \cdot (135 - 1722x^2) = 1620 - 20664x^2$$

### 3.2.3. Pregunta 3

Determine los valores de  $x$  para los que la función  $f(x) = \frac{25 - 150x^2}{150 - 115x}$  tiene un máximo o un mínimo.

Posibles respuestas:

- a.  $x = 2,54$
- b.  $x_1 = 0,93; x_2 = -0,059$
- c.  $x_1 = -2,54; x_2 = -0,065$
- d.  $x = 0$
- e.  $x_1 = 2,54; x_2 = 0,065$**
- f. NINGUNA ES CORRECTA

3.2.3.1. *Respuesta pregunta 3*

$$f'(x) = \frac{-300x \cdot (150 - 115x) - (25 - 150x^2) \cdot (-115)}{(150 - 115x)^2} =$$

$$= \frac{-45000x + 34500x^2 + 2875 - 17250x^2}{13225x^2 - 34500x + 22500} = \frac{17250x^2 - 45000x + 2875}{13225x^2 - 34500x + 22500}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{17250x^2 - 45000x + 2875}{13225x^2 - 34500x + 22500} = 0$$

$$x = \frac{45000 \mp \sqrt{(-45000)^2 - 4 \cdot 17250 \cdot 2875}}{2 \cdot 17250}$$

$$x_1 = 2,54$$

$$x_2 = 0,065$$

3.2.4. *Pregunta 4*

Determinar los valores de  $x$  para los que la función  $f(x) = 13 \cdot x \cdot (25 - 325x^2)$  tiene un máximo o un mínimo.

Posibles respuestas:

- a.  $x = 1$
- g.  $x_1 = 0,20; x_2 = -0,20$
- h.  $x_1 = 0,044; x_2 = -0,044$
- i.  $x_1 = 0,16; x_2 = -0,16$**
- b.  $x = 0$
- c. NINGUNA ES CORRECTA

#### 3.2.4.1. Respuesta pregunta 4

$$f'(x) = 13 \cdot (1 \cdot (25 - 325x^2) + x(-650x)) =$$

$$= 13 \cdot ((25 - 325x^2) - 650x^2) = 325 - 12675x^2$$

$$f'(x) = 0$$

$$325 - 12675x^2 = 0$$

$$x = \sqrt{\frac{325}{12675}}$$

$$x_1 = 0,16$$

$$x_2 = -0,16$$

#### 3.2.5. Pregunta 5

Determinar la derivada del rendimiento de una bomba con respecto al caudal, sabiendo que la bomba tiene una curva característica  $H(Q) = 25 - 10000Q^2$  y una curva característica teórica  $H_t(Q) = 35 - 350Q$ . A partir de dicha derivada, obtenga el caudal necesario para que la bomba funcione a máximo rendimiento.

Posibles respuestas:

- a.  $Q_{m\acute{a}x.} = -0,19 \text{ m}^3/\text{s}$
- b.  $Q_{m\acute{a}x.} = 0,077 \text{ m}^3/\text{s}$
- c.  $Q_{m\acute{a}x.} = 0 \text{ m}^3/\text{s}$
- d.  $Q_{m\acute{a}x.} = 0,19 \text{ m}^3/\text{s}$
- e.  **$Q_{m\acute{a}x.} = 0,013 \text{ m}^3/\text{s}$**
- f. NINGUNA ES CORRECTA

3.2.5.1. Respuesta pregunta 5

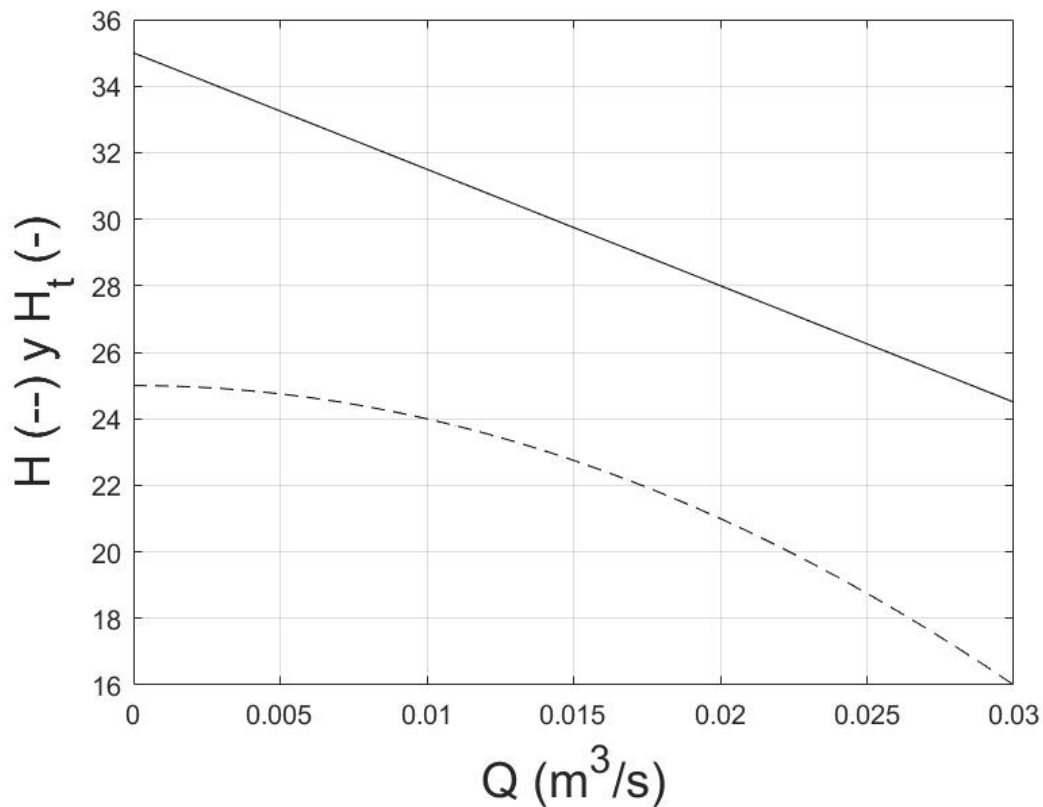


Figura 8. Representación de la curva característica de la bomba (línea discontinua), así como la altura teórica (línea continua)

$$\eta'(Q) = \frac{-20000Q \cdot (35 - 350Q) - (25 - 10000Q^2) \cdot (-350)}{(35 - 350Q)^2} =$$

$$= \frac{-700000Q + 7000000Q^2 + 8750 - 3500000Q^2}{(35 - 350Q)^2} =$$

$$\frac{3500000Q^2 - 700000Q + 8750}{(35 - 350Q)^2}$$

$$\eta'(Q) = 0$$

$$\frac{3500000Q^2 - 700000Q + 8750}{(35 - 350Q)^2} = 0$$

$$Q = \frac{700000 \mp \sqrt{700000^2 - 4 \cdot 3500000 \cdot 8750}}{2 \cdot 3500000}$$

$$Q_1 = 0,186 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_2 = 0,013 \text{ m}^3/\text{s}$$

Y para obtener nuestro máximo rendimiento, sustituimos en la ecuación.

$$\eta(0,186) = 10,66$$

$$\eta(0,013) = 0,76$$

Tenemos el máximo en  $Q_{\text{máx.}} = 0,013 \text{ m}^3/\text{s}$ .

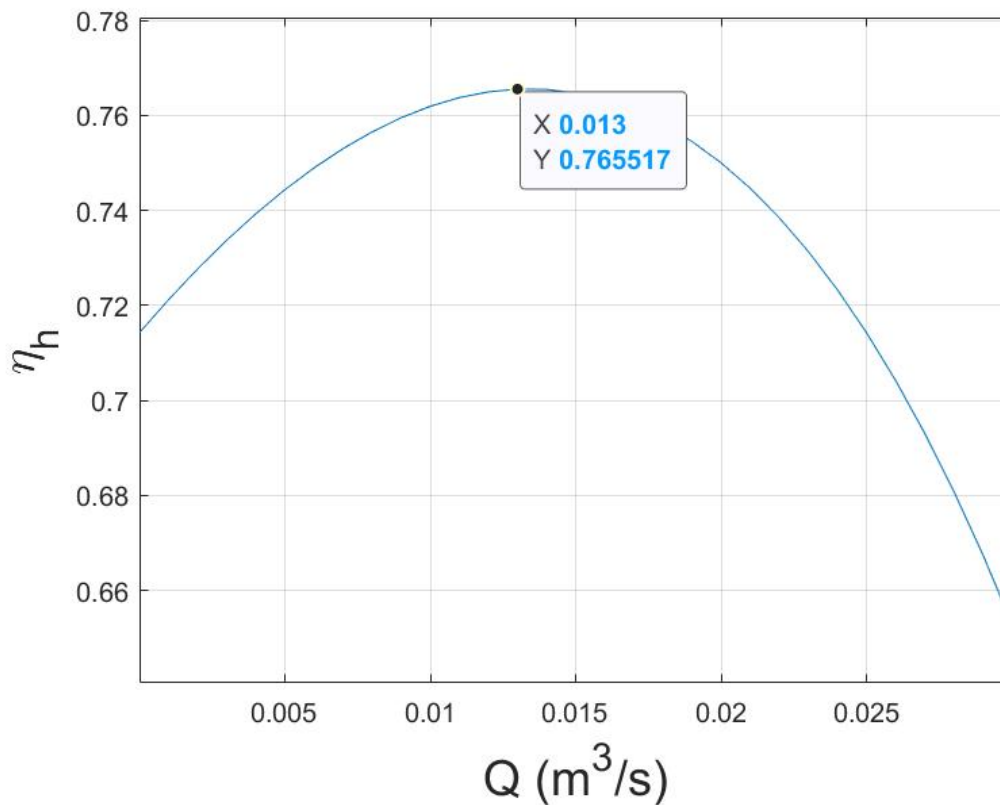


Figura 9. Representación gráfica del máximo rendimiento

### 3.2.6. Pregunta 6

Determinar la derivada de la potencia de una bomba con respecto al caudal, sabiendo que esta tiene una curva característica  $H(Q) = 35 - 300Q^2$ . A partir de dicha derivada obtenga el caudal que maximiza la potencia. Recuerde que la potencia de una bomba se calcula a partir de la expresión:

$$W(Q) = \rho g Q H(Q)$$

dónde  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  y  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ .

Posibles respuestas:

- $W'(Q) = -5880000Q^2$ ;  $Q_{\text{máx.}} = 0 \text{ m}^3/\text{s}$
- $W'(Q) = 343000 - 8820000Q^2$ ;  $Q_{\text{máx.}} = 0,197 \text{ m}^3/\text{s}$
- $W'(Q) = 343000 - 8820000Q^2$ ;  $Q_{\text{máx.}} = -0,197 \text{ m}^3/\text{s}$
- $W'(Q) = 3430 - 88200Q^2$ ;  $Q_{\text{máx.}} = 0,197 \text{ m}^3/\text{s}$

e.  $W'(Q) = 3430 - 88200Q^2 ; Q_{\text{máx.}} = -0,197 \text{ m}^3/\text{s}$

f. NINGUNA ES CORRECTA

3.2.6.1. *Repuesta pregunta 6*

$$W'(Q) = 9800 \cdot (1 \cdot (35 - 300Q^2) + Q \cdot (-600Q)) = 9800 \cdot (35 - 300 \cdot Q^2 - 600Q^2) = \\ = 343000 - 8820000Q^2$$

$$W'(Q) = 0$$

$$343000 - 8820000Q^2 = 0$$

$$Q = \sqrt{\frac{343000}{8820000}}$$

$$Q_1 = 0,197 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_2 = -0,197 \text{ m}^3/\text{s}$$

Tendremos el máximo en  $Q_{\text{máx.}} = 0,197 \text{ m}^3/\text{s}$ .

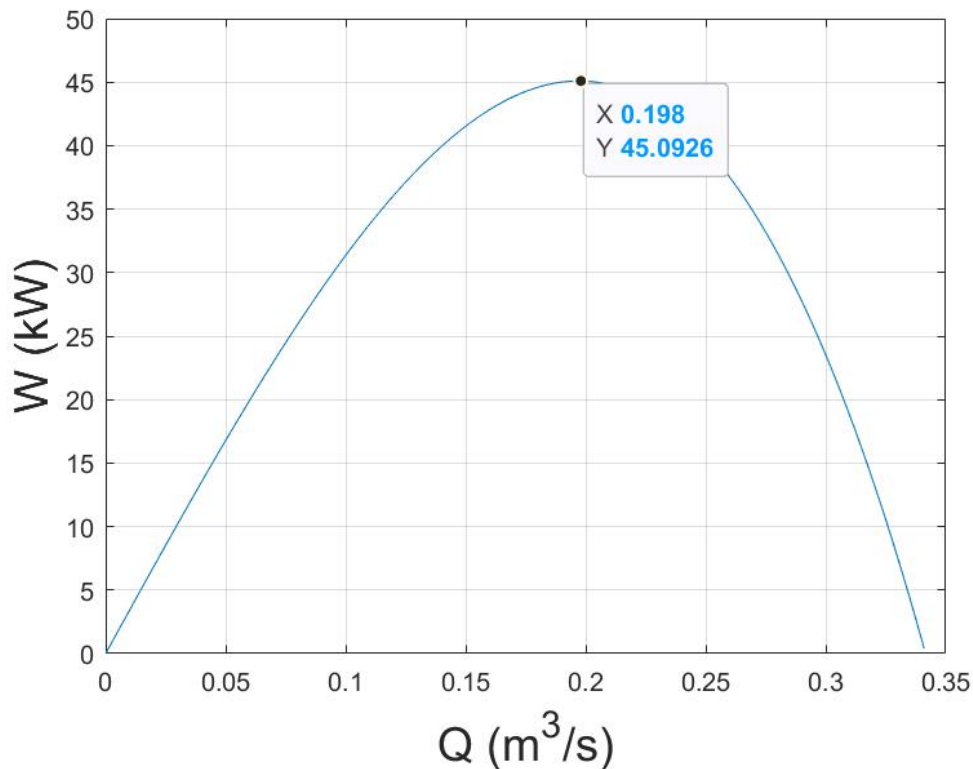


Figura 10. Representación gráfica del caudal que maximiza la potencia

Estos ejercicios serán implantados como tarea en el campus virtual, y a continuación se presenta un ejemplo de cómo se visualizarían para que los estudiantes puedan trabajar con ellos (ver Figura 11).

The screenshot shows a web interface for a virtual campus. At the top, there are logos for '50 ANIVERSARIO' and 'UNIVERSIDAD DE BILBAO', along with navigation links for 'Formación de Enseñanza Virtual' and 'campus virtual'. The main content area is titled 'Asignatura de prácticas de Gutiérrez Castillo, Paloma'. It displays a question (Pregunta 2) with a value of 2.00. The question asks to determine the derivative of the power of a pump with respect to the flow rate, given a characteristic curve  $H(Q) = 35 - 300Q^2$ . The power is calculated as  $W(Q) = \rho g Q H(Q)$ , with  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  and  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ . The question provides five multiple-choice options (a-e) and a 'NINGUNA ES CORRECTA' option (f). The interface also includes a navigation sidebar on the left with sections for 'Navegación por la prueba de conocimiento', 'Identificación', and 'Navegación'. The user's name 'Ankerent Moreno Nicolás' is visible at the top left of the sidebar.

Figura 11. Visualización de un ejemplo de cómo se vería estos problemas de cálculo de derivadas en el campus virtual

## 4. DISEÑO

### 4.1. Introducción

Además de dominar correctamente las relaciones trigonométricas y las reglas de derivación, la resolución de problemas de diseño de turbomáquinas requiere el uso de diversas expresiones matemáticas. Estas fórmulas permiten establecer relaciones entre los elementos del triángulo de velocidad y las características de la turbomáquina: un ejemplo es la ecuación de Euler, que relaciona la velocidad de arrastre y la proyección tangencial de la velocidad absoluta con la altura proporcionada por la bomba. También se utilizan fórmulas para obtener indicadores del funcionamiento de la turbomáquina (rendimiento, potencia, etc.) y determinar parámetros que permiten su clasificación (velocidad específica, grado de reacción, etc.). En el anexo 1 del proyecto se presenta un listado de las fórmulas que comúnmente se utilizan en problemas de diseño de turbomáquinas.

Aunque el número de fórmulas no es muy extenso, es frecuente que los estudiantes encuentren dificultades para identificar el conjunto de fórmulas aplicables al problema que están abordando. Una de las principales fuentes de error en este sentido es la dificultad para distinguir entre los datos del problema que se refieren a una situación teórica, donde el flujo que atraviesa la bomba se considera unidimensional, y el flujo real. Estas situaciones suelen indicarse en los enunciados de los problemas como "bomba con infinitos álabes" y "bomba con finitos álabes", respectivamente.

Esta sección incluye una serie de ejercicios de tipo test diseñados para ayudar a los estudiantes a distinguir entre estas situaciones. Además, se pretende que los estudiantes se familiaricen gradualmente con las fórmulas necesarias para resolver estos problemas, en lugar de presentar problemas de diseño completos donde se exponen múltiples fórmulas simultáneamente. De esta manera, se facilita que el estudiante pueda alcanzar una comprensión detallada de cada una de las fórmulas utilizadas.

### 4.2. Ejercicios propuestos y resolución paso a paso

A continuación, se muestran los enunciados de los ejercicios de diseño de bombas propuestos, junto con posibles respuestas y la resolución detallada de los ejercicios. Debido a las múltiples operaciones que se requieren para obtener el resultado final y los redondeos que se realizan en cada operación, los resultados finales pueden ser ligeramente diferentes a los que

obtengan los estudiantes. Las soluciones incorrectas se han elegido de forma que no exista confusión posible a la hora de seleccionar la solución correcta.

#### 4.2.1. Pregunta 1

Se pretende diseñar el rodete de una bomba centrífuga con 5 álabes y sin prerrotación, que tenga un radio interior ( $r_1$ ) de 6 cm y un radio exterior ( $r_2$ ) de 12 cm y espesores  $l_1 = 2$  cm y  $l_2 = 1$  cm, a la entrada y salida del rotor respectivamente. El ángulo de los álabes a la salida del rotor es  $\beta_{2a} = 20^\circ$ . La bomba no presenta fugas volumétricas. El rodete gira a 1315 rpm. Calcula la curva de altura teórica frente al caudal para finitos álabes. Utilice el método de Pfleiderer para estimar la desviación con respecto a la teoría unidimensional y considere  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ .

Posibles respuestas:

- a.  $H_t = 1,587 - 355,87 Q$
- b.  $H_t = 158,7 - 355,87 Q$
- c.  $H_t = 15,87 - 355,87 Q$**
- d.  $H_t = 27,85 - 624,34Q$
- e.  $H_t = 278,5 - 624,34Q$
- f. NINGUNA ES CORRECTA.

##### 4.2.1.1. Respuesta pregunta 1

DATOS:

$$\eta_v = 1 = \frac{Q}{Q_R} \rightarrow Q = Q_R$$

$$\alpha_1 = 90^\circ \rightarrow \text{SIN PRERROTACIÓN}$$

$$\beta_{2a} = 20^\circ$$

$$r_2 = 12 \text{ cm}; l_2 = 1 \text{ cm}$$

$$r_1 = 6 \text{ cm}; l_1 = 2 \text{ cm}$$

$$w = 1315 \text{ rpm}$$

$$z = 5$$

OPERACIONES:

Para la resolución de este problema hacemos uso del triángulo de velocidades a la salida del rotor con infinitos álabes, cuando el ángulo que forma la velocidad relativa con la velocidad de arrastre es  $\beta_{2a} = 20^\circ$ , tal como se muestra en la Figura 12:

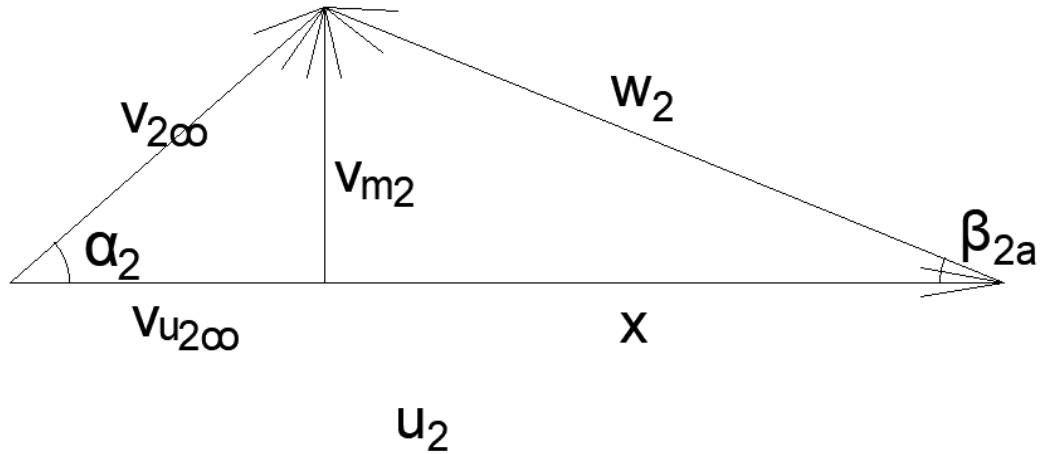


Figura 12. Triángulo de velocidades a la salida

$$Q_R = Q$$

$$H_{t\infty} = \frac{V_{u2\infty} \cdot u_2}{g}$$

$$u_2 = V_{u2\infty} + x \rightarrow V_{u2\infty} = u_2 - x$$

$$x = \frac{v_{m2}}{\tan \beta_{2a}} = \frac{\frac{Q_R}{2\pi \cdot r_2 \cdot l_2}}{\tan \beta_{2a}} = \frac{\frac{Q}{2\pi \cdot 0,12 \cdot 0,01}}{\tan 20} = \frac{Q}{0,0027}$$

$$V_{u2\infty} = 16,52 - \frac{Q}{0,0027}$$

$$H_{t\infty} = \frac{(16,52 - \frac{Q}{0,0027}) \cdot 16,52}{9,8} = 27,848 - 624,34Q$$

$$C_H = \frac{H_t}{H_{t\infty}} = 1 - \frac{1,2 \cdot (1 + \sin \beta_{2a})}{z \cdot \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right)} = 1 - \frac{1,2 \cdot (1 + \sin 20)}{5 \cdot \left(1 - \frac{0,06^2}{0,12^2}\right)} = 0,57$$

$$H_t = H_{t\infty} \cdot C_H = (27,848 - 624,34Q) \cdot 0,57 = 15,87 - 355,87Q$$

#### 4.2.2. Pregunta 2

Se pretende diseñar el rodete de una bomba centrífuga con prerrotación. La bomba tiene un radio interior ( $r_1$ ) de 11 cm y un radio exterior ( $r_2$ ) de 22 cm con espesores del rotor de  $l_1 = 4$  cm y  $l_2 = 2$  cm. Los ángulos de los álabes a la entrada y a la salida del rotor son  $\beta_{1a} = 16^\circ$  y

$\beta_{2a} = 22^\circ$ , respectivamente. La bomba presenta fugas internas y externas, siendo el rendimiento volumétrico de 0,79. El rodete gira a 1175 rpm. Calcula el caudal máximo teórico para infinitos álabes.

Posibles respuestas:

- a.  $Q_{\text{máx.}} = 0,606 \text{ m}^3/\text{s}$
- b.  $Q_{\text{máx.}} = 0$
- c.  $Q_{\text{máx.}} = 0,479 \text{ m}^3/\text{s}$
- d.  $Q_{\text{máx.}} = 0,767 \text{ m}^3/\text{s}$
- e.  $Q_{\text{máx.}} = 0,971 \text{ m}^3/\text{s}$
- f. NINGUNA ES CORRECTA.

4.2.2.1. *Respuesta pregunta 2*

DATOS:

$$\eta_V = 0,79 = \frac{Q}{Q_R}$$

$$\beta_{2a} = 22^\circ$$

$$\beta_{1a} = 16^\circ$$

$$w = 1175 \text{ rpm}$$

$$r_2 = 22 \text{ cm}; l_2 = 2 \text{ cm}$$

$$r_1 = 11 \text{ cm}; l_1 = 4 \text{ cm}$$

OPERACIONES:

Para la resolución de este problema hacemos uso del triángulo de velocidades a la entrada con infinitos álabes, cuando el ángulo que forma la velocidad relativa con la velocidad de arrastre a la entrada del rotor es  $\beta_{1a} = 16^\circ$  situación que podemos ver en la Figura 13:

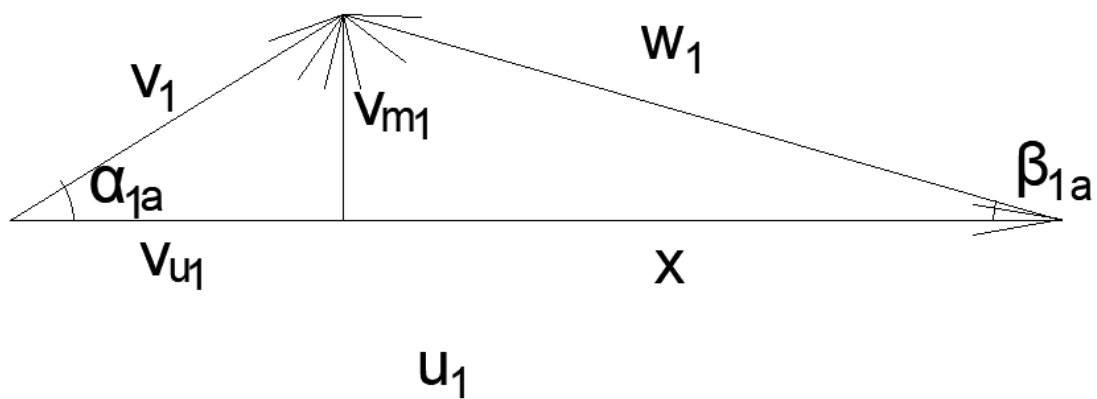


Figura 13. Triángulo de velocidades a la entrada

Necesitaremos también el triángulo de velocidades a la salida del rotor, siendo el ángulo que forma la velocidad relativa con la velocidad de arrastre  $\beta_{2a} = 22^\circ$ , tal como podemos ver en la Figura 14:

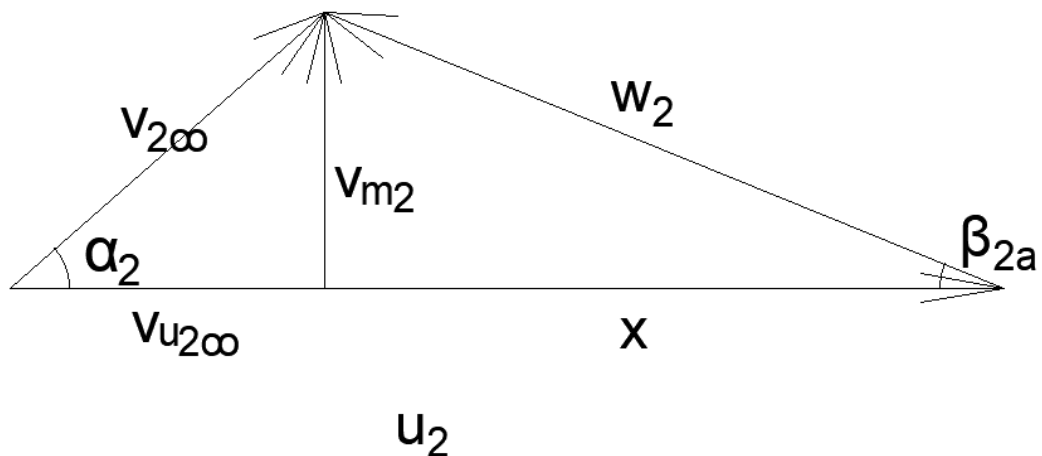


Figura 14. Triángulo de velocidades a la salida

$$u_1 = w \cdot r_1 = 1175 \cdot \frac{2\pi}{60} \cdot 0,11 = 13,54 \text{ m/s}$$

$$u_2 = w \cdot r_2 = 1175 \cdot \frac{2\pi}{60} \cdot 0,22 = 27,07 \text{ m/s}$$

$$\begin{aligned} H_{t\infty} &= \frac{u_2^2 - u_1^2}{g} - \frac{w \cdot Q_R}{2\pi g} \cdot \left( \frac{1}{l_2 \cdot \tan \beta_{2a}} - \frac{1}{l_1 \cdot \tan \beta_{1a}} \right) \\ &= \frac{27,07^2 - 13,54^2}{9,8} - \frac{1175 \cdot \frac{2\pi}{60} \cdot Q_R}{2\pi \cdot 9,8} \cdot \left( \frac{1}{0,02 \cdot \tan 22} - \frac{1}{0,04 \cdot \tan 16} \right) \\ &= 56,07 - 73,08Q_R \end{aligned}$$

$$\eta_V = 0,79 = \frac{Q}{Q_R} \rightarrow Q_R = \frac{Q}{0,79}$$

$$H_{t\infty} = 56,07 - \frac{73,08}{0,79} Q = 56,07 - 92,5Q$$

$$H_{t\infty} = 0 \rightarrow Q_{m\acute{a}x.}$$

$$56,07 - 92,5Q_{m\acute{a}x.} = 0$$

$$Q_{m\acute{a}x.} = \frac{56,07}{92,5} = 0,606 \text{ m}^3/\text{s}$$

#### 4.2.3. Pregunta 3

Se pretende diseñar el rodete de una bomba centrífuga con prerrotación. La bomba tiene un radio interior ( $r_1$ ) de 12 cm y un radio exterior ( $r_2$ ) de 24 cm con espesores  $l_1 = 3$  cm y  $l_2 = 1,5$  cm a la entrada y salida del rotor, respectivamente. Sabemos que  $\beta_2 = \beta_{2a} = 20^\circ$ , y a la entrada  $\beta_{1a} = 20^\circ$ . La bomba presenta fugas internas y externas, siendo el rendimiento volumétrico de 0,86. El rodete gira a 1425 rpm. La bomba vehicula un caudal  $Q = 0,2163 \text{ m}^3/\text{s}$ . Calcular el caudal  $Q$  que maximiza la potencia teórica para finitos e infinitos álabes.

Posibles respuestas:

- a.  $Q = 1 \text{ m}^3/\text{s}$
- b.  $Q = 0 \text{ m}^3/\text{s}$
- c.  $Q = 0,1902 \text{ m}^3/\text{s}$**
- d.  $Q = 5,25 \text{ m}^3/\text{s}$
- e.  $Q = 0,380 \text{ m}^3/\text{s}$
- f. NINGUNA ES CORRECTA

##### 4.2.3.1. Respuesta pregunta 3

DATOS:

$$\beta_2 = \beta_{2a} = 20^\circ \rightarrow H_t = H_{t\infty}$$

$$\beta_{1a} = 20^\circ$$

$$\eta_V = 0,86 = \frac{Q}{Q_R} \rightarrow Q_R = \frac{Q}{0,86}$$

$$w = 1425 \text{ rpm}$$

$$r_2 = 24 \text{ cm}; l_2 = 1,5 \text{ cm}$$

$$r_1 = 12 \text{ cm}; l_1 = 3 \text{ cm}$$

OPERACIONES:

Para la resolución de este problema hacemos uso del triángulo de velocidades a la entrada del rodete con infinitos álabes, cuando el ángulo que forma la velocidad relativa con la velocidad de arrastre a la entrada del rotor es  $\beta_{1a} = 20^\circ$ , situación que podemos ver en la Figura 15:

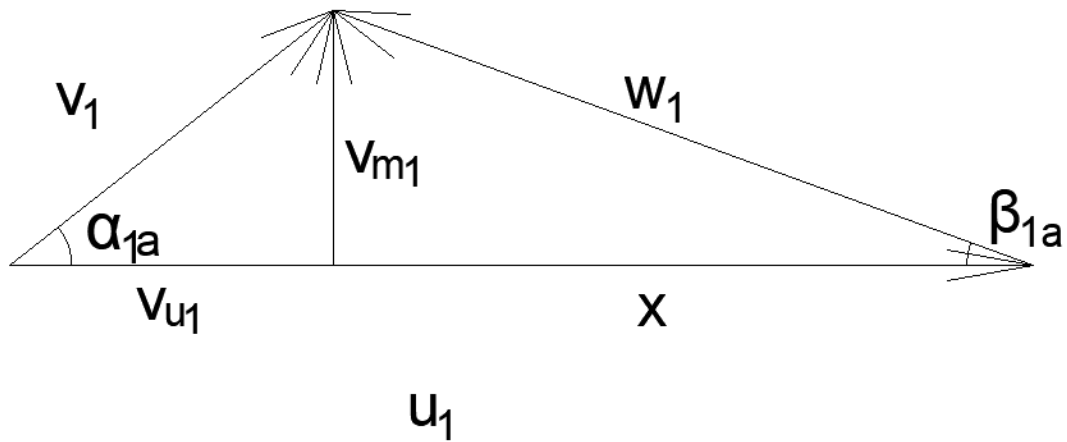


Figura 15. Triángulo de velocidades a la entrada

También haremos uso del triángulo de velocidades a la salida del rodete con infinitos álabes, cuando el ángulo que forma la velocidad relativa con la velocidad de arrastre a la entrada del rotor es  $\beta_{2a} = 20^\circ$ , situación que se muestra en la Figura 16:

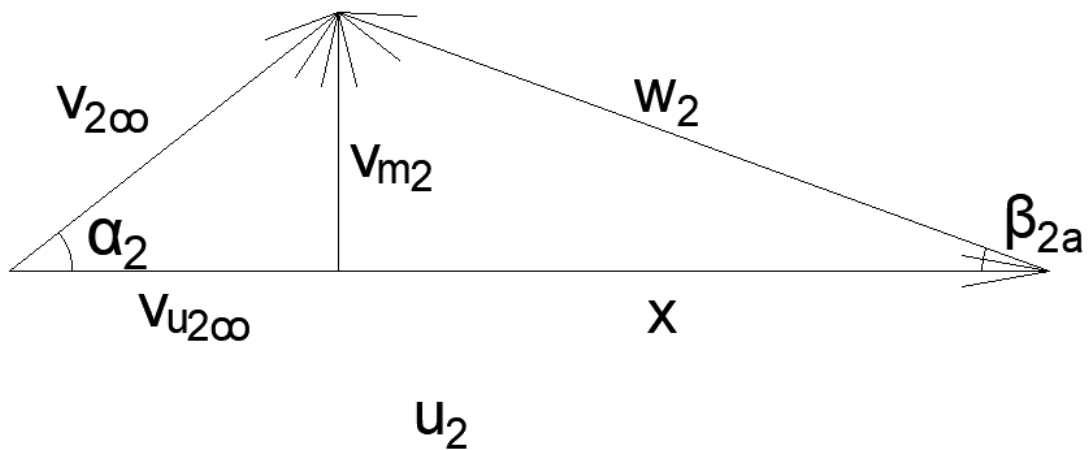


Figura 16. Triángulo de velocidades a la salida

$$u_1 = w \cdot r_1 = 1425 \cdot \frac{2\pi}{60} \cdot 0,12 = 17,91 \text{ m/s}$$

$$u_2 = w \cdot r_2 = 1425 \cdot \frac{2\pi}{60} \cdot 0,24 = 35,81 \text{ m/s}$$

$$\begin{aligned} H_t &= \frac{u_2^2 - u_1^2}{g} - \frac{w \cdot Q_R}{2\pi g} \cdot \left( \frac{1}{l_2 \cdot \tan \beta_{2a}} - \frac{1}{l_1 \cdot \tan \beta_{1a}} \right) \\ &= \frac{35,81^2 - 17,91^2}{9,8} - \frac{1425 \cdot \frac{2\pi}{60} \cdot Q_R}{2\pi \cdot 9,8} \cdot \left( \frac{1}{0,015 \cdot \tan 20} - \frac{1}{0,03 \cdot \tan 20} \right) \\ &= 98,16 - 221,95Q_R \end{aligned}$$

$$H_t = 98,16 - 221,95Q_R = 98,16 - \frac{221,95}{0,86}Q = 98,16 - 258,08Q$$

$$\begin{aligned} W_t &= \rho \cdot g \cdot Q_R \cdot H_t = 1000 \cdot 9,8 \cdot \frac{Q}{0,86} \cdot (98,16 - 258,08Q) \\ &= 11395,35Q \cdot (98,16 - 258,08Q) = 1118567,44Q - 2940911,63Q^2 \end{aligned}$$

$$\frac{dW_t}{dQ} = 0 \rightarrow 1118567,44 - 5881823,26Q = 0$$

$$Q = 0,1902 \text{ m}^3/\text{s}$$

#### 4.2.4. Pregunta 4

Se pretende diseñar el rodete de una bomba centrífuga sin prerrotación, con un diámetro interior ( $d_1$ ) de 15 cm y un diámetro exterior ( $d_2$ ) de 30 cm y con espesores  $l_1 = 3$  cm y  $l_2 = 1,5$  cm, a la entrada y a la salida respectivamente. Sabemos que  $\beta_2 = 50^\circ$ . La bomba no presenta fugas internas y externas. El rodete gira a 1150 rpm. La bomba vehicula un caudal  $Q = 0,2486 \text{ m}^3/\text{s}$ . Calcular el grado de reacción del rodete.

Posibles respuestas:

- $R = -0,84$
- $R = 1$
- $R = 0,84$**
- $R = 0$
- $R = -0,63$
- NINGUNA ES CORRECTA

#### 4.2.4.1. RESPUESTA PREGUNTA 4

DATOS:

$$\beta_2 = 55^\circ$$

$$\eta_V = 1 = \frac{Q}{Q_R} \rightarrow Q_R = Q$$

$$\alpha_1 = 90^\circ \rightarrow \text{sin prerrotación}$$

$$w = 1150 \text{ rpm}$$

$$d_2 = 30 \text{ cm}; l_2 = 1,5 \text{ cm}$$

$$d_1 = 15 \text{ cm}; l_1 = 3 \text{ cm}$$

OPERACIONES:

Para la resolución de este problema hacemos uso del triángulo de velocidades a la entrada, cuando el ángulo que forma la velocidad absoluta con la velocidad de arrastre a la entrada del rotor es  $\alpha_1 = 90^\circ$ , situación que podemos ver en la Figura 17:

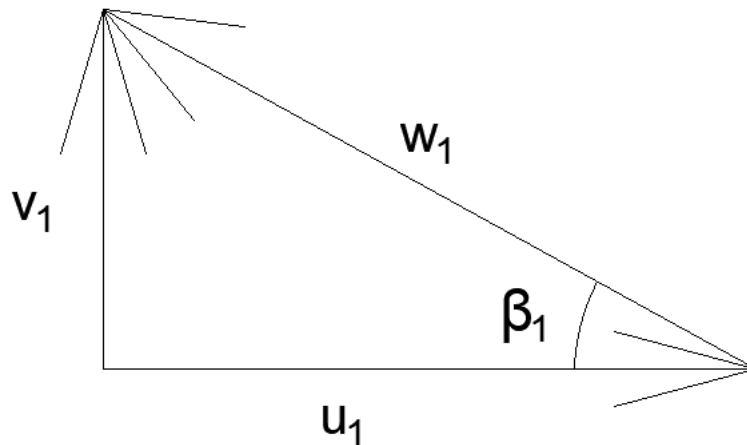


Figura 17. Triángulo de velocidades a la entrada

También haremos uso del triángulo de velocidades a la salida, cuando el ángulo que forma la velocidad relativa con la velocidad de arrastre a la salida del rotor es  $\beta_2 = 55^\circ$ , tal como se muestra en la Figura 18:

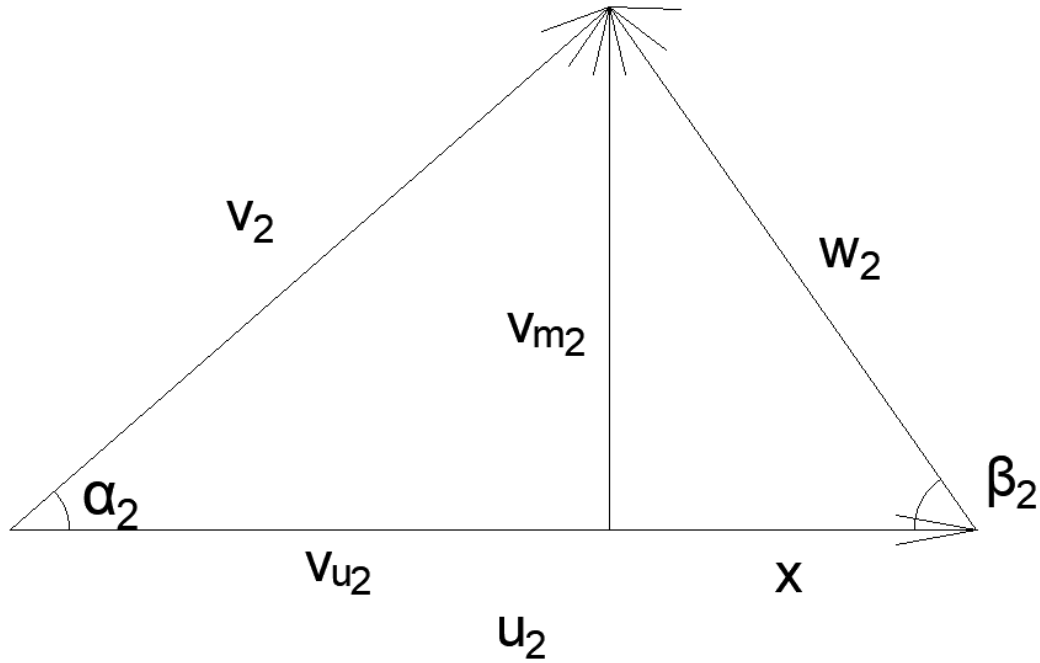


Figura 18. Triángulo de velocidades a la salida

$$H_t = \frac{V_{u2} \cdot u_2}{g}$$

$$u_2 = w \cdot r_2 = 1150 \cdot \frac{2\pi}{60} \cdot 0,15 = 18,06 \text{ m/s}$$

$$u_2 = V_{u2} + x \rightarrow V_{u2} = u_2 - x$$

$$x = \frac{v_{m2}}{\tan \beta_2} = \frac{\frac{Q_R}{2\pi \cdot r_2 \cdot l_2}}{\tan \beta_2} = \frac{0,2486}{2\pi \cdot 0,15 \cdot 0,015 \cdot \tan 55} = 12,31$$

$$V_{u2} = 18,06 - 12,31 = 5,75$$

$$H_t = \frac{5,75 \cdot 18,06}{9,8} = 10,6 \text{ m}$$

$$v_2 = \sqrt{v_{m2}^2 + v_{u2}^2} = \sqrt{17,58^2 + 5,75^2} = 18,49 \text{ m/s}$$

$$v_1 = v_{m1} = \frac{Q_R}{2\pi \cdot r_1 \cdot l_1} = \frac{0,2486}{2\pi \cdot 0,075 \cdot 0,03} = 17,58 \text{ m/s}$$

$$R = 1 - \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g \cdot H_t} = 1 - \frac{18,49^2 - 17,58^2}{2 \cdot 9,8 \cdot 10,6} = 0,84$$

#### 4.2.5. Pregunta 5

Se pretende diseñar el rodete de una bomba centrífuga con prerrotación, siendo  $\alpha_1 = 50^\circ$ . La bomba tiene un diámetro interior ( $d_1$ ) de 20 cm y un diámetro exterior ( $d_2$ ) de 40 cm y los espesores a la entrada y a la salida del rotor son  $l_1 = 3$  cm y  $l_2 = 1,5$  cm, respectivamente. Sabemos que  $\beta_{2a} = 22^\circ$  y que la bomba tiene 11 álabes. Esta presenta fugas internas y externas, siendo el rendimiento volumétrico de 0,88. El rodete gira a 1350 rpm. La bomba vehicula un caudal  $Q = 0,1357$  m<sup>3</sup>/s. Calcular las pérdidas por desviación de la teoría unidimensional. Utilice el método de Pfleiderer.

Posibles repuestas:

- a.  $\delta = -7,42$
- b.  $\delta = 5,67$**
- c.  $\delta = 5,92$
- d.  $\delta = 7,42$
- e.  $\delta = 0$
- f. NINGUNA ES CORRECTA

##### 4.2.5.1. Respuesta pregunta 5

DATOS:

$$\beta_{2a} = 22^\circ$$

$$\eta_V = 0,88 = \frac{Q}{Q_R} \rightarrow Q_R = \frac{Q}{0,88}$$

$$\alpha_1 = 50^\circ$$

$$Q = 0,1357 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_R = 0,1542 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$w = 1350 \text{ rpm}$$

$$d_2 = 40 \text{ cm}; l_2 = 1,5 \text{ cm}$$

$$d_1 = 20 \text{ cm}; l_1 = 3 \text{ cm}$$

$$z = 11$$

OPERACIONES:

Para la resolución de este problema hacemos uso del triángulo de velocidades a la entrada con infinitos álabes, cuando el ángulo que forma la velocidad absoluta con la velocidad de arrastre a la entrada del rotor es  $\alpha_{1a} = 50^\circ$ , tal como podemos ver en la Figura 19:

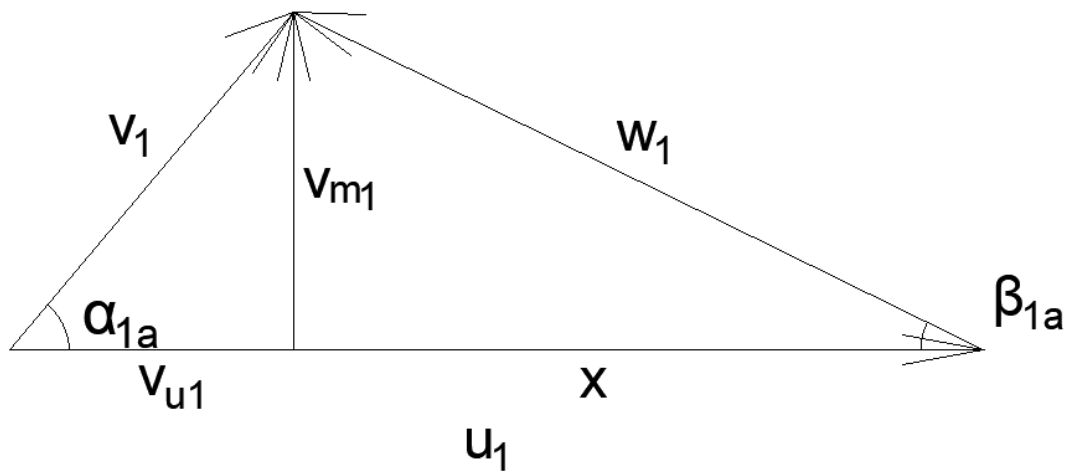


Figura 19. Triángulo de velocidades a la entrada

También haremos uso del triángulo de velocidades a la salida con infinitos álabes, cuando el ángulo que forma la velocidad relativa con la velocidad de arrastre a la salida del rotor es  $\beta_2 = 22^\circ$ , situación que podemos ver en la Figura 20:

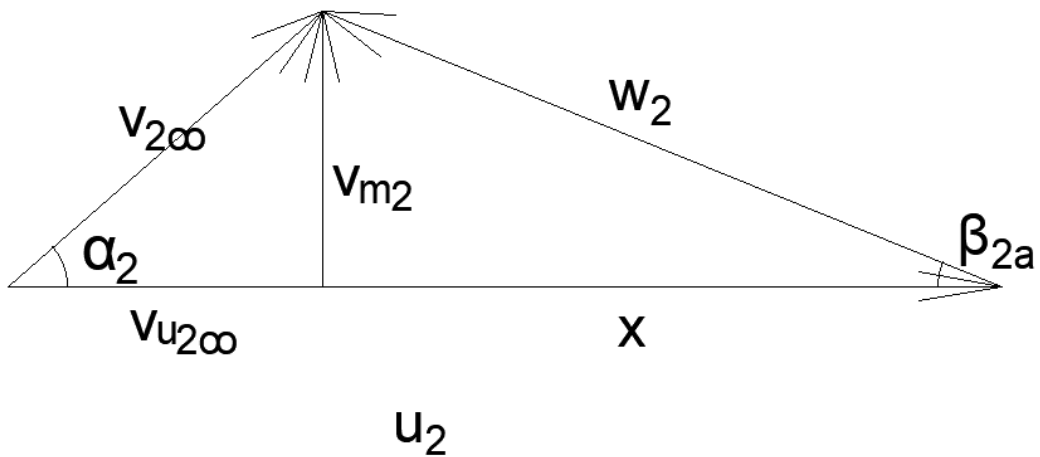


Figura 20. Triángulo de velocidades a la salida

$$H_{t\infty} = \frac{v_{u2\infty} \cdot u_2 - v_{u1} \cdot u_1}{g}$$

$$u_1 = w \cdot r_1 = 1350 \cdot \frac{2\pi}{60} \cdot 0,1 = 14,14 \text{ m/s}$$

$$u_2 = w \cdot r_2 = 1350 \cdot \frac{2\pi}{60} \cdot 0,2 = 28,27 \text{ m/s}$$

$$v_{u1} = \frac{v_{m1}}{\tan \alpha_{1a}} = \frac{\frac{Q_R}{2\pi \cdot r_1 \cdot l_1}}{\tan \alpha_{1a}} = \frac{0,1542}{\tan 50} = 6,86 \text{ m/s}$$

$$x = \frac{v_{m2}}{\tan \beta_{2a}} = \frac{\frac{Q_R}{2\pi \cdot r_2 \cdot l_2}}{\tan \beta_{2a}} = \frac{0,1542}{\tan 22} = 20,24 \text{ m/s}$$

$$v_{u2\infty} = u_2 - x = 28,27 - 20,24 = 8,03 \text{ m/s}$$

$$H_{t\infty} = \frac{8,03 \cdot 28,27 - 6,86 \cdot 14,14}{9,8} = 13,62 \text{ m}$$

$$C_H = 1 - \frac{1,2 \cdot (1 + \sin \beta_{2a})}{z \cdot \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right)} = 1 - \frac{1,2 \cdot (1 + \sin 22)}{11 \cdot \left(1 - \frac{0,1^2}{0,2^2}\right)} = 0,80$$

$$C_H = \frac{H_t}{H_{t\infty}} \rightarrow H_t = H_{t\infty} \cdot C_H = 13,62 \cdot 0,80 = 10,89 \text{ m}$$

$$H_t = \frac{V_{u2} \cdot u_2 - v_{u1} \cdot u_1}{g}$$

$$v_{u2} = \frac{H_t \cdot g - v_{u1} \cdot u_1}{u_2} = \frac{10,89 \cdot 9,8 - 6,86 \cdot 14,14}{28,27} = 0,34 \text{ m/s}$$

$$x = u_2 - 0,34 = 28,27 - 2,069 = 27,92 \text{ m/s}$$

$$\tan \beta_2 = \frac{v_{m2}}{x} = \frac{\frac{Q_R}{2\pi \cdot r_2 \cdot l_2}}{x} = \frac{0,1542}{27,92} = 0,29$$

$$\beta_2 = 16,33^\circ$$

$$\delta = \beta_{2a} - \beta_2 = 22^\circ - 16,33^\circ = 5,67^\circ$$

#### 4.2.6. Pregunta 6

Se pretende diseñar el rodete de una bomba centrífuga con prerrotación, siendo  $\alpha_1 = 115^\circ$ . La bomba tiene un radio interior ( $r_1$ ) de 7,5 cm y un radio exterior ( $r_2$ ) de 15 cm y con espesores del rotor de  $l_1 = 4$  cm y  $l_2 = 2$  cm. Sabemos que  $\beta_2 = 45^\circ$ . La bomba presenta fugas internas y externas, siendo el rendimiento volumétrico de 0,93. El rodete gira a 1350 rpm. La bomba vehicula un caudal  $Q = 0,2474 \text{ m}^3/\text{s}$ . Calcular el grado de reacción del rodete.

Posibles repuestas:

- $R = -0,95$

- b.  $R = 1$
- c.  $R = 0,87$
- d.  $R = 0$
- e.  **$R = 0,95$**
- f. NINGUNA ES CORRECTA

4.2.6.1. *Respuesta pregunta 6*

DATOS:

$$\beta_2 = 45^\circ$$

$$\eta_V = 0,93 = \frac{Q}{Q_R} \rightarrow Q_R = \frac{Q}{0,93}$$

$$\alpha_1 = 115^\circ$$

$$Q = 0,2474 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$w = 1350 \text{ rpm}$$

$$r_2 = 15 \text{ cm}; l_2 = 2 \text{ cm}$$

$$r_1 = 7,5 \text{ cm}; l_1 = 4 \text{ cm}$$

OPERACIONES:

Para la resolución de este problema hacemos uso del triángulo de velocidades a la entrada, cuando el ángulo que forma la velocidad absoluta con la velocidad de arrastre a la entrada del rotor es  $\alpha_1 = 115^\circ$ , situación que podemos ver en la Figura 21:

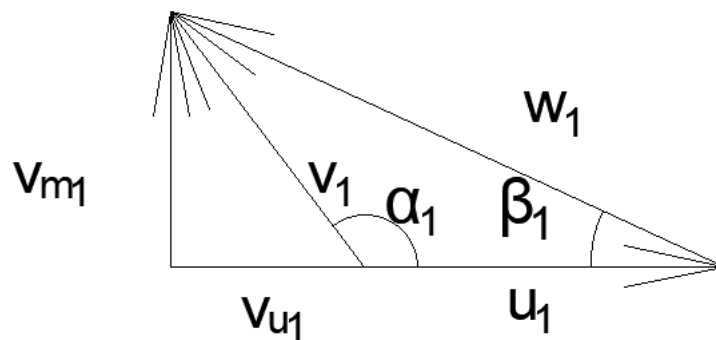


Figura 21. Triángulo de velocidades a la entrada

También haremos uso del triángulo de velocidades a la salida, cuando el ángulo que forma la velocidad relativa con la velocidad de arrastre a la entrada del rotor es  $\beta_2 = 45^\circ$ , situación que podemos ver en la Figura 22:

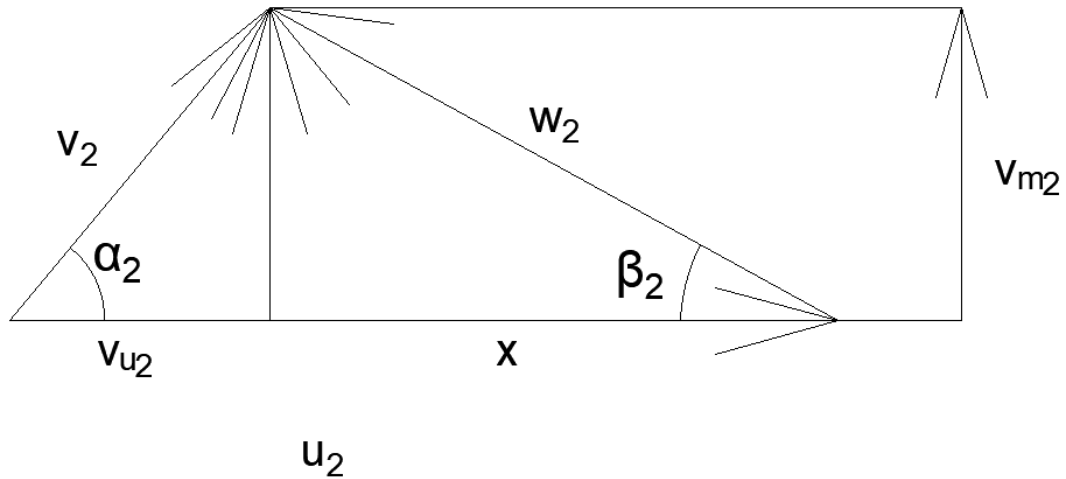


Figura 22. Triángulo de velocidades a la salida

$$H_t = \frac{v_{u2} \cdot u_2 - v_{u1} \cdot u_1}{g}$$

$$u_1 = w \cdot r_1 = 1350 \cdot \frac{2\pi}{60} \cdot 0,075 = 10,6 \text{ m/s}$$

$$u_2 = w \cdot r_2 = 1350 \cdot \frac{2\pi}{60} \cdot 0,15 = 21,2 \text{ m/s}$$

$$Q_R = \frac{Q}{\eta_V} = 0,266 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$x = \frac{v_{m2}}{\tan \beta_2} = \frac{\frac{Q_R}{2\pi \cdot r_2 \cdot l_2}}{\tan \beta_2} = \frac{0,266}{2\pi \cdot 0,15 \cdot 0,02 \cdot \tan 45} = 14,11 \text{ m/s}$$

$$v_{u2} = u_2 - x = 21,2 - 14,11 = 7,09 \text{ m/s}$$

$$\tan(180 - \alpha_1) = \frac{v_{m1}}{v_{u1}}$$

$$v_{u1} = \frac{v_{m1}}{\tan(180 - \alpha_1)} = \frac{\frac{Q_R}{2\pi \cdot r_1 \cdot l_1}}{\tan(180 - \alpha_1)} = \frac{0,266}{2\pi \cdot 0,075 \cdot 0,04 \cdot \tan 65} = 6,58 \text{ m/s}$$

$$H_t = \frac{7,09 \cdot 21,2 - 6,58 \cdot 10,6}{9,8} = 8,22 \text{ m}$$

$$v_1 = \sqrt{v_{m1}^2 + v_{u1}^2} = \sqrt{14,11^2 + 6,58^2} = 15,57 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \sqrt{v_{m2}^2 + v_{u2}^2} = \sqrt{14,11^2 + 7,09^2} = 15,79 \text{ m/s}$$

$$R = 1 - \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g \cdot H_t} = 1 - \frac{15,79^2 - 15,57^2}{2 \cdot 9,8 \cdot 8,22} = 0,95$$

Estos ejercicios serán implantados como tarea en el campus virtual, y a continuación se presenta un ejemplo de cómo se visualizarían para que los estudiantes puedan trabajar con ellos (ver Figura 23).

The screenshot shows a web interface for a virtual campus. At the top, there are logos for '50 ANIVERSARIO' and 'UNIVERSIDAD DE VALLADOLID'. The main header includes 'Formación de Enseñanza Virtual', 'Aulas TIC | Programación Docente', and 'campus virtual | enseñanza virtual y laboratorios tecnológicos'. A navigation breadcrumb shows the path: 'UMA / CV / Formación de Enseñanza Virtual / Mis asignaturas en este Centro / Asignaturas de prácticas / Asignatura de prácticas de Gutiérrez Castillo, Paloma / Tema inicial / Ejercicios trigonometría, derivadas, diseño e inst... / Vista previa'.

The main content area is titled 'Asignatura de prácticas de Gutiérrez Castillo, Paloma'. It displays 'Pregunta 3' with a value of 2,00. The question text is: 'Se pretende diseñar el rodete de una bomba centrífuga con prerrotación. La bomba tiene un radio interior ( $r_1$ ) de 11 cm y un radio exterior ( $r_2$ ) de 22 cm con espesores del rotor de  $l_1 = 4$  cm y  $l_2 = 2$  cm. Los ángulos de los álabes a la entrada y a la salida del rotor son  $\beta_{1a} = 16^\circ$  y  $\beta_{2a} = 22^\circ$ , respectivamente. Esta presenta fugas internas y externas, siendo el rendimiento volumétrico de 0,79. El rodete gira a 1175 rpm. Calcula el caudal máximo teórico para infinitos álabes.'

The multiple-choice options are:
 

- a.  $Q_{max} = 0,606 \text{ m}^3/\text{s}$
- b.  $Q_{max} = 0$
- c.  $Q_{max} = 0,479 \text{ m}^3/\text{s}$
- d.  $Q_{max} = 0,767 \text{ m}^3/\text{s}$
- e.  $Q_{max} = 0,971 \text{ m}^3/\text{s}$
- f. NINGUNA ES CORRECTA.

On the left side, there is a sidebar with 'Identificación' (user: Ankermit Moreno Nicolás), 'Navegación' (site map), and 'Pregunta 3' details. At the bottom of the question area, there are buttons for 'Página anterior' and 'Siguiente página'.

Figura 23. Visualización de un ejemplo de cómo se vería estos problemas de diseño en el campus virtual



Posibles respuestas:

a. *Nodos* :  $Q1 = Q + Q3$

i.  $M1: H1 + \alpha Q1^2 - HB + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q1^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q^2 = 0$

ii.  $M2: ZK + \alpha Q3^2 - HB + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q3^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q^2 = 0$

b. *Nodos* :  $Q = Q1 + Q2$

i.  $M1: H1 + \alpha Q1^2 - HB + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q1^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q^2 = 0$

ii.  $M2: H2 + \alpha Q2^2 - HB + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q2^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q^2 = 0$

c. *Nodos* :  $Q = Q1 + Q3$

i.  $M1: HB + \alpha Q1^2 - H1 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q1^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q^2 = 0$

ii.  $M2: HB + \alpha Q3^2 - ZK + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q3^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q^2 = 0$

**d. *Nodos* :  $Q = Q1 + Q3$**

**i.  $M1: H1 + \alpha Q1^2 - HB + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q1^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q^2 = 0$**

**ii.  $M2: ZK + \alpha Q3^2 - HB + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q3^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q^2 = 0$**

e. *Nodos* :  $Q3 = Q1 + Q$

i.  $M1: H1 + \alpha Q1^2 - HB + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q1^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q^2 = 0$

ii.  $M2: ZK + \alpha Q3^2 - HB + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q3^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q^2 = 0$

f. NINGUNA ES CORRECTA

5.2.1.1. Respuesta pregunta 1

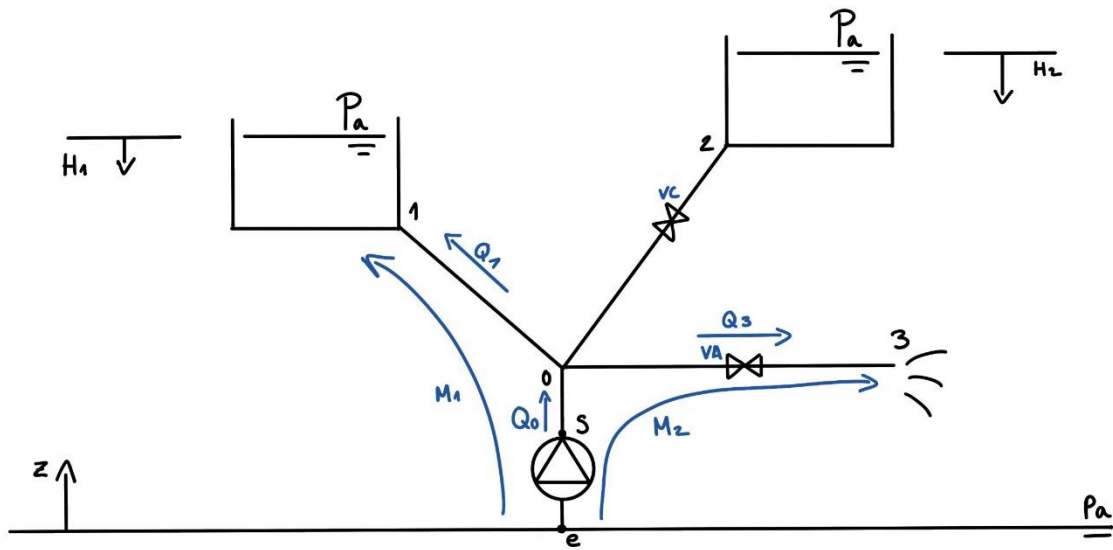


Figura 25. Esquema del sistema hidráulico a analizar de dos embalses y un sumidero

NODOS:

$$(1) Q = Q_1 + Q_3$$

TRAMOS:

Tramo 0-1

$$\frac{\bar{P}_0}{\rho g} = \frac{\bar{P}_1}{\rho g} + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_1^2$$

C.C.1

$$\frac{\bar{P}_1}{\rho g} = \frac{Pa}{\rho g} + H_1 + \alpha Q_1^2$$

Tramo 0-3

$$\frac{\bar{P}_0}{\rho g} = \frac{\bar{P}_3}{\rho g} + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_3^2$$

C.C.3

$$\frac{\bar{P}_3}{\rho g} = \frac{Pa}{\rho g} + Z_k + \alpha Q_3^2$$

Tramo e-s

$$\frac{\bar{P}_e}{\rho g} = \frac{\bar{P}_s}{\rho g} + H_B = \frac{Pa}{\rho g} + H_B$$

Tramo e-0

$$\frac{\bar{P}_e}{\rho g} = \frac{\bar{P}_0}{\rho g} + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q^2$$

$$\frac{P_a}{\rho g} + H_B = \frac{\bar{P}_0}{\rho g} + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q^2$$

$$\frac{\bar{P}_1}{\rho g} - H_1 - \alpha Q_1^2 + H_B = \frac{\bar{P}_1}{\rho g} + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_1^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q^2$$

$$(2) H_1 - H_B + \alpha Q_1^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_1^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q^2 = 0$$

$$\frac{\bar{P}_3}{\rho g} - Z_k - \alpha Q_3^2 + H_B = \frac{\bar{P}_3}{\rho g} + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_3^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q^2$$

$$(3) Z_k + \alpha Q_3^2 - H_B + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_3^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q^2 = 0$$

### 5.2.2. Pregunta 2

La instalación de la figura muestra una turbina conectada a dos embalses dónde uno está conectado con una válvula que se encuentra abierta. Se considera que el difusor es ideal. Obtener las ecuaciones de nodos y mallas sabiendo que los tramos tienen longitud  $L$ , diámetro  $D$  y coeficiente  $\lambda$ .

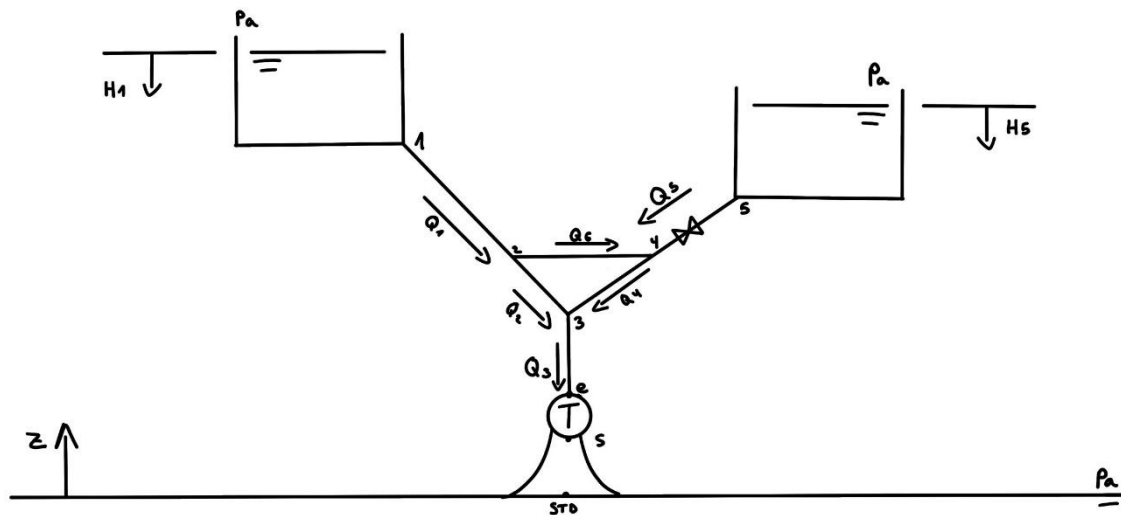


Figura 26. Esquema del sistema hidráulico a analizar de dos embalses

Posibles respuestas:

a. *Nodos*:  $Q1 = Q2 + Q6$

i.  $Q4 = Q5 + Q6$

ii.  $Q3 = Q1 + Q4 + Q2$

iii.  $M1: HT - H1 + \frac{\lambda L}{D} \alpha(Q3^2 + Q2^2 + Q1^2) = 0$

iv.  $M2: HT - H1 + \frac{\lambda L}{D} \alpha(Q3^2 + Q4^2 + Q1^2 + Q6^2) = 0$

v.  $M3: HT - H5 + \frac{\lambda L}{D} \alpha(Q3^2 + Q4^2 + Q5^2 + kQ5^2) = 0$

b. *Nodos*:  $Q1 = Q2 + Q6$

i.  $Q6 = Q5$

ii.  $Q3 = Q4 + Q2$

iii.  $M1: HT - H1 + \frac{\lambda L}{D} \alpha(Q3^2 + Q2^2 + Q1^2) = 0$

iv.  $M2: HT - H1 + \frac{\lambda L}{D} \alpha(Q3^2 + Q4^2 + Q1^2 + Q6^2) = 0$

v.  $M3: HT - H5 + \frac{\lambda L}{D} \alpha(Q3^2 + Q4^2 + Q5^2 + kQ5^2) = 0$

c. *Nodos*:  $Q1 = Q2 + Q6$

i.  $Q6 = Q5$

ii.  $Q3 = Q4 + Q2$

iii.  $M1: HT - H5 + \frac{\lambda L}{D} \alpha(Q3^2 + Q2^2 + Q1^2) = 0$

iv.  $M2: HT - H5 + \frac{\lambda L}{D} \alpha(Q3^2 + Q4^2 + Q1^2 + Q6^2) = 0$

v.  $M3: HT - H1 + \frac{\lambda L}{D} \alpha(Q3^2 + Q4^2 + Q5^2) = 0$

d. ***Nodos*:  $Q1 = Q2 + Q6$**

**i.  $Q4 = Q5 + Q6$**

**ii.  $Q3 = Q4 + Q2$**

$$\text{iii. } M1: HT - H1 + \frac{\lambda L}{D} \alpha(Q3^2 + Q2^2 + Q1^2) = 0$$

$$\text{iv. } M2: HT - H1 + \frac{\lambda L}{D} \alpha(Q3^2 + Q4^2 + Q1^2 + Q6^2) = 0$$

$$\text{v. } M3: HT - H5 + \frac{\lambda L}{D} \alpha(Q3^2 + Q4^2 + Q5^2 + kQ5^2) = 0$$

e. Nodos:  $Q1 = Q2 + Q6$

i.  $Q4 = Q5 + Q6$

ii.  $Q3 = Q4 + Q2$

$$\text{iii. } M1: HT - H1 + \frac{\lambda L}{D} \alpha(Q3^2 + Q2^2 + Q1^2) = 0$$

$$\text{iv. } M2: HT - H1 + \frac{\lambda L}{D} \alpha(Q3^2 + Q4^2 + Q1^2 - Q6^2) = 0$$

$$\text{v. } M3: HT - H5 + \frac{\lambda L}{D} \alpha(Q3^2 + Q4^2 + Q5^2) = 0$$

f. NINGUNA ES CORRECTA

#### 5.2.2.1. Respuesta pregunta 2

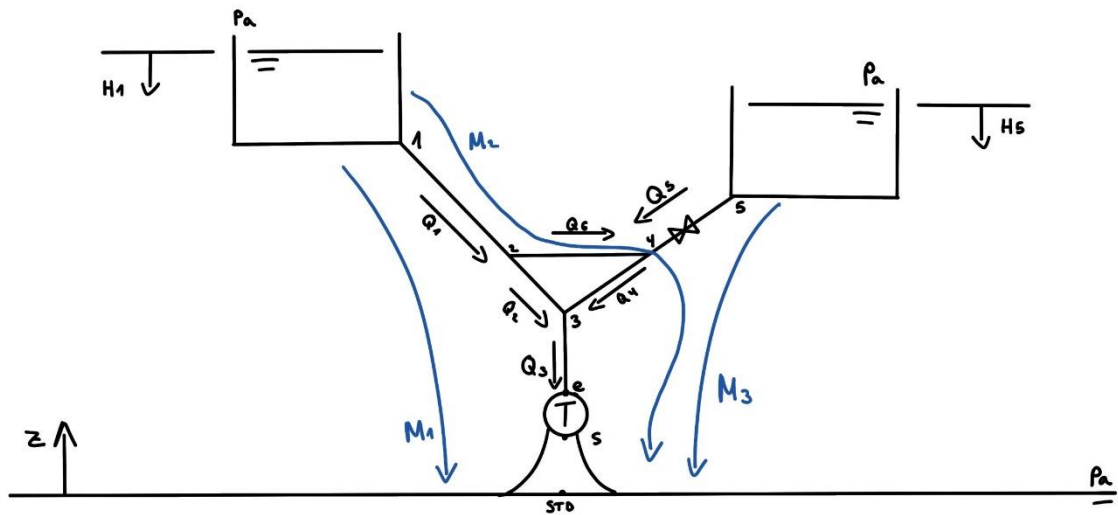


Figura 27. Esquema del sistema hidráulico a analizar de dos embalses

NODOS:

(1)  $Q1 = Q2 + Q6$

(2)  $Q4 = Q5 + Q6$

(3)  $Q3 = Q4 + Q2$

TRAMOS:

Tramo 1-2

$$\frac{\bar{P}_1}{\rho g} = \frac{\bar{P}_2}{\rho g} + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_1^2$$

C.C.1

$$\frac{\bar{P}_1}{\rho g} = \frac{Pa}{\rho g} + H_1$$

Tramo 5-4

$$\frac{\bar{P}_5}{\rho g} = \frac{\bar{P}_4}{\rho g} + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_5^2 + k \alpha Q_5^2$$

C.C.5

$$\frac{\bar{P}_5}{\rho g} = \frac{Pa}{\rho g} + H_5$$

Tramo 2-4

$$\frac{\bar{P}_2}{\rho g} = \frac{\bar{P}_4}{\rho g} + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_6^2$$

Tramo 2-3

$$\frac{\bar{P}_2}{\rho g} = \frac{\bar{P}_3}{\rho g} + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_2^2$$

Tramo 4-3

$$\frac{\bar{P}_4}{\rho g} = \frac{\bar{P}_3}{\rho g} + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_4^2$$

Tramo 3-e

$$\frac{\bar{P}_3}{\rho g} = \frac{\bar{P}_e}{\rho g} + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_3^2$$

$$H_T = \frac{\bar{P}_e}{\rho g} - \frac{\bar{P}_s}{\rho g}$$

$$\frac{\bar{P}_{STD}}{\rho g} = \frac{\bar{P}_s}{\rho g} = \frac{Pa}{\rho g}$$

$$\frac{\bar{P}_e}{\rho g} = H_T + \frac{Pa}{\rho g}$$

$$\frac{Pa}{\rho g} + H_1 = H_T + \frac{Pa}{\rho g} + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_2^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_1^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_3^2$$

$$(4) H_T - H_1 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_2^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_1^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_3^2 = 0$$

$$\frac{Pa}{\rho g} + H_1 = H_T + \frac{Pa}{\rho g} + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_4^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_1^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_3^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_6^2$$

$$(5) H_T - H_1 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_4^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_1^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_3^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_6^2 = 0$$

$$\frac{Pa}{\rho g} + H_5 = H_T + \frac{Pa}{\rho g} + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_3^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_4^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_5^2 + k \alpha Q_5^2$$

$$(6) H_T - H_5 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_4^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_3^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_5^2 + k \alpha Q_5^2 = 0$$

### 5.2.3. Pregunta 3

La instalación de la figura muestra dos bombas conectadas en paralelo conectadas a dos embalses dónde uno está conectado con una válvula que se encuentra abierta y ya después un sumidero. Obtener las ecuaciones de nodos y mallas sabiendo que los tramos tienen longitud L, diámetro D y coeficiente  $\lambda$ . Supongan que las dos bombas en paralelo suministran tanto a los dos depósitos como al punto de riego o sumidero.

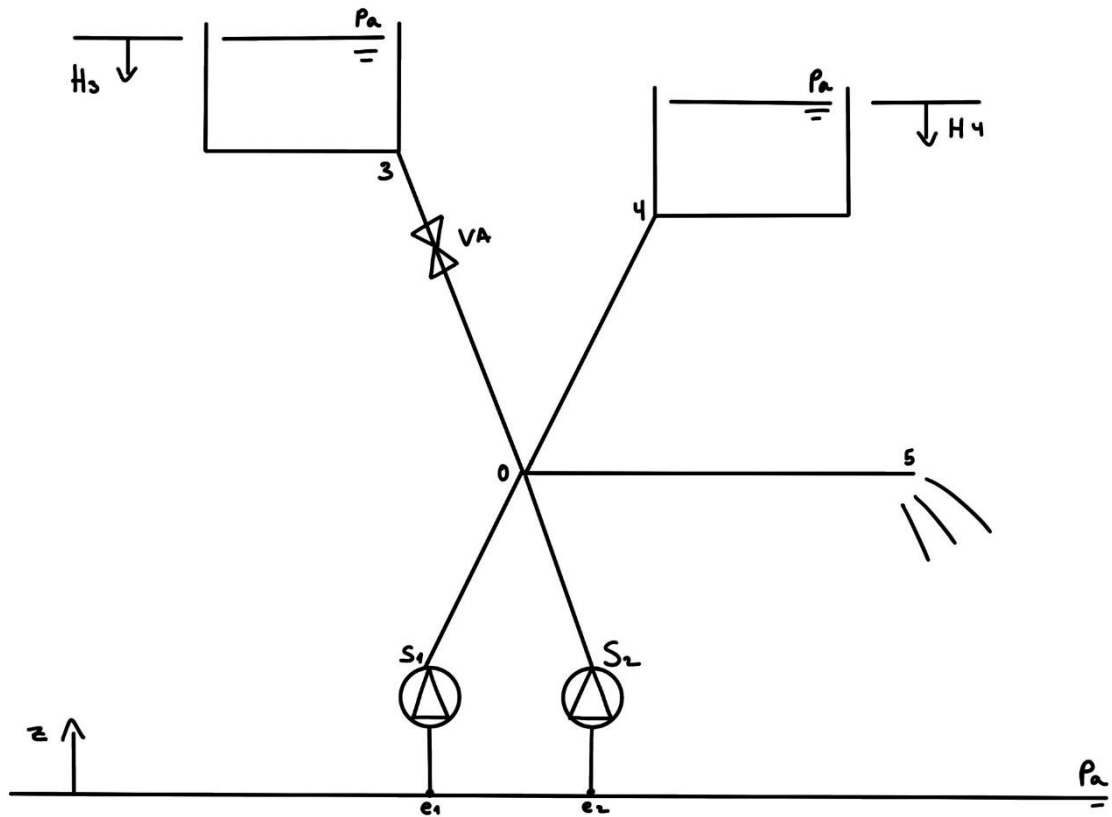


Figura 28. Esquema del sistema hidráulico a analizar de dos embalses y un sumidero

Posibles respuestas:

a. *Nodos:*  $Q1 + Q2 = Q4 + Q5$

i.  $M1: H3 - HB1 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q1^2 + \alpha Q3^2 + k3 \alpha Q1^2 = 0$

ii.  $M2: H4 - HB2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q2^2 + \alpha Q4^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q4^2 = 0$

iii.  $M3: H4 - HB1 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q1^2 + \alpha Q4^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q4^2 = 0$

iv.  $M4: Zk - HB2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q2^2 + \alpha Q5^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q5^2 = 0$

b. *Nodos:*  $Q1 + Q2 = Q3 + Q4 + Q5$

i.  $M1: H3 - HB1 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q1^2 + \alpha Q3^2 + k3 \alpha Q1^2 = 0$

ii.  $M2: H4 - HB2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q2^2 + \alpha Q4^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q4^2 = 0$

iii.  $M3: H4 - HB1 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q1^2 + \alpha Q4^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q4^2 = 0$

$$\text{iv. } M4: Zk - HB2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q2^2 + \alpha Q5^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q5^2 = 0$$

c. *Nodos:*  $Q1 + Q2 = Q3 + Q4 + Q5$

$$\text{i. } M1: H3 - HB1 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q1^2 + \alpha Q4^2 + k4 \alpha Q1^2 = 0$$

$$\text{ii. } M2: H4 - HB2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q2^2 + \alpha Q4^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q4^2 = 0$$

$$\text{iii. } M3: H4 - HB1 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q1^2 + \alpha Q4^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q4^2 = 0$$

$$\text{iv. } M4: Zk - HB2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q2^2 + \alpha Q5^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q5^2 = 0$$

d. *Nodos:*  $Q1 + Q2 = Q3 + Q4 + Q5$

$$\text{i. } M1: H3 - HB1 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q1^2 + \alpha Q3^2 = 0$$

$$\text{ii. } M2: H4 - HB2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q2^2 + \alpha Q4^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q4^2 = 0$$

$$\text{iii. } M3: H4 - HB1 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q1^2 + \alpha Q4^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q4^2 = 0$$

$$\text{iv. } M4: Zk - HB2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q2^2 + \alpha Q5^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q5^2 = 0$$

e. *Nodos:*  $Q1 + Q2 = Q3 + Q4 + Q5$

$$\text{i. } M1: H3 - HB1 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q1^2 + \alpha Q3^2 + k3 \alpha Q1^2 = 0$$

$$\text{ii. } M2: H4 - HB2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q2^2 + \alpha Q4^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q4^2 = 0$$

$$\text{iii. } M3: H4 - HB1 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q1^2 + \alpha Q4^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q4^2 = 0$$

$$\text{iv. } M4: H5 - HB2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q2^2 + \alpha Q5^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q5^2 = 0$$

f. NINGUNA ES CORRECTA

5.2.3.1. Respuesta pregunta 3

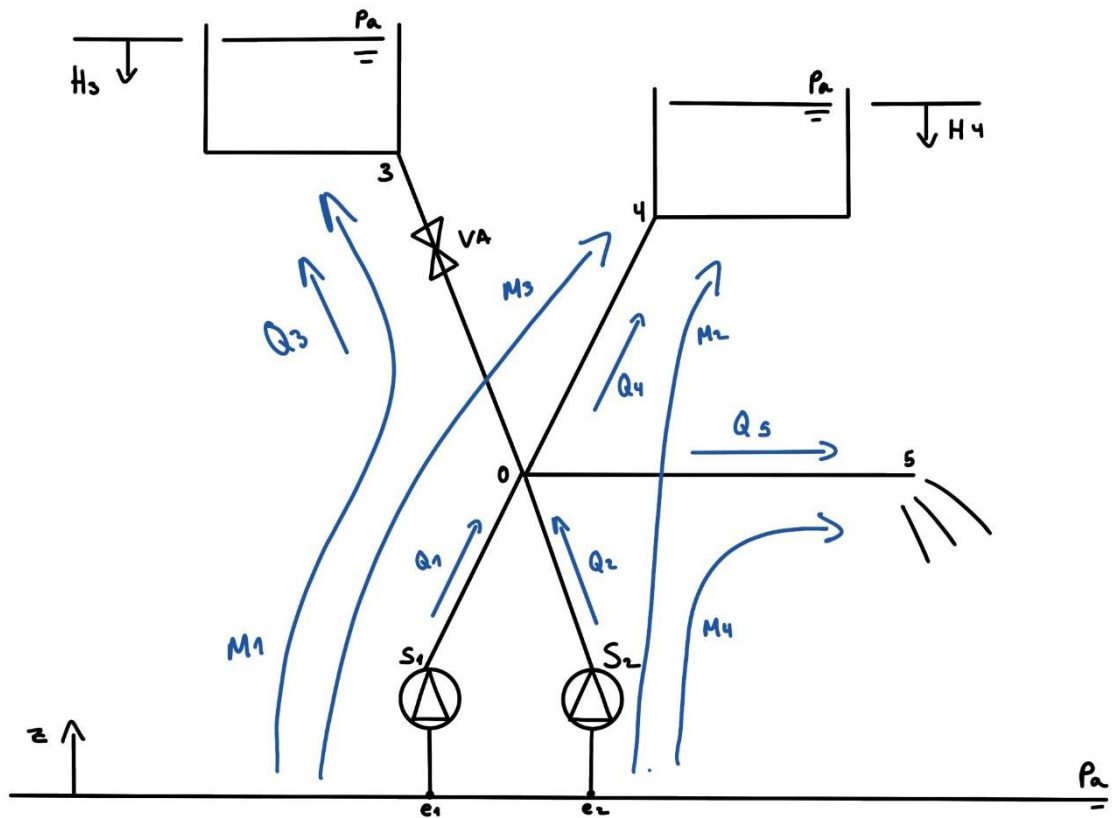


Figura 29. Esquema del sistema hidráulico a analizar de dos embalses y un sumidero

NODOS:

$$(1) Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4 + Q_5$$

TRAMOS:

Tramo 0-3

$$\frac{\bar{P}_0}{\rho g} = \frac{\bar{P}_3}{\rho g} + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_3^2 + k \alpha Q_3^2$$

C.C.3

$$\frac{\bar{P}_3}{\rho g} = \frac{P_a}{\rho g} + H_3 + \alpha Q_3^2$$

Tramo 0-4

$$\frac{\bar{P}_0}{\rho g} = \frac{\bar{P}_4}{\rho g} + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_4^2$$

C.C.4

$$\frac{\bar{P}_4}{\rho g} = \frac{Pa}{\rho g} + H_4 + \alpha Q_4^2$$

Tramo 0-5

$$\frac{\bar{P}_0}{\rho g} = \frac{\bar{P}_5}{\rho g} + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_5^2$$

C.C.5

$$\frac{\bar{P}_5}{\rho g} = \frac{Pa}{\rho g} + Z_k + \alpha Q_5^2$$

Tramo s1-0

$$\frac{\bar{P}_{s1}}{\rho g} = \frac{\bar{P}_0}{\rho g} + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_1^2$$

Tramo s2-0

$$\frac{\bar{P}_{s2}}{\rho g} = \frac{\bar{P}_0}{\rho g} + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_2^2$$

$$H_{B1} = \frac{\bar{P}_{s1}}{\rho g} - \frac{\bar{P}_{e1}}{\rho g}$$

$$H_{B2} = \frac{\bar{P}_{s2}}{\rho g} - \frac{\bar{P}_{e2}}{\rho g}$$

$$\frac{\bar{P}_b}{\rho g} = \frac{\bar{P}_{e1}}{\rho g} = \frac{\bar{P}_{e2}}{\rho g} = \frac{Pa}{\rho g}$$

$$\frac{\bar{P}_{s1}}{\rho g} = H_{B1} + \frac{Pa}{\rho g}$$

$$\frac{\bar{P}_{s2}}{\rho g} = H_{B2} + \frac{Pa}{\rho g}$$

$$H_{B1} + \frac{Pa}{\rho g} - \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_1^2 = \frac{Pa}{\rho g} + H_3 + \alpha Q_3^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_3^2 + k \alpha Q_3^2$$

$$(2) H_3 - H_{B1} + \alpha Q_3^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_1^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_3^2 + k \alpha Q_3^2 = 0$$

$$H_{B2} + \frac{Pa}{\rho g} - \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_2^2 = \frac{Pa}{\rho g} + H_4 + \alpha Q_4^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_4^2$$

$$(3) H_4 - H_{B2} + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_2^2 + \alpha Q_4^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_4^2 = 0$$

$$(4) H_4 - H_{B1} + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_1^2 + \alpha Q_4^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_4^2 = 0$$

$$H_{B2} + \frac{Pa}{\rho g} - \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_2^2 = \frac{Pa}{\rho g} + Z_k + \alpha Q_5^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_5^2$$

$$(5) Z_k - H_{B2} + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_2^2 + \alpha Q_5^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_5^2 = 0$$

#### 5.2.4. Pregunta 4

La instalación de la figura muestra una turbina conectada un embalse y ya después dispone de una válvula by-pass. La curva característica de la bomba es  $H = 30 + 150 Q_T^2$  y sabiendo los siguientes datos  $\lambda = 0'03$ ,  $D = 50$  mm,  $L = 30$  m,  $K = 100$  y  $H_1 = 80$ m, se considera que el difusor es ideal. Sabemos que al tramo 0-e y el tramo 0-2, tienen una longitud  $L$ . Calcular los caudales en cada tramo.

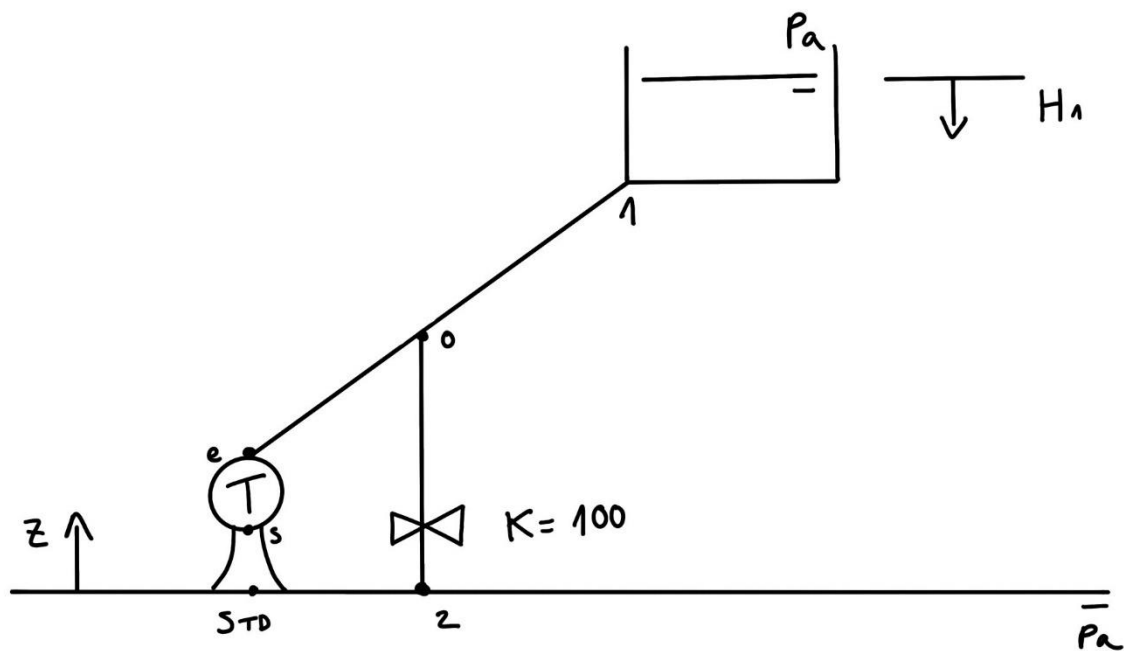


Figura 30. Esquema del sistema hidráulico a analizar de un embalse y una válvula by-pass

Posibles respuestas:

- $Q_T = 0,0098m^3/s; Q_1 = 0,0145m^3/s; Q_k = 0,0047m^3/s$
- $Q_T = ; Q_1 = ; Q_k =$
- $Q_T = ; Q_1 = ; Q_k =$

- d.  $Q_T =; Q_1 =; Q_k =$
- e.  $Q_T =; Q_1 =; Q_k =$
- f. NINGUNA ES CORRECTA

5.2.4.1. Respuesta pregunta 4

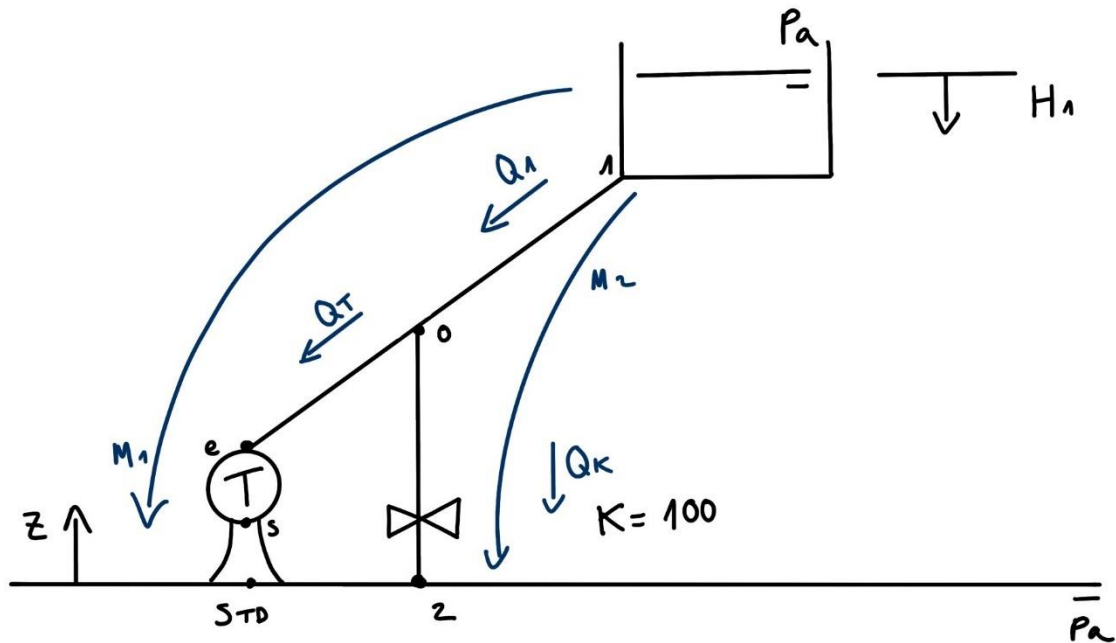


Figura 31. Esquema del sistema hidráulico a analizar de un embalse y una válvula by-pass

NODOS:

$$(1) Q_1 = Q_T + Q_k$$

Tramo 1-0

$$\frac{\bar{P}_1}{\rho g} = \frac{\bar{P}_0}{\rho g} + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_1^2$$

C.C.1

$$\frac{\bar{P}_1}{\rho g} = \frac{Pa}{\rho g} + H_1$$

Tramo 0-2

$$\frac{\bar{P}_0}{\rho g} = \frac{\bar{P}_2}{\rho g} + K \alpha Q_k^2$$

C.C.2

$$\frac{\bar{P}_2}{\rho g} = \frac{Pa}{\rho g} + \alpha Q_k^2$$

Tramo 0-e

$$\frac{\bar{P}_0}{\rho g} = \frac{\bar{P}_e}{\rho g}$$

$$H_T = \frac{\bar{P}_e}{\rho g} - \frac{\bar{P}_s}{\rho g}$$

$$\frac{\bar{P}_{STD}}{\rho g} = \frac{\bar{P}_s}{\rho g} = \frac{Pa}{\rho g}$$

$$\frac{\bar{P}_e}{\rho g} = H_T + \frac{Pa}{\rho g}$$

$$(2) H_T - H_1 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_1^2 = 0$$

$$(3) (1 + K) \cdot \alpha Q_k^2 - H_T = 0$$

Mediante el uso del programa MATLAB, he logrado resolver las ecuaciones de nodos y mallas que hemos obtenido. Adjunto en el ANEXO II el código empleado para dicha tarea. A continuación, presento las soluciones obtenidas:

$$Q_T = 0,0098 m^3/s$$

$$Q_1 = 0,0145 m^3/s$$

$$Q_k = 0,0047 m^3/s$$

### 5.2.5. Pregunta 5

La instalación de la figura muestra dos bombas conectadas a un embalse y a un estanque ya después dispone de una válvula by-pass, que está completamente cerrada. La curva característica de la bomba es  $H = 150 - 2000 Q_T^2$  y sabiendo los siguientes datos  $\lambda = 0'03$ ,  $D = 50$  mm,  $L = 30$  m,  $K = \infty$ ,  $H_4 = 10$  m y  $H_2 = 5$  m. Calcular los caudales en cada tramo.

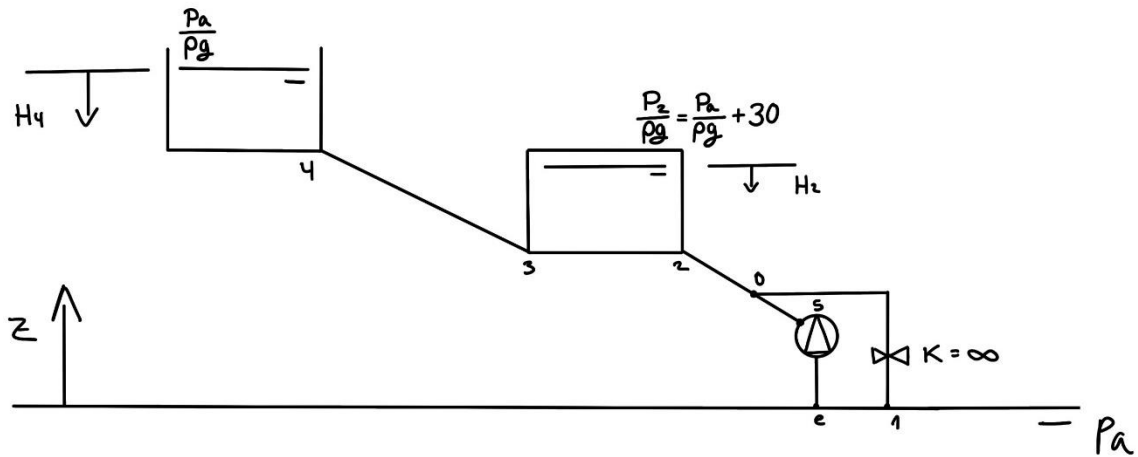


Figura 32. Esquema del sistema hidráulico a analizar de un embalse, un estanque y una válvula by-pass.

Posibles respuestas:

- a.  $Q_B = 0,0184m^3/s; Q_1 = 0,0184m^3/s; Q_2 = 0,0184m^3/s$
- b.  $Q_B = ; Q_1 = ; Q_2 =$
- c.  $Q_B = ; Q_1 = ; Q_2 =$
- d.  $Q_B = ; Q_1 = ; Q_2 =$
- e.  $Q_B = ; Q_1 = ; Q_2 =$
- f. NINGUNA ES CORRECTA

5.2.5.1. Respuesta pregunta 5

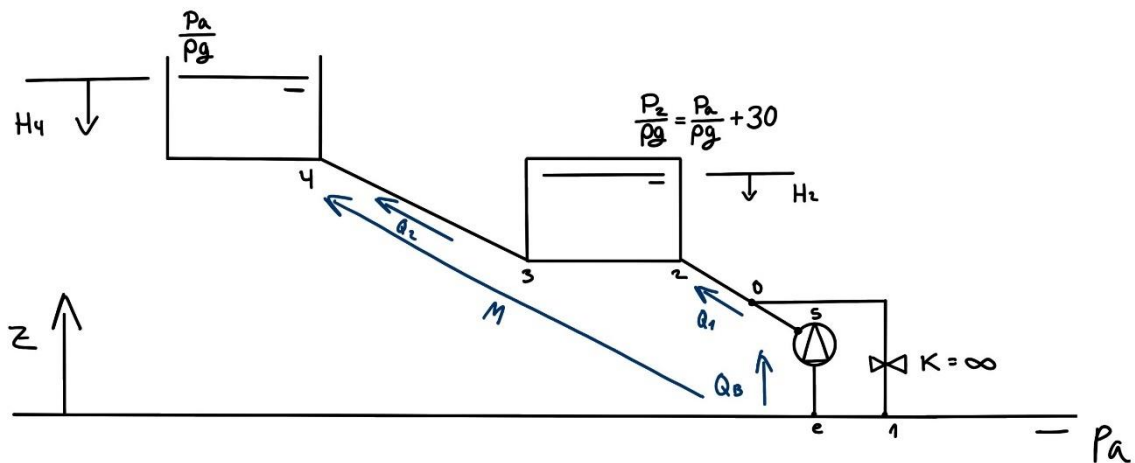


Figura 33. Esquema del sistema hidráulico a analizar de un embalse, un estanque y una válvula by-pass.

NODOS:

(1)  $Q_B = Q_1 = Q_2$

Tramo s-1

$$Q_K = 0$$

Tramo s-2

$$\frac{\bar{P}_s}{\rho g} = \frac{\bar{P}_2}{\rho g} + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_1^2$$

C.C.2

$$\frac{\bar{P}_2}{\rho g} = \frac{Pa}{\rho g} + 30 + H_2 + \alpha Q_1^2$$

$$\frac{\bar{P}_3}{\rho g} = \frac{Pa}{\rho g} + 30 + H_2$$

Tramo 3-4

$$\frac{\bar{P}_3}{\rho g} = \frac{\bar{P}_4}{\rho g} + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_2^2$$

C.C.4

$$\frac{\bar{P}_4}{\rho g} = \frac{Pa}{\rho g} + H_4 + \alpha Q_2^2$$

$$\frac{\bar{P}_e}{\rho g} = \frac{\bar{P}_s}{\rho g} - H_B = \frac{Pa}{\rho g}$$

$$H_2 + 30 - H_B + \alpha Q_1^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_1^2 = 0$$

$$H_4 - H_2 - 30 + \alpha Q_2^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_2^2 = 0$$

$$(1) H_4 - H_B + \alpha Q_1^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_1^2 + \alpha Q_2^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_2^2 = 0$$

Mediante el uso del programa MATLAB, he logrado resolver las ecuaciones de nodos y mallas que hemos obtenido. Adjunto en el ANEXO III el código empleado para dicha tarea. A continuación, presento las soluciones obtenidas:

$$Q_B = 0,0167m^3/s$$

$$Q_1 = 0,0167m^3/s$$

$$Q_2 = 0,0167m^3/s$$

### 5.2.6. Pregunta 6

La instalación de la figura muestra dos bombas conectadas a dos embalses y ya después dispone de una válvula by-pass. La curva característica de la bomba es  $H = 150 - 1500 Q_T^2$  y sabiendo los siguientes datos  $\lambda = 0'03$ ,  $D = 50$  mm,  $L = 30$  m,  $K = 50$ ,  $H_1 = 10$  m y  $H_2 = 7,5$  m. Calcular los caudales en cada tramo.

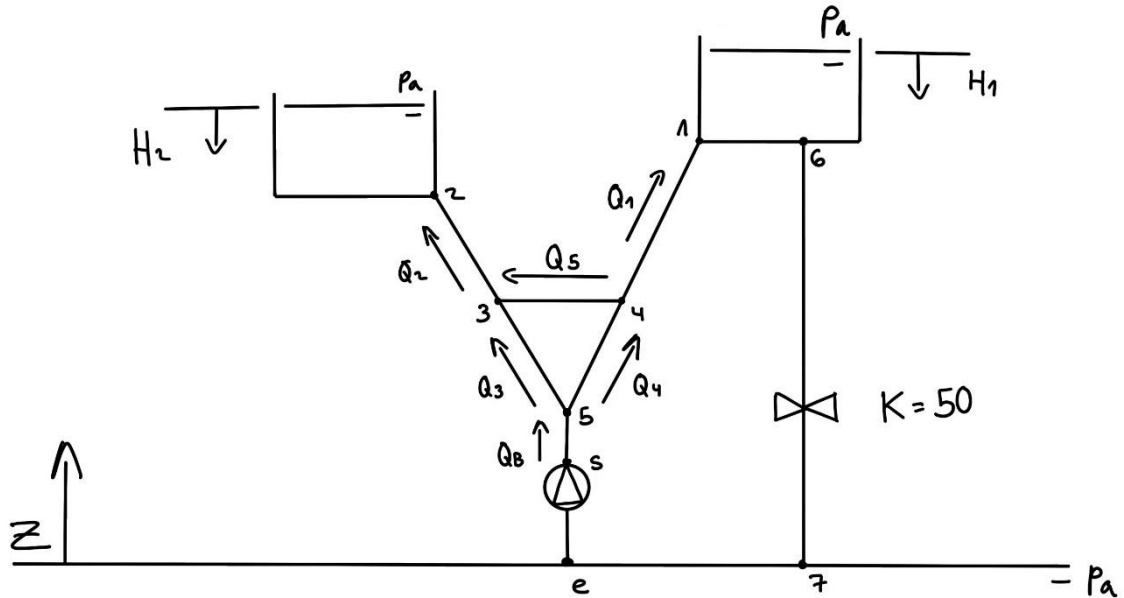


Figura 34. Esquema del sistema hidráulico a analizar de dos embalses y una válvula by-pass.

Posibles respuestas:

a.  $Q_B = 0,0134 \text{ m}^3/\text{s}; Q_1 = 0,0028 \text{ m}^3/\text{s}; Q_2 = 0,0101 \text{ m}^3/\text{s}; Q_3 = 0,0053 \text{ m}^3/\text{s}$

$Q_4 = 0,0047 \text{ m}^3/\text{s}; Q_5 = 0,0025 \text{ m}^3/\text{s}; Q_k = 0,0105 \text{ m}^3/\text{s}$

b.  $Q_B = ; Q_1 = ; Q_2 = ; Q_3 =$

$Q_4 = ; Q_5 = ; Q_k =$

c.  $Q_B = ; Q_1 = ; Q_2 = ; Q_3 =$

$Q_4 = ; Q_5 = ; Q_k =$

d.  $Q_B = ; Q_1 = ; Q_2 = ; Q_3 =$

$Q_4 = ; Q_5 = ; Q_k =$

e.  $Q_B = ; Q_1 = ; Q_2 = ; Q_3 =$

$Q_4 = ; Q_5 = ; Q_k =$

f. NINGUNA ES CORRECTA

5.2.6.1. Respuesta pregunta 6

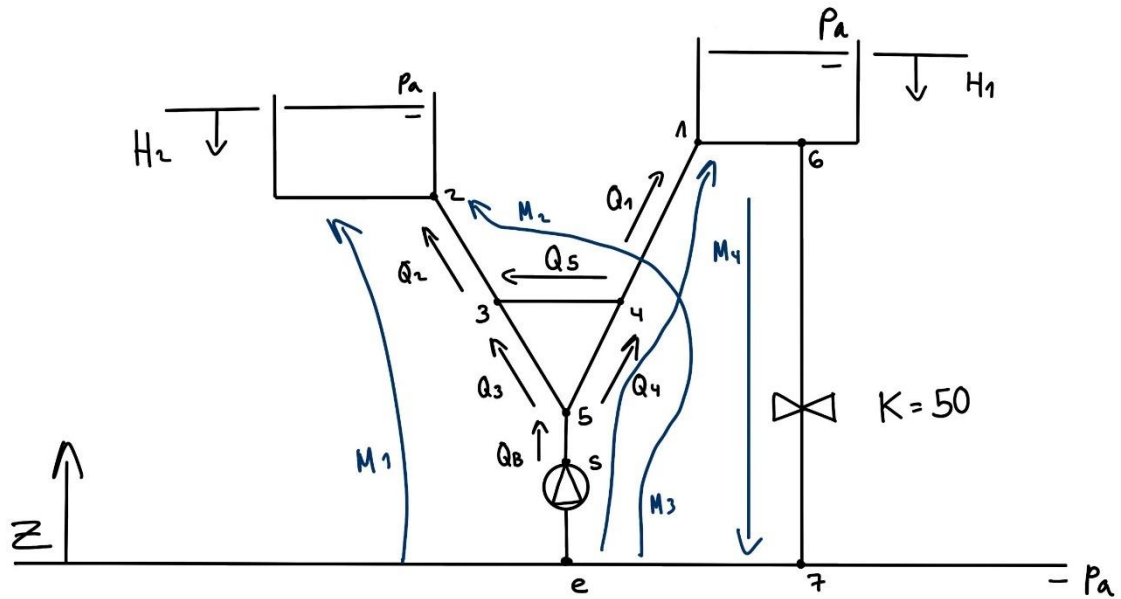


Figura 35. Esquema del sistema hidráulico a analizar de dos embalses y una válvula by-pass.

NODOS:

- (1)  $Q_k = Q_1$
- (2)  $Q_B = Q_3 + Q_4$
- (3)  $Q_4 = Q_1 + Q_5$
- (4)  $Q_2 = Q_3 + Q_5$

Tramo s-5

$$\frac{\bar{P}_s}{\rho g} = \frac{\bar{P}_5}{\rho g} + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_B^2$$

Tramo 5-4

$$\frac{\bar{P}_5}{\rho g} = \frac{\bar{P}_4}{\rho g} + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_4^2$$

Tramo 5-3

$$\frac{\bar{P}_5}{\rho g} = \frac{\bar{P}_3}{\rho g} + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_3^2$$

Tramo 4-3

$$\frac{\bar{P}_4}{\rho g} = \frac{\bar{P}_3}{\rho g} + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_5^2$$

Tramo 4-1

$$\frac{\bar{P}_4}{\rho g} = \frac{\bar{P}_1}{\rho g} + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_1^2$$

C.C.1

$$\frac{\bar{P}_1}{\rho g} = \frac{Pa}{\rho g} + H_1 + \alpha Q_1^2$$

Tramo 3-2

$$\frac{\bar{P}_3}{\rho g} = \frac{\bar{P}_2}{\rho g} + \alpha Q_2^2$$

C.C.2

$$\frac{\bar{P}_2}{\rho g} = \frac{Pa}{\rho g} + H_2 + \alpha Q_2^2$$

Tramo 6-7

$$\frac{\bar{P}_6}{\rho g} = \frac{\bar{P}_7}{\rho g} + \frac{\lambda L}{D} \alpha Q_k^2 + K \alpha Q_k^2$$

C.C.6.7

$$\frac{\bar{P}_6}{\rho g} = \frac{Pa}{\rho g} + H_1$$

$$\frac{\bar{P}_7}{\rho g} = \frac{\bar{P}_2}{\rho g} + K \alpha Q_k^2 + \alpha Q_k^2$$

$$H_1 = \alpha Q_k^2 \cdot \left( 1 + \frac{\lambda L}{D} + K \right)$$

$$H_1 - H_B + \alpha Q_1^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha \cdot (Q_1^2 + Q_4^2 + Q_B^2) = 0$$

$$(1) \alpha Q_k^2 \cdot \left( 1 + \frac{\lambda L}{D} + K \right) - H_B + \alpha Q_1^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha \cdot (Q_1^2 + Q_4^2 + Q_B^2) = 0$$

$$(2) H_2 - H_B + \alpha Q_2^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha \cdot (Q_2^2 + Q_5^2 + Q_B^2 + Q_4^2) = 0$$

$$(3) H_2 - H_B + \alpha Q_2^2 + \frac{\lambda L}{D} \alpha \cdot (Q_2^2 + Q_3^2 + Q_B^2) = 0$$

Mediante el uso del programa MATLAB, he logrado revolver las ecuaciones de nodos y mallas que hemos obtenido. Adjunto en el ANEXO IV el código empleado para dicha tarea. A continuación, presento las soluciones obtenidas:

$$Q_B = 0,0196m^3/s$$

$$Q_1 = 0,0044m^3/s$$

$$Q_2 = 0,0152m^3/s$$

$$Q_3 = 0,0104m^3/s$$

$$Q_4 = 0,0092m^3/s$$

$$Q_5 = 0,0048m^3/s$$

$$Q_k = 0,0044m^3/s$$

Estos ejercicios serán implantados como tarea en el campus virtual, y a continuación se presenta un ejemplo de cómo se visualizarían para que los estudiantes puedan trabajar con ellos (ver Figura 36).

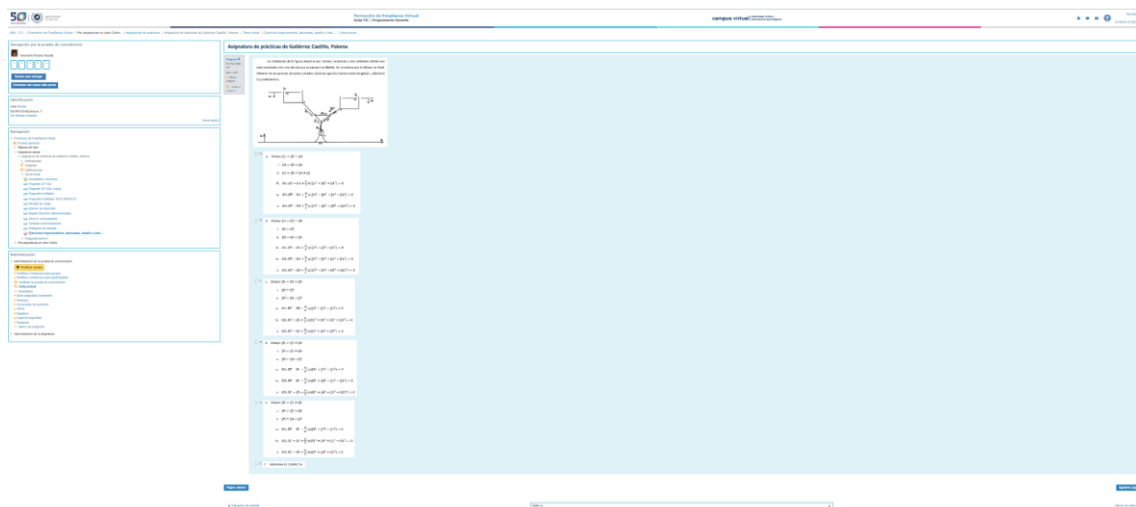


Figura 36. Visualización de un ejemplo de cómo se vería estos problemas de instalaciones en el campus virtual

### 5.3. Problemas de grupo de bombeo

En esta segunda parte se trabaja comprender la asociación serie-paralelo de un grupo de bombeo.

#### 5.3.1. Pregunta 1

Teniendo este grupo de bombas y sabiendo que ambas bombas tienen como curva característica  $H = 60 - 2400Q^2$ :

¿Cuál es la H del grupo de dos bombas en paralelo (ver Figura 37)?

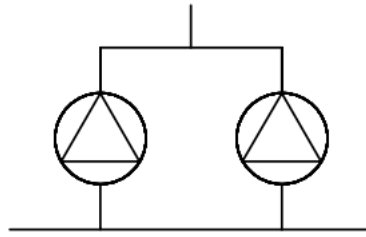


Figura 37 Esquema de dos bombas en paralelo

Posibles respuestas:

- a.  $H_{GB} = 180 - 7200Q^2$
- b.  $H_{GB} = 60 - 600Q^2$**
- c.  $H_{GB} = 60 - 266,6Q^2$
- d.  $H_{GB} = 120 - 1200Q^2$
- e.  $H_{GB} = 240 - 9600Q^2$
- f. NINGUNA ES CORRECTA

5.3.1.1. *Respuesta pregunta 1*

Al ser un grupo de bombas conectado en paralelo su  $H_{GB} = C1 - C2 \cdot \left(\frac{Q}{n}\right)^2$ , siendo n el número de bombas conectadas, por lo que el resultado es:  $H_{GB} = 60 - 600Q^2$ .

5.3.2. *Pregunta 2*

Teniendo este grupo de bombas y sabiendo que las tres bombas tienen como curva característica  $H = 60 - 2400Q^2$ :

¿Cuál es la H del grupo de tres bombas en paralelo (ver Figura 38)?

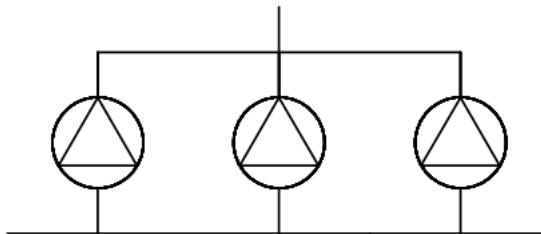


Figura 38 Esquema de tres bombas en paralelo

Posibles respuestas:

- a.  $H_{GB} = 180 - 7200Q^2$
- b.  $H_{GB} = 60 - 600Q^2$
- c.  **$H_{GB} = 60 - 266,6Q^2$**
- d.  $H_{GB} = 120 - 1200Q^2$
- e.  $H_{GB} = 240 - 9600Q^2$
- f. NINGUNA ES CORRECTA

5.3.2.1. *Respuesta pregunta 2*

Al ser un grupo de bombas conectado en paralelo su  $H_{GB} = C1 - C2 \cdot \left(\frac{Q}{n}\right)^2$ , siendo n el número de bombas conectadas, por lo que el resultado es:  $H_{GB} = 60 - 266,6Q^2$ .

5.3.3. **Pregunta 3**

Teniendo este grupo de bombas y sabiendo que todas las bombas tienen como curva característica  $H = 60 - 2400Q^2$ :

¿Cuál es la H del grupo de tres bombas en serie (ver Figura 39)?

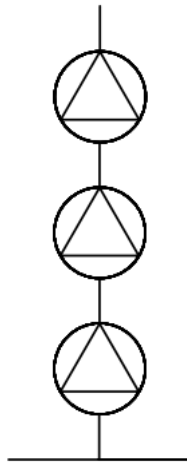


Figura 39 Esquema de 3 bombas en serie

Posibles respuestas:

- a.  **$H_{GB} = 180 - 7200Q^2$**
- b.  $H_{GB} = 60 - 600Q^2$
- c.  $H_{GB} = 60 - 266,6Q^2$
- d.  $H_{GB} = 120 - 1200Q^2$

- e.  $H_{GB} = 240 - 9600Q^2$
- f. NINGUNA ES CORRECTA

5.3.3.1. *Respuesta pregunta 3*

Al ser un grupo de bombas conectado en serie su  $H_{GB} = n \cdot (C1 - C2 \cdot Q^2)$ , siendo n el número de bombas conectadas, por lo que el resultado es:  $H_{GB} = 180 - 7200Q^2$ .

5.3.4. *Pregunta 4*

Teniendo este grupo de bombas y sabiendo que todas las bombas tienen como curva característica  $H = 60 - 2400Q^2$ :

¿Cuál es la H del grupo de cuatro bombas en serie (ver Figura 40)?

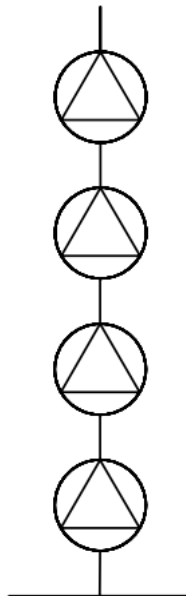


Figura 40 Esquema de 4 bombas en serie

Posibles respuestas:

- a.  $H_{GB} = 180 - 7200Q^2$
- b.  $H_{GB} = 60 - 600Q^2$
- c.  $H_{GB} = 60 - 266,6Q^2$
- d.  $H_{GB} = 120 - 1200Q^2$
- e.  **$H_{GB} = 240 - 9600Q^2$**
- f. NINGUNA ES CORRECTA

5.3.4.1. Respuesta pregunta 4

Al ser un grupo de bombas conectado en serie su  $H_{GB} = n \cdot (C1 - C2 \cdot Q^2)$ , siendo n el número de bombas conectadas, por lo que el resultado es:  $H_{GB} = 240 - 9600Q^2$ .

5.3.5. Pregunta 5

Teniendo este grupo de bombas y sabiendo que todas las bombas tienen como curva característica  $H = 60 - 2400Q^2$ :

¿Cuál es la H del grupo de bombas (ver Figura 41)?

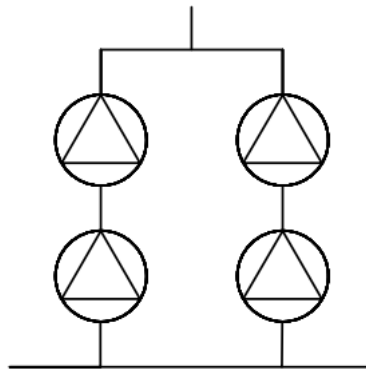


Figura 41 Grupo de bombeo con 2 bombas en serie y 2 bombas en paralelo

Posibles respuestas:

- a.  $H_{GB} = 180 - 7200Q^2$
- b.  $H_{GB} = 60 - 600Q^2$
- c.  $H_{GB} = 60 - 266,6Q^2$
- d.  $H_{GB} = 120 - 1200Q^2$**
- e.  $H_{GB} = 240 - 9600Q^2$
- f. NINGUNA ES CORRECTA

5.3.5.1. Respuesta pregunta 5

Al ser un grupo de bombas conectado en serie y en paralelo su  $H_{GB} = n_s \cdot \left( C1 - C2 \cdot \left( \frac{Q}{n_p} \right)^2 \right)$ , siendo n el número de bombas conectadas, por lo que el resultado es:  
 $H_{GB} = 120 - 1200Q^2$ .

### 5.3.6. Pregunta 6

Teniendo este grupo de bombas y sabiendo que todas las bombas tienen como curva característica  $H = 60 - 2400Q^2$ :

¿Cuál es la  $H$  del grupo de bombas (ver Figura 42)?

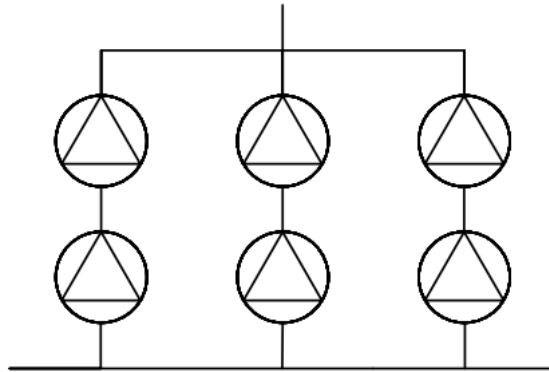


Figura 42 Grupo de bombeo con 2 bombas en serie y 3 bombas en paralelo

Posibles respuestas:

- a.  $H_{GB} = 180 - 7200Q^2$
- b.  $H_{GB} = 60 - 600Q^2$
- c.  $H_{GB} = 60 - 266,6Q^2$
- d.  $H_{GB} = 120 - 1200Q^2$
- e.  $H_{GB} = 120 - 533,3Q^2$**
- f. NINGUNA ES CORRECTA

#### 5.3.6.1. Respuesta pregunta 6

Al ser un grupo de bombas conectado en serie y en paralelo su  $H_{GB} = n_s \cdot \left( C1 - C2 \cdot \left( \frac{Q}{n_p} \right)^2 \right)$ , siendo  $n_p = 3$  el número de bombas conectadas en paralelo y  $n_s = 2$  el número de bombas conectadas en serie, por lo que el resultado es:  $H_{GB} = 120 - 533,3Q^2$ .

Estos ejercicios serán implantados como tarea en el campus virtual, y a continuación se presenta un ejemplo de cómo se visualizarían para que los estudiantes puedan trabajar con ellos (ver Figura 43).

UMA / CV / Formación de Enseñanza Virtual / Mis asignaturas en este Centro / Asignaturas de prácticas / Asignatura de prácticas de Gutiérrez Castillo, Paloma / Tema inicial / Ejercicios trigonometría, derivadas, diseño e inst... / Vista previa

**Navegación por la prueba de conocimiento**

Ankermit Moreno Nicolás

1 2 3 4 5

Revisar para entregar

Comenzar una nueva vista previa

---

**Identificación**

Hola Nicolás

0619971814@uma.es

Mis últimas entradas

Cerrar sesión

---

**Navegación**

- Formación de Enseñanza Virtual
- Mi área personal
- Páginas del sitio
- Asignatura actual
  - Asignatura de prácticas de Gutiérrez Castillo, Paloma
    - Participantes
    - Insignias
    - Calificaciones
    - Tema inicial
    - Notificaciones y anuncios
    - Pregunta V/F H5p
    - Pregunta V/F H5p (copia)
    - Preguntas múltiples
    - Preguntas múltiples: SOLO GRUPO B
    - Fórmula de Carga
    - Número de Reynolds
    - Repasso Números adimensionales

**Asignatura de prácticas de Gutiérrez Castillo, Paloma**

**Pregunta 5**

No respondida aún

Valor: 2.00

Marcar pregunta

Modificar pregunta

Teniendo este grupo de bombas y sabiendo que todas las bombas tienen como curva característica  $H = 60 - 2400Q^2$ :

¿Cuál es la H del grupo de bombas (ver ilustración 22)?

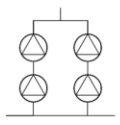


Ilustración 22 Grupo de bombas con 2 bombas en serie y 2 bombas en paralelo

a.  $H_{gr} = 180 - 7200Q^2$   
 b.  $H_{gr} = 60 - 600Q^2$   
 c.  $H_{gr} = 60 - 266,6Q^2$   
 d.  $H_{gr} = 120 - 1200Q^2$   
 e.  $H_{gr} = 240 - 9600Q^2$   
 f. NINGUNA ES CORRECTA

Revisar para entregar

Figura 43. Visualización de un ejemplo de cómo se vería estos problemas de grupo de bombeo en el campus virtual

## 6. CONCLUSIONES

En este TFG se ha tratado de potenciar aspectos matemáticos previos a cursar la asignatura relacionada con máquinas e instalaciones hidráulicas. En concreto, se han analizado problemas básicos de trigonometría en los que pueden aparecer triángulos rectángulos, (bombas sin prerrotación), y triángulos no rectángulos (bombas con prerrotación), en este último caso se analizaron configuraciones con ángulos Alpha tanto agudos como obtusos, siendo  $\alpha$  ángulos entre velocidad de arrastre y la velocidad absoluta. Por otro lado, y siguiendo también ejemplos matemáticos previos, se han formulado problemas de derivadas para el cálculo del máximo rendimiento hidráulico o de la máxima potencia hidráulica.

Una vez abordados los problemas matemáticos, se ha hecho hincapié en fallos típicos relacionados con ejercicios de diseño de rodets de bombas centrífugas, en particular la distinción entre los modelos de infinitos y finitos álabes y la aplicación del cálculo mediante formularios.

Y para finalizar se ha potenciado nuevamente objetivos de aprendizaje de la asignatura relacionado con el cálculo de caudales de redes complejas de tuberías con distintas configuraciones y condiciones de contorno (carga y descarga), se han añadido también accesorios hidráulicos típicos en este tipo de instalaciones como son las válvulas, los puntos de riego o difusores en el caso de turbinas. En último lugar, se han seleccionado bombas incluidas en grupos de bombeo con distintas configuraciones, series y paralelas.

Todo lo anterior cumple el objetivo principal de este trabajo que es la mejora docente mediante ejemplos novedosos que han sido diseñados por el estudiante bajo la supervisión de los tutores.

Algunos ejemplos han sido aplicados a una asignatura de prueba dentro del campus virtual, junto a otros ejemplos de H5p desarrollado por otros estudiantes dentro del mismo marco de innovación docente.

## 7. TRABAJOS FUTUROS

A raíz del desarrollo de este TFG han surgido las distintas líneas futuras:

- Implementar la totalidad de los ejemplos en el campus virtual e incluirlos en el sistema de evaluación de las asignaturas relacionadas con las turbomáquinas hidráulicas.
- Ampliar la base de datos con más ejemplos
- Implementar de H5P estos ejemplos, mejorando la parte gráfica, dándole un formato más dinámico, tanto a la pregunta como a la respuesta.
- Realizar una encuesta al alumnado para conocer su grado de satisfacción, después de realizar estos tipos de ejemplos.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Ortega, J. G. (2009). *Problemas resueltos de máquinas hidráulicas y transitorios hidráulicos*. Universidad Pública de Navarra.
- [2] Zamora Parra, B., & Viedma Robles, A. (2016). *Máquinas hidráulicas: teoría y problemas*.
- [3] Soriano, J. A. (2003) *Mecánica de fluidos incompresibles y turbomáquinas hidráulicas. 5ª Edición actualizada. Madrid: Ciencia, 3*. Editorial de la Universidad Politécnica de Cartagena
- [4] C. del Pino, L.Parras, J. Velazquez R. Fernandez Feria. (2016). *Apuntes de turbomáquinas hidráulicas*. Universidad de Málaga
- [5] Larson, R., & Edwards, B. H. (2022). *Calculus*. Cengage Learning.
- [6] Tizon Pulido, J. M., Cabrera Revuelta, E. (2021). *Problemas de turbomáquinas*. Dextra Editorial.
- [7] Mataix, C. (1986). *Mecánica de de Fluidos y máquinas hidráulicas*. Ed. El castillo.
- [8] Mataix, C. (2009). *Turbomáquinas hidráulicas*. Ed. U.Pontificia de Comillas.
- [9] R.K. Turton. (1995). *Principles of turbomachinery*. Chapman & Hall.
- [10] Bain, K. (2005). *Lo que hacen los mejores profesores univ*. Universitat de València.

## ANEXOS

### ANEXO I

En este anexo tenemos el formulario que utilizamos para conseguir la respuesta en los problemas de diseño de rodets de bombas y turbinas centrífugas.

$$(1) \eta v = \frac{Q}{Q_R}$$

$$(2) C_H = \frac{H_t}{H_{t\infty}} = 1 - \frac{1,2 \cdot (1 + \sin \beta_{2a})}{z \cdot \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right)}$$

$$(3) H_{t\infty} = \frac{u_2^2 - u_1^2}{g} - \frac{w \cdot Q_R}{2\pi g} \cdot \left( \frac{1}{l_2 \cdot \tan \beta_{2a}} - \frac{1}{l_1 \cdot \tan \beta_{1a}} \right)$$

$$(4) W_t = \rho \cdot g \cdot Q_R \cdot H_t$$

$$(5) R = 1 - \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g \cdot H_t}$$

$$(6) H_t = \frac{v_{u2} \cdot u_2 - v_{u1} \cdot u_1}{g}$$

$$(7) \delta = \beta_{2a} - \beta_2$$

### ANEXO II

A continuación, tenemos el código que hemos trabajado en la aplicación MATLAB para conseguir la resolución de nuestro problema.

```
function f = finstalacion4(q)
```

```
QT = q(1);
```

```
Q1 = q(2);
```

```
Qk = q(3);
```

```
C1 = 30;
```

```
C2 = 150;
```

```
D = 0.05;
```

```
L = 30;
```

```
H1 = 80;
```

```
k = 100;
```

```
lambda=0.03;
```

```
alpha = 8/(9.81*pi^2*D^4);
```

```
f=[
```

```

-H1+C1+C2*QT^2+(((lambda*L)/D)*alpha*Q1^2);
(1+k)*alpha*Qk^2-C1-C2*QT^2;
Q1-QT-Qk
];
end

```

Considerando QT como el caudal de la turbina y Q1 y Qk como los caudales de las ramas adicionales, los demás datos los proporciona el problema.

Mediante la implementación de este código, podemos determinar los valores de los caudales mencionados.

### ANEXO III

A continuación, tenemos el código que hemos trabajado en la aplicación MATLAB para conseguir la resolución de nuestro problema.

```

function f = instalacion5(q)
QB = q(1);
Q2 = q(2);
C1 = 150;
C2 = 2000;
D = 0.05;
L = 30;
H4 = 10;
H2 = 5;
lambda=0.03;
alpha = 8/(9.81*pi^2*D^4);
f=[
H4+alpha*Q2^2+lambda*L/D*alpha*Q2^2-
C1+C2*QB^2+alpha*QB^2+lambda*L/D*alpha*QB^2;
Q2-QB
];
end

```

Considerando QB como el caudal de la bomba y Q2, que es igual a Q1, como los caudales de las ramas adicionales, los demás datos los proporciona el problema.

Mediante la implementación de este código, podemos determinar los valores de los caudales mencionados.

#### ANEXO IV

A continuación, tenemos el código que hemos trabajado en la aplicación MATLAB para conseguir la resolución.

```
function f = finstalacion6(q)
Q = q(1);
Q1 = q(2);
Q2 = q(3);
Q3 = q(4);
Q4 = q(5);
Q5 = q(6);
Qk = q(7);
C1 = 250;
C2 = 1500;
D = 0.05;
L = 30;
H1 = 100;
H2 = 75;
lambda=0.03;
alpha = 8/(9.81*pi^2*D^4);
k = 500;
f=[
(1+((lambda*L)/D)+k)*((alpha)*Qk^2)-
C1+C2*Q^2+((alpha)*Q1^2)+(((lambda*L)/D)*alpha*(Q1^2+Q4^2+Q
^2));
H2-
C1+C2*Q^2+((alpha)*Q2^2)+(((lambda*L)/D)*alpha*(Q2^2+Q5^2+Q
4^2+Q^2));
H2-
C1+C2*Q^2+((alpha)*Q2^2)+(((lambda*L)/D)*alpha*(Q2^2+Q3^2+Q
^2));
Q1-Qk;
Q-Q3-Q4;
```

```
Q4-Q1-Q5;  
Q2-Q3-Q5;  
];  
end
```

Considerando  $Q_B$  como el caudal de la bomba y  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$ ,  $Q_4$ ,  $Q_5$  y  $Q_k$ , como los caudales de las ramas adicionales, los demás datos los proporciona el problema.

Mediante la implementación de este código, podemos determinar los valores de los caudales mencionados.