

Universidad de Málaga
Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Telecomunicación



TESIS DOCTORAL

Técnicas de resolución de la ambigüedad de las
medidas de fase en sistemas de navegación por satélite

Autor:

UNAI FERNÁNDEZ PLAZAOLA

Directores:

TERESA M. MARTÍN GUERRERO
JOSÉ TOMÁS ENTRAMBASAGUAS MUÑOZ



D^a. **Teresa M. Martín Guerrero** y D. **José Tomás Entrambasaguas Muñoz**, profesores doctores del Departamento de Ingeniería de Comunicaciones de la Universidad de Málaga

CERTIFICAN:

Que D. Unai Fernández Plazaola, Ingeniero de Telecomunicación, ha realizado en el Departamento de Ingeniería de Comunicaciones de la Universidad de Málaga, bajo nuestra dirección el trabajo de investigación correspondiente a su TESIS DOCTORAL titulada:

“Técnicas de resolución de la ambigüedad de las medidas de fase en sistemas de navegación por satélite”

En dicho trabajo se han propuesto aportaciones originales para el problema de la resolución de la ambigüedad en los sistemas de navegación por satélite. Las aportaciones más importantes se recogen en una formulación unificada para el estudio de los distintas técnicas existentes y la proposición de dos nuevos métodos adaptados a los futuros sistemas de navegación: el método Nulo3 y el método MOCA (*MODified Cholesky factorization for Ambiguity resolution*).

Por todo ello, consideramos que esta Tesis es apta para su presentación al Tribunal que ha de juzgarla. Y para que conste a efectos de lo establecido en el Artículo 8º del Real Decreto 778/1998, regulador de los Estudios de Tercer Ciclo-Doctorado, AUTORIZAMOS la presentación de esta Tesis en la Universidad de Málaga.

Málaga a _____ de _____ de _____

Fdo: Dra.D^a.Teresa M. Martín Guerrero

Fdo: Dr.D.José Tomás Entrambasaguas Muñoz

**UNIVERSIDAD DE MÁLAGA
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DE
TELECOMUNICACIÓN**

Reunido el tribunal examinador en el día de la fecha, constituido por:

Presidente: Dr. D. _____

Secretario: Dr. D. _____

Vocales: Dr. D. _____

Dr. D. _____

Dr. D. _____

para juzgar la Tesis Doctoral titulada *Técnicas de resolución de la ambigüedad de las medidas de fase en sistemas de navegación por satélite* realizada por D. Unai Fernández Plazaola y dirigida por la Dra. D^a. Teresa M. Martín Guerrero y el Dr. D. José Tomás Entrambasaguas Muñoz, acordó por

_____ otorgar la calificación de
_____ y para que conste, se
extiende firmada por los componentes del tribunal la presente diligencia.

Málaga a ____ de _____ del ____

El presidente:

El secretario:

Fdo.: _____

Fdo.: _____

El vocal:

El vocal:

El vocal:

Fdo.: _____

Fdo.: _____

Fdo.: _____

Agradecimientos

A los primeros que he de mencionar es a los directores de tesis. La labor de guía de Teresa junto con su apoyo e implicación en este trabajo de investigación han sido decisivos. Por otro lado, la visión y el grado de estructuración de ideas que posee Tomás han permitido entender realmente lo que se estaba haciendo.

También he de agradecer a mis compañeros de despacho, no sólo por lo agradable que resulta trabajar en compañía de ellos, sino por la ayuda que me han prestado desinteresadamente. A Eduardo por su disposición a colaborar en la resolución de algunos de los escollos con los que me he encontrado. A Paris por sus consejos y propuestas en el enfoque de la investigación. Así mismo, no debo dejar de nombrar a otros compañeros que han hecho mucho más amena la realización de esta Tesis, el caso de Francis, Jesús, Nacho Herrero, Jaca y Nacho Molina.

En el ámbito personal, quiero recordar a mi familia por su apoyo y cariño en todo momento. A mis padres, cuyo ejemplo me ha permitido llegar hasta donde estoy ahora. A mi abuela, que siempre ha estado pendiente de todos mis progresos. A Julen y Martha, y en especial a Aurora, pues es la causante de la felicidad de la que disfruto, fundamental para conseguir cualquier objetivo en la vida.

En el terreno profesional he de agradecer a la Agencia Espacial Europea por las medidas proporcionadas, generadas por la empresa Spectra Precision Terrasat (contrato nº 12.406/77/NL/DS) y a Maria Belmontes Rivas por la ayuda prestada.

Este trabajo ha sido subvencionado por la Junta de Andalucía, Plan Andaluz de Investigación, Grupo TIC-102.

Índice

Resumen	v
Abstract	vii
Lista de acrónimos	ix
Lista de símbolos	xiii
Introducción	1
1. Navegación por satélite	5
1.1. Sistemas de navegación por satélite	5
1.1.1. Introducción	5
1.1.2. Principio de posicionamiento a partir de satélites	6
1.1.3. Segmentos de un sistema de navegación por satélite	8
1.1.4. Características de las señales	9
1.1.5. Sistema de posicionamiento global (GPS)	11
1.1.6. Sistema Galileo	12
1.1.7. Sistemas de coordenadas y de referencia temporal	16
1.2. Tipos de medidas	17
1.2.1. Medidas de pseudodistancia	17
1.2.2. Medidas de fase	18
1.2.3. Fuentes de error de las medidas	21
1.2.4. Precisión de las medidas	24
1.3. Métodos de determinación de la posición	25
1.3.1. Posicionamiento de los satélites	26
1.3.2. Estimación de la posición mediante medidas de pseudodistancia	28
1.3.3. Dispersión de la precisión por la geometría de los satélites	31
1.3.4. Técnicas diferenciales	34
1.3.5. Estimación de la posición mediante medidas de fase	36
1.4. Conclusiones	38

2. Resolución de la ambigüedad de las medidas de fase	41
2.1. Planteamiento del problema	41
2.1.1. Sistema de ecuaciones básico	41
2.1.2. Planteamiento con aproximación real	43
2.1.3. Planteamiento sin aproximación real	46
2.2. Métodos de resolución de la ambigüedad	47
2.2.1. Introducción	47
2.2.2. Método LAMBDA	49
2.2.3. Método Nulo	57
2.2.4. Método ARCE	63
2.3. Conclusiones	67
2.A. Apéndice: Simplificación de la función \mathbf{f}_{n_D}	69
3. Métodos Nulo3 y MOCA	71
3.1. Utilización de medidas procedentes de tres frecuencias	71
3.1.1. Planteamiento	71
3.1.2. Técnica <i>wide-lane</i>	72
3.2. Método Nulo3	76
3.2.1. Obtención del punto inicial	76
3.2.2. Criterio de evaluación de candidatos y elección de la solución	76
3.2.3. Definición del espacio de búsqueda	77
3.2.4. Estrategia de exploración de candidatos	78
3.3. Método MOCA	83
3.3.1. Obtención del punto inicial	83
3.3.2. Criterio de evaluación de candidatos y elección de la solución	83
3.3.3. Definición del espacio de búsqueda	84
3.3.4. Estrategia de exploración de candidatos	87
3.4. Conclusiones	90
3.A. Apéndice: Demostración de $\mathbf{V}_D \mathbf{V}_I^{-1} = \mathbf{H}_D \mathbf{H}_I^{-1}$	92
3.B. Apéndice: Volumen del espacio de búsqueda del método MOCA	94
3.B.1. Volumen del hiper-cilindro inclinado	94
3.B.2. Volumen del hiper-paralelepípedo.	96
4. Simulador para evaluación de métodos de resolución de la ambigüedad	99
4.1. Simulaciones de satélites y receptores	99
4.1.1. Trazador de órbitas	100
4.1.2. Simulador de receptor	104
4.1.3. Dispersión de la precisión	108
4.2. Simulación de métodos de resolución de la ambigüedad de fase	112
4.3. Validación del simulador	118
4.3.1. Medidas del TCAR TIM	119
4.3.2. Comparación de las medidas del simulador con las medidas del TCAR TIM	124

4.4. Conclusiones	131
5. Evaluación de los métodos de resolución de la ambigüedad	133
5.1. Parámetros y condiciones de las simulaciones	133
5.2. Método Nulo3	135
5.2.1. Utilización de la técnica <i>wide-lane</i>	135
5.2.2. Estrategia de exploración	136
5.3. Método MOCA	138
5.4. Comparativa de métodos	143
5.4.1. Covarianza del error de las medidas bien estimada	144
5.4.2. Covarianza del error de las medidas mal estimada	146
5.4.3. Comparativa utilizando medidas del TCAR TIM 2	149
5.5. Conclusiones	151
6. Conclusiones y líneas futuras	153
Apéndice A. Resolución de sistemas sobredeterminados	157
A.1. Solución de mínimos cuadrados ordinaria	158
A.2. Solución de mínimos cuadrados con covarianza de las medidas conocida	158
Apéndice B. Cálculo estadístico de $\Omega_{\text{máx}}$	161
Referencias	165

Resumen

Los sistemas de navegación por satélite existentes, el GPS (*Global Positioning System*) y el GLONASS (*Global Navigation Satellite System*) ofrecen la posibilidad de que usuarios con receptores apropiados puedan determinar las coordenadas de su posición. Dicha posición la pueden obtener con más o menos precisión de acuerdo con el tipo de medidas utilizadas. Las medidas de pseudodistancia permiten alcanzar precisiones del orden de metros. Las medidas de fase permiten alcanzar precisiones del orden de centímetros, pero tienen una ambigüedad inherente, el número de ciclos de portadora acumulados. La problemática de la resolución de la ambigüedad no es trivial y en general tiene un alto coste computacional. En los últimos años se han propuesto un gran número de métodos para resolver dicha ambigüedad de la manera más eficaz posible.

El alto coste computacional de la resolución de la ambigüedad se deriva de la necesidad de ensayar o explorar un gran número de combinaciones de enteros o candidatos, hasta dar con la solución. Los distintos métodos suelen utilizar formulaciones distintas, con lo que se dificulta la comprensión de las diferencias entre unos y otros y la correcta comparación de sus prestaciones. Probablemente, el método que ofrece mejores resultados es el método LAMBDA (*Least square AMBiguity Decorrelation Adjustment*), propuesto en [Teun95]. Sus buenos resultados se deben a la decorrelación de la ambigüedad que hace, previa a la exploración de candidatos. El método Nulo, propuesto en [Mart95], también ofrece buenos resultados gracias a que realiza la exploración de candidatos por el subespacio nulo asociado a la solución. El método ARCE (*Ambiguity Resolution using Constraint Equations*), propuesto en [Park97], reduce el número de candidatos a explorar, gracias a una reducción del número de dimensiones del problema y consigue así una exploración muy eficaz.

En esta tesis se propone una formulación que permite describir de manera unificada los distintos métodos existentes y con la que se ha descrito el método LAMBDA, el método Nulo y el método ARCE. Dicha descripción unificada ha permitido analizar convenientemente las ventajas e inconvenientes de cada uno de los métodos. El método LAMBDA es el que resuelve la ambigüedad de manera más eficaz, pero, en general, necesita medidas relativas a dos o más instantes de tiempo o épocas, o bien medidas de sólo una época, si mezcla las medidas de fase con las medidas de pseudodistancia. El método Nulo es capaz de resolver la ambigüedad con medidas de tan sólo una época,

pero su eficacia es algo menor. El método ARCE necesita medidas de varias épocas, pero realiza una exploración más eficaz que la del método Nulo.

El GPS y el futuro sistema Galileo, que desarrollará Europa, ofrecerán medidas de fase a tres frecuencias distintas. Los métodos existentes puede aprovechar esta circunstancia y en cualquier caso, deben adaptarse a ella. En esta tesis se proponen dos nuevos métodos de resolución de la ambigüedad. El primero de ellos, el método Nulo3, es una adaptación del método Nulo a la posibilidad de contar con tres frecuencias. La estrategia de exploración de candidatos que utiliza, similar a la del método ARCE, es más eficaz que la del método Nulo, aunque no tanto como la del método LAMBDA. El segundo método que se propone es el método MOCA (*MOdified Cholesky factorization for Ambiguity resolution*) y al igual que el método Nulo o el método Nulo3, puede resolver la ambigüedad con medidas de tan sólo una época, sin necesidad de mezclar las medidas de fase con las medidas de pseudodistancia. La estrategia de exploración de candidatos que utiliza es similar a la del método LAMBDA, con la que alcanza una eficacia similar.

Para evaluar las prestaciones de los diferentes métodos se ha desarrollado un simulador de métodos de resolución de la ambigüedad. Dicho simulador ha sido validado comparando las medidas que genera con las que genera un emulador del sistema Galileo. Los resultados obtenidos con el simulador han permitido comprobar los problemas que da el mezclar las medidas de fase con las medidas de pseudodistancia en condiciones en las que el error que afecta a las medidas esté mal estimado. Con ello, se ha podido demostrar cómo el método Nulo3 y el método MOCA obtienen mejores resultados que el método LAMBDA en esas condiciones.

Abstract

The existing navigation satellite systems, GPS (Global Positioning System) and GLONASS (Global Navigation Satellite System) offer to those users which have appropriate receivers the possibility of determining their position coordinates. This position would be more or less precise depending on the type of measurements used. The pseudorange measurements allow to obtain a precision of several meters. The phase measurements allow to obtain a precision of several centimeters, but they have an inherent ambiguity, the accumulated carrier number of cycles. The ambiguity resolution problem is not trivial and has, in general terms, a high computational cost. In the last years a great deal of methods have been proposed to accomplish this ambiguity resolution in the most efficient way.

The ambiguity resolution has a high computational cost because a high number of integer combinations or candidates, must be searched for in order to find the solution. The existing methods have different formulations, for that reason it is difficult to understand their differences and to compare their features. Probably, the LAMBDA (Least square AMBiguity Decorrelation Adjustment) method, proposed in [Teun95], has the better results. Their good results are due to the ambiguity decorrelation performed before searching for candidates. The Null method, proposed in [Mart95], has also good results because the candidates search is performed by the null-space associated to the solution. The ARCE (Ambiguity Resolution using Constraint Equations) method, proposed in [Park97], performs an efficient search for candidates because it reduces the number of dimensions of the problem, and consequently the number of candidates to search.

In this doctoral thesis an unified formulation to describe the existing methods is proposed and used to describe LAMBDA, Null and ARCE methods. This unified description has served to adequately analyze the advantages and disadvantages of each method. The most efficient method resolving the ambiguity is the LAMBDA method, but, in general, it needs measurements from two or more epochs, or from only one epoch when phase and pseudorange measurements are mixed together. The Null method resolves the ambiguity with measurements from only one epoch, but it is less efficient. The ARCE method needs measurements from several epochs, but it is more efficient performing the candidates search than the Null method.

The GPS and the future Galileo will offer phase measurements from three different frequencies. The existing methods can benefit from this circumstance and in any case, they should be adapted to it. In this doctoral thesis two new methods to resolve the ambiguity are proposed. The first one, the Null3 method, is an adaptation of the Null method to the availability of three frequencies. The search strategy used by the Null3 method allows to perform the candidates search more efficiently than the Null method but not as efficient as the LAMBDA method. This strategy is similar to the one used by the ARCE method. The second method proposed is the MOCA (MODified Cholesky factorization for Ambiguity resolution) method and, as Null and Null3 methods, it can resolve the ambiguity with measurements from only one epoch and without mixing phase and pseudorange measurements. The search strategy used by the MOCA method is similar to the one of LAMBDA method and so it has a similar efficiency.

A simulator software tool has been developed in order to evaluate the features of the different methods. The simulator has been validated comparing its measurements with the measurements provided by a Galileo emulator. The results obtained with the simulator have evidenced the problem of mixing phase and pseudorange measurements when the error in measurements is not correctly estimated. In this situation, it has been shown how the Null3 and the MOCA methods have better results than the LAMBDA method.

Lista de Acrónimos

2º TCAR TIM	2ª reunión sobre técnicas de resolución de la ambigüedad con tres portadoras (<i>2nd Technical Interchange Meeting on Three Carrier Ambiguity Resolution methods</i>)
ARCE	Resolución de la ambigüedad utilizando ecuaciones con restricciones (<i>Ambiguity Resolution using Constraint Equations</i>)
BPSK	Modulación de dos fases (<i>Binary-Phase Shift Keying</i>)
C/A	Código de ajuste grueso (<i>Coarse Acquisition code</i>)
CDF	Función de distribución de probabilidad (<i>Cumulative Distribution Function</i>)
CDMA	Multiplexación por división de códigos (<i>Code Division Multiple Access</i>)
CL	Código de longitud larga (<i>Long length Code</i>)
CM	Código de longitud moderada (<i>Moderate length Code</i>)
CS	Servicio comercial (<i>Commercial Service</i>)
DOP	Dispersión de la precisión (<i>Dilution Of Precission</i>)
ECEF	Sistema de coordenadas centrado y fijo en la Tierra (<i>Earth-Centered Earth-Fixed</i>)
EGNOS	Sistema de navegación geostacionario europeo (<i>European Geostationary Navigation Overlay Service</i>)
ESA	Agencia Espacial Europea (<i>European Space Agency</i>)

FASF	Algoritmo de resolución rápida de la ambigüedad basada en filtrado (<i>Fast Ambiguity Search Filtering algorithm</i>)
FARA	Estrategia de resolución rápida de la ambigüedad (<i>Fast Ambiguity Resolution Approach</i>)
FLL	Circuito de sincronización de frecuencia (<i>Frequency Lock Loop</i>)
GDOP	Dispersión de la precisión geométrica (<i>Geometric Dilution Of Precission</i>)
GLONASS	Sistema de navegación por satélite de la antigua URSS (<i>GLOBAL NAVigation Satellite System</i>)
GNSS	Sistema de navegación por satélite (<i>Global Navigation Satellite System</i>)
GPS	Sistema de navegación por satélite de EEUU (<i>Global Positioning System</i>)
GST	Sistema de referencia temporal del Galileo (<i>Galileo System Time</i>)
GTRF	Sistema de coordenadas del Galileo (<i>Galileo Terrestrial Reference Frame</i>)
HDOP	Dispersión de la precisión horizontal (<i>Horizontal Dilution Of Precission</i>)
LAMBDA	Ajuste de mínimos cuadrados con decorrelación de la ambigüedad (<i>Least-square AMBIGuity Decorrelation Adjustment</i>)
LSAST	Técnica de búsqueda de la ambigüedad por mínimos cuadrados (<i>Least Squares Ambiguity Search Technique</i>)
MOCA	Factorización de Cholesky modificada para la resolución de la ambigüedad (<i>MODified Cholesky factorization for Ambiguity resolution</i>)
NAVSTAR GPS	Sistema de navegación por satélite de EEUU (<i>NAVigation SysTem And Rangig - Global Positioning System</i>)
OS	Servicio Abierto (<i>Open Service</i>)
OTF	Técnicas ‘al vuelo’ (<i>On The Fly</i>)

P	Código de precisión (<i>Precision code</i>)
PC	Percentil
PDF	Función densidad de probabilidad (<i>Probability Density Function</i>)
PDOP	Dispersión de la precisión en la posición (<i>Position Dilution Of Precision</i>)
PLL	Circuito de sincronización de fase (<i>Phase Lock Loop</i>)
PRN	Código pseudoaleatorio (<i>PseudoRandom Noise code</i>)
PRS	Servicio público regulado (<i>Public Regulated Service</i>)
QPSK	Modulación de cuatro fases (<i>Quadrature-Phase Shift Keying</i>)
RINEX	Formato de intercambio independiente del receptor (<i>Receiver INdependent EXchange</i>)
SAR	Servicio de búsqueda y rescate (<i>Search and Rescue Service</i>)
SNR	Relación Señal a Ruido (<i>Signal to Noise Ratio</i>)
SoL	Servicio de seguridad para la vida humana (<i>Safety-of-Life service</i>)
TAI	Hora atómica internacional (<i>International Atomic Time</i>)
TDOP	Dispersión de la precisión temporal (<i>Time Dilution Of Precision</i>)
UML	Lenguaje Unificado de Modelado (<i>Unified Modeling Language</i>)
UTC	Sistema de referencia temporal universal (<i>Universal Time Coordinate</i>)
VDOP	Dispersión de la precisión vertical (<i>Vertical Dilution Of Precision</i>)
WGS-84	Modelo físico de la Tierra de 1984 (<i>World Geodetic System 1984</i>)

Lista de Símbolos

- A** Matriz que relaciona las medidas con la estimación de la solución
- A** Receptor A
- B** Matriz de ponderación del residuo cuadrático Ω_k
- B** Receptor B
- D** Matriz diagonal de la descomposición de Cholesky
- E** Anomalía excéntrica
- E_m** Volumen de una figura m dimensional (Número de candidatos)
- H** Matriz de cosenos directores correspondiente a una época
- H_J** Matriz de cosenos directores correspondiente a varias épocas (*)
- I** Matriz identidad
- I_{ono}** Parámetro que define el error ionosférico
- L** Matriz triangular inferior
- M** Anomalía media
- P** Matriz de permutación
- Q_J** Covarianza de las medidas de varias épocas (*)
- $Q_{\hat{n}_f}$** Covarianza de la estimación real del vector de ambigüedades
- $Q_{\hat{s}}$** Covarianza de la estimación de la línea de base y las ambigüedades

\mathbf{Q}_v	Covarianza del error en las medidas de fase
\mathbf{Q}_w	Covarianza del error en las medidas de pseudodistancia
$\mathbf{Q}_{\hat{x}}$	Covarianza de la estimación de la línea de base
\mathbf{Q}_y	Covarianza de las medidas de una época
$\mathbf{Q}_{\Delta\mathbf{x}}$	Covarianza de $\Delta\mathbf{x}$
$\mathbf{Q}_{\Delta\rho}$	Covarianza de $\Delta\rho$
S_i	Semieje i de un elipsoide
$Round(x)$	Función que devuelve el entero más cercano a x
\mathbf{U}	Matriz de la descomposición en valores singulares de \mathbf{B}
\mathbf{V}	Matriz nulo de la matriz \mathbf{B}
\mathbf{W}	Matriz nulo de la matriz \mathbf{H}^T
V_m	Volumen de una esfera m -dimensional de radio unidad
\mathbf{Z}	Matriz de la transformación usada por el método LAMBDA
a	Semieje mayor de una elipse
\mathbf{b}	Vector línea de base
c	Velocidad de la luz
\mathbf{d}	Vector de distancias
d	Distancia
e	Excentricidad de la órbita
f	Frecuencia de la portadora
$\mathbf{f}_{\mathbf{n}_D}$	Función que permite obtener \mathbf{n}_{k_D} a partir \mathbf{n}_{k_I}
m	Número de ambigüedades
\mathbf{n}	Vector de ambigüedades

\mathbf{n}_0	Punto inicial de la exploración de candidatos
n	Número entero de ciclos ambiguo
\mathbf{n}_i	Vector de ambigüedades para la frecuencia i
$\hat{\mathbf{n}}_f$	Estimación real del vector de ambigüedades
\mathbf{n}_k	Vector candidato a la solución de la ambigüedad
\mathbf{n}_{k_I}	Parte independiente del vector \mathbf{n}_k
\mathbf{n}_{k_D}	Parte dependiente del vector \mathbf{n}_k
n_v	Movimiento medio (<i>mean motion</i>)
\mathbf{r}	Vector residuo
r	Radio de la hiper-esfera de búsqueda
$\hat{\mathbf{s}}$	Estimación de la línea de base y el vector de ambigüedades
s_i	Semieje normalizado i de una elipsoide
s	Número de satélites
t_r	Deriva del reloj del receptor
t_s	Deriva del reloj del satélite
\mathbf{u}	Vector unitario
\mathbf{v}	Vector error de medidas de fase de una época
\mathbf{v}_i	Vector error de medidas de fase para la frecuencia i
\mathbf{v}_J	Vector error de medidas de fase de varias épocas (*)
v_r	Error en la medida de fase debido al ruido del receptor
v_{mu}	Error en la medida de fase debido al efecto multicamino
\mathbf{w}	Vector de errores en medidas de pseudodistancia
w_r	Error en la medida de pseudodistancia debido al ruido del receptor

w_{mu}	Error en la medida de pseudodistancia debido al efecto multicamino
\mathbf{x}	Vector línea de base referido a la posición aproximada del receptor
$\hat{\mathbf{x}}$	Estimación de la línea de base \mathbf{x}
\mathbf{x}_r	Vector de coordenadas del receptor
$\hat{\mathbf{x}}_r$	Vector de coordenadas de la estimación de la posición del receptor
\mathbf{y}	Vector de medidas de una época
\mathbf{y}_i	Vector de medidas para la frecuencia i
\mathbf{y}_J	Vector de medidas de varias épocas (*)
$\hat{\mathbf{z}}_f$	Estimación real del vector de ambigüedades decorrelacionado
\mathbf{z}_k	Vector candidato decorrelacionado
$\Delta\mathbf{x}$	Vector diferencia de coordenadas del receptor real y aproximada
$\Delta\rho$	Vector diferencia de distancias aproximadas y medidas de pseudodistancia
Δt	Retardo de propagación de la señal del satélite
Σ	Matriz diagonal de la descomposición en valores singulares
Ω_k	Residuo cuadrático asociado a un candidato \mathbf{n}_k
$\Omega_{m\acute{a}x}$	Valor máximo permitido de Ω_k
α_{iono}	Error en la medida debido al efecto de la Ionosfera
β_{tropo}	Error en la medida debido al efecto de la Troposfera
δ_f	Desviación típica del error en las medidas de fase en ciclos
χ_k^2	Alternativa a Ω_k usada por el método LAMBDA
$\chi_{m\acute{a}x}^2$	Valor máximo permitido de χ_k^2
ϕ	Medida de fase
γ	Factor oblicuo

- λ Según el contexto, autovalor o longitud de onda
- ρ Medida de pseudodistancia
- σ_c Desviación típica del error en las medidas de pseudodistancia
- $\hat{\sigma}_c$ Estimación de σ_c
- σ_f Desviación típica del error en las medidas de fase
- $\hat{\sigma}_f$ Estimación de σ_f
- μ Producto de la constante gravitación universal G y la masa de la Tierra
- $[x]$ Función que devuelve el entero más cercano a x hacia infinito
- (*) o correspondiente a medidas de fase y pseudodistancia mezcladas

Introducción

Objetivos de la Tesis

Los sistemas de navegación por satélite (*Global Navigation Satellite System*, GNSS) permiten que un usuario, con un receptor específico, pueda determinar las coordenadas de su posición de forma precisa. Actualmente se encuentran en funcionamiento dos sistemas, el GPS (*Global Positioning System*) desarrollado por los Estados Unidos y el GLONASS (*Global Navigation Satellite System*) desarrollado por la antigua Unión Soviética y propiedad ahora de la Federación Rusa. En un futuro próximo la Unión Europea pondrá en funcionamiento el nuevo sistema Galileo y EEUU modernizará el actual GPS.

Los satélites de los GNSS transmiten señales a partir de las cuales los receptores pueden obtener dos tipos de medidas. Las primeras son las denominadas medidas de pseudodistancia, y con ellas los receptores pueden determinar su posición con una precisión del orden de varios metros. Las segundas son medidas de la fase de la portadora transmitida por los satélites, mucho más precisas, con las que la precisión en la posición puede llegar a ser del orden de centímetros.

Las medidas de fase, aunque muy precisas, tienen un inconveniente y es que presentan una ambigüedad inherente, el número entero de ciclos de portadora acumulados en la fase. Por tanto, para conseguir alta precisión con ellas es necesario resolver dicha ambigüedad. El problema de la resolución de la ambigüedad de las medidas de fase es costoso computacionalmente, pues no admite solución analítica directa y requiere ensayar un gran número de combinaciones de enteros hasta encontrar la solución correcta. Numerosos métodos se han propuesto para resolver la ambigüedad de la manera más eficaz y con el mínimo coste computacional posible. La necesidad de reducir dicho coste viene impuesta por el interés del posicionamiento preciso en aplicaciones en las que el receptor se mueve con rapidez.

Aunque existe un gran número de propuestas para resolver la ambigüedad, los diferentes métodos suelen utilizar formulaciones distintas, con lo que no es fácil comparar y evaluar las prestaciones de unos frente a otros. De los métodos propuestos, probablemente el método LAMBDA (*Least square AMbiguity Decorrelation Adjustment*), presentado en [Teun95], sea el que mejores prestaciones ofrece. Otros métodos como el método Nu-

lo, presentado en [Mart95] ó el método ARCE (*Ambiguity Resolution using Constraint Equations*), presentado en [Park97], ofrecen también buenos resultados.

La mayoría de los métodos de resolución de la ambigüedad han sido propuestos para el GPS actual, el cual ofrece medidas de fase a dos portadoras, una de ellas poco accesible. Con el nuevo sistema Galileo y la modernización del GPS, tres portadoras estarán disponibles. Esta circunstancia puede ser aprovechada y debe ser tenida en cuenta al abordar la problemática de la resolución de la ambigüedad en los futuros GNSS.

El objetivo principal de esta tesis es el estudio y la formulación unificada de los métodos de resolución de la ambigüedad existentes y la proposición de nuevas alternativas, adaptadas a las nuevas posibilidades que ofrecerán los futuros GNSS. De manera más concreta los objetivos son los siguientes:

- **Creación de una formulación unificada.** Una vez estudiados los métodos existentes más significativos, se pretende crear una formulación que permita describir de manera unificada cualquier técnica de resolución de la ambigüedad. El objetivo es que dicha formulación permita aclarar las diferencias entre los métodos y poner de manifiesto las cualidades de unos frente a otros.
- **Creación de un simulador de evaluación de métodos de resolución de la ambigüedad.** Para poder hacer una evaluación de las prestaciones de cualquiera de los métodos y poder hacer estudios comparativos entre unos y otros, será necesaria la creación de un simulador que permita poner a prueba las diferentes técnicas ante diferentes situaciones.
- **Estudio de las prestaciones de los métodos existentes.** Con ayuda de la formulación unificada y el simulador se estará en condiciones de evaluar las prestaciones, así como el comportamiento ante condiciones adversas, de los métodos existentes.
- **Proposición de nuevos métodos.** El análisis de las prestaciones de los métodos existentes permitirá abordar el último objetivo: la proposición de nuevas técnicas de resolución de la ambigüedad que, por un lado, obtengan mejores prestaciones y por otro lado, estén adaptadas a las nuevas condiciones que ofrecerán los futuros GNSS.

Organización de la Tesis

La figura 1 ilustra cómo se organiza la presente tesis.

En el capítulo 1 se describen los sistemas de navegación existentes en la actualidad, así como su evolución prevista. Por otro lado, se analizan las características de las señales y medidas que ofrecen, estudiando los procedimientos que permiten a un receptor específico determinar las coordenadas de su posición.

En el capítulo 2 se presenta la formulación unificada que permite analizar en los mismos términos las distintas técnicas de resolución de la ambigüedad. En concreto, se estudian, con dicha formulación, el método LAMBDA, el método Nulo y el método ARCE.

En el capítulo 3 se proponen dos nuevas técnicas de resolución de la ambigüedad. El método Nulo3, que es una adaptación del método Nulo a las posibilidades que ofrecerán los futuros GNSS y el método MOCA (*MOdified Cholesky factorization for Ambiguity resolution*).

En el capítulo 4 se describe el simulador desarrollado para la evaluación de las técnicas de resolución de la ambigüedad. Dicho simulador permite evaluar las prestaciones de los métodos descritos en el capítulo 2 y los propuestos en el capítulo 3. El capítulo 4 incluye, así mismo, la validación del simulador, al comparar las medidas que genera con medidas provenientes de un emulador del sistema Galileo.

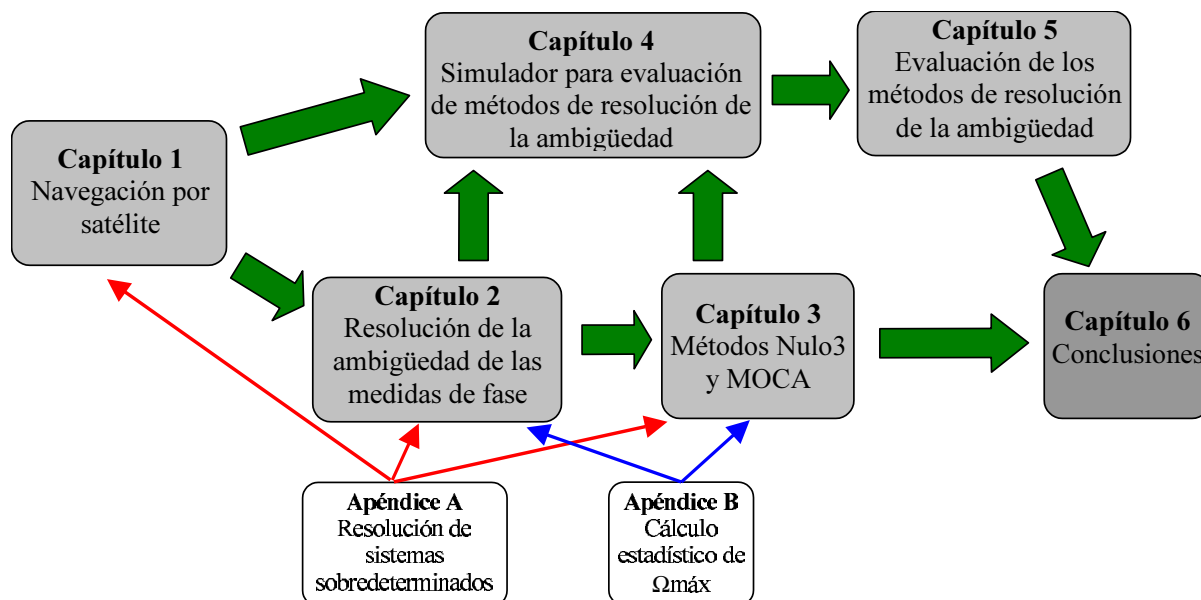


Figura 1: Organización de la Tesis

En el capítulo 5 se evalúan las prestaciones de los métodos descritos en los capítulos 2 y 3 con con ayuda del simulador descrito en el capítulo 4.

Finalmente, en el último capítulo, se enumeran las conclusiones a las que se ha llegado en esta tesis, fruto del análisis teórico de los métodos, realizado en los capítulos 2 y 3, y de los resultados presentados en el capítulo 5.

El documento también incluye dos apéndices. El apéndice A detalla algunos aspectos matemáticos utilizados en los capítulos 1, 2 y 3. El apéndice B propone un procedimiento para calcular un parámetro que utilizan algunos de los métodos descritos en los capítulos 2 y 3.

Capítulo 1

Navegación por satélite

En este capítulo se describen las bases de la navegación por satélite. Para ello, primeramente, se describen los sistemas de navegación por satélite existentes y a continuación los tipos de medidas que ofrecen. Finalmente se describen los métodos que permiten, gracias a dichas medidas, que un usuario determine las coordenadas de su posición.

1.1. Sistemas de navegación por satélite

1.1.1. Introducción

Los sistemas de navegación global por satélite (*Global Navigation Satellite System*, GNSS) permiten, gracias a las señales transmitidas por una constelación de satélites, que un usuario con un receptor adecuado pueda determinar las coordenadas de su posición de forma precisa. Actualmente existen dos sistemas en funcionamiento, el sistema de posicionamiento global (*Global Positioning System*, GPS), desarrollado por los EE.UU., y el sistema de navegación por satélite global (*Global Navigation Satellite System*, GLONASS), desarrollado por la antigua Unión Soviética y propiedad ahora de la Federación Rusa. En un futuro próximo, un nuevo GNSS será puesto en marcha por la Unión Europea, el sistema Galileo.

El departamento de defensa de los EEUU puso en marcha el proyecto del GPS en 1969. El sistema se diseñó para ofrecer dos tipos de servicios, uno de más precisión destinado a uso militar y otro de precisión controlada destinado a uso civil. Actualmente se ha dejado de controlar la precisión del uso civil, con lo que es similar a la de uso militar. Las señales transmitidas por los satélites se multiplexan con una técnica de división de códigos (*Code Division Multiple Access*, CDMA). Las prestaciones del GPS se verán ampliadas en los próximos años.

El ministerio de defensa de la antigua Unión Soviética puso en marcha en 1970 el GLONASS. Este sistema también ofrece servicios distintos a militares y a civiles, teniendo

los primeros más precisión. Las características del GLONASS son similares a las del GPS, pero las señales que transmiten los distintos satélites, en lugar de utilizar la técnica CDMA, se multiplexan en frecuencia. En Diciembre de 2004 el GLONASS sólo tenía 11 satélites operativos, frente a los 24 del GPS, con lo que la disponibilidad del servicio era bastante reducida. No obstante, la Federación Rusa tiene previsto lanzar más satélites para aumentar las prestaciones del sistema.

La Unión Europea se ha introducido recientemente en el mundo de la navegación por satélite. En 2004 puso en marcha el sistema de navegación geostacionario europeo (*European Geostationary Navigation Overlay Service*, EGNOS), un conjunto de satélites geostacionarios diseñados para funcionar en conjunción con el GPS y el GLONASS, y ofrecer un servicio de navegación más completo y un instrumento de control del mal funcionamiento del resto de satélites. Para el año 2008 se espera que entre en funcionamiento un nuevo GNSS europeo que se denominará sistema Galileo. El sistema deberá ser autónomo y funcionar de manera independiente del resto de sistemas, GPS y GLONASS. No obstante, los usuarios podrán combinar los servicios ofrecidos por todos los sistemas, es decir, será posible la interoperabilidad entre ellos. El sistema Galileo se ha diseñado para uso exclusivamente civil y para que tenga máxima compatibilidad con el GPS. Las señales utilizarán el mismo tipo de multiplexación CDMA y algunas de las frecuencias que se usarán serán coincidentes con las del GPS.

En el resto de la sección se describen con detalle el GPS y el sistema Galileo. Para ello, primeramente se describe el principio en el que se basa el posicionamiento GNSS y los segmentos que componen cualquier GNSS. Seguidamente se describen las características generales de las señales que utilizan y finalmente, los aspectos concretos de cada uno de los dos sistemas.

1.1.2. Principio de posicionamiento a partir de satélites

Los GNSS utilizan el concepto de **tiempo de llegada** para determinar la posición del receptor. Dicho concepto se basa en medir el tiempo que tarda la señal transmitida por un satélite en llegar al receptor, multiplicarlo por la velocidad de la luz y obtener así, una estimación de la distancia satélite-receptor. A partir de los tiempos de propagación de las señales procedentes de varios satélites y conocidas las posiciones de éstos, el receptor puede determinar su posición.

La figura 1.1 es un ejemplo simplificado para un espacio bidimensional. La estimación de la distancia entre un satélite y el receptor define una circunferencia de posibles situaciones del receptor. Un segundo satélite define otra circunferencia y la intersección de las dos circunferencias da lugar a los puntos A y B. El receptor estará situado en uno de esos dos puntos. Si se conoce la posición aproximada del receptor o es posible utilizar la medida de un tercer satélite, que dará lugar a una tercera circunferencia, se podrá deducir la posición correcta del receptor.

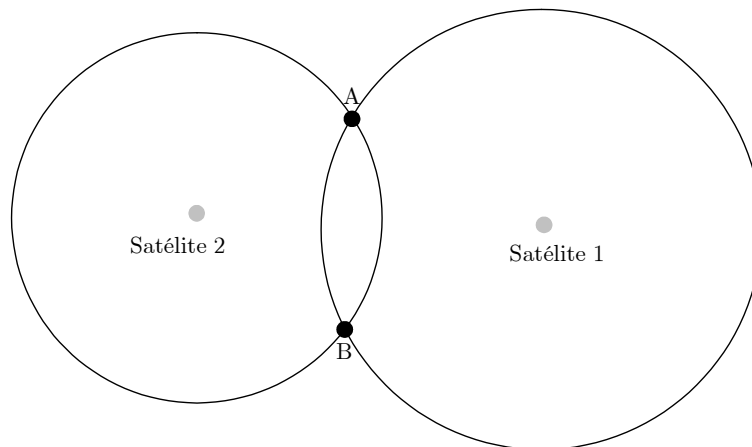


Figura 1.1: Posicionamiento en espacio bidimensional.

En un espacio tridimensional cada estimación de la distancia satélite-receptor definirá una esfera y las posibles localizaciones del receptor serán todos los puntos de la superficie de la esfera. Tres medidas definirán tres esferas cuya intersección será, al igual que en el caso bidimensional, dos puntos. La posición correcta del receptor se podrá deducir de igual forma que en el caso bidimensional.

El receptor calcula el tiempo de propagación de la señal desde el satélite al receptor a partir del instante de tiempo en el que la señal salió del satélite, información enviada por éste, y el instante de tiempo en que la señal llega al receptor. En lo descrito hasta ahora se ha supuesto que los relojes de los satélites y del receptor están todos sincronizados entre sí. En la práctica los sistemas de navegación aseguran que los relojes de los satélites estén sincronizados entre sí, pero no que lo estén con el reloj del receptor. A continuación se explica cómo se puede solventar este problema de sincronía si se dispone de la medida del tiempo de propagación de un cuarto satélite.

La figura 1.2 plantea el problema de sincronía para un espacio bidimensional. Supóngase que la posición real del receptor fuera el punto A. Las circunferencias de trazo continuo se corresponde con el caso en que el reloj del receptor esté sincronizado con el de los satélites, la misma situación que la de la figura 1.1. Las circunferencias con trazo discontinuo se corresponden con el caso en el que el reloj del receptor tenga una deriva positiva con respecto a los relojes de los satélites. En esas circunstancias, la intersección de las dos circunferencias son los puntos A' y B', en lugar de A y B, originando un valor erróneo de la posición del receptor. Utilizando la medida de un tercer satélite se definirá una tercera circunferencia. No hay ningún punto que sea la intersección de las tres circunferencias discontinuas. Sin embargo, se pueden reducir los radios de las tres circunferencias al unísono hasta que la intersección sea un punto, con lo que se obtendrá la posición real del recep-

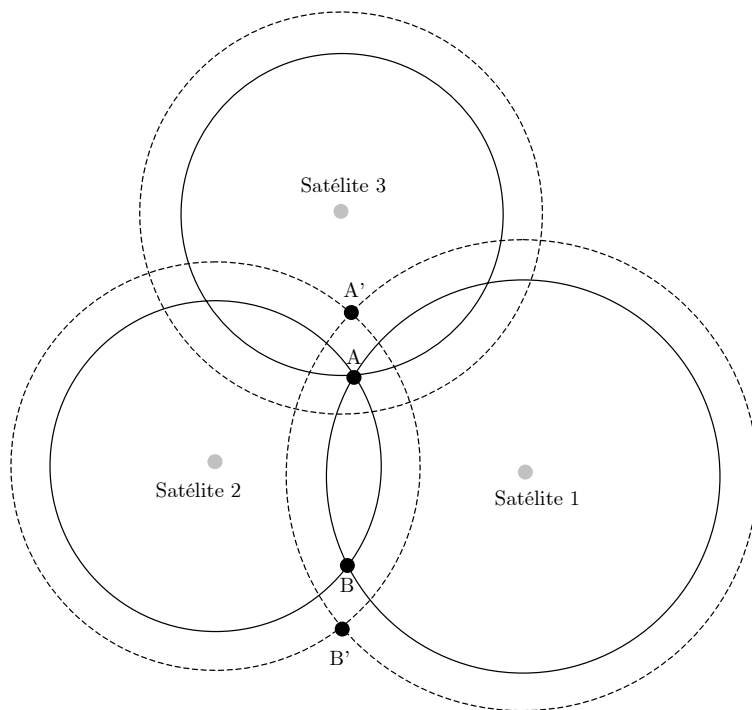


Figura 1.2: Posicionamiento en espacio bidimensional con deriva en el reloj del receptor.

tor, punto A, resolviéndose la ambigüedad entre si era A o B y además estimándose la deriva del reloj del receptor, que será proporcional a la reducción realizada en los radios de las circunferencias.

En el caso real, un espacio tridimensional, serán necesarias las medidas de 4 satélites para poder resolver la posición del receptor y la deriva del reloj del receptor. Sin embargo, habrá más fuentes de error, además de la deriva del reloj del receptor, que harán que las estimaciones no sean correctas (sec. 1.2.3). En esas circunstancias la intersección de las esferas no será un punto sino un volumen. No obstante, suele haber disponibilidad de medidas de más de 4 satélites, con lo que se podrá formar un sistema de ecuaciones sobredeterminado del que se tomará la solución de mínimos cuadrados.

1.1.3. Segmentos de un sistema de navegación por satélite

Los sistemas de navegación por satélite se componen de tres elementos, denominados segmentos, que son: el espacial, el de control y el de usuario. El segmento espacial lo forman el conjunto de satélites. El segmento de control, en la Tierra, se encarga del seguimiento y mantenimiento de los satélites. El segmento de usuario lo forman los equipos receptores.

El **segmento espacial** está formado por la flota de satélites. El número de satélites y las órbitas utilizadas deben estar bien elegidos. Un usuario de cualquier punto del globo debe tener visibles, en un porcentaje alto de tiempo, el mínimo número de satélites que le permiten disfrutar del servicio de posicionamiento. Para ello, se suelen utilizar entre 24 y 30 satélites, en órbitas no geoestacionarias, que se encuentran a unos 20.000 km de la superficie terrestre.

El **segmento de control** es el encargado del mantenimiento de los satélites. Para ello, realiza las siguientes tareas:

- Mantenimiento de los satélites en las posiciones orbitales correctas.
- Comprobación y mantenimiento de los distintos equipos de los satélites.
- Lanzamiento de nuevos satélites para sustituir los defectuosos.
- Medición y ajuste de los relojes atómicos de los satélites.
- Envío de los **parámetros orbitales** a los satélites.

Los **parámetros orbitales** de un satélite, descritos en detalle en la sección 1.3.1, forman lo que se denomina la **efeméride** del satélite. El segmento de control, mediante una serie de estaciones terrenas, realiza mediciones de las posiciones de los satélites, estima sus efemérides y las envía a los satélites. A su vez, los satélites transmiten sus efemérides, en lo que se denomina el **mensaje de navegación**, a los equipos receptores de los usuarios para que éstos puedan calcular las posiciones de los satélites. El **almanaque** es una versión reducida de la efeméride que contiene sólo 7 de los 15 parámetros orbitales.

El **segmento de usuario** lo forman los equipos receptores, que se encargan de recibir las señales transmitidas por los satélites y utilizarlas para calcular la posición donde se encuentran. El procedimiento se basa en el concepto de tiempo de llegada descrito en el apartado anterior. Los receptores GNSS se utilizan para navegación, posicionamiento preciso o como relojes de alta precisión. Esta última aplicación es posible porque en el proceso de posicionamiento, el reloj del receptor se sincroniza con los relojes atómicos, muy precisos, de los satélites.

1.1.4. Características de las señales

Las señales utilizadas tanto por el GPS como por el sistema Galileo tienen una serie de características comunes que se tratan en este apartado. En ambos sistemas las señales transmitidas por los satélites utilizan una modulación de espectro ensanchado con la técnica CDMA de multiplexación por división de código.

La modulación de espectro ensanchado se basa en utilizar una banda de transmisión mucho mayor que la de la señal de información. El aumento o ensanchamiento de la banda se realiza gracias a unas secuencias pseudoaleatorias o pseudocódigos (*PseudoRandom Noise codes, PRN*) de anchos de banda mucho mayores que el de la señal de información. Los distintos usuarios pueden compartir el espectro porque cada uno utiliza un código pseudoaleatorio distinto. En el proceso de demodulación cada usuario buscará la correlación de la señal recibida con una réplica del código pseudoaleatorio que utiliza, para poder recuperar su señal de información. Ello es posible porque el código pseudoaleatorio de un usuario es prácticamente ortogonal a los códigos del resto de usuarios. Este método de multiplexación de señales se conoce como técnica de acceso múltiple por división de códigos (*Code Division Multiple Access, CDMA*).

Los códigos pseudoaleatorios son secuencias fijas de bits de apariencia aleatoria, pero deterministas, que se repiten periódicamente y cuya autocorrelación es parecida a la de un ruido blanco filtrado en banda. Cuanto más largos sean sus periodos, mayor ancho de banda y mayor aleatoriedad conseguirán. Los códigos pseudoaleatorios, por sí mismos, no llevan ninguna información, por lo que se utiliza el término chip en lugar del término bit para referirse a sus elementos. Por ejemplo, el GPS utiliza códigos pseudoaleatorios de 1023 chips de longitud.

La modulación de espectro ensanchado y la técnica CDMA se utilizan en los sistemas de navegación por satélite de la siguiente forma. Cada satélite envía una señal de información, el mensaje de navegación con las efemérides de los satélites, utilizando un código pseudoaleatorio que lo identifica, distinto al del resto de satélites. La señal que se forma a partir del mensaje de navegación y el código pseudoaleatorio modula la fase de una portadora, común para todos los satélites. De esta forma, el receptor puede demodular el mensaje de navegación de cada satélite por separado, utilizando cada vez el código pseudoaleatorio correspondiente. El proceso de demodulación de la señal requiere generar una réplica del código y de la portadora que estén sincronizadas con la señal recibida. En la sección 1.2 se describe cómo a partir de dichas sincronizaciones se obtienen las medidas de tiempos de propagación que requiere el receptor para calcular su posición.

La figura 1.3 presenta un ejemplo para el caso típico en que se modula la portadora en BPSK (*Binary-Phase Shift Keying*), es decir, con dos fases distintas. El ensanchamiento de la banda de la señal binaria de información, los datos de la efemérides, se realiza mediante la suma lógica de ella con el código pseudoaleatorio. La señal resultante es la que se modula en BPSK. También es típico modular la portadora con dos señales distintas, utilizando para ello cuatro fases, es decir, mediante la modulación QPSK (*Quadrature-Phase Shift Keying*), una señal la modulará en fase (F) y la otra en cuadratura (Q).

Los satélites transmiten varias señales y utilizan varias frecuencias de portadora distintas. Sin embargo, generalmente, no todas las señales están disponibles para todos los usuarios. Algunas de las señales pueden utilizar códigos pseudoaleatorios encriptados, de manera que sólo algunos usuarios privilegiados puedan tener acceso a ellas. Por ejemplo,

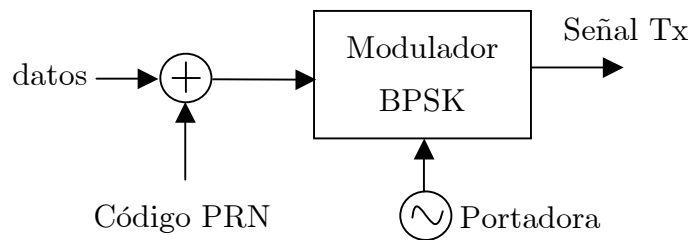


Figura 1.3: Señal transmitida por un satélite.

el GPS ofrece dos señales a dos frecuencias distintas. Una de ellas es accesible para todos los usuarios y la otra, si el segmento de control lo limita, sólo será accesible para los usuarios militares, pues el código pseudoaleatorio que utiliza estará encriptado.

1.1.5. Sistema de posicionamiento global (GPS)

El departamento de defensa de los EEUU comenzó el desarrollo del sistema NAVSTAR GPS (*NAVigation SysTem And Rangig - Global Positioning System*) en 1969 y en el año 1995 ya era totalmente operativo. El sistema, con una flota de 24 satélites, ofrece posicionamiento global tanto a usuarios civiles como militares. Los usuarios militares tienen, gracias a receptores especiales, acceso a la máxima precisión que ofrece el sistema. El segmento de control limita la precisión de los usuarios civiles mediante la función de *disponibilidad selectiva* (*Selective Availability, SA*) y la de *anti-engaño* (*Anti spoofing, AS*). Cuando la SA está activa, la señal que transmiten los satélites se distorsiona intencionalmente para que los usuarios civiles tengan menos precisión. Cuando el AS está activo, se restringe el acceso, mediante encriptado, a una de las señales, la que permite obtener mejor precisión. En Mayo de 2000 el gobierno de los EEUU decidió desactivar la SA.

El segmento espacial del GPS está formado por una constelación de 24 satélites. Las órbitas de los satélites son casi circulares, de aproximadamente 26600 km de radio. Los satélites se disponen en 6 planos orbitales centrados en el ecuador. Cada plano orbital tiene una inclinación con respecto del ecuador de 55° y contiene 4 satélites separados 60° en longitud. El periodo orbital de cada satélite es de aproximadamente 12 horas (11 horas y 58 minutos).

Las dos señales transmitidas por los satélites GPS utilizan modulación de espectro ensanchado, como se ha descrito en la sección 1.1.4. En la tabla 1.1 se resumen las características de ellas. La primera señal utiliza una portadora de frecuencia L1 (1575.42 MHz) y la segunda una portadora de frecuencia L2 (1227.60 MHz). Se utilizan dos tipos de códigos pseudoaleatorios: códigos C/A, de ajuste grueso (*Coarse Acquisition*) y códigos P(Y), que se denotan con la letra P para indicar que son de mayor precisión. Cuando el AS está activo los códigos P(Y) se encriptan formando los códigos Y. La longitud de

un código C/A es de 1023 chips y se transmite a una velocidad de 1.023 Mcps (Mchips por segundo), por lo que su periodo de repetición es de 1 ms. La longitud de un código P(Y) es 6.1871E12 chips y se transmite a una velocidad de 10.23 Mcps, por lo que su periodo de repetición es de una semana. La velocidad de los datos que se transmiten, el mensaje de navegación, es de 50 bps. La portadora L1 es modulada en QPSK por dos señales, la combinación de un código C/A y los datos y la combinación de un código P(Y) y los datos (veáse la figura 1.4). La portadora L2 es modulada en BPSK por una de tres posibles señales: un código P(Y) y datos, un código C/A y datos, o un código P(Y) sólo. El segmento de control será el encargado de decidir cuál de las tres posibilidades es la elegida, que normalmente suele ser un código P(Y) y datos.

Una vez descritas las señales GPS se puede clarificar la influencia de la activación del AS y la SA. Cuando el AS está activo el código P(Y) se encripta y se hace inaccesible a los usuarios civiles, con lo que éstos tendrán menos medidas disponibles. En realidad, el AS se ha creado para evitar que un hipotético enemigo pueda, mediante la creación de una señal errónea con un código P(Y), engañar a los receptores de los usuarios amigos. En cuanto a la SA, como se comenta en la sección 1.2.3, cuando está activa, induce un error intencionado a todas las señales GPS, que sólo los usuarios militares conocen y pueden compensar.

Actualmente el GPS está en proceso de modernización. Para el año 2008, teniendo en cuenta [Font01] y [Font02], está previsto que la mayoría de los satélites incluyan un nuevo código en la portadora L2, accesible para los usuarios civiles, al que se denominará señal L2C y cuya velocidad será de 1.023Mcps. La señal L2C llevará dos códigos pseudoaleatorios multiplexados en el tiempo, el código de longitud moderada (CM), de 10.230Mcp y el código de longitud larga (CL), de 767.25Mcp. La señal L2C, junto con una nueva versión del código P(Y) militar, al que se denominará código M, modularán en fase y cuadratura a la portadora L2. Por otra parte, hacia el 2012 estará disponible otra señal de frecuencia L5 (1176.45 MHz), que estará modulada en fase y cuadratura por dos códigos pseudoaleatorios de 10.23Mcps y será accesible para los usuarios civiles. En la tabla 1.2 se resume cómo serán las características de las señales cuando el GPS termine su proceso de modernización. En esas condiciones el GPS ofrecerá medidas a tres frecuencias distintas.

1.1.6. Sistema Galileo

El sistema Galileo [Gali03] es un proyecto conjunto de la Comisión Europea y la Agencia Espacial Europea que se encuentra, en la actualidad, en fase de desarrollo y se espera que entre en funcionamiento en 2008. El sistema será una alternativa al GPS y está diseñado para uso exclusivo civil, ofreciendo distintos tipos de servicios. El servicio abierto (*Open Service*, OS) será gratuito y accesible para todos los usuarios. El servicio comercial (*Commercial Service*, CS) ofrecerá prestaciones superiores a los usuarios que lo paguen. El

Portadora	L1		L2		
Frecuencia (MHz)	1575.42		1227.6		
Modulación	QPSK		BPSK		
Canales	F	Q			
Código PRN	P(Y)	C/A	1^aop. P(Y)	2 ^a op. C/A	3 ^a op. P(Y)
Velocidad (Mcps)	10.23	1.023	10.23	1.023	10.23
Encriptado si AS	Sí	No	Sí	No	Sí
Vel. datos (bps)	50	50	50	50	No

Tabla 1.1: Señales GPS.

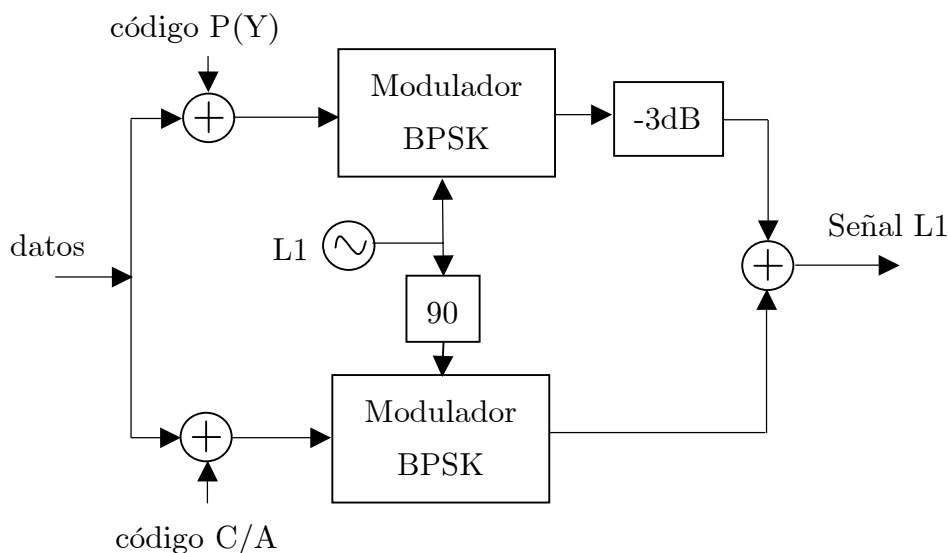


Figura 1.4: Formación de la señal L1.

Portadora	L1		L2		L5	
Frecuencia (MHz)	1575.42		1227.6		1176.45	
Modulación	QPSK		QPSK		QPSK	
Canales	F	Q	F	Q	F	Q
Código PRN	P(Y)	C/A	M	L2C	(*)	(*)
Velocidad (Mcps)	10.23	1.023	10.23	1.023	10.23	10.23
Encriptado si AS	Sí	No	Sí	No	No	No
Vel. datos (bps)	50	50	50	25	No	(*)

Tabla 1.2: Futuras señales GPS.

(*) Sin definir todavía

servicio de seguridad para la vida humana (*Safety-of-Life service*, SoL) está pensado para aplicaciones de transporte de viajeros, en las que es necesario un servicio de localización precisa para que no haya riesgo para vidas humanas. El servicio público regulado (*Public Regulated Service*, PRS) será de acceso restringido para aplicaciones gubernamentales. El servicio de alerta y rescate (*Search And Rescue service*, SAR), servirá para localizar alertas y facilitar el rescate de personas.

El segmento espacial del sistema Galileo estará formado por una constelación de 30 satélites, 27 de ellos operativos y 3 de repuesto. Los satélites seguirán orbitas casi circulares de unos 30000 km de radio y se dispondrán en tres planos orbitales distintos. Cada plano orbital tendrá una inclinación con respecto al ecuador de 56° y el periodo orbital, al estar los satélites más lejos de la Tierra que los del GPS, no será de medio día, sino de 14 horas y 4 minutos.

El sistema Galileo ofrecerá un gran número de señales [Hein01] [Hein02] con distintas frecuencias y distintos códigos pseudoaleatorios, encriptados o no, según al tipo de servicio al que vayan destinadas. Las señales se disponen en tres bandas de frecuencias: E5, que coincide con la banda de la señal L5 del GPS, E6 y E2-L1-E1, que coincide con la banda de la señal L1 del GPS. Muchos de los aspectos de las señales están todavía por decidir o no son aún definitivos; en la tabla 1.3 se muestran las características que con mayor probabilidad [Hein02] tendrán las señales. En la banda E5 se transmitirán dos portadoras, de frecuencias E5a (1176.45 MHz) y E5b (1207.14 MHz), cada una de ellas modulada en QPSK por dos códigos pseudoaleatorios, sin encriptar, de 10 Mcps de velocidad, uno de los cuales llevará datos de navegación. En la banda E6 se transmitirá una portadora de frecuencia E6 (1278.75 MHz) que será modulada por tres códigos pseudoaleatorios. La modulación, aunque no está decidido del todo, parece que será una Hexafase modificada. Los tres códigos, de 5.115 Mcps cada uno, estarán encriptados; dos de ellos llevarán datos y el tercero no. En la banda E2-L1-E1 se transmitirá una portadora de frecuencia E2-L1-E1 (1575.42 MHz) que será modulada, con la misma modulación que E6, por tres códigos pseudoaleatorios. El primero de ellos, a 1.023 Mcps, estará encriptado y los otros dos a 2.046 Mcps no. En [Hein04] se analizan las prestaciones que ofrecerá la señal E2-L1-E1.

Todos los usuarios tendrán acceso al OS, que ofrecerá medidas a tres frecuencias, E5a, E5b y E2-L1-E1, y seis códigos pseudoaleatorios, cuatro de la banda E5 y dos de la banda E2-L1-E1. Además, tres de los seis códigos serán sin datos, lo que permitirá extraer las medidas del tiempo de propagación más fácilmente. Los usuarios que estén dispuestos a pagar por un mejor servicio tendrá acceso al CS, que ofrecerá, además, una frecuencia más en la banda E6 con dos códigos más. El resto de señales, una de E6 y otra de E2-L1-E1, se destinarán al SoL y al PRS.

El diseño del sistema Galileo se ha hecho intentando facilitar la interoperabilidad con el GPS. Por ello, las frecuencias de portadora E2-L1-E1 y E5a coinciden con las frecuencias L1 y la futura L5 del GPS. En esas condiciones un receptor podrá utilizar los dos sistemas a la vez, dos frecuencias, y una flota de unos 50 satélites disponibles, con lo que,

por ejemplo, las aplicaciones urbanas, que tienen problemas de visibilidad de un número suficiente de satélites, se verán muy beneficiadas. Para facilitar la mencionada interoperabilidad, el sistema de coordenadas que utilizará el sistema Galileo será virtualmente idéntico al del GPS. En la figura 1.5 [Hein01] se muestra el reparto espectral entre los sistemas Galileo, GPS y GLONASS.

Portadora Frec.(MHz)	E5a 1176.45		E5b 1207.14		E6 1278.75			E2-L1-E1 1575.42		
Modulación	QPSK		QPSK		6PS			6PS		
Canales	F	Q	F	Q	A	B	C	A	B	C
Código(Mcps)	10	10	10	10	5.115	5.115	5.115	(*)	2.046	2.046
Encriptado	No	No	No	No	Sí	Sí	Sí	Sí	No	No
Datos (bps)	50	No	250	No	(*)	1000	No	(*)	250	No
Servicio	OS		OS,CS SoL		PRS	CS		PRS	OS,CS SoL	OS,CS SoL

(*) Sin definir todavía

Tabla 1.3: Señales sistema Galileo.

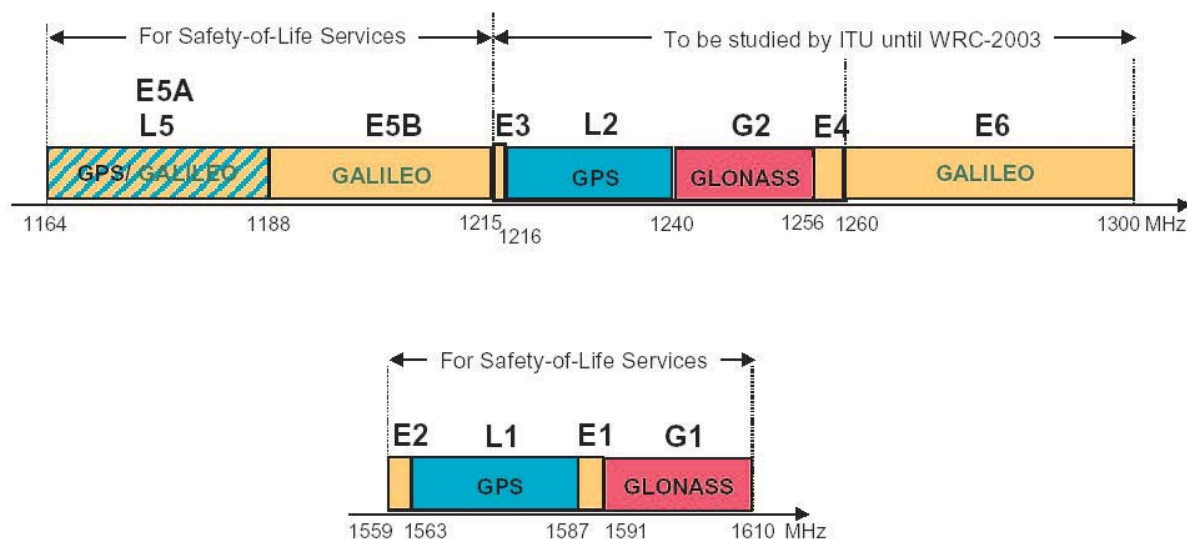


Figura 1.5: Espectro radioeléctrico de los GNSS [Hein01].

1.1.7. Sistemas de coordenadas y de referencia temporal

Sistemas de coordenadas

Los sistemas de navegación por satélite utilizan un sistema de coordenadas cartesianas que facilita el computo de la posición de un usuario en coordenadas geodésicas (latitud, longitud y altura). El sistema de coordenadas elegido está centrado en la Tierra y rota con ella (*Earth-centered Earth-fixed*, ECEF). El origen de coordenadas es el centro de masas de la Tierra. El plano xy es coincidente con el plano ecuatorial y el eje z, normal al plano xy, toma la dirección del polo norte. El eje x apunta a la dirección de longitud 0° y el eje y a la dirección de 90° longitud Este.

Para convertir las coordenadas ECEF a latitud, longitud y altura, el receptor ha de utilizar un modelo físico de la Tierra. El GPS utiliza el modelo WGS-84 (*World Geodetic System 1984*), que es un modelo elipsoidal de la forma de la Tierra. Los puntos de la superficie del elipsoide son tomados como puntos de altura cero. Las alturas obtenidas con este modelo pueden diferir de las alturas geográficas, pues el nivel del mar puede variar entre unas regiones y otras. Las irregularidades específicas de cada región de la Tierra se almacenan en lo que se denomina un *datum*. El receptor convierte las coordenadas obtenidas mediante el modelo WGS-84 a las coordenadas finales, de acuerdo con el *datum* local correspondiente.

El sistema Galileo utilizará un sistema de coordenados propio (*Galileo Terrestrial Reference Frame*, GTRF). Las diferencias entre el modelo WGS-84 y el GTRF se espera que sean de sólo unos centímetros. La mayoría de los usuarios que utilicen a la vez el sistema Galileo y el GPS no tendrán que hacer ninguna corrección, pues podrán considerar el modelo WGS-84 y el GTRF virtualmente idénticos. No obstante, el sistema Galileo facilitará parámetros de transformación entre los dos modelos.

Sistemas de referencia temporal

El sistema de tiempo universal es el UTC (*Universal Time Coordinate*). La hora UTC se forma a partir de una escala temporal basada en relojes atómicos y una escala temporal basada en la rotación de la Tierra. La escala temporal basada en relojes atómicos se denomina hora atómica internacional (*International Atomic Time*, TAI). La escala temporal basada en la rotación de la Tierra con respecto al Sol, se denomina UT1 (Universal Time 1). La hora TAI difiere con respeto a la de UT1, pudiendo variar hasta un segundo a lo largo de un año, pero es mucho más uniforme. La hora UTC se forma a partir de la TAI, pero, cada cierto tiempo, se le hacen incrementos o decrementos de un segundo para garantizar que la diferencia entre UTC y UT1 no exceda nunca más de 0.9 segundos.

El sistema de tiempos GPS se basa en la hora UTC, aunque sin los ajustes de segundos de ésta. La hora GPS se hizo coincidente con la hora UTC, el 6 de Enero de 1980 a las

cero horas y actualmente difiere de la UTC en 13 segundos. En el mensaje de navegación se transmite dicha diferencia. Un instante de tiempo o época, en el GPS, se define con un número de semana y el número de segundos transcurridos desde las 0 horas del Domingo de dicha semana. Las semanas se numeran secuencialmente desde la semana cero, que comenzó el domingo 6 de Enero de 1980 a las 0 horas.

El sistema de tiempos Galileo (*Galileo System Time*, GST) se basará en la hora TAI. En el mensaje de navegación se transmitirá la diferencia entre la hora GST y la hora TAI, que debe ser inferior a 33 ns. Igualmente serán transmitidas las diferencias entre la hora GST y las horas UTC y GPS, ésta última para facilitar la interoperabilidad entre los dos sistemas de navegación.

1.2. Tipos de medidas

Tal como se describe en 1.1.4, el proceso de demodulación de un receptor GNSS requiere generar una réplica del código pseudoaleatorio y de la portadora de la señal, que estén sincronizadas con la señal recibida. En esta sección se explica cómo este proceso de sincronización permite obtener dos tipos de medidas. La sincronización del código pseudoaleatorio dará lugar a las denominadas medidas de **pseudodistancia** y la sincronización de la portadora a las medidas de fase.

1.2.1. Medidas de pseudodistancia

La sincronización entre el código pseudoaleatorio recibido y la réplica generada se realiza desplazando temporalmente esta última hasta que la correlación entre las dos sea máxima. En el caso de que el reloj del satélite y del receptor estén sincronizados, el tiempo que habrá que desplazar la réplica será precisamente el tiempo de propagación de la señal desde el satélite hasta el receptor. Este tiempo multiplicado por la velocidad de la luz será una estimación de la distancia satélite-receptor o lo que se conoce como una medida de pseudodistancia. También se le suele denominar medida de código.

La figura 1.6 presenta un ejemplo del proceso de sincronización de los códigos. El valor del código pseudoaleatorio generado por el satélite en un instante de tiempo T_s llega al receptor en un tiempo T_r . La diferencia entre esos dos tiempos es el retardo de propagación de la señal. El receptor genera réplicas del código con distintos desplazamientos buscando la máxima correlación, que se consigue para un desplazamiento Δt , igual al retardo de propagación.

En la práctica, los relojes no están sincronizados entre sí. Tanto el reloj del receptor como el reloj del satélite tienen una deriva con respecto al tiempo del sistema. Este hecho, junto con otros efectos que se analizarán en detalle en el apartado 1.2.3, introducen

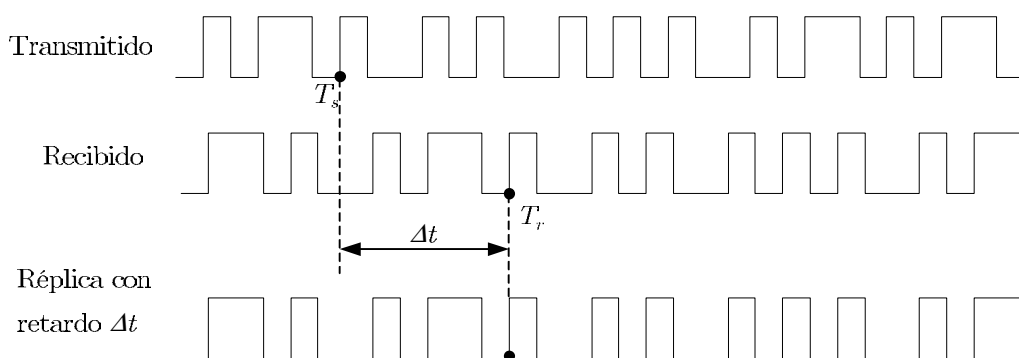


Figura 1.6: Sincronización entre el código recibido y la réplica.

error en la estimación de la distancia satélite-receptor o medida de pseudodistancia que se obtiene a partir de Δt . De todos ellos el más significativo es la deriva del reloj del receptor t_r . La deriva de los relojes de los satélites son mucho menores, puesto que son relojes atómicos y además el segmento de control los monitoriza y corrige. Por tanto, en una primera aproximación, la medida de la pseudodistancia ρ vendrá dada por

$$\rho = c[(T_r + t_r) - (T_s)] = d + ct_r \quad (1.1)$$

donde d es la distancia satélite-receptor y c la velocidad de la luz. El término ct_r es el responsable de que se le denomine medida de pseudodistancia y no medida de distancia.

1.2.2. Medidas de fase

La sincronización entre la portadora de la señal recibida y la réplica generada en recepción permite obtener una medida de la fase de la portadora. Esta medida de fase puede ser utilizada también para estimar la distancia satélite-receptor. Sin embargo, para ello, es necesario conocer el número entero de ciclos de portadora transcurridos desde que la señal deja el satélite hasta que llega al receptor.

Para realizar la sincronización entre la portadora de la señal y la réplica es necesario tener en cuenta el efecto doppler que se produce debido al movimiento relativo satélite-receptor. Por ello, la frecuencia de la réplica ha de ser igual a la frecuencia de la señal transmitida con su desplazamiento doppler corregido. La sincronización se realiza mediante circuitos de enganche en fase (*Phase Lock Loop*, PLL) o en frecuencia (*Frequency Lock Loop*, FLL). Los circuitos PLL o FLL permiten obtener medidas de fase con precisiones del orden de 0.01 ciclos de portadora.

Una vez que el receptor se sincroniza con la portadora y con el código, es decir, se produce el enganche con la señal del satélite, el receptor puede medir la fase de la porta-

dora recibida. Esta medida se obtiene de forma parecida a como se obtiene la medida de pseudodistancia, pues será el desfase que es necesario realizar a la réplica de la portadora para que se sincronice con la portadora recibida. La medida de fase se suele expresar en ciclos de portadora. Por tanto, tal como se ha descrito hasta ahora, la medida de fase será un valor decimal, no entero, indicando la fracción de ciclo de portadora transcurrido en el momento de la recepción de la señal. La distancia entre el satélite y el receptor se puede expresar en número de longitudes de onda y será igual al número entero de ciclos de portadora n transcurridos en el origen desde que la señal salió del satélite hasta que llegó al receptor, más la fracción de ciclo medida (la medida de fase). Por tanto, la medida de fase sirve como estimación de la distancia satélite-receptor pero tiene el problema de que el número entero n es desconocido. A dicho número se le denomina **ambigüedad entera de ciclos de portadora**.

Mientras el receptor permanezca enganchado con la señal el número entero n desconocido permanecerá constante, pues el receptor registra la variación del número entero de ciclos en las propias medidas de fase. La figura 1.7 ilustra esta circunstancia. En el instante t_0 se produce el enganche, obteniéndose la medida ϕ_0 y siendo desconocido el número de ciclos n . A partir de entonces, el receptor registra la variación de ciclos que se van produciendo y en los instantes sucesivos las medidas de fase ϕ_i estarán formadas por una parte fraccional y una parte entera: la diferencia entre el número de ciclos transcurridos y el número n de la medida inicial. Por tanto, el único valor desconocido es el número entero de ciclos n inicial.

En ocasiones, puede ocurrir que, momentáneamente, el receptor pierda el enganche con alguno de los satélites. Dicha pérdida de enganche suele provocar que cambie el valor de la ambigüedad de ciclos n y es lo que se denomina un corrimiento de ciclos (*cycle slip*). En [Bisn00] se propone un método para, con un preprocesado de las medidas, corregir automáticamente los posibles corrimientos de ciclos.

La precisión que se puede alcanzar con las medidas de fase es mucho mayor que la que se consigue con las medidas de pseudodistancia. Ello es debido a la alta precisión que se logra al conjuntar la resolución de fase de los circuitos PLL o FLL, junto con la elevada frecuencia de la portadora, del orden de GHz. La resolución que se puede conseguir buscando máxima correlación con los códigos pseudoaleatorios es mucho menor. Sin embargo, como se ha comentado, las medidas de fase tienen el problema de la ambigüedad entera de ciclos de portadora. La figura 1.8 ilustra las diferencias de precisión de los dos tipos de medidas. La precisión con la que se puede medir el retardo del código pseudoaleatorio δt supone una precisión en la medida de pseudodistancia δd_t . La precisión con la que se puede estimar la fase de la portadora δf supone una precisión en la estimación de la distancia δd_f . El valor de δd_f es mucho menor que el de δd_t , pero el número de ciclo al que corresponde es ambiguo.

En cualquier caso, las fuentes de error que afectan a las medidas de fase son del mismo tipo de las que afecta a las medidas de pseudodistancia. En la sección 1.2.3 se analizan

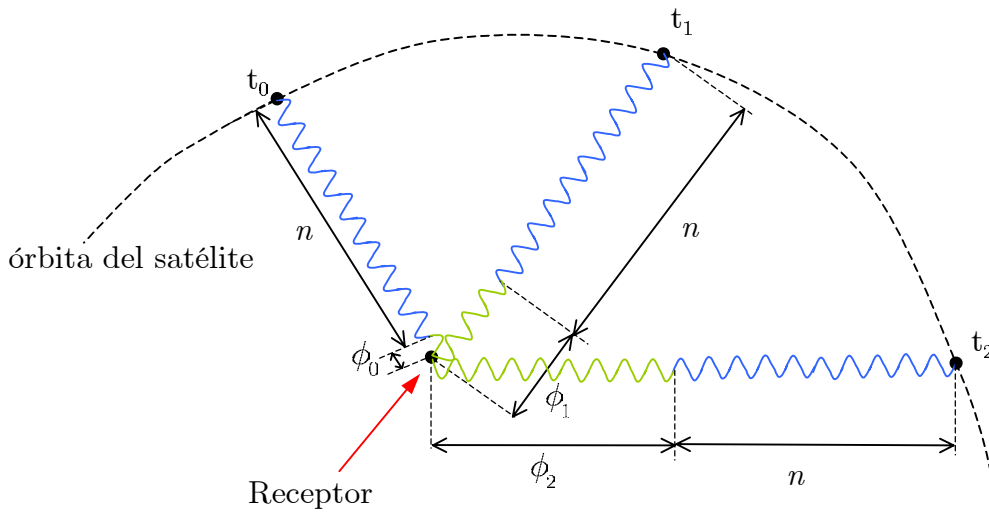


Figura 1.7: Persistencia de la ambigüedad a lo largo del tiempo.

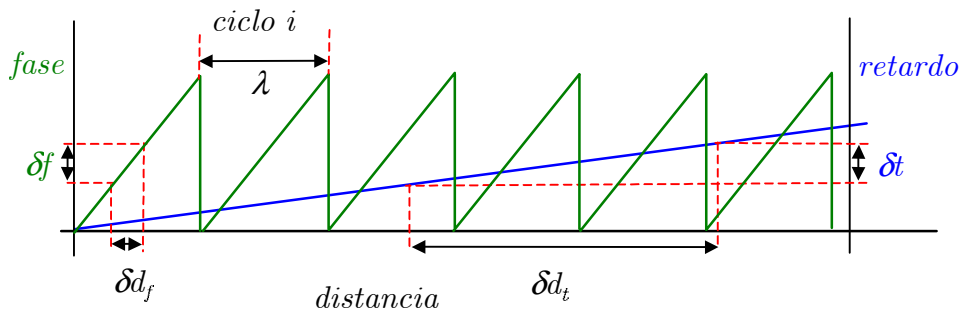


Figura 1.8: Diferencias de precisión entre las medidas de fase y de pseudodistancia.

en detalle. En una primera aproximación, considerando solamente el error debido a la deriva del reloj del receptor t_r , una medida de fase ϕ , expresada en ciclos de portadora, se puede poner como

$$\phi = d - n + f t_r \tag{1.2}$$

donde d es la distancia satélite-receptor, pero ahora, expresada en ciclos de portadora, n es la ambigüedad entera y f la frecuencia de la portadora.

Algunas de las señales de los GNSS utilizan códigos pseudoaleatorios encriptados (véase la sección 1.1), lo que dificulta la obtención de medidas de fase a partir de ellas. Para que el receptor pueda engancharse con la señal recibida tiene que sincronizarse con la portadora y con el código pseudoaleatorio a la vez. Si el código está encriptado no

será posible la sincronización de código y la sincronización con la portadora será más difícil. Existen receptores que consiguen extraer medidas de fase, a pesar de que el código pseudoaleatorio esté encriptado, pero a costa de conseguir una relación señal a ruido mucho peor de la que se consigue cuando los códigos no están encriptados.

1.2.3. Fuentes de error de las medidas

La precisión con la que un receptor puede determinar su posición depende de los errores que afectan a las medidas que utiliza. Tanto las medidas de pseudodistancia como las medidas de fase están sujetas a varias fuentes de error. Algunas de estas fuentes pueden ser compensadas pero otras son inevitables. A continuación se enumeran los distintos tipos de fuentes de error y cómo afectan a los dos tipos de medidas. En [Kapl96] o [Braa99] se pueden ver con más detalle.

Error en el reloj del satélite

Todas las señales que generan los satélites están sincronizadas con unos relojes atómicos muy estables. Sin embargo, estos relojes tienen pequeñas derivas, que pueden llegar a ser de hasta 1 ms, que los receptores han de intentar compensar. Para ello, el segmento de control los monitoriza constantemente, determina las derivas que sufren y calcula unos parámetros a partir de los cuales se puedan estimar sus derivas. Estos parámetros son enviados a los satélites y éstos los envían en el mensaje de navegación para que los receptores los puedan utilizar. La estimación de la deriva de un satélite \hat{t}_s se obtiene mediante un polinomio de segundo orden como

$$\hat{t}_s = \alpha_0 + \alpha_1(t - t_{oc}) + \alpha_2(t - t_{oc})^2 \quad (1.3)$$

donde α_0 , α_1 y α_2 son los parámetros de corrección de la deriva del satélite, t_{oc} es el tiempo al que se refieren esos parámetros y t es el tiempo actual. A pesar de que los receptores hacen esta estimación de las derivas siempre queda un error residual.

Efecto de la Ionosfera

La Ionosfera es una región ionizada que se extiende en la Atmósfera a partir de los 70 km de altura. Las ondas electromagnéticas se propagan por dicha región a una velocidad que dependerá del índice de refracción de la Ionosfera. El hecho de que la velocidad de propagación sea distinta de la de la luz en el vacío provoca un retardo en las señales transmitidas por los satélites y por tanto es una fuente de error de las medidas. La Ionosfera es además, un medio dispersivo, pues su índice de refracción depende de la frecuencia de las señales que circulan por ella. En un medio dispersivo hay dos tipos

de velocidades de propagación: la velocidad de fase, a la cual se propaga la fase de la portadora de la señal, y la velocidad de grupo, a la cual se propagan la señal que transporta la portadora. La velocidad de fase, superior a la de la luz, provoca un avance en las medidas de fase. La velocidad de grupo, inferior a la de la luz, provoca un retardo en las medidas de pseudodistancia. El avance y el retardo es de la misma magnitud y su valor, expresado en unidades de distancia, se puede modelar [Kapl96] como

$$\alpha_{iono} = \frac{I_{ono}}{f^2} \quad (1.4)$$

donde f es la frecuencia de la portadora e I_{ono} es una constante que dependerá de las características particulares de la Ionosfera: hora del día, localización del receptor, ángulo de elevación del satélite, estación del año, etc., que puede hacer variar el retardo α_{iono} entre 10 ns y 150 ns, es decir, entre 3 y 45 metros.

La dependencia con la frecuencia del error ionosférico facilita su estimación para los casos en los que se disponga de medidas de varias frecuencias. En esos casos y despreciando el error que produzcan otras fuentes, se puede hacer una estimación del parámetro I_{ono} , que vendrá dada por

$$I_{ono} = \frac{f_1^2 f_2^2}{f_2^2 - f_1^2} (\rho_{f_1} - \rho_{f_2}) \quad (1.5)$$

donde ρ_{f_1} y ρ_{f_2} son las medidas de pseudodistancia a las frecuencias 1 y 2. En [Rich05] se analizan las ventajas que supondrá, para la estimación del error ionosférico, el que en los futuros GNSS haya más frecuencias disponibles.

Para los casos en los que se disponga de medidas de sólo una frecuencia se hace necesario utilizar modelos de la Ionosfera que permitan estimar el parámetro I_{ono} y compensar este error. El mensaje de navegación que envían los satélites incluye 8 parámetros que definen las características particulares de la Ionosfera, gracias a los cuales, utilizando el algoritmo de Klobuchar [Park96] se puede hacer una estimación del error ionosférico. Con dicha estimación se puede compensar el error ionosférico en aproximadamente un 50 %.

Efecto de la Troposfera

La Troposfera es la parte baja de la Atmósfera y es un medio no dispersivo para frecuencias inferiores a 15 GHz. Por ello, la velocidad de fase y de grupo son iguales y provocan que tanto las medidas de fase como las de pseudodistancia sufran el mismo retardo β_{tropo} . Dicho retardo dependerá de la temperatura, de la presión y de la humedad. Los valores típicos de esta fuente de error están comprendidos entre 2 y 25 metros. Para compensar el efecto troposférico existen muchos modelos [Kapl96].

Ruido del receptor

Las medidas están sometidas a una fuente de error que induce el receptor utilizado. La contribución más importante de esta fuente de error es la debida al ruido térmico que afecta al hardware. Otras contribuciones son debidas a la resolución del hardware y a la estabilidad de los osciladores utilizados. Todas estas contribuciones hacen que el receptor, en ausencia del resto de fuentes de error, pueda sincronizar la réplica del código pseudoaleatorio con precisiones de en torno a un 1% el tiempo de chip y estimar la fase de la portadora recibida con precisiones de en torno a un 1% de ciclo. De esta forma, la magnitud del ruido del receptor toma valores típicos de 1 ó 2 metros para las medidas de pseudodistancia y de 1 ó 2 mm para las medidas de fase. Esta fuente de error no es fácil de compensar, si bien mejores equipos pueden reducir su efecto.

Efecto del multicamino

Una de las fuentes de error más significativa y difícil de reducir es la provocada por el efecto multicamino. La señal que viene del satélite, además de llegar al receptor siguiendo el camino directo, llega por otros caminos diferentes, debido a la reflexión en la Tierra y en objetos cercanos como edificios, vehículos, etc. Todas estas reflexiones provocan que el receptor reciba simultáneamente la señal directa y réplicas de ella con distintos retardos, según la longitud del camino, y amplitudes, según la reflectividad de los objetos.

Las medidas de pseudodistancia se ven afectadas por este efecto, ya que el máximo de correlación entre el código pseudoaleatorio recibido, resultado de la suma del directo y los reflejados, y la réplica generada por el receptor, se verá desplazado. Este desplazamiento será mayor cuanto mayor sean las amplitudes y los retardos de las señales reflejadas. Los valores típicos del error que provoca este efecto están comprendidos entre 1 y 5 metros. Las medidas de fase se ven afectadas igualmente, pues la fase de la señal resultante de sumar la señal directa y las reflejadas será distinta de la fase de la señal directa. El error que provoca el efecto multicamino en las medidas de fase puede llegar a ser de 5 cm.

Las técnicas existentes para mitigar el efecto del multicamino se basan, normalmente, en la elección, diseño y emplazamiento de las antenas utilizadas. La mayoría de las reflexiones llegan al receptor con ángulos de elevación reducidos. Los diagramas de radiación de las antenas se diseñan para que presenten una atenuación elevada para dichos ángulos de elevación reducidos. Las antenas tipo *Choke Ring* presentan diagramas de radiación de esas características y suelen ser las utilizadas con este fin. En [Seco05] se presenta una técnica que modifica, de manera adaptativa, el diagrama de radiación de un array de antenas para atenuar las reflexiones que produce el multicamino. En [Comp98] se presenta una técnica basada en postprocesado de las medidas que reduce el efecto del multicamino.

Otras fuentes de error

Además de las fuentes de error descritas existen otras de menor importancia, o que ya no tiene efecto, y que ahora se comentan.

La **disponibilidad selectiva** (*Selective Availability*, SA), solamente presente en el GPS, es una fuente de error provocada intencionadamente por el Departamento de Defensa de los Estados Unidos para reducir la precisión a los usuarios civiles. La degradación consiste en una manipulación de los datos de las efemérides de los satélites y un error inducido en el reloj de los satélites. El resultado es un error en las medidas de pseudo-distancia de unos 30 metros. Los usuarios militares tiene acceso al algoritmo utilizado para inducir dicho error y pueden compensar el efecto. La fuerte correlación espacial que tiene este error, de igual valor en localizaciones próximas, hace que pueda ser fácilmente eliminado con técnicas diferenciales (sec. 1.3.4). Esta es una de las razones por las que el Departamento de Defensa decidió eliminar esta fuente intencionada de error en Mayo de 2000.

Las posiciones de los satélites son calculadas por los receptores a partir de los datos de las **efemérides** que reciben en el mensaje de navegación. Los datos de las efemérides son estimaciones de los parámetros orbitales de los satélites, por tanto, contienen errores residuales. El efecto que producen en las medidas pueden llegar a ser de unos 4 metros.

La velocidad con la que se mueven los satélites y su distancia a la Tierra hacen que sufran los **efectos de la Ley de la Relatividad**. La frecuencia de los relojes de los satélites se ajustan para que el receptor no tenga que compensar dichos efectos. Sin embargo, la excentricidad de la órbita, que hace que la velocidad y la distancia a la Tierra varíe con el tiempo, hace que aún permanezca errores residuales. Estos errores residuales pueden ser compensados por el receptor [Kapl96].

1.2.4. Precisión de las medidas

Una vez descritas las fuentes de error es posible completar la expresión 1.1 de la medida de pseudodistancia ρ , que expresada en unidades de longitud, queda como

$$\rho = d + c t_r - c t_s + \alpha_{iono} + \beta_{tropo} + w_r + w_{mu} \quad (1.6)$$

donde d es la distancia satélite-receptor, t_r y t_s son las derivas de los relojes del receptor y del satélite, α_{iono} y β_{tropo} los efectos de la Atmósfera y w_r y w_{mu} el ruido del receptor y el efecto multicamino.

Así mismo, la expresión 1.2 de la medida de fase ϕ puede ser ahora completada con todas las fuentes de error. Para mayor comodidad y en adelante, se definirá la ambigüedad

n de signo contrario a la de la ecuación 1.2. De esta forma la medida de fase ϕ , expresada en ciclos, quedará como

$$\phi = d + n + f t_r - f t_s - \alpha_{iono} + \beta_{tropo} + v_r + v_{mu} \quad (1.7)$$

donde f es la frecuencia de la portadora y v_r y v_{mu} modelan el ruido del receptor y el efecto multicamino. Obsérvese que el efecto de la Ionosfera α_{iono} , expresado ahora en ciclos, lleva un signo negativo, pues en el caso de las medidas de fase lo que crea la Ionosfera es un avance de la portadora.

Muchas de las fuentes de error descritas pueden ser compensadas o casi eliminadas, ya sea mediante estimación de sus valores o mediante técnicas diferenciales. En la sección 1.1.2 se describe cómo con el propio cálculo de la posición del receptor se determina la deriva del reloj del receptor t_r . Así mismo, la deriva del reloj del satélite t_s y los efectos atmosféricos α_{iono} y β_{tropo} pueden ser estimados y compensados. Por otro lado, las técnicas diferenciales que se describen en la sección 1.3.4 proporcionan otro método para compensar las derivas de los relojes y los efectos atmosféricos y además sin necesidad de hacer estimaciones de sus valores. Sin embargo, el ruido del receptor y el efecto multicamino son mucho más difíciles de compensar. Por tanto, las medidas de pseudodistancia podrán llegar a tener una precisión de unos pocos metros y las medidas de fase de unos pocos milímetros, aunque éstas últimas tendrán una ambigüedad inherente, el número entero de ciclos de portadora.

1.3. Métodos de determinación de la posición

En esta sección se describen las distintas posibilidades que tienen los receptores para calcular las coordenadas de su posición gracias a los sistemas de navegación por satélite. Dado que los receptores tienen que empezar por determinar las posiciones de los satélites que utilizan, se comienza explicando dicho posicionamiento. A continuación se describe el procedimiento de cálculo de la posición del receptor a partir de las medidas de pseudodistancia y la influencia que tiene la configuración geométrica de los satélites en dicho cálculo. Seguidamente se describen las técnicas diferenciales que permiten mejorar la precisión del cálculo de la posición. En el último apartado se enuncia el problema central de esta tesis, el cálculo de la posición a partir de las medidas de fase y la problemática de la resolución de la ambigüedad. En [Kapl96] se pueden ver todos estos aspectos con más detalle.

1.3.1. Posicionamiento de los satélites

Dado que los satélites utilizados no tienen órbitas geoestacionarias, el receptor ha de calcular sus posiciones en cada instante de tiempo. Los parámetros orbitales, enviados por los satélites en el mensaje de navegación, definen las características de sus órbitas. A continuación se describen estos parámetros y cómo se calculan las posiciones de los satélites a partir de éstos.

La forma elíptica de la órbita de un satélite queda definida con el valor de su semieje mayor a y su excentricidad e , tal como se observa en la figura 1.9. La distancia del foco, donde está centrada la Tierra, al centro de la elipse viene dada por ae . El punto P donde el satélite pasa más cerca de la Tierra se denomina *perigeo*. El punto A donde se encuentra el satélite en un instante de tiempo o época, viene determinado por el valor de la anomalía verdadera v en esa época. La variación de v no es lineal con el tiempo, pero está relacionada con la anomalía media M que sí varía linealmente con el tiempo. Para ver su relación es necesario definir la anomalía excéntrica E , cuya relación con v es visible en la figura y con M viene dada por

$$M = E - e \operatorname{sen} E \quad (1.8)$$

De esta forma el valor de la anomalía media M en un instante t se puede obtener como

$$M - M_0 = n_v(t - t_{0e}) \quad (1.9)$$

donde M_0 es el valor de la anomalía media en el instante de referencia de la efeméride t_{0e} y n_v es el movimiento medio definido como

$$n_v = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (1.10)$$

siendo μ el producto de la constante de gravitación universal G y la masa de la Tierra.

Una vez conocida la posición del satélite en su órbita, es necesario determinar su posición en el sistema de coordenadas ECEF. Para ello, hay que conocer la orientación del plano orbital con respecto al sistema de coordenadas, lo que viene definido por tres parámetros. En la figura 1.10 se representan estos tres parámetros. La inclinación de la órbita i es el ángulo formado entre el plano ecuatorial de la Tierra y el plano orbital. Los otros dos parámetros se definen con relación al nodo ascendente, que es el punto en el cual la órbita del satélite corta el plano ecuatorial. La longitud del nodo ascendente Ω es el ángulo formado entre el eje coordenado x y la dirección del nodo ascendente. El argumento del perigeo w es el ángulo formado entre la dirección del nodo ascendente y la dirección del perigeo de la órbita.

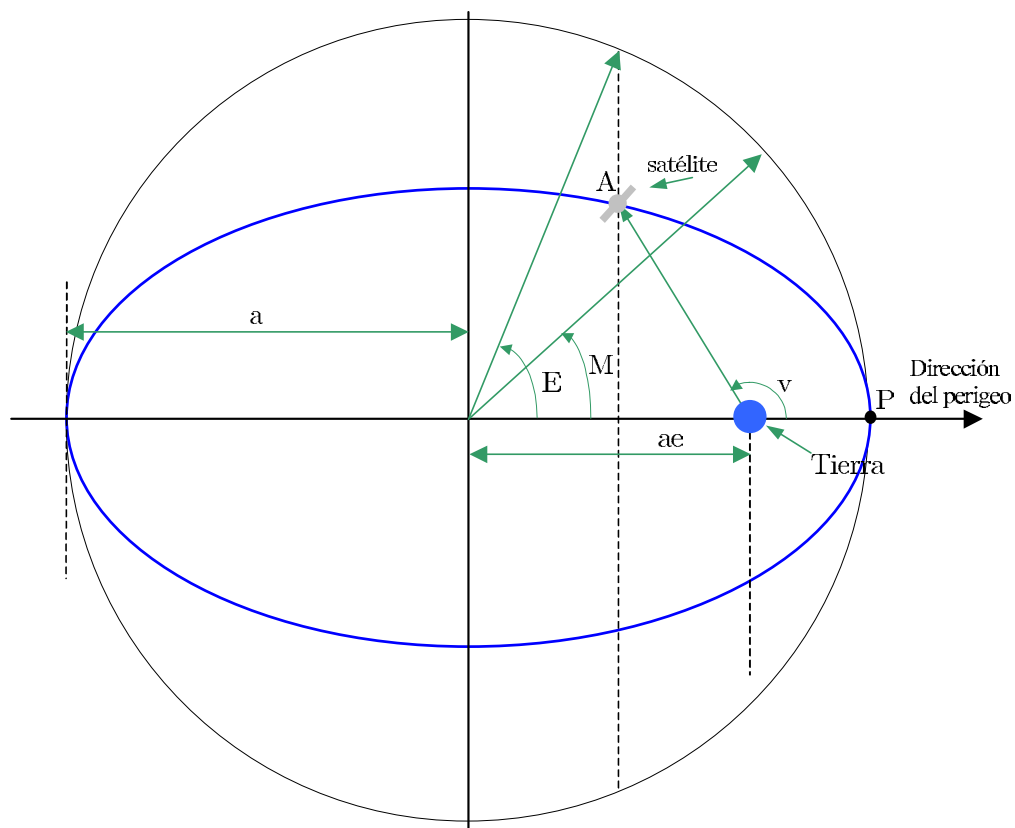


Figura 1.9: Parámetros que definen la forma de la elíptica y la posición de un satélite.

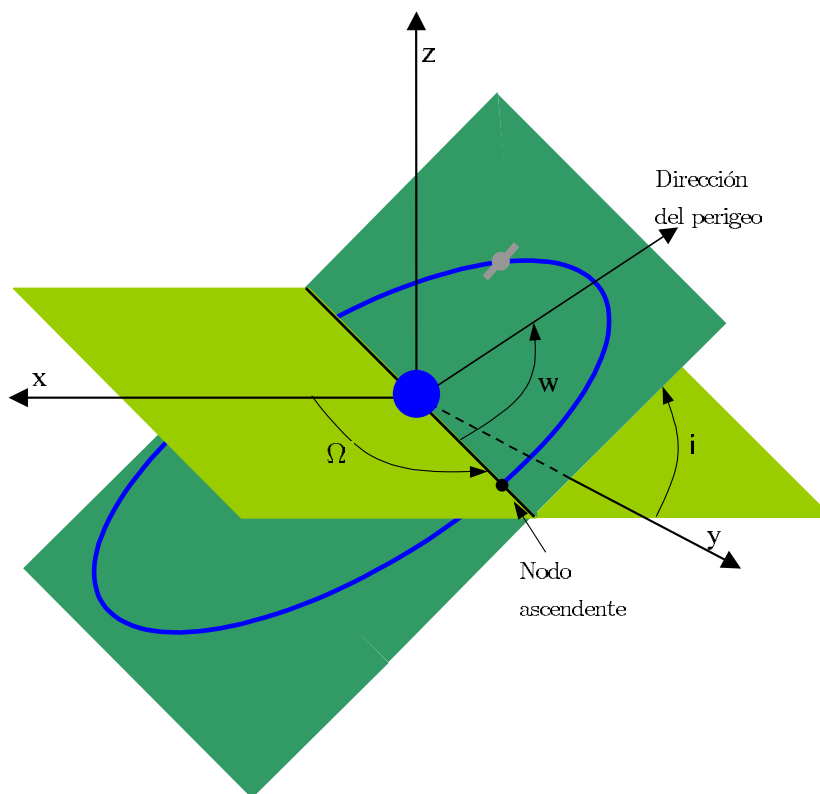


Figura 1.10: Parámetros que definen la orientación de la órbita.

La tabla 1.4 presenta los parámetros que contienen los mensajes de efeméride enviados por los satélites. Los siete primeros parámetros son los ya descritos y el resto son correcciones que permiten afinar mejor la posición del satélite. Los siete primeros parámetros son una versión restringida de la efeméride del satélite que se denomina **almanaque**. El receptor, con los parámetros de la efeméride, calcula la posición del satélite en cada instante de tiempo. En la sección 4.1.1 se detalla cómo se hace dicho cálculo.

t_{0e}	Tiempo de referencia de la efeméride
\sqrt{a}	Raíz cuadrada del semieje mayor
e	Excentricidad
i_0	Inclinación de la órbita en t_{0e}
Ω_0	Longitud del nodo ascendente al comienzo de la semana
w	Argumento del perigeo en t_{0e}
M_0	Anomalía media en t_{0e}
$\frac{di}{dt}$	Variación de la inclinación de la órbita
$\frac{d\Omega}{dt}$	Variación de la longitud del nodo ascendente
Δn_v	Corrección del movimiento medio
C_{uc}	Amplitud del coseno de la corrección del argumento de la latitud
C_{us}	Amplitud del seno de la corrección del argumento de la latitud
C_{rc}	Amplitud del coseno de la corrección del radio de la órbita
C_{rs}	Amplitud del seno de la corrección del radio de la órbita
C_{ic}	Amplitud del coseno de la corrección del ángulo de inclinación
C_{is}	Amplitud del seno de la corrección del ángulo de inclinación

Tabla 1.4: Parámetros de la efeméride.

1.3.2. Estimación de la posición mediante medidas de pseudodistancia

En la sección 1.1.2 se describe, de forma geométrica, cómo un receptor GNSS, a partir de las medidas del tiempo de propagación de las señales de 4 o más satélites puede determinar su posición y al mismo tiempo estimar la deriva de su reloj t_r . En este apartado, se describe de manera analítica el mismo procedimiento, concretándolo para las medidas de pseudodistancia.

Las medidas de pseudodistancia se ven afectadas por varias fuentes de error (sec. 1.2.3). De todas las fuentes, la más significativa es la deriva del reloj del receptor. El

resto de fuentes se considerará que tienen media nula y no se tendrán en cuenta para este cálculo. En esas condiciones, una medida de pseudodistancia particularizada para un satélite i es

$$\rho_i = d_i + c t_r \quad (1.11)$$

Las incógnitas a resolver son las tres coordenadas de la posición del receptor y la deriva del reloj t_r , por lo que son necesarias al menos 4 medidas o ecuaciones. De esta forma el sistema de ecuaciones, suponiendo que se cuenta con medidas de s satélites, con $s \geq 4$, es

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sqrt{(x_1 - x_r)^2 + (y_1 - y_r)^2 + (z_1 - z_r)^2} + c t_r \\ \rho_2 &= \sqrt{(x_2 - x_r)^2 + (y_2 - y_r)^2 + (z_2 - z_r)^2} + c t_r \\ &\dots \\ \rho_s &= \sqrt{(x_s - x_r)^2 + (y_s - y_r)^2 + (z_s - z_r)^2} + c t_r \end{aligned} \quad (1.12)$$

donde se han expandido las distancias d_i para hacer visibles las incógnitas de posición del receptor x_r , y_r y z_r . El sistema de ecuaciones 1.12 no es lineal, por lo que su solución no es inmediata. Normalmente se cuenta con una posición aproximada del receptor y lo que se hace es linealizar las ecuaciones en torno a esa posición aproximada. Si las coordenadas de dicha posición son \hat{x}_r , \hat{y}_r y \hat{z}_r , su relación con la posición real vendrá dada por

$$\begin{aligned} x_r &= \hat{x}_r + \Delta x_r \\ y_r &= \hat{y}_r + \Delta y_r \\ z_r &= \hat{z}_r + \Delta z_r \end{aligned} \quad (1.13)$$

La linealización del sistema de ecuaciones 1.12 consiste en expandir las ecuaciones mediante un desarrollo de Taylor alrededor de la posición aproximada y sólo utilizar los términos de dependencia lineal. Con este proceder cada una de las ecuaciones se convierte en

$$\rho_i = \hat{d}_i - u_{xi}\Delta x_r - u_{yi}\Delta y_r - u_{zi}\Delta z_r + ct_r = \hat{d}_i - \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{\Delta r} + ct_r \quad (1.14)$$

donde \hat{d}_i es la distancia de la posición aproximada al satélite, $\mathbf{\Delta r}$ un vector formado por Δx_r , Δy_r , Δz_r y u_{xi} , u_{yi} , u_{zi} son las componentes del vector unitario \mathbf{u}_i en la dirección del satélite, definidas como

$$\begin{aligned}
 u_{xi} &= \frac{x_i - \hat{x}_r}{\hat{d}_i} \\
 u_{yi} &= \frac{y_i - \hat{y}_r}{\hat{d}_i} \\
 u_{zi} &= \frac{z_i - \hat{z}_r}{\hat{d}_i}
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

La figura 1.11 representa la relación geométrica entre d_i , \hat{d}_i y $\Delta \mathbf{r}$. Los términos de la ecuación 1.14 se pueden reordenar y expresar la ecuación como

$$\hat{d}_i - \rho_i = u_{xi}\Delta x_r + u_{yi}\Delta y_r + u_{zi}\Delta z_r - ct_r \tag{1.16}$$

con lo que el sistema de ecuaciones, en formato matricial, queda

$$\Delta \rho = \begin{bmatrix} \hat{d}_1 - \rho_1 \\ \hat{d}_2 - \rho_2 \\ \dots \\ \hat{d}_s - \rho_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{x1} & u_{y1} & u_{z1} & 1 \\ u_{x2} & u_{y2} & u_{z2} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{xs} & u_{ys} & u_{zs} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_r \\ \Delta y_r \\ \Delta z_r \\ -ct_r \end{bmatrix} = \mathbf{H} \Delta \mathbf{x} \tag{1.17}$$

que es un sistema de ecuaciones sobredeterminado. La solución de mínimos cuadrados ordinaria (véase apéndice A.1) viene dada por

$$\Delta \mathbf{x} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \Delta \rho \tag{1.18}$$

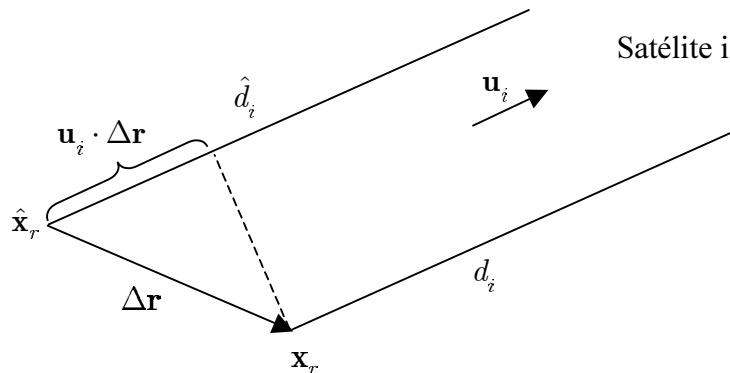


Figura 1.11: Linealización en un punto aproximado.

que aporta los desplazamientos que hay que realizar a la posición aproximada para obtener la estimación de la posición real (Ecu. 1.13) y la estimación de la deriva del reloj del receptor. Normalmente, este procedimiento se repite época a época, utilizando la estimación conseguida en una época como aproximación para la siguiente época. De esta forma, aún en el caso de que la aproximación inicial no sea muy buena, al cabo de varias épocas se converge a una buena aproximación.

1.3.3. Dispersión de la precisión por la geometría de los satélites

La precisión que se alcanza en el cálculo de la posición del receptor depende, además de la precisión de las medidas, de la geometría particular de los satélites. En ese sentido, se definen los parámetros de dispersión de precisión (*Dilution of Precision*, DOP), que caracterizan la geometría particular de los satélites. Primeramente se presentan las definiciones de estos parámetros y finalmente se pone un ejemplo en dos dimensiones que permite ilustrar gráficamente el significado de estos parámetros.

Para un mismo error en las medidas, el error final correspondiente en la posición estimada será distinto según la disposición geométrica particular de los satélites. Dicho de otra forma, para una misma covarianza de las medidas, la covarianza de la posición estimada será distinta en función de la geometría de los satélites. Los parámetros DOP relacionan la covarianza de las medidas con la covarianza de la posición estimada. Por tanto, para poder definirlos es necesario obtener una expresión de la covarianza de la posición estimada. En el apartado anterior se ha descrito el proceso por el cual un receptor calcula su posición a partir de las medidas, que finalmente viene dada por la ecuación 1.18. Si se asume que los errores que afectan a las medidas son independientes y de igual varianza σ_c^2 , entonces la covarianza de las medidas $\mathbf{Q}_{\Delta\rho}$ se puede expresar como

$$\mathbf{Q}_{\Delta\rho} = \mathbf{I}\sigma_c^2 \quad (1.19)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad. De esta forma, la covarianza de la posición y de la deriva del reloj del receptor estimados $\mathbf{Q}_{\Delta\mathbf{x}}$ (véase apéndice A.1) viene dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\Delta\mathbf{x}} &= (\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{Q}_{\Delta\rho}\mathbf{H}(\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1} \\ &= (\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{I}\sigma_c^2\mathbf{H}(\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1} \\ &= (\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}\sigma_c^2 \end{aligned} \quad (1.20)$$

La ecuación 1.20 refleja cómo afecta la geometría de los satélites al cálculo de la posición final. La covarianza de la estimación $\mathbf{Q}_{\Delta\mathbf{x}}$ queda expresada como el producto de la varianza de las medidas σ_c^2 y la matriz $(\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}$ que depende de los vectores unitarios a los satélites. Los parámetros DOP se definen a partir de la matriz $(\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}$. Para ello, conviene expandir la covarianza $\mathbf{Q}_{\Delta\mathbf{x}}$ como

$$\mathbf{Q}_{\Delta\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} \end{bmatrix} \sigma_c^2 = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy}^2 & \sigma_{xz}^2 & \sigma_{xt}^2 \\ \sigma_{xy}^2 & \sigma_y^2 & \sigma_{yz}^2 & \sigma_{yt}^2 \\ \sigma_{xz}^2 & \sigma_{yz}^2 & \sigma_z^2 & \sigma_{zt}^2 \\ \sigma_{xt}^2 & \sigma_{yt}^2 & \sigma_{zt}^2 & \sigma_t^2 \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

donde se ha denotado cada uno de los elementos de la covarianza, para indicar la información que dan sobre la varianza de cada una de las coordenadas de la posición del receptor ($\sigma_x^2, \sigma_y^2 \dots$) y de la deriva del reloj del receptor (σ_t^2). Se definen cinco tipos de parámetros: DOP geométrico (GDOP), DOP de posición (PDOP), DOP horizontal (HDOP), DOP vertical (VDOP) y DOP temporal (TDOP), siendo sus expresiones

$$GDOP = \frac{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + \sigma_t^2}}{\sigma_c} = \sqrt{D_{11} + D_{22} + D_{33} + D_{44}} \quad (1.22)$$

$$PDOP = \frac{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}}{\sigma_c} = \sqrt{D_{11} + D_{22} + D_{33}} \quad (1.23)$$

$$HDOP = \frac{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}}{\sigma_c} = \sqrt{D_{11} + D_{22}} \quad (1.24)$$

$$VDOP = \frac{\sigma_z}{\sigma_c} = \sqrt{D_{33}} \quad (1.25)$$

$$TDOP = \frac{\sigma_t}{\sigma_c} = \sqrt{D_{44}} \quad (1.26)$$

Con objeto de ilustrar gráficamente el significado de los parámetros DOP se presenta un ejemplo simplificado de sólo dos dimensiones. La figura 1.12 es una situación en la que a partir de dos satélites se quisiera determinar la posición de un receptor. Las posiciones de los dos satélites configuran una geometría favorable. El cálculo de la posición se obtiene mediante la intersección de las dos circunferencias que definen los dos satélites. Además de esas dos circunferencias se han añadido, para cada satélite, dos más para ilustrar el rango de posibles valores de las medidas como consecuencia del error que sufren. La zona coloreada en verde representa los posibles valores que podría tomar la estimación de la posición del receptor, es decir, la superficie de error. La figura 1.13 representa otra situación en la que las posiciones de los dos satélites configuran una geometría desfavorable. En esta situación, aún siendo los errores de las medidas iguales, la superficie de error es mucho mayor, es decir, la precisión que se puede alcanzar en el cálculo de la posición es mucho peor. Los parámetros DOP dan información del tamaño de las superficies de error para una configuración geométrica de satélites dada.

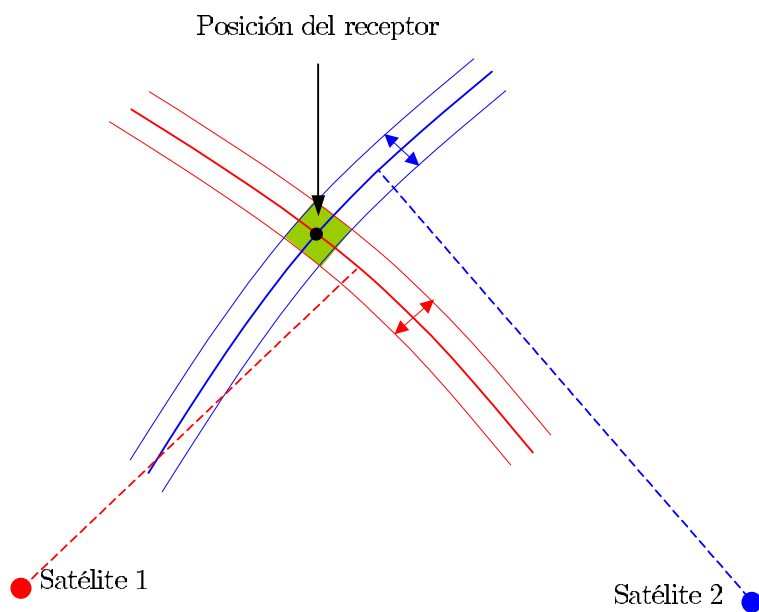


Figura 1.12: Dispersión de la precisión con geometría favorable.

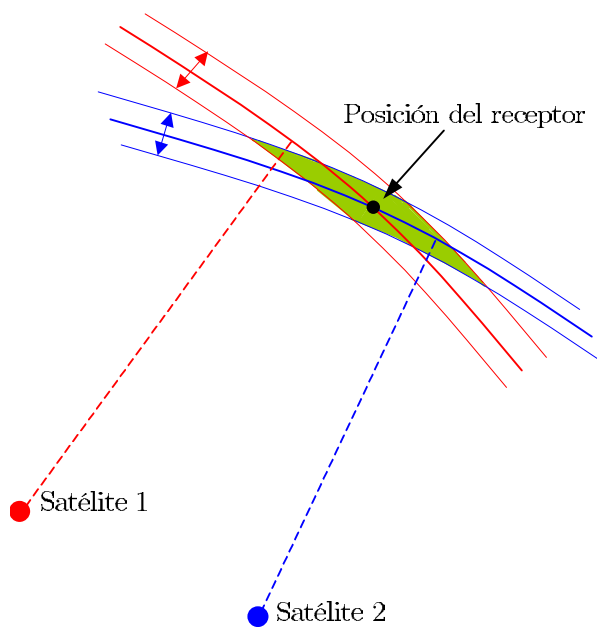


Figura 1.13: Dispersión de la precisión con geometría desfavorable.

1.3.4. Técnicas diferenciales

La precisión que se alcanza en la estimación de la posición del receptor (sec. 1.3.2) puede verse mejorada cuando se utilizan técnicas diferenciales, puesto que pueden eliminarse muchas de las fuentes de error. Para que sean aplicables estas técnicas es necesario contar con un receptor fijo, del que se conoce con precisión su posición. Este receptor permitirá estimar la posición de un segundo receptor, en general, móvil con gran precisión. Ambos receptores toman medidas que se ven afectadas por los mismos tipos de errores. La ventaja que tienen las técnicas diferenciales es que muchos de esos errores son comunes a ambos receptores y pueden ser cancelados. A continuación se describe cómo se estima la posición del receptor móvil con las técnicas diferenciales, utilizando las medidas de pseudodistancia.

La medida de pseudodistancia ρ_A^i , expresada en unidades de longitud, que toma el receptor fijo A , en una época, correspondiente a un satélite i y teniendo en cuenta la ecuación 1.6, se puede descomponer de la siguiente forma

$$\rho_A^i = d_A^i + c t_A - c t^i + w_A^i + \alpha_{iono}^i + \beta_{tropo}^i \quad (1.27)$$

donde d_A^i es la distancia geométrica entre el receptor y el satélite y t_A y t^i son las derivas de los relojes del receptor y del satélite respectivamente. El término w_A^i , que se va asumir tiene media nula y desviación típica σ_c , contiene los errores debidos al ruido del receptor y al efecto multicamino. Los efectos debidos a la Ionosfera y la Troposfera quedan recogidos en α_{iono}^i y β_{tropo}^i .

El receptor móvil B puede tomar una medida del mismo tipo

$$\rho_B^i = d_B^i + c t_B - c t^i + w_B^i + \alpha_{iono}^i + \beta_{tropo}^i \quad (1.28)$$

En el caso en el que los dos receptores estén próximos, los errores debidos a la Troposfera y a la Ionosfera pueden ser considerados iguales. Por ello, si se calcula la diferencia entre las dos medidas se cancelan dichos errores y se obtiene lo que se conoce como la diferencia simple

$$\rho_{AB}^i = d_{AB}^i + c t_{AB} + w_{AB}^i \quad (1.29)$$

donde también se ha cancelado la deriva del reloj del satélite. Repitiendo el proceso para un satélite j se obtendrá

$$\rho_{AB}^j = d_{AB}^j + c t_{AB} + w_{AB}^j \quad (1.30)$$

que permite obtener lo que se denomina la doble diferencia como

$$\rho_{AB}^{ij} = \rho_{AB}^i - \rho_{AB}^j = d_{AB}^i + w_{AB}^{ij} \quad (1.31)$$

donde las derivas de los relojes de los receptores se anulan. La resolución de la posición del receptor B a partir de ecuaciones como la 1.31 implica resolver un sistema no lineal, al igual que ocurría con la ecuación 1.12 de la sección 1.3.2. Para su resolución también es necesario hacer una linealización, en este caso, en torno a la posición del receptor fijo A . En esas condiciones, las relaciones geométricas entre los distintos valores se pueden ver en la figura 1.14. Como se observa, las dos simples diferencias geométricas d_{AB}^i y d_{AB}^j están relacionadas con el vector \mathbf{b} , denominado **línea de base**, que une los dos receptores. De hecho, d_{AB}^i es la proyección del vector \mathbf{b} sobre la dirección del satélite i y d_{AB}^j en la dirección del satélite j , es decir,

$$\begin{aligned} d_{AB}^i &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}^i \\ d_{AB}^j &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}^j \end{aligned} \quad (1.32)$$

donde \mathbf{u}^i y \mathbf{u}^j son los vectores unitarios en las direcciones de los satélites i y j . De esta forma, la doble diferencia se puede expresar ahora como

$$\rho_{AB}^{ij} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}^{ij} + w_{AB}^{ij} \quad (1.33)$$

donde \mathbf{u}^{ij} es la diferencia de los dos vectores unitarios. Dado que la posición del receptor A es conocida, la obtención de la posición del receptor B se traduce en calcular las componentes del vector de la línea de base \mathbf{b} . Ello es posible si se cuenta con un mínimo de tres medidas en dobles diferencias. Para que dichas medidas sean linealmente independientes serán necesarios cuatro satélites. El sistema de ecuaciones, para un caso general

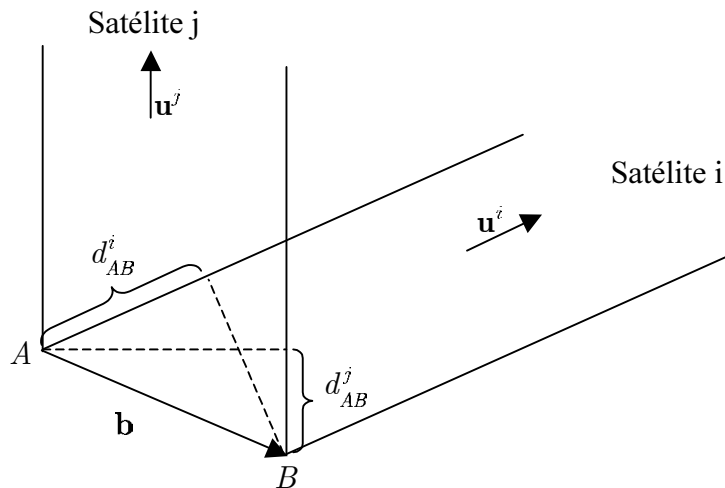


Figura 1.14: Representación geométrica de las simples diferencias.

de contar con medidas de s satélites, en formato matricial será

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \rho_{AB}^{12} \\ \rho_{AB}^{13} \\ \dots \\ \rho_{AB}^{1s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x^{12} & u_y^{12} & u_z^{12} \\ u_x^{13} & u_y^{13} & u_z^{13} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_x^{1s} & u_y^{1s} & u_z^{1s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{AB}^{12} \\ w_{AB}^{13} \\ \dots \\ w_{AB}^{1s} \end{bmatrix} = \mathbf{H} \mathbf{b} + \mathbf{w} \quad (1.34)$$

Dado que se asume que el vector error \mathbf{w} tiene media nula y covarianza conocida, la solución de mínimos cuadrados (apéndice A.2) es

$$\mathbf{b} = (\mathbf{H}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{y} \quad (1.35)$$

donde \mathbf{Q}_y es la covarianza de las medidas, igual a la covarianza de su error \mathbf{Q}_w , que viene dada por

$$\mathbf{Q}_w = 2 \sigma_c^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

1.3.5. Estimación de la posición mediante medidas de fase

Las medidas de las fases de las portadoras que ofrecen los GNSS, de precisiones del orden de milímetros, permiten estimar la posición alcanzando precisiones del orden de centímetros. Aunque para ello, requieren resolver su ambigüedad inherente, el número entero de ciclos de portadora. Por otro lado, para alcanzar esa alta precisión, han de ser utilizadas en modo diferencial, con el mismo planteamiento que se describe en la sección 1.3.4. A continuación se particulariza dicho planteamiento al caso de utilizar medidas de fase.

La medida de fase ϕ_A^i , expresada en ciclos, que toma el receptor fijo A , en una época, correspondiente a un satélite i y teniendo en cuenta la ecuación 1.7, se puede descomponer de la siguiente forma

$$\phi_A^i = d_A^i + n_A^i + f t_A - f t^i + v_A^i - \alpha_{iono}^i + \beta_{tropo}^i \quad (1.37)$$

donde n_A^i es el número ambiguo de ciclos de portadora, d_A^i es la distancia geométrica, expresada en ciclos, entre el receptor y el satélite, t_A y t^i son las derivas de los relojes del receptor y del satélite respectivamente, f es la frecuencia de la portadora, v_A^i , que se va asumir tiene media nula y desviación típica δ_f , recoge los errores debidos al ruido del

receptor y al efecto multicamino, y α_{iono}^i y β_{trapo}^i los efectos debidos a la Ionosfera y a la Troposfera.

Si se cuenta con medidas de otro receptor móvil B y de otro satélite j se puede, siguiendo el procedimiento utilizado en la sección 1.3.4, obtener la siguiente medida de fase en doble diferencia

$$\phi_{AB}^{ij} = d_{AB}^{ij} + n_{AB}^{ij} + v_{AB}^{ij} \quad (1.38)$$

donde se han cancelado los errores debidos a la Troposfera y a la Ionosfera y las derivas de los relojes de los receptores y satélites. La linealización de la ecuación 1.38, véase la figura 1.14, permite relacionar la doble diferencia geométrica d_{AB}^{ij} con la línea de base \mathbf{b} y expresar la medida de fase en doble diferencia como

$$\phi_{AB}^{ij} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}^{ij} + n_{AB}^{ij} + v_{AB}^{ij} \quad (1.39)$$

donde \mathbf{u}^{ij} es la diferencia de los vectores unitarios a los satélites, expresada en ciclos. Si se cuenta con medidas de fase de s satélites se podrán obtener $s - 1$ ecuaciones de este tipo, que agrupadas matricialmente de la misma forma a como se hizo con la ecuación 1.34, dan lugar a

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{b} + \mathbf{n} + \mathbf{v} \quad (1.40)$$

En ocasiones los dos receptores no son muy próximos, es decir, la línea de base es larga, y la linealización en la posición del receptor fijo introduce demasiado error. En esos casos es más conveniente linealizar el sistema de ecuaciones en torno a la posición aproximada del receptor B_0 que se obtiene con las medidas de pseudodistancia (sec. 1.3.4). En esas condiciones la ecuación 1.40 se convierte en

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n} + \mathbf{v} \quad (1.41)$$

donde ahora la matriz \mathbf{H} contiene las diferencias de vectores unitarios entre la posición B_0 y los satélites y \mathbf{x} es una nueva línea de base, mucho más corta, entre B_0 y la posición del receptor móvil B . En la figura 1.15 se ilustra la relación entre la línea de base original \mathbf{b} y la nueva \mathbf{x} .

La resolución del sistema de ecuaciones 1.41 es mucho más costosa que la del sistema 1.34, puesto que además de las incógnitas de posición \mathbf{x} hay que resolver las incógnitas enteras de ciclos de portadora \mathbf{n} , las ambigüedades. La resolución de las ambigüedades es muy costosa porque, en general, requiere ensayar todas las posibles combinaciones de enteros hasta dar con la solución. Una vez resuelta la ambigüedad, dado que se asume que el vector error \mathbf{v} tiene media nula y covarianza conocida, la solución de mínimos cuadrados (apéndice A.2) de la línea de base es

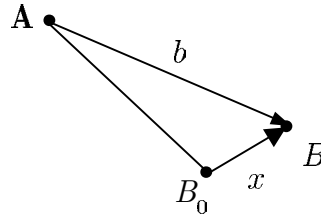


Figura 1.15: Linealización en torno a una posición más aproximada.

$$\mathbf{x} = (\mathbf{H}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{Q}_y^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{n}) \quad (1.42)$$

donde \mathbf{Q}_y es la covarianza de las medidas, igual a la covarianza de su error \mathbf{Q}_v , que viene dada por

$$\mathbf{Q}_v = 2 \delta_f^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & .. & 1 \\ 1 & 2 & .. & 1 \\ .. & .. & .. & .. \\ 1 & 1 & .. & 2 \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

En la actualidad hay un gran número de métodos propuestos para conseguir que la **resolución de la ambigüedad**, que es como se denomina al problema, se haga de la manera más eficiente posible. En el capítulo siguiente se analizan con detalle la problemática de la resolución de la ambigüedad y algunos de los métodos propuestos.

1.4. Conclusiones

Los sistemas de navegación por satélite permiten que un usuario, con un receptor apropiado, determine las coordenadas de su posición con gran precisión. Actualmente están en funcionamiento el GPS americano y el GLONASS ruso. En un futuro cercano estará operativo el nuevo sistema europeo, el Galileo.

La precisión en el cálculo de la posición que puede alcanzar un usuario depende de las medidas que utilice y de la técnica que emplee. El nivel de acceso al que esté autorizado el usuario limita las medidas que puede utilizar. Las medidas de pseudodistancia permiten conseguir precisiones de varios metros. Las medidas de fase, que han de ser utilizadas en modo diferencial, permiten conseguir precisiones del orden de centímetros. Sin embargo,

las medidas de fase tienen el problema de que han de resolver su ambigüedad inherente, el número entero de ciclos de portadora. El GPS ampliado y el futuro Galileo ofrecerán medidas de fase de tres frecuencias distintas, lo que podrá ser utilizado para hacer más eficaces los métodos de resolución de la ambigüedad.

La problemática de la resolución de la ambigüedad es el tema central de la tesis. En los sucesivos capítulos se analiza en detalle, se describen los principales métodos existentes y se proponen nuevos métodos.

Capítulo 2

Resolución de la ambigüedad de las medidas de fase

El objetivo de este capítulo es describir las características de los métodos que existen en la actualidad para la resolución de la ambigüedad de las medidas de fase. Para dicho propósito se ha dividido en dos partes. En la primera parte se presenta la formulación y las ecuaciones básicas que permitirán explicar adecuadamente los distintos métodos. En la segunda parte se describen los métodos más importantes que existen y se analizan con detalle aquellos que se han tomado como partida para el desarrollo de esta tesis.

2.1. Planteamiento del problema

2.1.1. Sistema de ecuaciones básico

Las técnicas de resolución de la ambigüedad de las medidas de fase han de resolver el sistema de ecuaciones planteado en el capítulo anterior (Ecu. 1.41):

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n} + \mathbf{v} \quad (2.1)$$

que se corresponde con medidas de un instante de tiempo o época. El vector \mathbf{y} contiene las medidas de fase en dobles diferencias; el vector \mathbf{x} alberga las incógnitas de posición, la denominada línea de base; el vector \mathbf{n} , las incógnitas enteras, es decir, las ambigüedades; \mathbf{v} modela todas las fuentes de error de las medidas; y la matriz \mathbf{H} contiene los cosenos directores relativos a la geometría del problema. Si se dispone de medidas de fase correspondientes a s satélites, se pueden formar $m = s - 1$ dobles diferencias y habrá 3 incógnitas reales del vector \mathbf{x} y m enteras del vector \mathbf{n} . Asumiendo que el vector que modela las fuentes de error tiene media nula, puede abordarse la resolución del problema despreciando el término \mathbf{v} . En ese caso y reformulando la expresión 2.1, el sistema de ecuaciones queda como

$$\mathbf{y} = [\mathbf{H} \ \mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad. La matriz del sistema $[\mathbf{H} \ \mathbf{I}]$ tiene m filas, que se corresponden con las m observaciones y el vector de incógnitas $[\mathbf{x} \ \mathbf{n}]$ es de dimensión $m + 3$. Por tanto, es un sistema indeterminado con 3 grados de libertad y no se puede resolver directamente. A continuación se describen las alternativas que existen para aumentar el número de ecuaciones y la problemática que conlleva la resolución de incógnitas enteras. Todo ello permitirá definir los dos posibles planteamientos para la resolución de la ambigüedad.

Aumento del número de ecuaciones del sistema

Aunque el número de ecuaciones del sistema de partida es menor que el de incógnitas, existen dos alternativas que permiten aumentar el número de observaciones y conseguir así un sistema de ecuaciones sobredeterminado.

- **Combinación de medidas de varias épocas.** Las ambigüedades de los ciclos de portadora no varían de época en época, pues los receptores registran los cambios en el número de ciclos en las propias medidas de fase. Esta característica brinda la posibilidad de combinar medidas de fase relativas a distintas épocas. Si se combinan medidas relativas a k épocas, se obtendrán $k * m$ ecuaciones, mientras que el número de incógnitas enteras seguirá siendo m . Sin embargo, debe de tenerse en cuenta que el número de incógnitas de posición se verá multiplicado por el mismo factor k , si el receptor móvil se mueve, o permanecerá inalterable, si es fijo. En cualquiera de los casos, eligiendo adecuadamente el número de épocas se puede obtener un sistema con más ecuaciones que incógnitas.
- **Combinación de medidas de pseudodistancia y fase.** Como se explica en el capítulo anterior, en cada época, además de obtenerse medidas de fase, se obtienen medidas de pseudodistancia, pero de menor precisión. Dichas medidas dan lugar a ecuaciones como las de la expresión 2.1 sólo que sin las incógnitas enteras relativas a las ambigüedades. Por tanto, es posible combinar las medidas de fase junto con las de pseudodistancia para obtener un sistema con el doble de ecuaciones y las mismas incógnitas.

Problemática de la resolución de incógnitas enteras

Aun en el caso de que el sistema de ecuaciones esté sobredeterminado, los procedimientos algebraicos de resolución ofrecen siempre soluciones reales, no enteras. El único

modo de determinar la solución entera es explorar de manera secuencial todas las posibles combinaciones de enteros, a las que se denominan **candidatos**, hasta encontrar aquella que satisfaga mejor las ecuaciones, según algún criterio de satisfacción. Por esa razón, todos los métodos de resolución de la ambigüedad cuentan con una fase de exploración de candidatos, que es la más costosa. Los distintos métodos intentan realizar dicha exploración de la manera más eficaz posible.

Planteamiento con o sin aproximación real de las ambigüedades

Teniendo en cuenta las posibilidades mencionadas de aumento del número de ecuaciones y la problemática de resolución de incógnitas enteras señalada, los distintos métodos de resolución de la ambigüedad pueden dividirse en dos clases, según la estrategia utilizada en el planteamiento inicial.

- **Planteamiento con aproximación real.** Esta estrategia se basa en considerar, inicialmente, las incógnitas enteras como incógnitas reales y utilizar el suficiente número de ecuaciones para resolver el sistema. Para ello, se utilizan medidas de varias épocas o se combinan las medidas de fase con las de pseudodistancia, y se obtiene así una aproximación real a las ambigüedades. Esta aproximación será utilizada posteriormente como punto de partida en la fase de exploración de candidatos.
- **Planteamiento sin aproximación real.** Esta estrategia utiliza el sistema de ecuaciones de partida y no utiliza ninguna de las alternativas posibles para aumentar el número de ecuaciones. Por tanto, inicialmente no resuelve el sistema y no obtiene una aproximación real de la ambigüedad. En lugar de ello, postpone la resolución del sistema a la fase de exploración de candidatos. Cada candidato explorado definirá un sistema de ecuaciones en el cual el candidato será un dato y no una incógnita, con lo que el sistema así definido estará sobredeterminado, con m ecuaciones y 3 incógnitas de posición.

En cualquiera caso, los dos planteamientos señalados necesitan resolver un sistema de ecuaciones sobredeterminado. En ambos casos, se utiliza la solución de mínimos cuadrados con covarianza de las observaciones estimada (véase apéndice A.2). A continuación se describen los dos tipos de planteamientos.

2.1.2. Planteamiento con aproximación real

El planteamiento con aproximación real se basa en aumentar el número de ecuaciones, incluyendo más medidas, de manera que se puede resolver el sistema algebraicamente. Con ello se consigue una aproximación real de las ambigüedades que será posteriormente

utilizada como punto de partida para encontrar la solución entera. Para poder contar con un número apropiado de ecuaciones será necesario combinar medidas de diferentes épocas o combinar medidas de pseudodistancia y fase. A continuación se describen las dos posibilidades.

Combinación de medidas de varias épocas

Las ambigüedades \mathbf{n} , inherentes a las medidas de fase, no varían de época en época. Esta característica hace posible que se puedan combinar medidas de fase relativas a distintas épocas. Si se cuenta con medidas correspondientes a j épocas consecutivas durante las cuales la línea de base \mathbf{x} no cambia, entonces la expresión 2.2 se convierte en:

$$\mathbf{y}_J = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \dots \\ \mathbf{y}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{I} \\ \mathbf{H}_2 & \mathbf{I} \\ \dots & \dots \\ \mathbf{H}_j & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \dots \\ \mathbf{v}_j \end{bmatrix} = \mathbf{H}_J \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} + \mathbf{v}_J \quad (2.3)$$

En el caso de que el receptor móvil cambie de posición entre épocas, también cambiará la línea de base y el número de incógnitas de posición será $3 * j$ en lugar de 3. En cualquier caso, el número de incógnitas será como máximo de $3 * j + m$, siendo m el número de ambigüedades a resolver, y el número de ecuaciones $m * j$, de manera que eligiendo adecuadamente el número de épocas el sistema de ecuaciones estará sobredeterminado. Por tanto, es posible encontrar una solución de mínimos cuadrados (véase apéndice A.2) tanto de la línea de base $\hat{\mathbf{x}}$ como de las ambigüedades. Sin embargo, las soluciones conseguidas de las ambigüedades serán reales en lugar de enteras. Para indicar esta circunstancia se denotarán como $\hat{\mathbf{n}}_f$ con el subíndice f como indicativo de que son reales (del inglés *float*). Si las dos soluciones se integran en el vector $\hat{\mathbf{s}}$, se obtiene

$$\hat{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{n}}_f \end{bmatrix} = \mathbf{A}_J \mathbf{y}_J \quad (2.4)$$

con

$$\mathbf{A}_J = (\mathbf{H}_J^T \mathbf{Q}_J^{-1} \mathbf{H}_J)^{-1} \mathbf{H}_J^T \mathbf{Q}_J^{-1} \quad (2.5)$$

y

$$\mathbf{Q}_J = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{y_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{y_2} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{Q}_{y_j} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

pues se puede considerar que las medidas de las distintas épocas son independientes entre sí. La covarianza de la solución vendrá dada por:

$$\mathbf{Q}_{\hat{s}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\hat{x}} & \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{n}_f} \\ \mathbf{Q}_{\hat{n}_f\hat{x}} & \mathbf{Q}_{\hat{n}_f} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_J \mathbf{Q}_J \mathbf{A}_J^T \quad (2.7)$$

La aproximación real de las ambigüedades $\hat{\mathbf{n}}_f$ puede utilizarse como punto de partida y explorar candidatos próximos a ella. Para evaluar la calidad de un posible candidato \mathbf{n}_k como solución a la ambigüedad, se puede utilizar el valor de la norma cuadrática ponderada del error observado o residuo cuadrático Ω_k (véase apéndice A.2), que viene dado por

$$\Omega_k = \|\mathbf{r}\|_{Q_J^{-1}}^2 = \left(\mathbf{y}_J - \mathbf{H}_J \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{n}_k \end{bmatrix} \right)^T \mathbf{Q}_J^{-1} \left(\mathbf{y}_J - \mathbf{H}_J \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{n}_k \end{bmatrix} \right) \quad (2.8)$$

El inconveniente de combinar medidas de fase de varias épocas es que es necesario esperar j épocas para poder ofrecer una solución a la ambigüedad. Además, el intervalo entre épocas elegido no puede ser muy reducido, ya que en ese caso las matrices $\mathbf{H}_1 \dots \mathbf{H}_j$ serían casi idénticas y la matriz del sistema \mathbf{H}_J sería casi singular, con lo que el sistema estaría mal condicionado.

Combinación de medidas de pseudodistancia y fase

Otra alternativa para conseguir un sistema sobredeterminado, que permita obtener una aproximación real de las ambigüedades, es combinar medidas de fase con medidas de pseudodistancia de una época. En ese caso, el sistema resultante tendrá $2 * m$ ecuaciones y $m + 3$ incógnitas y será de las mismas características que el de la expresión 2.3, sólo que ahora

$$\mathbf{y}_J = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{fase} \\ \mathbf{y}_{pdist} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{H}_J = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{I} \\ \mathbf{H} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{v}_J = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{fase} \\ \mathbf{v}_{pdist} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{Q}_J = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{y_{fase}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{y_{pdist}} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Esta opción, aunque ofrece las estimaciones $\hat{\mathbf{x}}$ y $\hat{\mathbf{n}}_f$ en una sola época, presenta el inconveniente de mezclar medidas de diferentes características. Los dos tipos de medidas se ponderan adecuadamente utilizando sus covarianzas (Ecu. 2.12 en Ecu. 2.4 y 2.5). Sin embargo, las covarianzas de las medidas son siempre estimaciones a priori. Si la estimación es incorrecta en un tipo de medidas, la solución obtenida se degrada y todo el proceso de resolución de la ambigüedad se ve perjudicado, aunque la estimación en el otro tipo de medidas sea correcta. Ésta es la razón por la cual suele ser más conveniente usar técnicas que permitan desacoplar unas medidas de otras.

2.1.3. Planteamiento sin aproximación real

El segundo tipo de planteamiento no utiliza una aproximación real de las ambigüedades, pues utiliza directamente el sistema de ecuaciones de partida (Ecu.2.1), que está indeterminado. En la fase de exploración, para cada candidato explorado, se resuelve el sistema. Cada candidato \mathbf{n}_k define un sistema de ecuaciones en el que las únicas incógnitas son las de la línea de base, es decir

$$\mathbf{y} - \mathbf{n}_k = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (2.13)$$

donde se está considerando $\mathbf{y} - \mathbf{n}_k$ como el vector de observaciones, \mathbf{H} como la matriz del sistema y \mathbf{x} como el vector de incógnitas. El sistema tiene m ecuaciones y tan sólo 3 incógnitas. Dado que, en general, se cuenta con medidas de al menos cuatro satélites, el sistema resultante está sobredeterminado y la solución de mínimos cuadrados es

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{y} - \mathbf{n}_k) \quad (2.14)$$

con \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = (\mathbf{H}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \quad (2.15)$$

y el residuo cuadrático correspondiente

$$\Omega_k = \left\| \mathbf{r} \right\|_{\mathbf{Q}_y^{-1}}^2 = \min (\mathbf{y} - \mathbf{n}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{Q}_y^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{n}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}) = (\mathbf{y} - \mathbf{n}_k)^T \mathbf{B} (\mathbf{y} - \mathbf{n}_k) \quad (2.16)$$

con \mathbf{B} definida como

$$\mathbf{B} = (\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{A})^T \mathbf{Q}_y^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{A}) \quad (2.17)$$

La resolución de la ambigüedad consistirá en buscar el candidato \mathbf{n}_k al que corresponde un valor de Ω_k mínimo. El hecho de que este planteamiento no utilice una aproximación

real de las ambigüedades puede hacer que la exploración de candidatos sea más costosa. Sin embargo, tiene la ventaja de poder resolver la ambigüedad a partir de medidas de una sola época y sin mezclar medidas de pseudodistancia con medidas de fase. Estas características son las que han motivado el utilizar este plantamiento en los dos métodos que se proponen en esta tesis.

2.2. Métodos de resolución de la ambigüedad

2.2.1. Introducción

La alta precisión que se consigue en el posicionamiento, una vez resuelta la ambigüedad de las medidas de fase, ha hecho que en la década de los 90 se hayan propuesto un gran número de métodos para resolver dicha ambigüedad. Los distintos métodos abordan la problemática con distintas estrategias para resolver la ambigüedad en el menor tiempo posible, pues han de funcionar adecuadamente en aplicaciones de alta cinética. Por ello, a estos métodos se les suele englobar en lo que se denominan técnicas OTF, siglas inglesas de 'al vuelo' (*on the fly*), de resolución de la ambigüedad. La mayoría de los métodos fueron propuestos para el GPS y para una sola frecuencia, pues la segunda es menos accesible. El proceso de resolución de la ambigüedad, para cualquiera de los métodos, se puede dividir en las siguientes fases:

- **Cálculo de la aproximación real.** En esta fase, que existirá o no dependiendo del **planteamiento utilizado**, con o sin aproximación real, se calcula una aproximación real de la ambigüedad, que servirá como punto de partida en la búsqueda de la solución entera.
- **Exploración de candidatos.** En esta fase se exploraran los candidatos que pertenecen a un **espacio de búsqueda**, cuyas fronteras es necesario fijar convenientemente para que la exploración no resulte demasiado costosa. Estas fronteras han de garantizar que el espacio de búsqueda contenga la solución, y a la vez que el número de candidatos incluidos no sea muy elevado. Normalmente la exploración se inicia en un **punto inicial** y se exploran los candidatos próximos a él dentro del espacio de búsqueda. Los candidatos explorados se valoran según un **criterio de evaluación**, siendo el de mínimo residuo cuadrático el elegido habitualmente. En cualquier caso, es la fase más costosa del proceso y la **estrategia de exploración** utilizada será determinante en su eficacia.
- **Elección del candidato solución.** El candidato que haya alcanzado mejor valoración en la fase de exploración será el elegido como solución a la ambigüedad. No obstante, suelen conseguirse mejores resultados si se promedia la valoración de los

candidatos a lo largo de las distintas épocas, de manera que el candidato elegido como solución sea el que tenga mejor valoración promediada a lo largo del tiempo.

Las diferencias entre unos métodos y otros radican en la elección tomada en cada uno de los aspectos que se han ido señalando, es decir,

- **Planteamiento utilizado.**
- **Obtención del punto inicial.**
- **Criterio de evaluación de candidatos.**
- **Definición del espacio de búsqueda.**
- **Estrategia de exploración de candidatos.**
- **Elección del candidato solución.**

Por tanto, para describir con detalle el funcionamiento de un método, lo que se hace en el apartado siguiente y en el capítulo 3, es analizar las características particulares de cada uno de estos aspectos. A continuación se describen someramente los métodos que han tenido más difusión.

El método LSAST, siglas inglesas de técnica de búsqueda de la ambigüedad por mínimos cuadrados (*Least Squares Ambiguity Search Technique*), fue presentado en [Hatc90]. Utiliza el planteamiento sin aproximación real de las ambigüedades. Para reducir el número de candidatos a explorar divide los satélites disponibles en dos grupos. El primer grupo, de sólo 4 satélites, permite definir un conjunto reducido de posibles candidatos a la solución. El segundo grupo permite eliminar de ese conjunto candidatos incorrectos.

El método FARA, siglas inglesas de estrategia de resolución rápida de la ambigüedad (*Fast Ambiguity Resolution Approach*), fue presentado en [Frei90]. El planteamiento que utiliza es con aproximación real de las ambigüedades. Los candidatos a la solución se exploran en torno a la aproximación real. La covarianza de la aproximación real es utilizada para definir el espacio de búsqueda y la correlación entre las ambigüedades. Dicha correlación es utilizada en la fase de exploración para hacer una **fijación secuencial condicionada** de las coordenadas de los candidatos, que se basa en que al fijar una coordenada de un candidato, se condicionan los posibles valores que puede tomar las restantes coordenadas.

El método FASF, siglas inglesas de algoritmo de resolución rápida de la ambigüedad basada en filtrado (*Fast Ambiguity Search Filtering algorithm*), fue presentado en [Chen95]. Las características de este método son similares a las del método FARA. El planteamiento que utiliza es con aproximación real de las ambigüedades. Sin embargo, la

exploración de candidatos con fijación secuencial condicionada la hace mediante filtros de Kalman.

El método LAMBDA, siglas inglesas de ajuste de mínimos cuadrados con decorrelación de la ambigüedad (*Least square AMBiguity Decorrelation Adjustment*), fue presentado en [Teun95]. Utilizando el planteamiento con aproximación real, realiza una decorrelación de las ambigüedades que le permite hacer una exploración con fijación secuencial condicionada de coordenadas muy eficaz. Este método que se describe con detalle en la sección 2.2.2 es probablemente, en la actualidad, el que ofrece mejores resultados.

El método Nulo, propuesto en [Mart95], utiliza el planteamiento sin aproximación real. Para reducir el espacio de búsqueda explora los candidatos solamente alrededor del subespacio nulo asociado a las ecuaciones del sistema. En la sección 2.2.3 se describe con detalle. En [Prat97] se propone un método de características similares a las del método Nulo, pero aplicado a las dos frecuencias del sistema GPS.

El método ARCE, siglas inglesas de resolución de la ambigüedad utilizando ecuaciones con restricciones (*Ambiguity Resolution using Constraint Equations*), fue presentado en [Park97]. El planteamiento que utiliza es con aproximación real de las ambigüedades. La estrategia de exploración de candidatos se basa en una reducción del número de dimensiones del espacio de búsqueda, convirtiéndolo en un espacio tridimensional, con lo se acelera la exploración. En la sección 2.2.4 se describe con detalle.

La ampliación del sistema GPS y el nuevo Galileo ofrecerán medidas en tres frecuencias distintas. Como consecuencia de eso los distintos métodos se tendrán que adaptar a las nuevas condiciones. Para algunos de ellos, como es el caso del método LAMBDA, la adaptación es directa [Joos99]. Sin embargo, otros métodos requieren cierta adaptación, como es el caso del método Nulo, cuya adaptación se propone en esta tesis (sec. 3.2) y ha sido publicada en [Fern04]. Por otro lado, las nuevas condiciones han propiciado la aparición de nuevos métodos, como los presentados en [Voll99], [Voll04], [Hern03] o en [Jung00].

En [Hofn97] se hace una descripción más completa de todos estos métodos y en [Kim00], además, se comparan las características de unos y otros. A continuación, se describe con detalle los métodos LAMBDA, Nulo y ARCE, por su relación con los métodos que se proponen en esta tesis.

2.2.2. Método LAMBDA

El método LAMBDA [Teun95] utiliza el planteamiento con aproximación real. Además, antes de la exploración de candidatos, realiza una decorrelación de las ambigüedades con la que logra acelerar la exploración posterior. Por otro lado, realiza una exploración de candidatos con fijación secuencial condicionada de coordenadas, que basa su eficacia en el hecho de que al fijar una coordenada de un candidato se condicionan los

posibles valores que pueden tomar el resto de coordenadas.

Planteamiento utilizado

Para poder utilizar el planteamiento con aproximación real, utiliza medidas de fase relativas a varias épocas. También se pueden combinar medidas de fase y pseudodistancia relativas a una sola época. Sin embargo, los autores del método recomiendan la primera opción y no mezclar medidas de fase con medidas de pseudodistancia.

Obtención del punto inicial

El método LAMBDA utiliza la aproximación real de las ambigüedades $\hat{\mathbf{n}}_f$ como punto inicial. Sin embargo, no redondea dicha aproximación al vector entero más cercano. La exploración se realiza directamente en torno a $\hat{\mathbf{n}}_f$ y de hecho, puede ocurrir que el vector entero más cercano a $\hat{\mathbf{n}}_f$ no sea considerado como un posible candidato.

Criterio de evaluación de candidatos y elección de la solución

En lugar de utilizar la expresión 2.8 del residuo cuadrático como criterio de evaluación de candidatos, el método utiliza la siguiente

$$\chi_k^2 = (\hat{\mathbf{n}}_f - \mathbf{n}_k)^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{n}}_f}^{-1} (\hat{\mathbf{n}}_f - \mathbf{n}_k) \quad (2.18)$$

El valor χ_k^2 , no siendo lo mismo que el residuo cuadrático, ofrece una estimación de cómo de cerca está un candidato \mathbf{n}_k de la aproximación real $\hat{\mathbf{n}}_f$ ponderada por $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{n}}_f}^{-1}$. La solución a la ambigüedad tendrá mínima distancia a la aproximación real.

Por tanto, el candidato que se elegirá como solución será aquél cuyo χ_k^2 sea mínimo. En el caso de que en el planteamiento se hayan utilizado medidas de fase relativas a j épocas se ofrecerá una solución a la ambigüedad cada j épocas. En el caso de que se haya optado por combinar medidas de fase y pseudodistancia de una época, se ofrecerá una solución en cada época.

Definición del espacio de búsqueda

El espacio de búsqueda se define a partir del criterio de evaluación. Los candidatos cuyo valor de χ_k^2 sea menor que un valor máximo $\chi_{\text{máx}}^2$ pertenecerán al espacio de búsqueda, es decir, los que cumplen la inecuación

$$\chi_{\text{máx}}^2 \geq (\hat{\mathbf{n}}_f - \mathbf{n}_k)^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{n}}_f}^{-1} (\hat{\mathbf{n}}_f - \mathbf{n}_k) \quad (2.19)$$

A continuación se analiza la forma particular del espacio de búsqueda así definido. Dicho análisis permite justificar la conveniencia de hacer una transformación del espacio de búsqueda, que se describe seguidamente. Finalmente se explica el procedimiento para calcular el parámetro $\chi_{\text{máx}}^2$.

a. Forma del espacio de búsqueda

La expresión 2.19 en igualdad, teniendo en cuenta que $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{n}}_f}^{-1}$ es definida positiva¹, es la ecuación de un hiper-elipsoide m dimensional centrado en las coordenadas de $\hat{\mathbf{n}}_f$ [Stra86]. Todos los candidatos que cumplen la inecuación están contenidos en dicho hiper-elipsoide y pertenecen al espacio de búsqueda. Los semiejes S_i del hiper-elipsoide dependen del parámetro $\chi_{\text{máx}}^2$ y de los autovalores λ_i de la covarianza $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{n}}_f}$, como

$$S_i = s_i \chi_{\text{máx}} = \sqrt{\lambda_i} \chi_{\text{máx}} \quad (2.20)$$

donde los s_i son los semiejes normalizados, para $\chi_{\text{máx}} = 1$. Por tanto, el tamaño del hiper-elipsoide depende el parámetro $\chi_{\text{máx}}^2$ y la forma de los autovalores λ_i .

Para analizar la orientación del hiper-elipsoide con respecto a los ejes coordenados es conveniente reformular la inecuación 2.19. Al ser la matriz $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{n}}_f}^{-1}$ definida positiva es posible hacerle una factorización de Cholesky y descomponerla en

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{n}}_f}^{-1} = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^T \quad (2.21)$$

donde la matriz \mathbf{D} es diagonal y la matriz \mathbf{L} es triangular inferior con todos los elementos de su diagonal a 1. Esta descomposición permite expandir la expresión 2.19 en

$$\chi_{\text{máx}}^2 \geq \sum_{i=1}^m d_i \left[(n_i - \hat{n}_i) + \sum_{j=i+1}^m l_{ji} (n_j - \hat{n}_j) \right]^2 \quad (2.22)$$

donde d_i , l_{ji} , n_i y \hat{n}_i son los elementos de las matrices o vectores \mathbf{D} , \mathbf{L} , \mathbf{n}_k y $\hat{\mathbf{n}}_f$ respectivamente. Por otro lado, si se define $\hat{n}_{i|i+1, \dots, m}$ como

$$\hat{n}_{i|i+1, \dots, m} = \hat{n}_i - \sum_{j=i+1}^m l_{ji} (n_j - \hat{n}_j) \quad (2.23)$$

¹ \mathbf{A} es definida positiva si $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x}$

que puede interpretarse como la estimación de n_i condicionada a valores elegidos para las ambigüedades desde $i + 1$ hasta m , $n_{i+1} \dots n_m$, entonces la expresión 2.22 queda compactada como

$$\chi_{\text{máx}}^2 \geq \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - \hat{n}_{i|i+1,\dots,m})^2}{\sigma_{i|i+1,\dots,m}^2} \quad (2.24)$$

donde $\sigma_{i|i+1,\dots,m}^2 = d_i^{-1}$ se podría interpretar como la varianza de la estimación $\hat{n}_{i|i+1,\dots,m}$. Los términos $\sigma_{i|i+1,\dots,m}$ dan información de las dimensiones del hiper-elipsoide en cada una de las direcciones de los ejes coordenados. De hecho, teniendo en cuenta la expresión 2.24, dichos términos se pueden definir como

$$\begin{aligned} & \text{Max} \quad \{n_i - \hat{n}_i\} = \sigma_{i|i+1,\dots,m} \\ & \left\{ \begin{array}{l} \chi_{\text{máx}}^2 = 1 \\ (n_j - \hat{n}_j) = 0 \\ j = i+1 \dots m \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (2.25)$$

En el caso de que las ambigüedades estuvieran incorrelacionadas entre sí, la matriz $\mathbf{Q}_{\hat{n}_f}^{-1}$ sería diagonal y todos los términos l_{ji} serían nulos ($\mathbf{L} = \mathbf{I}$). En esas condiciones, $\hat{n}_{i|i+1,\dots,m} = \hat{n}_i$ y la expresión 2.24 sería la ecuación de un hiper-elipsoide cuyos ejes coincidirían con los ejes coordenados. Además, los términos $\sigma_{i|i+1,\dots,m}$ serían directamente los semiejes normalizados s_i del hiper-elipsoide.

La figura 2.1 ilustra un ejemplo simplificado para el caso en que hubiera sólo dos dimensiones ($m = 2$). En ese caso, los espacios de búsqueda son elipses, que se han dibujado para $\chi_{\text{máx}}^2 = 1$, y para dos casos distintos. Uno de ellos cuando las ambigüedades están incorrelacionadas y el otro cuando están correlacionadas, pero en ambos casos los valores de $\sigma_{i|i+1,\dots,m}$ son los mismos.

Por tanto, los términos $\sigma_{i|i+1,\dots,m}^2 = d_i^{-1}$ dan información del alargamiento del hiper-elipsoide en cada dirección. Un valor muy pequeño de d_i se corresponderá con un elipsoide muy alargado en la dirección i . Los estudios realizados por los creadores del método [Teun94] revelan que, al haber tres incógnitas de la línea de base, los tres últimos d_i ($i \geq m - 2$) tienen valores mucho más pequeños que el resto, es decir, el hiper-elipsoide es muy alargado en esas tres últimas direcciones.

b. Transformación del espacio de búsqueda (decorrelación)

Las características del hiper-elipsoide de búsqueda hacen que la exploración de candidatos sea, en principio, muy poco eficaz. Por un lado, sus ejes no coinciden con los ejes coordenados de búsqueda, debido a que las ambigüedades están muy correlacionadas entre sí, y por otro lado es un hiper-elipsoide muy alargado. A continuación se describe una transformación del espacio de búsqueda, a la que los creadores del método denominan decorrelación de las ambigüedades, que permite realizar una exploración muy eficaz.

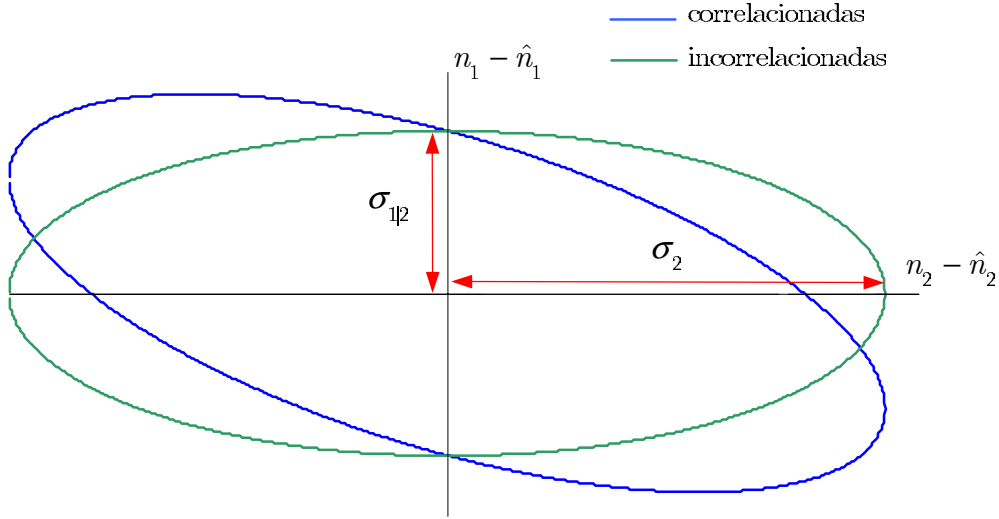


Figura 2.1: Elipses de búsqueda para $\chi_{\text{máx}}^2 = 1$ y $m = 2$.

El hecho de que la decorrelación de las ambigüedades haga más eficaz la exploración es fácil de entender si se analiza la inecuación 2.19. En el caso de que las ambigüedades estuvieran incorrelacionadas la covarianza $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{n}}_f}$ sería la matriz identidad, por tanto el candidato de mínimo χ^2 sería simplemente el vector entero más cercano a la aproximación real $\hat{\mathbf{n}}_f$. Por otro lado, la exploración de candidatos por un hiper-elipsoide muy alargado es muy poco eficaz porque constantemente se llega a sus límites, lo que obliga a cambiar la dirección de la búsqueda.

La decorrelación de las ambigüedades, en el método LAMBDA, consiste en una transformación del espacio de ambigüedades inicial en otro espacio en el cual el hiper-elipsoide se convierte en casi una hiper-esfera, de igual volumen que el hiper-elipsoide, y donde las ambigüedades están mucho menos correlacionadas. No se consigue una hiper-esfera perfecta ni una decorrelación total debido a la restricción que impone el que no deba perderse la naturaleza entera de las ambigüedades. La transformación se realiza mediante una matriz de transformación \mathbf{Z} entera, que permite relacionar las ambigüedades y las covarianzas de los dos espacios como

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{Z}^T \mathbf{n}_k \quad (2.26)$$

$$\hat{\mathbf{z}}_f = \mathbf{Z}^T \hat{\mathbf{n}}_f \quad (2.27)$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}_f} = \mathbf{Z} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{n}}_f} \mathbf{Z}^T \quad (2.28)$$

La nueva matriz $\mathbf{Q}_{\hat{z}_f}^{-1}$ podrá también descomponerse en \mathbf{LDL}^T . La matriz \mathbf{Z} óptima será la que consiga que la nueva matriz \mathbf{L} sea lo más próxima posible a la matriz identidad, para decorrelacionar las ambigüedades, y que todos los términos d_i sean lo más parecidos entre sí, para aproximar el volumen de búsqueda a una hiper-esfera. En [Jong96a] se documenta el proceso para obtener la matriz \mathbf{Z} óptima. En [Jong96b] se presentan resultados del coste computacional que conlleva el cálculo de la matriz \mathbf{Z} y la transformación de las ambigüedades. En [Shux02] se describe el procedimiento de obtención de una matriz \mathbf{Z} alternativa a la propuesta por los creadores del método LAMBDA.

c. Cálculo de $\chi_{\text{máx}}^2$

El parámetro $\chi_{\text{máx}}^2$ define el tamaño del espacio de búsqueda y ha de ser fijado convenientemente para garantizar que un número reducido de candidatos se encuentren dentro dicho espacio. Los creadores del método proponen dos alternativas para su cálculo [Teun96].

1ª alternativa

La primera alternativa se basa en calcular el valor de $\chi_{\text{máx}}^2$ que garantiza, al menos aproximadamente, que el espacio de búsqueda contiene E_m candidatos. El número de candidatos que contiene un hiper-elipsoide se puede estimar por su volumen expresado en *ciclos* ^{m} . Por ello, se procede a calcular el volumen del hiper-elipsoide.

El volumen de una hiper-esfera m dimensional de radio 1 viene dado por [Apos75]

$$V_m = \frac{2}{m} \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \quad (2.29)$$

siendo Γ , la función gamma definida como

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (2.30)$$

Si la hiper-esfera tiene radio $\chi_{\text{máx}}$, su volumen viene dado por

$$V_m(\chi_{\text{máx}}) = \chi_{\text{máx}}^m V_m \quad (2.31)$$

Una hiper-esfera m dimensional es el caso particular de un hiper-elipsoide m dimensional con todos los semiejes normalizados iguales a uno. En el caso general, el volumen E_m del hiper-elipsoide vendrá dado por

$$E_m = V_m \chi_{\text{máx}}^m \prod_{i=1}^m s_i = V_m \prod_{i=1}^m S_i \quad (2.32)$$

donde el producto de los semiejes normalizados s_i , se puede obtener a partir del determinante de $\mathbf{Q}_{\hat{n}_f}$ o de sus autovalores λ_i , o a partir de los elementos d_i de la diagonal de \mathbf{D} , es decir,

$$\prod_{i=1}^m s_i = \sqrt{|\mathbf{Q}_{\hat{n}_f}|} = \prod_{i=1}^m \sqrt{\lambda_i} = \prod_{i=1}^m \sigma_{i|i+1,\dots,m} = \prod_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{d_i}} \quad (2.33)$$

El volumen del elipsoide como estimación del número de candidatos que alberga, permite fijar el valor de $\chi_{\text{máx}}^2$ para que aproximadamente E_m candidatos pertenezcan al espacio de búsqueda, como

$$\chi_{\text{máx}}^2 = \left(\frac{E_m \prod_{i=1}^m \sqrt{d_i}}{V_m} \right)^{\frac{2}{m}} \quad (2.34)$$

2ª alternativa

La segunda alternativa para fijar el parámetro $\chi_{\text{máx}}^2$ se basa en fijarlo de manera que el vector entero más cercano a $\hat{\mathbf{z}}_f$ quede incluido en el espacio de búsqueda. Esto se reduce a asignar a $\chi_{\text{máx}}^2$ el valor de χ_k^2 que se corresponde con dicho vector. De esta forma se garantiza que al menos ese vector siempre está dentro.

Estrategia de exploración de candidatos

La exploración de candidatos se realiza fijando secuencialmente y de manera condicionada las coordenadas de los candidatos. La idea se basa en que al fijar una coordenada se condicionan los posibles valores del resto de coordenadas. La descomposición \mathbf{LDL}^T de $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}_f}^{-1}$ facilita el establecimiento de esos condicionamientos y permite hacer una exploración exhaustiva de todos los candidatos que pertenecen al espacio de búsqueda.

La inecuación 2.22, una vez realizada la decorrelación de las ambigüedades, se convierte en

$$\chi_{\text{máx}}^2 \geq \sum_{i=1}^m d_i \left[(z_i - \hat{z}_i) + \sum_{j=i+1}^m l_{ji}(z_j - \hat{z}_j) \right]^2 \quad (2.35)$$

que es un sumatorio de sumandos todos positivos, por lo que ninguno de ellos podrá superar el valor $\chi_{\text{máx}}^2$. Por otro lado, el sumando i sólo depende de los valores fijados de las coordenadas desde la $i + 1$ hasta la m . Esto permite ir fijando secuencialmente las coordenadas de los candidatos, empezando con la última coordenada y acabando con la primera. A continuación se detalla el proceso.

El último sumando de la expresión es

$$d_m(z_m - \hat{z}_m)^2 \quad (2.36)$$

Dado que no ha de superar $\chi_{\text{máx}}^2$ se puede obtener el intervalo de posibles valores de z_m , que vendrá dado por

$$-\sqrt{\frac{\chi_{\text{máx}}^2}{d_m}} \leq (z_m - \hat{z}_m) \leq \sqrt{\frac{\chi_{\text{máx}}^2}{d_m}} \quad (2.37)$$

Una vez fijado z_m a un valor del intervalo, el penúltimo sumando verá limitado su máximo valor posible, es decir, el intervalo de posibles valores de z_{m-1} estará condicionado por el valor fijado de z_m . De los posibles valores de z_{m-1} se fijará uno, con lo que se condicionarán los posibles valores de z_{m-2} y así sucesivamente hasta fijar un valor de z_1 y generar así un candidato. De esta manera se exploran todos los candidatos. El intervalo de posibles valores de cualquier z_i , una vez se han fijado valores para $z_{i+1}..z_m$, viene dado por

$$-\sqrt{R_i} - L_i \leq (z_i - \hat{z}_i) \leq \sqrt{R_i} - L_i \quad (2.38)$$

con

$$R_i = \frac{\chi_{\text{máx}}^2}{d_i} - \sum_{k=i+1}^m \frac{d_k}{d_i} [(z_k - \hat{z}_k) + L_k]^2 \quad (2.39)$$

y

$$L_i = \sum_{j=i+1}^m l_{ji}(z_j - \hat{z}_j) \quad (2.40)$$

El procedimiento permite, además, descartar rápidamente muchas combinaciones de enteros que están fuera del espacio de búsqueda, ya que si al fijar la coordenada i a un valor z_i , el correspondiente intervalo de posibles valores de la coordenada $i - 1$ no incluye ningún valor entero, se puede descartar el valor z_i fijado y continuar con el siguiente valor perteneciente al intervalo de la coordenada i . Por otro lado, los límites de los intervalos se pueden calcular de forma recursiva, es decir, los valores de R_i y L_i se pueden obtener a partir de los valores R_{i+1} y L_{i+1} , con el consecuente ahorro de cómputo. Además, los valores R_1 y L_1 se pueden aprovechar para obtener el valor de χ_k^2 de un candidato explorado como

$$\chi_k^2 = \chi_{\text{máx}}^2 - d_1 [R_1 - ((z_1 - \hat{z}_1) + L_1)^2] \quad (2.41)$$

Las expresiones 2.37 y 2.39 permiten reflejar la influencia del valor de los términos d_i en la exploración. Si un d_i es de valor muy reducido, el hiper-elipsoide es muy alargado en esa dirección, el intervalo de posibles valores de z_i se hace muy elevado y la exploración se hace muy poco eficaz. La decorrelación de las ambigüedades consigue que todos los d_i

tengan valores muy similares, los intervalos de todas las coordenadas son parecidos, es decir, el espacio de búsqueda es casi una hiper-esfera, con lo que la exploración es muy eficaz.

2.2.3. Método Nulo

El método Nulo [Mart95] utiliza el planteamiento sin aproximación real (sec.2.1.3), con lo que ofrece una solución a la ambigüedad con medidas de tan solo una época. El criterio de evaluación de los candidatos que utiliza tiene asociado un subespacio nulo y es alrededor de él por donde el método explora los candidatos.

Criterio de evaluación de candidatos y elección de la solución

El método Nulo utiliza la expresión del residuo cuadrático como criterio de evaluación de candidatos. Dicha expresión es la que corresponde al planteamiento sin aproximación real (Ecu. 2.16), es decir:

$$\Omega_k = (\mathbf{y} - \mathbf{n}_k)^T \mathbf{B}(\mathbf{y} - \mathbf{n}_k) \quad (2.42)$$

Si se deja de lado el hecho de que los candidatos \mathbf{n}_k ha de ser enteros, se pueden obtener algebraicamente aquellos vectores reales que toman un valor de Ω_k nulo. Dichos vectores son los que cumplen

$$\mathbf{B}(\mathbf{y} - \mathbf{n}_k) = 0 \quad (2.43)$$

Como la matriz \mathbf{B} es singular, pues proviene de un sistema de ecuaciones con tres incógnitas más que ecuaciones, hay infinitos vectores reales \mathbf{n}_k que cumplen la expresión 2.43, los que pertenecen al subespacio nulo de tres dimensiones asociado a la matriz \mathbf{B} . La matriz nulo \mathbf{V} de la matriz \mathbf{B} contiene los vectores base normalizados de dicho subespacio. El valor Ω_k de un candidato \mathbf{n}_k es una medida de su distancia al subespacio. El método realiza la exploración de los candidatos más cercanos al subespacio nulo.

La solución a la ambigüedad tendrá un valor de Ω_k promediado a lo largo de todas las épocas mínimo. Por ello, en cada época el candidato que se elegirá como solución será aquél que tenga mínimo valor de Ω_k promediado desde la época inicial hasta la época en curso. De esta forma, el método ofrece una solución a la ambigüedad en cada época.

Obtención del punto inicial

La exploración de candidatos comienza en el punto inicial $\mathbf{n}_{0'}$ que corresponde a la posición aproximada obtenida con las medidas de pseudodistancia. Como el sistema de ecuaciones se linealiza en torno a la posición aproximada B_0 (véase la figura 1.15) dicho vector se obtiene despejando \mathbf{n} para $\mathbf{x} = 0$, es decir:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}(\mathbf{x} = 0) + \mathbf{n} = \mathbf{n} \quad (2.44)$$

con lo que

$$\mathbf{n}_{0'} = \text{Round}(\mathbf{y}) \quad (2.45)$$

No obstante, es conveniente proyectar el vector cuyas coordenadas son las del punto inicial $\mathbf{n}_{0'}$ sobre el subespacio nulo y tomar las coordenadas del vector resultante como nuevo punto inicial. La matriz de proyección del subespacio $\mathbf{P} = \mathbf{V}\mathbf{V}^T$ permite obtener la proyección como

$$\mathbf{p} = \mathbf{P}(\mathbf{y} - \mathbf{n}_{0'}) \quad (2.46)$$

con lo que el nuevo punto inicial \mathbf{n}_0 se obtiene sumando a $\mathbf{n}_{0'}$, el vector $\Delta\mathbf{n}_0$:

$$\Delta\mathbf{n}_0 = \text{Round}(\mathbf{p} - (\mathbf{y} - \mathbf{n}_{0'})) \quad (2.47)$$

$$\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}_{0'} + \Delta\mathbf{n}_0 \quad (2.48)$$

Definición del espacio de búsqueda

El espacio de búsqueda está limitado por dos parámetros. Uno relacionado con el nivel de confianza del punto inicial \mathbf{n}_0 y otro con el valor máximo admisible del residuo $\Omega_{\text{máx}}$.

El primer parámetro lo condiciona la precisión de las medidas de pseudodistancia, pues son las que se utilizan para obtener el punto inicial \mathbf{n}_0 . Este parámetro es el radio r de una hiper-esfera m dimensional en el espacio de las medidas, centrada en el punto inicial, que se corresponde con un elipsoide en el espacio físico. Con un nivel de confianza aceptado, la posición real del receptor estará dentro dicho elipsoide y la solución a la ambigüedad dentro de dicha hiper-esfera.

Por tanto, el primer parámetro es el radio r de la hiper-esfera mencionada, cuanto mayor sea, mayor nivel de confianza habrá de que el vector solución se encuentre dentro

Para fijar el valor de $\Omega_{\text{máx}}$ es necesario estudiar la distribución del residuo cuadrático Ω_k y elegir un valor que asegure, con un nivel de confianza aceptado, que el residuo cuadrático de la solución sea inferior. Es posible estudiar la distribución de Ω_k si se expresa la ecuación 2.42 de otra manera. Teniendo en cuenta el sistema de ecuaciones básico (Ecu. 2.1), el vector $(\mathbf{y} - \mathbf{n}_k)$ se puede escribir como

$$(\mathbf{y} - \mathbf{n}_k) = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n} + \mathbf{v} - \mathbf{n}_k = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{v} + \mathbf{m}_k \quad (2.50)$$

donde

$$\mathbf{m}_k = \mathbf{n} - \mathbf{n}_k \quad (2.51)$$

es la diferencia entre el vector solución a la ambigüedad y el candidato. Así el residuo cuadrático se puede expresar como

$$\Omega_k = [\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{m}_k + \mathbf{v}]^T \mathbf{B} [\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{m}_k + \mathbf{v}] \quad (2.52)$$

y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\mathbf{H}\mathbf{x} &= 0 \\ (\mathbf{H}\mathbf{x})^T \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (2.53)$$

ya que

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{A})\mathbf{H}\mathbf{x} &= \mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{H}(\mathbf{H}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{H}\mathbf{x} \\ &= \mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{I}\mathbf{x} = 0 \end{aligned} \quad (2.54)$$

se convierte en

$$\Omega_k = [\mathbf{m}_k + \mathbf{v}]^T \mathbf{B} [\mathbf{m}_k + \mathbf{v}] \quad (2.55)$$

Por otro lado si se realiza una descomposición en valores singulares de la matriz \mathbf{B} , teniendo en cuenta que es simétrica, la expresión queda como

$$\Omega_k = [\mathbf{m}_k + \mathbf{v}]^T \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^T [\mathbf{m}_k + \mathbf{v}] \quad (2.56)$$

y si se define \mathbf{w}_k como

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{U}^T [\mathbf{m}_k + \mathbf{v}] \quad (2.57)$$

la expresión del residuo cuadrático se puede expandir en

$$\Omega_k = \sum_{q=1}^{m-3} \lambda_q w_{kq}^2 \quad (2.58)$$

donde los λ_q son los elementos no nulos de la matriz diagonal $\mathbf{\Sigma}$, es decir, los autovalores no nulos de la matriz \mathbf{B} y los w_{kq} son los elementos del vector \mathbf{w}_k . Si se asume que el error que afecta a las medidas \mathbf{v} tiene distribución normal, entonces \mathbf{w}_k tendrá también una distribución normal. Por tanto, la distribución del residuo cuadrático Ω_k es la de una suma de variables normales al cuadrado ponderadas por los autovalores no nulos de la matriz \mathbf{B} . Conocida la distribución, el cálculo de $\Omega_{\text{máx}}$ se obtiene de garantizar

$$P(\Omega_k < \Omega_{\text{máx}}) = \psi \quad (2.59)$$

donde ψ es el nivel de confianza aceptado. Por otro lado, para garantizar que dicho valor $\Omega_{\text{máx}}$ se corresponda con el máximo valor que puede tomar el vector solución a la ambigüedad \mathbf{n} basta con fijar a cero el valor del vector \mathbf{m}_k . En el apéndice B se propone un método para calcular $\Omega_{\text{máx}}$ con este procedimiento.

Estrategia de exploración de candidatos

La exploración de candidatos comienza en el punto inicial \mathbf{n}_0 y, de manera iterativa, se incrementa en uno, cada vez, una coordenada del vector. En el momento en el que se sobrepasen las fronteras del espacio de búsqueda, determinadas por los dos parámetros descritos, se iguala la coordenada a la del punto inicial y se pasa a decrementar, con lo que se cambia la dirección de búsqueda a la contraria. Cuando se sobrepasen las fronteras en esa otra dirección se incrementa la siguiente coordenada una unidad y se repite el proceso. De esta manera, cuando se hayan recorrido todas las coordenadas, se obtendrán como candidatos todos los vectores que se han recorrido.

En la exploración hay que tener en cuenta la orientación del subespacio nulo con respecto a los ejes de coordenadas. Si el subespacio nulo es casi perpendicular a uno de los ejes, el incrementar en uno su correspondiente coordenada puede suponer salirse del espacio de búsqueda y provocar equivocadamente el abandono de la búsqueda en una dirección. Para evitar este efecto se obliga a que en las dos direcciones de cada coordenada se hagan incrementos de, como mínimo, el valor especificado por el factor oblicuo γ . Dicho factor representa el máximo alejamiento del subespacio nulo que se produce por incrementar en una unidad todas las coordenadas. El valor de γ se puede definir como la diagonal principal del hiper-cubo unitario del espacio complementario a un eje, es decir,

$$\gamma = \sqrt{m-1} \quad (2.60)$$

En la figura 2.3 se presenta un ejemplo con menos dimensiones ($m = 3$) del valor del factor oblicuo donde, además, el subespacio nulo, de dimensión 1, se ha colocado perpendicular a dos de los ejes.

Asimismo, para optimizar la exploración, es conveniente ordenar las coordenadas adecuadamente y empezar incrementando aquellas cuyos ejes tengan un mayor ángulo de separación con respecto del subespacio nulo. Con este proceder se seguirá mejor la dirección del nulo.

Por otro lado, el método Nulo propone un procedimiento para reducir el número de operaciones que conlleva el cálculo de Ω_k para cada uno de los candidatos. El procedimiento se basa en aprovechar la circunstancia de que en el proceso de exploración sólo se cambia una coordenada cada vez, y que la variación de Ω_k con respecto a la coordenada que cambia sigue una función parabólica. Si el residuo cuadrático para el vector \mathbf{n}_0 está ya calculado y vale Ω_{n_0} , entonces el valor de Ω_k para un vector \mathbf{n}_k , si solamente varía la coordenada p , se puede obtener como sigue

$$\Omega_k = b_{pp} n_{kp}^2 - 2\eta_p n_{kp} + \Omega_{n_0} \quad (2.61)$$

donde los b_{pp} son elementos de la matriz \mathbf{B} y n_{kp} es el elemento p del vector \mathbf{n}'_k definido como

$$\mathbf{n}'_k = \mathbf{n}_k - \mathbf{n}_0 \quad (2.62)$$

y

$$\eta_p = \sum_{i=1}^m b_{pi} (y_i - n_{0i}) \quad (2.63)$$

donde n_{0i} e y_i son elementos de los vectores \mathbf{n}_0 e \mathbf{y} respectivamente.

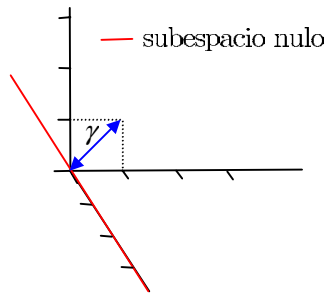


Figura 2.3: Ejemplo de factor oblicuo para $m = 3$.

2.2.4. Método ARCE

El método ARCE [Park97] utiliza el planteamiento con aproximación real, para lo cual combina medidas de fase de varias épocas. Sin embargo, la formulación que propone es algo diferente a la descrita en la sección 2.1.2, buscando reducir costes computacionales. La determinación del punto inicial de búsqueda y el criterio de evaluación de candidatos son acordes a esta formulación. Por otro lado, para reducir el número de candidatos a explorar propone una reducción del número de dimensiones del espacio de búsqueda.

Planteamiento utilizado

La nueva formulación que propone el método ARCE se basa en extraer del sistema de ecuaciones básico (Ecu. 2.1) un subconjunto de ecuaciones en las que no estén presentes las incógnitas de la línea de base. De esa manera el cálculo del residuo cuadrático requerirá menor operaciones.

La matriz \mathbf{H} de cosenos directores, tiene dimensión $m \times 3$, con lo que su traspuesta \mathbf{H}^T tendrá dimensión $3 \times m$. Por tanto, \mathbf{H}^T define un sistema de ecuaciones indeterminado con un subespacio nulo asociado de dimensión $m - 3$. Si \mathbf{W} es la matriz nulo de la matriz \mathbf{H}^T , entonces

$$\mathbf{H}^T \mathbf{W} = 0 \quad \text{con lo que} \quad \mathbf{W}^T \mathbf{H} = 0 \quad (2.64)$$

Si se multiplica todo el sistema de ecuaciones básico (Ecu. 2.1) por \mathbf{W}^T se eliminan las incógnitas de la línea de base, como se puede observar en la siguiente expresión:

$$\mathbf{W}^T \mathbf{y} = \mathbf{W}^T \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{W}^T \mathbf{n} + \mathbf{W}^T \mathbf{v} = \mathbf{W}^T \mathbf{n} + \mathbf{W}^T \mathbf{v} \quad (2.65)$$

Dado que la matriz \mathbf{W}^T es de dimensión $m - 3 \times m$, el vector $\mathbf{W}^T \mathbf{y}$ contiene $m - 3$ observaciones. Por tanto, es un sistema indeterminado de $m - 3$ ecuaciones y las m incógnitas enteras. En él se han eliminado las incógnitas de la línea de base, pero el grado de indeterminación sigue siendo el mismo. La aproximación real de las ambigüedades $\hat{\mathbf{n}}_f$ se obtiene usando medidas de fase de varias épocas en los mismos términos descritos en la sección 2.1.2, sólo que ahora

$$\mathbf{y}_J = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1^T \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{W}_2^T \mathbf{y}_2 \\ \dots \\ \mathbf{W}_j^T \mathbf{y}_j \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

$$\mathbf{H}_J = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1^T \\ \mathbf{W}_2^T \\ \dots \\ \mathbf{W}_j^T \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

$$\mathbf{v}_J = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1^T \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{W}_2^T \mathbf{v}_2 \\ \dots \\ \mathbf{W}_j^T \mathbf{v}_j \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

$$\mathbf{Q}_J = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{W_1 y_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{W_2 y_2} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{Q}_{W_j y_j} \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

y sólo habrá incógnitas enteras

$$\hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{n}}_f \quad (2.70)$$

Obsérvese que, con este planteamiento, el número de satélites $s = m + 1$, ha de ser siempre mayor que cuatro, para poder formar las matrices \mathbf{W}_i^T . Una limitación que no tienen otros métodos.

Obtención del punto inicial, criterio de evaluación y elección de la solución

El vector entero más cercano a $\hat{\mathbf{n}}_f$ se utiliza como punto inicial de búsqueda y el residuo cuadrático Ω_k asociado a un candidato \mathbf{n}_k , se utiliza como criterio de evaluación de candidatos.

$$\Omega_k = \min_{\mathbf{r}} \|\mathbf{r}\|_{\mathbf{Q}_J^{-1}}^2 = (\mathbf{y}_J - \mathbf{H}_J \mathbf{n}_k)^T \mathbf{Q}_J^{-1} (\mathbf{y}_J - \mathbf{H}_J \mathbf{n}_k) \quad (2.71)$$

El cálculo de Ω_k requiere ahora menos operaciones que si se hubiera utilizado la ecuación 2.8, puesto que se han eliminado las incógnitas de la línea de base de las ecuaciones del sistema.

El candidato que se elegirá como solución será aquél cuyo valor de Ω_k sea mínimo. Dado que el planteamiento utilizado requiere medidas de j épocas, el método ofrecerá una solución a la ambigüedad cada j épocas.

Definición del espacio de búsqueda

Los candidatos a explorar son las combinaciones que se originan de variar cada una de las coordenadas del vector de ambigüedades entre un valor mínimo y uno máximo. Estos valores definen las fronteras del espacio de búsqueda. Para fijar estos valores mínimo y máximo para cada coordenada se define una ventana de variación centrada en el valor de la coordenada en el punto inicial. Dicha ventana se define con ayuda de la covarianza de la estimación flotante (ver ecuación A.12 del apéndice A.2) que viene dada por

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{n}}_f} = (\mathbf{H}_J^T \mathbf{Q}_J^{-1} \mathbf{H}_J)^{-1} \quad (2.72)$$

y contiene en los elementos de su diagonal la varianza de cada una de las coordenadas de la estimación flotante. Las ventanas de variación son proporcionales a dichas varianzas.

Estrategia de exploración de candidatos

Para un caso hipotético en que todas las ventanas de variación contuvieran l posibles enteros, el número de candidatos que habría que explorar sería de l^m . Para intentar reducir el volumen de candidatos, el método ARCE propone una estrategia basada en reducir el espacio de búsqueda m dimensional a uno tridimensional.

Tal como se ha visto, el sistema de ecuaciones básico del método ARCE (Ecu. 2.65), tiene $m - 3$ ecuaciones y m incógnitas y es por tanto un sistema indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones, las pertenecientes a un subespacio nulo de dimensión 3. Elegir un vector de dicho subespacio, de tres coordenadas, equivale a elegir una solución. Si se lleva esta idea a la exploración de candidatos, una vez que se fijan 3 coordenadas del candidato, llámense independientes, el resto pueden ser obtenidas a partir de ellas y las ecuaciones del sistema. De esa manera, la exploración de candidatos en el espacio m dimensional se puede reducir a una exploración en un espacio tridimensional de las coordenadas independientes. El único inconveniente es que el resto de coordenadas obtenidas a partir de las independientes toman valores reales que habrá que redondear a enteros.

La ecuación 2.65, para un candidato \mathbf{n}_k , se puede dividir en partes relativas a las coordenadas independientes \mathbf{n}_{k_I} y dependientes \mathbf{n}_{k_D} , obteniéndose

$$\mathbf{W}^T \mathbf{y} = [\mathbf{W}_I^T \mathbf{W}_D^T] \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{k_I} \\ \mathbf{n}_{k_D} \end{bmatrix} + \mathbf{W}^T \mathbf{v} = \mathbf{W}_I^T \mathbf{n}_{k_I} + \mathbf{W}_D^T \mathbf{n}_{k_D} + \mathbf{W}^T \mathbf{v} \quad (2.73)$$

que permite obtener la siguiente función $\mathbf{f}_{\mathbf{n}_D}$ para calcular \mathbf{n}_{k_D} a partir de \mathbf{n}_{k_I} ,

$$\mathbf{n}_{k_D} = \mathbf{f}_{\mathbf{n}_D}(\mathbf{n}_{k_I}) = (\mathbf{W}_D \mathbf{Q}_J^{-1} \mathbf{W}_D^T)^{-1} \mathbf{W}_D \mathbf{Q}_J^{-1} (\mathbf{W}^T \mathbf{y} - \mathbf{W}_I^T \mathbf{n}_{k_I}) \quad (2.74)$$

En el apéndice 2.A se justifica cómo esta expresión puede simplificarse y expresarse de manera más compacta como

$$\mathbf{n}_{k_D} = \mathbf{f}_{\mathbf{n}_D}(\mathbf{n}_{k_I}) = \mathbf{y}_D + \mathbf{W}_D^{-T} \mathbf{W}_I^T (\mathbf{y}_I - \mathbf{n}_{k_I}) \quad (2.75)$$

o incluso expresarse con sólo dependencia de la matriz del sistema \mathbf{H} como

$$\mathbf{n}_{k_D} = \mathbf{f}_{\mathbf{n}_D}(\mathbf{n}_{k_I}) = \mathbf{y}_D - \mathbf{H}_D^{-T} \mathbf{H}_I^T (\mathbf{y}_I - \mathbf{n}_{k_I}) \quad (2.76)$$

Por tanto, la exploración de candidatos consiste en generar, para cada vector \mathbf{n}_{k_I} que se encuentre dentro del espacio de búsqueda limitado por sus tres ventanas de variación, un candidato \mathbf{n}_k como

$$\mathbf{n}_k = \left[\begin{array}{c} \mathbf{n}_{k_I} \\ Round(\mathbf{f}_{\mathbf{n}_D}(\mathbf{n}_{k_I})) \end{array} \right] \quad (2.77)$$

No obstante, algunos de los candidatos así formados estarán fuera del espacio de búsqueda, es decir, los valores de las correspondientes coordenadas dependientes tomarán valores fuera de sus ventanas de variación. Dichos candidatos serán descartados como posibles solución a la ambigüedad y no se les calculará su residuo cuadrático Ω_k .

El criterio de elección de las coordenadas independientes consiste en la elección de aquellas que maximicen la varianza del vector \mathbf{n}_{k_D} . Con ello, el número de candidatos que se descartarán serán mayor y se calcularán menos residuos cuadráticos. Para entender cómo se puede conseguir maximizar la varianza del vector \mathbf{n}_{k_D} es necesario expresar un candidato \mathbf{n}_k como suma del vector solución \mathbf{n} y un error $\Delta \mathbf{n}_k$. En ese caso, $\mathbf{n}_{k_I} = \mathbf{n}_I + \Delta \mathbf{n}_{k_I}$ y el vector \mathbf{n}_{k_D} se obtendrá como

$$\mathbf{n}_{k_D} = \mathbf{y}_D - \mathbf{H}_D^{-T} \mathbf{H}_I^T (\mathbf{y}_I - \mathbf{n}_I - \Delta \mathbf{n}_{k_I}) = \mathbf{n}_D + \mathbf{H}_D^{-T} \mathbf{H}_I^T \Delta \mathbf{n}_{k_I} \quad (2.78)$$

Por tanto, el criterio consiste en elegir las 3 coordenadas (equivalente a escoger 4 satélites) que hagan que la suma cuadrática de todos los elementos de la matriz $\mathbf{H}_D^{-T} \mathbf{H}_I^T$ sea máxima.

2.3. Conclusiones

En este capítulo se ha presentado una formulación unificada para describir adecuadamente los distintos métodos de resolución de la ambigüedad. Asimismo, se ha unificado el planteamiento inicial de todos los métodos, clasificándolos en dos posibles estrategias: planteamiento sin aproximación real de las ambigüedades y planteamiento con aproximación real de las ambigüedades. Este estudio unificado permite comparar adecuadamente los distintos métodos y valorar las ventajas de unos frente a otros.

Por otro lado, se ha hecho un examen de los distintos métodos existentes, describiendo en detalle tres de ellos: el método LAMBDA por ser, probablemente, el más eficiente actualmente y los métodos ARCE y Nulo, por su relación con los métodos que se proponen en esta tesis. En la tabla 2.1 se resumen las características de todos ellos.

	LAMBDA	Nulo	ARCE
Planteamiento	Con aproximación real de las ambigüedades	Sin aproximación real de las ambigüedades	Con aproximación real de las ambigüedades
Punto Inicial	Aproximación real de las ambigüedades	A partir de posición aproximada obtenida con medidas de pseudodistancia	A partir de aproximación real de las ambigüedades
Nº épocas para una solución	2 ó más 1 si mezcla medidas de pseudodistancia y fase	1	2 o más
Medidas de fase y pseudodistancia desacopladas	Sí, excepto cuando da una solución por cada época	Sí	Sí
Criterio de evaluación de candidatos	Distancia cuadrática ponderada a la aproximación real χ_k^2	Residuo cuadrático Ω_k	Residuo cuadrático Ω_k
Parámetros que definen espacio de búsqueda	Distancia cuadrática máxima $\chi_{\text{máx}}^2$	Residuo máximo $\Omega_{\text{máx}}$ y radio hiper-esfera r	Ventana de variación de cada coordenada
Estrategia de exploración de candidatos	Fijación secuencial condicionada y decorrelación de las ambigüedades	Cálculo parabólico de Ω_k y exploración alrededor del subespacio nulo	Espacio de búsqueda tridimensional y reducción del nº operaciones de Ω_k

Tabla 2.1: Comparativa de métodos.

El método LAMBDA debe su eficiencia a la decorrelación que hace de las ambigüedades. Por su parte el método ARCE también consigue una exploración eficaz al reducir a tres las dimensiones del espacio de búsqueda. Sin embargo, ambos métodos requieren utilizar medidas de varias épocas o mezclar medidas de fase y de pseudodistancia, para poder resolver la ambigüedad. En cuanto al método Nulo, aún no siendo tan eficaz su exploración, ofrece una solución a la ambigüedad con medidas de tan sólo una época y sin necesidad de mezclar medidas de fase con medidas de pseudodistancia.

El estudio unificado realizado y los tres métodos explicados permiten, en el siguiente capítulo, abordar adecuadamente la descripción de los métodos que se proponen en esta tesis.

2.A. Apéndice: Simplificación de la función $\mathbf{f}_{\mathbf{n}_D}$

En este apéndice se simplifica la expresión de la función $\mathbf{f}_{\mathbf{n}_D}$ del método ARCE, utilizada para obtener las coordenadas del vector \mathbf{n}_{k_D} a partir del vector \mathbf{n}_{k_I} . Dicha expresión viene dada por la ecuación 2.74, es decir,

$$\mathbf{n}_{k_D} = \mathbf{f}_{\mathbf{n}_D}(\mathbf{n}_{k_I}) = (\mathbf{W}_D \mathbf{Q}_J^{-1} \mathbf{W}_D^T)^{-1} \mathbf{W}_D \mathbf{Q}_J^{-1} (\mathbf{W}^T \mathbf{y} - \mathbf{W}_I^T \mathbf{n}_{k_I}) \quad (2.79)$$

Teniendo en cuenta que

$$[(\mathbf{W}_D \mathbf{Q}_J^{-1} \mathbf{W}_D^T)^{-1} \mathbf{W}_D \mathbf{Q}_J^{-1}] \mathbf{W}_D^T = \mathbf{I} \quad (2.80)$$

y dado que la inversa de la matriz \mathbf{W}_D^T existe

$$(\mathbf{W}_D \mathbf{Q}_J^{-1} \mathbf{W}_D^T)^{-1} \mathbf{W}_D \mathbf{Q}_J^{-1} = \mathbf{W}_D^{-T} \quad (2.81)$$

con lo que la expresión 2.79 se puede simplificar en

$$\mathbf{f}_{\mathbf{n}_D}(\mathbf{n}_{k_I}) = \mathbf{W}_D^{-T} (\mathbf{W}^T \mathbf{y} - \mathbf{W}_I^T \mathbf{n}_{k_I}) \quad (2.82)$$

Por otro lado, se puede descomponer el vector \mathbf{y} en sus componente independientes y dependientes, en cuyo caso

$$\mathbf{f}_{\mathbf{n}_D}(\mathbf{n}_{k_I}) = \mathbf{W}_D^{-T} (\mathbf{W}_I^T \mathbf{y}_I + \mathbf{W}_D^T \mathbf{y}_D - \mathbf{W}_I^T \mathbf{n}_{k_I}) = \mathbf{y}_D + \mathbf{W}_D^{-T} \mathbf{W}_I^T (\mathbf{y}_I - \mathbf{n}_{k_I}) \quad (2.83)$$

La dependencia de la función $\mathbf{f}_{\mathbf{n}_D}$ con la matriz \mathbf{W} puede ser sustituida por dependencia con la matriz del sistema \mathbf{H} . La matriz \mathbf{W} , por su definición (Ecu. 2.64), cumple

$$\mathbf{H}^T \mathbf{W} = 0 \quad (2.84)$$

que puede descomponerse en sus partes dependientes e independientes

$$[\mathbf{H}_I^T \mathbf{H}_D^T] \begin{bmatrix} \mathbf{W}_I \\ \mathbf{W}_D \end{bmatrix} = 0 \quad (2.85)$$

o lo que es lo mismo

$$\mathbf{H}_I^T \mathbf{W}_I + \mathbf{H}_D^T \mathbf{W}_D = 0 \quad (2.86)$$

lo que permite, dado que existen las inversas de \mathbf{H}_I^T y \mathbf{W}_D , despejar

$$\mathbf{W}_I = -\mathbf{H}_I^{-T} \mathbf{H}_D^T \mathbf{W}_D \quad (2.87)$$

y deducir la siguiente relación

$$\mathbf{W}_I \mathbf{W}_D^{-1} = -\mathbf{H}_I^{-T} \mathbf{H}_D^T \quad (2.88)$$

que, aplicando la traspuesta a los dos miembros, se convierte en

$$\mathbf{W}_D^{-T} \mathbf{W}_I^T = -\mathbf{H}_D \mathbf{H}_I^{-1} \quad (2.89)$$

relación que permite reescribir la ecuación 2.83 como

$$\mathbf{f}_{\mathbf{n}_D}(\mathbf{n}_{k_I}) = \mathbf{y}_D - \mathbf{H}_D \mathbf{H}_I^{-1} (\mathbf{y}_I - \mathbf{n}_{k_I}) \quad (2.90)$$

Capítulo 3

Métodos Nulo3 y MOCA

En este capítulo se proponen dos nuevos métodos para la resolución de la ambigüedad. El primero de ellos es la adaptación del método Nulo a tres frecuencias, al que se denomina método Nulo3, que utiliza una nueva estrategia de exploración por el subespacio nulo. El segundo es el método MOCA, siglas inglesas de factorización de Cholesky modificada para la resolución de la ambigüedad (*MOdified Cholesky factorization for Ambiguity resolution*). Primeramente se analizan las ventajas que ofrece el poder utilizar medidas de fase procedentes de tres frecuencias y seguidamente se explican los dos métodos propuestos.

3.1. Utilización de medidas procedentes de tres frecuencias

3.1.1. Planteamiento

Los futuros sistemas de navegación por satélite, Galileo o GPS ampliado, ofrecerán medidas de fase a tres frecuencias distintas (véase el capítulo 1). Este hecho se traduce en un aumento del número de ecuaciones disponibles para la resolución de la ambigüedad.

Al utilizarse medidas de fase de tres frecuencias, correspondientes a s satélites, el número de ecuaciones y el número de incógnitas enteras se ven multiplicados por tres, es decir, pasan a valer $m = 3*(s-1)$. El sistema de ecuaciones de partida (Ecu. 2.1), relativo a un instante de tiempo o época, es válido para cada una de las frecuencias disponibles. Si se distinguen las ecuaciones de las distintas frecuencias mediante subíndices desde 1 hasta 3, entonces el sistema de ecuaciones de partida queda como

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{H}_3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \\ \mathbf{n}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n} + \mathbf{v} \quad (3.1)$$

El problema de resolución de la ambigüedad no cambia sustancialmente, salvo en el hecho de que ahora habrá nuevas técnicas que se podrán aplicar (véase [Han99] o [Hatc00]) y las prestaciones que se alcanzarán serán mejores [Tibe02]. La técnica más importante es la técnica *wide-lane*, que se describe en el siguiente apartado, y que permite obtener una aproximación inicial \mathbf{n}_0 de las ambigüedades mejor de la que se consigue con las medidas de pseudodistancia.

La mayoría de los métodos de resolución de la ambigüedad existentes fueron propuestos para el caso de utilizar medidas de una sola frecuencia. La adaptación al uso de medidas de tres frecuencias no es siempre directa. En el caso del método LAMBDA la adaptación sí es inmediata [Joos99] y se trata simplemente de utilizar el nuevo sistema de ecuaciones (Ecu. 3.1). De hecho, como se justifica en [Teun97], la fase inicial de la decorrelación de las ambigüedades, tiene el mismo efecto que la técnica *wide-lane*. Sin embargo, en el caso del método Nulo son necesarios algunos cambios, ya que, de no hacerlos, sería muy poco eficaz. En la sección 3.2 se propone un nuevo método Nulo, al que se denomina método Nulo3, que incluye los cambios necesarios. En la sección 3.3 se propone otro nuevo método, también adaptado a tres frecuencias, el método MOCA. Tanto el método Nulo3 como el método MOCA aprovechan la técnica *wide-lane* para obtener una buena aproximación del punto inicial \mathbf{n}_0 .

3.1.2. Técnica *wide-lane*

La técnica *wide-lane* [Voll99] se basa en combinar medidas de dos frecuencias para crear una medida ficticia, equivalente a la diferencia de frecuencias. La frecuencia de dicha medida ficticia será mucho menor y por tanto su longitud de onda mayor, con lo que su ambigüedad será más fácil de resolver. A continuación se detalla cómo se forma esta medida ficticia y cómo se puede utilizar para, en aproximaciones sucesivas, resolver u obtener una muy buena aproximación de la ambigüedad.

La ecuación 1.38 relaciona las medidas de fase con las distancias satélite-receptor en términos de dobles diferencias. Si dicha ecuación se expresa en unidades de longitud, en formato matricial, y para la frecuencia i , se convierte en

$$(\mathbf{y}_i - \mathbf{n}_i)\lambda_i = \mathbf{d} + \mathbf{v}_i \quad (3.2)$$

donde \mathbf{y}_i son las medidas de fase relativas a la frecuencia i , \mathbf{n}_i sus ambigüedades asociadas, λ_i la longitud de onda, \mathbf{d} las distancias satélites-receptores en dobles diferencias y \mathbf{v}_i modela todas las fuentes de error. Las medidas de fase relativas a otra frecuencia j originan una ecuación de las mismas características

$$(\mathbf{y}_j - \mathbf{n}_j)\lambda_j = \mathbf{d} + \mathbf{v}_j \quad (3.3)$$

Se pueden combinar las dos ecuaciones para formar una nueva ecuación, correspondiente a una nueva longitud de onda *wide-lane* λ_{ij} , es decir,

$$(\mathbf{y}_{ij} - \mathbf{n}_{ij})\lambda_{ij} = \mathbf{d} + \mathbf{v}_{ij} \quad (3.4)$$

donde

$$\mathbf{y}_{ij} = \mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j \quad (3.5)$$

$$\mathbf{n}_{ij} = \mathbf{n}_i - \mathbf{n}_j \quad (3.6)$$

y

$$\lambda_{ij} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_j}} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{v}_{ij} = \frac{\lambda_j \mathbf{v}_i - \lambda_i \mathbf{v}_j}{\lambda_j - \lambda_i} \quad (3.8)$$

La frecuencia correspondiente a la nueva medida es $f_{ij} = f_i - f_j$. Eligiendo adecuadamente los pares de frecuencias a combinar, se pueden obtener diferentes longitudes de onda *wide-lane*, siempre mayores que las longitudes de onda de partida. Si la longitud de onda *wide-lane* es suficientemente grande, entonces la aproximación de las distancias satélites-receptores, obtenidas con las medidas de pseudodistancia, permite resolver su ambigüedad. Por otro lado, dicha ambigüedad resuelta permite afinar mejor las distancias satélites-receptores, por lo que si se elige otro par de frecuencias cuya longitud de onda *wide-lane* sea menor se podrá resolver su ambigüedad con la aproximación anterior y conseguir una aproximación mejor aún. Si se continúa este procedimiento de aproximaciones sucesivas se llega finalmente a una buena aproximación de las ambigüedades asociadas a las longitudes de onda físicas. A continuación se describe con más detalle todo el procedimiento.

Las medidas de pseudodistancia ρ permiten definir una ecuación del mismo tipo que la 3.2, pero sin ambigüedad

$$\rho = \mathbf{d} + \mathbf{w} \quad (3.9)$$

donde \mathbf{w} modela las fuentes de error que afectan a las medidas de pseudodistancia. Las expresiones 3.4 y 3.9 permite resolver la ambigüedad \mathbf{n}_{ij} , como

$$\mathbf{n}_{ij} = \text{Round}\left(\mathbf{y}_{ij} - \frac{\rho}{\lambda_{ij}}\right) \quad (3.10)$$

Sin embargo, para que esto sea posible, es necesario que la precisión de las medidas de pseudodistancia sea lo suficientemente buena y que la longitud de onda *wide-lane* sea lo suficientemente grande. Supóngase que la desviación típica del error que afecta a las medidas de pseudodistancia, expresada en unidades de longitud, fuera σ_c . Dicha desviación, expresada en ciclos de λ_{ij} , será σ_c/λ_{ij} . Por tanto, para que se pueda resolver la ambigüedad \mathbf{n}_{ij} , ha de cumplirse

$$\frac{\sigma_c}{\lambda_{ij}} \ll 0.5 \text{ ciclos} \quad (3.11)$$

Por otro lado, si la desviación típica del error que afecta a las medidas de fase, expresada en ciclos, es δ_f , entonces, la desviación del error que afecta a la fase *wide-lane*, será $\sqrt{2} \delta_f$ pues ambas medidas son independientes. Esta desviación típica, expresada en unidades de longitud, es

$$\sigma_{ij} = \sqrt{2} \delta_f \lambda_{ij} \quad (3.12)$$

Si se ha resuelto correctamente la ambigüedad \mathbf{n}_{ij} y σ_{ij} es menor que σ_c entonces el proceso habrá permitido aproximar mejor las distancias satélites-receptores.

El proceso puede continuar eligiendo un nuevo par de frecuencias k y l , para formar una nueva longitud de onda *wide-lane* más pequeña. Su ambigüedad asociada \mathbf{n}_{kl} podrá resolverse usando la ambigüedad resuelta en la paso anterior como

$$\mathbf{n}_{kl} = \text{Round}(\mathbf{y}_{kl} - (\mathbf{y}_{ij} - \mathbf{n}_{ij}) \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{kl}}) \quad (3.13)$$

Para que la resolución sea posible, tendrá que cumplirse en este caso

$$\frac{\sigma_{ij}}{\lambda_{kl}} \ll 0.5 \text{ ciclos} \quad (3.14)$$

y dará lugar a una desviación típica, en unidades de longitud, de

$$\sigma_{kl} = \sqrt{2} \delta_f \lambda_{kl} \quad (3.15)$$

En una última fase, se podrán estimar las ambigüedades relativas a las tres longitudes de onda físicas \mathbf{n}_p con p entre 1 y 3,

$$\mathbf{n}_p = \text{Round}(\mathbf{y}_p - (\mathbf{y}_{kl} - \mathbf{n}_{kl}) \frac{\lambda_{kl}}{\lambda_p}) \quad (3.16)$$

Para que se consiga resolver efectivamente las ambigüedades tendrá que cumplirse que

$$\frac{\sigma_{kl}}{\lambda_p} \ll 0.5 \text{ ciclos} \quad (3.17)$$

En general, esta última condición no se cumplirá y no se podrán resolver directamente las ambigüedades físicas, pero sí se obtendrán buenas estimaciones. Por otro lado, la condición 3.14 es más restrictiva que la condición 3.11, ya que los pares de frecuencias se eligen para que λ_{ij} sea bastante mayor que λ_{kl} . Por ello, dependiendo del error que afecte a las distintas medidas, puede ser conveniente el prescindir de la segunda fase del proceso, es decir, estimar las ambigüedades con la ecuación 3.16, pero utilizando el resultado de la primera iteración, \mathbf{n}_{ij} en lugar de \mathbf{n}_{kl} , es decir,

$$\mathbf{n}_p = \text{Round}(\mathbf{y}_p - (\mathbf{y}_{ij} - \mathbf{n}_{ij}) \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_p}) \quad (3.18)$$

En la tabla 3.1 se pueden ver las longitudes de onda de tres de las portadoras del futuro Galileo y de las tres del GPS modernizado (véase sec. 1.1.5 y sec. 1.1.6), así como, las posibles longitudes de onda *wide-lane*. En la tabla 3.2 se presenta un ejemplo, para el sistema Galileo, de cómo se utilizaría la técnica *wide-lane*. Combinando las frecuencias E5b y E5a se consigue una longitud de onda *wide-lane* λ_{23} de 9.7684 metros y su ambigüedad asociada n_{23} puede ser fácilmente calculada con ayuda de las medidas de pseudodistancia (Ecu. 3.10). Este resultado puede ser utilizado para resolver la ambigüedad \mathbf{n}_{12} y finalmente obtener las ambigüedades de las longitudes de onda físicas con la ecuación 3.16.

	GPS	Galileo
λ_1	0.1903 (L1)	0.1903 (E2L1E1)
λ_2	0.2442 (L2)	0.2483 (E5b)
λ_3	0.2548 (L5)	0.2548 (E5a)
λ_{12}	0.8619	0.8140
λ_{13}	0.7514	0.7514
λ_{23}	5.8610	9.7684

Tabla 3.1: Longitudes de onda en metros del GPS [Font02] y el Galileo [Hein02].

Fase	Valor utilizado	Valor obtenido	λ_{ij}	Ecuación
1	ρ	\mathbf{n}_{23}	$\lambda_{23} = 9.7684\text{m}$	3.10
2	\mathbf{n}_{23}	\mathbf{n}_{12}	$\lambda_{12} = 0.8140\text{m}$	3.13
3	\mathbf{n}_{12}	$\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	3.16

Tabla 3.2: Ejemplo técnica *wide-lane* para el sistema Galileo.

3.2. Método Nulo3

El método Nulo (sec. 2.2.3) fue diseñado para el GPS y utiliza medidas de tan sólo una frecuencia. En esta sección se propone una adaptación de este método a los nuevos sistemas de navegación que ofrecen medidas en tres frecuencias distintas. Al nuevo método resultante, publicado en [Fern04], se le ha denominado método Nulo3. La adaptación consiste en utilizar la técnica *wide-lane* para la obtención del punto inicial y una estrategia de exploración parecida a la utilizada por el método ARCE. El método Nulo3 también puede funcionar con medidas de sólo una frecuencia, aunque en ese caso no podrá utilizar la técnica *wide-lane*.

3.2.1. Obtención del punto inicial

El planteamiento inicial es el mismo que usa el método Nulo, es decir, el planteamiento sin aproximación real de las ambigüedades.

El método Nulo calcula el punto inicial \mathbf{n}_0 a partir de las medidas de pseudodistancia, cuyos errores tienen una desviación típica de σ_c . El método Nulo3 utiliza las estimaciones de las ambigüedades obtenidas con la técnica *wide-lane* para obtener un punto inicial más aproximado, pues las desviaciones típicas σ_{kl} o σ_{ij} son menores. El punto inicial, está formado por las 3 estimaciones que se consiguen con la técnica *wide-lane*, es decir, $\mathbf{n}_0 = [\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_3]$. El método Nulo proyecta el punto inicial sobre el subespacio nulo. En el caso del método Nulo3 no es necesario hacer esa proyección, pues la estrategia de exploración utilizada ya lo hace.

En el caso de que se utilice el método Nulo3 con medidas de sólo una frecuencia, el punto inicial se calculará a partir de las medidas de pseudodistancia, de la misma forma que en el método Nulo.

3.2.2. Criterio de evaluación de candidatos y elección de la solución

El criterio de evaluación de candidatos, al igual que en el método Nulo, es el residuo cuadrático, sólo que sus expresiones son las correspondientes a las medidas de las tres frecuencias, es decir,

$$\Omega_k = (\mathbf{y} - \mathbf{n}_k)^T \mathbf{B}(\mathbf{y} - \mathbf{n}_k) \quad (3.19)$$

El candidato solución a la ambigüedad se elige de la misma forma que en el método Nulo, es decir, aquél que le corresponda mínimo valor de Ω_k promediado desde la época

inicial hasta la época en curso. Por tanto, el método Nulo3 ofrece una solución a la ambigüedad en cada época.

3.2.3. Definición del espacio de búsqueda

La forma del espacio de búsqueda es similar a la del método Nulo, algo parecido a un hiper-cilindro que engloba el subespacio nulo asociado a la expresión 3.19.

De igual forma a como se hizo al describir el método Nulo, si se deja de lado el hecho de que los candidatos \mathbf{n}_k han de ser enteros, se pueden obtener algebraicamente aquellos valores reales que anulan Ω_k . Como el número de ecuaciones m es menor que el número de incógnitas $m + 3$, hay infinitos valores de \mathbf{n}_k a los que les corresponde un valor de Ω_k nulo, precisamente aquellos que pertenecen al subespacio nulo asociado a la matriz \mathbf{B} . Las dimensiones de dicho subespacio son las mismas que las dimensiones físicas del problema, es decir, tres. La exploración de candidatos se realiza alrededor de dicho subespacio.

El espacio de búsqueda se limita, en la dirección del subespacio nulo, de la misma forma que en el método Nulo. Con un nivel de confianza aceptado, el vector solución a la ambigüedad se encontrará en el interior de una hiper-esfera de radio r , en la práctica un hiper-cubo de lado $2r$, centrada en el punto inicial \mathbf{n}_0 . Como el subespacio nulo tiene tres dimensiones, el hiper-cubo sólo se usa para limitar el espacio de búsqueda en las tres direcciones del subespacio nulo.

El hecho de que el punto inicial \mathbf{n}_0 sea ahora más aproximado hace que el parámetro r pueda ser menor. Puesto que ahora, en lugar de utilizar la ecuación 2.49, se puede utilizar

$$r = \left[q \frac{\sigma_{kl}}{\lambda} \right] \quad (3.20)$$

donde σ_{kl} es ahora menor que σ_c . Dado que se trabaja con tres portadoras distintas, se elige la mínima longitud de onda, de las tres posibles, para el parámetro λ . No obstante, si se quiere alcanzar un nivel de confianza de \mathbf{n}_0 mayor, se puede seguir utilizando σ_c en la ecuación 3.20.

El método Nulo limita el espacio de búsqueda en la dirección ortogonal al subespacio nulo mediante el parámetro $\Omega_{\text{máx}}$, el valor máximo permitido del residuo cuadrático. En este caso, dada la estrategia utilizada, sólo se exploran los candidatos que están más próximos al subespacio nulo, es decir, los de mínimo valor de residuo cuadrático Ω_k . Por tanto, en el método Nulo3 no es necesario calcular un parámetro $\Omega_{\text{máx}}$ e imponer que los candidatos explorados tengan un residuo cuadrático menor, pues el propio proceso de exploración utilizado ya lo hace. En el método Nulo, la limitación del parámetro $\Omega_{\text{máx}}$ define un hiper-cilindro, cuyo radio es proporcional a dicho parámetro $\Omega_{\text{máx}}$. En el método Nulo3, la estrategia de exploración utilizada define también algo parecido a un hiper-cilindro, pero su radio es variable. La distancia, en cada zona, entre el vector entero

más cercano al subespacio nulo y el propio subespacio nulo será lo que determine el valor del radio en cada zona.

Por tanto, el espacio de búsqueda lo limita la propia estrategia de exploración en las $m - 3$ direcciones ortogonales al subespacio nulo y el hiper-cubo en las tres direcciones restantes, las direcciones del subespacio nulo. El resultado es algo parecido a un hiper-cilindro cuya altura viene regulada por el parámetro r .

La figura 3.1 ilustra un ejemplo simplificado para el caso en que hubiera sólo dos dimensiones y el subespacio nulo fuera de una dimensión. En ese caso, el hiper-cilindro se convierte en algo parecido a un rectángulo alrededor del subespacio nulo. Como se observa, el espacio de búsqueda resultante es de las mismas características que el del método Nulo (véase la figura 2.2), la diferencia radica en que el valor de r puede ser menor y que el grosor del rectángulo es variable.

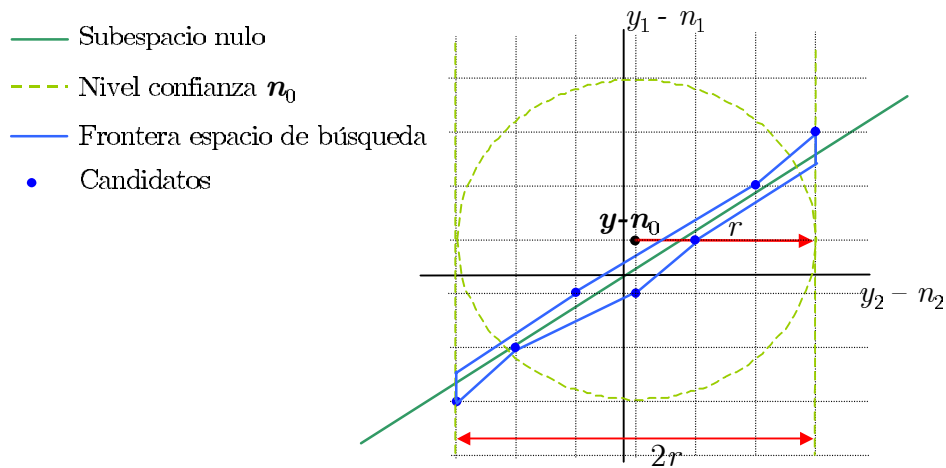


Figura 3.1: Espacio de búsqueda del método Nulo3 para $m = 2$.

3.2.4. Estrategia de exploración de candidatos

El método Nulo3 utiliza una estrategia de exploración que consiste en una reducción del número de dimensiones del espacio de búsqueda. La estrategia, en términos prácticos igual a la del método ARCE, aprovecha el hecho de que el subespacio nulo es de dimensión tres para convertir la exploración de candidatos m dimensional en una exploración tridimensional. En este caso, al utilizarse 3 frecuencias y verse multiplicado m por tres, la disminución del número de dimensiones es más significativa.

El subespacio nulo asociado a la ecuación 3.19 contiene los vectores reales a los que corresponde un valor Ω_k nulo. La estrategia explora los candidatos, vectores enteros, más cercanos a dichos vectores reales. Dado que el subespacio nulo es de dimensión tres, para

fijar un vector perteneciente a él basta con fijar tres de sus coordenadas, puesto que el resto se pueden obtener a partir de aquellas con la condición de pertenencia al subespacio. De esta forma, la estrategia explora un candidato por cada combinación de tres enteros perteneciente al espacio de búsqueda. Cada una de estas combinaciones sirve para fijar un vector del subespacio nulo, el cual tendrá 3 coordenadas enteras y $m - 3$, en general, reales. Una vez redondeadas las últimas, se obtienen las coordenadas del vector candidato más próximo al subespacio nulo de la zona. Por tanto, cada combinación de tres enteros \mathbf{n}_{k_I} permite generar un candidato como

$$\mathbf{n}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{k_I} \\ \text{Round}(\mathbf{f}_{\mathbf{n}_D}(\mathbf{n}_{k_I})) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

donde la función $\mathbf{f}_{\mathbf{n}_D}$, que depende de \mathbf{n}_{k_I} , dará el vector $\mathbf{n}_{k_D} = \mathbf{f}_{\mathbf{n}_D}(\mathbf{n}_{k_I})$ que contiene las coordenadas restantes del candidato, sujeto a la condición de pertenencia al subespacio nulo, es decir, tal que

$$\left(\mathbf{y} - \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{k_I} \\ \mathbf{n}_{k_D} \end{bmatrix} \right)^T \mathbf{B} \left(\mathbf{y} - \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{k_I} \\ \mathbf{n}_{k_D} \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (3.22)$$

Por tanto, la exploración de candidatos requiere generar todas las posibles combinaciones de tres enteros del vector \mathbf{n}_{k_I} , a partir de las cuales se obtienen los candidatos \mathbf{n}_k . El parámetro r es el que define el intervalo de posibles valores de cada una de las coordenadas del vector \mathbf{n}_{k_I} . Dichos intervalos vendrán dados por

$$n_{0i} - r \leq n_i \leq n_{0i} + r \quad (3.23)$$

donde n_{0i} y n_i son las coordenadas i -ésimas de \mathbf{n}_0 y \mathbf{n}_{k_I} respectivamente.

La figura 3.2 es un ejemplo simplificado, con menos dimensiones, del subespacio nulo, los posibles candidatos con sus residuos Ω_k y el vector solución. El número de dimensiones del espacio de medidas se ha reducido a tres y el del subespacio nulo a una. La figura 3.3 ilustra cómo, en este caso, si se fija la tercera coordenada n_3 a un valor entero se obtiene a partir de ella las otras dos coordenadas n_1 y n_2 , reales, de un vector del subespacio.

Es necesario elegir convenientemente las coordenadas que forman el vector \mathbf{n}_{k_I} , es decir, los ejes coordenados utilizados como guía en la exploración. A continuación se detalla cómo se obtiene la función $\mathbf{f}_{\mathbf{n}_D}$ y cómo elegir los ejes guía.

Obtención de la función $\mathbf{f}_{\mathbf{n}_D}$

Dado un vector \mathbf{n}_{k_I} , el vector \mathbf{n}_{k_D} que le corresponde ha de ser el que cumpla la ecuación 3.22, o lo que es lo mismo que el vector resultante cumpla la condición de pertenencia al subespacio nulo, es decir,

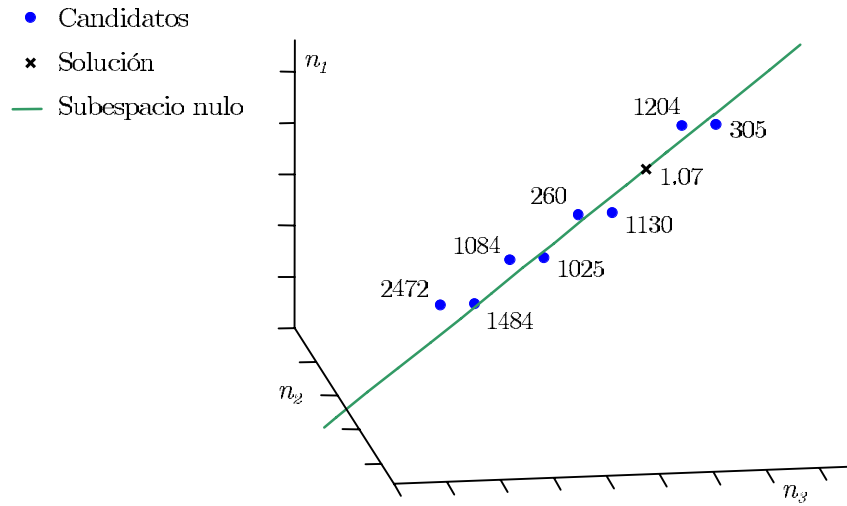


Figura 3.2: Espacio de medidas y subespacio nulo para $m = 3$.

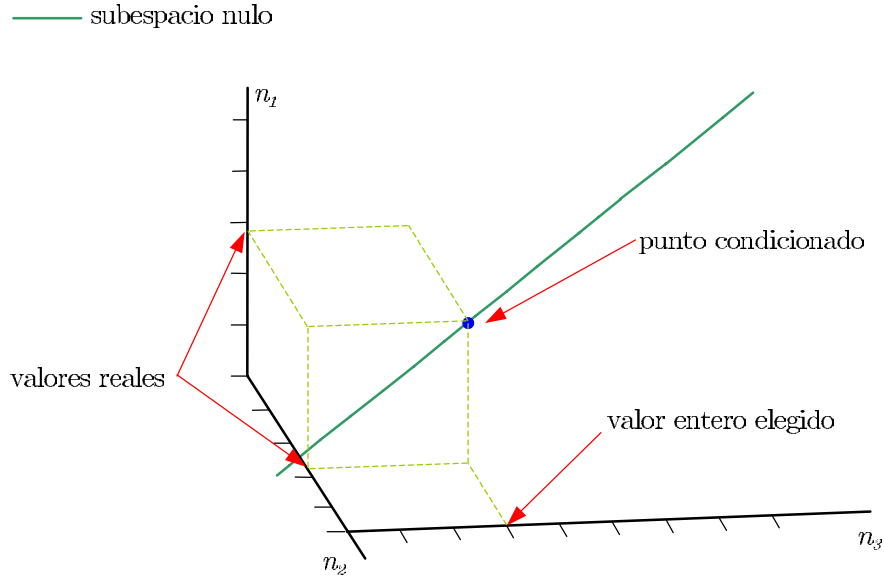


Figura 3.3: Punto que condiciona un valor entero en el subespacio nulo para $m = 3$.

$$\mathbf{y} - \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{k_I} \\ \mathbf{n}_{k_D} \end{bmatrix} = \mathbf{V}\alpha \quad (3.24)$$

donde \mathbf{V} es la matriz nulo de la matriz \mathbf{B} , es decir, sus columnas son tres vectores que forman una base del subespacio nulo y α es un vector de tres elementos. La expresión 3.24 también se puede poner como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_I - \mathbf{n}_{k_I} \\ \mathbf{y}_D - \mathbf{n}_{k_D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_I \\ \mathbf{V}_D \end{bmatrix} \alpha \quad (3.25)$$

donde \mathbf{y}_I , \mathbf{y}_D , \mathbf{V}_I y \mathbf{V}_D son las correspondientes partes de \mathbf{y} y \mathbf{V} . Dado que el subespacio nulo es de dimensión tres, una vez que se han fijado los tres elementos enteros de \mathbf{n}_{k_I} se puede obtener el vector α , que equivale a resolver α en la primera parte de la ecuación 3.25, es decir,

$$\alpha = \mathbf{V}_I^{-1}(\mathbf{y}_I - \mathbf{n}_{k_I}) \quad (3.26)$$

y así se puede obtener el valor correspondiente de \mathbf{n}_{k_D} , y por tanto la función $\mathbf{f}_{\mathbf{n}_D}$, como

$$\mathbf{n}_{k_D} = \mathbf{f}_{\mathbf{n}_D}(\mathbf{n}_{k_I}) = \mathbf{y}_D - \mathbf{V}_D \alpha = \mathbf{y}_D - \mathbf{V}_D \mathbf{V}_I^{-1}(\mathbf{y}_I - \mathbf{n}_{k_I}) \quad (3.27)$$

De esa manera el candidato finalmente generado, es el formado por \mathbf{n}_{k_I} y el vector entero más cercano a \mathbf{n}_{k_D} , es decir, la ecuación 3.21. Con ello, se obtiene el candidato más cercano al subespacio nulo de la zona. La expresión 3.27 se asemeja bastante a la ecuación 2.75 del método ARCE. De hecho, en el apéndice 3.A se demuestra que $\mathbf{V}_D \mathbf{V}_I^{-1} = \mathbf{H}_D \mathbf{H}_I^{-1}$, con lo que la expresión 3.27 se puede reescribir como

$$\mathbf{n}_{k_D} = \mathbf{f}_{\mathbf{n}_D}(\mathbf{n}_{k_I}) = \mathbf{y}_D - \mathbf{H}_D \mathbf{H}_I^{-1}(\mathbf{y}_I - \mathbf{n}_{k_I}) \quad (3.28)$$

que es idéntica a la ecuación 2.76. Por tanto, este procedimiento de obtención de \mathbf{n}_{k_D} a partir de \mathbf{n}_{k_I} es idéntico al del método ARCE, aunque sí es novedosa su justificación geométrica. En cualquier caso, el Método Nulo3 ofrece una solución a la ambigüedad en cada época, lo que no puede hacer el método ARCE debido al planteamiento que utiliza.

Elección de los ejes guía

La elección de los tres ejes guía no debe ser arbitraria. La opción que se propone es escoger de entre los m posibles, aquellos ejes coordenados que presenten menor separación angular con respecto al subespacio nulo. Para entender que esa es una buena opción, es útil analizar qué ocurriría si la elección fuera la opuesta. Supóngase que los ejes elegidos fueran perpendiculares al subespacio nulo. En ese caso, el avanzar por ellos supondría

recorrer demasiado rápido el subespacio nulo y dejar de explorar candidatos muy próximos a dicho subespacio.

En la figura 3.4 se representa un ejemplo simplificado, para sólo dos dimensiones, en el que el subespacio nulo fuera de dimensión uno. En esa situación, sólo hay que elegir un eje guía y se han representado las dos posibilidades, cada uno con un color distinto. Como se observa, si se elige el eje 1, casi perpendicular al subespacio, el incrementar en una unidad la coordenada, supone el incremento de varias unidades en la otra coordenada, lo que provoca que se dejen de explorar posibles candidatos a la solución de la ambigüedad. Eligiendo el eje 2, casi paralelo al subespacio nulo, se exploran todos los candidatos más cercanos al subespacio. Por ello, hay que elegir como ejes guía los que tengan menor separación angular con respecto al subespacio nulo.

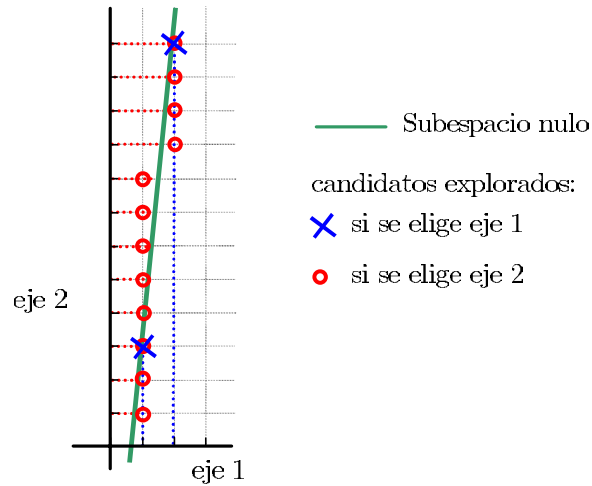


Figura 3.4: Posibles elecciones del eje guía para $m = 2$.

Por tanto, para la elección de los ejes guía se calculan los ángulos de separación con respecto al subespacio nulo de todos los ejes coordenados y se eligen aquellos de mínimo ángulo de separación. A continuación se propone cómo medir dichos ángulos de separación.

Para calcular el ángulo de separación entre un eje y el subespacio nulo es necesario proyectar el eje sobre el subespacio y calcular el ángulo entre el eje y la proyección. Para ello es necesaria la matriz de proyección del nulo, que viene dada por

$$\mathbf{P} = \mathbf{V}\mathbf{V}^T \quad (3.29)$$

Si \mathbf{u}_i es el vector unitario en la dirección del eje i , entonces su proyección \mathbf{p}_i sobre el subespacio nulo será $\mathbf{P}\mathbf{u}_i$, que es la columna i de la matriz \mathbf{P} . El ángulo de separación β entre \mathbf{u}_i y \mathbf{p}_i viene dado por

$$\cos \beta = \frac{\mathbf{p}_i \mathbf{u}_i}{\|\mathbf{p}_i\| \|\mathbf{u}_i\|} = \frac{\text{elemento } i \text{ de } \mathbf{P}_i}{\|\mathbf{p}_i\|} = \frac{p_{ii}}{\|\mathbf{p}_i\|} \quad (3.30)$$

donde p_{ii} es el elemento i de la diagonal de la matriz \mathbf{P} . Por otro lado, teniendo en cuenta la definición de la matriz \mathbf{P} , es fácilmente deducible que $\|\mathbf{p}_i\| = \sqrt{p_{ii}}$, con lo que

$$\cos \beta = \sqrt{p_{ii}} \quad (3.31)$$

y los ejes guías de mínimo ángulo de separación β , serán aquellos cuyo p_{ii} sea mayor.

No obstante, existe una restricción en la elección de los ejes debida al hecho de que se utilizan medidas de los mismos satélites pero de distintas frecuencias. No se pueden elegir dos ejes guía cuyas medidas asociadas se correspondan con el mismo par de satélites, pues en ese caso, en ausencia de error, las ecuaciones que les corresponderían serían realmente las mismas. Esa circunstancia impediría que tres valores de los ejes elegidos fijaran unívocamente un punto en el subespacio nulo, con lo que no se podrían obtener los vectores \mathbf{n}_{k_D} a partir de los vectores \mathbf{n}_{k_I} .

3.3. Método MOCA

En esta sección se propone un nuevo método [Fern05], el método MOCA, siglas inglesas de factorización de Cholesky modificada para la resolución de la ambigüedad (*MODified Cholesky factorization for Ambiguity resolution*). El método utiliza el planteamiento sin aproximación real y una estrategia de exploración de candidatos parecida a la del método LAMBDA.

3.3.1. Obtención del punto inicial

Al igual que en el método Nulo3, se utiliza la técnica *wide-lane* para obtener el punto inicial $\mathbf{n}_0 = [\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_3]$. Dicho punto inicial se utiliza para definir las fronteras del espacio de búsqueda. El método MOCA también puede funcionar con medidas de sólo una frecuencia, pero entonces el punto inicial se obtiene a partir de las medidas de pseudodistancia.

3.3.2. Criterio de evaluación de candidatos y elección de la solución

El criterio de evaluación de candidatos, al igual que en el método Nulo3, es el residuo cuadrático

$$\Omega_k = (\mathbf{y} - \mathbf{n}_k)^T \mathbf{B} (\mathbf{y} - \mathbf{n}_k) \quad (3.32)$$

El procedimiento para elegir el candidato solución a la ambigüedad es también el mismo que el del método Nulo3. Por tanto, en cada época se ofrece como solución el candidato cuyo residuo cuadrático, promediado en el tiempo, sea mínimo.

3.3.3. Definición del espacio de búsqueda

El espacio de búsqueda se define a partir del criterio de evaluación y del punto inicial \mathbf{n}_0 . Los candidatos pertenecientes al espacio de búsqueda han de tener un valor de residuo Ω_k menor que un valor máximo $\Omega_{\text{máx}}$ y los valores de tres de sus coordenadas se verán limitadas por una hiper-esfera de radio r alrededor de \mathbf{n}_0 . Con ello, el espacio de búsqueda es, básicamente, igual al del método Nulo.

La condición de que los candidatos tengan un residuo menor que $\Omega_{\text{máx}}$ se recoge en la siguiente inecuación

$$\Omega_{\text{máx}} \geq (\mathbf{y} - \mathbf{n}_k)^T \mathbf{B} (\mathbf{y} - \mathbf{n}_k) \quad (3.33)$$

Al tener la matriz \mathbf{B} un subespacio nulo asociado de dimensión tres, la ecuación 3.33 en igualdad, define un hiper-cilindro con altura infinita en tres de sus direcciones. Los candidatos que cumplen la inecuación pertenecen a dicho hiper-cilindro, cuyos tres ejes forman el subespacio nulo de \mathbf{B} .

El hecho de que la ecuación 3.33 defina un hiper-cilindro puede verse de la siguiente forma. En el caso de que la matriz \mathbf{B} fuera definida positiva¹, la ecuación definiría un hiper-elipsoide, cuyos ejes serían inversamente proporcionales a los autovalores de la matriz \mathbf{B} . Sin embargo, la matriz \mathbf{B} es semidefinida positiva², tiene tres autovalores nulos, los asociados al subespacio nulo. Por tanto, tres de los semiejes del hiper-elipsoide son infinitos, lo que equivale a decir que lo que define la inecuación es un hiper-cilindro de altura infinita en tres direcciones.

El nivel de confianza de \mathbf{n}_0 se utiliza para limitar el espacio de búsqueda de manera parecida a como lo hace el método Nulo. Con un nivel de confianza aceptado la solución a la ambigüedad estará en una hiper-esfera de radio r , en términos prácticos un hiper-cubo de lado $2r$, centrado en \mathbf{n}_0 . Dicho hiper-cubo se utiliza para limitar el espacio de búsqueda en tres direcciones, las correspondientes a las tres últimas coordenadas de los candidatos. En la descripción de la estrategia de exploración (sec. 3.3.4) se justifica por qué son las tres últimas coordenadas las que se limitan.

¹ \mathbf{A} es definida positiva si $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x}$

² \mathbf{A} es semidefinida positiva si $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0 \quad \forall \mathbf{x}$

Por tanto, el espacio de búsqueda será un hiper-cilindro de altura infinita cortado por los extremos en tres de sus direcciones, es decir, un hiper-cilindro inclinado. El parámetro $\Omega_{\text{máx}}$ regula el radio del hiper-cilindro y el parámetro r determina la altura. La figura 3.5 ilustra un ejemplo simplificado del espacio de búsqueda, para el caso en que hubiera sólo dos dimensiones. En ese caso, el espacio de búsqueda es el resultado de cortar por los extremos un rectángulo de altura infinita, es decir, un paralelogramo. El rectángulo se corta de acuerdo con la segunda coordenada de la estimación \mathbf{n}_0 .

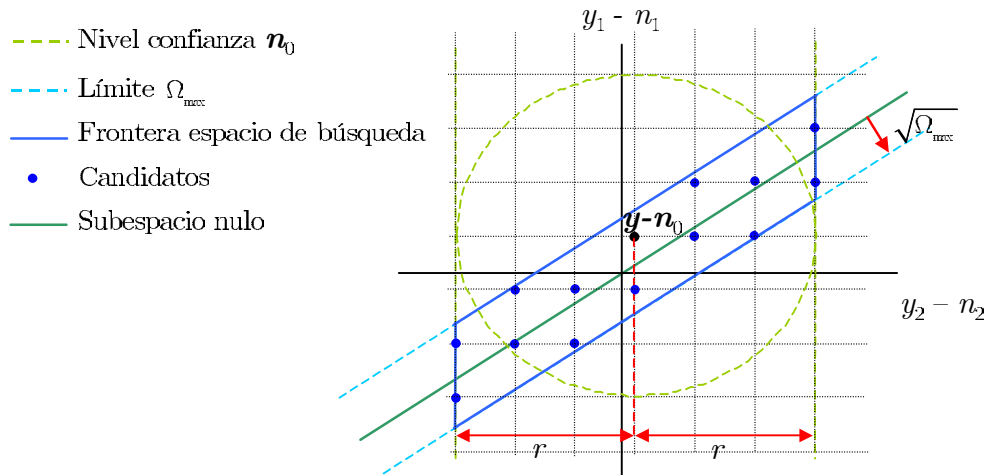


Figura 3.5: Espacio de búsqueda para sólo 2 dimensiones.

Por tanto, el espacio de búsqueda es básicamente igual que el del método Nulo, sólo que el nivel de confianza de \mathbf{n}_0 sólo se utiliza para limitar las tres últimas coordenadas. El parámetro r se determina de la misma forma que en el método Nulo3 (véase sec. 3.2.3). En cuanto al parámetro $\Omega_{\text{máx}}$, en el siguiente apartado, se proponen varias alternativas para su cálculo.

Cálculo del parámetro $\Omega_{\text{máx}}$

Se proponen tres alternativas para fijar el parámetro $\Omega_{\text{máx}}$.

1. **Cálculo estadístico de $\Omega_{\text{máx}}$.** Esta alternativa consiste en fijar el valor de $\Omega_{\text{máx}}$ de la misma forma que el método Nulo, es decir, estudiando la distribución de Ω_k y calculando el valor que garantiza que $P(\Omega_k < \Omega_{\text{máx}})$ es igual a un nivel de confianza aceptado. Como ya se ha indicado, en el apéndice B se propone un procedimiento para dicho cálculo.
2. **Combinación de cálculo estadístico y $\Omega_{\mathbf{n}_0}$.** Esta alternativa es una modificación de la anterior que consiste en utilizar también el nivel de confianza de la estimación

\mathbf{n}_0 . En general, el valor de $\Omega_{\text{máx}}$ calculado con la primera alternativa suele ser mayor del necesario, pues se le impone un nivel de confianza elevado. La técnica *wide-lane* ofrece, si las medidas de fase no son muy ruidosas, una aproximación \mathbf{n}_0 muy buena, que en muchos casos coincide con la solución. En el caso de que coincida con la solución, su residuo cuadrático $\Omega_{\mathbf{n}_0}$ será mínimo. Por tanto, esta alternativa consiste en asignar al parámetro $\Omega_{\text{máx}}$ el menor de entre dos valores: el obtenido estadísticamente como en la primera alternativa y el valor $\Omega_{\mathbf{n}_0}$. De esta manera se consigue aprovechar el hecho de que la técnica *wide-lane* pueda resolver la ambigüedad directamente, pues en ese caso se le da a $\Omega_{\text{máx}}$ un valor muy reducido y la exploración de candidatos acaba rápidamente.

3. **Cálculo para garantizar E_m candidatos.** La tercera alternativa, basada en la utilizada por el método LAMBDA, consiste en calcular el valor de $\Omega_{\text{máx}}$ que garantiza que E_m candidatos pertenecen al espacio de búsqueda. Para ello, es necesario estimar el número de candidatos que contiene el espacio de búsqueda para unos valores de $\Omega_{\text{máx}}$ y r dados. Una estimación de dicho número es el volumen E_m del espacio de búsqueda expresado en *ciclos^m*. En el siguiente apartado se detalla esta alternativa.

En el capítulo 5 se evalúan las prestaciones del método MOCA para cada una de las tres alternativas propuestas y se justifica que la tercera es la que ofrece mejores resultados.

Cálculo de $\Omega_{\text{máx}}$ para garantizar E_m candidatos

Para conseguir que E_m candidatos pertenezcan al espacio de búsqueda, se calcula el valor de $\Omega_{\text{máx}}$ que hace que el volumen del espacio de búsqueda sea E_m *ciclos^m*. En el apéndice 3.B.1 se demuestra que dicho volumen viene dado por

$$E_m = \frac{8 r^3 V_{m-3}}{\sqrt{p_{m-2} p_{m-1} p_m}} \prod_{i=1}^{m-3} \sqrt{\frac{\Omega_{\text{máx}}}{\lambda_i}} \quad (3.34)$$

donde V_{m-3} es el volumen de una hiper-esfera de radio unidad y $m - 3$ dimensiones, los términos p_i son elementos de la diagonal de la matriz de proyección \mathbf{P} del subespacio nulo (Ecu. 3.29) y los λ_i son los autovalores no nulos de la matriz \mathbf{B} . La expresión 3.34 permite calcular el parámetro $\Omega_{\text{máx}}$ para que aproximadamente E_m candidatos pertenezcan al espacio de búsqueda, como

$$\Omega_{\text{máx}} = \left(\frac{E_m \sqrt{p_{m-2} p_{m-1} p_m} \prod_{i=1}^{m-3} \lambda_i}{8 r^3 V_{m-3}} \right)^{\frac{2}{m-3}} \quad (3.35)$$

Sin embargo, tal como se justifica en el capítulo 5, en la práctica, el número de candidatos que se exploran gracias a esta expresión es bastante mayor al valor que se especifica para E_m . Por ello, se propone como alternativa estimar el volumen del espacio de búsqueda como el de un hiper-paralelepípedo que lo aproxima. El volumen de dicho sólido será mayor, con lo que el valor de $\Omega_{\text{máx}}$ que se obtendrá será menor y el número de candidatos explorados también será menor. El volumen de dicho hiper-paralelepípedo, tal como se deduce en el apéndice 3.B.2, viene dado por

$$E_m = 2^m r^3 \prod_{i=1}^{m-3} \sqrt{\frac{\Omega_{\text{máx}}}{b_{ii}}} \quad (3.36)$$

siendo los b_{ii} los elementos de la diagonal de la matriz \mathbf{B} . El valor de $\Omega_{\text{máx}}$ para que aproximadamente E_m candidatos pertenezcan al espacio de búsqueda, será ahora

$$\Omega_{\text{máx}} = \left(\frac{E_m \prod_{i=1}^{m-3} \sqrt{b_{ii}}}{2^m r^3} \right)^{\frac{2}{m-3}} \quad (3.37)$$

Además de que con esta expresión se consigue explorar un número de candidatos más próximo al especificado, como se justifica en el capítulo 5, su cálculo requiere menos operaciones, pues se obtiene directamente a partir de la matriz \mathbf{B} y el parámetro r . En el caso de la expresión 3.35, es necesario calcular los autovalores de la matriz \mathbf{B} y la matriz \mathbf{V} del subespacio nulo para poder obtener la matriz de proyección \mathbf{P} .

3.3.4. Estrategia de exploración de candidatos

La estrategia de exploración de candidatos utilizada por el método MOCA es parecida a la del método LAMBDA, es decir, realiza una fijación secuencial condicionada de las coordenadas de los candidatos.

En la inecuación 3.33 que define el hiper-cilindro de altura infinita, la matriz de ponderación \mathbf{B} es semidefinida positiva. En el caso del método LAMBDA, la matriz de ponderación del criterio de evaluación $\mathbf{Q}_{\hat{n}_f}^{-1}$ es definida positiva, lo que se aprovecha para hacer una factorización de Cholesky que permite hacer una exploración de candidatos muy eficaz. Las matrices no definidas positivas no admiten ese tipo de factorización. Sin embargo, sí es posible hacerles lo que se denomina una factorización de Cholesky modificada [Gill81] [Schn99], que para el caso de matrices semidefinidas positivas tiene características muy parecidas a la factorización normal. La factorización de Cholesky modificada de la matriz \mathbf{B} , dado que es semidefinida positiva, resulta

$$\mathbf{B} = \mathbf{LDL}^T \quad (3.38)$$

donde, al igual que en la factorización de Cholesky normal, la matriz \mathbf{D} es diagonal y la matriz \mathbf{L} es triangular inferior con todos los elementos de su diagonal a 1. Sin embargo, la matriz \mathbf{D} tiene una característica especial [Stra86], los elementos de su diagonal d_i son nulos para i mayor que el rango de la matriz original. Por tanto, para el caso de la matriz \mathbf{B} que tiene asociado un subespacio nulo de dimensión tres, los tres últimos d_i son nulos.

La inecuación 3.33, una vez hecha la factorización de Cholesky modificada a la matriz \mathbf{B} , se puede expandir en

$$\Omega_{\text{máx}} \geq \sum_{i=1}^m d_i \left[(y_i - n_i) + \sum_{j=i+1}^m l_{ji}(y_j - n_j) \right]^2 \quad (3.39)$$

donde l_{ji} , n_i e y_i son los elementos de las matrices o vectores \mathbf{L} , \mathbf{n}_k e \mathbf{y} respectivamente. Gracias a esta expansión, en el proceso de exploración se puede utilizar la misma idea que utiliza el método LAMBDA, es decir, fijar secuencialmente las coordenadas de los candidatos, empezando con la última coordenada y acabando con la primera.

A pesar de que la inecuación 3.39 es formalmente idéntica a la inecuación 2.35 del método LAMBDA, la exploración no se puede hacer de la misma forma, debido a que los tres últimos d_i son nulos. Por ejemplo, el intervalo de posibles valores de n_m que cumplan la inecuación vendría dado por

$$-\sqrt{\frac{\Omega_{\text{máx}}}{d_m}} \leq (y_m - n_m) \leq \sqrt{\frac{\Omega_{\text{máx}}}{d_m}} \quad (3.40)$$

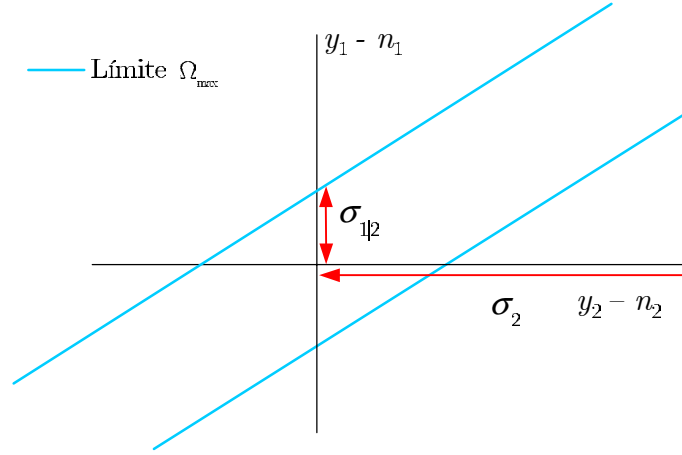
que al ser d_m nulo corresponde a un intervalo infinito. Lo mismo ocurre con los intervalos de variación de las coordenadas n_{m-1} y n_{m-2} . Este hecho equivale a decir que los parámetros $\sigma_{i|i+1,..m}$, presentados en la descripción del método LAMBDA, cuya definición (Ecu. 2.25) es ahora

$$\sigma_{i|i+1,..m} = \frac{1}{\sqrt{d_i}} = \underset{\left\{ \begin{array}{l} \Omega_{\text{máx}}=1 \\ (y_j - n_j)=0 \\ j=i+1..m \end{array} \right\}}{\text{Max}} \{y_i - n_i\} \quad (3.41)$$

toman valor infinito para $i \geq m - 2$. En la figura 3.6 se ilustra esta circunstancia, para un caso en el que sólo hubiera dos dimensiones y el subespacio nulo asociado a la matriz \mathbf{B} tuviera dimensión 1, para el que $\sigma_2 = \infty$.

El hecho de que los tres últimos d_i sean nulos es la razón por la cual, se utiliza el nivel de confianza del punto inicial \mathbf{n}_0 para limitar los intervalos de variación de las tres últimas coordenadas como

$$y_i - n_{0i} - r \leq (y_i - n_i) \leq y_i - n_{0i} + r \quad (3.42)$$

Figura 3.6: Parámetros $\sigma_{i|i+1,..m}$ para $m = 2$.

donde n_{0i} es la coordenada i de \mathbf{n}_0 . Una vez fijados los valores de los tres últimos n_i , se pueden establecer los intervalos de variación del resto de coordenadas para que cumplan la inecuación 3.39. El intervalo de variación de una de esas coordenadas n_i , una vez se han fijado valores para $n_{i+1}..n_m$, viene dado por

$$-\sqrt{R_i} - L_i \leq (y_i - n_i) \leq \sqrt{R_i} - L_i \quad (3.43)$$

con

$$R_i = \frac{\Omega_{\text{máx}}}{d_i} - \sum_{k=i+1}^{m-3} \frac{d_k}{d_i} [(y_k - n_k) + L_k]^2 \quad (3.44)$$

y

$$L_i = \sum_{j=i+1}^m l_{ji}(y_j - n_j) \quad (3.45)$$

Los límites de los intervalos se pueden calcular de forma recursiva, es decir, los valores de R_i y L_i se pueden obtener a partir de los valores R_{i+1} y L_{i+1} , con el consecuente ahorro de cómputo. Así mismo, los valores R_1 y L_1 se pueden aprovechar para obtener el valor del residuo cuadrático de un candidato explorado como

$$\Omega_k = \Omega_{\text{máx}} - d_1 [R_1 - ((y_1 - n_1) + L_1)^2] \quad (3.46)$$

El procedimiento de exploración comienza fijando la coordenada m al primer valor de su intervalo, a continuación se fija la coordenada $m - 1$ al primer valor de su intervalo y así sucesivamente hasta la primera coordenada. Si al fijar la coordenada i a un valor n_i el correspondiente intervalo de la coordenada $i - 1$ no incluye ningún valor entero,

se descarta el valor n_i fijado, se fija la coordenada i al siguiente valor del intervalo y se continúa el proceso. En el momento que se hayan fijado todas las coordenadas, es decir, cuando se llegue a fijar la primera coordenada, se tendrá un posible candidato. Cuando se hayan recorrido todos los intervalos acabará el proceso de exploración.

El hecho de que la expresión 3.39 sea, formalmente, idéntica a la expresión 2.22, podría inducir a pensar que la decorrelación que realiza el método LAMBDA mejoraría la eficacia de la exploración. Con dicha decorrelación, el hiper-elipsoide de búsqueda del método LAMBDA se transforma, preservando su volumen, en una hiper-esfera. La expresión 3.39 define un hiper-cilindro de altura infinita, es decir, de volumen infinito. Por tanto, con la decorrelación de las ambigüedades se conseguiría una hiper-esfera de búsqueda, pero de volumen infinito y la exploración no sería viable.

3.4. Conclusiones

En este capítulo se han propuesto dos nuevos métodos de resolución de la ambigüedad, el método Nulo3 y el método MOCA. Ambos métodos utilizan el planteamiento sin aproximación real de las ambigüedades, lo cual les permite resolver la ambigüedad con medidas de sólo una época y sin mezclar las medidas de fase con las medidas de pseudodistancia.

Tanto el método Nulo3 como el método MOCA, aprovechan la técnica *wide-lane* con la consecuente buena estimación inicial de la ambigüedad. Ello hace que, en ambos métodos, el espacio de búsqueda pueda verse reducido y la exploración sea eficaz.

El método Nulo3 utiliza una estrategia de exploración que convierte el espacio de búsqueda m dimensional en un espacio tridimensional. Esta estrategia permite que la exploración de candidatos sea mucho más eficaz que la utilizada por el método Nulo. Los candidatos que se generan son los vectores enteros más cercanos a los vectores pertenecientes al subespacio nulo.

El método MOCA, gracias a la factorización de Cholesky modificada, consigue realizar la exploración de candidatos con fijación secuencial condicionada de coordenadas, de manera similar a como lo hace el método LAMBDA. El tamaño del espacio de búsqueda depende del parámetro $\Omega_{\text{máx}}$, cuyo valor debe ser fijado adecuadamente para que el número de candidatos a explorar no sea demasiado elevado o demasiado reducido. Para fijar dicho valor se han propuesto tres alternativas que se valoran en el capítulo 5.

La tabla 3.3 resume las características de los dos métodos propuestos y del método LAMBDA, que se ha añadido para poder hacer comparaciones. En los tres casos se ha supuesto que se utilizan medidas de tres frecuencias. En el capítulo 5 se analizan resultados prácticos de los tres métodos para comparar sus prestaciones.

	Método Nulo3	Método MOCA	Método LAMBDA
Planteamiento	Sin aproximación real de las ambigüedades	Sin aproximación real de las ambigüedades	Con aproximación real de las ambigüedades
Punto Inicial	Estimación obtenida con la técnica <i>wide-lane</i>	Estimación obtenida con la técnica <i>wide-lane</i>	Aproximación real de las ambigüedades
Nº épocas para una solución	1	1	2 o más 1 si mezcla medidas de pseudodistancia y fase
Medidas de fase y pseudodistancia desacopladas	Sí	Sí	Sí, excepto cuando da una solución por cada época
Criterio de evaluación de candidatos	Residuo cuadrático Ω_k	Residuo cuadrático Ω_k	Distancia cuadrática ponderada a la aproximación real χ_k^2
Parámetros que definen espacio de búsqueda	radio hiper-esfera r	radio hiper-esfera r y $\Omega_{\text{máx}}$	Distancia cuadrática máxima $\chi_{\text{máx}}^2$
Estrategia de exploración de candidatos	Espacio de búsqueda tridimensional	Fijación secuencial condicionada gracias a la factorización de Cholesky modificada	Fijación secuencial condicionada y decorrelación de las ambigüedades

Tabla 3.3: Comparativa de los métodos propuestos con el método LAMBDA.

3.A. Apéndice: Demostración de $\mathbf{V}_D \mathbf{V}_I^{-1} = \mathbf{H}_D \mathbf{H}_I^{-1}$

En este apéndice se demuestra la igualdad

$$\mathbf{V}_D \mathbf{V}_I^{-1} = \mathbf{H}_D \mathbf{H}_I^{-1} \quad (3.47)$$

gracias a la cual se puede obtener la expresión 3.28 del método Nulo3. Teniendo en cuenta que en el apéndice 2.A se demuestra que

$$\mathbf{H}_D \mathbf{H}_I^{-1} = -\mathbf{W}_D^{-T} \mathbf{W}_I^T \quad (3.48)$$

el demostrar la ecuación 3.47 es equivalente a demostrar

$$\mathbf{V}_D \mathbf{V}_I^{-1} = -\mathbf{W}_D^{-T} \mathbf{W}_I^T \quad (3.49)$$

Para ello, es necesario recordar la definición de las matrices \mathbf{V} y \mathbf{W} . La primera es la matriz nulo de la matriz \mathbf{B} y la segunda de la matriz \mathbf{H}^T . Por tanto, se cumple

$$\mathbf{B}\mathbf{V} = 0 \quad \text{ó} \quad \mathbf{V}^T \mathbf{B} = 0 \quad (3.50)$$

y

$$\mathbf{H}^T \mathbf{W} = 0 \quad \text{ó} \quad \mathbf{W}^T \mathbf{H} = 0 \quad (3.51)$$

Teniendo en cuenta la definición de la matriz \mathbf{B} (Ecu. 2.17) y la ecuación 3.50, se cumple

$$(\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{A})\mathbf{V} = 0 \quad (3.52)$$

con lo que

$$\mathbf{V} = \mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{V} \quad (3.53)$$

Por otro lado, si se multiplican ambos miembros por la izquierda, por la matriz \mathbf{W}^T y teniendo en cuenta la ecuación 3.51, se cumplirá

$$\mathbf{W}^T \mathbf{V} = \mathbf{W}^T \mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{V} = 0 \cdot \mathbf{A}\mathbf{V} = 0 \quad (3.54)$$

que demuestra que \mathbf{W}^T define un subespacio, de $m-3$ dimensiones, ortogonal al que define \mathbf{V} , de 3 dimensiones. Descomponiendo la ecuación 3.54 en sus partes independientes y dependientes, de acuerdo con la formulación del método Nulo3, se obtiene

$$[\mathbf{W}_I^T \mathbf{W}_D^T] \begin{bmatrix} \mathbf{V}_I \\ \mathbf{V}_D \end{bmatrix} = 0 \quad (3.55)$$

o lo que es lo mismo

$$\mathbf{W}_I^T \mathbf{V}_I + \mathbf{W}_D^T \mathbf{V}_D = 0 \quad (3.56)$$

que permite, dado que existen las inversas de \mathbf{V}_I y \mathbf{W}_D^T , despejar

$$\mathbf{W}_I^T = -\mathbf{W}_D^T \mathbf{V}_D \mathbf{V}_I^{-1} \quad (3.57)$$

y demostrar la igualdad

$$\mathbf{V}_D \mathbf{V}_I^{-1} = -\mathbf{W}_D^{-T} \mathbf{W}_I^T \quad (3.58)$$

3.B. Apéndice: Volumen del espacio de búsqueda del método MOCA

En este apéndice se demuestran las expresiones 3.34 y 3.36 del volumen del espacio de búsqueda del método MOCA. En el primer apartado se demuestra la primera expresión, el volumen de un hiper-cilindro inclinado. En el segundo apartado se demuestra la segunda expresión, el volumen de un hiper-paralelepípedo que aproxima el espacio de búsqueda.

3.B.1. Volumen del hiper-cilindro inclinado

El objetivo es deducir la expresión 3.34 del volumen del espacio de búsqueda, es decir, del volumen de un hiper-cilindro inclinado. Dicho volumen es el resultado de seccionar un hiper-cilindro recto de altura infinita en tres direcciones, con pares de hiper-planos paralelos dos a dos. El radio del hiper-cilindro recto depende del parámetro $\Omega_{\text{máx}}$ y cada hiper-plano está a una distancia $2r$ de su hiper-plano paralelo. Los cortes de los hiper-planos hacen que el volumen resultante sea un hiper-cilindro inclinado. No obstante, el valor de dicho volumen es equivalente al de un hiper-cilindro recto de la misma longitud que el inclinado. En la figura 3.7 se presenta un ejemplo, para sólo dos dimensiones, en el que los hiper-cilindros son rectángulos y los hiper-planos rectas. En azul se ha pintado el rectángulo inclinado, un paralelogramo. En negro el rectángulo de superficie equivalente.

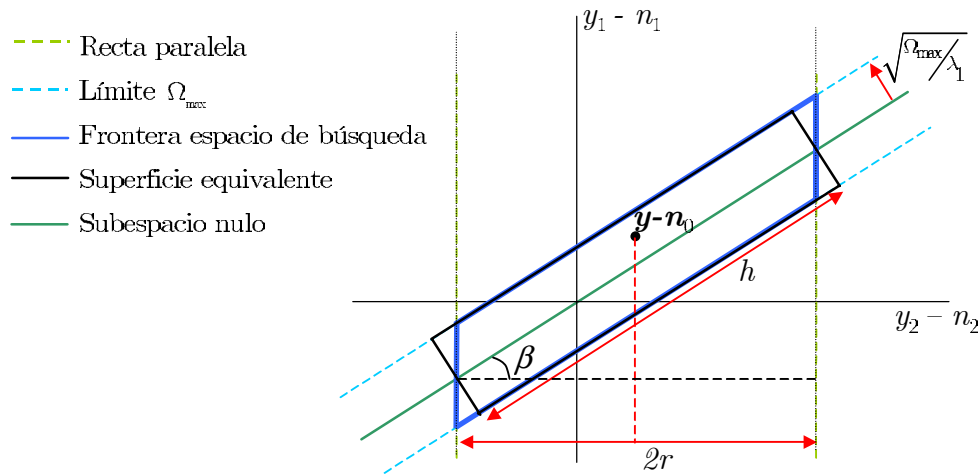


Figura 3.7: Relación entre el hiper-cilindro inclinado y el hiper-cilindro recto equivalente para $m = 2$.

Cada una de las tres alturas h_i del hiper-cilindro se pueden obtener a partir de la distancia $2r$ entre el par de hiper-planos del eje i y el ángulo β_i que forman dicho eje y

el del hiper-cilindro, es decir,

$$h_i = \frac{2r}{\cos\beta_i} \quad (3.59)$$

El eje del hiper-cilindro es el subespacio nulo asociado a la matriz \mathbf{B} . En la descripción del método Nulo3 se justifica que el ángulo β_i entre el subespacio nulo y el eje i (Ecu. 3.31) viene dado por

$$\cos\beta_i = \sqrt{p_i} \quad (3.60)$$

siendo p_i (en este caso sólo se ha utilizado un subíndice) el elemento i de la diagonal de la matriz de proyección del subespacio nulo \mathbf{P} (Ecu. 3.29). Por tanto, la altura tridimensional del hiper-cilindro viene dada por

$$h_{m-2} h_{m-1} h_m = \frac{(2r)^3}{\sqrt{p_{m-2} p_{m-1} p_m}} \quad (3.61)$$

La base del hiper-cilindro es un hiper-elipsoide de $m - 3$ dimensiones cuyos semiejes dependen de los autovalores no nulos de \mathbf{B} y del parámetro $\Omega_{\text{máx}}$. En la descripción del método LAMBDA (sec. 2.2.2) se indica cómo el volumen de un hiper-elipsoide es igual al producto de sus semiejes por el volumen de una hiper-esfera de radio unidad (Ecu. 2.32), es decir,

$$V_{m-3} \prod_{i=1}^{m-3} S_i \quad (3.62)$$

donde V_{m-3} es el volumen de una hiper-esfera $m - 3$ dimensional de radio unidad cuyo valor se obtiene con la ecuación 2.29 y S_i son los semiejes del hiper-elipsoide que viene dados por

$$S_i = \sqrt{\frac{\Omega_{\text{máx}}}{\lambda_i}} \quad (3.63)$$

siendo los λ_i los autovalores no nulos de \mathbf{B} . Por tanto, el volumen del hiper-cilindro inclinado E_m es

$$E_m = \frac{8 r^3 V_{m-3}}{\sqrt{p_{m-2} p_{m-1} p_m}} \prod_{i=1}^{m-3} \sqrt{\frac{\Omega_{\text{máx}}}{\lambda_i}} \quad (3.64)$$

3.B.2. Volumen del hiper-paralelepípedo.

El objetivo es deducir la expresión 3.36 del volumen de un hiper-paralelepípedo que aproxima el espacio de búsqueda. Dicho volumen es el resultado de seccionar un hiper-ortoeдро de tres dimensiones infinitas con pares de hiper-planos paralelos y distanciados $2r$. El volumen resultante es un hiper-paralelepípedo. No obstante, es equivalente al volumen de un hiper-ortoeдро de altura $2r$ en tres de sus dimensiones y resto de dimensiones iguales a las del hiper-paralelepípedo. En la figura 3.8 se presenta un ejemplo, para sólo dos dimensiones, en el que el hiper-paralelepípedo es un paralelogramo, el hiper-ortoeдро un rectángulo y los hiper-planos rectas. En azul se ha pintado el paralelogramo y en negro el rectángulo de superficie equivalente.

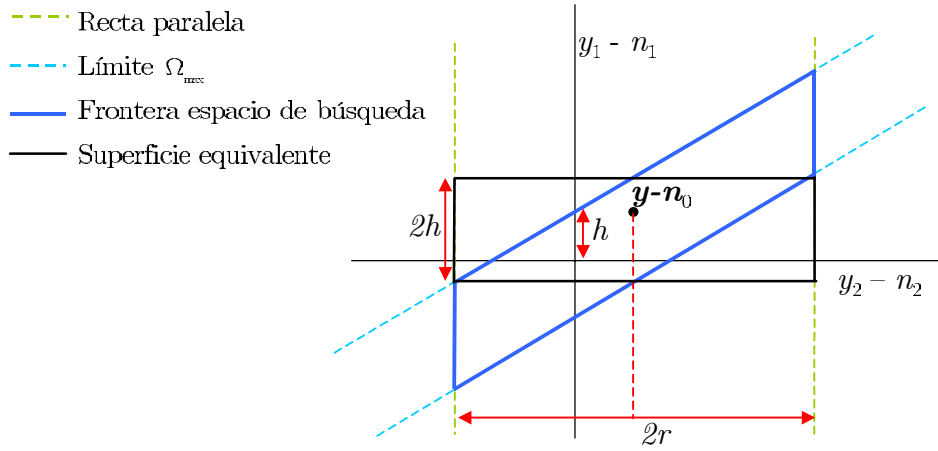


Figura 3.8: Relación entre el hiper-paralelepípedo y el hiper-ortoeдро equivalente para $m = 2$.

Por tanto, el volumen E_m del hiper-ortoeдро viene dado por

$$E_m = (2r)^3 \prod_{i=1}^{m-3} 2h_i = 2^m r^3 \prod_{i=1}^{m-3} h_i \quad (3.65)$$

donde los h_i son las semialturas del hiper-ortoeдро en $m - 3$ de sus dimensiones. El valor de cada h_i se pueden obtener a partir del valor del hiper-paralelepípedo cuando corta el eje de la coordenada i , que coincide con el valor del hiper-cilindro del espacio de búsqueda, cuando corta el mismo eje. Dicho valor se puede obtener directamente de la matriz \mathbf{B} y el parámetro $\Omega_{\text{máx}}$. La expresión 3.33, en igualdad, se puede expandir como

$$\Omega_{\text{máx}} = (\mathbf{y} - \mathbf{n}_k)^T \mathbf{B} (\mathbf{y} - \mathbf{n}_k) = \sum_{i=1}^m \left[b_{ii} (y_i - n_i)^2 + 2 \sum_{j=i+1}^m b_{ij} (y_i - n_i) (y_j - n_j) \right] \quad (3.66)$$

El hiper-cilindro corta al eje de la coordenada i cuando todos los términos $y_j - n_j$ con j distinto de i son nulos, situación para la que la expresión anterior se convierte en

$$\Omega_{\text{máx}} = b_{ii}(y_i - n_i)^2 \quad (3.67)$$

y el valor que toma $y_i - n_i$, el que se asigna a h_i , viene dado por

$$y_i - n_i = \sqrt{\frac{\Omega_{\text{máx}}}{b_{ii}}} = h_i \quad (3.68)$$

con lo que el volumen del hiper-paralelepípedo E_m queda finalmente como

$$E_m = 2^m r^3 \prod_{i=1}^{m-3} \sqrt{\frac{\Omega_{\text{máx}}}{b_{ii}}} \quad (3.69)$$

Capítulo 4

Simulador para evaluación de métodos de resolución de la ambigüedad

En este capítulo se describe un simulador para evaluación de métodos de resolución de la ambigüedad presentado en [Fern99] y [Fern00]. Las prestaciones de los métodos descritos en el capítulo 2 y 3 se evalúan con esta herramienta de simulación en el capítulo 5. La herramienta ha sido desarrollada en lenguaje C++ [Atki92] con la ayuda del entorno de programación de Borland, C++ Builder [Char00]. En la sección 4.1 se describen tres utilidades básicas que posee la herramienta para simular trayectorias de satélites y algunos aspectos del funcionamiento de un receptor GNSS. Seguidamente, se describe el simulador para evaluación de métodos de resolución de la ambigüedad propiamente dicho. Con objeto de validar el funcionamiento de la herramienta, en el último apartado se comparan las medidas ofrecidas por el simulador con las medidas ofrecidas por un emulador del sistema Galileo [Roy00].

4.1. Simulaciones de satélites y receptores

En esta sección se describen tres utilidades que posee la herramienta. Un trazador de órbitas, que permite analizar las trayectorias que describen los satélites. Un simulador de receptor, que simula el cálculo de la posición que realiza un receptor GNSS a partir de las medidas de pseudodistancias. Por último, una utilidad que permite estudiar los parámetros de dispersión de la precisión (DOP) (sec. 1.3.3).

Para la descripción de las utilidades se analizan tres aspectos por separado. Primeramente los fundamentos teóricos en los que se basa la utilidad. A continuación el funcionamiento, es decir, cómo se comporta la utilidad a nivel de usuario y las posibilidades que ofrece. Finalmente, se describe, a grandes rasgos, cómo se ha implementado la utilidad,

es decir, cómo se ha programado indicando las distintas funciones, clases y estructuras de datos utilizadas.

4.1.1. Trazador de órbitas

Fundamentos teóricos

El trazador de órbitas simula el movimiento de un satélite a lo largo de su órbita. Para ello, teniendo en cuenta los parámetros orbitales del satélite elegido calcula su posición en cada instante de tiempo especificado.

Los parámetros orbitales o efeméride del satélite son los descritos en la sección 1.3.1, es decir, los de la tabla 1.4. A partir de la efeméride, se calcula la posición del satélite, en coordenadas ECEF, en cada instante de tiempo, utilizando el algoritmo de la tabla 4.1. Los parámetros de la efeméride están referidos al tiempo t_{0e} y se actualizan para el instante especificado t_k . La anomalía excéntrica E_k ha de ser calculada iterativamente, a partir de la anomalía media M_k , para lo que se utiliza el método de Newton. El parámetro $d\Omega_e/dt$ es la velocidad angular de la Tierra, que es $7.2921151467E-5$ rad/s.

Funcionamiento

La figura 4.1 es un ejemplo del aspecto que presenta el interfaz del trazador de órbitas. Para cada instante de tiempo especificado el trazador presenta la posición calculada del satélite elegido. Los parámetros de entrada son

- Archivo de efeméride o almanaque.
- N° de satélite elegido.
- Especificación temporal. Tiempo inicio, intervalo y fin de la simulación.

y los resultados que ofrece son

- Instante actual de la simulación.
- Valores intermedios del algoritmo de cálculo de la posición del satélite (los de la tabla 4.1).
- Posición del satélite calculada (numérica y gráfica).

$a = (\sqrt{a})^2$	Semieje mayor
$n_v = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} + \Delta n_v$	Movimiento medio corregido
$t_k = t - t_{0e}$	Tiempo desde la efemeride
$M_k = M_0 + n_v t_k$	Anomalía media
$E_k = M_k - e \operatorname{sen} E_k$	Anomalía excéntrica (cálculo iterativo)
$v_k = \arctg \left(\frac{\sqrt{1 - e^2} \operatorname{sen} E_k}{\cos E_k - e} \right)$	Anomalía verdadera
$\Phi_k = v_k + w$	Argumento de la latitud
$\delta_k = C_{us} \operatorname{sen}(2\phi_k) + C_{uc} \cos(2\phi_k)$	Corrección del argumento de la latitud
$\delta_{r_k} = C_{rs} \operatorname{sen}(2\phi_k) + C_{rc} \cos(2\phi_k)$	Corrección del radio la órbita
$\delta_{i_k} = C_{is} \operatorname{sen}(2\phi_k) + C_{ic} \cos(2\phi_k)$	Corrección de la inclinación
$u_k = \phi_k + \delta_k$	Argumento de la latitud corregido
$r_k = a(1 - e \cos E_k) + \delta_{r_k}$	Radio de la órbita corregido
$i_k = i_0 + \frac{di}{dt} t_k + \delta_{i_k}$	Inclinación corregida
$\Omega_k = \Omega_0 + \left(\frac{d\Omega}{dt} - \frac{d\Omega_e}{dt} \right) t_k - \Omega_e t_{0e}$	Longitud del nodo ascendente corregida en t_k
$x_p = r_k \cos u_k$	Coordenada x en el plano orbital
$y_p = r_k \operatorname{sen} u_k$	Coordenada y en el plano orbital
$x_s = x_p \cos \Omega_k - y_p \cos i_k \operatorname{sen} \Omega_k$	Coordenada x ECEF
$y_s = x_p \operatorname{sen} \Omega_k + y_p \cos i_k \cos \Omega_k$	Coordenada y ECEF
$z_s = y_p \operatorname{sen} i_k$	Coordenada z ECEF

Tabla 4.1: Algoritmo para el cálculo de la posición del satélite [Kap196].

Figura 4.1: Pantalla del trazador de órbitas.

Estos resultados pueden también ser volcados a un archivo en formato Matlab, para poder ser utilizados por otras aplicaciones.

La efeméride o almanaque de entrada se especifica mediante un archivo de efeméride formato RINEX [Gurt94] (*Receiver Independent Exchange*) o un archivo almanaque formato Yuma [Yuma]. El formato RINEX, dado que se diseñó para facilitar el intercambio de datos y medidas ofrecidos por distintos receptores, es el más utilizados por los usuarios de GNSS.

Implementación

La explicación de la implementación del trazador de órbitas requiere la descripción previa de los dos tipos de archivos de efeméride que utiliza. La figura 4.2 es un ejemplo del aspecto que presenta un archivo efeméride en formato RINEX. Tras una cabecera con parámetros relativos a la versión del formato, se presentan, a razón de 4 por línea, los parámetros de efeméride de cada satélite. La figura se corresponde con los parámetros orbitales de los satélites de identificadores 28 y 22. Los archivos en formato Yuma, sólo contienen los parámetros que componen el almanaque de los satélites. La figura 4.3 presenta un ejemplo del aspecto que presenta un archivo tipo Yuma.

Los archivos tipo RINEX pueden presentar, para un mismo satélite, varias versiones de sus parámetros orbitales, relativas a distintos tiempos de referencia de efeméride. Sin embargo, los archivos tipo Yuma contienen solamente una versión de parámetros orbitales para cada satélite. Cuando se quiere calcular la posición que ocupa un satélite en un instante t hay que elegir la versión de parámetros orbitales cuyo tiempo de referencia sea más próximo a t .

La implementación del trazador de órbitas se basa en una clase que se ha denominado *CEfemeride*. La figura 4.4(a) presenta una representación UML (Lenguaje Unificado Modelado)[Booc00] de dicha clase. Un objeto de esa clase, se encarga de toda la problemática de lectura de los archivos tipo RINEX o tipo Yuma, con el método *Lectura*.

El atributo *idSat* es un vector de listas enlazadas que contiene los parámetros orbitales leídos. Cada satélite tiene asociada una de esas listas enlazadas, que contiene todas las versiones de parámetros orbitales disponibles ordenadas según sus tiempos de referencia. En la figura 4.4(b) se ha representado la estructura de datos del atributo *idSat*. De esta forma, la estructura de datos elegida es común a los dos posibles formatos de archivos de entrada y facilita la elección apropiada de versiones de parámetros orbitales. En el caso de que el archivo leído esté en formato Yuma habrá tantas listas como satélites y cada una de ellas contendrá un sólo elemento. En el caso de que el archivo leído esté en formato RINEX, habrá tantas listas como satélites, pero cada una de ellas contendrá tantos elementos como versiones de parámetros distintos haya.

El método *Donde* de la clase *CEfemeride*, según el satélite e instante de tiempo

```

2.10          N: GPS NAV DATA          RINEX VERSION / TYPE
teqc 2001May8  ICC          20040414 00:12:55UTC  PGM / RUN BY / DATE
MSWinNT 4.0|PentPro|wcl386 10.6|MSWin95/98/NT|486/DX+  COMMENT
          END OF HEADER
28 04 4 13 2 0 0.0 2.771522849798D-05 1.477928890381D-12 0.000000000000D+00
2.070000000000D+02-6.281250000000D+00 4.522688388125D-09-9.824216632913D-01
-3.799796104431D-07 8.745332132094D-03 9.445473551750D-06 5.153692443848D+03
1.800000000000D+05 2.309679985046D-07-4.346168502335D-01 1.639127731323D-07
9.593329026946D-01 1.964687500000D+02-2.394123497013D+00-7.924615806343D-09
1.950081228711D-10 1.000000000000D+00 1.266000000000D+03 0.000000000000D+00
2.800000000000D+00 0.000000000000D+00-1.024454832077D-08 4.630000000000D+02
1.728000000000D+05 4.000000000000D+00
22 04 4 13 2 0 0.0-1.201778650284D-05 6.593836587854D-12 0.000000000000D+00
1.780000000000D+02 6.293750000000D+01 4.443042213399D-09-2.013810391172D+00
3.386288881302D-06 4.975501564331D-03 6.390735507011D-06 5.153596035004D+03
1.800000000000D+05 5.587935447693D-09 2.753839719861D+00 1.154839992523D-07
9.615402500452D-01 2.559687500000D+02-1.403392058192D+00-8.035334703944D-09
1.396486740707D-10 1.000000000000D+00 1.266000000000D+03 0.000000000000D+00
4.000000000000D+00 0.000000000000D+00-1.769512891769D-08 6.900000000000D+02
1.728000000000D+05 4.000000000000D+00
...
    
```

Figura 4.2: Ejemplo de archivo efeméride en formato RINEX.

```

***** Week 242 almanac for PRN-01 *****
ID: 01
Health: 000
Eccentricity: 0.5294322968E-002
Time of Applicability(s): 503808.0000
Orbital Inclination(rad): 0.9788199581
Rate of Right Ascen(r/s): -0.7851755629E-008
SQRT(A) (m 1/2): 5153.522461
Right Ascen at Week(rad): -0.2515577191E+001
Argument of Perigee(rad): -1.672564492
Mean Anom(rad): -0.1420257235E+001
Af0(s): 0.3395080566E-003
Af1(s/s): 0.0000000000E+000
week: 242
...
    
```

Figura 4.3: Ejemplo de archivo almanaque en formato Yuma.

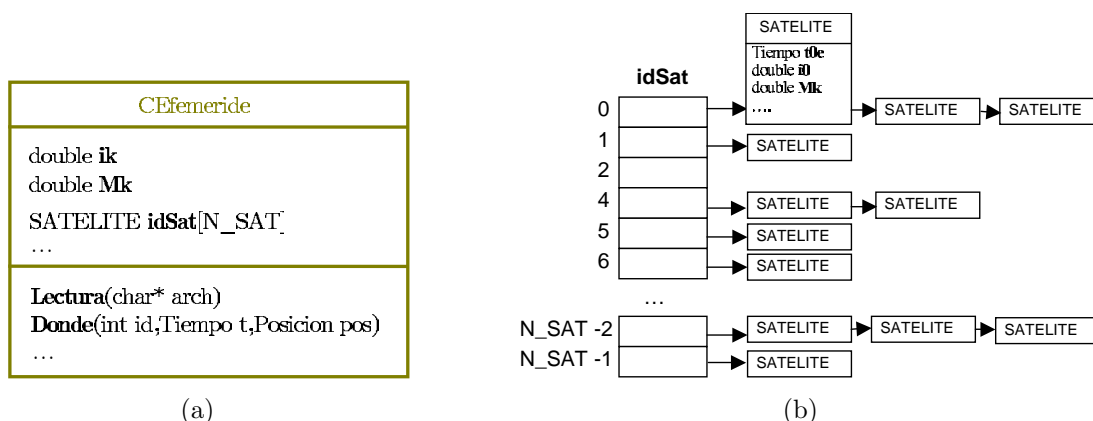


Figura 4.4: Diagrama UML (a) y estructura de datos (b) del trazador de órbitas.

especificado, devuelve la posición del satélite, implementando el algoritmo de la tabla 4.1. Todas las variables intermedias para la obtención de dicho cálculo, son variables públicas, es decir, accesibles para los objetos que utilizan la clase *CEfemeride*.

4.1.2. Simulador de receptor

Fundamentos teóricos

El simulador de receptor realiza el cálculo que hace un receptor GNSS de las coordenadas de su posición utilizando medidas de pseudodistancia. Para ello, las medidas de pseudodistancia son simuladas o leídas de archivos de medidas.

El cálculo de la posición se realiza utilizando el procedimiento descrito en las secciones 1.3.1 y 1.3.2, es decir, posicionamiento de los satélites a partir de sus parámetros orbitales y posterior estimación de la posición y la deriva del reloj del receptor a partir de las medidas de pseudodistancia.

Las medidas de pseudodistancia que se utilizan pueden ser simuladas o leídas de archivos de medidas en formato TCAR o en formato RINEX. Los ficheros en formato TCAR, fueron facilitados por la Agencia Espacial Europea y se describen en la sección 4.3.1. A continuación se explica, para el caso en que se opte por utilizar medidas simuladas, cómo se generan éstas.

Dado que las medidas de pseudodistancia son estimaciones de las distancias satélite-receptor, cada medida se simula determinando la distancia satélite-receptor y sumando las distintas contribuciones de las distintas fuentes de error, es decir, la ecuación 1.6, que ahora se modela como

$$\rho = d + c t_r + \alpha_{iono} + \beta_{tropo} + w_r \quad (4.1)$$

La distancia satélite-receptor d se calcula a partir de la posición real del receptor, que es un parámetro de entrada de la simulación, y las posiciones de los satélites son calculadas a partir de sus parámetros orbitales. La deriva del reloj del receptor t_r será un parámetro de entrada. La deriva del reloj del satélite no se ha simulado puesto que, como se comentó en la sección 1.2.3, el receptor la compensa con los parámetros que de ella son enviados en el mensaje de navegación.

El error debido a la Ionosfera α_{iono} se ha simulado con el mismo modelo que los receptores utilizan para compensarlo, es decir, con el modelo de Klobuchar [Park96]. Dicho modelo requiere fijar 8 parámetros que definen las características concretas de la Ionosfera, que son enviados por los satélites en el mensaje de navegación. Los archivos de efemeride en formato RINEX, en ocasiones, proporcionan estos 8 parámetros. Por tanto, cuando el simulador trabaje con un archivo de efemeride en formato RINEX que

proporcione estos parámetros, serán los que se utilicen y en otro caso, se utilizarán 8 valores típicos.

Para el error debido a la Troposfera β_{tropo} se ha utilizado un modelo propuesto en [Coll96] e implementado en [Rodr00]. El error debido al ruido del receptor w_r se ha modelado como un ruido gaussiano blanco y de media nula. El error debido al efecto multicamino w_{mu} no se ha simulado.

Funcionamiento

El simulador de receptor presenta, para cada instante de tiempo especificado, la posición calculada por el receptor y los satélites utilizados para ello. Los parámetros de entrada son

- Posición real del receptor.
- Posición aproximada. Se toma como punto inicial para poder hacer la linealización que implica el cálculo (véase sec. 1.3.2).
- Especificación temporal. Tiempo inicio, intervalo y fin de la simulación.
- Tipo de medidas a utilizar. Simuladas, archivo RINEX ó archivo TCAR.
- Archivo de efeméride o almanaque de los satélites.
- Especificaciones de las fuentes de error de las medidas simuladas.
- Archivo de medidas RINEX.
- Archivo de medidas TCAR.
- Método de selección de satélites: Todos, 4 cualesquiera, 4 con mejor GDOP.

Los resultados que ofrece la simulación son

- Posición calculada del receptor.
- Error de la posición calculada. Numérico y gráfico en dos dimensiones.
- Histograma del error en la posición calculada
- Identificadores, azimut y elevación de los satélites utilizados

Los resultados también se puede volcar en archivos en formato Matlab. La figura 4.5 es un ejemplo del aspecto que presenta el simulador de receptor.

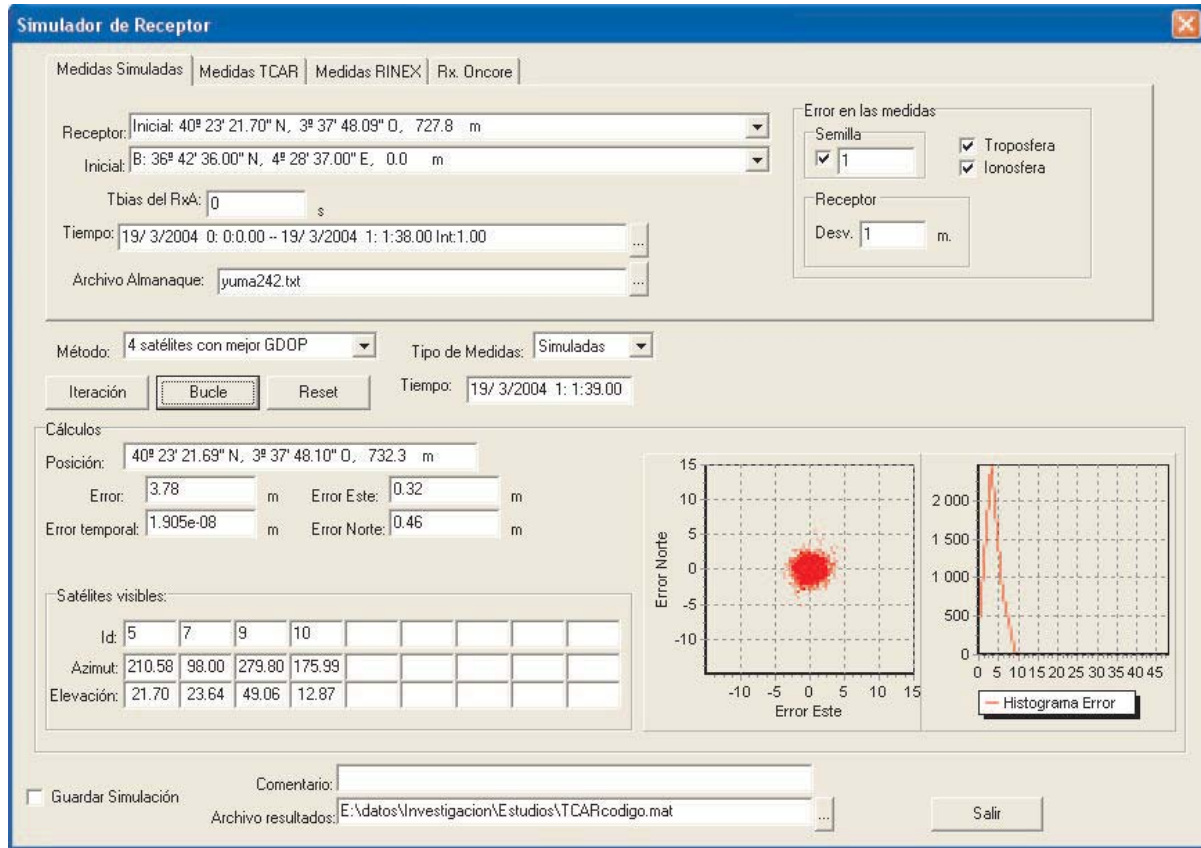


Figura 4.5: Pantalla del simulador de receptor.

Implementación

La implementación del simulador de receptor se basa en la clase *CCalPos*. En la figura 4.6 se ha representado en UML dicha clase y su relación con otras clases que utiliza, la clase *CEfemeride*, mencionada en el trazador de órbitas, la clase *CRinexFile* que se encarga de la problemática de lectura de archivos de medidas en formato RINEX y la clase *CIsiFile* que hace lo propio con las medidas en formato TCAR. La clase *CNoise* se utiliza para generar las medidas simuladas, cada satélite tendrá un objeto de dicha clase. El método *NuevaPos* efectúa un cálculo completo para el instante t especificado y devuelve en pos , la posición calculada.

La figura 4.7 presenta un ejemplo de un archivo de medidas en formato RINEX. La cabecera del archivo indica, entre otras cosas, en el campo *TYPES OF OBSERV*, el tipo de medidas que contiene. El archivo de la figura contiene cuatro tipos de medidas, dos de fase, a las frecuencias L1 y L2 y dos de pseudodistancia, una usando el código C/A (C1) y otra usando el código P(Y) (P1). Para cada época, el archivo guarda en una línea el instante de tiempo y el número de satélites utilizados con sus

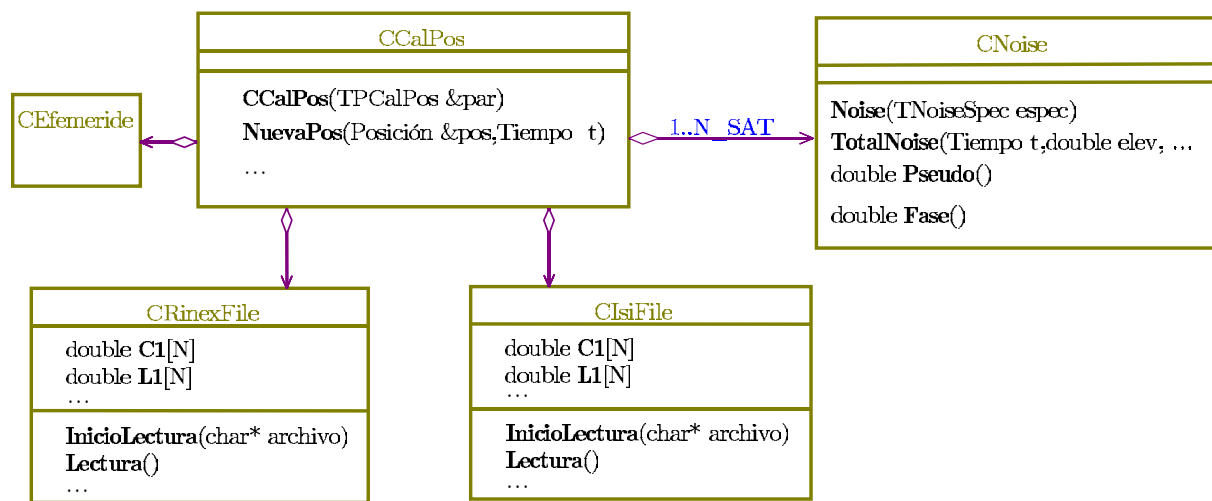


Figura 4.6: Diagrama UML del simulador de receptor.

```

2.10      OBSERVATION DATA      G (GPS)      RINEX VERSION / TYPE
teqc 2001May8      ICC      20040413 07:30:21UTCPGM / RUN BY / DATE
PLAN
13442M001      MARKER NAME
ICC      MARKER NUMBER
02724      ICC      OBSERVER / AGENCY
0220143801      TRIMBLE 4000SSI      7.29 / 3.07      REC # / TYPE / VERS
4787329.0600      166085.6500      4197602.4900      NONE      ANT # / TYPE
0.0540      0.0000      0.0000      APPROX POSITION XYZ
1 1      ANTENNA: DELTA H/E/N
4 L1 L2 C1 P1      WAVELENGTH FACT L1/2
1.0000      # / TYPES OF OBSERV
2004 4 13 6 0 0.0000000 0 8G GPS      INTERVAL
TIME OF FIRST OBS
END OF HEADER

04 4 13 6 0 0.0000000 0 8G 1G17G10G30G21G16G25G 6
2313324.436 2 25184388.271
17557249.04544 6396984.11645 23697899.7314 23697903.3774
1781452.52041 832230.07545 24850293.1614 24850297.8384
25558809.43046 20303677.58446 21885227.9284 21885231.2574
-6082840.33146 -4143208.94646 21706641.1654 21706643.0174
-949139.35545 -695290.55845 23403301.7784 23403304.4274
1153668.06847 1901247.82846 21268938.6814 21268940.6504
19124229.90846 14975126.60346 21377913.6594 21377915.6524
04 4 13 6 0 1.0000000 0 8G 1G17G10G30G21G16G25G 6
2315283.893 2 25184760.743
17561640.39845 6400405.94445 23698735.5834 23698742.4294
1782990.63041 833428.59245 24850585.8334 24850590.7444
25563393.79546 20307249.81746 21886099.9024 21886103.1954
-6083134.75746 -4143438.36846 21706584.9964 21706586.8254
-949868.98945 -695859.11245 23403162.6344 23403164.8494
1156269.65147 1903275.03446 21269433.9054 21269435.8514
19128175.07546 14978200.75746 21378664.0204 21378665.9544
...

```

Figura 4.7: Ejemplo de archivo de medidas en formato RINEX.

identificadores (*8G 1G17G10G30G21G16G25G 6*). A continuación, acompañan tantas líneas como satélites y en cada una de ellas las medidas correspondientes a los cuatro tipos de medidas mencionados.

4.1.3. Dispersión de la precisión

Fundamentos teóricos

El simulador de dispersión de la precisión presenta valores y gráficas relacionadas con los parámetros DOP (véase sección 1.3.3). Para cada instante de tiempo especificado, el simulador calcula la geometría particular existente entre los satélites y el receptor y determina con las ecuaciones 1.22-1.26 los distintos parámetros DOP: GDOP, HDOP, VDOP, PDOP y TDOP. Por otro lado, obtiene y pinta gráficas de las funciones de densidad de probabilidad (PDF) del error vertical y horizontal en el cálculo de la posición del receptor. A continuación se describe cómo se calculan las PDF del error vertical y horizontal.

error vertical

Los parámetros DOP permiten expresar el error en la posición calculada del receptor como producto de dos cantidades, una que tiene que ver con la geometría particular, el parámetro DOP, y otra con el error en las medidas de pseudodistancia. Por ejemplo, la desviación del error vertical σ_z , se puede expresar, teniendo en cuenta la ecuación 1.25 como

$$\sigma_z = VDOP \sigma_c \quad (4.2)$$

El histograma de los valores calculados del parámetro VDOP es una estimación de la PDF f_{VDOP} de dicho parámetro. Asumiendo que el error en las medidas de pseudodistancia tiene una PDF gaussiana f_c , de media nula y desviación σ_c , se puede determinar la PDF del error vertical f_z , como

$$\begin{aligned} f_z(z) &= \sum_v f_{VDOP}(v) f_{z/v}(z) = \sum_v f_{VDOP}(v) \frac{1}{v} f_c\left(\frac{z}{v}\right) = \\ &= \sum_v f_{VDOP}(v) \frac{1}{v} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_c} e^{-\frac{(z/v)^2}{2\sigma_c^2}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

A partir de f_z se puede obtener también la función de distribución (CDF) de z .

error horizontal

Se pueden hacer cálculos similares a los anteriores, aunque algo más complejos, para el caso del error en el plano horizontal, ejes x e y . En ese caso, en lugar de calcular la PDF f_h bidimensional del error horizontal, se calcula la PDF f_r de la distancia $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ a la posición real del receptor.

Para calcular f_r es conveniente plantear primeramente el problema para una geometría satélites-receptor fija, es decir, parámetros DOP invariables. En esas circunstancias, la covarianza del error en el plano horizontal \mathbf{Q}_h , teniendo en cuenta la ecuación 1.21, se puede expresar como

$$\mathbf{Q}_h = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \sigma_c^2 = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy}^2 \\ \sigma_{xy}^2 & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

La PDF del error horizontal f_h , dado que el error de las pseudodistancias sigue una distribución gaussiana, viene dada por

$$f_h(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\mathbf{Q}_h|}} e^{(-\frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{Q}_h^{-1}\mathbf{u})} \quad (4.5)$$

donde $\mathbf{u} = [x \ y]^T$. Si se expresa f_h en coordenadas polares, con $\mathbf{u} = [r \cos \phi \ r \ sen \phi]^T$, se puede estimar la PDF f_r como

$$f_r(r) = \sum_{\phi=0}^{2\pi} f_h(r, \phi) r \Delta\phi \Delta r \quad (4.6)$$

es decir, estimar f_r , para cada valor de r , como el volumen que define f_h y un aro de radio r y grosor Δr .

Una vez planteado el cálculo de f_r para el caso de geometría fija, se puede plantear para el caso de geometría variable. En esas circunstancias, una aproximación de f_h es la que resulta de promediar los valores que tomaría f_h para cada geometría distinta, es decir,

$$f_h(r, \phi) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_{h_i}(r, \phi) \quad (4.7)$$

donde f_{h_i} es la PDF correspondiente a la geometría particular i . De esta forma, el valor de f_r , cuando la geometría cambia, se estima como

$$f_r(r) = \frac{1}{N} \sum_{\phi=0}^{2\pi} \sum_{i=1}^N f_{h_i}(r, \phi) r \Delta\phi \Delta r \quad (4.8)$$

a partir de la cual se puede obtener la CDF correspondiente.

Funcionamiento

El simulador de dispersión de la precisión presenta, para cada instante de tiempo especificado, el valor del parámetro DOP elegido. Los parámetros de entrada son

- Posición del receptor.
- Especificación temporal. Tiempo inicio, intervalo y fin de la simulación.
- Tipo de DOP a calcular: GDOP, PDOP, HDOP, VDOP ó TDOP.
- Archivo de efeméride o almanaque de los satélites.
- Criterio de selección de los satélites.
- Desviación del error de las medidas.

Los resultados que ofrece la simulación son

- Número de satélites visibles (numérico y gráfico).
- Valor del DOP elegido (numérico y gráfico).

y al término de la simulación

- Histograma del DOP elegido.
- Gráfica de la PDF del error vertical si se ha elegido el parámetro VDOP o del error horizontal si se ha elegido el parámetro HDOP.
- Gráfica de la CDF del error vertical si se ha elegido el parámetro VDOP o del error horizontal si se ha elegido el parámetro HDOP.

Todos los resultados pueden ser volcados en archivos en formato Matlab.

El criterio de elección de los satélites puede ser uno de entre tres posibles. Los cuatro satélites que tenga mejor GDOP, cuatro cualesquiera y todos los visibles. Esta selección permite, con las simulaciones, valorar la importancia de la buena selección de los satélites a utilizar en el cálculo de la posición del receptor. La figura 4.8 presenta un ejemplo del aspecto que presenta el simulador de dispersión de la precisión.

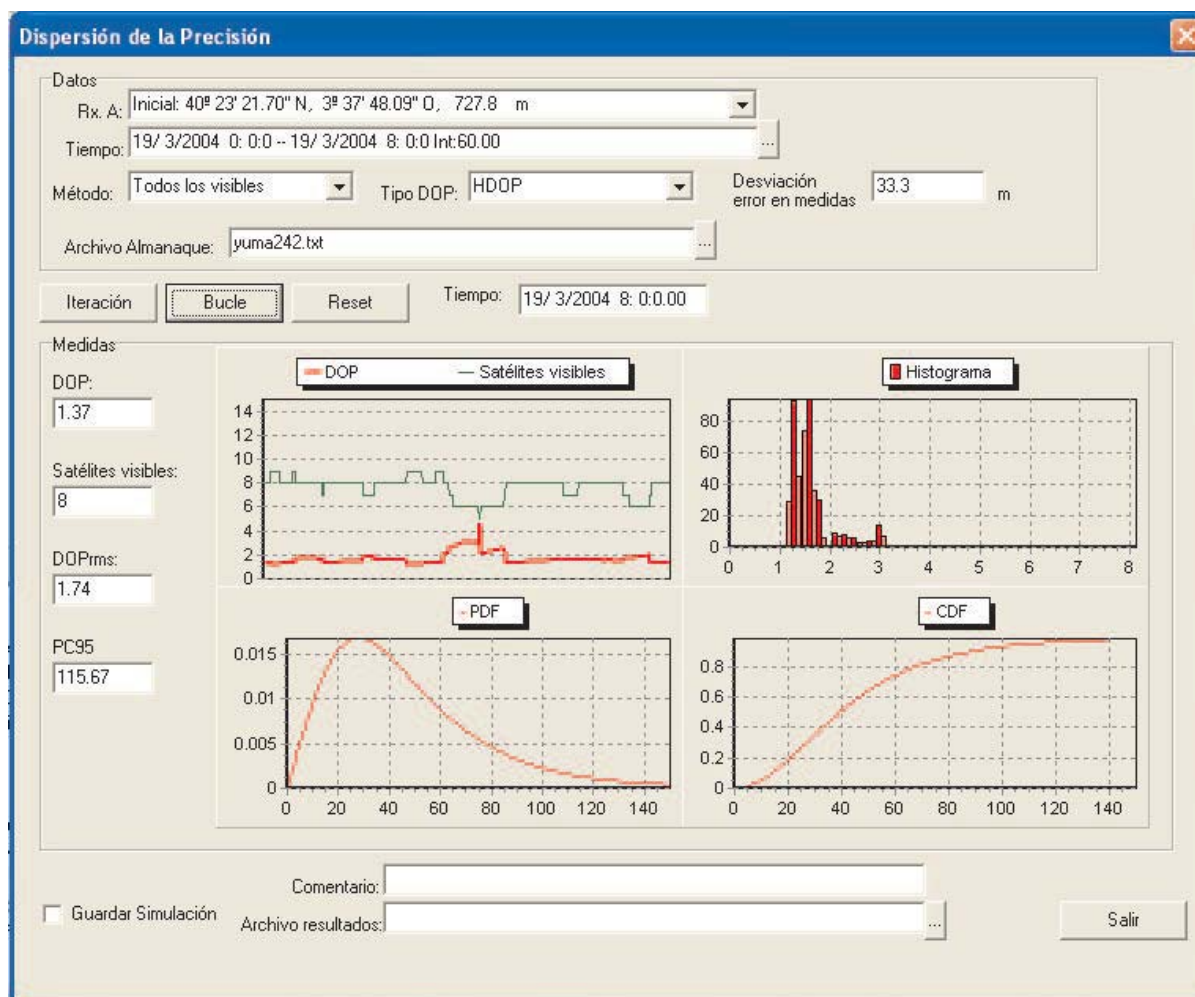


Figura 4.8: Pantalla del simulador de dispersión de la precisión.

Implementación

La implementación del simulador de dispersión de la precisión se basa en la clase *CCalDOP*. En la figura 4.9 se ha representado un objeto de dicha clase, que contiene un objeto de la clase *CEfemeride*. El método *NuevoDOP* devuelve el valor del DOP elegido en el instante especificado. El método *DOPFinal*, al que se llama al término de la simulación, devuelve el histograma del DOP elegido y las gráficas de PDF y CDF.

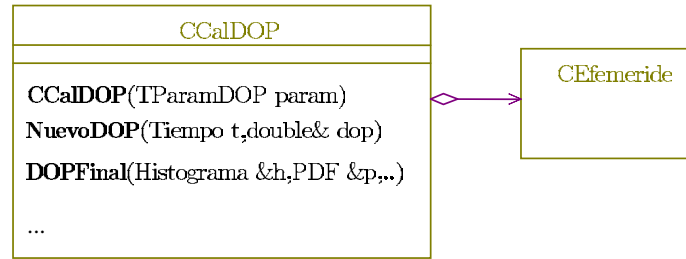


Figura 4.9: Diagrama UML del simulador de dispersión de la precisión.

4.2. Simulación de métodos de resolución de la ambigüedad de fase

Fundamentos teóricos

La simulación de métodos de resolución de la ambigüedad de fase permite analizar el comportamiento y evaluar las prestaciones de varios de los métodos de resolución de la ambigüedad descritos. Los métodos que se pueden simular son el ARCE, el LAMBDA, el Nulo, descritos en el capítulo 2 y los dos propuestos, el Nulo3 y el MOCA, descritos en el capítulo 3.

El simulador puede trabajar con medidas de archivos en formatos TCAR o RINEX, o con medidas simuladas. Los archivos de medidas TCAR se describen en la sección 4.3.1 y los archivos en formato RINEX se han comentado en las secciones 4.1.1 y 4.1.2.

En el caso de trabajar con medidas simuladas es necesario simular tanto las medidas de pseudodistancia como las de fase. Las medidas de pseudodistancia se simulan de igual forma a como se hace en el simulador de receptor. Las medidas de fase se simulan de manera parecida, pues las fuentes de error son las mismas, es decir, a partir de la ecuación 1.7, que ahora se particulariza como

$$\phi = d + n - \alpha_{iono} + \beta_{tropo} + v_r \quad (4.9)$$

En la primera medida que se simule, una vez calculada la distancia satélite-receptor d y expresada en ciclos, la parte fraccional será la medida de fase libre de error, y la parte entera la ambigüedad n . Las fuentes de error debidas a la Ionosfera α_{iono} y a la Troposfera β_{tropo} se modelan de igual forma que en el caso de las medidas de pseudodistancia, aunque se expresan en ciclos de portadora y además ahora el efecto de la Ionosfera tiene signo opuesto. El error debido al ruido del receptor v_r también se modela como un ruido gaussiano blanco, pero en este caso su desviación es mucho menor. El error debido al

multicamino v_{mu} tampoco se simula. La fuente de error debida a la deriva del reloj del receptor no se considera, puesto que las medidas de fase se utilizan en dobles diferencias, con lo que todas las derivas de los relojes se anulan.

Dado que los métodos de resolución de la ambigüedad trabajan con medidas en dobles diferencias, combinando medidas de dos receptores A y B y dos satélites i y j, las medidas se simulan directamente en formato dobles diferencias, es decir, la medida de pseudodistancia en dobles diferencias se modela como

$$\rho_{AB}^{ij} = d_{AB}^{ij} + w_{AB}^{ij} + \alpha_{AB}^{ij} + \beta_{AB}^{ij} \quad (4.10)$$

y la de fase

$$\phi_{AB}^{ij} = d_{AB}^{ij} + n_{AB}^{ij} + v_{AB}^{ij} - \alpha_{AB}^{ij} + \beta_{AB}^{ij} \quad (4.11)$$

Obsérvese que no se ha considerado nulo el error remanente de la Ionosfera α_{AB}^{ij} y de la Troposfera β_{AB}^{ij} , como se hizo en la sección 1.3.5. En cualquier caso, si los receptores están próximos serán valores casi despreciables.

Funcionamiento

Teniendo en cuenta el método elegido, con sus parámetros y la especificación de tiempo, el simulador, de manera iterativa, va ofreciendo para cada instante de tiempo los candidatos a la ambigüedad explorados y el elegido como solución. Los parámetros de entrada de la simulación son

- Posición real del receptor fijo y del receptor móvil.
- Especificación temporal. Tiempo inicio, intervalo y fin de la simulación.
- Número de satélites, número de épocas y frecuencias a utilizar.
- Método a simular.
- Parámetros específicos del método.
- Tipo de medidas.
- Parámetros de las medidas elegidas.

La posición real del receptor móvil cuando se trabaje con medidas TCAR se lee de un archivo donde viene especificada, como se ve en la sección 4.3.1. En otro caso, se asume que el receptor móvil no se mueve y permanece fijo en su posición original.

Los parámetros número de satélites, número de épocas y frecuencias hacen referencia a la cantidad de medidas que habrá disponibles para el cálculo. Si, por ejemplo, se especifica 4 satélites, 2 épocas y 1 frecuencia, entonces las medidas de 4 satélites, correspondientes a 2 épocas, se combinan formando 6 medidas en dobles diferencias, tanto de fase como de pseudodistancia. Las frecuencias que se pueden elegir, que pueden ser desde 1 hasta 3, son las correspondientes al GPS, L1, L2 y L5, al Galileo, E5a, E5b y E1-L1-E2 o a las utilizadas en las medidas en formato TCAR (Emulador del Galileo), L1, L2 y G24. Conviene señalar que el hecho de utilizar unas frecuencias correspondientes a un sistema u otro no implica que las órbitas de los satélites sean las correspondientes al sistema elegido. Las órbitas de los satélites vienen determinadas por los parámetros orbitales del archivo efeméride o almanaque especificado.

Los parámetros específicos de cada método son:

■ **Método ARCE.**

- Ventanas de variación de cada una de las coordenadas de la ambigüedad.

■ **Método LAMBDA.**

- Valor E_m de candidatos que han de estar dentro del espacio de búsqueda.
- Posibilidad de decorrelacionar o no las ambigüedades.

■ **Método Nulo.**

- Nivel de confianza aceptado para el cálculo estadístico de $\Omega_{\text{máx}}$.
- Posibilidad de cálculo del punto inicial mediante la técnica *wide-lane* (en cuyo caso dejará de ser el método Nulo)
- Posibilidad de ordenar o no las coordenadas.

Y si se quiere fijar de forma manual:

- Factor oblicuo γ .
- Radio hiper-esfera r .
- Valor máximo del residuo cuadrático $\Omega_{\text{máx}}$.

■ **Método Nulo3.**

- Cálculo del punto inicial usando o no la técnica *wide-lane*.
- Posibilidad de ordenar o no las coordenadas.

Y si se quiere fijar de forma manual:

- Radio hiper-esfera r .

■ **Método MOCA.**

- Procedimiento de cálculo de $\Omega_{\text{máx}}$: cálculo estadístico, cálculo estadístico y residuo del punto inicial o para garantizar E_m candidatos.
- Procedimiento de cálculo del volumen del espacio de búsqueda: hiper-paralelepípedo o hiper-cilindro inclinado.
- Nivel de confianza aceptado para el cálculo estadístico de $\Omega_{\text{máx}}$.
- Cálculo de la estimación inicial de la ambigüedad usando o no la técnica *wide-lane*.

- Posibilidad de ordenar o no las coordenadas.
- Y si se quiere fijar de forma manual:
- Radio hiper-esfera r .
 - Valor máximo del residuo cuadrático $\Omega_{\text{máx}}$.

En el caso de que se utilicen medidas procedentes de archivos, medidas TCAR o medidas RINEX, hay que especificar un archivo para cada receptor y el archivo de efeméride o almanaque que le corresponda. Para el caso particular de medidas TCAR, los archivos de medidas tienen extensión ISI y además hay que especificar un archivo con las posiciones del receptor móvil, que tiene extensión DUMP. Si se utilizan medidas simuladas hay que especificar las características del error en las medidas, que son

- Inclusión o no de error ionosférico.
- Inclusión o no de error troposférico.
- Desviación del ruido gaussiano w que afecta a las medidas de pseudodistancia.
- Desviación del ruido gaussiano v que afecta a las medidas de fase.

Para cada época el simulador proporciona

- Posición del receptor móvil aproximada, obtenida con las medidas de pseudodistancia.
- Vector de enteros solución a la ambigüedad con su residuo.

Además, de manera iterativa, se van presentando todos los candidatos que se van explorando junto con los residuos que les corresponden. Una vez finalizado el proceso de exploración se presenta

- El candidato elegido como solución.
- La posición final calculada con dicha solución y el error cometido.

Si aún no se ha llegado al final de la simulación se procede con la siguiente época.

Todos los resultados pueden ser volcados en archivos en formato Matlab, para su uso en otras aplicaciones. En la figura 4.10 se presenta un diagrama que explica el modo de funcionamiento del simulador y en la figura 4.11, un ejemplo del aspecto del interfaz de usuario. El simulador también permite la posibilidad de definir un conjunto de simulaciones, en las que alguno de los parámetros varíe secuencialmente desde un valor mínimo a un valor máximo, y se ejecuten externamente a la aplicación. Por ejemplo, es posible

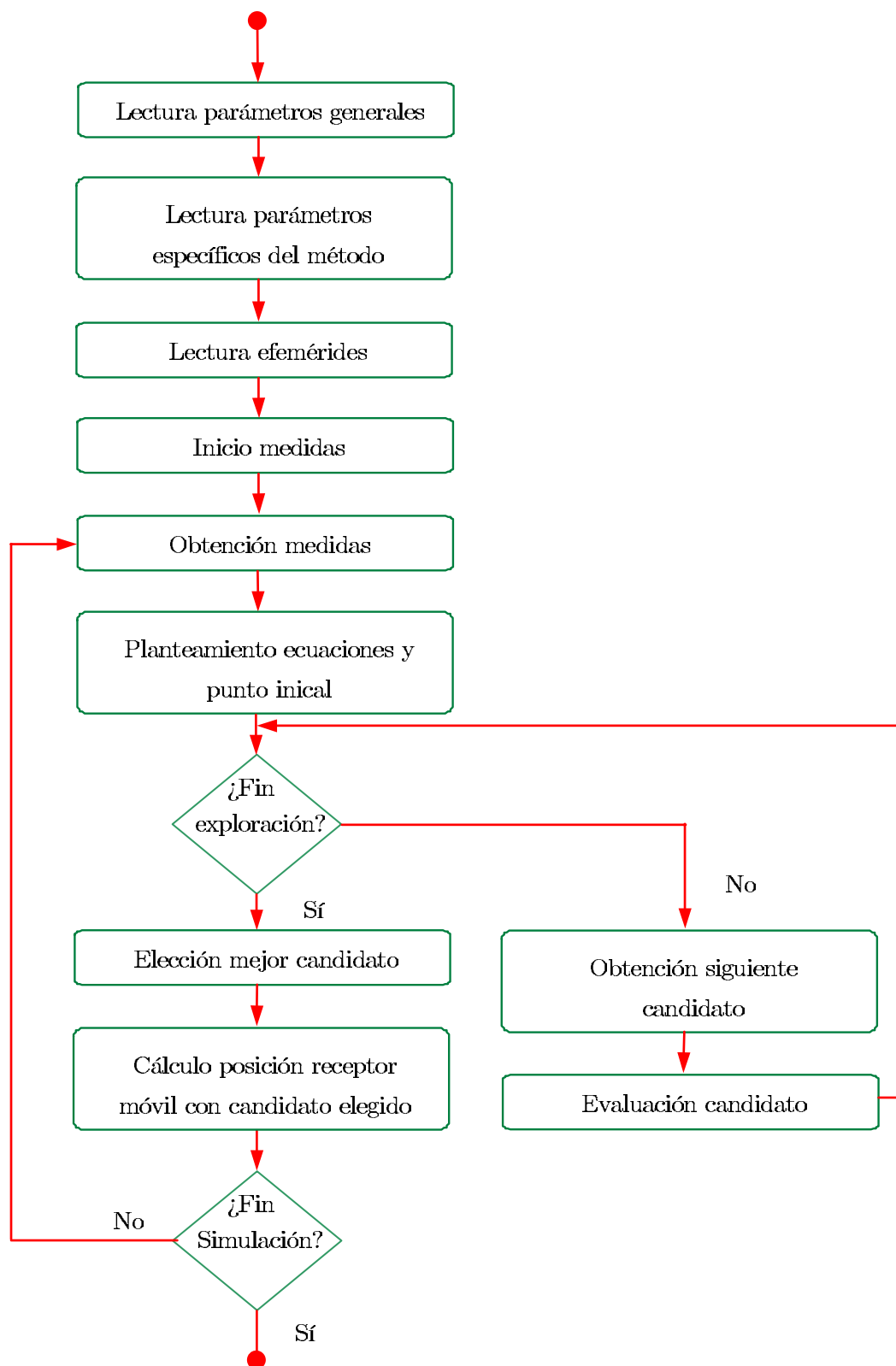


Figura 4.10: Diagrama funcional del simulador de métodos de resolución de la ambigüedad de fase.

Figura 4.11: Pantalla del simulador de métodos de resolución de la ambigüedad.

configurar el conjunto de simulaciones correspondiente al método LAMBDA, el método Nulo3 y el método MOCA, con sus correspondientes parámetros, para situaciones de error en las medidas de fase de 1 mm hasta 10 mm, y en las medidas de pseudodistancia con errores entre 1 m y 2 m.

Implementación

La implementación del simulador se basa en la clase *CMetodoBasico* que realiza todo el procesado común a todos los métodos. Los distintos métodos se implementan mediante clases específicas que heredan de *CMetodoBasico*. La figura 4.12 presenta un diagrama UML, donde se relacionan las clases implicadas.

La problemática de lectura de archivos de medidas TCAR se resuelve con un objeto de la clase *CTcar*, que contiene dos objetos *CIsiFile*, cada uno se ocupa del archivo de

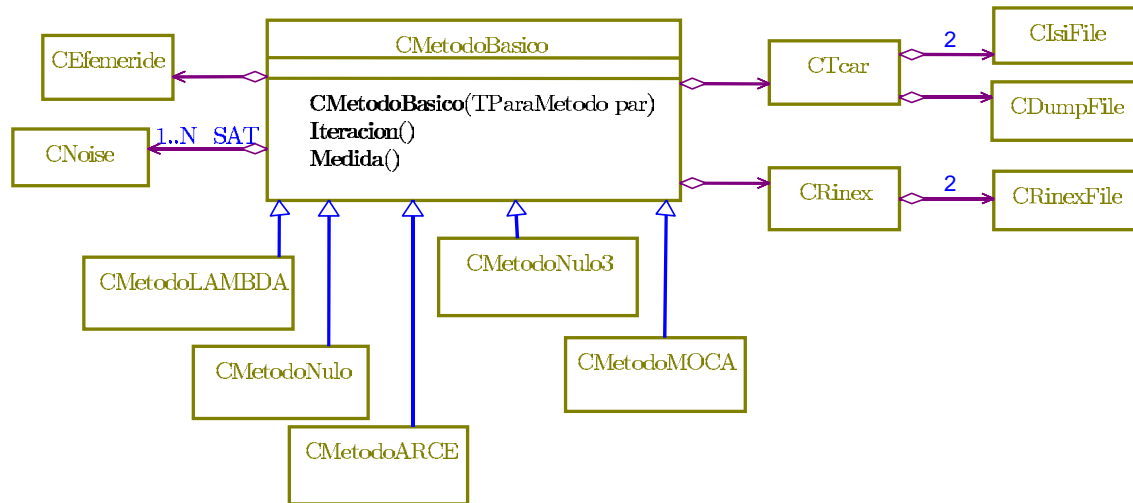


Figura 4.12: Diagrama UML del simulador de métodos resolución de la ambigüedad.

medidas de un receptor, y un objeto de la clase *CDumpFile*, que se ocupa del archivo de posiciones del receptor móvil.

La lectura de archivos de medidas en formato RINEX se resuelve con un objeto de la clase *CRinex*, que contiene dos objetos de la clase *CRinexFile*, ocupándose cada uno del archivo de medidas de un receptor.

4.3. Validación del simulador

Con objeto de validar el simulador desarrollado es necesario contrastar su funcionamiento y los resultados que ofrece con los de equipos reales o los de otros simuladores. Para ello, en una primera fase se comparó el funcionamiento del simulador de receptor con el de un receptor real, el GT-Oncore de Motorola. Dicho receptor, preparado para el GPS, sólo puede trabajar con medidas de pseudodistancia (no con medidas de fase). Por tanto, la primera fase sirvió para hacer una primera validación del simulador de receptor y el trazador de órbitas. En una segunda fase, se comparó las medidas que ofrece el simulador, tanto de pseudodistancia como de fase, con las de un emulador del sistema Galileo [Roy00]. Esta segunda fase, más completa, se describe en esta sección. Para ello, primeramente se describen las medidas del emulador del sistema Galileo, a las que se han denominado como medidas del TCAR TIM, y a continuación se hace la comparativa de estas medidas con las del simulador.

4.3.1. Medidas del TCAR TIM

La segunda reunión sobre técnicas de resolución de la ambigüedad con tres portadoras (*2nd Technical Interchange Meeting on Three Carrier Ambiguity Resolution methods*, 2^o TCAR TIM) tuvo lugar en el centro ESTEC de la Agencia Espacial Europea (ESA) en Febrero de 2001. El objetivo de la reunión era poner en común propuestas, ideas y experimentos de investigadores europeos, de cara a las nuevas posibilidades que va a ofrecer el futuro sistema Galileo. El hecho de que el sistema Galileo vaya a ofrecer medidas de fase a tres frecuencias de portadora distintas abre nuevas posibilidades a las técnicas de resolución de la ambigüedad. El 2^o TCAR TIM propuso la creación de unos archivos de medidas que permitieran comparar, en las mismas condiciones, los distintos métodos de resolución de la ambigüedad propuestos. Para dicho propósito, la ESA encargó a la empresa Spectra Precision Terrasat, la elaboración de dichas medidas, que fueron generadas con la ayuda de un emulador del futuro sistema Galileo. A continuación se describen las condiciones de la emulación y las características de los archivos de las medidas.

Condiciones de la emulación

La emulación del sistema Galileo [Roy00] se realizó con la ayuda de un emulador del GPS y del GLONASS. La emulación del GPS ofrecía medidas de dos portadoras, L1 (1575.42 MHz) y L2 (1227.6 MHz), y la emulación del GLONASS ofrecía la tercera portadora G24 (1615.5 MHz).

Las medidas se corresponden con 5 receptores fijos (Ref1 a Ref5), 2 móviles de movimiento lento (Sur1 y Sur2) y 3 de movimiento rápido (Air1 a Air3). Las distintas combinaciones de pares de receptores permiten obtener líneas de base desde 1 km hasta 130 km, y líneas de base fijas o variables lenta o rápidamente. En la figura 4.13 se dibujan las trayectorias y posiciones de todos los receptores y la tabla 4.2 presenta sus coordenadas geodésicas iniciales.

Todas las medidas generadas han sido sometidas a los efectos de la Ionosfera y la Troposfera, utilizando los modelos clásicos. Así mismo, el efecto multicamino ha sido tenido en cuenta y se ofrecen medidas sometidas a dicho efecto y libres de dicho efecto. Por otro lado, hay disponibles archivos de medidas correspondientes a 5 niveles de relación señal a ruido distintas (SNR), con 2 decibelios de separación entre cada uno de ellos. De esta forma, el nivel 5 tiene 8 decibelios más de SNR que el nivel 1.

Las medidas se corresponden a las épocas transcurridas el 2 de Marzo de 2000, entre las 2 y las 2:20. El intervalo entre época y época es de un segundo. Tan sólo hay disponibles medidas correspondientes a 4 satélites, cuyos parámetros orbitales son los de la tabla 4.3. El resto de parámetros que no figuran son nulos.

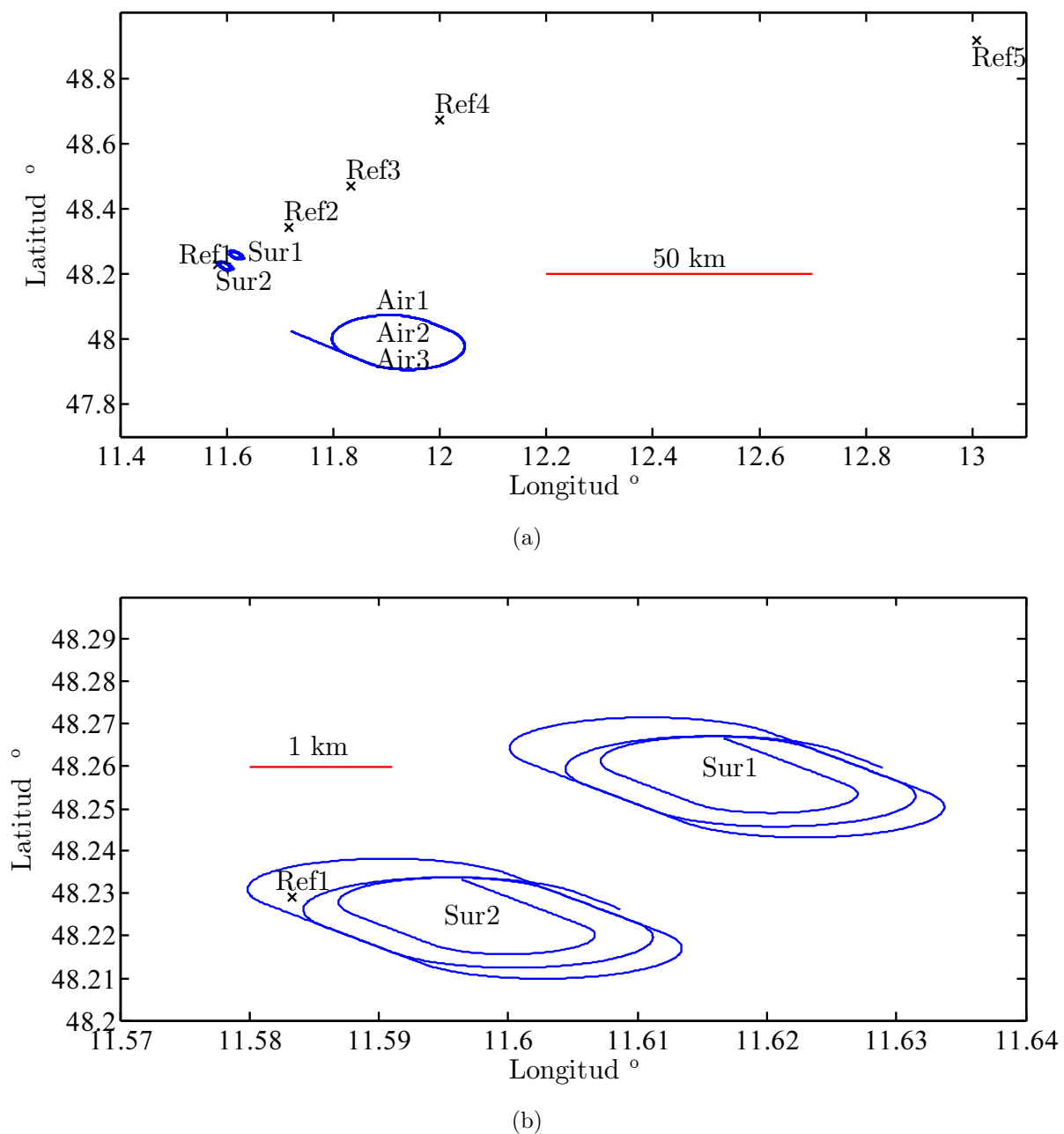


Figura 4.13: Recorrido de los receptores.

Receptor	Latitud	Longitud	Altura (m)
Ref1	48° 13' 45"N	11° 35' 00"	150
Ref2	48° 20' 30"N	11° 43' 00"	150
Ref3	48° 28' 10"N	11° 50' 00"	150
Ref4	48° 40' 23"N	12° 00' 00"	150
Ref5	48° 55' 00"N	13° 00' 30"	150
Sur1	48° 16' 00"N	11° 37' 00"	250
Sur2	48° 14' 00"N	11° 35' 47"	250
Air1	48° 01' 25"N	11° 43' 15"	650
Air2	48° 01' 25"N	11° 43' 15"	1150
Air3	48° 01' 25"N	11° 43' 15"	2150

Tabla 4.2: Coordenadas de los receptores del TCAR TIM [Roy00]

Identificador satélite	t_{0e}		i_0	\sqrt{a}	Ω_0	M_0
	semana	segundo				
2	1053	443000	54°	5439.618	0°	36°
4	1053	443000	54°	5439.618	0°	108°
5	1053	443000	54°	5439.618	0°	144°
26	1053	443000	54°	5439.618	240°	204°

Tabla 4.3: Parámetros orbitales de los 4 satélites del TCAR TIM [Roy00]

Cada archivo contiene medidas correspondientes a las tres frecuencias, L1, L2 y G24, y moduladas con códigos C/A y P(Y). La tabla 4.4 resume todos los posibles archivos de medidas disponibles. Para cada combinación de parámetros de la tabla habrá un archivo de medidas.

Preprocesado de las medidas

Los archivos de medidas proporcionados por el 2° TCAR TIM requieren cierto preprocesado [Zsal00] antes de poder ser utilizados. En la figura 4.14 se presenta el aspecto de un archivo de medidas típico (*.ISI). En cada época, se almacenan datos correspondientes a los 4 satélites y a las 3 frecuencias, es decir, 12 conjuntos de datos. Para cada conjunto de datos, se almacenan valores relativos a las medidas de pseudodistancia (*CodeObs*), los de la tabla 4.5 y a las medidas de fase (*CaObs*), los de la tabla 4.6.

Receptor	Nivel SNR	Multicamino
Ref1,Ref2,Ref3 Ref4,Ref5,Sur1 Sur2,Air1,Air2 o Air3	1,2,3,4 ó 5	con o sin

Tabla 4.4: Parámetros de los archivos de medidas.

Dato	Rango	Descripción
$t_{TX,s}$	[0...604799]	Tiempo de transmisión segundos desde comienzo de semana
$t_{TX,ms}$	[0...999]	milisegundos desde comienzo segundo
$CAChipCount$	[0...1022]	chips de C/A desde comienzo ms
$CACodePhase$	[0... $2^{16} - 1$]	fracción de chip de C/A
$PL1ChipCount$	[0...10229999]	chips de P(Y) desde comienzo segundo
$PL1CodePhase$	[0... $2^{16} - 1$]	fracción de chip de P(Y)

Tabla 4.5: Datos de las medidas de pseudodistancia.

Los datos de las medidas de pseudodistancia permiten calcular el tiempo de transmisión, segundos desde el inicio de la semana en curso, del código C/A, y del código P(Y), como

$$t_{TX,CA} = t_{TX,s} + \frac{t_{TX,ms}}{1000} + \frac{1}{1023000} \left(CAChipCount + \frac{CACodePhase}{2^{16}} \right) \quad (4.12)$$

$$t_{TX,PL1} = t_{TX,s} + \frac{1}{10230000} \left(PL1ChipCount + \frac{PL1CodePhase}{2^{16}} \right) \quad (4.13)$$

con lo que la medida de pseudodistancia correspondiente se obtiene como

$$\rho = (t_{RX} - t_{TX,rel})c \quad (4.14)$$

Dado que el valor t_{RX} no es la hora actual medida por el receptor, sino los segundos transcurridos desde que se inició, la deriva del reloj del receptor t_r correspondiente es muy elevada, pero se calcula igualmente como se describe en la sección 1.3.2.

Las medidas de pseudodistancia que se obtienen tienen, a veces, tal como se documenta en [Roy00], saltos de 1 ms. Dado que 1 ms equivale a un error en la pseudodistancia de 299792.458 m, se puede detectar y corregir comparando la medida de pseudodistancia de la medida actual con la anterior, pues la variación entre las dos será mucho menor.

Dato	Rango	Descripción
$L1CarrierPhase$	[-1536...1536]	fracción de ciclo de la portadora
$L1CarrierCycleCount$	[-2048...2047]	nº ciclos de desde la última medida
$t_{RX,rel}$	[0...604799]	Tiempo en segundos desde inicio del Rx
$NAVsign$	[0,1]	Si vale 1 hay que invertir la fase de la portadora

Tabla 4.6: Datos de las medidas de fase.

```

% -----
% File D:\EData\ref1p5m0c.isi
% ISN SW Rev. 72
% ATSS Rev. 1.4c, 11.04.2000
% -----
% Channel 0 TCAR1 PRN 2, f-Slot 25, Doppler 2548 Hz i.e. -485 m/s
% Channel 1 TCAR2 PRN 2, f-Slot 25, Doppler 1985 Hz i.e. -485 m/s
% Channel 2 TCAR3 PRN 2, f-Slot 24, Doppler 2613 Hz i.e. -485 m/s
% Channel 3 TCAR1 PRN 4, f-Slot 25, Doppler -1051 Hz i.e. 200 m/s
% Channel 4 TCAR2 PRN 4, f-Slot 25, Doppler -818 Hz i.e. 200 m/s
% Channel 5 TCAR3 PRN 4, f-Slot 24, Doppler -1077 Hz i.e. 200 m/s
% Channel 6 TCAR1 PRN 5, f-Slot 25, Doppler -2511 Hz i.e. 478 m/s
% Channel 7 TCAR2 PRN 5, f-Slot 25, Doppler -1957 Hz i.e. 478 m/s
% Channel 8 TCAR3 PRN 5, f-Slot 24, Doppler -2575 Hz i.e. 478 m/s
% Channel 9 TCAR1 PRN 26, f-Slot 25, Doppler -2769 Hz i.e. 527 m/s
% Channel 10 TCAR2 PRN 26, f-Slot 25, Doppler -2157 Hz i.e. 527 m/s
% Channel 11 TCAR3 PRN 26, f-Slot 24, Doppler -2839 Hz i.e. 527 m/s
% Channel 12 GPS PRN 1, f-Slot 0, Doppler 0 Hz i.e. 0 m/s
% Channel 13 GPS PRN 1, f-Slot 0, Doppler 0 Hz i.e. 0 m/s
% Channel 14 GPS PRN 1, f-Slot 0, Doppler 0 Hz i.e. 0 m/s
% -----
% Heading 1 (CodeObs) Chn Trk-State t(TX)-sec t(TX)-ms CA-CodePh CA-CycCnt P1-CodePh P2-CodePh P1-CycCnt P1P2-CDif
% Heading 2 (CaObs) Chn L1-CarrPh L2-CarrPh L1-CycCnt L2-CycCnt t(RX)-sec CA-CNRmdb P1-CNRmdb P2-CNRmdb CA-NAVSig
% Heading 3 (CorrVals) Chn CA-CorrAI CA-CorrAQ CA-CorrBI CA-CorrBQ L1-CorrAI L1-CorrAQ L1-CorrBI L1-CorrBQ L2-CorrAI L2-
CorrAQ L2-CorrBI L2-CorrBQ Trk-State
% Heading 4 (NAV L1) Chn NAV-Data-Sequence
% Heading 5 (NAV L2) Chn NAV-Data-Sequence
% Heading 6 (QuickView) Chn
% -----
% Begin 06-29-2000, 17:16:52 (MM-DD-YYYY, hh:mm:ss)
% -----
% MEO-Cnt Data-Type Chn Data
% -----
1 1 (CodeObs) 0 15 439240 860 29769 819 32768 32768 1940070 10
1 1 (CodeObs) 1 15 439240 860 29110 819 32768 32768 1649846 10
1 1 (CodeObs) 2 15 439240 860 29507 819 32768 32768 563266 10
1 1 (CodeObs) 3 15 439240 869 10566 667 32768 32768 4924088 10
1 1 (CodeObs) 4 15 439240 869 10433 667 0 0 1086347 10
1 1 (CodeObs) 5 15 439240 869 10738 667 0 0 108393 10
1 1 (CodeObs) 6 15 439240 860 7414 427 0 0 1754744 10
1 1 (CodeObs) 7 15 439240 860 7017 427 0 0 2009210 10
1 1 (CodeObs) 8 15 439240 860 7063 427 32768 32768 4045654 10
1 1 (CodeObs) 9 15 439240 862 5953 942 32768 32768 1675413 10
1 1 (CodeObs) 10 15 439240 862 5743 942 32768 32768 1919482 10
1 1 (CodeObs) 11 15 439240 862 6067 942 32768 32768 4984550 10
1 2 (CaObs) 0 -410 0 344 0 8010 43921 0 0 0
1 2 (CaObs) 1 220 0 -577 0 8010 43825 0 0 0
1 2 (CaObs) 2 880 0 -109 0 8010 40048 0 0 1
1 2 (CaObs) 3 450 0 -166 0 8010 46238 0 0 1
1 2 (CaObs) 4 -1496 0 -353 0 8010 46064 0 0 1
1 2 (CaObs) 5 785 0 -1725 0 8010 42024 0 0 1
1 2 (CaObs) 6 1368 0 2017 0 8010 44004 0 0 0
1 2 (CaObs) 7 323 0 -608 0 8010 43849 0 0 1
1 2 (CaObs) 8 -1386 0 60 0 8010 40062 0 0 0
1 2 (CaObs) 9 -337 0 -390 0 8010 43075 0 0 0
1 2 (CaObs) 10 23 0 -123 0 8010 42939 0 0 0
1 2 (CaObs) 11 1375 0 1605 0 8010 39141 0 0 0
...

```

Figura 4.14: Ejemplo archivo de medidas en formato ISI.

Las medidas de fase se obtienen como

$$\phi = CCC - f_{NCO} t_M + 2^{12} N \quad (4.15)$$

con

$$CCC = L1CarrierCycleCount + \frac{L1CarrierPhase}{12 \cdot 2^8} + NAVsign \cdot 0.5 \quad (4.16)$$

donde t_M son los segundos transcurridos desde la primera medida y f_{NCO} es la frecuencia de la réplica de portadora utilizada, que para la portadora L1 vale 520000, para L2 500000 y para G24 -5700000. El hecho de que el valor de *L1CarrierCycleCount* se guarde en un registro de 12 bits, es decir, su rango sea [-2048...2047], hace que se pueda sobrepasar del rango y exista una ambigüedad, expresada como N en la ecuación 4.15. Dicha ambigüedad se resuelve con ayuda de las medidas de pseudodistancia. Por otra parte, se ha detectado que la fase ϕ obtenida de las frecuencias L1 y L2 tienen signo opuesto con respecto a la obtenida en G24, por lo que han de ser corregidas.

En [Roy00] se ha documentado la presencia de errores sistemáticos en las dobles diferencias que se obtienen a partir de la fase de la portadora G24, que dependen de los satélites y de la línea de base concreta. Dichos errores han de ser eliminados y son los que se presentan en la tabla 4.7, para cada par de receptores y para cada una de las tres medidas en dobles diferencias que se obtienen de los 4 satélites.

Además de los archivos de medidas se dispone de archivos con las posiciones del receptor móvil (*.DUMP) en cada época. La figura 4.15 es un ejemplo del aspecto que presenta un archivo de estas características.

4.3.2. Comparación de las medidas del simulador con las medidas del TCAR TIM

Con objeto de validar los resultados que se puedan obtener con el simulador desarrollado, se presenta en esa sección una comparativa de las medidas simuladas que se pueden generar con él, con las medidas del TCAR TIM. Por un lado, esta comparativa permite validar la simulación de todo el sistema, es decir, el correcto posicionamiento de satélites y receptores. Por otro lado, permite valorar el grado de realidad de los modelos utilizados para las fuentes de error de las medidas simuladas. Primeramente se hace la comparación para medidas de pseudodistancia, en formato no diferencial. Seguidamente se hace lo mismo para medidas de pseudodistancia en dobles diferencias y finalmente lo propio para medidas de fase.

Receptor 1	Receptor 2	Sat2-Sat4	Sat2-Sat5	Sat2-Sat26
Ref1	Air1	0.666	0.171	0.863
Ref1	Air2	0.633	0.515	0.698
Ref1	Air3	0.668	0.207	0.398
Ref1	Sur1	0.289	0.961	0.334
Ref1	Sur2	0.721	0.481	0.860
Ref2	Air1	0.052	0.419	0.950
Ref2	Air2	0.018	0.763	0.785
Ref2	Air3	0.054	0.454	0.476
Ref2	Sur1	0.675	0.208	0.421
Ref2	Sur2	0.106	0.729	0.947

Tabla 4.7: Errores en ciclos de las dobles diferencias de G24.

```

REAL TIME DATA FILE
*****
CG and Antenna Position/Velocity are wrt ECEF axes in ECEF coordinates.
Units are in radians/metres/seconds as appropriate.
*****
Time :          0 Secs   GPS Time : 637293600.0 Secs
CG DATA:
CG X Posn      4169682.778   CG Y Posn      855639.086   CG Z Posn      4734384.040
Latitude       0.841830   Longitude     0.202395   Height         250.000
Heading        2.617994   Elevation     0.000000   Bank           0.000000
Vel X          0.000     Vel Y         0.000     Vel Z          0.000
Vel North      0.000     Vel East      0.000     Vel Down       0.000
Body X Acc     0.000     Body Y Acc    0.000     Body Z Acc     0.000
Ang Vel X      0.0000    Ang Vel Y     0.0000    Ang Vel Z      0.0000

Data for ANTENNA: 1
Ant X Posn     4169682.778   Ant Y Posn     855639.086   Ant Z Posn     4734384.040
Ant X Vel      0.000     Ant Y Vel      0.000     Ant Z Vel      0.000
Ant X Acc      0.000     Ant Y Acc      0.000     Ant Z Acc      0.000

GPS CONSTELLATION SATELLITE DATA, DOP Value:  3.0541

CHAN:  1   Satellite Type: GPS      ID :  2 PRN:    2 Signal Type:  0
Sat X Posn   25497014.108   Sat Y Posn   -14540777.751   Sat Z Posn    3742096.909
Sat X Vel    -307.742   Sat Y Vel    215.147   Sat Z Vel     2932.823
Elevation    0.43591   Azimuth     -2.19445   Signal Level  -3.00
Tropo delay  0.188532E-07   Iono Delay   0.979110E-08   Phase Delay   0.000000E+00
Pseudo-Range 26322839.9681   Range        26322839.9688   P-R Rate      -485.7392
Pseudo-Range Err 0.0000   P-R Rate Err 0.0000
...

```

Figura 4.15: Ejemplo archivo de posiciones en formato DUMP.

Medidas de pseudodistancia

En la sección 4.1.2 se describe cómo el simulador de receptor puede configurarse para que genere medidas sometidas a distintas fuentes de error. La primera comparativa que se hace es de medidas simuladas libres de error con medidas del TCAR TIM, en las mismas condiciones. La diferencia entre ambos tipos de medidas sirve como una buena estimación del error que sufren las medidas del TCAR TIM. En el caso de que dicha diferencia sea semejante al error que se supone tienen las medidas del TCAR TIM, la simulación de todo el sistema (correcta colocación de satélites, receptores, origen de tiempos, etc.) quedará validada. La segunda comparativa que se realiza es entre la diferencia anterior, el error que sufren las medidas del TCAR TIM, y la diferencia entre medidas simuladas con y sin error, es decir, el error que sufren las medidas simuladas. Esta comparativa va a permitir valorar el grado de realidad de los modelos de error utilizados por el simulador.

Para la comparación se han utilizado las medidas del TCAR TIM correspondientes al receptor fijo *Ref1*, nivel 5 de SNR, sin multicamino (véase la tabla 4.4). En la figura 4.16 se representan las medidas de pseudodistancia que toma el receptor, de los cuatro satélites disponibles, a lo largo de las 1200 épocas, 20 minutos, que dura la simulación. Los valores que se han representado son las medidas, una vez que se ha eliminado la deriva del reloj del receptor, obtenida como siempre a partir del cálculo de la posición del receptor. En la misma gráfica se han pintado las medidas libres de error que simula el receptor, en las mismas condiciones. Dado que la magnitud de las medidas de pseudodistancia son muy elevadas en comparación con el error que sufren, no es posible distinguir las medidas TCAR de las simuladas. La figura 4.17 representa la diferencia entre las medidas TCAR y las simuladas, para las primeras 100 épocas. Como se observa, los errores no superan los 10 metros, que son valores razonables, teniendo en cuenta que las medidas sufren el efecto de la Troposfera, la Ionosfera y el ruido del receptor.

Para la siguiente comparativa se han generado medidas simuladas, con un ruido de receptor de 1 metro de desviación y con los modelos de la Troposfera y de la Ionosfera que incluye el simulador. La diferencia entre las medidas así generadas y las medidas libres de error se ha representado en la figura 4.18. Como se observa, las curvas son parecidas a las de la figura 4.17, en términos de valor máximo del error y características de variación. No obstante, el error simulado tiene una magnitud sensiblemente menor. Esto concuerda con el hecho de que los modelos que utiliza el simulador para la Troposfera y la Ionosfera, son los que utilizan los receptores para compensar dichos efectos. En general, los receptores no consiguen compensar totalmente los errores atmosféricos, pues los errores son algo mayores que los modelados.

Medidas de pseudodistancia en dobles diferencias

En esta sección se comparan las medidas en los mismos términos que en el apartado anterior, pero para pseudodistancia en dobles diferencias. Para ello, se utiliza el simulador

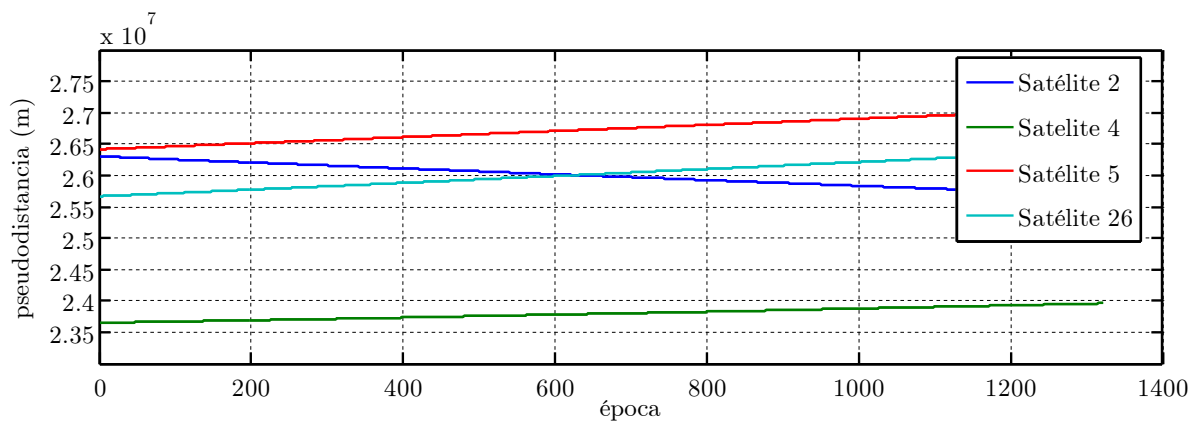


Figura 4.16: Medidas de pseudodistancia: TCAR y simuladas.

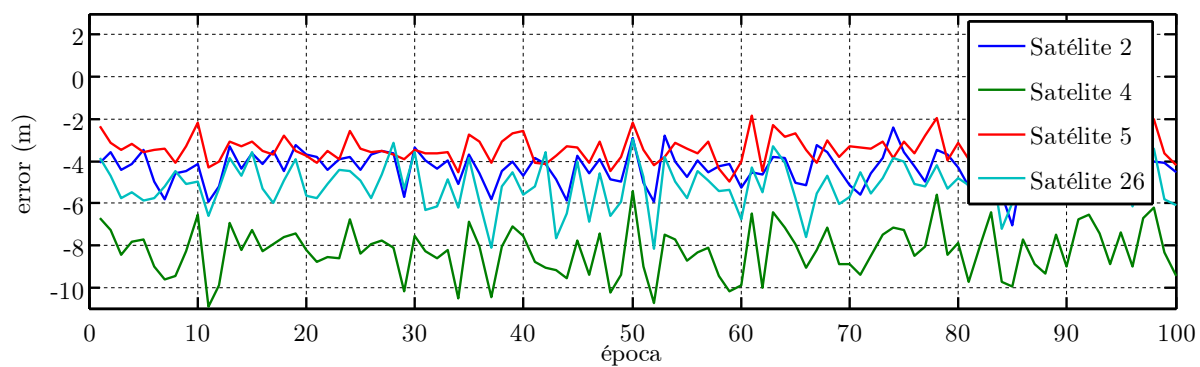


Figura 4.17: Medidas de pseudodistancia: diferencia entre TCAR y simuladas sin error.

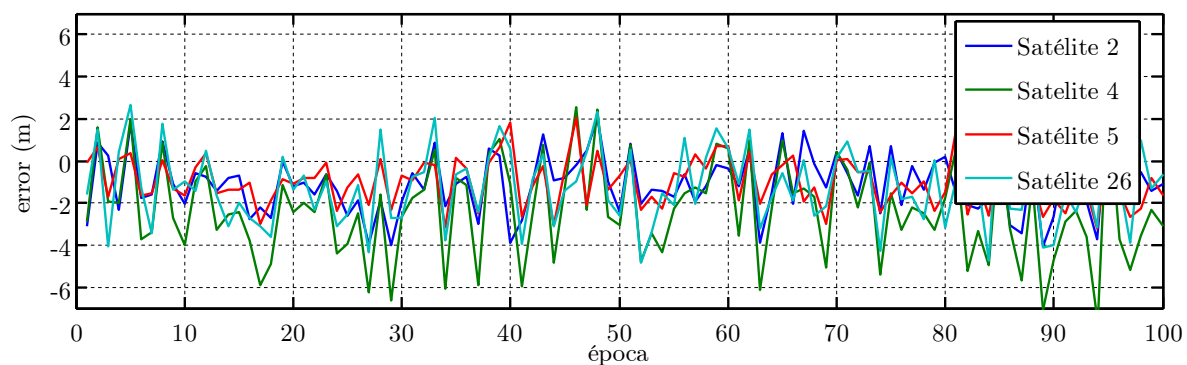


Figura 4.18: Medidas de pseudodistancia: diferencia entre simuladas con y sin error.

de métodos de resolución de la ambigüedad de fase descrito en la sección 4.2. El simulador es utilizado para que lea medidas TCAR de pseudodistancia y las convierta en formato dobles diferencias, para lo cual se eligen archivos de medidas TCAR correspondientes a dos receptores. Así mismo, se configura el simulador para que genere, en las mismas condiciones, medidas simuladas de pseudodistancia en dobles diferencias.

Los archivos elegidos son los correspondientes a los receptores Ref1 y Sur2, con un nivel 5 de SNR y libres de efecto multicamino. En la figura 4.19 se han representado, a la vez, las medidas TCAR y las medidas simuladas libres de error. Al igual que ocurre en la figura 4.16, dado que el error que sufren las medidas es mucho menor que el valor de las medidas, no es posible distinguir unas de otras. En la figura 4.20 se representa la diferencia entre unas medidas y otras. La diferencia entre las dos ha de ser semejante al error que se supone afecta a las medidas TCAR. Como se puede observar, el error toma valores entre -4 y 4 metros, que son valores típicos de error en medidas de pseudodistancia en dobles diferencias.

Al igual que en el apartado anterior se ha configurado el simulador para que genere medidas con un ruido de receptor de 1 metro y con los mismos modelos atmosféricos. En la figura 4.21 se representa la diferencia entre medidas simuladas con error y libres de error. El aspecto es similar al de la figura 4.20, si bien el error simulado tiene un poco de más magnitud. Esto se puede explicar por el hecho de que los errores atmosféricos han sido eliminados en gran medida y la fuente de error predominante es la debida al receptor, que en el caso del simulador tiene una desviación de 1m y en el de las medidas TCAR es algo menor.

Medidas de fase en dobles diferencia

Por último, se hace el mismo tipo de comparaciones, pero para medidas de fase en dobles diferencias. Los archivos de medidas TCAR elegidos son los mismos. La figura 4.22 es la diferencia, en milímetros, entre las medidas TCAR y las medidas simuladas libres de error. La figura 4.23 es la diferencia entre medidas simuladas con error y libres de error. Las medidas simuladas con error se generaron incluyendo los efectos atmosféricos y el ruido debido al receptor, que se configuró para que tuviera una desviación de 1 mm.

Como se observa, las medidas TCAR presentan errores mayores que las medidas con errores simulados. En este caso, la explicación puede deberse a los errores atmosféricos. A pesar de que la formación de medidas en dobles diferencias los eliminan en gran medida, siempre quedan errores residuales. Dichos valores residuales, en comparación con el ruido del receptor, son muy apreciables. En la figura 4.22 se observa que la componente principal de error depende de los satélites considerados y no de la frecuencia de la portadora elegida. Dado que el error ionosférico depende de la frecuencia, el error troposférico puede ser el causante. Esto concuerda con el hecho de que los receptores, a pesar de estar próximos, tienen una diferencia de altura apreciable, de más de 100 metros y el error troposférico depende fuertemente de la altura del receptor.

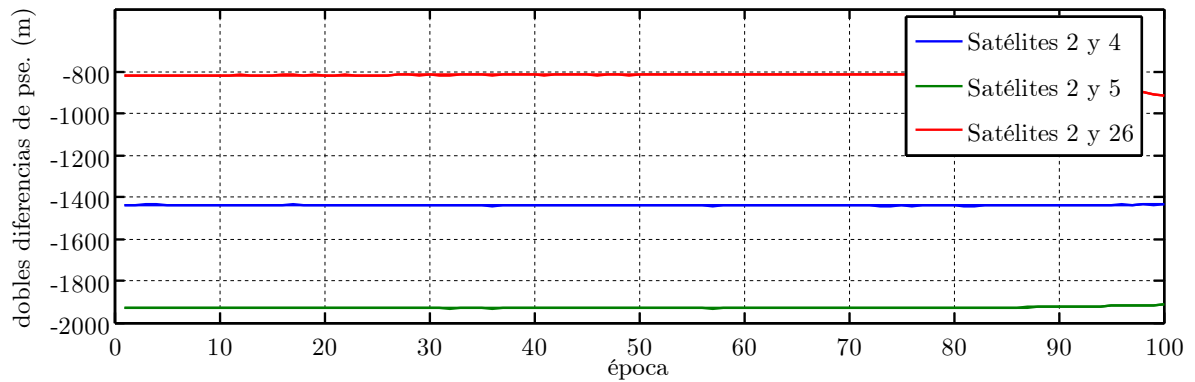


Figura 4.19: Medidas de pseudodistancia en dobles diferencias: TCAR y simuladas.

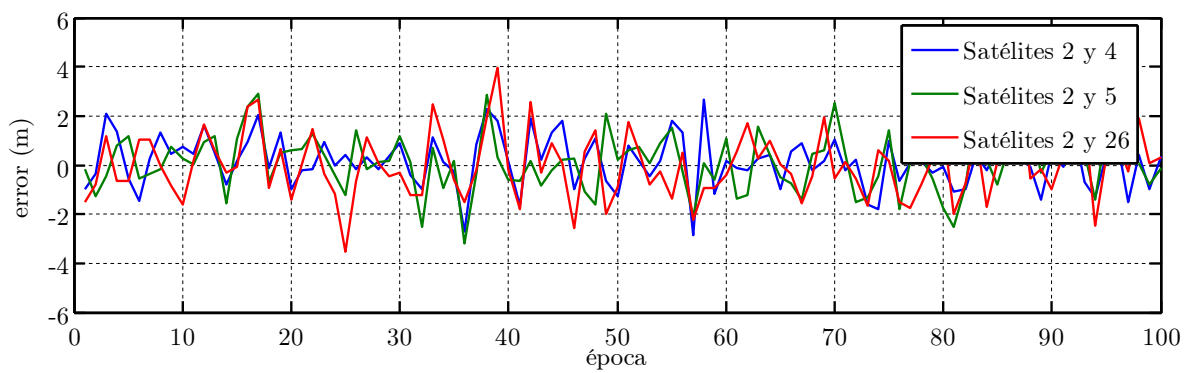


Figura 4.20: Medidas de pseudodistancia en dobles diferencias: diferencia entre TCAR y simuladas sin error.

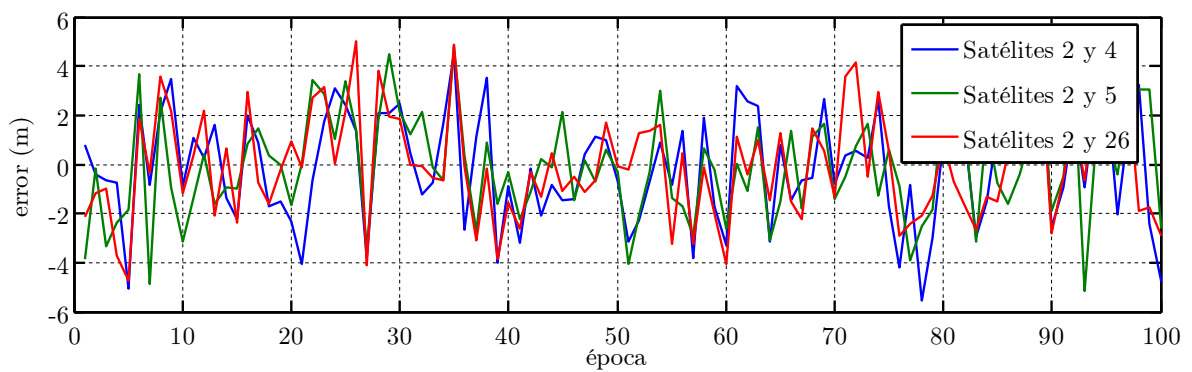


Figura 4.21: Medidas de pseudodistancia en dobles diferencias: diferencia entre simuladas con y sin error.

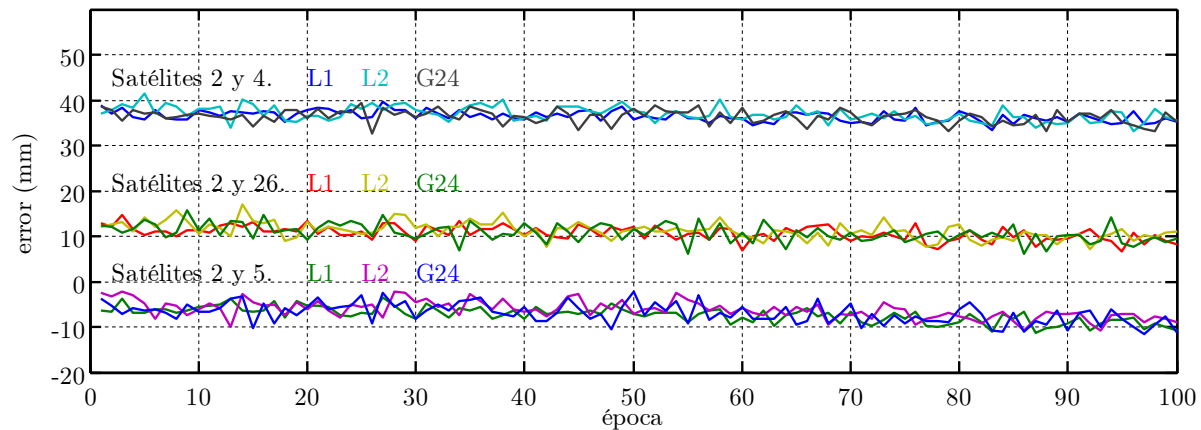


Figura 4.22: Medidas de fase en dobles diferencias: diferencia entre TCAR y simuladas sin error.

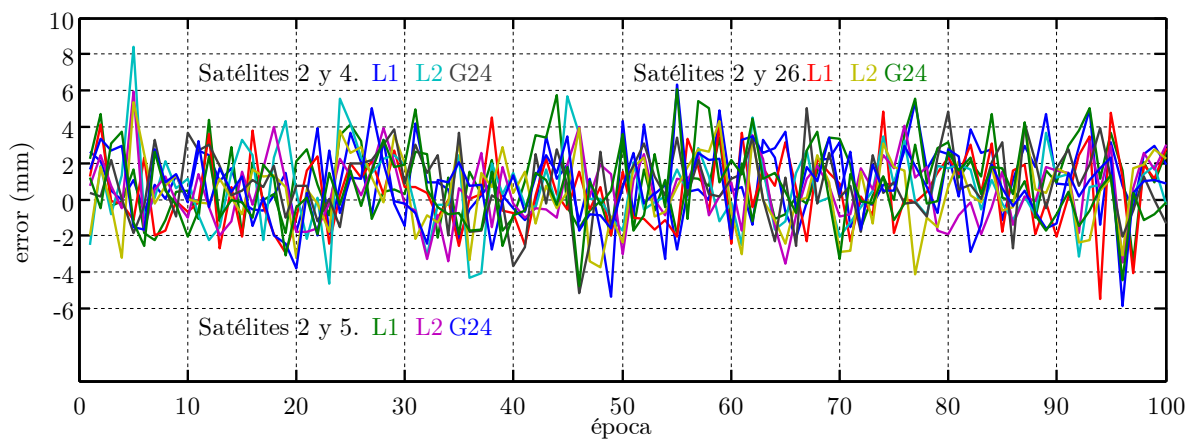


Figura 4.23: Medidas de fase en dobles diferencias: diferencia entre simuladas con y sin error.

4.4. Conclusiones

En este capítulo se ha presentado el simulador desarrollado para la evaluación de métodos de resolución de la ambigüedad. El simulador es una herramienta completa, que incluye además un trazador de órbitas, un simulador de receptor y una facilidad para evaluar los parámetros de dispersión de la precisión (DOP).

El simulador tiene la capacidad de utilizar medidas en dos tipos de formatos, el formato RINEX de amplio uso y el formato TCAR, o bien, crear por sí mismo, medidas simuladas. Las medidas en formato TCAR son medidas procedentes de un emulador del sistema Galileo, donadas por la Agencia Espacial Europea para ser utilizadas como patrón para comparar distintos métodos de resolución de la ambigüedad.

La comparación de las medidas TCAR con los resultados del simulador han permitido su validación. La diferencia más sustancial radica en el error troposférico e ionosférico, pues los modelos utilizados por el simulador hacen que estas fuentes de error sean algo menores que las reales. No obstante, a efectos de comparación de las prestaciones de los métodos de resolución de la ambigüedad, esto no será un factor importante, pues las fuentes de error afectarán igualmente a todos los métodos. Por tanto, el simulador va a permitir comparar adecuadamente las prestaciones de los métodos de resolución de la ambigüedad propuestos con los ya existentes y en diferentes situaciones.

Capítulo 5

Evaluación de los métodos de resolución de la ambigüedad

En este capítulo se evalúan las prestaciones de los métodos de resolución de la ambigüedad propuestos, es decir, el método Nulo3 y el método MOCA, y se comparan con las del método LAMBDA. Las prestaciones de cada método se evalúan midiendo los parámetros que se describen en el primer apartado. El simulador desarrollado (véase el capítulo 4) se utiliza para generar medidas de estos parámetros en diferentes situaciones, de manera que se puedan comparar adecuadamente las prestaciones de los métodos.

5.1. Parámetros y condiciones de las simulaciones

La eficacia de un método se mide en función de su capacidad para resolver correctamente la ambigüedad y de su coste computacional. Estas dos características son las que se intentan medir con los parámetros elegidos, que son los siguientes:

- **Porcentaje de aciertos.** La relación entre el número de épocas en que se resuelve correctamente la ambigüedad y el número de épocas en las que se hace erróneamente.
- **Tiempo por época.** El tiempo que emplea un determinado computador para resolver la ambigüedad se va a utilizar como parámetro para medir el coste computacional de un método. Independientemente de si la resuelven o no correctamente, los métodos dan una solución a la ambigüedad en cada época (cada más épocas si se combinan medidas de varias épocas). Por ello, el parámetro elegido es el tiempo empleado para dar la solución en cada época. Dado que este tiempo depende del computador elegido, el valor tiene poco interés en términos absolutos, pero sí en términos relativos, para comparar los tiempos empleados por los distintos métodos. El computador que se ha utilizado ha sido un Pentium II. No obstante, el valor en

términos absolutos tiene interés para evaluar la viabilidad de un método, puesto que el tiempo por época nunca ha de ser mayor que el intervalo de tiempo que transcurre entre las medidas de una época y la siguiente. Teniendo en cuenta que se utiliza un intervalo entre épocas típico de un segundo, el tiempo de cálculo por época nunca debe ser mayor de un segundo.

- **Candidatos explorados.** El número de candidatos que se exploran en una época sirve también para medir el coste computacional de un método. Sin embargo, esta medida es más indirecta, puesto que el coste computacional depende del número de candidatos explorados y del coste que requiere la exploración de cada candidato, que varía entre un método y otro. Este parámetro será de gran interés para evaluar las prestaciones del método MOCA con las distintas opciones de fijar las fronteras del espacio de búsqueda. En dicho método, todas las opciones tienen el mismo coste computacional por candidato explorado, pero unas explorarán más candidatos que otras.

Las medidas de estos parámetros se hacen en términos estadísticos. Para ello se calculan valores promedios y se hacen estimaciones de sus funciones densidad de probabilidad (PDF) y distribución de probabilidad (CDF). La forma de estas funciones dependen de:

- El método elegido.
- Desviación del error que afecta a las medidas de fase: σ_f .
- Desviación del error que afecta a las medidas de pseudodistancia: σ_c .
- La estimación a priori de σ_f : $\hat{\sigma}_f$.
- La estimación a priori de σ_c : $\hat{\sigma}_c$.
- El número de satélites disponibles: s .
- El número de frecuencias utilizadas.
- La distancia entre los dos receptores (la línea de base).
- La geometría particular entre satélites y receptores.

Con objeto de aproximar los resultados a los futuros sistemas de navegación por satélite, se ha optado por utilizar medidas correspondientes a las portadoras E2L1E1, E5a y E5b del futuro sistema Galileo. La línea de base se ha fijado en todas las simulaciones a 1 kilómetro y medio. Cada estimación de la PDF o de la CDF de un parámetro se ha realizado para una elección concreta de método, σ_f , σ_c , $\hat{\sigma}_f$, $\hat{\sigma}_c$ y s (los subrayados). Para poder hacer una buena estimación de la PDF o de la CDF de un parámetro es necesario realizar un gran número de simulaciones. La opción elegida ha sido hacer distintas simulaciones

variando las geometrías satélites-receptores y las semillas de ruido de las medidas. Como las geometrías satélites-receptores varían según el tiempo y son cuasi-periódicas, siendo su periodo de repetición 24 horas (ya que se simula el sistema Galileo con efemérides del GPS), se ha optado por repetir las simulaciones para distintos instantes de tiempo equiespaciados a lo largo de 24 horas. De esta forma, cada estimación de la PDF o de la CDF se ha realizado a partir de los resultados de un número variable de simulaciones equiespaciadas a lo largo de las 24 horas del 19 de Marzo de 2004. Cada simulación tiene una semilla de error distinta y tiene una duración de 100 épocas, siendo el intervalo entre épocas de un segundo.

Teniendo en cuenta que cada simulación tiene una duración de 100 épocas, el primer parámetro mencionado, el porcentaje de acierto, es directamente el número de dichas épocas en las que se resuelve correctamente la ambigüedad. Conviene señalar, así mismo, que en todos los métodos que se han simulado se ha utilizado como criterio de elección del candidato solución a la ambigüedad, el basado en un promediado de la valoración de los candidatos a lo largo de todas las épocas. Con este criterio se consigue, que una vez que en una época se resuelva correctamente la ambigüedad, en sucesivas épocas, por lo general, también se resuelva correctamente. Por esa razón, no es necesario que las simulaciones duren más de 100 épocas y por otro lado, se le puede dar otra interpretación a este parámetro: época en la que se resuelve la ambigüedad. En el caso, de que el porcentaje de acierto sea igual a k , la ambigüedad se resolverá en la época $100 - k$, pues en adelante, se resolverá correctamente.

5.2. Método Nulo3

Tal como se describe en la sección 3.2, el método Nulo3 es una adaptación del método Nulo a la posibilidad de utilizar tres frecuencias distintas. La adaptación consiste en dos aspectos: utilizar la técnica *wide-lane* para calcular el punto inicial y utilizar una estrategia de exploración que reduce el número de dimensiones del espacio de búsqueda. Para valorar adecuadamente los beneficios de estos dos aspectos, se estudian por separado.

5.2.1. Utilización de la técnica *wide-lane*

La utilización de la técnica *wide-lane* en el método Nulo3 permite que el punto inicial de la exploración sea más próximo a la solución correcta que de no utilizar la técnica. Por tanto, la técnica *wide-lane* ha de mejorar la eficacia de la resolución de la ambigüedad. Para poder evaluar sus ventajas se comparan las prestaciones del método Nulo3 utilizando y sin utilizar la técnica *wide-lane*. En los dos casos se utiliza la estrategia de exploración del método Nulo, en lugar de la del método Nulo3. El parámetro r se fija con la ecuación 2.49 para $q = 1$, opción más conservadora que si se utilizara la ecuación 3.20.

En la figura 5.1 se presentan las PDF y las CDF del porcentaje de acierto utilizando y no utilizando la técnica *wide-lane*. Las gráficas se corresponden con 4 satélites utilizados, errores en las medidas de pseudodistancia de 1 m y en las medidas de fase de 1 y 3 mm. Para obtener las gráficas se realizaron 240 simulaciones a lo largo de 24 horas.

Los resultados que se observan en las figuras demuestran con rotundidad la mejora en eficacia que supone la técnica *wide-lane* utilizada para determinar el punto inicial. Cuando no se utiliza esta técnica, el método Nulo3 fija el punto inicial a partir de las medidas de pseudodistancia, lo cual, aunque puede funcionar aceptablemente cuando se utilizan medidas de una sola frecuencia, se hace muy poco eficaz cuando se utilizan medidas de más frecuencias, como es el caso.

En la figura 5.2 se presenta, para las mismas condiciones, la media del tiempo por época para 5 desviaciones distintas del error de fase. Como se observa, tanto si se utiliza o no la técnica *wide-lane*, los tiempos son parecidos y muy elevados, pues superan el intervalo entre épocas de un segundo. Por tanto, el método Nulo3, en cualquiera de las dos opciones planteadas, es muy costoso computacionalmente y se hace inviable con el computador utilizado. En el apartado siguiente se ve cómo la estrategia de exploración del método Nulo3 permite reducir el coste computacional.

5.2.2. Estrategia de exploración

La exploración de candidatos se hace mucho menos costosa con la estrategia de reducción del número de dimensiones del espacio de búsqueda que utiliza el método Nulo3. Las siguientes gráficas comparan los resultados utilizando la estrategia del método Nulo3 y sin utilizarla, es decir, utilizando la del método Nulo adaptado a tres frecuencias. En ambos casos se utiliza la técnica *wide-lane* y se fija el parámetro r de la misma forma que en el apartado anterior.

En la figura 5.3(a) se presenta la media del tiempo por época utilizando o no la estrategia del método Nulo3, en las mismas condiciones que en la figura 5.2. Como se puede observar, gracias a esta estrategia, el coste computacional del método Nulo3 es mucho menor. Los tiempos por época son ahora menores que el intervalo entre épocas (un segundo), con lo que la utilización del método Nulo3 sí es viable con el computador utilizado.

En la figura 5.3(b) se presenta la media del número de candidatos explorados para las dos opciones. Como se observa, el número de candidatos explorados con la estrategia del método Nulo es mucho mayor que con la estrategia del método Nulo3. Esto concuerda con la diferencia de tiempos apreciada en la figura anterior. Sin embargo, la diferencia entre los valores de los dos métodos es de tres ordenes de magnitud para el número de candidatos y de dos ordenes para el tiempo por época. La razón de ello es que la exploración de un candidato tiene mayor coste computacional en el método Nulo3 que

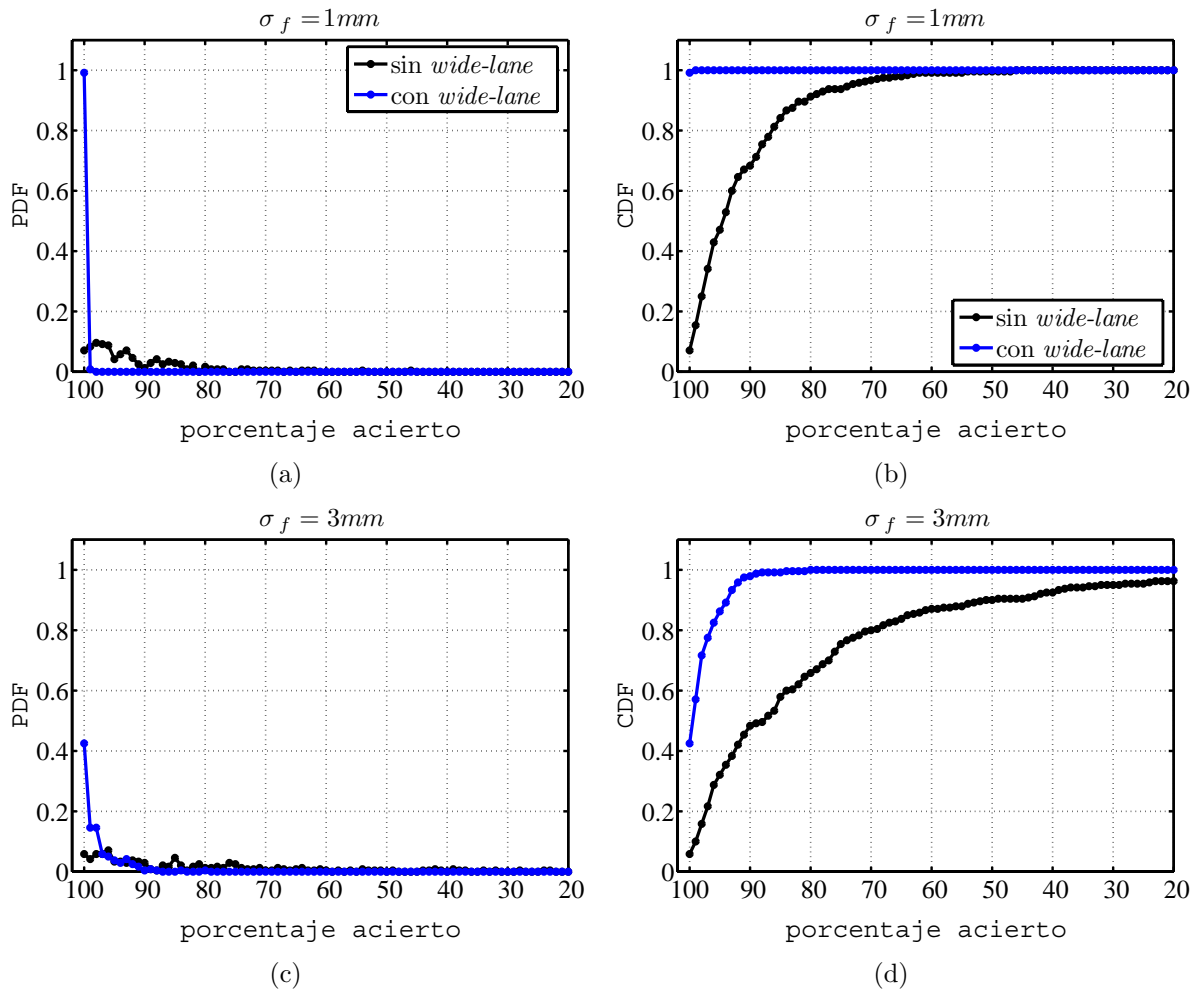


Fig. 5.1: PDF y CDF del porcentaje de acierto para el método Nulo3 con estrategia del método Nulo, $\sigma_c = 1m$, $s = 4$.

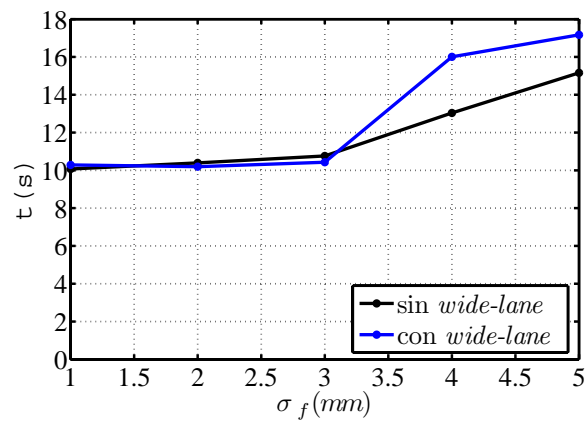


Figura 5.2: Media del tiempo por época para el método Nulo3 con estrategia del método Nulo, $\sigma_c = 1m$, $s = 4$.

en el método Nulo. Es necesario señalar que, en el caso del método Nulo, el número de candidatos que se exploran no coincide con el número de candidatos que pertenecen al espacio de búsqueda, puesto que es necesario explorar candidatos que están fuera de él para poder detectar sus fronteras.

Los valores del número de candidatos explorados que se observan en la figura 5.3(b) son consecuentes con las estrategias de exploración de cada uno de los métodos. El método Nulo explora como mínimo $(2\gamma + 1)^{m-1}$ candidatos, siendo γ el factor oblicuo y m el número de ambigüedades. Esto es debido a que cada coordenada se incrementa hacia arriba y hacia abajo como mínimo el valor del factor oblicuo y cuando se han fijado $m - 1$ coordenadas no es necesario hacer incrementos en la última para deducir qué valores se corresponden con candidatos pertenecientes al espacio de búsqueda. En la simulación realizada $\gamma = 3$ y $m = 9$, con lo que el mínimo número de candidatos explorados es superior $5 \cdot 10^6$. Por su parte, el número de candidatos que explora el método Nulo3 es fijo y sólo depende del parámetro r que define el espacio de búsqueda. Dicho número es igual a $(2r + 1)^3 = 2197$, ya que en la simulación realizada $r = 6$.

En la figura 5.4 se presenta la PDF y la CDF del porcentaje de acierto para las mismas condiciones con las que se elaboraron las figuras anteriores y para dos errores de fase diferentes, 2 y 4 mm. Como se observa, la estrategia del método Nulo3, además de reducir el coste computacional, mejora un poco la eficacia del método. El hecho de que el método Nulo tenga peores prestaciones puede ser debido a que el hiper-cilindro de búsqueda, cuyo radio regula el parámetro $\Omega_{\text{máx}}$, en algunas zonas resulte demasiado estrecho y ningún candidato quede dentro de él. En ese caso, la exploración no podrá continuar más allá de esa zona. Téngase en cuenta que tal como se calcula el parámetro $\Omega_{\text{máx}}$ se garantiza, con un nivel de confianza aceptado, que el candidato solución a la ambigüedad se encuentra dentro del hiper-cilindro, pero no que los candidatos más cercanos al subespacio nulo en todas las zonas, se encuentren dentro de él.

5.3. Método MOCA

En la descripción del método MOCA, en la sección 3.3, se proponen tres alternativas para fijar el parámetro $\Omega_{\text{máx}}$. El valor fijado de dicho parámetro es comprometido, pues elegirlo demasiado elevado puede obligar a explorar excesivos candidatos y elegirlo demasiado reducido a no explorar ninguno. Las tres alternativas para fijar el valor de $\Omega_{\text{máx}}$ son: cálculo estadístico, combinación de cálculo estadístico y el residuo del punto inicial Ω_{n0} , y cálculo para garantizar un cierto número E_m de candidatos. En el caso de la tercera alternativa, se han propuesto dos expresiones para calcular $\Omega_{\text{máx}}$ (Ecu. 3.35 y 3.37), que derivan de la distinta forma de estimar el volumen del espacio de búsqueda. Primeramente se analizan los resultados que se consiguen con las dos expresiones de la tercera alternativa y seguidamente se comparan los resultados de las tres alternativas. En todos los casos se fija el parámetro r con la ecuación 2.49 para $q = 1$.

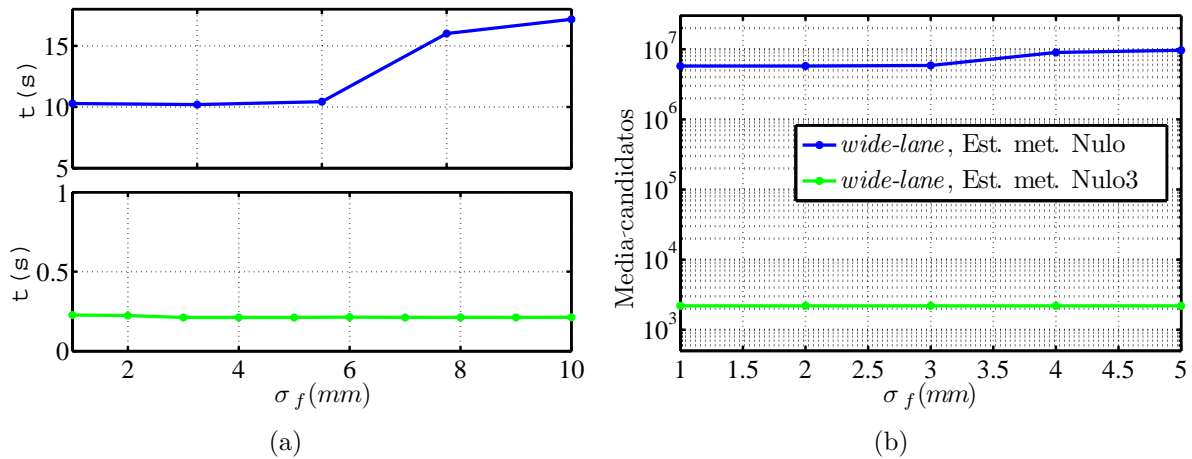


Figura 5.3: Media del tiempo por época (a) y media del número de candidatos explorados (b) para el método Nulo3, $\sigma_c = 1m, s = 4$.

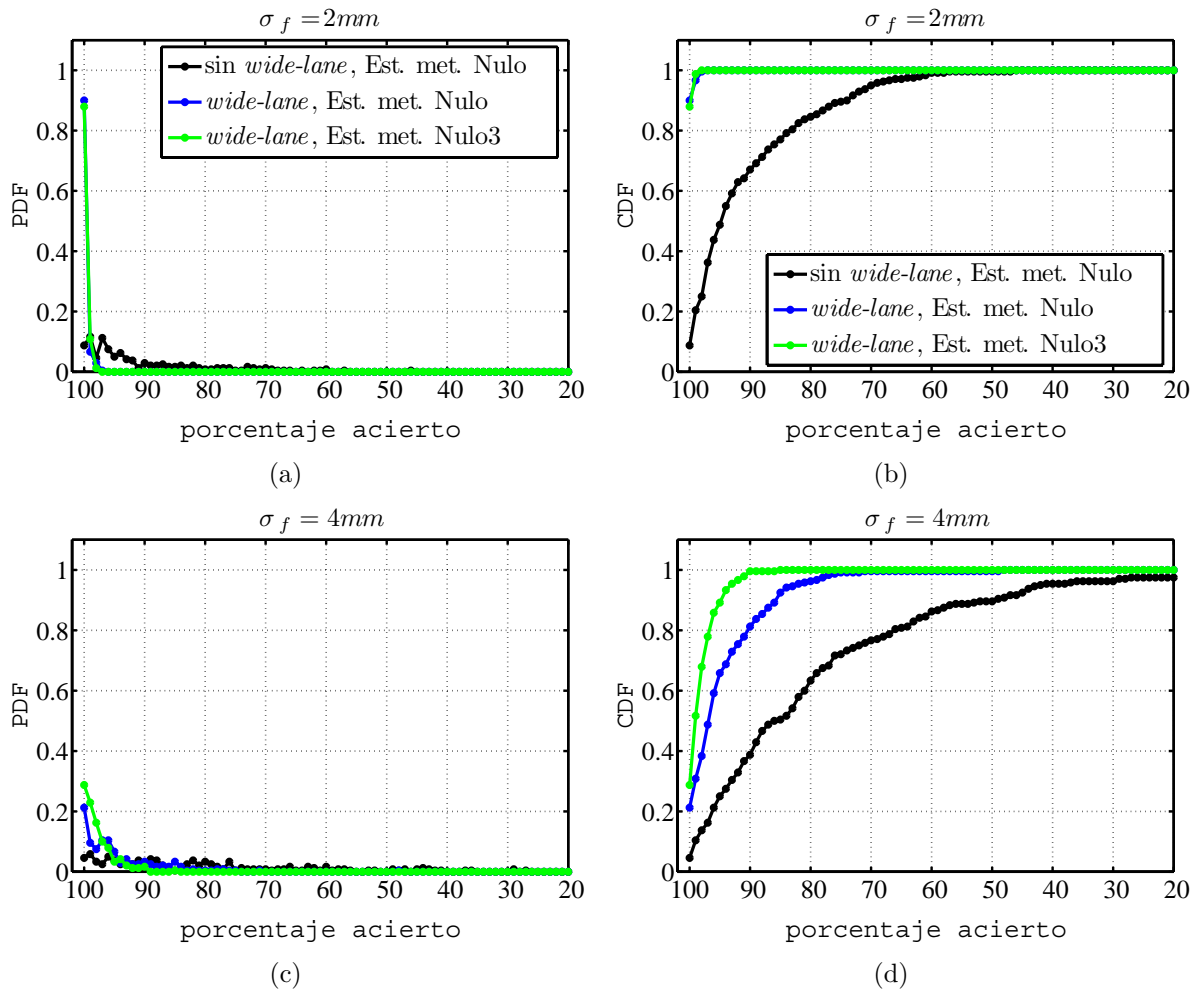


Fig. 5.4: PDF y CDF del porcentaje de acierto para el método Nulo3, $\sigma_c = 1 m, s = 4$, para distintos valores de σ_f .

El objetivo de la figura 5.5 es evaluar las dos opciones aludidas en la tercera alternativa de cálculo de $\Omega_{\text{máx}}$, es decir, evaluar las dos posibles formas de estimar el volumen del espacio de búsqueda. En la figura se representa el número medio de candidatos efectivos explorados en función del número E_m especificado, para 4 y 5 satélites. Cada curva se corresponde con una simulación de las 24 realizadas en 24 instantes de tiempo equiespaciados a lo largo de un día. La desviación del error en las medidas de pseudodistancia es de $1m$ y en las medidas de fase de $5mm$. En las figuras se presentan dos tipos de curvas, las que se corresponden con la primera opción, es decir, estimar el volumen del espacio de búsqueda como el de un hiper-cilindro inclinado (Ecu. 3.35) y las que se corresponden con la segunda opción, es decir, con estimar el volumen como el de un hiper-paralelepípedo que aproxima el espacio de búsqueda (Ecu. 3.37). Como se observa, con la segunda opción, el número de candidatos efectivos explorados es más próximo al parámetro E_m especificado. De hecho, con la primera opción, en ocasiones, el número de candidatos explorados es mucho mayor que el especificado. Estos resultados, unidos al menor coste computacional comentado en la descripción del método MOCA, hacen que sea la segunda opción la elegida. La única objeción que tiene la segunda opción es que, a medida que el número de satélites aumenta, el número de candidatos que se exploran disminuye, lo contrario de lo que le ocurre a la primera opción. Por tanto, cuando se utilicen muchos satélites será conveniente fijar el parámetro E_m a un valor algo mayor del requerido. En adelante, se asumirá que la tercera alternativa para el cálculo de $\Omega_{\text{máx}}$ utiliza la expresión 3.37, es decir, no calcula el volumen exacto del espacio de búsqueda, sino que lo aproxima al de un hiper-paralelepípedo. A continuación se procede a comparar las tres alternativas propuestas para calcular $\Omega_{\text{máx}}$.

La figura 5.6 presenta la media del tiempo por época y la media del número de candidatos explorados para las dos primeras alternativas y para la tercera con dos valores de E_m distintos, 1 y 10. Cada uno de los puntos presentados se corresponde con el promedio obtenido de 800 simulaciones equiespaciadas a lo largo de 24 horas. El error que afecta a las medidas de código es de 1 m y el de las medidas de fase entre 1 y 10 mm, utilizándose 4 satélites. Como se observa, en la primera alternativa, basada en cálculos estadísticos, a medida que aumenta el error en las medidas de fase, aumenta el número de candidatos que se exploran. Dicho aumento provoca el correspondiente aumento proporcional en el tiempo por época. La segunda alternativa tiene un comportamiento parecido, aunque el aumento es más lento. Sin embargo, la tercera alternativa, la basada en calcular el valor de $\Omega_{\text{máx}}$ que haga que se explore, aproximadamente, E_m candidatos ofrece mejores resultados. Con esta alternativa, tanto para $E_m = 1$ como para $E_m = 10$, el número de candidatos explorados permanece casi constante, a medida que aumenta el error en las medidas de fase, si bien, en el caso de $E_m = 1$ disminuye un poco. Por ello, el tiempo por época se mantiene constante con la tercera alternativa. A la vista de las gráficas, la primera alternativa basada en cálculos estadísticos es la que ofrece peores prestaciones en cuanto a coste computacional. Las restantes alternativas tienen costes computaciones parecidos y reducidos.

La figura 5.7 presenta la CDF del porcentaje de acierto para 5 y 7 mm de error en

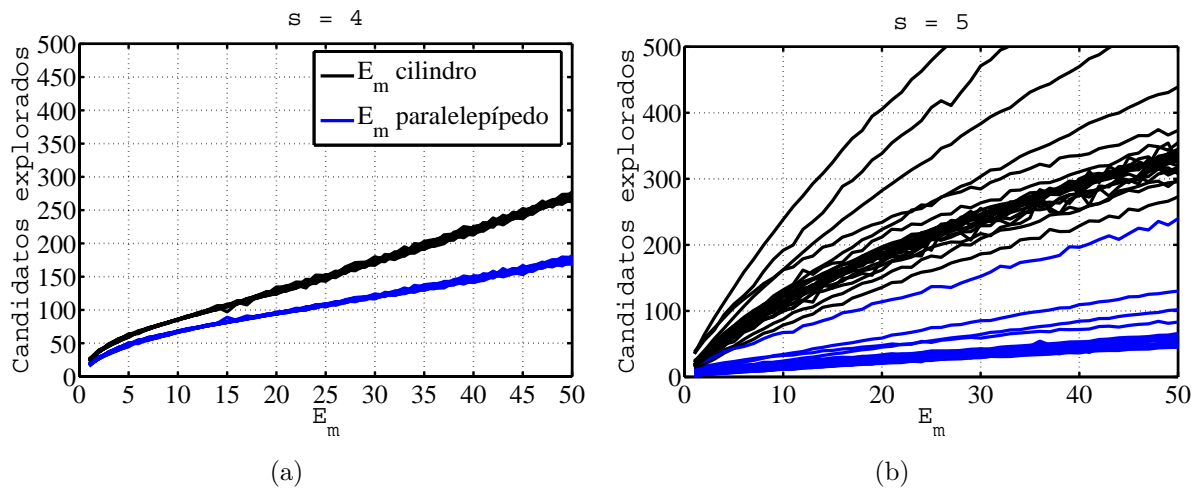


Figura 5.5: Número de candidatos explorados en el método MOCA en función del parámetro E_m con 4 satélites (a) y 5 satélites (b), para diferentes realizaciones.

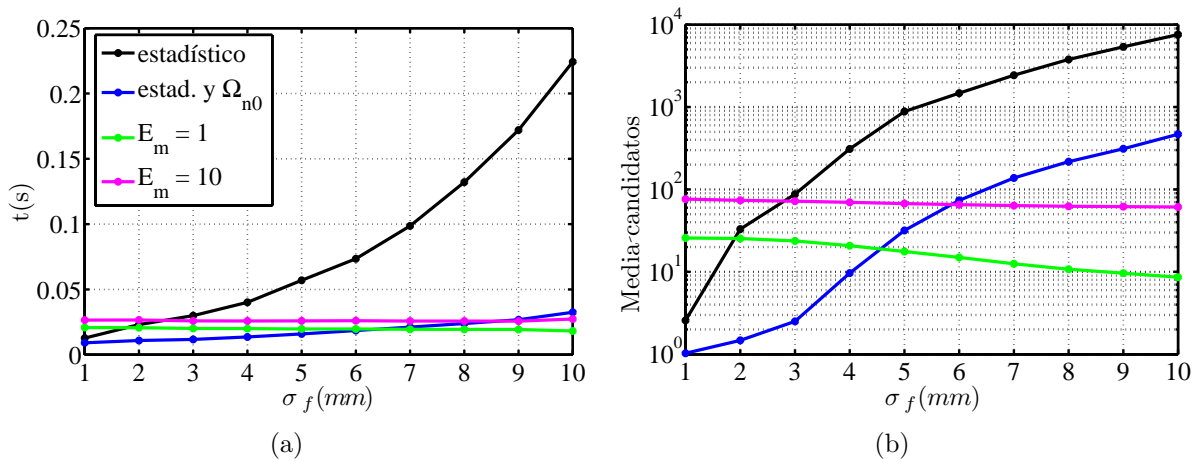


Figura 5.6: Tiempo por época (a) y media de candidatos explorados (b) para el método MOCA con las distintas formas de fijar $\Omega_{m\acute{a}x}$, $\sigma_c = 1m$, $s = 4$.

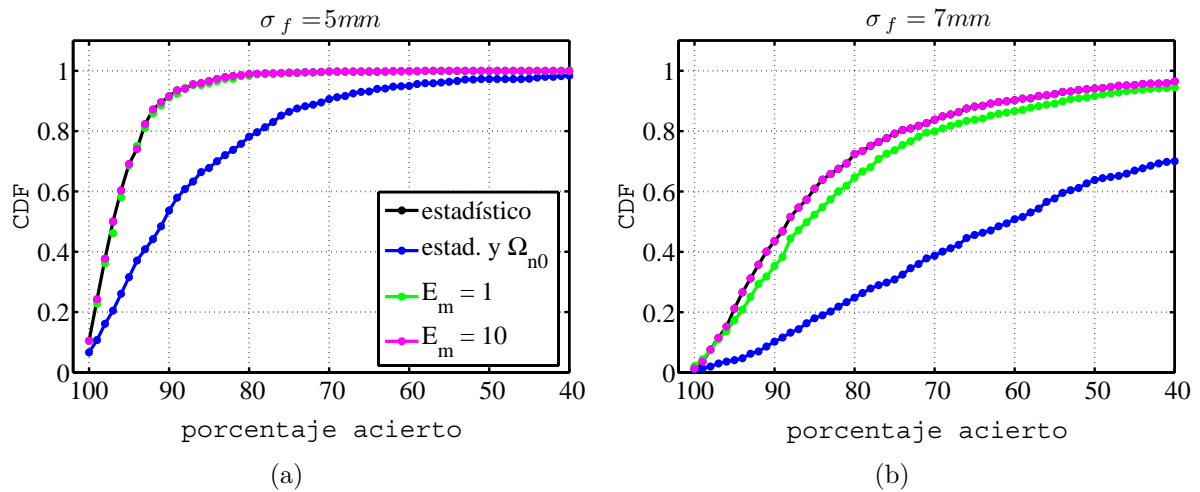


Figura 5.7: CDF del porcentaje de acierto, $\sigma_c = 1m$, $s = 4$.

las medidas de fase. Como se observa, la alternativa basada en la combinación de cálculo estadístico y Ω_{n_0} tiene una eficacia mucho menor que el resto de alternativas. La basada en cálculo estadístico y las dos opciones de E_m ofrecen prestaciones muy similares, si bien la de $E_m = 1$ tiene un eficacia levemente menor. Por tanto, la alternativa que garantiza la exploración de $E_m = 10$ candidatos es la mejor opción, puesto que consigue, al mismo tiempo, coste computacional reducido y máxima eficacia en la resolución de la ambigüedad.

El objetivo de la figura 5.8 es explicar la razón por la cual la alternativa basada en la combinación de cálculo estadístico y Ω_{n_0} ofrece la peor eficacia. En las figuras 5.6(a) y 5.6(b) se ha observado que el tiempo por época y el número de candidatos explorados por esta alternativa son similares a los de la alternativa basada en garantizar E_m candidatos. Teniendo en cuenta ese hecho, puede parecer extraño que la eficacia de esta alternativa sea peor. En la figura 5.8 se presenta, el número de candidatos explorados en cada una de las épocas de una de las simulaciones realizadas. Como se observa, las alternativas basadas en cálculo estadístico y en garantizar $E_m = 10$ candidatos exploran siempre un número de candidatos, prácticamente, fijo y siempre por encima de 10. El resto de alternativas, sobre todo la basada en la combinación de cálculo estadístico y Ω_{n_0} , son mucho más fluctuantes, y a veces sólo exploran uno o dos candidatos. Esta circunstancia puede provocar que la resolución de la ambigüedad sea errónea. En general, el vector solución a la ambigüedad no tiene por qué tener un valor de Ω_k mínimo en todas las épocas. Por tanto, si sólo se explora uno o dos candidatos, en algunas épocas se dejará de explorar el candidato correcto. Este hecho puede provocar que el valor de Ω_k promediado para todas las épocas, el criterio utilizado para elegir el candidato solución, no sea mínimo para el candidato correcto y se resuelva erróneamente la ambigüedad.

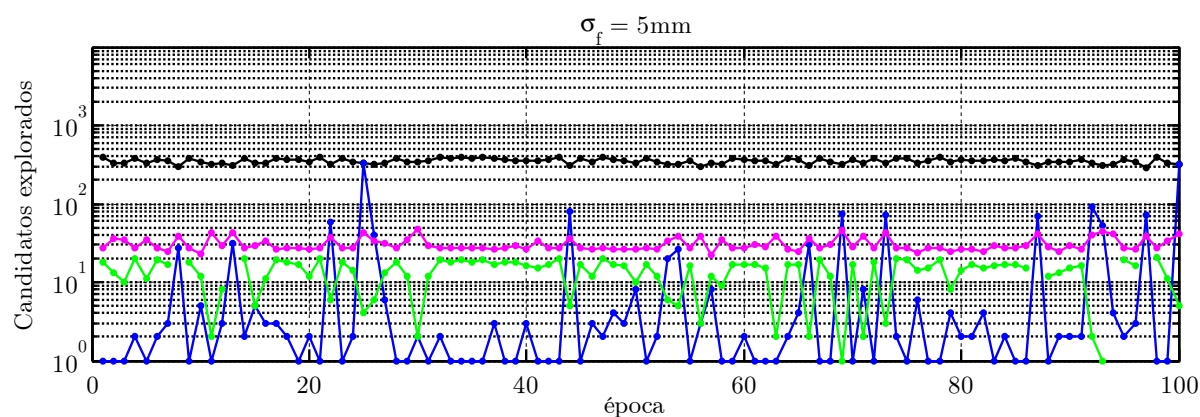


Figura 5.8: Número de candidatos explorados, $\sigma_c = 1m$, $\sigma_f = 5mm$, $s = 4$.

5.4. Comparativa de métodos

Para poder evaluar las prestaciones que ofrecen los métodos propuestos en esta tesis, el método Nulo3 y el método MOCA, en este apartado se comparan sus resultados con los de otro método ya existente. El método elegido para dicha comparación ha sido el método LAMBDA, pues existe un gran número de publicaciones que avalan sus buenas prestaciones ([Teun94], [Teun95], [Joos99], [Teun99], [Teun02]).

Por tanto, los métodos que se comparan son los siguientes:

- **Método Nulo3.** Tal como se ha definido, utilizando la técnica *wide-lane* y la estrategia de exploración que reduce el número de dimensiones del espacio de búsqueda. El parámetro r se fija con la expresión 2.49 para $q = 1$.
- **Método MOCA.** Teniendo en cuenta los estudios realizados en el apartado anterior, se fija el parámetro $\Omega_{\text{máx}}$ para garantizar $E_m = 10$ candidatos utilizando la expresión 3.37, correspondiente a estimar el volumen del espacio de búsqueda como el de un hiper-paralelepípedo. El parámetro r se fija de la misma forma que en el método Nulo3.
- **Método LAMBDA.** Con el objeto de compararlo en condiciones similares a los otros métodos, se configura el método LAMBDA para trabajar con medidas combinadas de fase y pseudodistancia, relativas a una época. El parámetro $\chi_{\text{máx}}^2$ se fija para garantizar $E_m = 10$ candidatos.
- **Método LAMBDA sólo fase.** El método LAMBDA también se configura para trabajar con medidas de fase exclusivamente, relativas a dos épocas. Los resultados que ofrezca el método LAMBDA en estas condiciones, ayudaran a valorar las ventajas que supone el utilizar medidas de una sola época y los inconvenientes de mezclar medidas de fase de varias épocas. En este caso también se fija $E_m = 10$.

Al igual que en los apartados anteriores se presentan gráficas de la CDF del porcentaje de acierto y de la media del tiempo por época. Para la estimación de cada una de esas gráficas se utilizan un total de 800 simulaciones equiespaciadas a lo largo de 24 horas. Primeramente se comparan las prestaciones de los cuatro métodos para diferentes condiciones de error en las medidas de pseudodistancia y fase, pero con estimación de la covarianza del error en las medidas correcta. A continuación se analiza cómo afecta el hecho de no estimar adecuadamente dicha covarianza. Finalmente se realiza la comparación de los 4 métodos utilizando, en lugar de medidas simuladas, las ofrecidas por el TCAR TIM 2 (sec. 4.3.1).

5.4.1. Covarianza del error de las medidas bien estimada

En la figura 5.9 se presenta la CDF del porcentaje de acierto para 4 y 6 satélites utilizados, para un error en las medidas de fase entre 4 y 6 mm, y un error en las medidas de pseudodistancia entre 1 y 2 m. Como se observa, el método LAMBDA es el que mejor prestaciones ofrece en todos los casos. Los métodos Nulo3 y MOCA ofrecen, en general, prestaciones similares, aunque un poco inferiores. Sin embargo, nótese cómo el método LAMBDA utilizando sólo medidas de fase y relativas a dos épocas, ofrece unas prestaciones mucho peores a los restantes métodos, cuando sólo se utilizan 4 satélites. Estos resultados son comprensibles teniendo en cuenta que el intervalo entre época es de sólo un segundo. Las posiciones de los satélites no varían mucho en un segundo, con lo cual el sistema de ecuaciones que se forma de combinar medidas de fase de dos épocas seguidas no está muy bien condicionado. Este problema, sin embargo, no es significativo, como se observa en la figura, cuando se utilizan más satélites, es decir, cuando se dispone de más ecuaciones. En el caso en el que el intervalo entre épocas fuera mayor, las prestaciones del método LAMBDA con medidas sólo de fase serían mejores. En cualquier caso, este ejemplo permite justificar el interés que tiene el resolver la ambigüedad con medidas de tan sólo una época.

El hecho de que los métodos Nulo3 y MOCA tengan prestaciones un poco inferiores a las del método LAMBDA se puede explicar recordando el proceso de exploración de candidatos de cada uno de los métodos. Tanto en la exploración del método Nulo3 como en la del método MOCA, se asume que la solución a la ambigüedad pertenece a una hiper-esfera centrada en el punto inicial \mathbf{n}_0 , lo que permite reducir el volumen del espacio de búsqueda. En las situaciones en las que la solución a la ambigüedad no pertenezca a dicha hiper-esfera los métodos fallarán en la resolución de la ambigüedad. El método LAMBDA no necesita dicha asunción y no tiene ese problema.

En la figura 5.9(f) se presenta la media del tiempo por época, para distintos valores de σ_f . Como se observa, el método LAMBDA, en sus dos versiones, y el método MOCA presentan valores similares y mucho menores que el método Nulo3. El hecho de que el método Nulo3 tenga mayor coste computacional se debe a dos aspectos. Por un lado, necesita explorar bastantes más candidatos que los otros métodos $((2r + 1)^3)$. Por otro lado, la exploración de cada candidato requiere un cálculo costoso, el que permite obtener, a partir de tres de las coordenadas de un candidato, el resto (Ecu. 3.27). No obstante, en todos los métodos, teniendo en cuenta el computador utilizado, el tiempo por época es bastante menor que el intervalo entre épocas, con lo cual, el mayor coste computacional no supone ningún retardo adicional.

A la vista de la figura 5.9, el método LAMBDA, cuando combina medidas de fase con medidas de pseudodistancia, relativas a una época, es el que mejor prestaciones consigue. Sin embargo, en las simulaciones hechas, las estimaciones a priori del error en las medidas de fase $\hat{\sigma}_f$ y en las medidas de pseudodistancia $\hat{\sigma}_c$ han sido elegidas para que sean coincidentes con las que realmente afectan a las medidas. En el siguiente apartado se

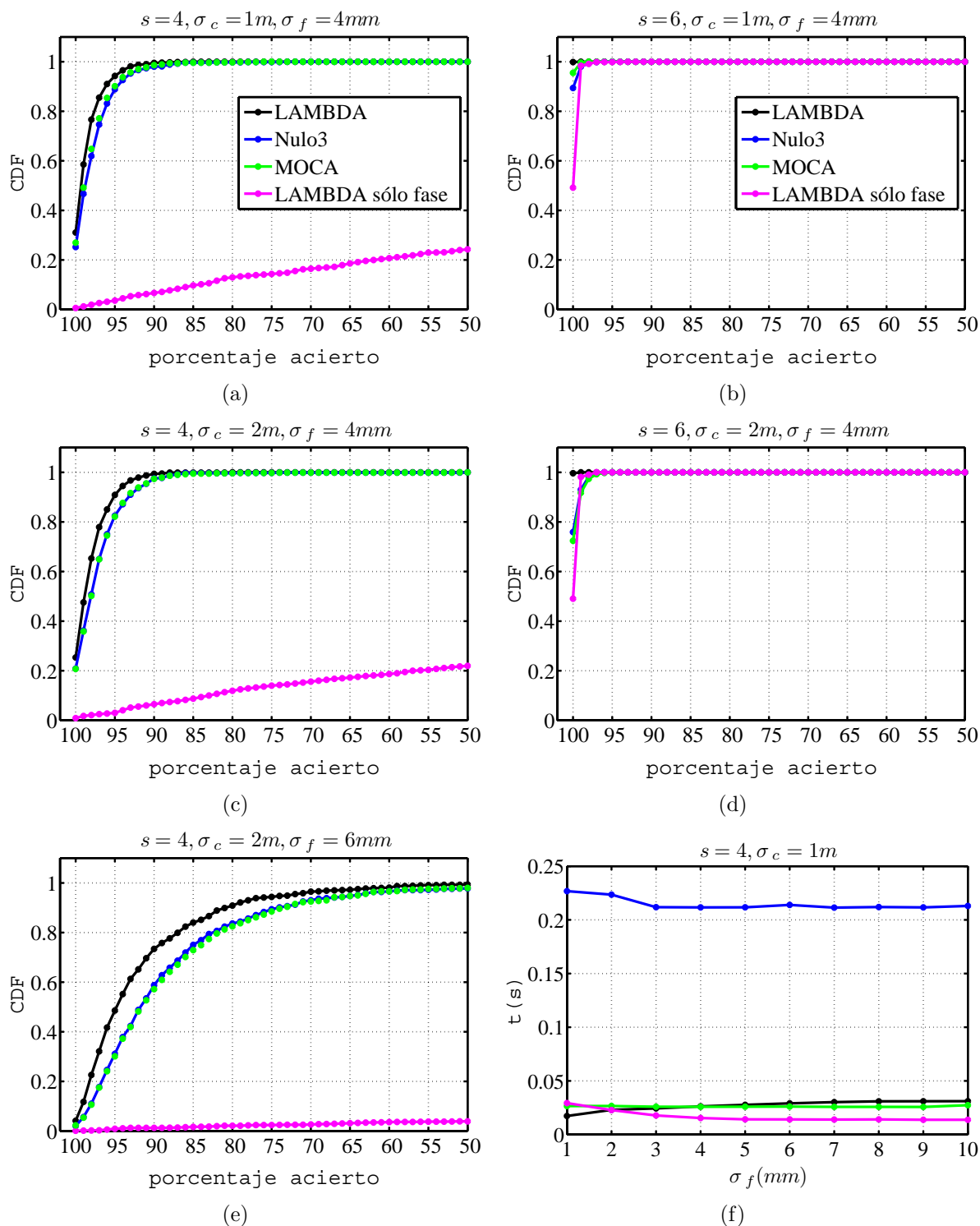


Figura 5.9: a) ..e) CDF del porcentaje de acierto, f) Media del tiempo por época en función de σ_f .

analiza el efecto que causa el que las estimaciones a priori de la covarianza de los errores no sean correctas.

5.4.2. Covarianza del error de las medidas mal estimada

Las covarianzas del error que afecta a las medidas \mathbf{Q}_w y \mathbf{Q}_v (Ecu. 1.36 y 1.43 en 2.6, 2.12 y 2.16) han de ser estimadas, es decir, es necesario hacer estimaciones $\hat{\sigma}_f$ y $\hat{\sigma}_c$ de σ_c y σ_f . Sin embargo, dichas estimaciones no tienen por qué ser correctas. Por otro lado, tal como se demuestra en [Bisc05] las covarianzas del error en las medidas varían a lo largo del tiempo, normalmente debido a la variación en la elevación de los satélites. Por ello, en este apartado se evalúan las prestaciones de los métodos en condiciones en las que las estimaciones del error no son correctas.

La figura 5.10 presenta la CDF del porcentaje de acierto, con errores en las medidas dados por $\sigma_c = 2m$ y $\sigma_f = 5mm$, para 4 y 6 satélites, y distintas estimaciones a priori de los errores en las medidas $\hat{\sigma}_f$ y $\hat{\sigma}_c$. Cuando se utilizan 6 satélites, las prestaciones del método LAMBDA siguen siendo las mejores. Sin embargo, cuando el número de satélites utilizados es de sólo 4, las prestaciones del método LAMBDA se ven bastante degradadas para algunos casos de malas estimaciones $\hat{\sigma}_f$ y $\hat{\sigma}_c$. Cuando la estimación del error en las medidas de pseudodistancia $\hat{\sigma}_c$ es menor de la real y la estimación en las medidas de fase $\hat{\sigma}_f$ mayor, la figura 5.10(c), las prestaciones del método LAMBDA se ven ampliamente superadas por las de los métodos MOCA y Nulo3. En las otras situaciones las prestaciones se igualan.

En la siguiente figura se analiza, con más detalle, cómo influye la mala estimación de los errores en las medidas. Para analizar convenientemente esta problemática se representa en la figura 5.11 el percentil 90 (PC90) del porcentaje de acierto, es decir, el porcentaje de acierto en la resolución de la ambigüedad que se consigue en el 90% de las simulaciones. Dicho valor se presenta para distintos valores de los pares $\hat{\sigma}_c$ y $\hat{\sigma}_f$. Las figuras a),c) y e) se corresponden con $\sigma_c = 2m$ y $\sigma_f = 5mm$ y las figuras b), d) y f) con $\sigma_c = 1m$ y $\sigma_f = 3mm$. En las gráficas, el punto central, pintado en negro, representa el caso en el que las estimaciones de los errores son correctas. Tal como se observa, el método LAMBDA tiene buenas prestaciones cuando las estimaciones de los errores son buenas. Sin embargo, cuando el valor de $\hat{\sigma}_c$ es menor que σ_c y el valor de $\hat{\sigma}_f$ mayor que σ_f , las prestaciones del método LAMBDA se degradan considerablemente. Sin embargo, los métodos MOCA y Nulo3, a penas se ven afectados por malas estimaciones de los errores de las medidas.

La sensibilidad del método LAMBDA a la correcta estimación del error de las medidas se debe al hecho de que se combinan medidas de fase con medidas de pseudodistancia. El método LAMBDA requiere plantear un sistema de ecuaciones sobredeterminado, para lo cual, si se quiere utilizar medidas relativas a sólo una época, es necesario combinar las medidas de fase con las de pseudodistancia. Los dos tipos de medidas presentan errores de muy distinta magnitud, las de pseudodistancia de mucha más magnitud que las

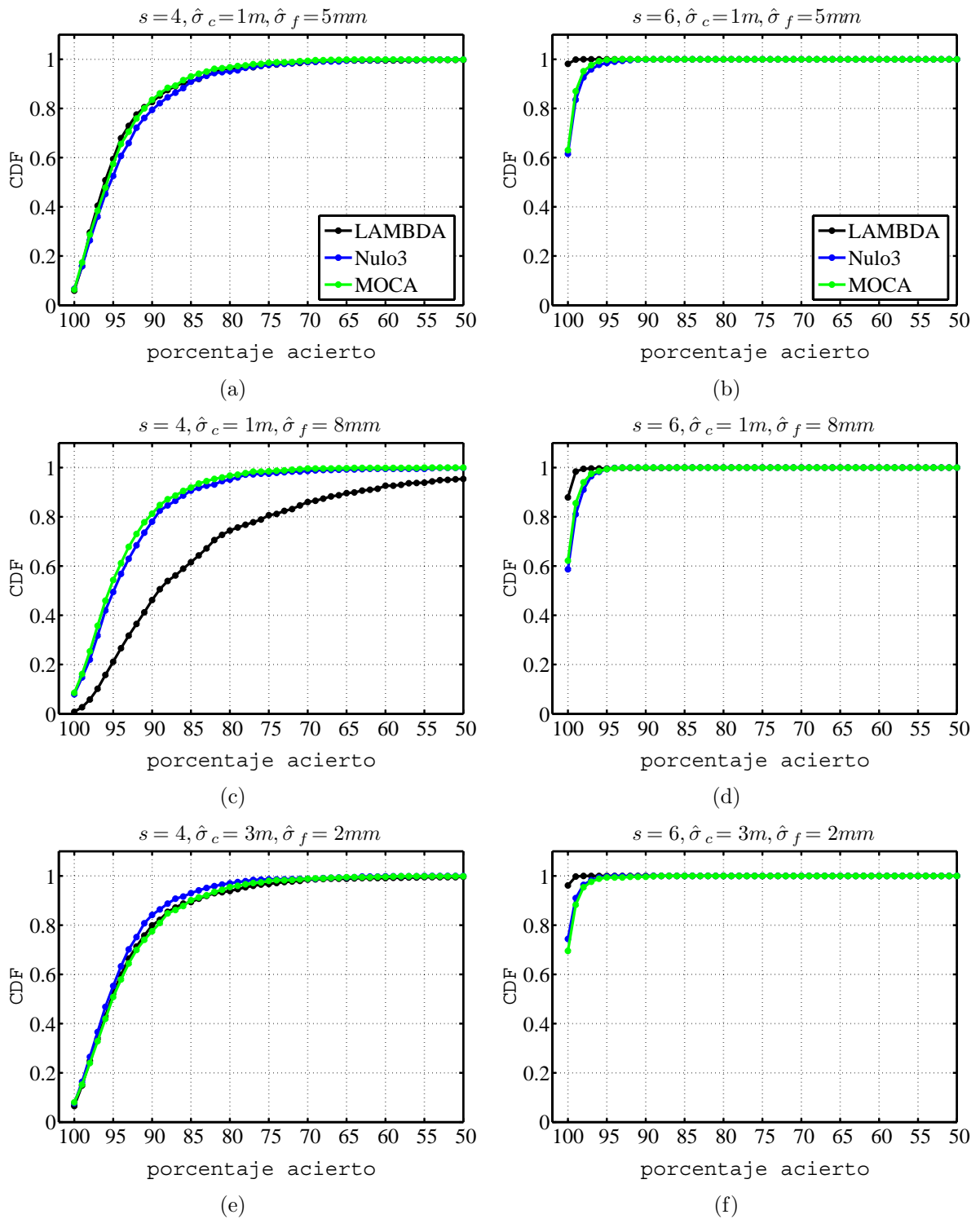


Figura 5.10: CDF del porcentaje de acierto, $\sigma_c = 2m, \sigma_f = 5mm$.

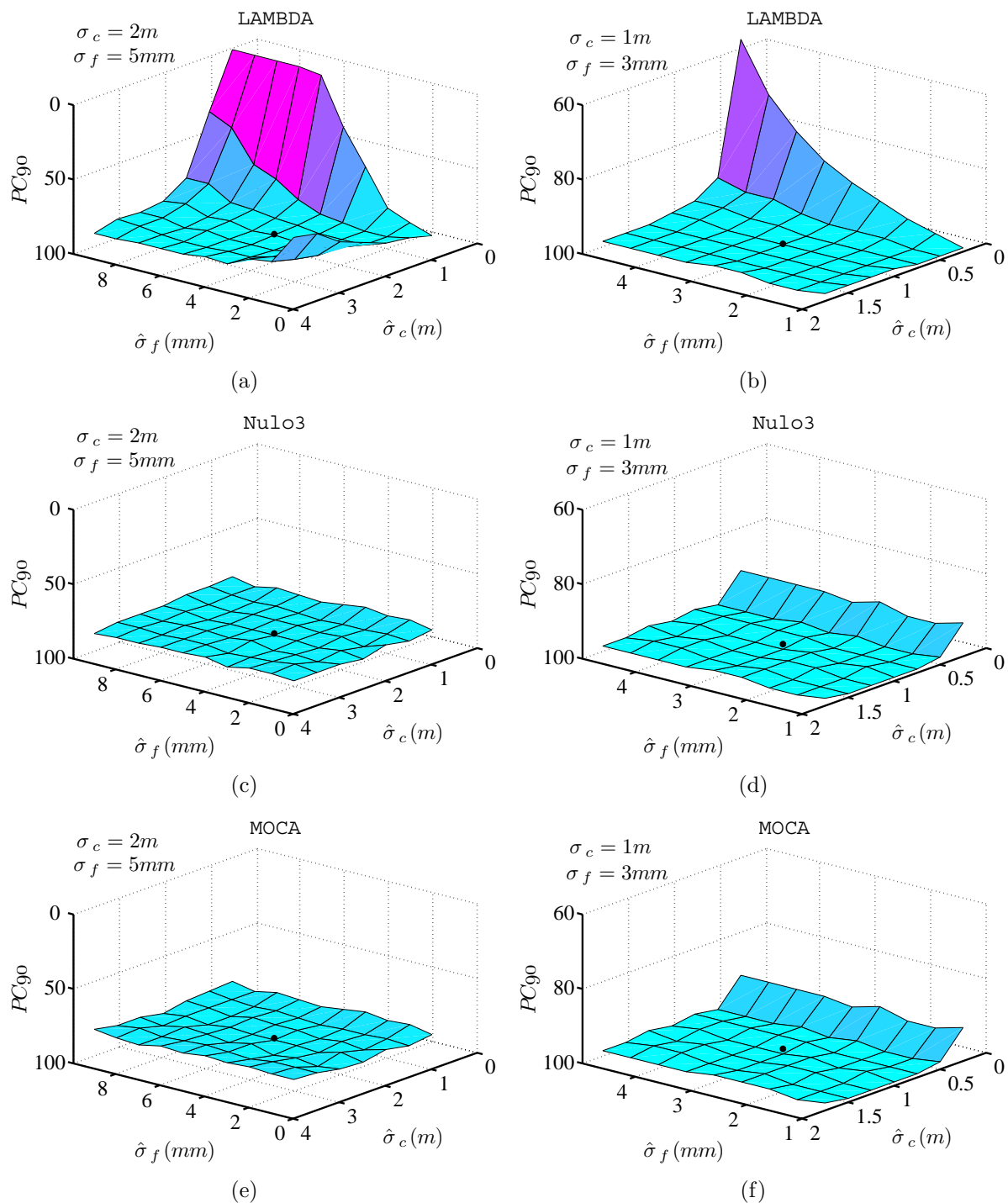


Figura 5.11: PC_{90} del porcentaje de acierto en función de $\hat{\sigma}_c$ y $\hat{\sigma}_f$. Punto negro cuando $\sigma_c = \hat{\sigma}_c$ y $\sigma_f = \hat{\sigma}_f$.

de fase. Para que la aproximación real de las ambigüedades $\hat{\mathbf{n}}_f$, que requiere el método LAMBDA y que se obtiene con las ecuaciones 2.4 y 2.12, sea buena, es necesario que se ponderen adecuadamente los dos tipos de medidas. A la vista de las gráficas presentadas, la situación más perniciosa para el método LAMBDA es cuando el valor de $\hat{\sigma}_c$ resulte ser menor que el de σ_c y el valor de $\hat{\sigma}_f$ mayor que el de σ_f . En esa situación se estará ponderando menos de lo necesario las medidas de pseudodistancia y más de lo necesario las de fase, con lo que el valor de $\hat{\mathbf{n}}_f$ vendrá gobernado, fundamentalmente, por las medidas pseudodistancia, las que tienen más error.

5.4.3. Comparativa utilizando medidas del TCAR TIM 2

Las medidas ofrecidas por el TCAR TIM 2 (sec. 4.3.1), ofrecen la posibilidad de comparar las prestaciones de los métodos, en condiciones similares a las del futuro sistema Galileo.

Las medidas del TCAR TIM 2 permiten hacer estudios para distintas líneas de base, distintos valores de SNR y la inclusión o no del efecto multicamino en las medidas. Para poder hacer una buena estimación de la CDF del porcentaje de acierto, es necesario hacer un gran número de simulaciones. La opción elegida ha sido realizar simulaciones para distintos intervalos de 100 épocas y distintos valores SNR. Cada archivo de medidas posee aproximadamente 1200 épocas, hay 5 niveles de potencia y dos posibilidades de multicamino (incluirlo o no). Por tanto, la estimación de la CDF se hace a partir de 120 simulaciones.

En la figura 5.12 se presenta la CDF y el PC90 del porcentaje de acierto, en el caso de utilizar los receptores Ref1 y Sur1, es decir, una línea de base de entre 3 y 5 km, para distintos valores de las estimaciones de los errores de las medidas $\hat{\sigma}_c$ y $\hat{\sigma}_f$. Como se observa, los resultados son similares a los alcanzados con las medidas simuladas (figuras 5.10 y 5.11). Los tres métodos presentan prestaciones similares, si bien el método LAMBDA funciona mal para algunos valores de $\hat{\sigma}_c$ y $\hat{\sigma}_f$, el caso de la figura 5.12(c).

La diferencia entre las medidas TCAR utilizadas y unas medidas simuladas libres de error, en las mismas condiciones, ha permitido estimar el error que afecta a las medidas utilizadas. Dichos errores toman valores entre 0.5 m y 2.8 m para σ_c , y entre 1 mm y 4 mm para σ_f . Los valores mínimos y máximos tiene que ver con el valor SNR elegido de entre los 5 posibles. Por ello, valores de $\hat{\sigma}_c = 0.5$ m y $\hat{\sigma}_f = 5$ mm, los de la figura 5.12(c), hacen que la resolución de la ambigüedad, en el método LAMBDA, se vea demasiado influenciada por las medidas de pseudodistancia, y perjudican la correcta resolución.

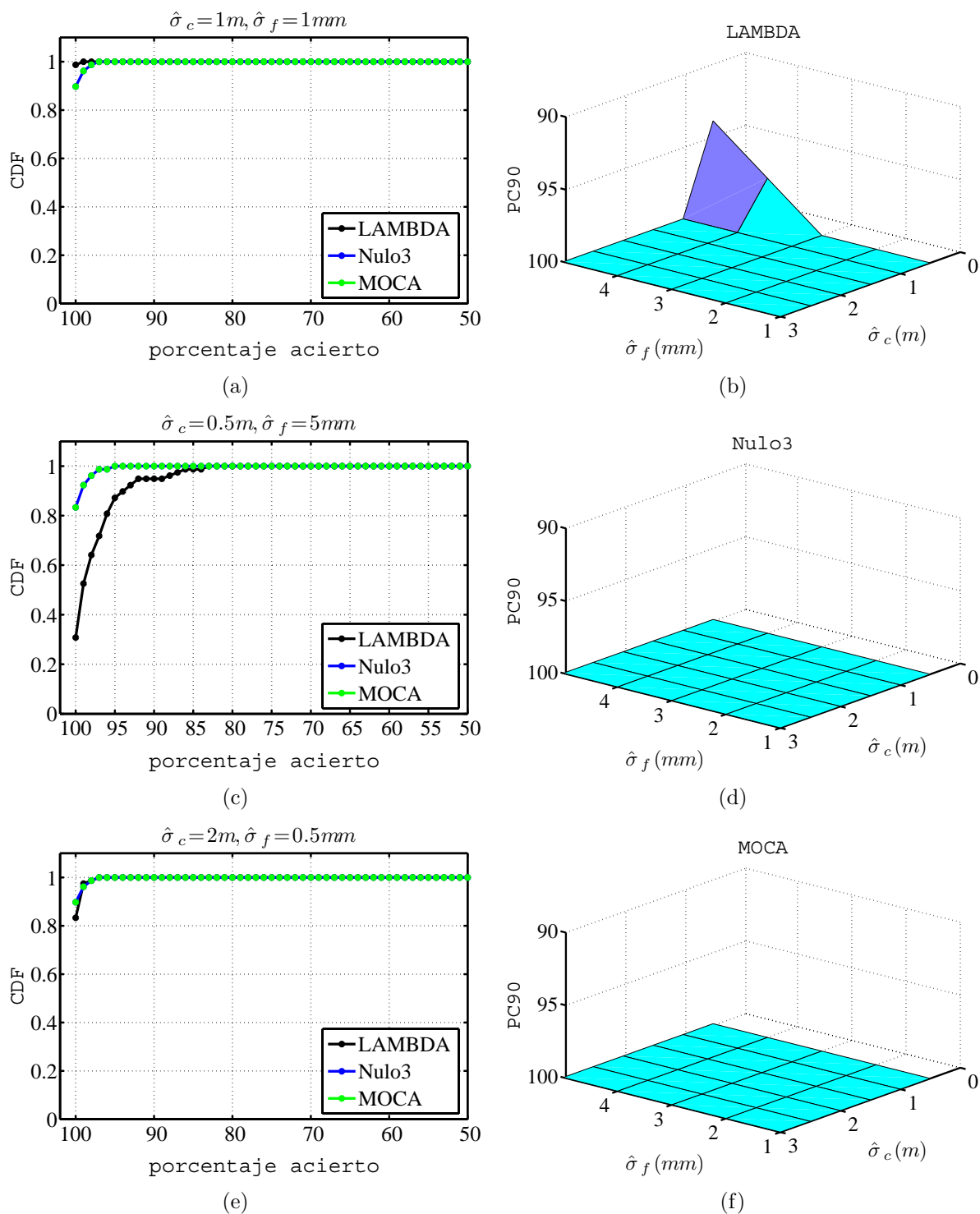


Figura 5.12: CDF y PC90 del porcentaje de acierto para medidas del TCAR TIM 2.

5.5. Conclusiones

En este capítulo se han presentado resultados que permiten evaluar los métodos de resolución de la ambigüedad propuestos, Nulo3 y MOCA. Para dicha evaluación se han comparando los métodos propuestos con un método existente, cuya eficacia está ampliamente reconocida en la bibliografía existente, el método LAMBDA. Por otro lado, gracias a las medidas del TCAR TIM 2, las prestaciones han podido ser evaluadas tanto con medidas simuladas, como con medidas emuladas similares a las del futuro sistema Galileo.

Los resultados presentados demuestran que las prestaciones de los método Nulo3 y MOCA son similares a las del método LAMBDA, aunque un poco inferiores, cuando los errores están bien estimados. Sin embargo, el método LAMBDA es más sensible a malas estimaciones de los errores. En situaciones en las que sólo hay 4 satélites disponibles y los errores están mal estimados las prestaciones del método LAMBDA se reducen significativamente, lo que no ocurre con los métodos Nulo3 y MOCA. Por ello, en esas situaciones los métodos Nulo3 y MOCA presentan mejores resultados que el método LAMBDA. En cuanto a coste computacional, los métodos LAMBDA y MOCA presentan costes reducidos y similares. El método Nulo3 es el que necesita más tiempo para resolver la ambigüedad, no obstante, con el computador que se ha utilizado, dicho exceso de tiempo no supone ningún retardo adicional.

A la vista de los resultados presentados, el método MOCA se erige como una opción muy interesante, alternativa al método LAMBDA. El método MOCA permite resolver la ambigüedad con medidas de tan sólo una época, sin necesidad de mezclar medidas de fase con medidas de pseudodistancia, evitando así los problemas que ello conlleva. El método Nulo3 es otra opción alternativa que tampoco requiere mezclar medidas, aunque tiene un coste computacional mayor.

Capítulo 6

Conclusiones y líneas futuras

Conclusiones generales

Las aportaciones de esta tesis son las siguientes:

- Se ha creado una formulación unificada que permite describir, en los mismos términos, los métodos de resolución de la ambigüedad existentes. Esta formulación ha permitido identificar las ventajas e inconvenientes que tienen los métodos existentes LAMBDA, Nulo y ARCE y los nuevos métodos propuestos en esta tesis.
- Se ha propuesto un nuevo método, el método Nulo3, que es una adaptación del método Nulo a la posibilidad de contar con tres frecuencias que ofrecerán los futuros GNSS. El método Nulo3 aprovecha las tres frecuencias mediante el uso de la técnica *wide-lane* y mejora la exploración de candidatos del método Nulo utilizando una estrategia de exploración que al igual que la del método ARCE, reduce el número de dimensiones del espacio de búsqueda.
- Se ha propuesto un segundo método, el método MOCA, que utiliza el mismo planteamiento que el método Nulo o el método Nulo3 pero que, gracias a un nuevo tipo de factorización, puede utilizar una estrategia de exploración muy eficaz, similar a la del método LAMBDA.
- Se ha creado un simulador para evaluar los métodos de resolución de la ambigüedad. El simulador ha sido validado, comparando las medidas que genera con las que genera un emulador del sistema Galileo, desarrollado por la Agencia Espacial Europea. Con dicho simulador se han evaluado y comparado las prestaciones del método Nulo, Nulo3, MOCA y LAMBDA.

Las conclusiones generales de esta tesis son las siguientes:

- Los métodos MOCA y LAMBDA presentan costes computacionales reducidos y similares. El método Nulo3 tiene un coste mayor, aunque el tiempo de proceso por época, con el computador utilizado, de normales prestaciones, ha resultado ser bastante inferior al intervalo entre épocas normal.
- El método Nulo3 y el método MOCA resuelven la ambigüedad con medidas de sólo una época. El método LAMBDA necesita mezclar las medidas de fase con las de pseudodistancia para poder resolver la ambigüedad en una época. Esta circunstancia hace que el método LAMBDA sea muy sensible a incorrectas estimaciones del error en las medidas. El método Nulo3 y el método MOCA son muy poco sensibles a dicho problema.
- Los métodos Nulo3 y MOCA resuelven la ambigüedad, en condiciones de estimación correcta del error en las medidas, con una eficacia sólo levemente inferior a la del método LAMBDA.
- La eficacia en la resolución de la ambigüedad del método LAMBDA, en condiciones de estimación incorrecta del error, es bastante menor que la de los métodos Nulo3 y MOCA.
- El método MOCA es una alternativa muy interesante al método LAMBDA, pues su eficacia y coste computacional son similares y además, cuando los errores están mal estimados, supera al método LAMBDA. El método Nulo3 es otra alternativa posible, aunque su coste computacional es mayor.

Líneas futuras

Las líneas futuras que se proponen son:

- Incluir en el simulador desarrollado la posibilidad de modelar el efecto multicamino. Para ello, el simulador podría añadir la opción de especificar distintos tipos de entornos urbanos, más o menos densos, especificando los distintos tipos de objetos en los que se pueden producir reflexiones de las señales. De esa forma se podrían generar medidas que incluyeran, además de las fuentes ya implementadas, el efecto multicamino y estudiar el comportamiento de los métodos propuestos en las nuevas condiciones.
- Ampliar el estudio a líneas de base de mayor longitud, es decir, receptores más distantes entre sí. Para ello, dado que en esas circunstancias los efectos atmosféricos son más notables, el simulador deberá modelar de la manera más realista posible dichos efectos. El comportamiento de los métodos propuestos también se estudiaría en dichas circunstancias.
- Actualmente no se conocen con detalle las órbitas que utilizarán los satélites del futuro sistema Galileo. Una vez sean conocidas éstas, el simulador desarrollado se podrá adaptar para que utilice las efemérides específicas del sistema Galileo y así las simulaciones sean más parecidas a las condiciones del futuro sistema.
- Los métodos que se han propuesto han sido evaluados con ayuda del simulador y el emulador del Galileo. En el momento en el que se ponga en funcionamiento el sistema Galileo o la modernización del GPS y existan los receptores correspondientes, se podrán utilizar para hacer estudios de los métodos propuestos con medidas reales.

Apéndice A

Resolución de sistemas sobredeterminados

Los sistemas de ecuaciones sobredeterminados no cuentan, en principio, con una solución que cumpla todas las ecuaciones y requieren buscar una solución de compromiso, normalmente en términos de mínimo error cuadrático. Para ello existen varias opciones. En este apéndice se presentan dos de ellas.

Se parte de un sistema de m ecuaciones y j incógnitas, con $j < m$, es decir, un sistema sobredeterminado. Además, se asume que las medidas sufren un error aditivo. Un sistema de ecuaciones de esas características podría ser, en formato matricial, el de la siguiente expresión:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (\text{A.1})$$

donde \mathbf{y} es el vector de medidas, \mathbf{H} es la matriz del sistema, \mathbf{x} es el vector de incógnitas y \mathbf{v} es el error aditivo. De dicho error sólo se conoce que su media es nula y su covarianza \mathbf{Q}_v . Las medidas presentarán, por tanto, una covarianza $\mathbf{Q}_y = \mathbf{Q}_v$. Al ser la media del error nula, una buena estimación de la solución es la que resulta de resolver el sistema sin tomar en consideración dicho error. Sin embargo, precisamente por ese error, no habrá ninguna solución que satisfaga todas las ecuaciones del sistema. Para una posible solución $\hat{\mathbf{x}}$, el vector residuo \mathbf{r} , diferencia entre la observación y lo que se observaría para esa solución en ausencia de error, refleja esta circunstancia

$$\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} \quad (\text{A.2})$$

La mejor estimación de la solución $\hat{\mathbf{x}}$ será aquella que satisfaga mejor las ecuaciones. Para ello, es necesario definir un escalar R que mida el grado de insatisfacción y proceder a encontrar la solución que lo minimiza. Existen varias alternativas para definir R y según la elegida se obtendrán distintas soluciones óptimas. A continuación se describirán dos de las más utilizadas.

A.1. Solución de mínimos cuadrados ordinaria

La solución de mínimos cuadrados ordinaria define R como la norma cuadrática del vector residuo, es decir,

$$R = \|\mathbf{r}\|^2 = \mathbf{r}^T \mathbf{r} = (\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}})^2 \quad (\text{A.3})$$

Para minimizarla se iguala a cero el gradiente:

$$\nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \|\mathbf{r}\|^2 = -2\mathbf{H}^T(\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}) = 0 \quad (\text{A.4})$$

y se despeja $\hat{\mathbf{x}}$

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y} \quad (\text{A.5})$$

La matriz que relaciona las observaciones con la solución se suele denotar como \mathbf{A} , que en este caso es

$$\mathbf{A} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \quad (\text{A.6})$$

que además permite expresar la covarianza de la estimación como

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = E[(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})^T] = \mathbf{A} \mathbf{Q}_y \mathbf{A}^T \quad (\text{A.7})$$

donde \mathbf{Q}_y es la covarianza de las observaciones.

A.2. Solución de mínimos cuadrados con covarianza de las medidas conocida

Cuando la covarianza de las medidas es conocida, existe una alternativa mejor que la solución de mínimos cuadrados ordinaria. Dicha alternativa consiste en tomar como solución aquella cuyo error esperado sea mínimo. Lo que equivale a minimizar la covarianza de la estimación $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$. Se puede demostrar [Stra97] que minimizar $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$, es equivalente a minimizar R definido como la norma cuadrática del residuo, pero ponderada por la inversa de la covarianza de las medidas, es decir,

$$R = \|\mathbf{r}\|_{\mathbf{Q}_y^{-1}}^2 = \mathbf{r}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{r} = (\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{Q}_y^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}) \quad (\text{A.8})$$

que igualando a cero su gradiente

$$\nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \|\mathbf{r}\|_{\mathbf{Q}_y^{-1}}^2 = -2\mathbf{H}^T \mathbf{Q}_y^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}) = 0 \quad (\text{A.9})$$

permite obtener

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{y} \quad (\text{A.10})$$

con lo que en este caso \mathbf{A} será

$$\mathbf{A} = (\mathbf{H}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \quad (\text{A.11})$$

y la covarianza de la estimación minimizada vendrá dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A} \mathbf{Q}_y \mathbf{A}^T \\ &= (\mathbf{H}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{Q}_y ((\mathbf{H}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{Q}_y^{-1})^T \\ &= (\mathbf{H}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{Q}_y^{-T} \mathbf{H} (\mathbf{H}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{H})^{-T} \\ &= (\mathbf{H}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{H})^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

El residuo correspondiente a la solución obtenida será

$$\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{y} = (\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{A})\mathbf{y} \quad (\text{A.13})$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad. La norma cuadrática ponderada que le corresponde, a la que se suele denominar *residuo cuadrático* y denotar como Ω , viene dada por:

$$\Omega = \|\mathbf{r}\|_{\mathbf{Q}_y^{-1}}^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{Q}_y^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y} \quad (\text{A.14})$$

con \mathbf{B} definida como

$$\mathbf{B} = (\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{A})^T \mathbf{Q}_y^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{A}) \quad (\text{A.15})$$

Apéndice B

Cálculo estadístico de $\Omega_{\text{máx}}$

El método Nulo (sec. 2.2.3) requiere fijar el parámetro $\Omega_{\text{máx}}$ que define las fronteras de su espacio de búsqueda. En este apéndice se propone un método, basado en estudios estadísticos, para fijar dicho parámetro.

El parámetro $\Omega_{\text{máx}}$ es el máximo valor permitido del residuo cuadrático Ω_k correspondiente a un candidato perteneciente al espacio de búsqueda. El residuo cuadrático viene dado por

$$\Omega_k = (\mathbf{y} - \mathbf{n}_k)^T \mathbf{B} (\mathbf{y} - \mathbf{n}_k) \quad (\text{B.1})$$

El procedimiento que se propone para calcular el parámetro $\Omega_{\text{máx}}$ se basa en estudiar la distribución estadística de Ω_k y calcular el valor de $\Omega_{\text{máx}}$ que garantiza que $P(\Omega_k < \Omega_{\text{máx}})$ es igual a un nivel de confianza aceptado. El cálculo se hace para el caso en que el candidato \mathbf{n}_k sea el vector solución \mathbf{n} . Para poder estudiar la distribución de Ω_k es necesario expresar la ecuación B.1 de manera que las componentes aleatorias, las fuentes de error, queden manifiestas, lo que se hace en la descripción del método Nulo, llegándose a la ecuación 2.55, que para el caso en que $\mathbf{n}_k = \mathbf{n}$ ($\mathbf{m}_k = 0$) se convierte en

$$\Omega_k = \mathbf{v}^T \mathbf{B} \mathbf{v} \quad (\text{B.2})$$

donde \mathbf{v} es el error que afecta a las medidas, de media cero y covarianza \mathbf{Q}_v (véase Ecu. 1.43). Haciendo una descomposición en valores singulares de la matriz \mathbf{B} la ecuación B.2 se puede expresar como

$$\Omega_k = \mathbf{v}^T \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{U}^T \mathbf{v} = \sum_{q=1}^{m-3} \lambda_q w_{kq}^2 \quad (\text{B.3})$$

donde los λ_q son los autovalores no nulos de la matriz \mathbf{B} y los w_{kq} son los elementos de la matriz $\mathbf{w}_k = \mathbf{U}^T \mathbf{v}$. Asumiendo que las variables de \mathbf{v} tienen distribución normal, las variables w_{kq} tendrán también distribución normal. Por ello, Ω_k es una suma ponderada

de variables normales al cuadrado. Sin embargo, las variables w_{kq} están, en general, correlacionadas entre sí, pues \mathbf{Q}_v no es una matriz diagonal. No obstante, es posible hacer una transformación, que se traduzca en una diagonalización de la covarianza de las variables resultantes, de manera que la ecuación B.3 se convierta en

$$\Omega_k = \sum_{q=1}^{m-3} h_q z_{kq}^2 \quad (\text{B.4})$$

donde, ahora, las variables z_{kq} siguen teniendo distribución normal, pero están incorrelacionadas, lo que se traduce en que son independientes, ya que son gaussianas. Además, la transformación se puede hacer de manera que las variables z_{kq} tengan todas varianza unidad. En esas condiciones, la distribución de Ω_k queda expresada como suma cuadrática de variables normales independientes de varianza unidad y ponderadas por los pesos h_q , es decir, una distribución *chi-cuadrado* ponderada y con $m-3$ grados de libertad. Cada uno de los términos del sumatorio es una variable *chi-cuadrado* de 1 grado de libertad y peso h_q , con lo que su función de densidad de probabilidad (veáse [Papo91]) viene dada por

$$f(x) = \frac{x^{-1/2} e^{-\frac{x}{2h_q}}}{(2h_q)^{1/2} \Gamma(1/2)} \quad x \geq 0 \quad (\text{B.5})$$

siendo Γ , la función gamma definida como

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (\text{B.6})$$

Por otro lado, la función densidad de probabilidad de una variable gamma viene dada por

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \quad x \geq 0 \quad (\text{B.7})$$

Como se puede observar de las ecuaciones B.5 y B.7, cada una de las variable *chi-cuadrado* es un caso particular de una variable gamma para $\alpha = 1/2$ y $\beta = 2h_q$. En [Alou01] se demuestran expresiones para calcular probabilidades de distribuciones de sumas ponderadas de variables *gamma* independientes. Dichas expresiones son aplicables en este caso y, una vez sustituidos los valores de α y β de cada una de las variables gamma, quedan como sigue

$$p(\Omega_k < \Omega_{\text{máx}}) = \prod_{s=1}^{m-3} \left(\frac{h_1}{h_s} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{t=0}^{\infty} \delta_t P \left(\frac{m-3}{2} + t, \frac{\Omega_{\text{máx}}}{2h_1} \right) \quad (\text{B.8})$$

donde los coeficientes δ_t se calculan recursivamente como

$$\delta_{t+1} = \frac{1}{t+1} \sum_{u=1}^{t+1} \left[\sum_{v=1}^{m-3} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{h_1}{h_v} \right)^u \right] \delta_{t+1-u} \quad (\text{B.9})$$

$$\delta_0 = 1 \quad (\text{B.10})$$

En las fórmulas, P es la función gamma incompleta. El sumatorio hasta infinito puede ser truncado hasta un valor finito de acuerdo con la precisión que se quiera alcanzar (un valor razonable puede ser 100). De esa manera, para un nivel de confianza aceptado de $p(\Omega_k < \Omega_{\text{máx}})$ se puede calcular el valor de $\Omega_{\text{máx}}$ que lo garantiza, usando las expresiones B.8 - B.10

Referencias

- [Alou01] M.S. Alouini, A. Abdi, M. Kaveh. “Sum of Gamma variates and performance of wireless communication systems over Nakagami-fading channels”. *IEEE Trans. Vehicular Technology*, vol. 50 N° 6, pág. 1471-1480, Noviembre 2001.
- [Apos75] T. Apostol. *Calculus*. Vol. 2, Reverte, 1975.
- [Atki92] L. Atkinson, M. Atkinson. *Programación en Borland C++ 3.x.* Anaya Multimedia, 1993.
- [Bisc05] W. Bischoff, B. Heck, J. Howind, A. Teusch. “A procedure for testing the assumption of homoscedasticity in least squares residuals: a case study of GPS carrier-phase observations”. *Journal of Geodesy*, Vol. 78, N° 7-8, pág. 397-404, Febrero 2005.
- [Bisn00] S.B. Bisnath, R.B. Langley. “Automated cycle-slip correction of dual-frequency kinematic GPS data.” Actas del *47th Annual Conference of the Canadian Aeronautics and Space Institute*, pág. 121-125, Abril 2000, Ottawa, Canadá.
- [Booc00] G. Booch, J. Rumbaugh, I. Jacobson. *UML. El lenguaje unificado de modelado*. Addison Wesley, 2000.
- [Braa99] M.S. Braasch, J. V. Dierendonck. “GPS Receiver Architectures and Measurements”. Actas del *1999 IEEE*, Vol. 87, N° 1, pág. 48-64, Enero 1999.
- [Char00] F. Charte. *Programación con C++ Builder 5*. Anaya Multimedia, 2000.
- [Chen95] D. Chen, G. Lachapelle. “A comparison of the FASF and least-squares search algorithms for on-the-fly ambiguity resolution”. *Journal of the Institute of Navigation*, Vol. 42, N° 2, pág. 371-390, Verano 1995.
- [Coll96] P. Collins, R. Langley. “Limiting factors in tropospheric propagation delay error modelling for GPS airborne navigation”. Actas del *52nd Annual Meeting of The Institute of Navigation*, pág. 519-528, Junio 1996, Massachusetts, EEUU.

- [Comp98] C.J. Comp, P. Axelrad. "Adaptive SNR-based carrier phase multipath mitigation technique". *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 33, N° 1, pág. 264-276, Enero 1998.
- [Fern99] U. Fernández Plazaola, T.M. Martín Guerrero, J.T. Entrambasaguas Muñoz. "Simulation software tool for GPS systems". Actas del *International Symposium on Recent Advances in Microwave Technology 1999 (IS-RAMT'99)*, pág. 92-95, Diciembre 1999, Málaga.
- [Fern00] U. Fernández Plazaola, T.M. Martín Guerrero, J.T. Entrambasaguas Muñoz. "Simulation software tool for GPS carrier phase integer ambiguity estimation". Actas del *Microwave Symposium 2000 (MS'00)*, pág. 92-95, Mayo 2000, Tetuan, Marruecos.
- [Fern04] U. Fernández Plazaola, T.M. Martín Guerrero, J.T. Entrambasaguas Muñoz, M. Martín Neira. "The Null method applied to GNSS three-carrier phase ambiguity resolution". *Journal of Geodesy*, Vol. 78, N° 1-2, pág. 96-102, Septiembre 2004.
- [Fern05] U. Fernández Plazaola, T.M. Martín Guerrero, J.T. Entrambasaguas Muñoz. "A new method for single-epoch GNSS three-carrier ambiguity resolution". Enviado para su publicación en *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*.
- [Font01] R.D. Fontana, W. Cheung, T. Stansell. "The Modernized L2 Civil Signal". *GPS World*. pág. 28-34, Septiembre 2001.
- [Font02] R.D. Fontana, W. Cheung, P.M. Novak, T. Stansell. "The New L2 Civil Signal". <http://www.navcen.uscg.gov/gps/modernization>
- [Frei90] E. Frei, G. Beutler. "Rapid static positioning based on the fast ambiguity resolution approach "FARA": theory and first results". *Manuscripta Geodaetica*, Vol. 15, N° 4, pág. 325-356, 1990.
- [Gali03] "The Galilei Project. GALILEO Design Consolidation". http://europa.eu.int/comm/dgs/energy_transport/galileo
- [GPS200] Interface Control Document GPS (200). Navstar GPS.
- [Gill81] P.E. Gill, W. Murray, M.H. Wright. *Practical optimization*. Academic Press, 1981.
- [Gurt94] Gurtner, Werner "RINEX: The Receiver Independent Exchange Format". Version 2.10 <http://igsbc.jpl.nasa.gov/igsbc/data/format/rinex210.txt> o <http://www.ngs.noaa.gov/CORS/rinex210.txt>

- [Han99] S. Han, C. Rizos. "The impact of two additional civilian GPS frequencies on ambiguity resolution strategies". Actas del *55th National Meeting U.S. Institute of Navigation*, pág. 315-321, Junio 1999, Cambridge, Massachusetts.
- [Hatc90] R. Hatch. "Instantaneous ambiguity resolution". Actas del *Symposium on Kinematic Systems in Geodesy, Geomatics & Surveying 1990 (KIS'90)*, pág. 299-308, Septiembre 1990, Banff, Canada.
- [Hatc00] R. Hatch, J. Jung, P. Enge, B. Pervan. "Civilian GPS: The Benefits of Three Frequencies". *GPS Solutions*, Vol. 3, N° 4, pág. 1-9.
- [Hein01] G. W. Hein, J. Godet, J.L. Issler, J.C. Martin, R. Lucas-Rodriguez, T. Pratt. "The Galileo frequency structure and signal design". Actas del *14th International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GPS'01)*, pág. 1273-1282, Septiembre 2001, Salt Lake City, EEUU.
- [Hein02] G. W. Hein, J. Godet, J.L. Issler, J.C. Martin, P. Erhard, R. Lucas, T. Pratt. "Status of Galileo Frequency and Signal Design". Actas del *15th International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GPS'02)*, pág. 266-277, Septiembre 2002, Oregon, EEUU.
- [Hein04] G.W. Hein, M. Irsigler, J.A. Avila-Rodriguez, T. Pany. "Performance of Galileo L1 Signal Candidates". Actas del *European Navigation Conference GNSS 2004*, Mayo 2004 Rotterdam, Holanda.
- [Hern03] M. Hernández-Pajares, J.M. Juan Zornoza, J. Sanz Subirana, O. L. Colombo. "Feasibility of Wide-Area Subdecimeter Navigation With GALILEO and Modernized GPS". *IEEE Trans. Geoscience and Remote Sensing*, vol. 41 N° 9, pág. 2128-2131, Septiembre 2003
- [Hofn97] B. Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger, J. Collins. *GPS. Theory and Practice*, Springer-Verlag, 1997.
- [Jong96a] P.J. Jonge, C.C.J.M. Tiberius, P.J.G. Teunissen. "Computational aspects of the LAMBDA method for GPS ambiguity resolution". Actas del *9th International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GPS'96)*, pág. 935-944, Septiembre 1996, Kansas, EEUU.
- [Jong96b] P.J. Jonge, C.C.J.M. Tiberius. "The LAMBDA method for integer ambiguity estimation: implementation aspects". Publicaciones del *Delft Geodetic Computing Centre*, N° 12, LGR Series.

- [Joos99] P. Joosten, P.J.G. Teunissen, N. Jonkman. "GNSS Three Carrier Phase Ambiguity Resolution using the LAMBDA-method". *Actas del 3rd European Symposium on Global Navigation Satellite Systems (GNSS'99)*, pág. 367-372, Octubre 1999, Genova, Italia.
- [Jung00] J. Jung, P. Enge, B. Pervan. "Optimization of Cascade integer resolution with three civil GPS frequencies". *Actas del 13th International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GPS'00)*, pág. 2191-2200, Septiembre 2000, Salt Lake City, EEUU.
- [Kapl96] E.D. Kaplan, *Understanding GPS. Principles and applications*. Artech House, 1996.
- [Kim00] D. Kim, R.B. Langley, "GPS Ambiguity Resolution and Validation: Methodologies, Trends and Issues". *Actas del 7th GNSS Workshop - International Symposium on GPS/GNSS*, pág. 213-221, Noviembre 2000, Seul, Corea.
- [Mart95] M. Martín Neira, M. Toledo, A. Pelaez. "The Null Space Method for GPS Integer Ambiguity Resolution". *Actas del 4th International Conference on Differential Satellite Navigation Systems, (DSNS'95)*. Artículo N° 31, Abril 1995, Bergen, Noruega.
- [Papo91] A. Papoulis. *Probability. Random Variables, and Stochastic Processes*. Mc Graw Hill, 1991.
- [Park96] B. W. Parkinson, J.J. Spilker. *Global Positioning System: Theory and Applications*. Vol I y II, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1996.
- [Park97] C. Park, I. Kim, J.G. Lee, G. Jee. "Efficient technique to fix GPS carrier phase integer ambiguity on-the-fly". *IEE Proceedings Radar, Sonar and Navigation*, Vol. 144, N°3, pág. 148-155, Junio 1997.
- [Prat97] M. Pratt, B. Burke, P. Isra. "Single-Epoch Integer Ambiguity Resolution with GPS L1-L2 Carrier Phase Measurements". *Actas del 10th International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GPS'97)*, pág. 1737-1746, Septiembre 1997, Kansas, EEUU.
- [Rich05] T. Richert, N. El-Sheimy. "Ionospheric Modeling". *GPS World*, pág. 35-40, Junio 2005.
- [Rodr00] R. Rodriguez Lara. "Mejoras de las prestaciones de un receptor GPS empleando filtros de Kalman" Proyecto Fin de Carrera, Dpto. Ingeniería de Comunicaciones. Universidad de Málaga, 2000.

- [Roy00] E. Roy, U. Vollath. "Laboratory Experiment On Carrier Phase Positioning Techniques for GNSS-2 (TCAR-Test)". Spectra Precision Terrasat, contrato con la ESA n° 12406/77/NL/DS, Alemania, Septiembre 2000.
- [Seco05] G. Seco Granados, J.A. Fernández Rubio, C. Fernández Prades, "ML Estimator and Hybrid Beamformer for Multipath and Interference Mitigation in GNSS Receivers". *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 53, N° 3, Marzo 2005.
- [Shux02] C. Shu-xin, W. Yong-sheng, D. Yan. "A Rapid Algorithm for GPS Ambiguity Decorrelation". Actas del *5th IEEE International Conference on Intelligent Transportation Systems*, pág. 904-909, Septiembre 2002, Singapur.
- [Schn99] R.B. Schnabel, E. Eskow. "A Revised Modified Cholesky Factorization Algorithm". *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 9, N° 4, pág. 1135-1148.
- [Stra97] G. Strang, K. Borre. *Linear Algebra, Geodesy, and GPS*. Wellesley-Cambridge Press, 1997.
- [Stra86] G. Strang. *Algebra Lineal y sus aplicaciones*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1986.
- [Teun94] P.J.G. Teunissen, "A new method for fast carrier phase ambiguity estimation". Actas del *IEEE Position, Location and Navigation Symposium (PLANS'94)*, pág. 562-573, Abril 1994, Las Vegas, EEUU.
- [Teun94] P.J.G. Teunissen, P.J. Jonge, C.C.J.M. Tiberius. "On the spectrum of the GPS DD-Ambiguities" Actas del *7th International Technical Meeting of The Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GPS'94)*, pág. 115-124, Septiembre 1994, Salt Lake City, EEUU.
- [Teun95] P.J.G. Teunissen, P.J. Jonge, C.C.J.M. Tiberius. "The LAMBDA method for fast GPS surveying". Actas del *International Symposium "GPS Technology Applications"*, pág. 203-210, Septiembre 1995, Bucharest, Rumania.
- [Teun96] P.J.G. Teunissen, P.J. Jonge, C.C.J.M. Tiberius. "The Volume of the GPS Ambiguity Search Space and its Relevance for Integer Ambiguity Resolution". Actas del *9th International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GPS'96)*, pág. 889 - 898, Septiembre 1996, Kansas, EEUU.
- [Teun97] P.J.G. Teunissen. "On the GPS widelane and its decorrelation property". *Journal of Geodesy*, Vol. 71, N° 9, Agosto 1997, pág. 577-587.

- [Teun99] P.J.G. Teunissen. “An optimality property of the integer least-squares estimator”. *Journal of Geodesy*, Vol. 73, N° 11, Diciembre 1999, pág. 587-593.
Jour Geodesy 1999 - Teunissen - .pdf
- [Teun02] P.J.G. Teunissen, P. Joosten, C.C.J.M. Tiberius. “A comparison of TCAR, CIR and LAMBDA GNSS ambiguity resolution”. Actas del *15th International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GPS'02)*, pág. 2279-2808, Septiembre 2002, Portland, EEUU.
- [Tibe02] C. Tiberius, T. Pany, B. Eissfeller, P. Joosten, S. Verhagen. “0.99999999 confidence ambiguity resolution with GPS and Galileo”. *GPS Solutions*, Vol. 6, N° 1-2, NOVIEMBRE 2002, pág. 96-99.
- [Voll99] U. Vollath, S. Birnbach, H. Landau, J.M. Fraile Ordoñez, M. Martin Neira. “Analysis of Three-Carrier Ambiguity Resolution (TCAR) Technique for Precise Relative Positioning in GNSS-2”. Actas del *12th International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GPS'99)*, pág. 417-426, Septiembre 1999, Nashville, EEUU.
- [Voll04] U. Vollath. “The Factorized Multi-Carrier Ambiguity Resolution (FAMCAR) Approach for Efficient Multi-Carrier Ambiguity Estimation”. Actas del *17th International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GNSS'04)*, Septiembre 2004, Long Beach, California, EEUU.
- [Yuma] <http://www.navcen.uscg.gov/gps/almanacs.htm>, página web de “GPS Almanac information”, ,*Navigation Center, U.S. Coast Guard*.
- [Zsal00] W. Zsalcsik. *AGGA Validation. Test Setup, User Manual*, Austrian Aerospace, Mayo 2000.