UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Introducción a la Didáctica de la Geometría

José maría Sánchez Sáez

Área de Didáctica de las Matemáticas

Este documento está y, posiblemente, estará en proceso para siempre. Son mis notas para mis clases y las pongo a vuestra disposición.

2019-2024 Versión inicial del documento y sucesivas modificaciones por José María Sánchez Sáez y Antonio Ortíz Villarejo.

Versión: 2025-05-25 16:13

Índice general

Contenidos matemáticos

0

Prefacio

Este documento es la recopilación de los materiales que queremos usar como apoyo para nuestra práctica docente en la asignatura de Didáctica de la Geometría.

Ha surgido de la necesidad de dar forma a un cuerpo de conocimientos y prácticas que queremos transmitir a nuestros estudiantes, los futuros docentes.

Si bien el contenido de este documento es producción de los autores, es indiscutible la influencia del trabajo de Godino y Ruíz (2003) que, hasta la creación de este documento, ha sido uno de los textos que hemos usado de referencia. Agradecer públicamente su trabajo.

Como todo trabajo que tenga una base de Matemáticas, éste documento está construido sobre muchos materiales y recursos que se han estudiado y analizado al cabo del tiempo. Se ha intentado referenciar todas las fuentes de cualquier planteamiento o idea, aunque es más que posible que se nos haya quedado alguna en el tintero. No es un acto de mala fe. Simplemente, escribir este documento ha sido una tarea muy absorvente y seguro que se nos ha pasado algo. No nos lo tengáis a mal. Es bastante evidente que muy pocas de las ideas de este trabajo son propias. Son elaboraciones a partir de los más diversos materiales.

Por otro lado, rastreando el origen de ciertos planteamientos o ideas no ha permitido encontrar su origen, con lo que no se refiere. Tampoco nos otorgamos la autoría.

1 Geometría, espacio y percepción espacial

...el objetivo de la educación matemática debe ser producir ciudadanos educados y no una pobre imitación de una calculadora de 30$

K. Devlin

1.1 Introducción

Uno de los paisajes más sorprendentes que se pueden encontrar es la Calzada del Gigante[1], una formación geológica en Irlanda del Norte, formada por 40000 columnas de basalto. Tiene el aspecto de haber sido construido con muchísimos prismas hexagonales, organizados de forma regular en una rejilla. Y esta rejilla recuerda a un panal de abejas.

La similitud entre ambas estructuras no se debe a la casualidad. Ambas surgen de la necesidad estructural.

En el caso del panal, la forma de rejilla hexagonal es la forma de conseguir el máximo espacio vacío con la menor cantidad de material y, sobre todo, la que mejor reparte la tensión de la estructura. Durante millones de años la naturaleza, mediante la selección natural, ha propiciado que las abejas eligieran la estructura que era óptima para su función.

El proceso geológico mediante el que se formó la Calzada de los Gigantes provocó una gran tensión en el material, que se contrajo y se rompió de forma que esa tensión se encontrara lo más repartida posible, dando lugar a la misma rejilla hexagonal.

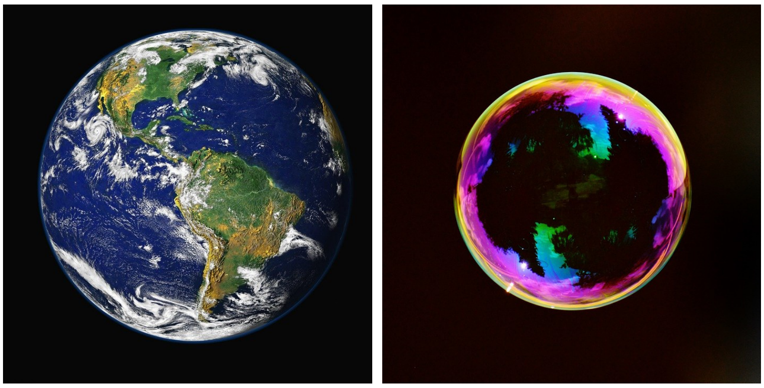
Así, dos elementos, en principio totalmente desconectados, dan lugar a una situación que se resuelve con la misma estructura.

https://pixabay.com/es/photos/calzada-del-gigante-irlanda-del-norte-1182945/
https://pixabay.com/es/photos/panal-las-abejas-hex%C3%A1gonos-peine-330755/

Figura 1.1: Ejemplos de hexágonos en la naturaleza: a la izquierda la Calzada del Gigante y a la derecha un panal de abejas

[1] https://es.wikipedia.org/wiki/Calzada_del_Gigante

Pero no es este el único caso. Consideremos por ejemplo nuestro planeta. Casi todos saben que es esférico, como Marte, Júpiter, Venus, el Sol y la mayoría de los otros cuerpos celestes de un cierto tamaño que nos rodea. Y tiene la misma forma que una pompa de jabón. Y esta forma es la esfera.



https://pixabay.com/es/photos/la-tierra-planeta-azul-mundo-11015/
https://pixabay.com/es/photos/burbuja-de-jab%C3%B3n-colorido-bola-824558/

Figura 1.2: Ejemplos de esferas en la naturaleza

En el caso de la Tierra, esta forma se debe a la gravedad. Si algo está demasiado alto, la gravedad lo atrae y lo que hay debajo crea presión hacia los lados, creando un hueco en el que esa protuberancia tiende a hundirse y la protuberancia a achatarse. Por eso, el volcán más grande de nuestro sistema solar está en un planeta geológicamente muerto (mientras no se demuestre lo contrario) como Marte en lugar de la Tierra, que aun sigue vivo. Marte es más pequeño, "hunde" menos las protuberancias y pueden existir. En la tierra, el monte Olympus se hundiría bajo su propio peso. Así que si algo rompe en exceso el aspecto esférico, la presión sobre la superficie del planeta haría que se acabara alisando.

Las pompas de jabón por otro lado, son películas increíblemente finas, cinco mil veces menor que un cabello. Estas películas forman un sándwich muy delgado entre dos superficies (exterior e inferior) y una capa muy delgada de agua entre medio. Las moléculas de la superficie, simplificando, se mantienen unidas unas a otras mediante la "tensión superficial", una fuerza que hace que las moléculas que están en la superficie tengan más tendencia a estar unidas que las del interior.

Esta superficie intenta equilibrar la tensión por toda la superficie y la forma que mejor reparte esa tensión es la esfera. Así, de nuevo, una necesidad física lleva a tener la misma forma.

Sin embargo, si observamos más en conciencia todos estos ejemplos, podemos observar pequeñas fallas. En la Calzada del Gigante no todos los prismas son hexagonales, habiéndolos pentagonales, o con lados desiguales. En los panales hay celdas que no corresponden completamente con la estructura (aunque en la foto que se ha escogido parece perfecta). En al Tierra están las montaña, fosas, etc, que no hacen que sea totalmente lisa. Y en la pompa de jabón, los colores iridiscentes que se pueden observar se debe a diferencias en la refracción de la luz, debido a pequeñas variaciones (tampoco hay sitio para mucho más) en el grosor de la película.

Así que, en realidad, esas estructuras no están ahí. Es nuestra percepción las que las ha creado. Es nuestra mente la que ha hecho una construcción idealizada en cómo se ha estructurado el espacio. Y eso es de lo que trata el campo de estudio de la Geometría.

Y en este curso vamos a intentar dotaros de las herramientas para que seáis capaces de entenderla, amarla y transmitirla.

1.2 El espacio y la percepción espacial

Como se ha aproximado en los ejemplos anteriores, la Geometría es la respuesta conceptual, a través de las Matemáticas, a la configuración del espacio que se da a nuestro alrededor, configuración desarrollada por nosotros mismos o por la misma naturaleza.

1.2.1 Espacio

El concepto del espacio es innato al ser humano. Necesita trabajar con él desde el origen de los tiempos tanto para encontrar la caza, ubicar su tierra de cultivo, localizar a sus parientes, predecir las épocas de las cosechas a partir de los movimientos de los cuerpos celestes, medir los campos de cultivo y estimar la cosecha, construir casas, monumentos, carreteras, etc.

Sin embargo, aunque nos rodee y vivamos inmersos en él, definirlo es complejo y, en su concepción más amplia, se refiere al *medio en el que vive el individuo*.

Este medio es complejo y difuso y está formado por los conjuntos de elementos, seres, objetos, propiedades, relaciones, experiencias y sensaciones, incluido el propio cuerpo, que determinan el proceso constante de desarrollo y adaptación del ser humano al entorno vital.

Al tratar con el concepto de espacio se mezclan aspectos objetivos y subjetivos:

- Hay una realidad *objetiva* al individuo que está, más o menos, consensuada, y que se supone que tiene existencia en si misma, independientemente del individuo y su percepción. Este es el entorno o medio en el sentido más amplio de la palabra.
- Y una parte *subjetiva*, que es la que tiene que ver con la apreciación e interpretación de todo lo que ocurre y se percibe a través de los sentidos y de la participación en las experiencias con el entorno, consigo mismo y con los demás.

El espacio subjetivo está *condicionado* por las percepciones e interpretaciones del espacio objetivo o exterior al sujeto, las cuales, a su vez, están influenciadas por sus experiencias vitales.

1.2.2 La percepción espacial

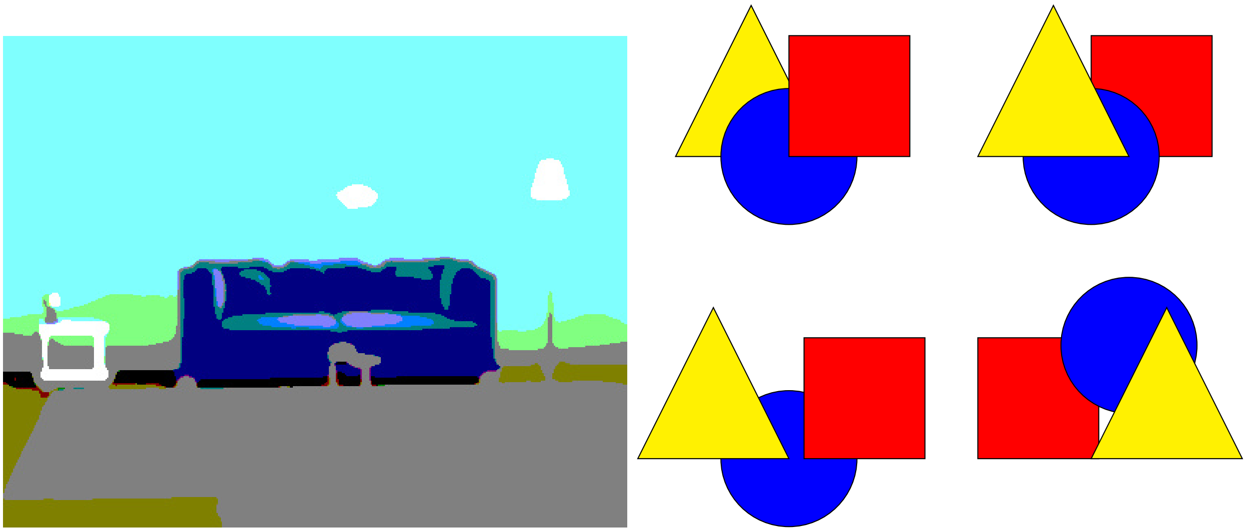
La transferencia entre espacio objetivo y subjetivos se lleva a cabo mediante la *percepción espacial*, que es la capacidad que tiene el ser humano de su relación con el entorno en el espacio que nos rodea y de nosotros mismos.

Se podría considerar como la acción y el resultado del intercambio de información de la mente y el cuerpo con el entorno.

En este intercambio, desde su nacimiento y tomando como referencia el propio cuerpo, el individuo llega al conocimiento del espacio de manera directa a *través de los sentidos* mediante la *exploración* y *manipulación* de los objetos que en él se encuentran, así como a través de sus movimientos y desplazamientos.

Paulatinamente va distinguiendo los *elementos*, percibiendo y conociendo las *relaciones* y *representando* mentalmente toda la información en una *organización estructurada* que evoluciona muy rápidamente en los primeros años de vida.

Esta percepción está, por tanto, muy *condicionada* por la estructura conceptual *subjetiva* del propio sujeto.



https://www.publicdomainpictures.net/es/view-image.php?image=272584&picture=habitacion
José María Sánchez

Figura 1.3: Dos ejemplos en los que la percepción utiliza los esquemas mentales ya construidos

Hagamos un pequeño ejercicio. Observemos la figura 1.3, la de la izquierda. £Qué ves? Espero que me digas que un sofá en lo que parece una habitación. Incluso podrías indicar que el sofá es de color azul, que parece haber una mesita al lado y algo que parece una lampara.

Veamos la figura de la derecha. £Cómo están situados los objetos? Si los recorremos de izquierda a derecha y de arriba a abajo, espero que me digas que en el primer están colocados, de atrás a adelante como triángulo, circulo y cuadrado. En el siguiente cuadrado, círculo y triángulo. En la siguiente fila, el primero, sabemos que el círculo está atrás, y que el triángulo y el cuadrado delante de él, pero poco más. Y en el último, gracias a una pequeña solapación se puede observar que están colocados cuadrado, círculo y triángulo.

Y después de terminar tan laborioso trabajo os digo que eso no es lo que hay. En realidad, ninguna de esas cosas existen. Son sólo manchas de color. El dibujo del sofá es un dibujo a tres colores que *nuestro cerebro* es capaz de identificar con un patrón que conoce muy bien y es el de la imagen de un sofá visto desde enfrente. Pero esa imagen no es la de un sofá.

Como este ejemplo puede ser un poco duro de aceptar, veamos el de la derecha. En el primero, £está el círculo azul detrás del cuadrado? O más bien, se ha dibujado un trozo de círculo que está, lado con lado, con el cuadrado. Así nuestro cerebro, a partir de la imagen de un mundo real construye un mundo percibido. Se monta una representación idealizada que existe únicamente en nuestro cerebro y que tiene unas propiedades que sólo existen, en principio, para esa construcción idealizada.

Este es un ejemplo de la diferencia entre lo real y lo percibido.

1.3 Interpretación matemática del espacio: modelización

La *Geometría* es la parte de las Matemáticas que estudia las idealizaciones del espacio, en términos de propiedades y medidas de las figuras geométricas.

No estudia el espacio en sí, sino *objetos ideales* (polígono, punto, arista, giros, etc), sus propiedades y realaciones, que se organizan por teorías, construcciones que se llevan a cabo a partir de la *abstracción* de cualidades del espacio real o de otros objetos ideales creados previamente.

En el espacio real no existen los círculos, pentágonos, rectas, puntos o esferas, sino objetos con forma de ... o modelizados por .... La realidad física siempre es menos perfecta que el ideal representado por un objeto geométrico.

Uno de los problemas didácticos que aparecen con asiduidad es la utilización del mismo término para designar un *objeto* ("El triángulo" como instrumento de percusión) y el *concepto geométrico* ("el triángulo" isósceles).

Los objetos matemáticos, como objetos abstractos, tienen una serie de propiedades que suelen hacer que su representación sea imposible:

- Los puntos son adimensionales, es decir, miden cero en cualquiera de sus dimensiones. Por tanto no tienen superficie y, consecuentemente, no se verían. Así que cuando dibujamos un punto en un papel, en ralidad, no es un punto. Es una aproximación para representar el concepto del punto que está en una determinadad localización.
- Las rectas no tienen ancho y, por lo tanto, superficie, porque lo que no se podrían ver. Así que cuando dibujamos una recta en una papel, lo que vemos no es una recta. Es una representación que aproxima el concepto de la recta a la que nos referimos.
- Además, las rectas son ilimitadas, y no cabrían en ningún papel.
- Cuando dibujamos un triángulo, los lados son trozos de recta y, por tanto, no se podrían ver. Por tanto, lo que dibujo no es un triángulo sino una representación del concepto del triángulo que se desea trabajar.
- Y así sucesivamente.

En general, lo que se representa y los objetos reales no se pueden considerar, bajo ningún concepto, objetos geométricos, sino que encontramos características que hacen que los equiparemos a los objetos ideales representados en el mundo de la Geometría.

Aproximemos el problema desde otro ángulo. Hemos llegado a la conclusión de que en la realidad no existen, de forma natural, los objetos de trabajo de la Geometría y que estos objetos geometricos son idealizaciones abstractas de las propiedades que se suponen a los objetos reales.

Los objetos geométricos sólo existen, entonces, como estructuras mentales. Pero la realidad parece comportarse de forma bastante precisa según esos esquemas idealizados, con lo que son herramientas muy útiles para trabajar con la realidad. Para poder aplicar los métodos y herramientas matemáticas, en general, y los geométricos, en particular, hay que traducir entre el ámbito de la realidad y el conceptual-matemático. A este proceso se le llama *modelización*.

Pollak (1997) ofrece una intersante descripción de la modelización matemática:

> *Cada aplicación de la matemática usa la matemática para evaluar o entender o predecir algo que pertenece al mundo no matemático. Lo que caracteriza a la mode-*

lización es la atención explícita al principio del proceso, al ir desde el problema fuera del mundo matemático a su formulación matemática, y una reconciliación explícita entre las matemáticas y la situación del mundo real al final. A través del proceso de modelización se presta atención al mundo externo y al matemático y los resultados han de ser matemáticamente correctos y razonables en el contexto del mundo real.

Describe de forma minuciosa los ocho pasos que han de seguirse para la modelización matemática:

1. Identificar algo en el mundo real que se quiere conocer, hacer o entender. El resultado es una *cuestión en el mundo real*.
2. Seleccionar "objetos" que parecen importantes en la cuestión del mundo real y se identifican las relaciones entre ellos.El resultado es la identificación de *conceptos clave* en la situación del mundo real.
3. Decidir lo que se considera o ignora sobre los objetos y su interrelación. No se puede tomar todo en cuenta. El resultado es una *versión idealizada* de la cuestión original.
4. Traducir la versión idealizada a términos matemáticos y se obtiene una formulación matematizada de la cuestión idealizada. Esto es un *modelo matemático*.
5. Identificar los apartados de la matemática que pueden ser relevantes para el modelo y considerar sus posibles contribuciones.
6. Usar métodos matemáticos e ideas para obtener resultados. Así surgen técnicas, ejemplos intere santes, soluciones, aproximaciones, teoremas, algoritmos,. . .
7. Tomar todos estos resultados y trasladarlos al principio. Se obtiene entonces una *teoría sobre la cuestión idealizada*.
8. Ahora se debe verificar la realidad. £Es el resultado creíble? £Son los resultados prácticos, las respuestas razonables, las consecuencias aceptables?
    a) Si la respuesta es sí, se ha tenido éxito. Entonces el siguiente trabajo, que es difícil pero extraordinariamente importante, es comunicar lo encontrado a sus usuarios potenciales.
    b) Si la respuesta es no, se vuelve al inicio. £Por qué los resultados no son prácticos o las respuestas no razonables o las consecuencias inaceptables? Seguramente el modelo no era correcto. Se examina lo que se puedo hacer mal y porqué y se empieza de nuevo.

Por tanto, el proceso de modelización no es un un proceso lineal, sino cíclico, y en cada iteración se va refinando el modelo y su ajuste a la realidad, como se representa en la Figura 1.4.

Este proceso de modelización es uno de los caballos de batalla en la educación matemática, en general, y en la geometrica, en particular. La percepción de las matemáticas como algo alejado del mundo real, en lugar de ser un modelo contra el que constrastarla, tampoco ayuda.

1.4 Naturaleza de los objetos geométricos

La evolución de los conceptos asociados a los objetos geométricos está intrínsecamente ligada a la propia historia de la Geometría:

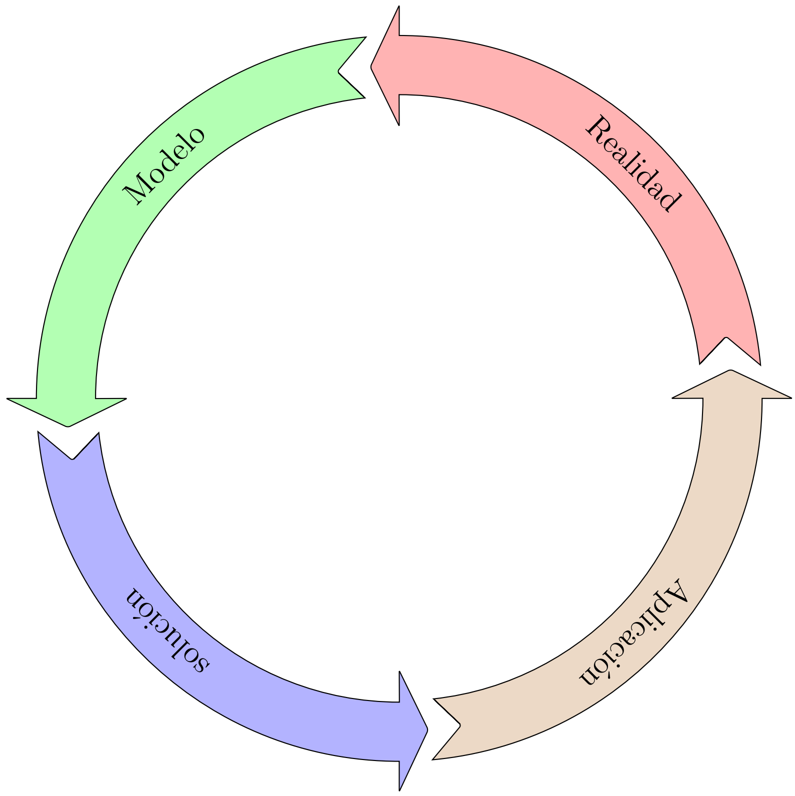


Figura 1.4: Ciclo del proceso de modelización matemática

Geometría en Babilonia y Egipto Era eminentemente práctica: rueda, algunos procedimientos para calcular volúmenes, áreas, longitudes. Respondían a la necesidad de medir la tierra y la construcción.

Geometría griega Es la primera geometría que se trata desde un punto de vista formal. Llevan a cabo procesos deductivos, desde la Lógica de Aristóteles a los sistemas axiomáticos de Euclídeos y sus Elementos. Esta es la que denominaremos *Geometría elemental* o *Geometría Euclidiana*.

No hay casi desarrollos en Geometría hasta el Renacimiento, salvo las figuras de Arquímedes y Apolonio de Ferge (secciones cónicas)

Geometría en el RenacimientoA partir del estudio de la perspectiva y la sección, como herramientas para la representación de la realidad, se desarrolla la Geometría Proyectiva. Las bases las establece Desargues en el siglo XVII.

En el siglo XVII Descartes establece las bases de la Geometría Analítica, en la que se establece la relación entre Geometría y Álgebra (ecuaciones que representan figuras y elementos geométricos).

A principios del siglo XIX aparece la Topología, que estudia las propiedades de los cuerpos que permanecen inalteradas por transformaciones continuas.

Hasta este momento había un buen número de *ramas* de la Geometría.

Félix Klein, en el siglo XIX, en el Programa de Erlangen, observó que cada tipo de Geometría es el estudio de las propiedades que no cambian cuando se le aplican un cierto tipo de transformaciones. Así, la clasificación de los tipos de Geometría es la clasificación de las transformaciones estudiadas:

- *Geometría euclidiana*: invariantes mediante el grupo de movimientos rígidos (simetrías, giros y traslaciones).
- *Geometría proyectiva*: invariantes frente a las proyecciones.
- *Topología*: invariantes frente al grupo de las funciones continuas y de inversa continua.

1.4.1 La geometría euclídea

Estudia las propiedades de las figuras del plano que permanecen invariantes bajo el grupo de transformaciones generado por las **traslaciones**, **simetrías** y **rotaciones** en el plano.

A estas transformaciones se las suele llamar **transformaciones euclídeas** o **rígidas**, **transformaciones isométricas** o **isometrías**.

Conservan distancias, ángulos y áreas, perímetros, e incluye las ideas y conceptos de la geometría clásica. Puedes ver estas transformaciones en la Figura 1.5.

1.4.2 La geometría proyectiva

Estudia las propiedades que se conservan ante transformaciones proyectivas, abstrayéndose totalmente del concepto de medida (los ángulos, áreas, distancias,. . .): perspectivas, ampliaciones, reducciones, fotografía, pintura, secciones de sólidos, etc. Puedes ver estas transformaciones en la Figura 1.5

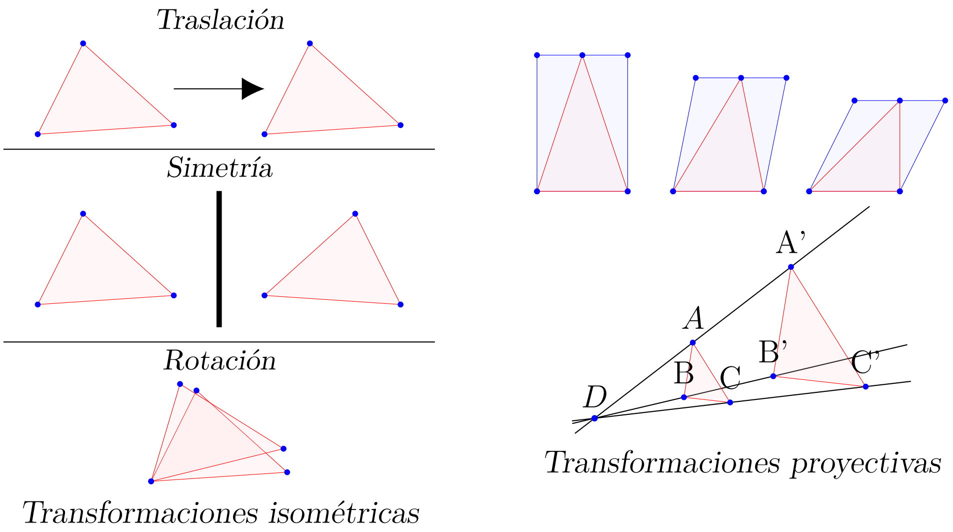


Figura 1.5: Las transformaciones con cuyas invariantes se construyen los distintos tipos de geometría

1.4.3 Topología

Estudia las propiedades que permanecen inalteradas ante transformaciones topológicas, que son aquellas transformaciones que pueden modificar casi todas las propiedades salvo el interior, el exterior y la frontera, la continuidad, el orden, etc.

En estas transformaciones está todo permitido menos romper y/o pegar. Son transformaciones continuas con inversa continua.

Ejemplos de este tipo de transformaciones podría ser:

- un rectángulo de plastilina se puede estirar tirando de dos vértices opuestos y hacer que los lados se curven desigualmente.
- Un dibujo en la superficie de un globo desinflado y el mismo dibujo en el globo hinchado.

£Qué propiedades han cambiado y cuáles se mantienen?;

- *han cambiado*: longitudes y formas de los lados, el interior es una superficie más grande, etc.;
- *se mantiene*: el interior (lo que estaba dentro sigue estando dentro y lo que estaba fuera sigue estando fuera), los bordes o fronteras, el orden, el número y la vecindad de los vértices, etc. A estas propiedades se las denomina *propiedades topológicas*

En la Figura 1.6 podrás observar varias de estas trasformaciones topológicas.

1.4.4 Conclusiones

La geometría está determinada por un espacio delimitado por unos *objetos ideales* (punto, recta, plano, figuras, etc) y unas *transformaciones* (traslaciones, giros, reflexión, simetrías, etc.) que nos permiten clasificar las figuras. Se considerarán figuras equivalentes aquellas en las que se pueda construir una de ellas a partir de la otra, mediante transformaciones de este tipo.

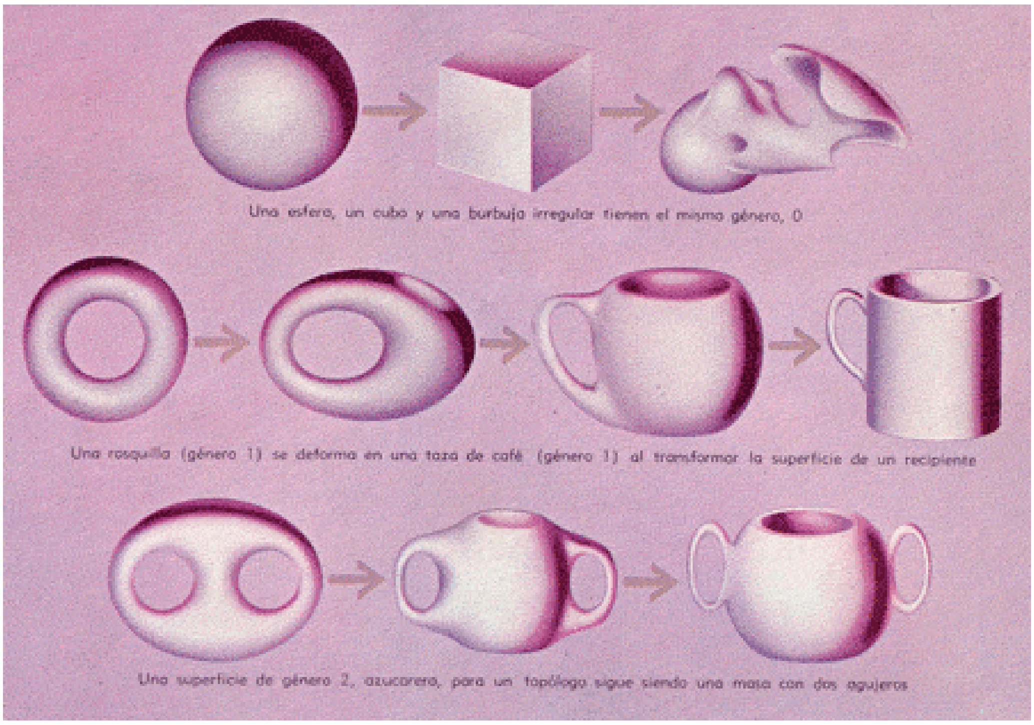


Figura 1.6: TRansformaciones topológicas

Los distintos tipos de Geometría se organizan en función de las propiedades invariantes ante un tipo de transformación. Las propiedades o conceptos genuinos de cada geometría serán los que se conserven (queden invariantes) por las transformaciones correspondientes.

Las transformaciones topológicas son las más permisivas mientras que las euclídeas son las más restringidas (también se les llama “rígidas”; sólo se puede trasladar o girar la figura, con lo que se mantiene casi todo).

1.5 Importancia y utilidad de la geometría

El origen de la Geometría es eminentemente utilitario. El nombre viene de la unión de dos términos: Geo (tierra) y Metría (medir). Y ese fue su objetivo durante los tiempos de Babilonia y Egipto.

Durante el periodo griego clásico paso a formularse según la Lógica, dando lugar a la aproximación Matemática. De facto, la mayoría de los trabajos de la Grecia Clásica se basan en aproximaciones geométricas.

En nuestra vida cotidiana se necesita la Geometría para orientarse reflexivamente en el espacio, hacer estimaciones sobre formas y distancias, distribución de objetos, . . . Aparece en múltiples ámbitos del sitema productivo: producción industrial, diseño, arquitectura, topografía, . . . Es fundamental en las artes plásticas, en el estudio de la naturaleza, etc.

Sus aportaciones se pueden resumir en tres aspectos:

1.5.1 Valor funcional

La geometría es elemento fundamental para comprender e interpretar adecuadamente la realidad.

- En la vida diaria aparece continuamente: volumen del depósito de un vehículo, distancias a recorrer, arquitectura, superficies de viviendas, forma y capacidad de un recipiente, etc.
- Tiene una amplia aplicabilidad a diversos campos y situaciones. Por ejemplo:
    - Astronomía y mecánica celeste
    - Cartografía, geodesia y triangulación
    - Problemas comerciales: envasado, empaquetado, tallas, patrones, etc.
    - Ingeniería (diseño de piezas) y arquitectura
    - Formas en la creación artística
    - Robótica, movimientos
    - Óptica, fotografía y cine
    - Cálculo de medidas: áreas, volúmenes, ángulos, etc.
    - Digitalización y manipulación de imágenes
    - etc

1.5.2 Valor formativo

La interrelación con el entorno requiere de concepciones geométricas.

Según Piaget y Inhelder (1947)[2], la aproximación es inicialmente *perceptiva*: conoce los objetos por el contacto directo con ellos. Después pasa a ser representativa: es capaz de evocar los objetos en ausencia de ellos. Las propiedades de los objetos van abstrayéndose a medida que el niño va creciendo: mediante un estudio adecuado de la geometría se afianzan adecuadamente estos conceptos. Se ejercitan constantemente: la comparación, el orden, el manejo de la información, la perspectiva, la visualización, la apreciación de la belleza en el arte, la arquitectura, la escultura, la pintura, etc.

1.5.3 Valor curricular

El valor más evidente es el valor curricular, en cuanto a que forma parte básica del currículum educativo "…por constituir elementos básicos necesarios para la construcción de otros conocimientos matemáticos… (Junta de Andalucía, 1992), como es el caso de los conocimientos métricos, y por su contribución al desarrollo de las competencias básicas y matemáticas específicas.

Además, no es un tema matemático aislado; la Educación Artística, la Educación Física, el Dibujo y el Diseño, el Conocimiento del Medio Social (edificios, envases, etc.; distancias y recorridos de eventos, etc.) y del Medio Natural (espacios, formas de envases, capacidades de recipientes, distancias, cartografía, planos, etc.), la Tecnología (aparatos para dibujar, software de diseño gráfico) y las Matemáticas desde distintos bloques temáticos (álgebra, representación en análisis de datos), se relacionan entre sí en este tema interdisciplinar y con numerosas

[2] Ochaíta Alderete (1983) tiene un análisis de este trabajo que es facilmente accesible

relaciones con temas transversales (Educación Vial, Educación ambiental, entre otros), campo privilegiado para el desarrollo de competencias y capacidades básicas diversas.

En resumen, no sólo el desarrollo de capacidades geométricas tiene varlo por si misma dentro del currículum, sino que su interacción con otros múltiples ámbitos del aprendizaje la postula como una buena herramienta con la que establecer interrelaciones que faciliten y potencien el aprendizaje.

1.6 Visualización. Análisis geométrico de las formas

Para terminar este tema, centrémonos en una de los tipos de geometría, la Geometría Euclídea, también denominada Geometría Elemental, que se estudiaremos en el plano y en espacio.

La percepción de la geometría se desarrolla junto con el individuo, principalmente en dos estadios (Piaget y Inhelder, 1947):

- *Visualización y modelización geométrica del espacio*: en la que se analizan las distribuciones del espacio.
- *Análisis geométrico de las formas*: se analizan las formas de los propios objetos, estudiando las características particulares de su representación mental.

Mientras que en la primera aproximación se analiza las estructuras percibidas, en la segunda se analiza la construcción mental llevada a cabo a partir de la percepción.

1.6.1 Visualización y Modelización Geométrica del Espacio

Constituye la parte de la percepción espacial que sirve como puerta de entrada a la Geometría. A través de los sentidos se identifican *aspectos* o *imágenes parciales* de la realidad y se construyen *modelos* físicos o representados de los esquemas visuales.

En definitiva, se da forma mental (imagen o esquema mental) o física (representación gráfica o modelo físico construido) a lo que se conoce como "*configuraciones figurales*", que son las que van a servir de base para el trabajo propiamente geométrico del apartado siguiente.

1.6.2 Análisis geométrico de las formas

Las configuraciones figurales percibidas a través de la observación y la visualización y construidas y representadas a través de la modelización y el grafismo, da lugar a representaciones mentales. Estas representacciones constituyen las estructuras geométricas de la forma y son los objetos de estudio de la ciencia del espacio, parte de la Matemática, a la que denominamos Geometría.

El estudio geométrico o matemático del espacio se llama también análisis figural o estudio de la forma y abarca los siguientes aspectos:

- **Forma** o "aspecto" ideal que tienen o pueden tener los objetos que estructuran el espacio;
- **Estructuras** (elementos y organización): punto, lado, ángulo, vértice, segmento, línea recta, curva, contorno, perímetro, etc.
- **Relaciones**
  - *Estáticas*
    - perpendicularidad, paralelismo, relación entre número de caras, vértices y

aristas en un poliedro, etc.
    - *Lugares geométricos*: conjunto de puntos que verifican una condición.
    - *Localización/posición* en el espacio: coordenadas, posiciones relativas (corta, cruzan, paralelas, etc)
    - *Composiciones* con formas y figuras, cubrimientos de planos y espacios, frisos, mosaicos y teselaciones
  - *Dinámicas* o transformaciones geométricas:
    - *Transformaciones/Movimientos*: traslaciones, giros, simetrías
    - homotecias y semejanzas
- **Dimensiones**: medidas de longitud, superficie, volumen, amplitud angular, etc.
- **Clasificación** de elementos, figuras y formas: polígonos según distintos criterios, triángulos, ángulos, etc.
- **Terminología**: lenguaje, definiciones, etc.
- **Representación** y **Construcción**: plano, espacio de tres dimensiones, dibujo, instrumentos (TIC, regla y compás, etc.)
- **Razonamiento geométrico** y resolución de problemas sobre conceptos, propiedades y relaciones geométricas
  Ejemplo: análisis y digitalización de imagen

Contenidos matemáticos

2

Elementos del plano

2.1 Introducción

Euclides fue un matemático griego que vivió entre el 325 y el 265 a.C. De su vida se sabe muy poco. Dejó escrita la obra *Elementos*, una recopilación del conocimiento académico de la época. En ella se presenta de manera formal, a partir de únicamente cinco postulados y desarrollos lógicos, propiedades de líneas, planos, círculos, esferas, triángulos, conos, etc.

Hay evidencias de que las demostraciones mostradas no son, al menos en su mayor parte, creación de Euclides. Pero se le atribuye la organización y exposición del material.

El trabajo de Euclides es un instrumentos de razonamiento muy poderoso que, además, ha sido de amplia aplicación en múltiples campos del conocimiento, como la física, astronomía, ingenierías, etc. Presenta abstracciones de la realidad definiendo las propiedades de los elementos matemáticos a partir de la que construye su teoría.

Fue tan completa su obra que estuvo en vigencia, casi sin variaciones, hasta el siglo XIX. A partir de la variación de sus axiomas, invalidándolos o sustituyéndolos, se han creado las denominadas “geometrías no euclidianas”, como por ejemplo la geometría de las figuras geométricas sobre superficies curvas.

En este tema vamos a

- definir los elementos básicos de la geometría del plano, en la línea propuesta por Euclides, y
- se expondrán algunas propiedades, características y relaciones de estos elementos del plano.

2.2 Componentes elementales

Como ya se expuso en la introducción de este documento, los elementos geométricos no existen en el mundo real y son representaciones de conceptos que existen, únicamente, en la mente del geómetra.

Estos elementos están determinados por sus propiedades.

2.2.1 Puntos

Un *punto* es una localización *a-dimensional*. Esto significa que no tiene ancho, ni alto, ni largo, ni ninguna otra medida. En cualquier dirección en la que se la midiera, esta medida sería nula.

Por tanto, tampoco tiene superficie y no se la puede ver, al no existir nada que refleje la luz. En la Figura 2.1 se puede observar varias de las típicas representaciones que se utilizan para representar el concepto punto. Sin embargo, no hay que olvidar que no son puntos. Cuando se representa con un “punto”, se supone que el punto geométrico está en el centro. Cuando se representa como cruces, se supone que está donde se cruzan las aspas.

Esto nos lleva al enunciado del famoso teorema del “punto gordo”, que se enuncia así:

Por un punto “gordo” pasan más rectas que por un punto “fino”.

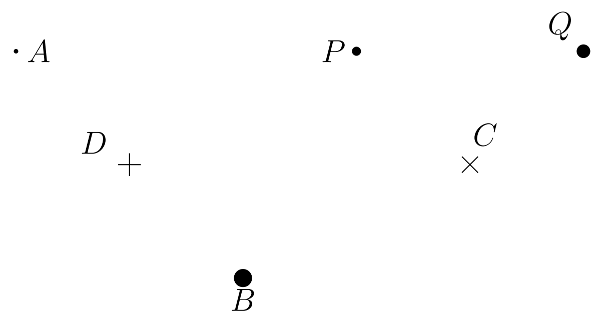


Figura 2.1: Representación del concepto *punto*

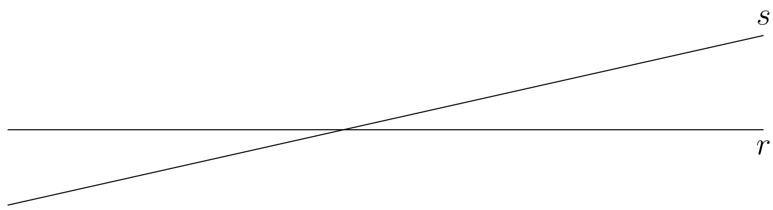


Figura 2.2:

En realidad, este teorema no tiene sentido, puesto que no existe el concepto de "punto gordo" o "punto fino", ya que los puntos son a-dimensionales, es decir, de medida nula en todas las direcciones.

Este "teorema" es una broma que los profesores, principalmente de Matemáticas y Dibujo, utilizamos cuando los alumnos, para conseguir que varios elementos corten en el mismo punto usan el "truco" de hacer el punto "gordo" (quien no lo ha intentado)

Otra consecuencia de la a-dimensionalidad del punto es la insistencia de nuestros profesores en que las herramientas de dibujo tuvieran la punta más fina posible, y los trazos lo más finos posibles, para parecerse todo lo posible a dimensión nula.

En cuanto a la forma de nombrar los puntos, usualmente se utiliza la convención de usar letras en mayúsculas, como A, B, P, Q o R.

2.2.2 Figuras geométricas

El *espacio* es el conjunto de *todos* los puntos. A cualquier subconjunto de puntos del espacio se le denomina *figura geométrica*.

Determinadas figuras geométricas tienen propiedades que las hacen especialmente interesantes. A continuación vamos a enumerar algunas de esas figuras.

2.2.3 Rectas

Una recta es una sucesión continua e infinita de puntos extendidos en una única dimensión.

En la Figura 2.2 se puede observar como, habitualmente, se representan las rectas. De nuevo, estas representaciones no son exactas, puesto que:

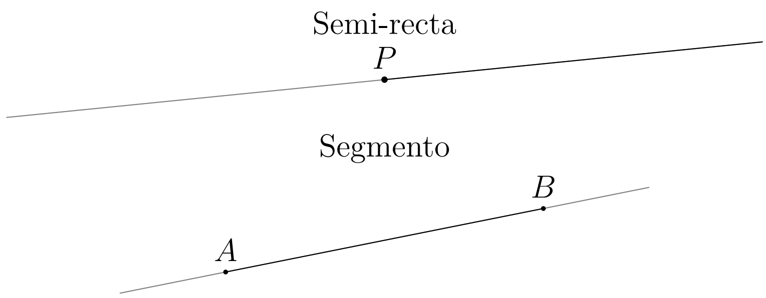


Figura 2.3: Semi-Rectas y segmentos

- Las rectas se extienden infinitamente, mientras que nuestro dibujo no. Es más, no hay papel donde representar unas rectas infinitas.
- Las rectas no tienen ancho, por lo que no se podrían ver.

Cuanto menos grosor se utilice para dibujar las rectas, más parecido será al concepto real que representa.

Es habitual utilizar letras minúsculas para referirse a las rectas o trozos de rectas, como r, s o t.

Algunas de las propiedades de las rectas son:

- Dos puntos no coincidentes determinan una única recta.
- Tres puntos tales que determinan la misma recta se denominan *co-lineales*.

Un punto cualquiera de una recta (P en la Figura 2.3) la divide en dos subconjuntos, denominados *semi-rectas*.

Dados dos puntos distintos de una recta (P y Q en la Figura 2.3), el conjunto comprendido entre ellos se denomina *segmento*.

Algunas definiciones de interés sobre los segmentos:

- A los puntos que determinan al segmento se les denomina *extremos* del mismo.
- Se llama longitud del segmento a la distancia entre sus extremos.
- Se dice que dos segmentos son *congruentes entre si* si y sólo si tienen la misma longitud.
- Los segmentos pueden ser cerrados o abiertos, según si se consideren parte del segmento o no, respectivamente, los extremos.

2.2.4 Planos

Los planos son un elemento que se desarrolla cuando se trabaja en el espacio. Son un caso particular del concepto de superficie, que se define, según Euclides (sobre el 300 a.C.), como “aquello que sólo tiene longitud y anchura”. Y un plano es “aquella superficie que yace por igual respecto de las líneas que están en ella”. Aunque tiene sentido matemático es una definición un poco liosa.

Se podría pensar como una hoja de papel o la superficie de una mesa o pizarra. De nuevo, las representaciones que hacemos de un plano, como la que se puede ver en la Figura 2.4, no corresponden al objeto real, puesto que un plano se extiende infinitamente en sus dos dimensiones, mientras que nuestra representación no es capaz.

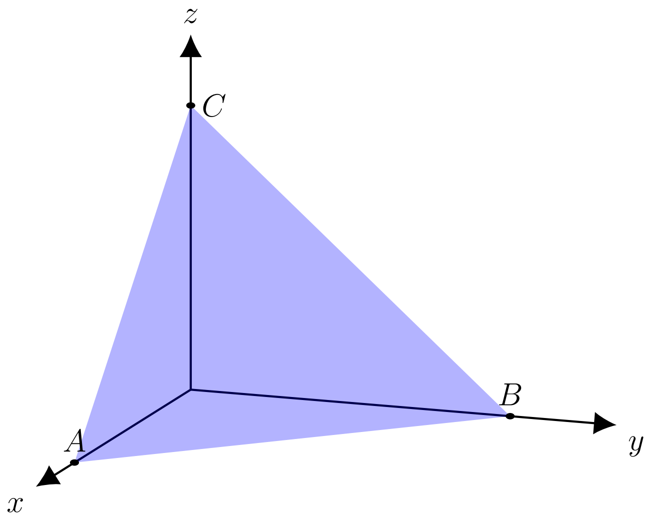


Figura 2.4: Representación del concepto de plano

- Tres puntos no alineados determinan un plano, como puede observarse en la Figura 2.4.
- Al quitar una recta de un plano se crean dos *semiplanos*.

2.2.5 Ángulo

Se puede considerar como *ángulo* a la intersección de dos semiplanos cerrados, obtenidos a partir de dos rectas secantes. Como se puede observar en la figura que, a partir de dos semiplanos, sombreados como azul y rojo, su intersección, la parte que comparten, es lo que se determina como ángulo.

También se usa el nombre *ángulo* para designar a la figura formada por el conjuntos de los lados y el vértice en el que estos se cortan. Se suele denotar como $\angle BAC$ (el vértice se nombra en medio) o, acortando, $\hat{A}$.

Un ángulo divide el plano en dos partes:

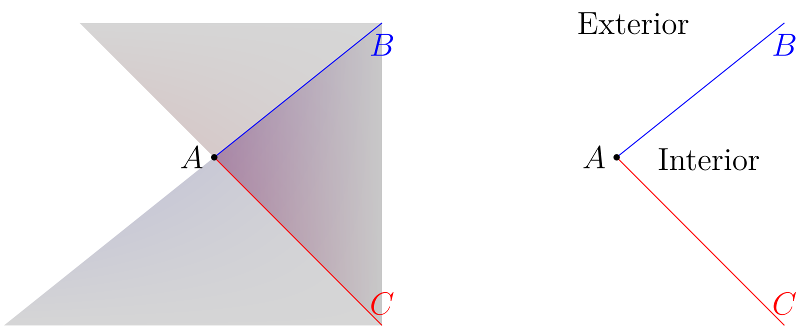


Figura 2.5: Definición de ángulo

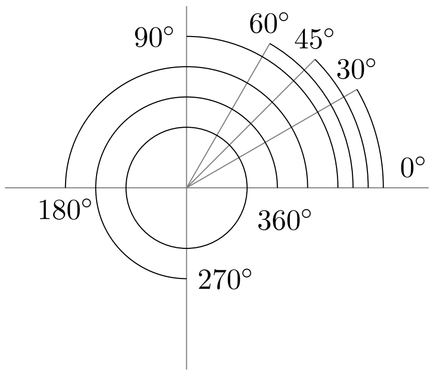


Figura 2.6: Calculo de diferentes ángulos por subdivisión

- el interior: puntos que se pueden alcanzar mediante segmentos con extremos en AB y en AC
- el exterior: el complementario.

2.3 Medidas de ángulos

La medida de los ángulos es la cuantificación de la rotación necesaria para girar uno de los lados del ángulo, sobre el vértice, para hacerlo coincidir con el otro lado.

2.3.1 Sistemas de medición de ángulos

Hay diferentes formas de medir los ángulos, pero se basan en dar una medida de una vuelta completa y, por subdivisión, establecer las medidas de las diferentes aperturas. Los tres más conocidos son los grados sexagesimales (una vuelta=360°), los grados centesimales (una vuelta=400°) y los radianes (una vuelta=2π radianes). Los grados centesimales están en desuso. Las medidas en radianes se utilizan, especialmente, en ingeniería y física, debido a su relación directa con el concepto de rotación. Nosotros utilizaremos la que es de más uso común, los grados sexagesimales. En la Figura 2.6 se puede observar el cálculo de diferentes ángulos por subdivisión de la vuelta.

2.3.2 Clasificación de los ángulos

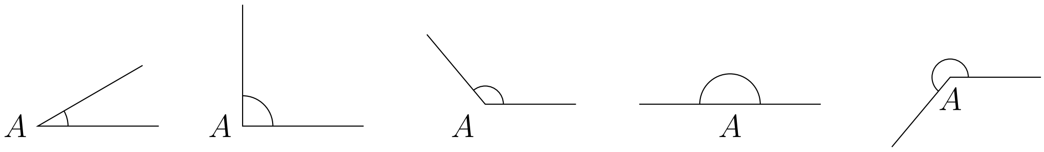
Los ángulos se clasifican en función de su apertura. En particular, en función de su comparación con dos ángulos muy importantes: el ángulo recto (90°) y el llano (180°).

A lo largo de los años he encontrado dos formas de clasificar los ángulos en función de su apertura:

- como una escala con puntos de división en el ángulo recto y llano,
- como dos comparaciones independientes con el ángulo recto y llano.

Escala: En este caso, se construye una especie de escala lineal, utilizando como puntos de referencia los ángulos llano y recto.

Agudo:	Recto:	Obtuso:	Llano:	Cóncavo:
$0° < \hat{A} < 90°$	$\hat{A} = 90°$	$90° < \hat{A} < 180°$	$\hat{A} = 180°$	$180° < \hat{A} < 360°$

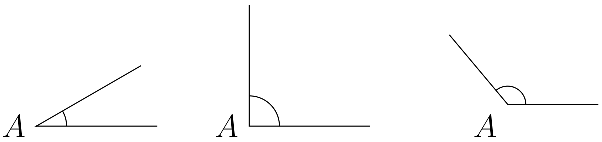


Así, según este sistema, se produciría la siguiente nomenclatura:

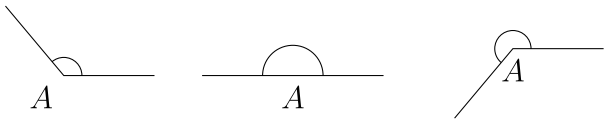
30° : agudo	112° : obtuso	216° : cóncavo
90° : recto	180° : llano	

Doble comparación: Se establecen dos criterios de comparación. Uno respecto al ángulo recto, acuñándose los nombres *agudo*, si mide menos que el recto, o *obtuso*, si mide más que el ángulo recto. Y otro respecto al llano, acuñándose los términos *convexo*, si mide menos que el ángulo llano, o *cóncavo*, si mide más que el ángulo llano.

Agudo:	Recto:	Obtuso:
$0° < \hat{A} < 90°$	$\hat{A} = 90°$	$\hat{A} > 90°$



Convexo	Llano:	Cóncavo:
$\hat{A} < 180°$	$\hat{A} = 180°$	$180° < \hat{A} < 360°$



Por este sistema, en cambio, hay que dar dos nombres a cada ángulo, uno por cada comparación que se hace:

30° : agudo, convexo	112° : obtuso, convexo	216° : obtuso, cóncavo
90° : recto, convexo	180° : obtuso,llano	

Cuando uno de los nombres determina claramente el otro, se reduce la notación, y esto es lo que lleva a error. Por ejemplo, los ángulos llanos y recto se saben perfectamente cómo son y, por eso, no se utiliza el resto del nombre. Los ángulos agudos son, por necesidad, convexos, por lo que se elimina el segundo nombre. Y los ángulos cóncavos son, por necesidad, obtusos, llevándose a cabo la misma operación. Queda entonces los nombres:

30° : agudo	112° : obtuso, convexo	216° : cóncavo
90° : recto	180° : llano	

Sólo hay un caso en el que hay que mantener los dos nombres (obtuso, convexo) porque hay convexos que no son obtusos, y ángulos obtusos que no son convexos.

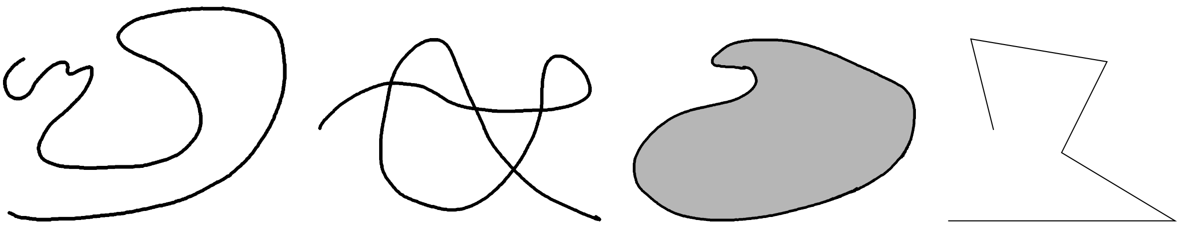


Figura 2.7: Ejemplos de curvas

2.4 Curvas y polígonos en el plano

2.4.1 Concepto general de curva

Una curva corresponde al concepto informal del conjunto de puntos que forman el trazo que se produce al desplazar un lápiz, sin levantarlo.

Sin el lápiz no pasa nunca dos veces por el mismo sitio, se dice que la curva es *simple*. A las curvas que no son *simples* las veo, a veces, denominadas como *compuestas* y otras como *no simples*. En cualquier caso, lo importante es que tengáis claro el concepto y lo deduzcamos del contexto.

Si el último punto de la curva coincide con el primero se dice que la curva es *cerrada*. En caso contrario se dice que es *abierta*.

Se pueden encontrar ejemplos de estos tipos de curvas en la Figura 2.7.

Se requiere que las curvas tengan principio y final y, por tanto, las rectas, semi-rectas y ángulos no son curvas.

Se denomina *curva poligonal* a una curva simple (es decir, que no se corta consigo misma) formada por segmentos unidos por sus extremos.

La definición matemática de curva es más compleja y ha evolucionado históricamente desde las secciones cónicas de Euclides, pasando por Arquímedes y Newton, hasta llevar a una definición basada en la topología, de la década de 1920. Este tipo de trabajo matemático se sale del ámbito de este curso, pero no está de más que sepáis que existe.

Un resultado muy importante es el

Teorema (Teoream de la curva de Jordan)**.** *Una curva cerrada simple separa los puntos del plano en tres subconjuntos distintos:*

- *La propia curva*
- *El interior de la curva*
- *El exterior de la curva*

Aunque este resultado parece simple e intuitivo, su demostración matemática no fue nada fácil. Incluso, la demostración proporcionada por el matemático que lo enunció, Camille Jordan (1887) era incorrecta, y lo demostró el matemático Oswald Veblen (1905).

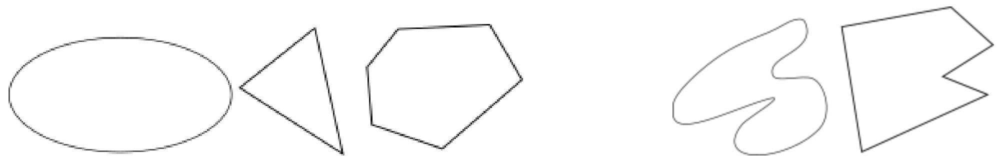


Figura 2.8: Figuras convexas y cóncavas

Al interior y el exterior de una curva cerrada simple se las denominan *regiones*. Hay más ejemplos de regiones, como los *semiplanos* (regiones en las que una recta divide al plano) o el *interior* y *exterior* de un ángulo.

2.4.2 Figuras

Se va a llamar figura geométrica a un conjunto no vacío formado por puntos. Según esta definición, elementos fundamentales como puntos, rectas, planos, etc, son, en si mismas, figuras. Un tipo de figuras con el que vamos a trabajar mucho son aquellas que su *frontera* está determinada por una curva.

Veamos a continuación algunas consideraciones acerca de estas figuras:

Definición. *Se dice que una figura es convexa si y sólo si para cada par de puntos P y Q de la figura, el segmento $\overline{PQ}$ está contenido en la figura. Si una figura no es convexa, se dice cóncava.*

En la Figura 2.8 se pueden encontrar varios ejemplos de estos tipos de figuras.

2.4.3 Circunferencia y sus elementos

Entre las figuras que nos podemos encontrar en el plano está la circunferencia. Veamos su definición:

Definición. *Se llama circunferencia de centro C y radio r al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan una distancia r del punto C.*

Al área encerrada por la circunferencia se la denomina círculo.

Lo más importante de la definición de circunferencia es que *todos los puntos de la circunferencia mantienen la misma distancia respecto a un punto de referencia* el punto C. Por esto, la circunferencia se utiliza para *trasladar distancias*, puesto que encuentra todos los puntos que están a la misma distancia.

En la Figura 2.9 se pueden observar los elementos característicos de una circunferencia y un círculo. Se considera que son elementos ya conocidos y que no requieren más explicación que refrescarlos. En caso de no ser así, no dudes en plantear tus dudas.

2.4.4 Curvas poligonales y polígonos

Una *curva poligonal* se definió anteriormente como una curva simple formada por segmentos unidos por sus extremos. Si esta curva es cerrada, se denominad *polígono*. A los segmentos que forman la curva se les denomina *lado* y a los extremos de estos segmentos se les denomina *vértices*.

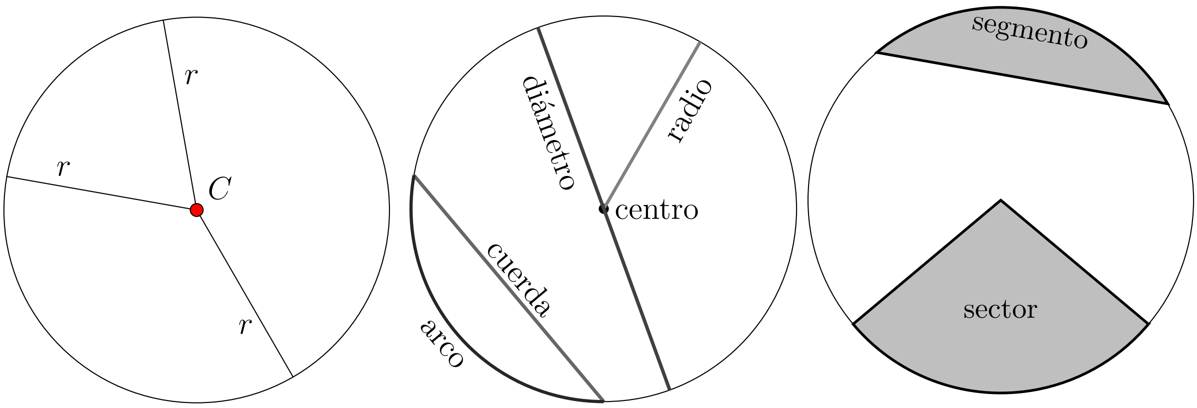


Figura 2.9: Circunferencia y elementos de la circunferencia y el círculo

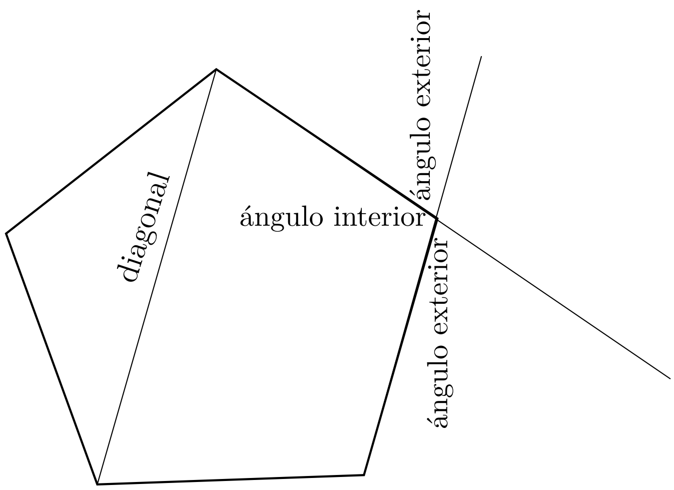
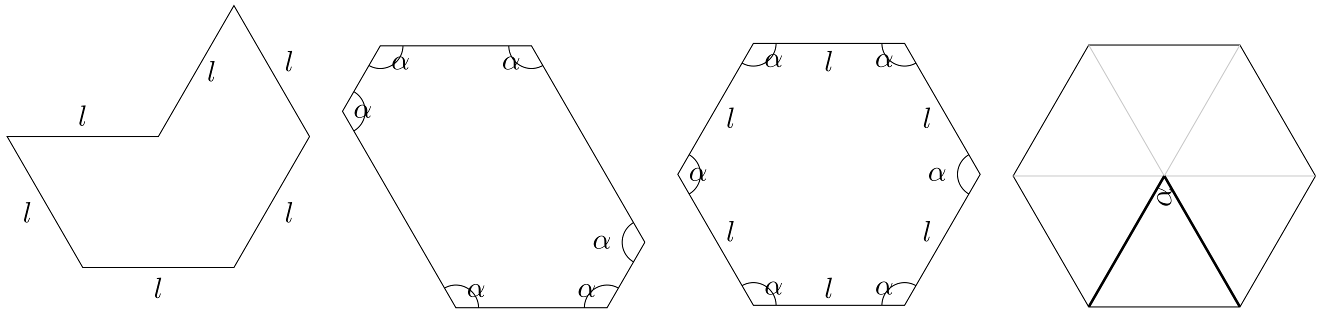


Figura 2.10: Ángulos en un polígono



Hexágono equilátero — Hexágono equiángulo — Hexágono regular — Ángulo central

Figura 2.11: Tipos de polígonos

Las semi-rectas que contienen a dos lados incidentes a un vértice determinan un *ángulo del polígono*. Se denomina *ángulos interiores* de un polígono convexo a la intersección de los interiores de los ángulos del polígono. Si en uno de los ángulos interiores substituimos una semi-recta por su complementaria, es decir, por la continuación de la recta "hacia fuera" del polígono, se tiene un *ángulo exterior*.

Los ángulos interior y exterior en un vértice son suplementarios, es decir, como se definirá más adelante, suman el ángulo llano, de 180°.

Se llama *diagonal* de un polígono a cualquier segmento que une dos vértices no consecutivos del polígono.

Tomando como n el número de lados, los polígonos convexos verifican:

- La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados es: $180° \cdot (n-2)$.
- El número de diagonales de un polígono convexo es $n \cdot (n-3)/2$.

2.4.5 Polígonos regulares

Dentro de los polígonos merecen especial atención, por sus propiedades, los denominados *polígonos regulares*.

Si un polígono tiene todos sus lados congruentes, es decir, miden lo mismo, se dice que el polígono es *equilátero*. Si todos sus ángulos interiores son congruentes se dice *equiángulo*. En la Figura 2.11 se pueden diferentes casos y elementos.

Un polígono que es equilátero y equiángulo simultáneamente se denomina *polígono regular*.

Los polígonos regulares tiene algunas propiedades interesantes. Tomando como n el número de lados del polígono regular se tiene:

- Todos los ángulos internos son congruentes, y miden $180° \cdot (n-2)/n$.
- Los ángulos centrales de un polígono regular son congruentes, y miden $360°/n$.
- Los ángulos exteriores de un polígono regular son congruentes, y miden $360°/n$.

Además de las propiedades por ser polígonos los convexos, en los polígonos regulares se encuentra que el ángulo central de un polígono regular de n lados es de $360°/n$. Además, un polígono regular puede descomponerse como una organización de n triángulos congruentes, por lo que pueden utilizarse las propiedades de estos triángulos para establecer relaciones.

2.5 Relaciones entre elementos del plano

Cuando se disponen distintos elementos en un espacio podemos encontrar que se interrelacionan con diferentes propiedades. Estas relaciones van a depender de la propia naturaleza de los objetos a relacionar.

Veamos algunos casos e identifiquemos las diferentes situaciones.

2.5.1 Posición relativa de rectas

A las distintas formas en la que pueden interrelacionarse dos o más rectas se las denominan *posiciones relativas*.

Considerando rectas, podemos encontrar las siguientes posiciones relativas, cuya representación se puede observar en la Figura 2.12:

- Dos rectas co-planarias que no tienen ningún punto en común se dice que son *paralelas*
- Dos rectas que tiene algún punto en común se dice que son *secantes*.
- Dos rectas que tienen todos sus puntos en común se dice que son *coincidentes*.
- Una recta que cruza a otras dos se denomina *transversal*.
- Tres rectas son *concurrentes* si se cortan en un mismo punto.

2.5.2 Relaciones entre pares de ángulos

Entre los ángulos se pueden establecer las siguientes relaciones, que se pueden observar en la Figura 2.13:

- Dos ángulos que no se solapan y comparten un lado y el vértice se dicen *contiguos*.
- Dos ángulos se dicen complementarios si suman 90°.
- Dos ángulos se dicen suplementarios si suman 180°.
- Dos ángulos se dicen *verticales* si los cuatro lados forman dos rectas que se cortan en el vértice.

2.5.3 Relación entre rectas y ángulos

Cuando dos rectas, que denominaremos r y s, se cortan con otra recta transversal, m, se forman cuatro pares de ángulos que se llaman *ángulos correspondientes*.

Los ángulos correspondientes podrían verse como los que están en la misma posición en los dos cortes. Puede observarse en la Figura 2.14, y esas correspondencias serían:

- $\hat{1}$ y $\hat{5}$;
- $\hat{2}$ y $\hat{6}$;
- $\hat{3}$ y $\hat{7}$;
- $\hat{4}$ y $\hat{8}$

2.5.4 Relación entre una recta y una circunferencia

Las posiciones relativa de una recta respecto a una circunferencia se caracterizan por el número de intersecciones que tiene. Puede haber tres situaciones, como se puede observar en la Figura 2.15:

- Exterior: no tiene ningún punto en común

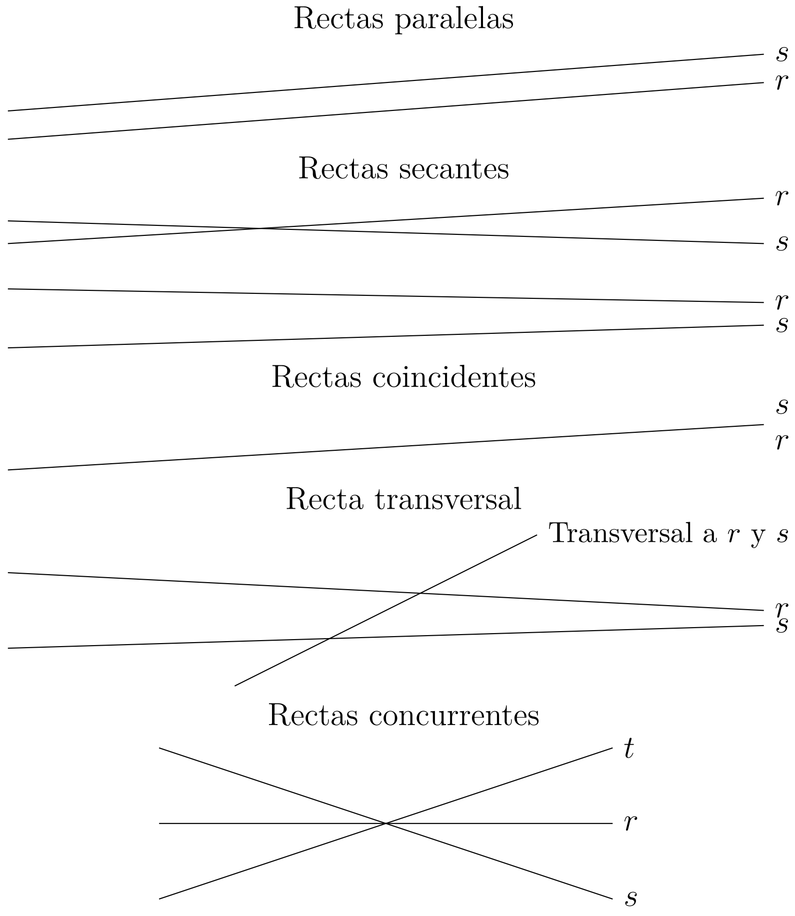


Figura 2.12: Posiciones relativas de dos rectas

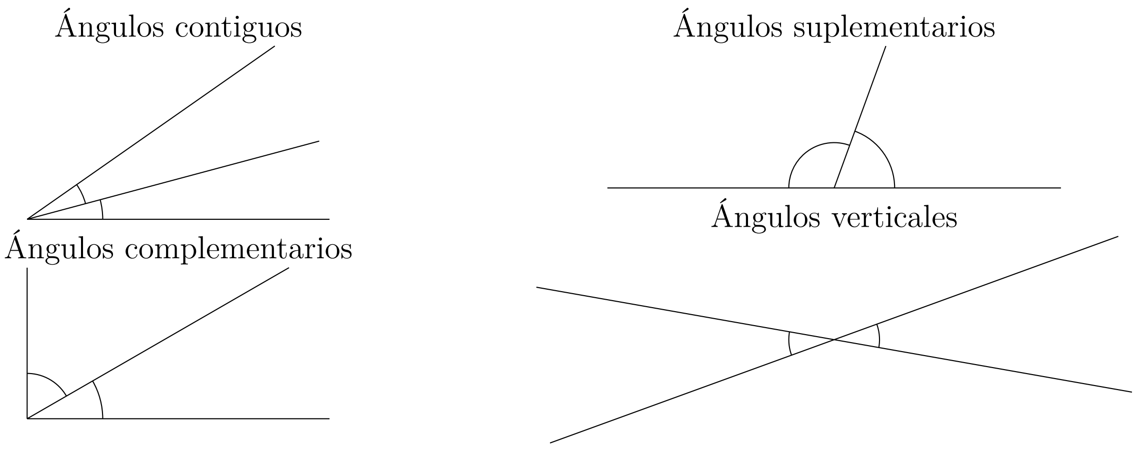


Figura 2.13: Relaciones entre ángulos

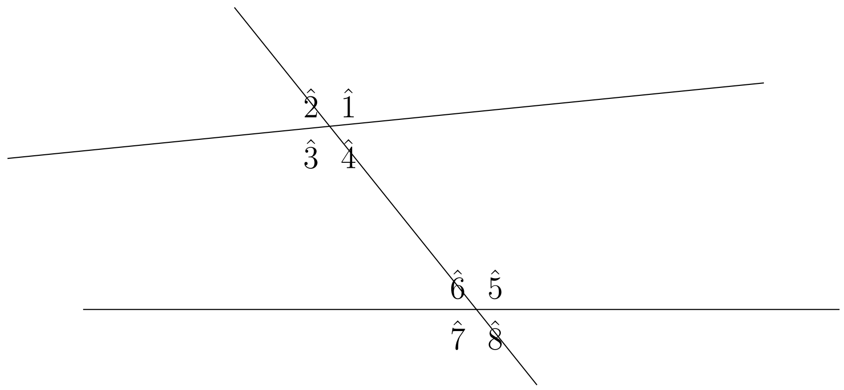


Figura 2.14: Ángulos correspondientes

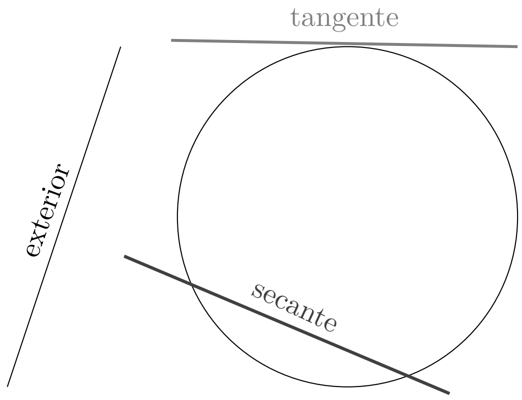


Figura 2.15: Posiciones relativas entre una recta y una circunferencia

- Tangente: sólo tiene un punto en común
- Secante: tiene dos puntos en común

3 Figuras elementales

Como se definió anteriormente, una figura es un conjunto de puntos del plano. En este capítulo, se van a estudiar algunas figuras especiales, que tienen propiedades que los hacen especialmente interesantes y que podemos encontrar a nuestro alrededor continuamente.

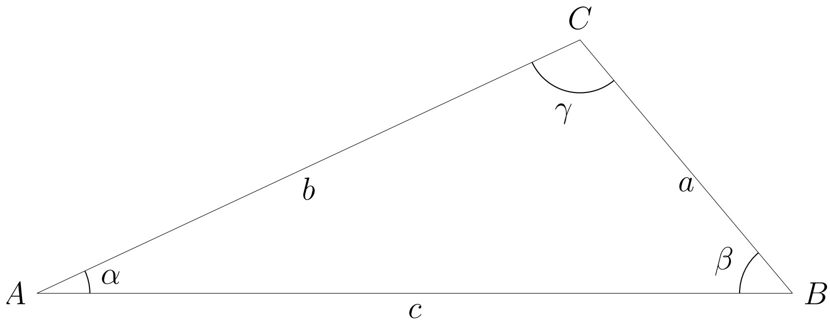
3.1 Los triángulos

3.1.1 Definición y propiedades del triángulo

Definición. *Se llama triángulo a un polígono de tres lados*

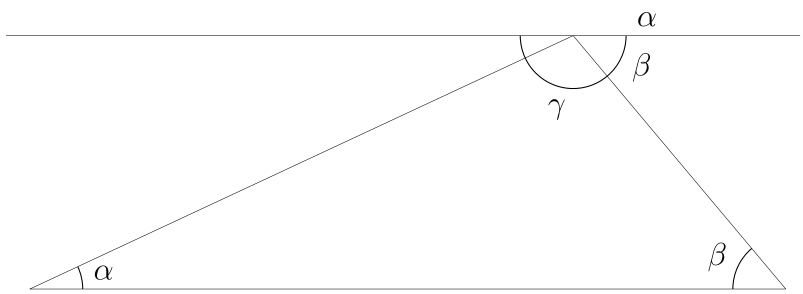
Por tanto, es la figura encerrada por una curva simple poligonal formada por tres segmentos concatenados.

Los elementos principales en los triángulos son los segmentos que lo forman, los lados, los extremos que determinan esos lados, los vértices, y los ángulos que forman los lados. Es habitual que a los vértices se los denote con letras mayúsculas (A, B y C), a los lados con letras minúsculas (a, b y c) y a los ángulos con letras griegas (α, β y γ), nombrándose con el mismo nombre los lados opuestos a cada vértice.

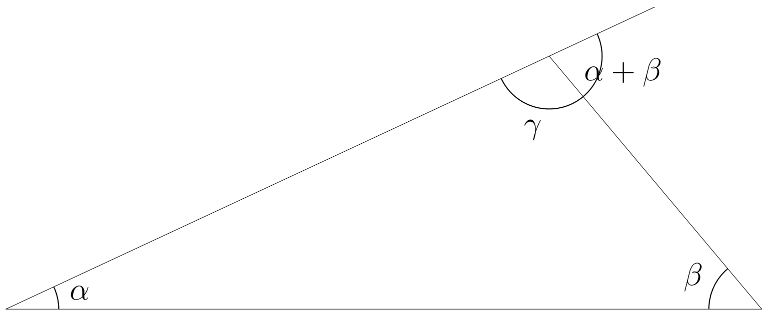


Los triángulos tiene una serie de propiedades que los hacen muy interesantes:

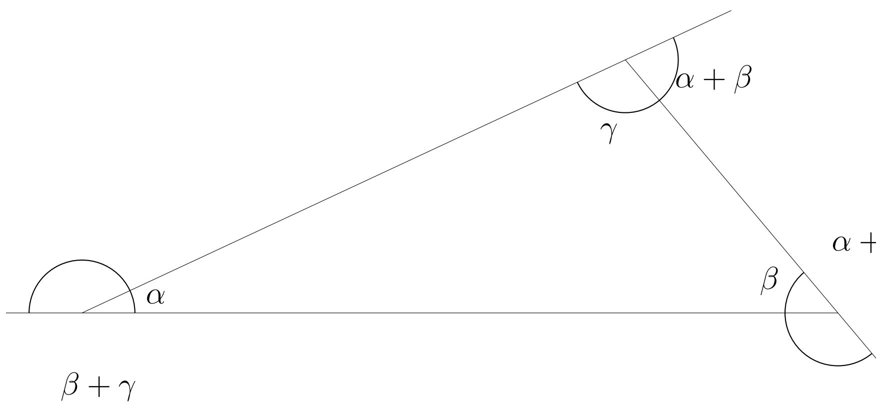
- La suma de los ángulos internos equivale a un ángulo llano, 180°.
  Demostrar este resultado de forma intuitiva es relatiamente fácil, trazando una paralela a un lado por el vértice opuesto. Puesto que una recta cualquiera corta a dos rectas paralelas en ángulos congruentes, se puede trasladar los ángulos contiguos al lado opuesto como ángulos contiguos al ángulo por el que se ha trazado la paralela, verificándose así que suman un ángulo llano.



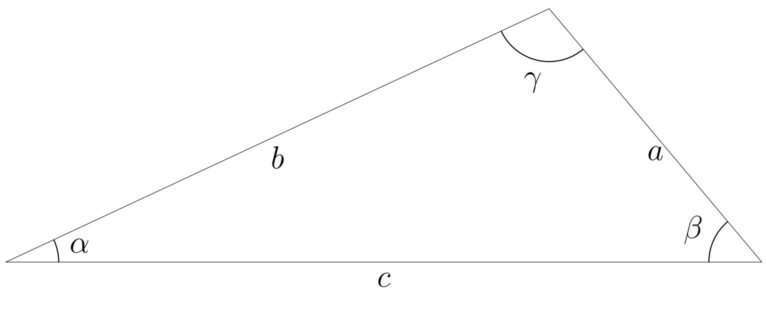
- En todo triángulo, la medida de un ángulo exterior es igual a la suma de los ángulos interiores no contiguos a él.
  Es un resultado inmediato al resultado anterior, puesto que el ángulo exterior suma, con el ángulo interior, el ángulo llano.



- La suma de los ángulos exteriores de un triángulo suman 360°



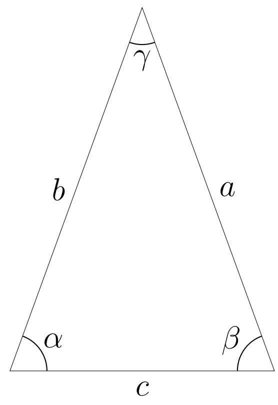
  Por lo que la suma de los ángulos exteriores es $(\beta+\gamma)+(\alpha+\beta)+(\alpha+\gamma) = 2(\alpha+\beta+\gamma) = 2\cdot 180° = 360°$. También es posible observar que cada ángulo exterior continúa el giro donde lo acaba el anterior, por lo que si, los concatenamos, forman una vuelta completa, es decir, 360°.
- A un ángulo mayor se le opone un lado mayor, y viceversa.



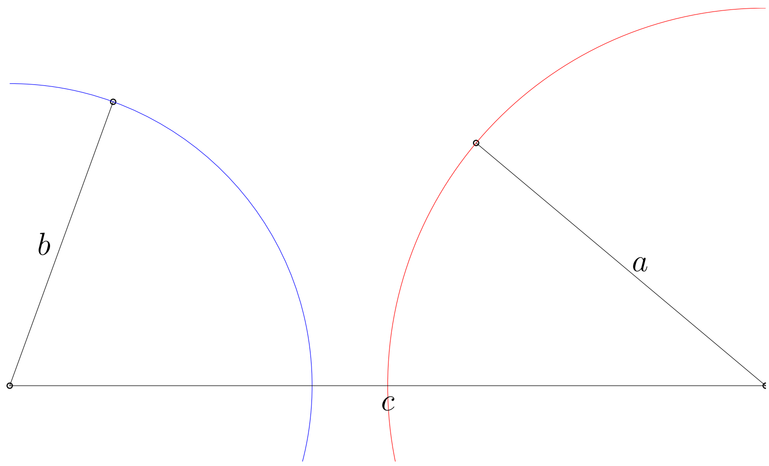
  Se puede observar que

$$\alpha < \beta < \gamma \Leftrightarrow a < b < c$$

- A lados congruentes se oponen ángulos congruentes, y viceversa.



  Puesto que $\alpha = \beta$, entonces $a = b$ y viceversa.
- Un lado siempre es menor que la suma de los otros dos lados, y mayor que su diferencia. En caso contrario, supongamos, sin pérdida de generalidad, que el lado a mide más que la suma de los lados b y c. Entonces nos encontraríamos una situación como la siguiente:



  Ninguna posición en la que pusiera los lados b y a permitirían "cerrar" el triángulo. Se deja como ejercicio comprobar el caso en que un lado es menor que la diferencia de los otros dos.
- Dos triángulos son iguales si tienen:
  - un lado y sus ángulos adyacentes iguales,
  - dos lados y el ángulo comprendido iguales,
  - los tres lados iguales.

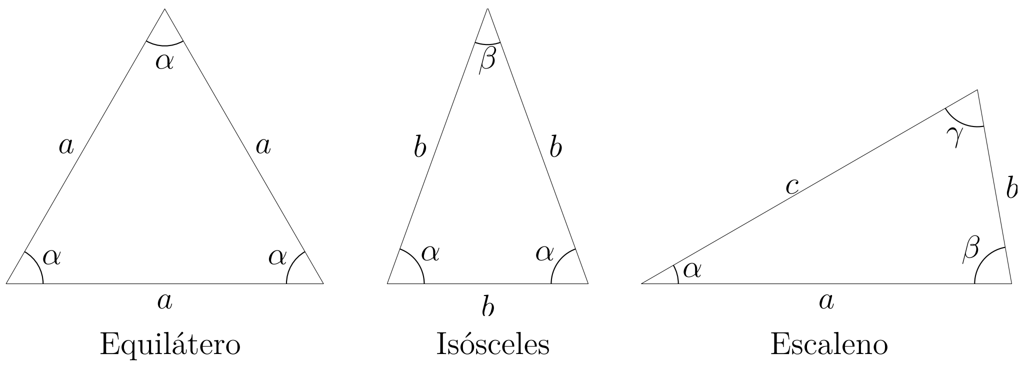
3.1.2 Clasificación de los triángulos

La clasificación de los triángulos responden a la necesidad de delimitar las distintas tipologías de triángulos. Se clasifican, principalmente, atendiendo a dos características: la igualdad de sus lados o la relación con un ángulo recto. A continuación se desarrolan estos elementos.

3.1.2.1 Clasificación atendiendo a sus lados

En realidad, esta clasificación atiende a la cantidad de lados, y por consiguiente ángulos, que son congruentes en el triángulo. Se tienen tres clases:

- *Equilateros*: tienen sus tres lados y, por tanto, sus tres ángulos iguales
- *Isósceles*: tiene dos lados iguales y uno desigual.
- *Escaleno*: sus tres lados son desiguales.



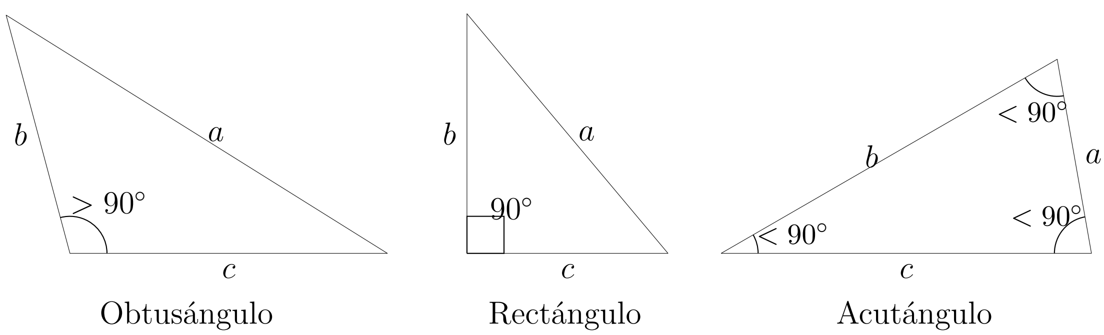
3.1.2.2 Clasificación atendiendo a sus ángulos

Puesto que la suma de los ángulos de un triángulo es un ángulo llano, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, y todos los ángulos han de tener medidas positivas para poder formarse el triángulo, los tres ángulos se reparten los 180°.

Un ángulo muy importante, por sus implicaciones, es el ángulo de 90° o ángulo recto. Si un ángulo del triángulo es un ángulo recto o mayor, los otros ángulos quedan límitados a sumar otro ángulo recto o menos, con lo que ninguno de ellos podrá ser recto. Así que, como máximo, sólo puede haber un ángulo recto en un triángulo.

Tenemos entonces tres tipos de triángulo:

- *Rectángulo*: Hay **un** ángulo recto. Por tanto, los otros han de ser agudos.
- *Obtusángulo*: Hay **un** ángulo obtuso (más de 90°). Por lo que los otros dos deben ser agudos.
- *Acutángulo*: **todos** los ángulos son agudos.



3.1.3 Elementos notables de un triángulo

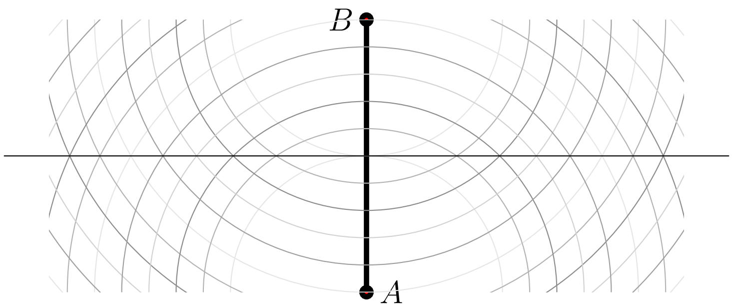
Los triángulos son los polígonos más simples que existen. Son tan simples que con muy pocas restricciones quedan univocamente determinados. Por eso los encontramos cada vez que necesitamos una figura especialmente estable, como los trípodes para las cámaras o los dibujos de las estructuras que forman los puentes de hierro.

Por esto tienen muchas propiedades interesantes. Son tan "limitados" que es fácil encontrar restricciones.

3.1.3.1 Algunos elementos

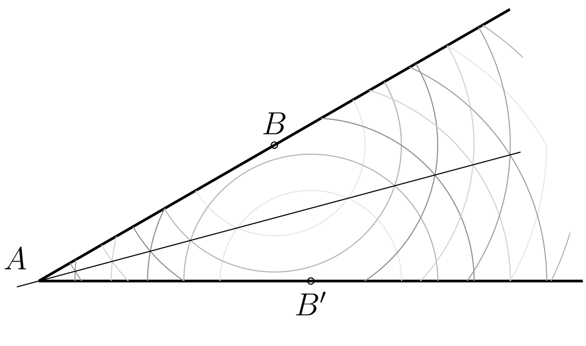
Vamos a usar algunos lugares geométricos[1] para determinar elementos notables de un triángulo. Antes de usarlos, veamos cuales son.

Definición. *Se llama mediatriz de un segmento al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de sus extremos.*



Si, como se indica en el gráfico anterior, se dibujan circunferencias con el mismo radio, con centro en A y en B, y se encuentra donde se cortan, se obtienen los puntos que distan lo mismo de A que de B. Y da lugar a una recta perpendicular al segmento, que pasa por su punto medio[2].

Definición. *Se llama bisectriz de un ángulo al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de las semirectas que definen al ángulo*



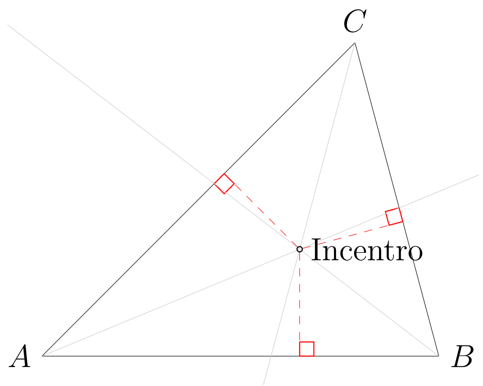
De forma similar a como se hizo en la mediatriz, si tomamos dos puntos, B y C, uno en cada semirecta que define al ángulo, que equidisten del vértice A, y trazamos circunferencias

[1]Conjuntos de puntos que cumplen alguna condición
[2]Con Geogebra haremos esta construcción y resultará mucho más intuitiva

del mismo radio desde B y C, donde se corten estará a la misma distancia de las semirectas. Estos puntos dan lugar a una recta que pasa por el vértice y divide el ángulo en dos partes iguales.

3.1.3.2 Bisectrices de un triángulo

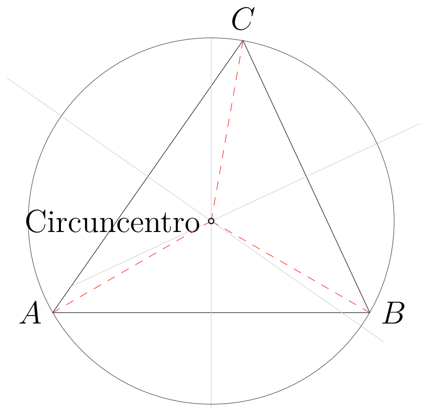
Puesto que un triángulo tiene tres ángulos, hay tres bisectrices, una por ángulo. Las tres bisectrices de los ángulos de un triángulo son concurrentes, es decir, se cortan en un único punto, que se denomina *incentro*, y es el centro de la mayor circunferencia inscrita en el triángulo.



En el gráfico anterior, punteadas, las distancias desde el *incentro* a los lados del triángulo. Se puede comprobar que las tres distancias son, por construcción, las mismas. Así que una circunferencia con centro en el *incentro* y con radio una de esas distancias, tocará a los tres lados.

3.1.3.3 Mediatrices de un triángulo

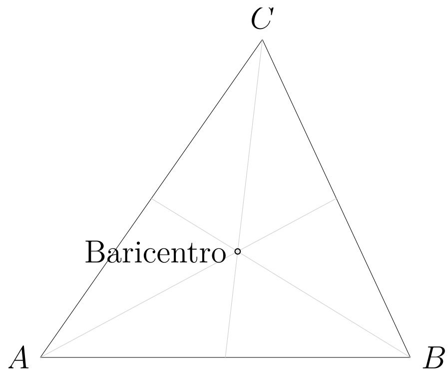
Puesto que un triángulo tiene tres lados, tiene tres mediatrices, una por cada lado. Las tres mediatrices de un triángulo son concurrentes, es decir, se cortan en un único punto, denominado *circuncentro*, y es el centro de la cirfunferencia que circunscribe al triángulo, es decir, que pasa por los tres vértices.



De nuevo, en el gráfico anterior, en rojo, la distancia del *circuncentro* a cada uno de los vértices. Se puede comprobar que es la misma y, por tanto, una circunferencia con centro en el circuncentro y que pase por uno de los vértices pasará por los tres.

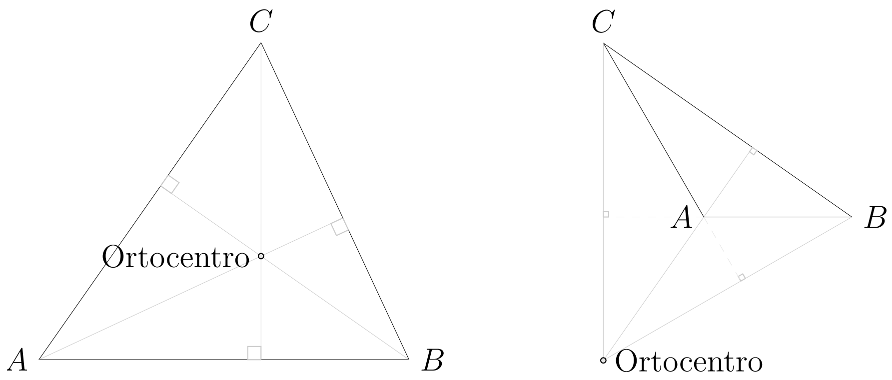
3.1.3.4 Medianas de un triángulo

Se llama mediana de un triángulo al segmento comprendido entre un vértice y el punto medio del lado opuesto. Todo triángulo tiene tres medianas, que son concurrentes, es decir, se cortan en un único punto, denominado *baricentro*, y es el centro geométrico del triángulo[3].



3.1.3.5 Alturas de un triángulo

Se llama altura de un triángulo a una recta que pasa por un vértice y es perpendicular al lado opuesto. Las tres alturas de un triángulo son concurrentes, es decir, se cortan en un único punto, denominado *ortocentro*.



Es importante tener en cuenta que, por construcción, puede ocurrir que una altura no quede en el interior de un triángulo, mientras que las mediatrices, bisectrices y medianas han de estar, por construcción, total o parcialmente dentro del triángulo, como se puede observar en la construcción del segundo ejemplo, arriba.

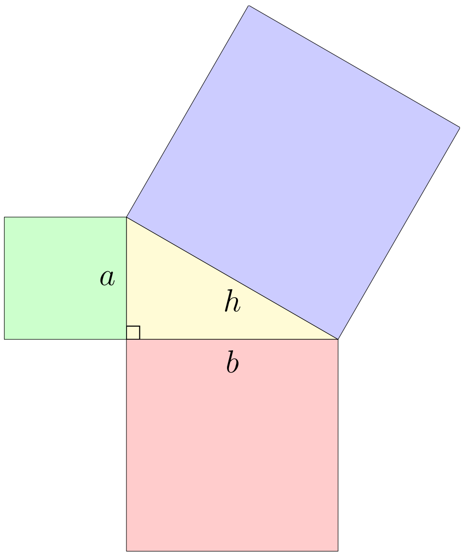
3.1.3.6 Los triángulos rectángulos

Una clase de triángulos muy importantes, por su aplicación y su relevancia histórica, son los triángulos rectángulos. Como se ha definido anteriormente, un triángulo rectángulo es aquel que uno de sus ángulos es recto.

[3]Si el triángulo estuviera hecho de un material completamente uniforme, es decir, que pesara lo mismo en todos sus puntos, y se pusiera apoyado sobre una aguja sobre el baricentro, se quedaría en equilibrio.

Sobre ellos se enuncia el famoso Teorema de Pitágoras, probado en el sigo VI a.C por el filósofo y matemático griego Pitágoras. Se sospecha que ya se conocía anteriormente, pero lo que hay registrado son ternas de números que correspondían a los triángulos pitagóricos, y que se usaban para resolver problemas sobre este tipo de triángulos. Sin embargo, no se conserva ningún documento que exponga de forma teórica la relación.

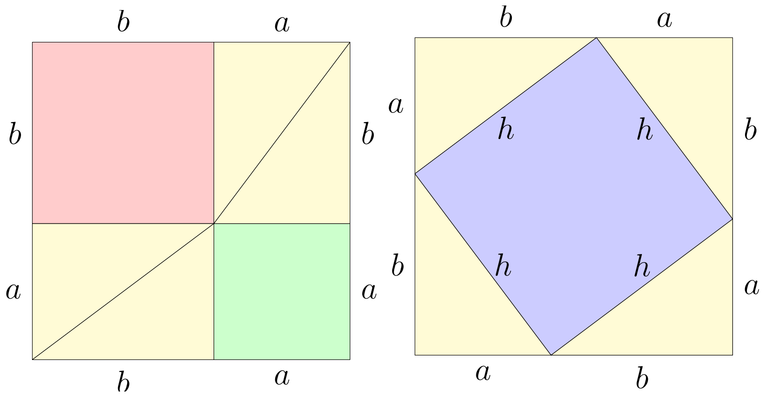
Teorema. *Dado un triángulo rectángulo, el área de los cuadrados que se construyen sobre los catetos suman el área del cuadrado que se construye sobre la hipotenusa.*



Que da lugar a la famosa fórmula

$$a^2 + b^2 = h^2$$

Y tiene una demostración intuitiva muy asequible



Observando las dos construcciones anteriores, que son dos cuadrados congruentes, de lado $a + b$, se puede observar que contienen, ambos, cuatro triángulos rectángulos iguales. Si en ambas figuras se descartan esos cuadrados, partiendo de la misma área, debe quedar la misma área, por lo que los dos cuadrados, de áreas b^2 y a^2 deben sumar el área del cuadrado de área h^2. Y esto demuestra el teorema de Pitágoras.

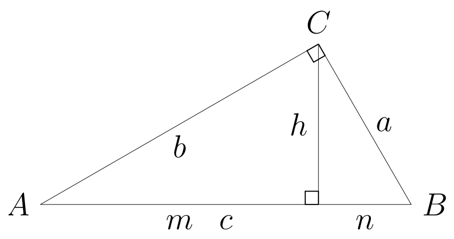
Pero, además, el teorema de Pitágoras tiene un reverso, y es que, a partir de las medidas de sus lados, si c es el lado más largo del triángulo, se tiene:

- $c^2 = a^2 + b^2$, entonces el triángulo es rectángulo,
- $c^2 > a^2 + b^2$, entonces el triángulo es obtusángulo,
- $c^2 < a^2 + b^2$, entonces el triángulo es acutángulo.

Por tanto, se puede caracterizar la tipología del triángulo, en cuanto a la clasificación según sus lados, a partir de la longitud de sus lados.

3.1.4 Y hay mucho más ...

Aunque te parezca que hay muchos contenidos en esta parte, créeme, tan sólo estamos rascando en la superficie. Sólo con objetivo de llamar a tu curiosidad, te planteo la siguiente situación:



Si un triángulo rectángulo se divide por la altura sobre la hipotenusa, se construyen otros dos triángulos rectángulos que, por sus ángulos, son semejantes al triángulo original

Así, se verifican relaciones de semejanza y el Teorema de Pitágoras para los tres triangulos. De estas relaciones se establecen una serie de relaciones que toman forma de resultados matemáticos importantes:

- *Teorema de la altura*: se verifica que $h^2 = m \cdot n$.
- *Teorema de los catetos*: se verifica que $b^2 = c \cdot m$ y $a^2 = c \cdot n$
- También se verifica: $h = (b^2 \cdot a^2)/c$

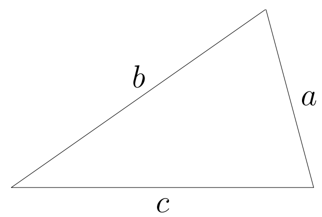
Este apartado no forma parte de la materia de este curso, pero creo que es importante que seáis conscientes que, a partir de los resultados que se han obtenido, se pueden hacer construcciones realmente complejas y potentes.

3.1.5 Resumen de condiciones de existencia de los triángulos

Los triángulos son tan simples que sólo pueden existir bajo condiciones muy estrictas. No todas las medidas de ángulos y lados son válidas para formar triángulos. A continuación se recopilan las principales reglas que tienen que verificar las medidas de ángulos y lados para que un triángulo con tales medidas exista, y que se han ido exponiendo a lo largo de este documento:

1. En todo triángulo se cumple:

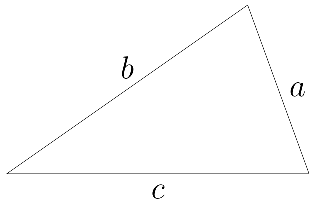
$$
\begin{aligned}
a + b &> c \\
b + c &> a \\
a + c &> b
\end{aligned}
$$



2.

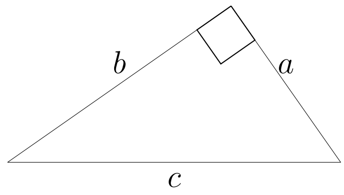
En cualquier triángulo acutángulo se cumple:

$$a^2 < b^2 + c^2$$
$$b^2 < a^2 + c^2$$
$$c^2 < a^2 + b^2$$



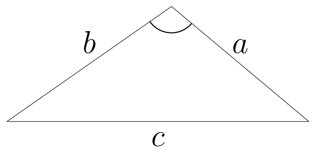
3. En todo triángulo rectángulo se cumple, siendo c el lado más largo (que se denomina hipotenusa) que:

$$c^2 = a^2 + b^2$$



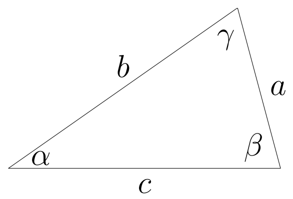
4. En todo triángulo obtusángulo se cumple, siendo c el lado más largo:

$$c^2 > a^2 + b^2$$



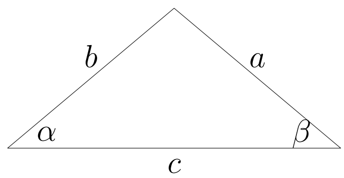
5. En cualquier triángulo, a ángulo mayor se corresponde lado mayor. Es decir, $a > b$ si y sólo si $\alpha > \beta$.

$$a < b < c \Leftrightarrow \alpha < \beta < \gamma$$



6. Dos lados de un triángulo son iguales si y sólo si sus ángulos correspondientes lo son.

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow a = b$$



3.2 Los cuadriláteros

Los triángulos son los polígonos más sencillos, por ser los de menor número de lados. Los siguientes en complejidad son los cuadriláteros. Son menos rígidos que los triángulos y, por tanto, permiten muchas más opciones.

3.2.1 Clasificación de los cuadriláteros

Para clasificarlos[4] se utilizan múltiples criterios:

- Paralelismo de lados
- Igualdad de lados
- Igualdad de ángulos
- Número de ángulos rectos
- Posición relativa de diagonales
- Concavidad y convexidad

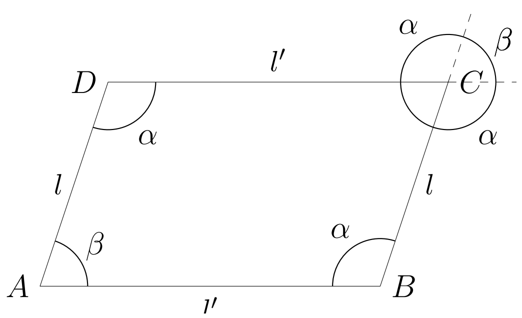
Vamos, a continuación, a construir progresivamente una clasificación de los cuadriláteros, para ejemplificar cómo se desarrollan estos sistemas. Evidentemente, como enunció sir Isaac Newton, caminaremos a hombros de gigante y utilizaremos el trabajo que se ha hecho, durante siglos, antes que nosotros. Por lo que, en su mayor parte, los pasos que van a seguir están basados en el esfuerzo que durante siglos se ha llevado a cabo y no empezaremos de cero.

En primer lugar, puesto que un cuadrilátero tiene cuatro lados, puede ocurrir que existan paralelismos entre sus lados. Puesto que los lados contiguos no pueden ser paralelos, tan sólo podrían ser paralelos con el lado opuesto. Por tanto nos encontramos tres situaciones:

- Ningún lado es paralelo a otro: *trapezoides*
- Sólo dos lados son paralelos y los otros dos no: *trapecios*
- Los cuatro lados son paralelos dos a dos: *paralelogramos*

A partir de esta gran clasificación inicial, podemos empezar a aplicar los subsiguientes criterios, teniendo en cuenta las propiedades que ya inducen.

Trabajemos a partir de los paralelogramos:



Puesto que se consideran lados opuestos paralelos, por continuidad de lados paralelos los ángulos opuestos son iguales, y ángulos contiguos son suplementarios, ya que tienen que sumar

[4]Este apartado es una adaptación personal del planteamiento de Godino y Ruíz (2003), página 468, al cual expreso mi agradecimiento por los materiales públicamente disponibles

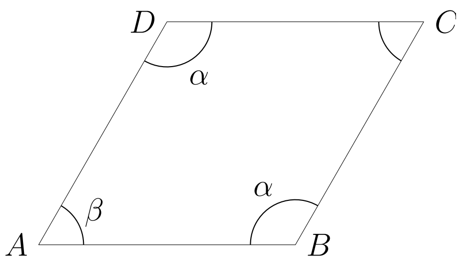
180°. Así, determinando uno cualquiera de sus ángulos internos, quedan determinados todos los demás.

Se tienen dos posibles medidas de ángulos, que se repiten en ángulos opuestos. Y dos posibles medidas de lados, que se repiten en lados opuestos.

Añadamos alguna restricción adicional a nuestro modelo. Primero, si añadimos alguna restricción más de igualdad de ángulos, implicaría que todos los ángulos serían iguales, con lo que se repartirían en cuatro partes los 360° que suman los ángulos internos del paralelogramo, quedan en ángulos rectos, de 90°.

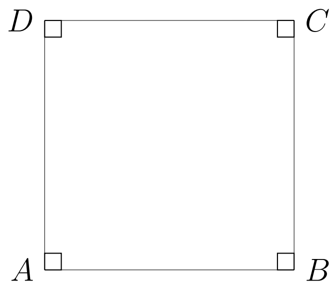
Esto da lugar al *rectángulo*.

Si, por el contrario, decidimos hacer iguales los lados, puesto que sólo hay dos medidas diferentes, implicaría la igualdad de los cuatro lados.



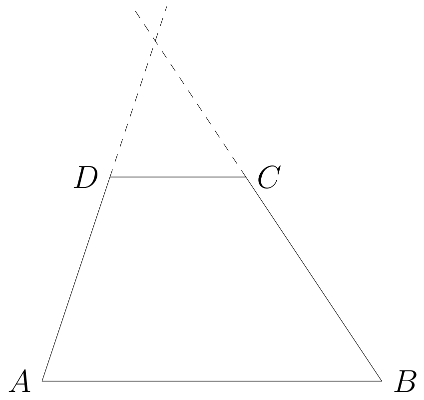
Se tienen entonces los *rombos*.

Si se consideran ambas condiciones simultáneamente, es decir, un paralelogramo con todos sus lados y ángulos iguales

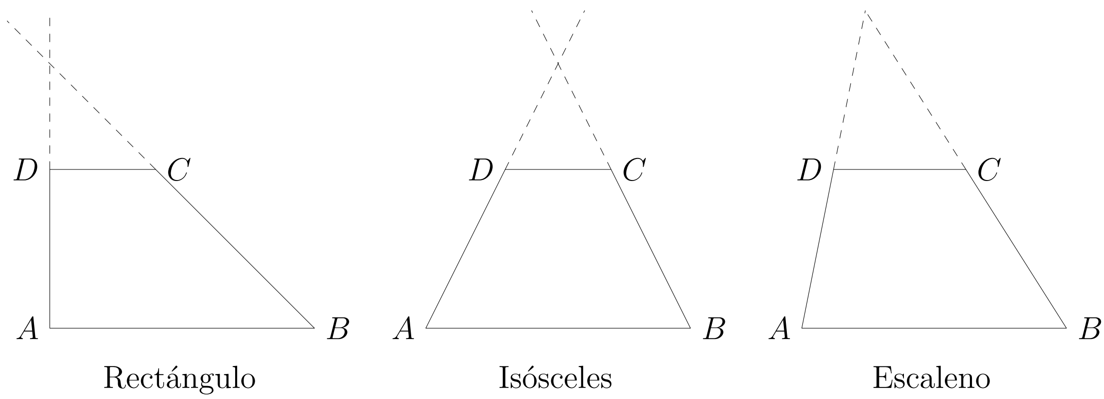


se tendrá un *cuadrado*.

Analicemos a continuación los trapecios. Sólo tienen dos lados paralelos, y los otros dos deben ser no paralelos, o convergentes, es decir, si se continúan las rectas que forman esos lados se cortarán en algún punto.

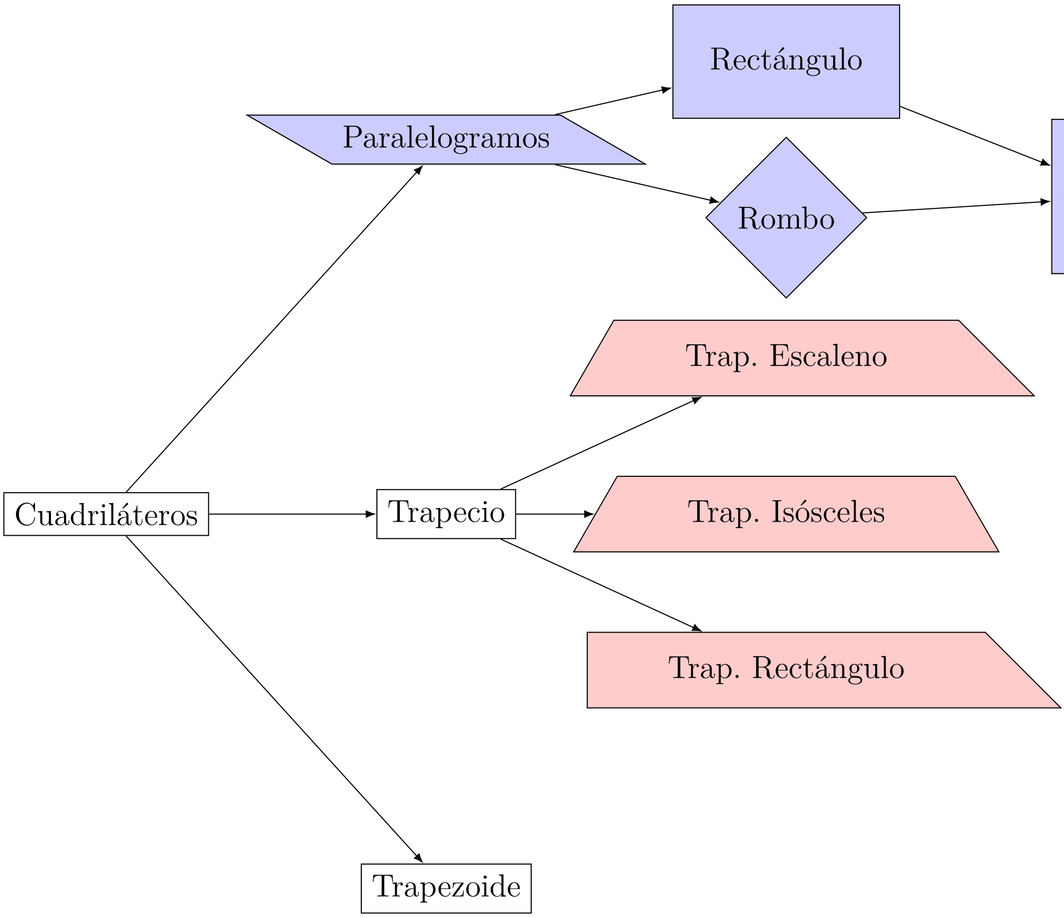


Así, puede que una forma interesante de clasificar los trapecios es en función del triángulo que se ha truncado[5] para construirlo, y que conserve las características interesantes de ese triángulo. Así, se tienen:



Resumamos la clasificación obtenida para los cuadriláteros:

[5]Truncar es cortar de forma paralela a la base

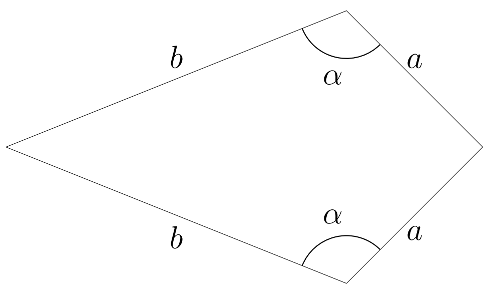


Recopilemos: partiendo del paralelismo de lados se ha llevado a cabo una primera clasificación, que después se ha ido refinando con otros criterios, como la igualdad de ángulos y/o lados, o la relación entre los ángulos.

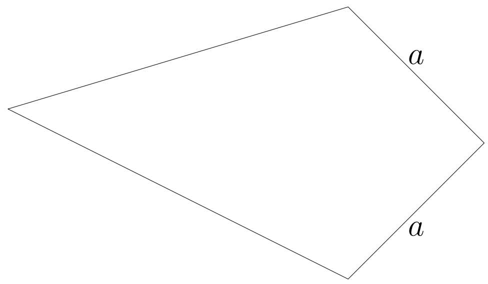
£Estarán todos los casos de cuadriláteros contemplados?

Partiendo de un criterio diferente, se va a considerar la igualdad de lados . . . consecutivos. £Cómo tiene que ser un cuadrilátero para que tenga lados consecutivos iguales? Podemos tener tres casos, principalmente:

- Todos los lados son iguales, con lo que obtendríamos un rombo ... que ya está estudiado.
- Que los lados fueran iguales dos a dos. Esto es una nueva figura, que se denomina *cometa*, o *trapezoide bisósceles*.



- O que sólo dos lados sean iguales, y los otros dos con otras medidas. A esta figura se la denomina *cometas oblicuos*.



Por las pocas propiedades que tiene, los *cometas oblicuos* no suelen considerarse en las clasifiaciones, formando parte del grupo de los trapezoides.

Se podrían intentar, también estudiar los trapezoides a partir de sus ángulos y utilizando la propiedad de los cuadriláteros de que todos sus ángulos internos suman los de dos triángulos, es decir, 360°, lo cual limita los casos. A partir de este planteamiento se pueden obtener algunas construcciones más, como el *trapezoide rectángulo* y el *trapezoide escaleno* que, por su nombre, queda evidente su construcción.

Sin embargo, el objetivo de esta discusión, que es observar cómo a partir de la identificación de las diferentes configuraciones y sus restricciones sobre la forma proporcionan una clasificación de la tipología de los cuadriláteros, queda suficientemente explicitada.

No olvidemos que nuestro objetivo es la *didáctica de la geometría* y, aquí, se explicita uno de nuestros objetivos: la identificación de las características de los elementos geométricos y sus propiedades y relaciones.

Como ya se verá más adelante, el objetivo en la Educación Primaria es una asimilación intuitiva de estos conceptos, llegando a demostraciones geométricas y basadas en la intuición formal. Exactamente lo que se os está proporcionando. Así que no sólo adquirid los conocimientos matemáticos que se os están proporcionando, sino observar cómo estos conocimientos se están explicitando.

En la Figura 3.1 se puede observar la clasificación a la que hemos llegado, añadiendo en cada paso más restricciones a la figura anterior. Se han obviado aquellas figuras que no resultan interesantes por tener pocas propiedades, aunque sus nombres se han dado arriba.

3.2.2 Descripción y propiedades de los cuadriláteros

Al ser los cuadriláteros más "abiertos" que los triángulos y tener más configuraciones, también tienen diferentes tipologías y conjuntos de propiedades. A continuación se exponen algunas de las propiedades de los cuadriláteros. Es importante conocerlas para poder identificarlos, ya que no todos los cuadriláteros tienen las mismas propiedades, y quedan identificados por las mismas.

3.2.2.1 Cuadriláteros

- Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados.
- Tiene cuatro vértices (A, B, C, D), cuatro lados y dos diagonales ($\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ en el dibujo).
- Al dividirlo cualquiera de sus diagonales en dos triángulos, sus ángulos internos suman los de dos triángulos, es decir, 360°.

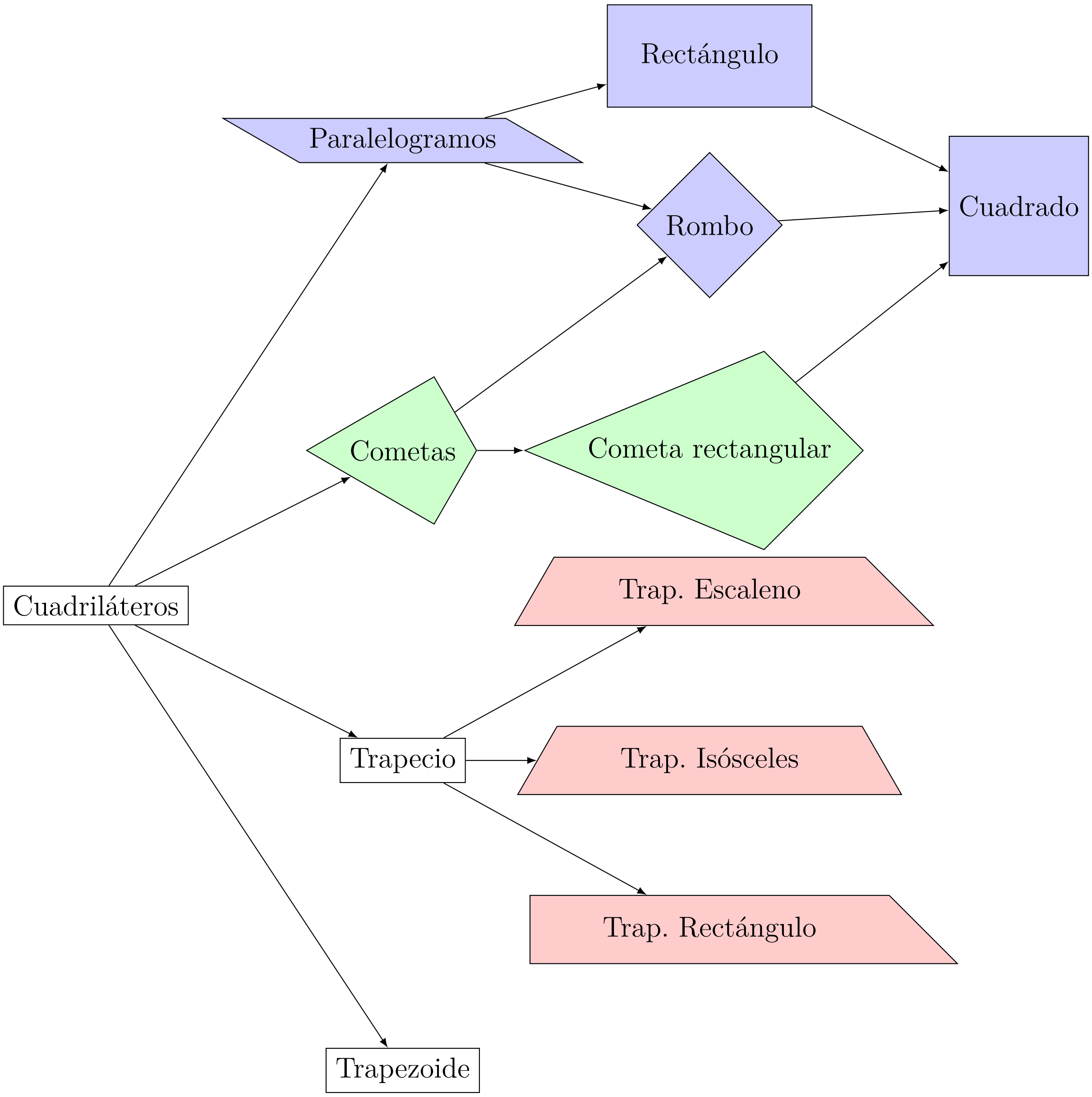
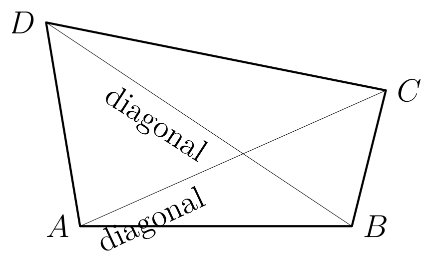


Figura 3.1: Clasificación de los cuadriláteros

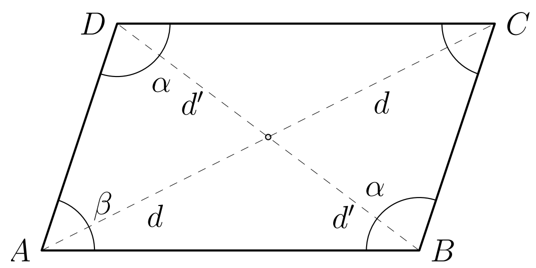
- Son los únicos polígonos en los que coinciden la suma de los ángulos exteriores e interiores.



3.2.2.2 Paralelogramos

Además de tener las propiedades de los cuadriláteros:

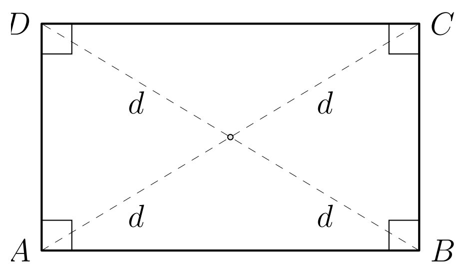
- Los ángulos opuestos son congruentes
- Los lados opuestos son congruentes
- Las diagonales se cortan mutuamente en partes congruentes



3.2.2.3 Rectángulo

Es un paralelogramo con todos sus ángulos rectos. Además de tener las propiedades de los paralolagramos, añade:

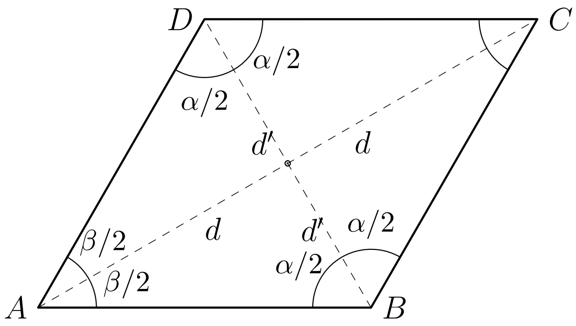
- Todos sus ángulos internos son rectos
- Las diagonales son congruentes
- Las diagonales se dividen, mediante su intersección, en partes congruentes.



3.2.2.4 Rombos

Por ser un tipo de paralelogramo, mantiene todas sus propiedades, y además:

- Todos sus lados son congruentes.
- Un paralelogramo con dos lados consecutivos congruentes es, forzosamente, un rombo.
- Las diagonales son perpendiculares y bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen.
- Las diagonales se cortan en segmentos congruentes en cada diagonal.

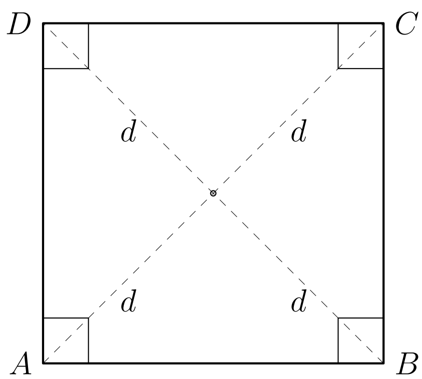


3.2.2.5 Cuadrado

Es un tipo de paralelogramo, con lo que hereda todas sus propiedades. Además:

- Tiene sus cuatro lados y sus cuatro ángulos congruentes y, por tanto, rectos.
- Sus diagonales son congruentes.
- Sus diagonales se cortan en cuatro segmentos congruentes.
- Sos diagonales son perpendiculares y bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen.

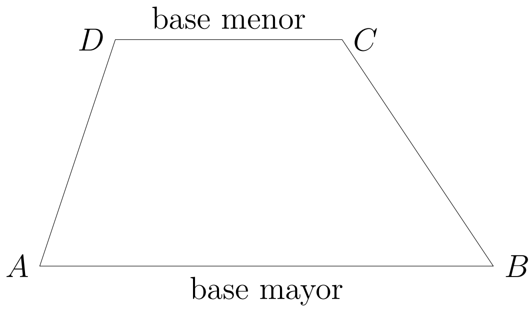
Es posible observar que agrupa todas las propiedades de los rectángulos y del rombo, además de los del paralelogramo. De hecho, esta figura es tan "rígida" que sus ángulos se pueden calcular (lo dejo como ejercicio) y lo único que puede cambiar es el tamaño.



3.2.2.6 Trapecios

Los trapecios tienen las propiedades básicas de los cuadriláteros, además de que dos de sus lados son paralelos, a los que se suelen denominar bases.

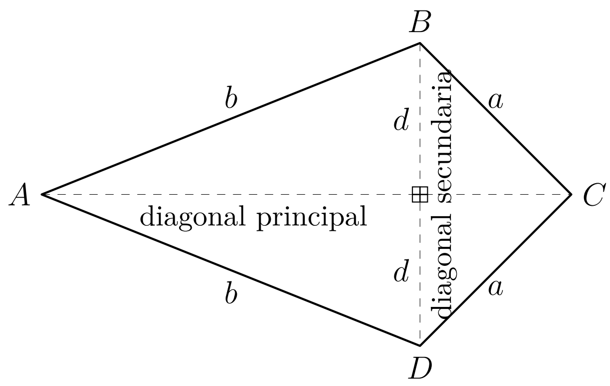
Al ser los lados que no son las bases no paralelos, las bases son no congruentes, y por tanto se denominan *base mayor* y *base menor*, dependiendo de su tamaño.



3.2.2.7 Cometa

Es un cuadrilatero en el que las lados son congruentes dos a dos de forma consecutiva.

- La diagonal que tiene por extremos los vértices en los que inciden los lados congruentes se denomina *diagonal principal* y la otra *diagonal secundaria*
- La diagonal principal es bisectriz de los ángulos cuyos vértices une.
- Las diagonales se cortan perpendicularmente.



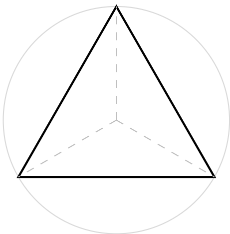
El resto de los cuadriláteros no tienen más propiedades reseñables, a parte de su clasificación.

3.3 Polígonos regulares

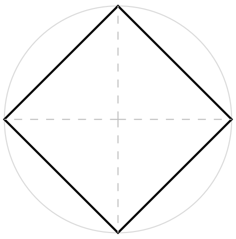
Dentro de los polígonos regulares tienen especial relevancia los denominados *polígonos regulares*, por su importancia histórica y sus propiedades, habiendo sido, en parte, los responsables del interés en la Geometría de la Grecia clásica, por sus propiedades matemáticas y belleza.

Se llama polígono regular a un polígono en el que todos sus lados y sus ángulos internos son congruentes.

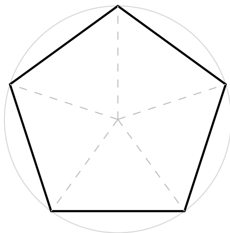
Los polígonos regulares son únicos, salvo escala y número de lados, teniéndose así:



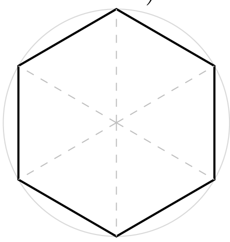
Triángulo equilátero (3 lados)



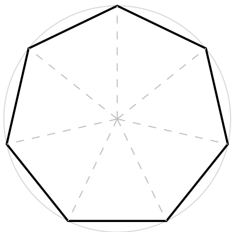
Cuadrado (4 lados)



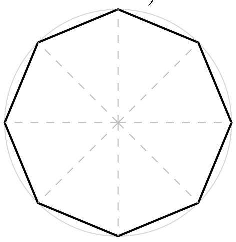
Pentágono regular (5 lados)



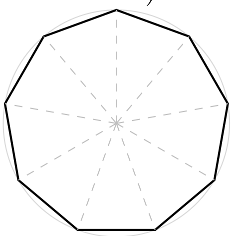
Hexágono regular (6 lados)



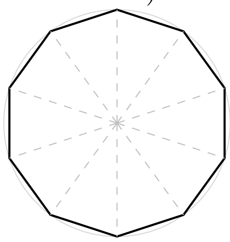
Heptágono regular (7 lados)



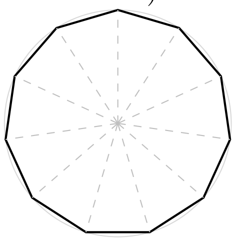
Octógono regular (8 lados)



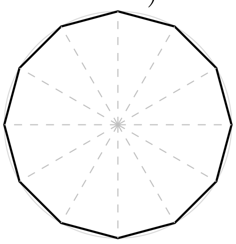
Eneágono regular (9 lados)



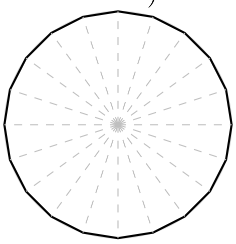
Decágono regular (10 lados)



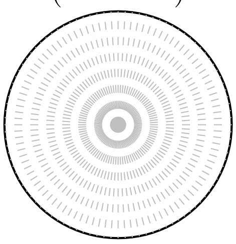
Undecágono regular (11 lados)



Dodecágono regular (12 lados)



Isodecágono regular (20 lados)



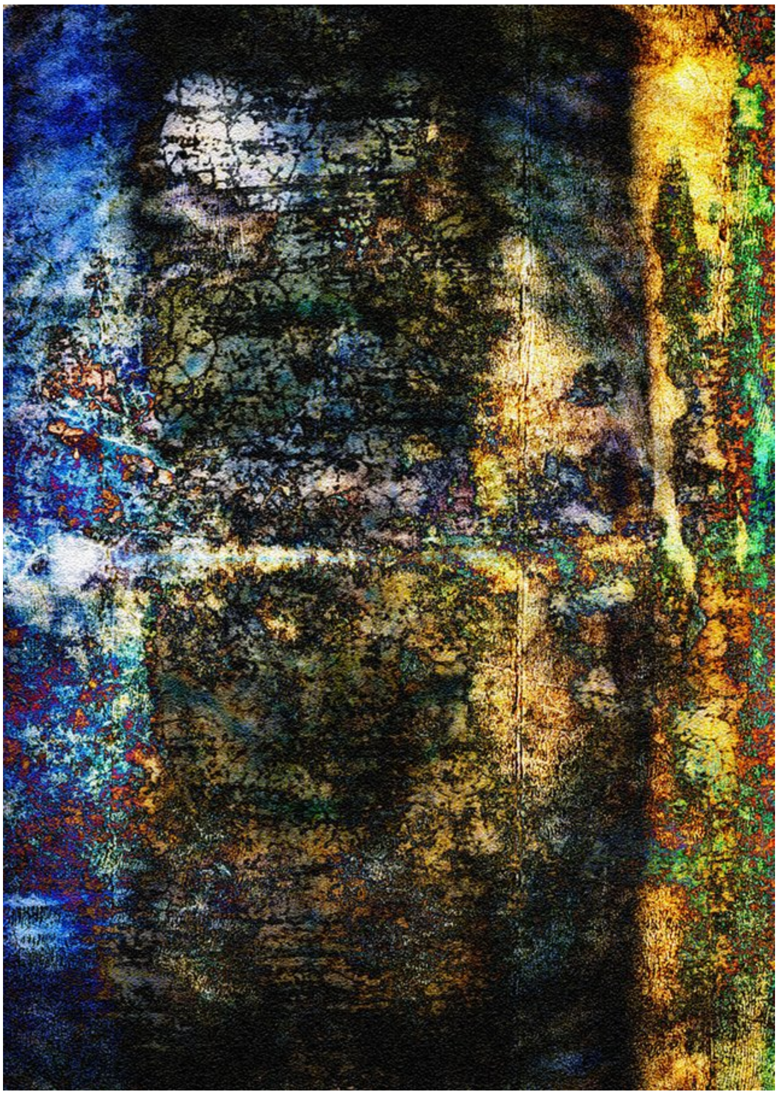
Hectágono regular (100 lados)

Es posible observar que, cuanto más lados tiene el polígono regular, más se asemeja a una circunferencia. De hecho, un método habitual para construir los polígonos regulares es mediante la subdivisión de la circunferencia.

Las propiedades de los ángulos de los polígonos regulares ya se expusieron en el epígrafe 2.4.5, en la página 28.

4 Transformaciones geométricas: Isometrías

Supongamos que os propongo un juego: decidme que véis en el siguiente cuadro



Peter Heckmann -Ancient Samurai Values - Hidden Bushido

Supongo que una de las cosas que habrás hecho ha sido girarla, desplazarla si no la podías ver completa ... Si las estás viendo en una pantalla electrónica, posiblemente la habrás ampliado ... Es decir, la has transformado. Sin embargo, la identidad de los elementos que conforman la imagen no ha cambiado. El cuadro sigue siendo el mismo, aunque han cambiado algunas de sus características.

Lo que has hecho se denominan transformaciones, y van a ser el objetivo de trabajo de esta parte del temario.

Las transformaciones se clasifican según aquellas propiedades que se mantienen invariantes. En este capítulo nos vamos a centrar en un grupo particular de ellas, que son las más restrictivas y, posiblemente, las más intuitivas. Pero, antes de empezar con ellas, hay que aclarar qué son las transformaciones y cuales son sus características.

Se llama transformación en el plano a una aplicación que cada punto P del plano se transforma a una nueva posición P' (a P se le llama original o preimagen de P' y a P' se le denomina imagen de P) de tal forma que cada dos puntos distintos del plano, P y Q, tienen imágenes distintas, P' y Q', y todo punto tiene una preimagen.

Si una transformación del plano conserva las distancias, es decir $PQ \equiv P'Q'$, se dice que es una isometría[1]. A estas transformaciones también se las denomina *movimientos rígidos*.

La principal característica de las isometrías es que conservan la forma y las medidas de las figuras. Se podrían visualizar como un trabajo manual con papeles transparentes:

- Tenemos un papel con una figura dibujada en ella.
- Colocamos un papel transparente encima y calcamos la figura, para tener una copia exacta en la transparencia.
- La transparencia se puede mover, girar, etc, obteniendose una nueva figura en una posición diferente, aunque la forma y dimensiones no varía.

Esas transformaciones son las *isometrías*.

4.1 Tipos de isometrías

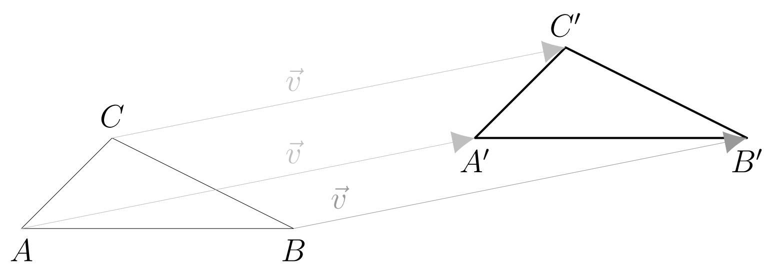
Muy pocas transformaciones son isometrías. De hecho, sólo hay tres.

4.1.1 Traslaciones

Corresponde al concepto de desplazar, sin ningún giro, el papel transparente. Con lo que tendríamos algo parecido a una imagen doble, como cuando uno se pone vizco. Se obtienen dos imagenes superpuestas, la original y la transformada, que, únicamente, están desplazadas entre sí.

Ese desplazamiento se representa mediante el concepto de vector. Los vectores son segmentos orientados, es decir, un segmento que empieza en el punto de origen y termina en su imagen. Se añade una flecha para indicar la dirección. A este vector se le denomina *vector de traslación*.

Se sitúa el origen del vector en cada uno de los puntos del plano, y se toma como imagen de ese punto dónde queda la punta. En la siguiente imagen se puede ver un ejemplo de aplicación de esta transformación, así como el vector de traslación, $\vec{v}$ (puesto que todos los vectores etiquetados como $\vec{v}$ son equivalentes se consideran el mismo).



[1]Que viene de la unión de las palabras de origen griengo *iso*="igual" y *metría*="medida"

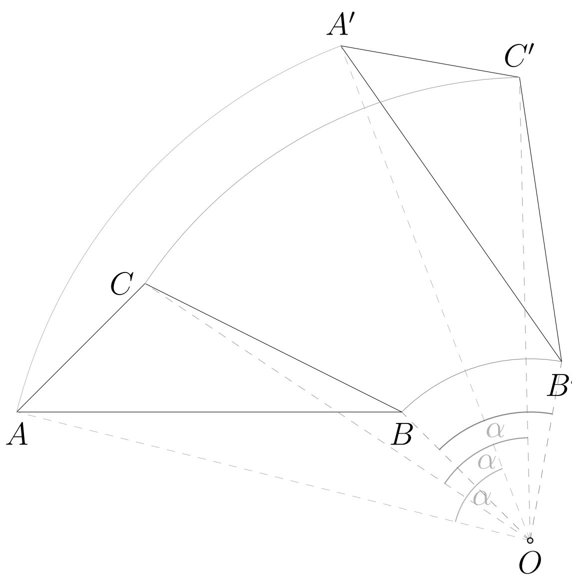
4.1.2 Giros

Si, una vez están superpuestos los dos papeles, el original y la copia, clavamos un alfiler en un punto cualquiera, podemos girar la transparencia y todos los puntos se desplazan siguiendo trayectorias circulares. El único punto que permanece en el mismo sitio es aquel en el que se ha clavado la aguja.

Esta transformación es la que se denomina *giro*. Al punto que queda invariante, que es "sobre el que se gira", se denomina *centro de giro*. A la cantidad de giro aplicada, es decir, el ángulo que forma respecto al centro de giro el origen y la imagen de cualquier punto, se denomina *amplitud de giro*.

El giro se considera positivo si es en sentido antihorario[2], y negativo en caso contrario.

A continuación se presenta un caso de giro, con amplitud negativa, con amplitud α y centro de giro O.



4.1.3 Simetrías

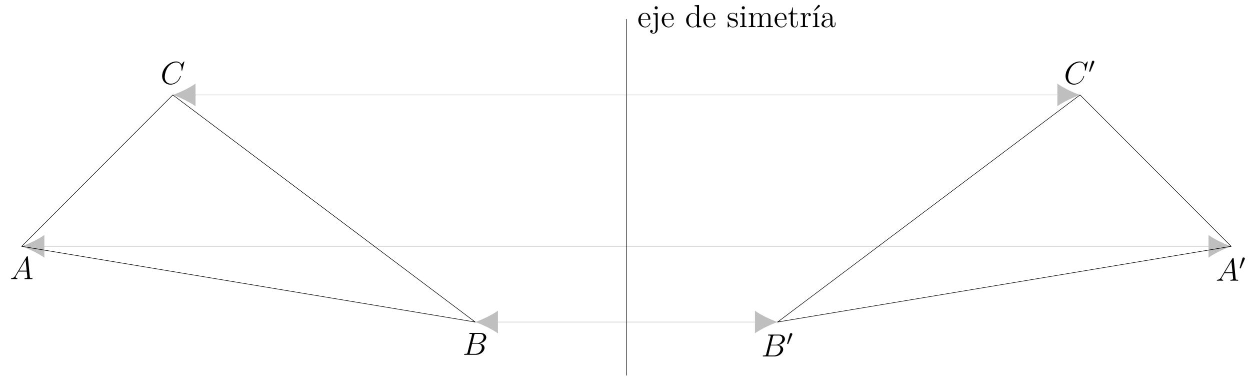
Si dibujamos una recta cualquiera en el papel y lo copiamos a la transparencia, y le damos la vuelta a la transparencia de tal forma que la superficie en la que hemos pintado quede hacia el papel y la recta se quede en el mismo sitio, la imagen se habrá "dado la vuelta", apareciendo al "otro lado" de la recta, pero conservando las medidas y la forma.

Esta es la transformación que se produce en un espejo, con el reflejo de la imagen.

A esta transformación se le llama *simetría*, y los únicos puntos que quedan invariantes son los de la recta que hemos utilizado de referencia, a la cual se la denomina *eje de simetría*.

El eje de simetría será perpendicular a los segmentos que unen cada punto con su imagen y lo cortará en su punto medio. Por tanto, el eje de simetría será la mediatriz del segmento que une a cada origen con su imagen.

[2]en sentido contrario al movimiento de las manecillas de un reloj



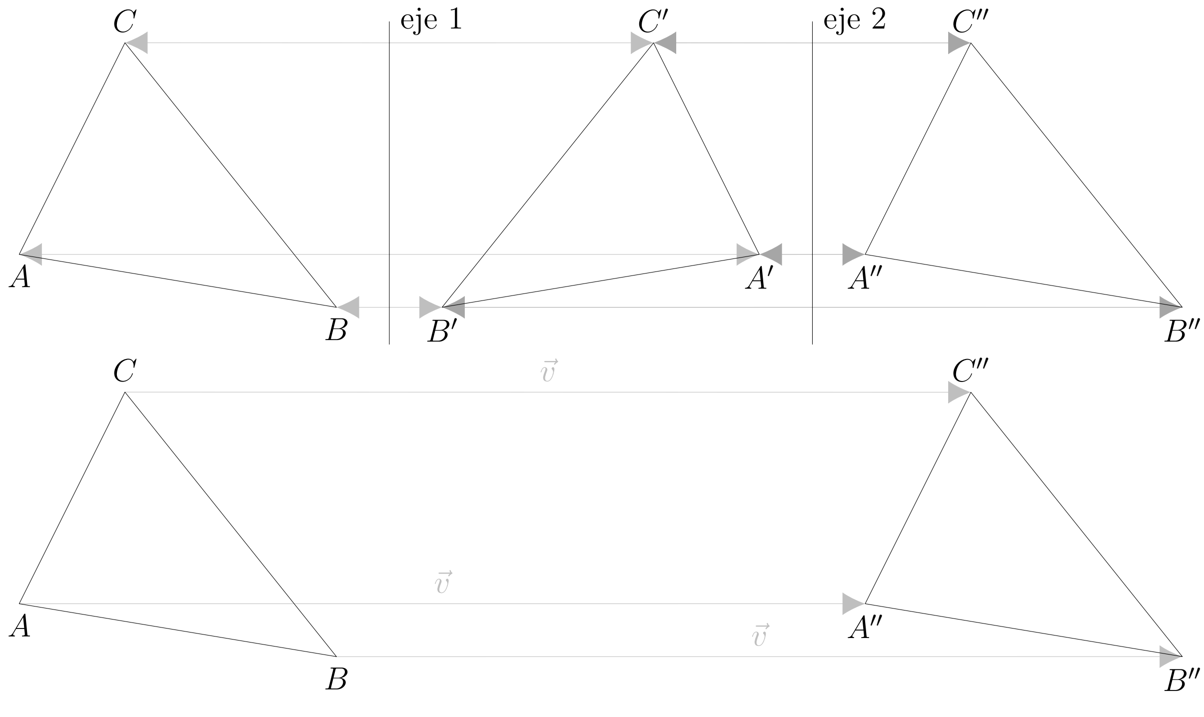
4.1.4 Composición de simetrías

Las isometrías vista hasta ahora, la *traslación*, el *giro* y la *simetría* son las isometrías "simples" que existen. El siguiente paso sería la composición de estas isometrías simples, es decir, aplicar varias isometrías de forma secuencial.

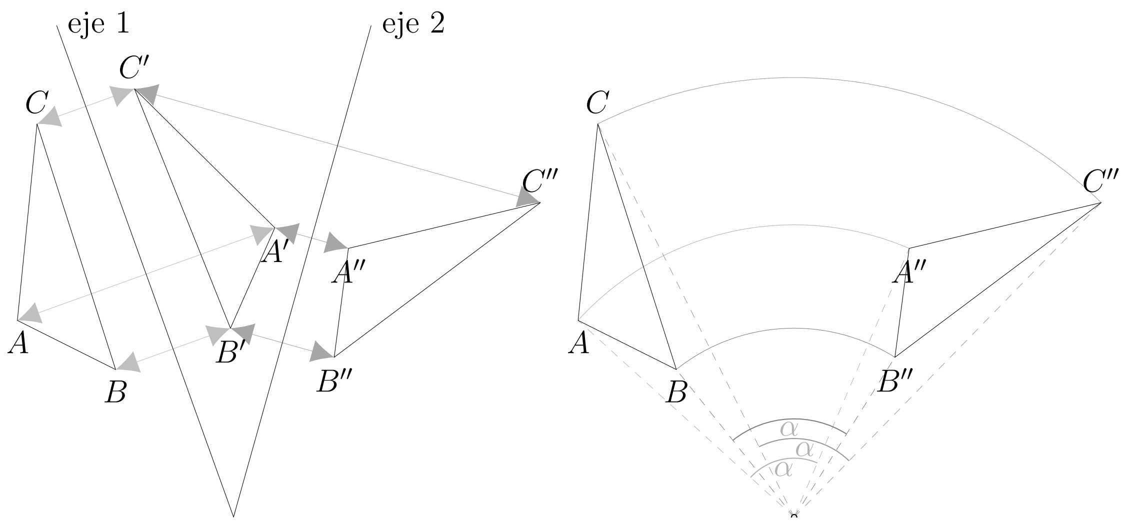
Sin embargo, se observa que, en general, la transformación resultante es equivalente a una transformación simple. Veamos algunos casos.

La composición de dos simetrías sucesivas es:

- si los ejes son paralelos, una traslación



- si los ejes se cortan, un giro.



Solo hay una composición que no se puede representar como una isometría simple de las que ya se han estudiado, y es la composición de un desplazamiento y una simetría. A esta nueva isometría se denomina, qué casualidad[3], *simetría con desplazamiento*.

4.1.5 Resumen de las isometrías

Se llaman isometrías a las transformaciones del plano que conservan las distancias, y sólo hay cuatro isometrías: traslación, giro, simetría y simetría con desplazamiento. Cualquier otra isometría se puede expresar como una de estas cuatro isometrías.

4.2 Figuras congruentes

Hay un concepto que, siendo muy fácil de interpretar intuitivamente, es muy complejo de expresar matemáticamente, y es el concepto de la *igualdad de figuras*.

La mayoría somos capaces de decir si dos figuras son iguales. Pero, si nos preguntan porqué y no se permite manipularla, la explicación se vuelve vaga. La única forma en la que somos capaces de explicar la igualdad es superponiendo ambas figuras. Pero las transformaciones que me permiten sobreponer una figura a otra, si se considera con cuidado, son las isometrías que hemos visto.

Esto permite definir: dos figuras son *congruentes* si y sólo si una figura es la imagen de la otra mediante un movimiento rígido. Es decir, mediante una de las cuatro isometrías que hemos estudiado.

4.3 Figuras simétricas

El mundo está lleno de imágenes que, en alguna forma, parecen repetir o replicarse. Este parece ser un principio universal de organización y de la forma.

[3]Es muy habitual en las Matemáticas que el nombre corresponda con la definición del concepto, como en mínimo común múltiplo o máximo común divisor. Es un concepto recurrente en el desarrollo de las Matemáticas la eficiencia, en el sentido de obtener los objetivos con el mínimo esfuerzo y de la forma más simple posible.

Estos patrones se basan en las transformaciones que se han estudiado en este capítulo, y son muy interesantes desde un punto de vista manipulativo y didáctico.

El estudio de los patrones y las simetrías de los objetos es la medición de lo que se repite. Y esto permite simplificar la comprensión y asimilación, al reducir la información y utilizarla de forma replicada.

4.3.1 Simetrías

La simetría es un principio universal de organización que se puede encontrar en múltiples situaciones, como los copos de nieve, el arco de circunferencia de un arcoiris, ...

Pero no sólo en la naturaleza. El ser humano, a partir de su observación, identifica estos patrones y los incorpora en sus propias creaciones, como en los arcos de las catedrales, las decoraciones en muros, cerámicas y telas, incluso en la música y la danza se pueden encontrar motivos simétricos en su estructura interna, que dan cuerpo y coherencia a la expresión, llamando a nuestro subsconciente, cuando no, directamente, a nuestra mente consciente, y dotando de mayor belleza y agrado a la expresión artística.

La forma de caracterizar las simetrías en Geometría es a partir de las transformaciones del plano:

Definición. *Se llama simetría de una figura plana a cualquier movimiento rígido del plano que hace coincidir todos los puntos de una figura con otros puntos de la misma figura.*

Es decir, una composición de isometrías que sitúan a la figura, como un total, sobre si misma.

Puesto que sólo hay cuatro movimientos rígidos básicos y todas las composiciones se pueden reducir a una de ellas, toda simetría[4] de un objeto corresponde a uno de esos cuatro movimientos básicos.

[4]Obsérvese que estamos usando la misma palabra, *simetría*, para expresar dos conceptos distintos:

- un movimiento rígido del plano, una simetría respecto a un eje de simetría
- un movimiento rígido del plano que hace coincidir una figura con ella misma

La distinción entre estos dos conceptos se ha de hacer a partir del contexto. Cuando pueda haber confusión se aclarará acual concepto se está referenciando.

4.3.1.1 Simetría esférica o rotacional: giro

Si existe un movimiento de giro alrededor de un centro de rotación (que suele estar dentro de la propia figura) que hace coincidir la figura consigo mismo, se dice que tiene una simetría rotacional o esférica.

Por ejemplo, considérese las siguientes figuras:


https://pixnio.com/es/la-arte/esculturas/bronce-detalle-escultura-estrella-simbolo-simetria-patron-de-textura

https://www.hippopx.com/es/pattern-design-symmetry-up-ceiling-architecture-arch-40277

En la primera, hay cinco giros sobre el centro de la figura que vuelve a situar la figura sobre si misma: una primera, que tiene el giro más pequeño, y otras cuatro que son múltiplos de ese giro.

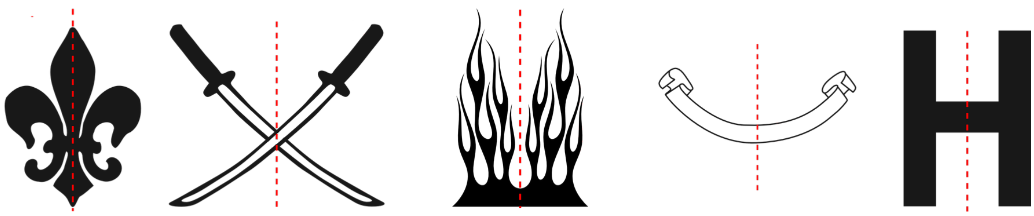
En la segunda, hay tres giros sobre el centro de la figura que vuelve a hacer coincidir la disposición consigo misma.

En realidad, debido a las características de los movimientos circulares, las sucesivas vueltas completas de una figura la situarían sobre ella misma. Sin embargo, para simplificar, sólo se consideran los giros no triviales, es decir, aquellos que se dan en la primera vuelta, esto es, entre 0° y 360°.

4.3.1.2 Simetría axial o cilíndrica: simetría

Si existe un eje de simetría (en el sentido de las isometrías) tal que un movimiento rígido de simetría respecto a ese eje mantiene la figura, es decir, hace que la figura coincida consigo misma, se dice que la figura tiene una simetría axial, también denominada cilíndrica.

Las siguientes figuras tienen las simetrías axiales indicadas. Pero alguna tiene alguna simetría axial más, £eres capaz de identificarla?



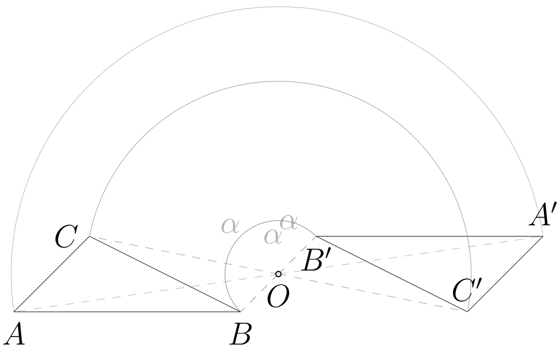
https://pixabay.com/es/vectors/simetr%C3%ADa-espejo-sim%C3%A9trico-146845/

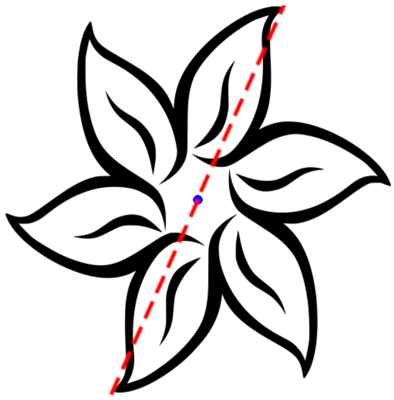
£Puedes identificar la simetría axial en la siguiente imagen?

https://www.pxfuel.com/es/free-photo-xzild

4.3.1.3 Simetría central: giro de 180°

Es un caso particula de simetría rotacional, pero tan frecuente que se merece una referencia propia. El movimiento con el que se identifica esta transformación es construir cada punto una imagen de tal forma que un foco de la transformación, O en el dibujo, sea el punto de medio de cada punto y su imagen.





https://svgsilh.com/es/image/308493.html

Sin embargo, como se puede ver en el movimiento representado en la figura de la izquierda del dibujo anterior, coincide con un giro de 180°. Por tanto, una figura tendrá una simetría central si tiene una simetria rotacional de 180°, como le ocurre a la figura de la derecha del dibujo anterior.

4.4 Recubrimientos del plano

Si se consideran las simetrías que implican la isometría de traslación, hay que considerar figuras que se extienden, de forma repetitiva a lo largo del plano. Estos movimientos pueden establecerse en una sóla dirección, dando lugar a los frisos, o en más direcciones, dando lugar a los recubrimientos o mosaicos.

Ambos son recursos comunes que encontramos fácilmente alrededor. Tan sólo hay que prestar un poco de atención para encontrarlos. Dan lugar a patrones geométricos que se obtienen, mediante transformaciones, a partir de una figura generatriz, que se denomina figura mínima. Se encuentran habitualmente en motivos en paredes, alfombras, etc.

Además de la simetría por traslación puede haber más simetrías, pero las posibilidades son limitadas. Se ha demostrado que hay, en total, siete tipo de frisos y diecisiete tipos de mosaicos.

4.4.1 Frisos

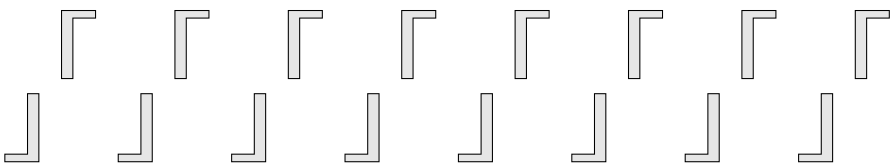
Los frisos se obtienen al hacer traslaciones en una única dirección. Es fácil encontrarlos en los bordes de tejados y cenefas, bases de estatuas, etc.

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Huaca_Las_Balsas_-_Detalle_de_friso_geom%C3%A9trico.jpg
https://www.pxfuel.com/es/free-photo-ibmzc
https://es.m.wikipedia.org/wiki/Archivo:La_T%C3%A9rmica,_M%C3%A1laga_3347.JPG
http://ceramicdictionary.com/es/a/4314/tile-antique

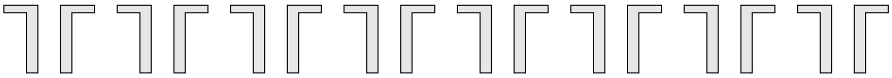
Los frisos se clasifican en función de las isomorfías que se aplican, y sólo se pueden distinguir los siguientes tipos:

- *Friso 1*: Todo friso tiene, como base una traslación en una única dirección, que se determina mediante un vector de traslación:

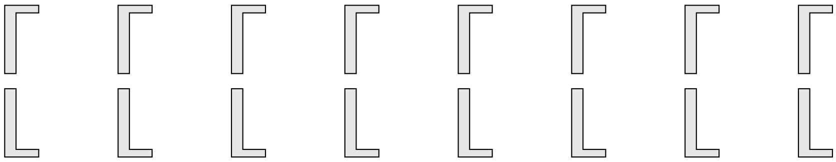
- *Friso 2*: Además de la traslación, puede incluir un giro de 180°:



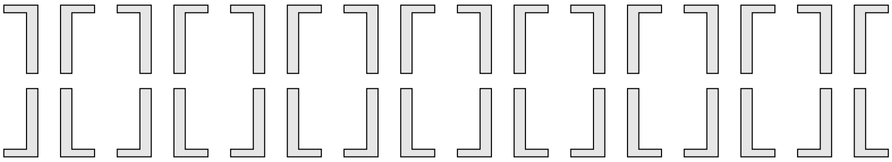
- *Friso 3*: O, además de la traslación, una simetría transversal, es decir, cada figura básica se refleja respecto a un eje perpendicular (transversal) al eje de desplazamiento:



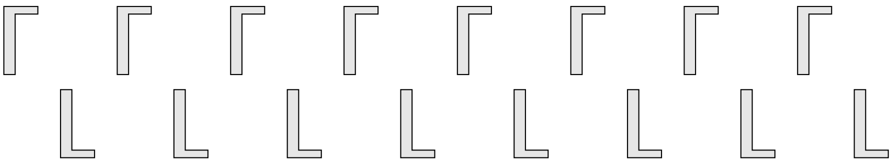
- *Friso 4*: O una simetría longitudinal, es decir, una simetría respecto al eje de desplazamiento:



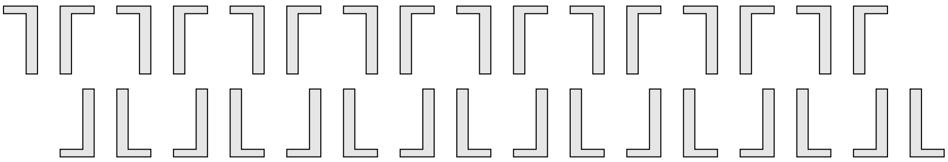
- *Friso 5*: Se pueden combinar los anteriores patrones, como, por ejemplo, la simetría longitudinal y transversal con la traslación:



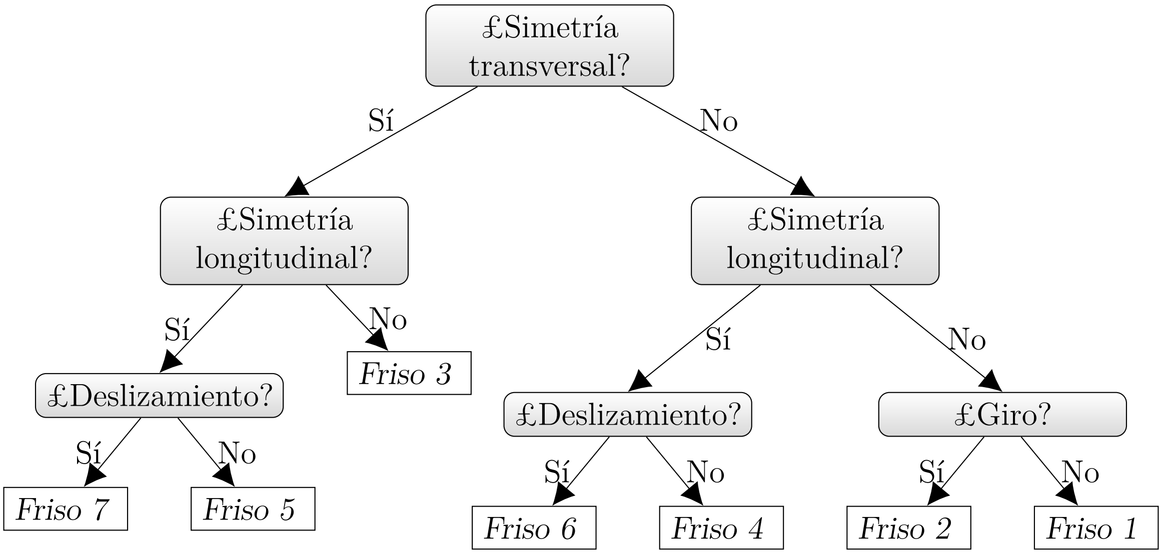
- *Friso 6*: Se puede aplicar una simetría longitudinal, junto con una *deslizamiento*, que corresponde a un desplazamiento de media traslación:



- *Friso 7*: Y, por último, una combinación de simetría transversal, simetría longitudinal y deslizamiento:



Se pueden estructurar los tipos de frisos según un árbol de elecciones, en función de si se aplica o no las diferentes transformaciones:



4.4.2 Teselados

Si en lugar de efectuar transformaciones isométricas en una única dirección de una figura mínima se utilizan dos o más, se obtienen recubrimientos del plano. Si se verifican las condiciones

- no pueden quedar espacios,
- las figuras no se pueden superponer.

se habla de un mosaico o teselado.

Se encuentran habitualmente para formar pavimentos o recubrir paredes y muros, y se llevan utilizando desde muy antiguo, encontrándose en las ruinas del imperio sumerio, en siglo IV a.C.

En el siglo III a.C. Arquímedes estudió los recubrimientos regulares del plano, así como Johannes Kepler en el siglo XVII. Pero hubo que esperar hasta el siglo XIX, en el que el matemático Camille Jordan, el cristalógrafo Evgenii Konstantinovitch y la psicóloga Camila Rial estudiaron completamente las simetrías del plano, dando lugar a estudio sistemático y completo de los teselados. Durante el siglo XX el artista M. C. Escher los usó profusamente en su obra.

En el siglo XIX, el cristalógrafo ruso Fedorov demostró que sólo hay diecisiete estructuras básicas para las infinitas decoraciones posibles del plano mediante mosaicos periódicos. Son los 17 grupos cristalográficos planos.

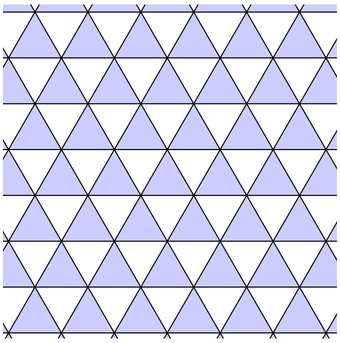
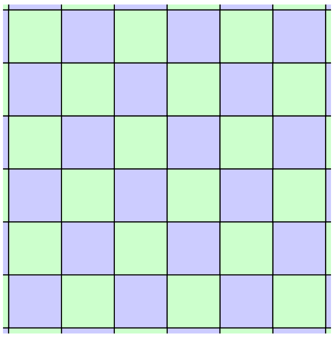
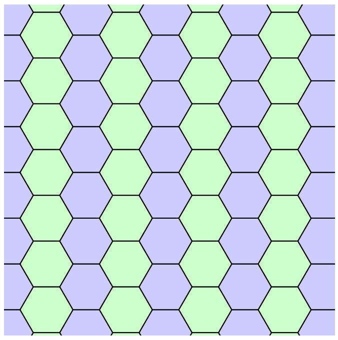
El interés de las teselaciones no es meramente decorativo. La estructura interna de los cristales, la estructura de los materiales y las técnicas de edificación se basan en estos conceptos.

4.4.2.1 Tipos de teseleados

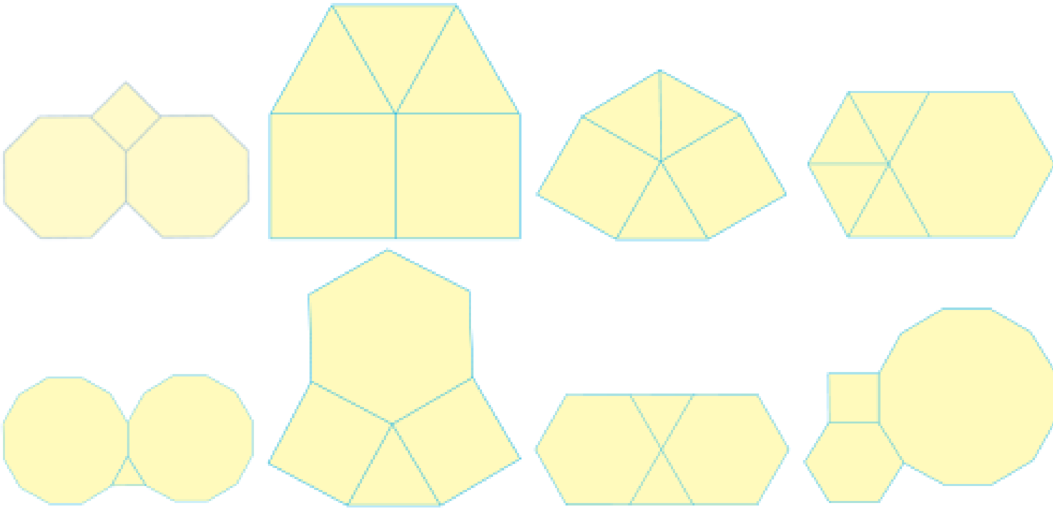
Los teselados se clasifican en función de la figura de base que da lugar a la organización del espacio. Y hay tres:

- *Teselados regulares*: que es un recubrimiento del plano llevado a cabo con polígonos regulares.
  Sólo hay tres teselados regulares: con seis triángulos equiláteros, cuatro cuadrados o tres hexágonos inciden en cada vértice. Es fácil de comprobar a partir de las medidas de los

ángulos internos de los polígonos regulares y que, para hacer un recubrimiento, hay que sumar en cada vértice los 360° de una vuelta. Esta comprobación se recomienda para un taller.

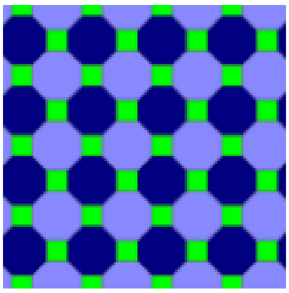
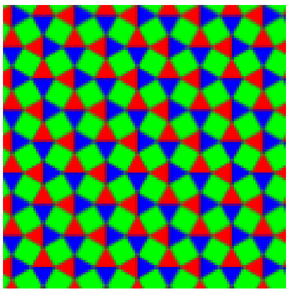
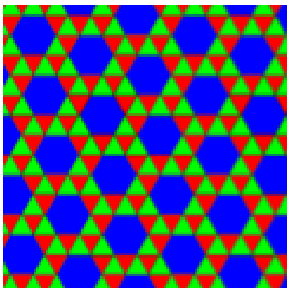
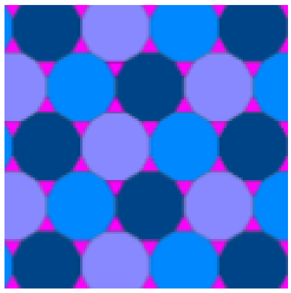




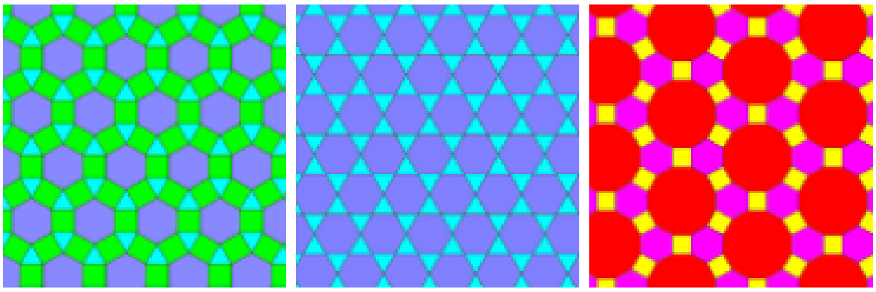
- *Teselados semiregulares*: son aquellos formados por dos o más polígonos regulares en la formación de la figura mínima. El patrón debe ser el mismo en todos los vértices. Sólo existen ocho teselaciones semiregulares.



https://es.wikipedia.org/wiki/Teselado

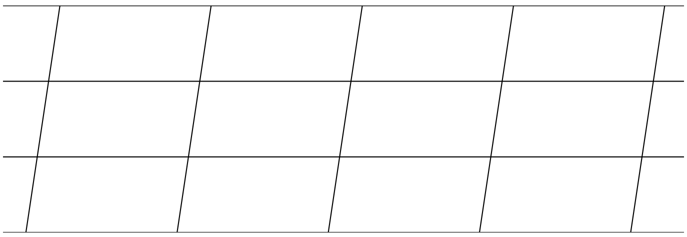
Con estas figuras se montan teselados como

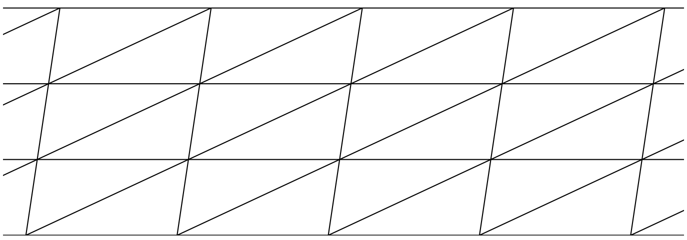


https://es.wikipedia.org/wiki/Teselado

- *Teselados irregulares*: formados por polígonos no regulares, pero verificando las condiciones de un teselado: recubren el plano y no dejan fisuras.
  Hay múltiples opciones, como:
  - *Paralelogramos*: cualquier paralelogramo tesela, ya que, simplemente, prolongando sus lados, se construyen nuevos paralelogramos congruentes con el primero.

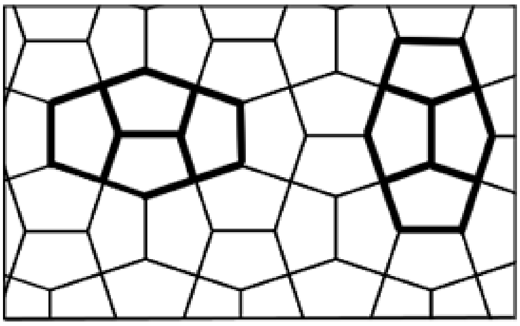


  - *Cuadriláteros no regulares*: Con cualquier cuadrilátero, ya sea concavo o convexo, se puede construir una teselación. Para el caso de los cuadriáteros cóncavos se utiliza el método de la *malla invisible*, que se puede demostrar a partir del Teorema de Varignon.
    Esto sobrepasa en demasía los objetivos de este curso pero, aun así, te recomendaría que hicieras una búsqueda por internet y le echaras un vistazo, por lo interesante que es[5]
  - *Triángulos*: Puesto que uniendo dos triángulos iguales se forma un paralelogramo, se puede establecer un recubrimiento siguiendo el caso anterior.



  - *Teselado de El Cairo*: aparece frecuentemente en las calles de El Cairo, Egipto, y es un caso particular de pentágono que posee ángulos rectos, uno de 144° y dos de 108°.

[5] https://www.geogebra.org/m/Y6DV2V6J



https://es.wikipedia.org/wiki/Teselado

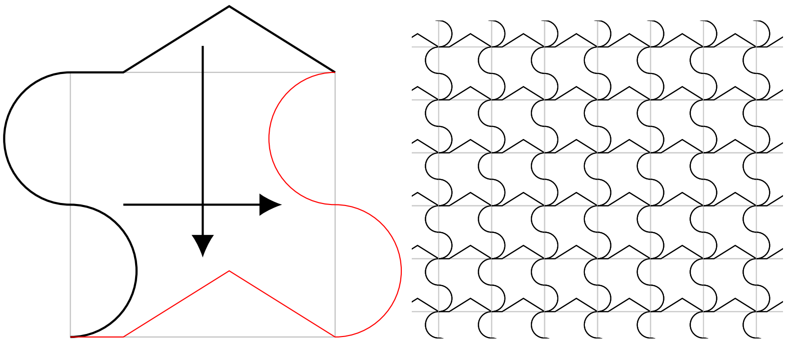
Y estos son algunos ejemplos. Hay más, pero se sale del objetivo de este curso.

4.4.2.2 Construcción de teselados

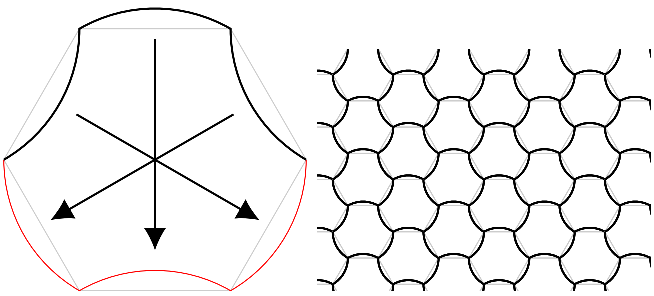
Para construcción de teselados[6], existen múltiples aproximaciones, pero todas comienzan tomando una figura geométrica que por si sola tesele en el plano.

Nos vamos a restringir, por el especial interés que tiene y porque debemos limitarnos en espacio y tiempo, a las teselaciones basadas en polígonos regulares. Se expondrán a continuación varios ejemplos.

El primer método se realiza a través de traslaciones. Se sacan partes de un lado y se se ponen en el lado contrario. Luego se repite esta imagen y se colocan para que encajen, utilizando las transformaciones isométricas. Por ejemplo, partiendo de un cuadrado, si se realizan los trazos marcados en negro, se reflejan en los trazos marcados en rojo en los lados opuestos, mediante isometrías de traslación se pueden formar fácilmente mosaicos muy interesantes.



Partiendo de un hexágono, y haciendo una construcción similar:



[6] En `http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/grupomaic/conferencias/14.Mosaicos.pdf` puedes encontrar una exposición muy interesante acerca de los teselados y cómo construirlos

Este método es directamente aplicable a los paralelogramos.

Con los triángulos requiere una aproximación diferente, ya que no se pueden construir únicamente con traslaciones, y eso nos lleva a otros métodos, como la división interna con simetrías axial o central, de los que aquí[7] y aquí[8] podéis encontrar varios ejemplos.

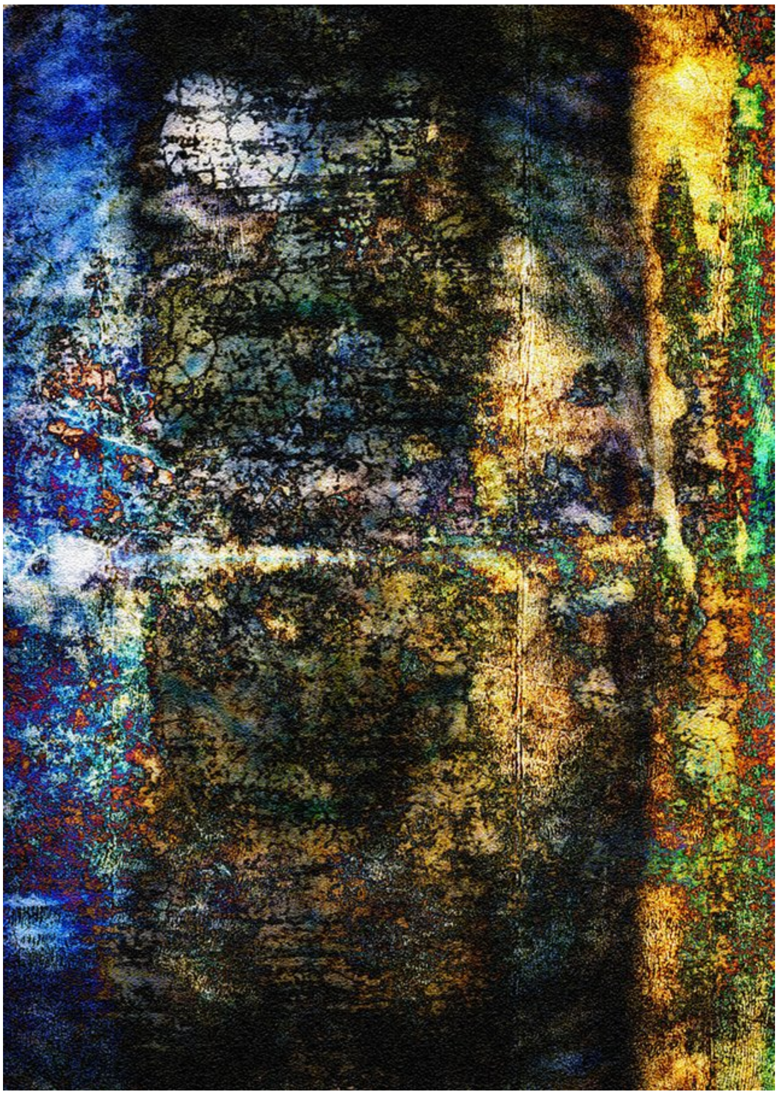
Algunas de estas otras teselaciones se trabajarán en los talleres.

[7] http://www.geometriadinamica.cl/2008/04/siete-formas-de-tesela/

[8] https://profmate.wordpress.com/dibujando-mosaicos/

5 *Transformaciones geométricas: Semejanzas*

Volvamos sobre la misma imagen que vimos en el capítulo dedicado a las *isometrías*:



Peter Heckmann - Ancient Samurai Values - Hidden Bushido

Si habéis visto esta imagen en un medio digital como una tablet o el ordenador, es posible que hayáis ampliado la imagen, a ver si distinguíais elementos que os permitiera identificar algún patrón. O, si es en papel, que os lo hayáis acercado a la cara para verlo más de cerca.

De esa forma, no habéis cambiado las relaciones entre los elementos, pero las distancias, aparentes o reales, se han transformado, aunque de una forma particular, muy *estricta*. A este tipo de transformaciones se las denomina *homotecias*, y forman el grupo de transformaciones que dan lugar a lo que se denomina *Geometría Proyectiva*.

El concepto sobre el que se construyen las homotecias es el de propocionalidad. Para ello necesitamos construir previamente el concepto de razón de segmentos.

5.1 Razón de segmentos y segmentos proporcionales

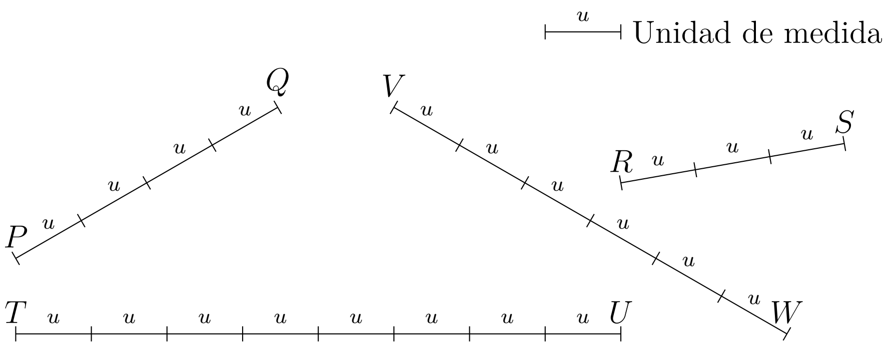
Definición. *Dados dos segmentos cualesquiera, $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$, se denomina razón entre los segmentos a la razón*[1] *numérica entre sus longitudes, es decir*

$$\frac{PQ}{RS} = \frac{d_u(P,Q)}{d_u(R,S)}$$

donde $d_u(P,Q)$, $d_u(R,S)$ indica las medidas de los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$ con respecto a una unidad u.

Es posible comprobar, más adelante, que la razón de segmentos va a ser independiente de la unidad de medida y, por tanto, se podría ignorar en la definición. Pero eso, cuando llegue su momento.

Consideramos la figura siguiente:



Entonces las longitudes de estos segmentos serán:

$$d_u(P,Q) = 4, \qquad d_u(R,S) = 3, \qquad d_u(T,U) = 8, \qquad d_u(V,W) = 6$$

y, la razón entre segmentos, serán:

$$\frac{PQ}{RS} = \frac{4}{3}, \quad \frac{PQ}{TU} = \frac{4}{8}, \quad \frac{PQ}{VW} = \frac{4}{6}, \quad \frac{RS}{TU} = \frac{3}{8}, \quad \frac{RS}{VW} = \frac{3}{6}, \quad \frac{TU}{VW} = \frac{8}{6},$$
$$\frac{RS}{PQ} = \frac{3}{4}, \quad \frac{TU}{PQ} = \frac{8}{4}, \quad \frac{VW}{PQ} = \frac{6}{4}, \quad \frac{TU}{RS} = \frac{8}{3}, \quad \frac{VW}{RS} = \frac{6}{3}, \quad \frac{VW}{TU} = \frac{6}{8}.$$

Estas relaciones también se pueden escribir como que cada uno de los vectores corresponde a una cierta proporción de otros, es decir:

$$PQ = \frac{4}{3}RS, \quad PQ = \frac{4}{8}TU, \quad PQ = \frac{4}{6}VW, \quad RS = \frac{3}{8}TU, \quad RS = \frac{3}{6}VW, \quad TU = \frac{8}{6}VW,$$
$$RS = \frac{3}{4}PQ, \quad TU = \frac{8}{4}PQ, \quad VW = \frac{6}{4}PQ, \quad TU = \frac{8}{3}RS, \quad VW = \frac{6}{3}RS, \quad VW = \frac{6}{8}TU.$$

A partir de la definición de razón de segmentos podemos definir:

[1] También se denomina proporción o división

Definición. *Se dice que dos pares de segmentos son proporcionales si las razones que establecen entre cada par son iguales.*

En el ejemplo anterior, puesto que

$$\frac{4}{8} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5,$$
$$\frac{8}{4} = \frac{6}{3} = 2,$$

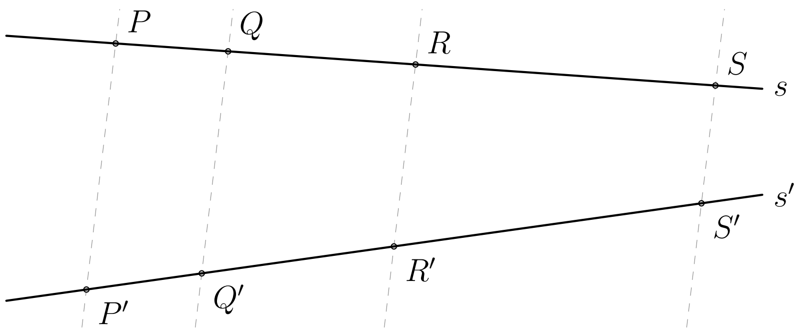
Se tiene que son pares de segmentos proporcionales PQ-TU y RS-TU. Obsérvese que el orden de las razones es importante a la hora de determinar la proporcionalidad, puesto que la división no es conmutativa, es decir, es relevante el orden de los operandos.

En adelante, para simplificar la notación, cuando en una operación aritmética aparezca un segmento, como PQ, en realidad se refiere a la distancia entre P y Q, es decir, $d(P, Q)$.

5.2 Teorema de Tales

A partir del concepto de segmentos proporcionales, Thales demostró el famoso teorema que lleva su nombre

Teorema. *Si dos rectas cualesquiera se cortan mediante un haz de rectas paralelas, los segmentos homólogos son proporcionales.*



Con segmentos homólogos se refiere a los segmentos que las mismas rectas paralelas determinan en ambas rectas, s y s'. Entonces:

$$\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{QR}{Q'R'} = \frac{RS}{R'S'} = \frac{PR}{P'R'} = \frac{PS}{P'S'} = \frac{QS}{Q'S'},$$

y a esta cantidad constante se la denomina constante de proporcionalidad.

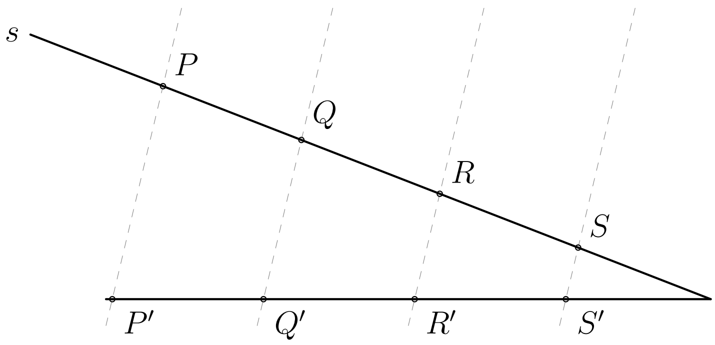
De aquí también se deduce, a partir de álgebra básica, que si se establece una proporción entre segmentos sobre una de las rectas, la misma proporción se establece sobre los segmentos homólogos.

$$\frac{PQ}{QR} = \frac{P'Q'}{Q'R'},$$

y así para cualquier par de segmentos que se quiera considerar.

El teorema de Thales tiene algunas consecuencias de aplicación directa, como:

- *División de un segmento en partes iguales*: Si dos segmentos son iguales, sus razón de segmentos es uno y, por tanto, así ocurrirá con sus segmentos homólogos en la proyección.



Este hecho proporciona un método muy potente para dividir cualquier segmento en partes iguales.
Puesto que es fácil construir segmentos iguales, tomando una unidad cualquiera, tan sólo tengo que construir tantos segmentos iguales como divisiones se desee, sobre una recta (s' en el dibujo) y proyectarlos mediante paralelas sobre el segmento a dividir.
Puesto que, por el Teorema de Thales, se conserva la proporcionalidad, se transfiere la igualdad de segmentos y, así, se divide en partes iguales.
Es habitual, como se muestra en el dibujo, construir la recta s' sobre uno de los extremos del segmento, para facilitar la construcción.

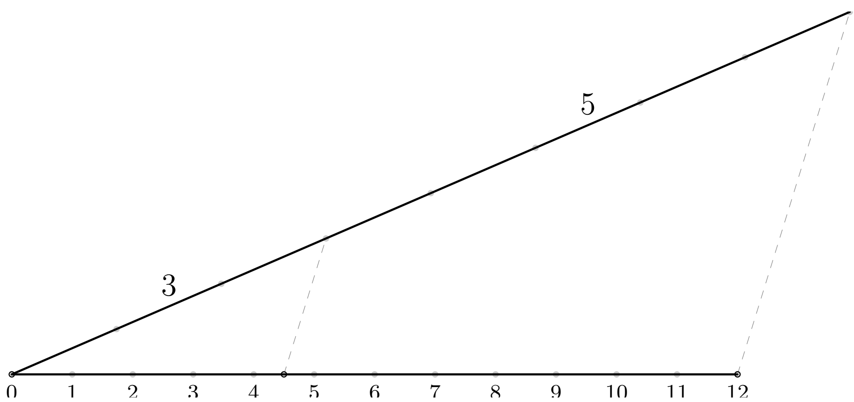
- *Reparto proporcional*: Puesto que los segmentos homólogos son proporcionales, la proyección de la suma de dos segmentos es igual a la suma de las proyecciones de esos segmentos. Es decir:

$$\frac{PQ+QR}{P'Q'+Q'R'}=\frac{PQ}{P'Q'}=\frac{QR}{Q'R'}$$

Esto permite repartir el total en proporción a las partes.
Un ejemplo numérico sería algo como:

> *Si yo he puesto 3 euros y Pedro ha puesto 5, y hemos comprado una bolsa de 12 kg patatas fritas, £cuanto nos corresponde a cada uno?*

que representado de forma gráfica quedaría como:

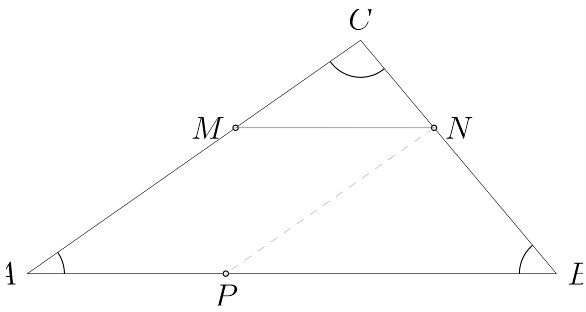


Por tanto, a mi me corresponderá alrededor de cuatro kilos y medio y el resto a mi compañero.

Se puede ver que la escala que he tomado en la recta diagonal, en la que he representado los valores 3 y 5, no tiene porque tener ninguna relación con la escala del segmento que voy a dividir: la división va a ser independiente de la unidad que se tome para establecer las medidas iniciales a proyectar.

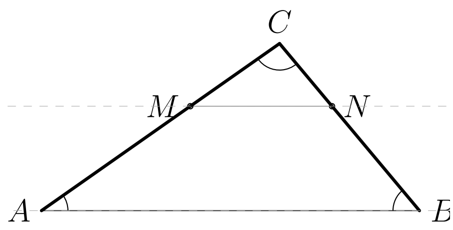
Para obtener la solución numérica exacta habría que utilizar métodos algebraicos. Pero si buscamos una solución aproximada, incluso muy aproximada, el método geométrico puede ser válido.

- Toda paralela aun lado de un triángulo determina, con los otros dos lados, un nuevo triángulo, semejante al primero.



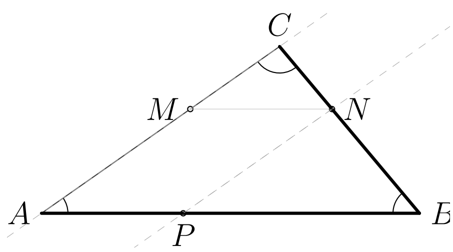
Por ser MN paralelo a AB, se tiene que

$$\frac{CM}{CA} = \frac{CN}{CB},$$



Construyendo la paralela a AC por N, se tiene que NP es paralelo a AC y, por el Teorema de Tales:

$$\frac{CN}{CB} = \frac{AP}{AB}$$



y puesto que $AMNP$ es un paralelogramo, se tiene que $AP = MN$. Substituyendo en la expresión anterior, llegamos a:

$$\frac{CN}{CB} = \frac{MN}{AB}$$

Uniendo ambas igualdades se tiene que

$$\frac{CM}{CA} = \frac{CN}{CB} = \frac{MN}{AB}$$

Por tanto, los triángulos ABC y MCN tienen sus lados proporcionales.

5.3 Homotecias

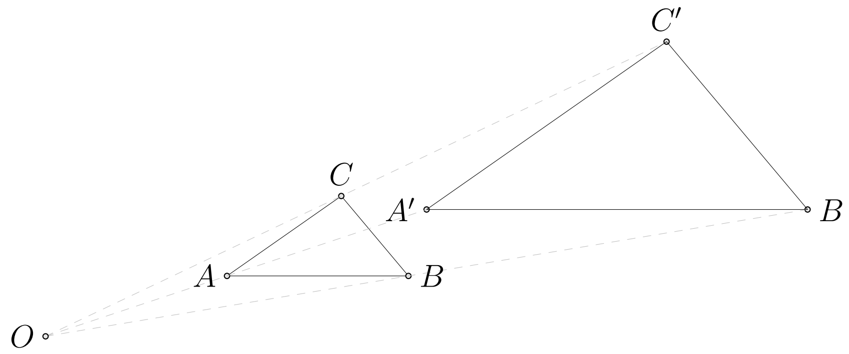
Al conjunto de transformaciones del plano proporcionado por las isometrías (traslación, giro, simetría y traslación y simetría) se añade la *homotecia*. Las isometrías o movimientos rígidos suelen identificarse, de manera informal, como las transformaciones del plano que “mantienen la forma y el tamaño de las figuras”.

El siguiente nivel son las transformaciones que conservan la forma, aunque no necesariamente el tamaño. Esto da lugar a las denominadas transformaciones de semejanza, cuya principal novedad es la *homotecia*.

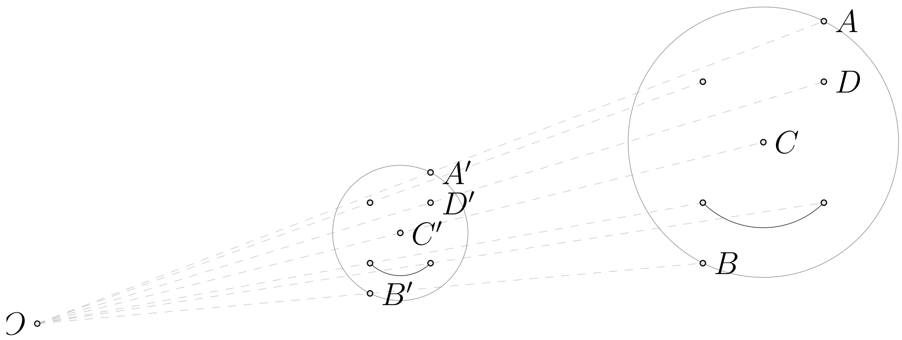
Definición. *Dados un punto del plano, O, y un número real positivo, k, se llama homotecia de centro O y factor de escala k a la transformación geométrica que transforma cada punto P del plano en otro punto P', situado en la semirecta OP, y tal que la $d(O,P') = k \cdot d(O,P)$.*

Las semejanzas tienen las siguientes propiedades:

- El único punto que permanece invariante es el centro de la homotecia, O. Puesto que la distancia de O a O es nula, la imagen a la que se traslada estaría a distancia $k \cdot d(O,O) = k \cdot 0 = 0$, resultando en el mismo punto.
- Si $k > 1$, la transformación de una figura dara lugar a una de mayor tamaño. Se llama entonces una *expansión*.

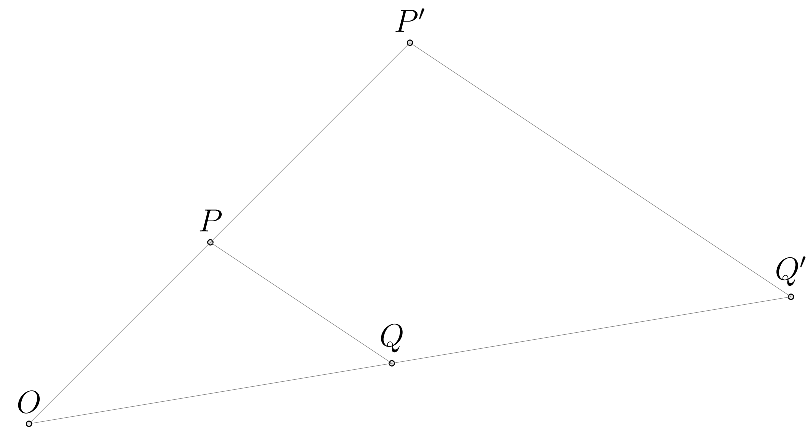


- Si $k < 1$, la transformación de una figura resulta en otra de menor tamaño. Se denomina entonces una *contracción*.



- Si $k = 1$, cada punto permanece en su misma posición, con lo que permanecen invariantes. Se denomina entonces un *identidad*.

- La distancia entre las imágenes de cualquier par de puntos es k veces la distancia entre sus respectivas preimágenes. Es decir, $d(P', Q') = k \cdot d(P, Q)$.
  Si se representa esta situación[2]:

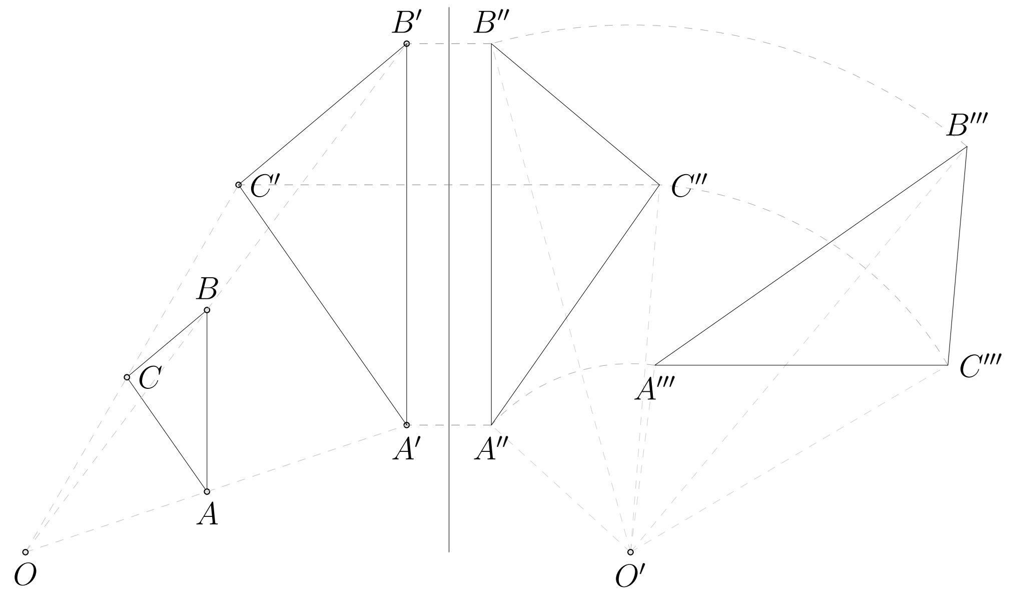


  Se forman entonces dos triángulos, OPQ y $OP'Q'$, que comparten el ángulo en el vértice O y lados proporcionales ($OP' = k \cdot OP$ y $OQ' = k \cdot OQ$), así que son semejantes. Por tanto, $Q'P' = k \cdot PQ$.

5.4 Semejanza

Al igual que con las isometrías se pudo caracterizar el concepto de *igualdad de figuras*, con las transformaciones que se han construido hasta el momento se puede caracterizar la *igualdad de forma*, aunque no necesariamente de tamaño. A esta forma de similitud se la denomina *semejanza*.

Definición. *Se dice que una transformación es una semejanza si y sólo si se puede expresar como una secuencia de homotecias y movimientos rígidos.*



[2]Esta "demostración" hace aguas en varios aspectos, pero valga como ejemplo

En el ejemplo anterior se puede observar una concatenación que da lugar a una semejanza: una homotecia con centro en O, a continuación una simetría y, por último, un giro. Se puede observar que el triángulo $A'''B'''C'''$ tiene la misma forma, aunque diferente tamaño y posición que el triángulo original, ABC. Esto permite dar la siguiente definición:

Definición. *Dos figuras, F y G se dicen semejantes, y se denota como $F \sim G$, si y sólo si existe una transformación de semejanza, es decir compuesta por isometrías y homotecias, que transforma una figura en la otra.*

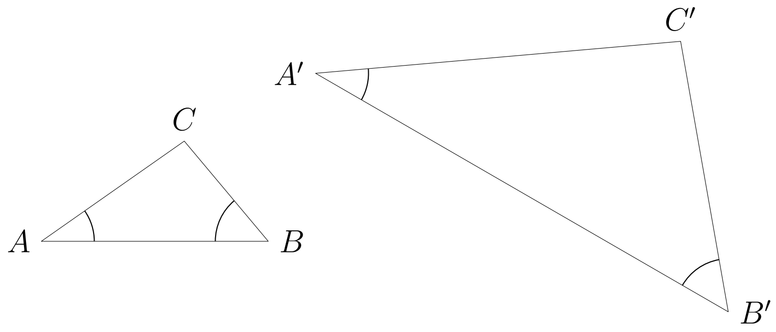
En otro capítulo (y taller) revisaremos la aplicación a mapas y para el análisis de medidas y áreas bajo condiciones de escala.

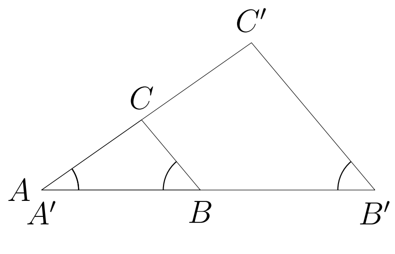
5.5 Semejanzas de triángulos

Un caso especialmente interesante de la semejanza es el de los triángulos. Como ya se vio en el capítulo dedicado a los polígonos, son unas figuras tan simples que con muy pocas restricciones quedan determinados en forma y tamaño. En este caso estamos interesados en las condiciones que condicionan la igualdad de forma.

Dos triángulos van a ser semejantes en alguna de las siguientes condiciones:

Tienen dos ángulos iguales: En cuyo caso, por la relación entre los ángulos interiores de un triángulo, los tres ángulos son iguales y se pueden configurar en la denominada “Posición de Thales”, compartiendo uno de los lados y un vértice, y quedando el lado no superpuesto paralelo.

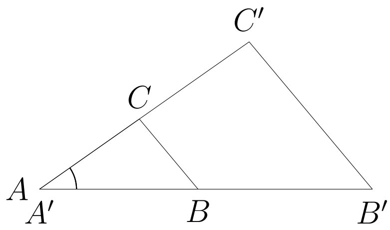




Entonces está en disposición de aplicar el teorema de Tales, por lo que sus lados son proporcionales. Podéis encontrar la demostración completa aquí.

Tienen dos lados proporcionales e igual el ángulo que forman: Entonces, colocados en forma de Tales (es decir, compartiendo el ángulo que sabemos iguales), y al ser proporcionales los segmentos AC y AB con AC' y AB', entonces las rectas sobre las que se encuentran CB y

$C'B'$ son paralelas, con lo que, con las propiedades demostradas anteriormente, ambas figuras son proporcionales y, por tanto, todos los ángulos iguales.

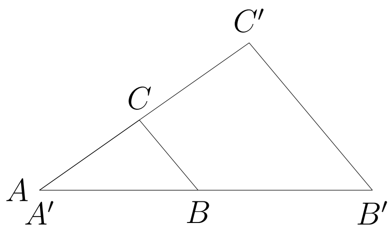


Podéis encontrar la demostración completa aquí.

Tienen sus tres lados proporcionales: Es decir, si sus tres lados son proporcionales dos a dos, entonces también tienen los mismos ángulos. Esta propiedad sólo ocurre en los triángulos.

Si tenemos dos cuadros iguales y uno se nos cae, doblándose, conservará la proporción de los lados, pero los ángulos cambian, por lo que dejan de ser semejantes.

Sin embargo, en los triángulos las cosas son mucho más rígidas. Transportando las longitudes del triángulo más pequeño sobre los lados correspondientes del triángulo más grande se transforma el problema en el caso anterior y queda demostrado. Podéis encontrar la demostración en aquí.



Conclusión: Los triángulos son tan simples y tan rígidos que con pocas condiciones podemos demostrar la igualdad de ángulos y proporcionalidad de lados, es decir, la semejanza. Estos criterios son:

- Dos de sus ángulos son iguales
- Dos lados son proporcionales e igual el ángulo que forman
- Sus lados son proporcionales

5.6 Algunas proporciones notables

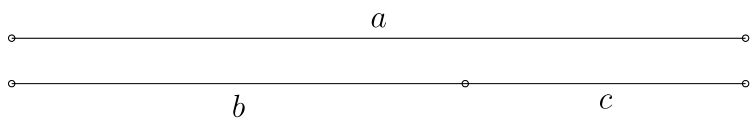
Como hemos visto, las semejanzas permiten transformar figuras en otras figuras que mantienen la mayoría de sus características, salvo el tamaño. Estas relaciones son tan importantes que existen algunas con nombre propio, de las que vamos a estudiar dos en este apartado, y que tienen grandes implicaciones en diversos campos como la Astronomía, la Biología o las aplicaciones de gestión de mercancías.

Una de esas propiedades es la autosemejanza, es decir, que en alguna forma se encuentra la figura dentro de si misma.

> *Allí donde lo pequeño es a lo grande, como lo grande es al Todo, reinan la Belleza, la Perfección y la Armonía.*

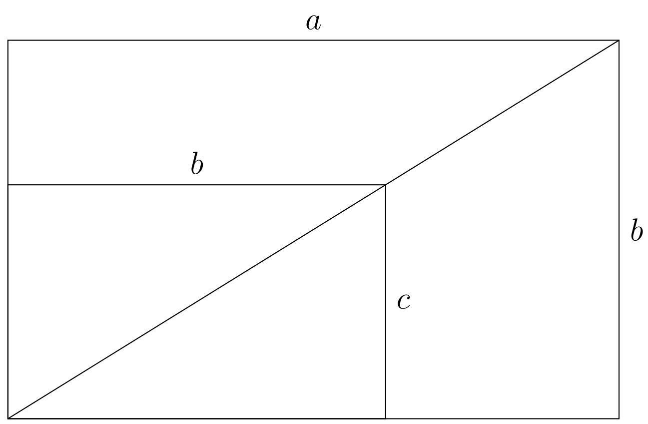
5.6.1 Proporción áurea

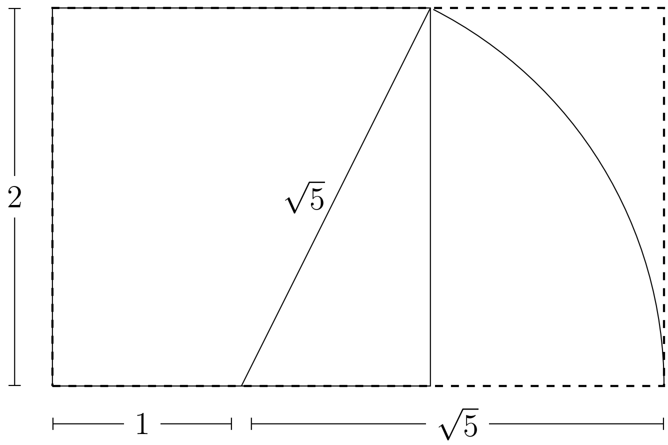
Supongamos que tenemos un segmento, a, y quiero dividirlo en dos trozos de forma que la proporción entre el mayor de esos trozos y el total sea la misma que entre los dos trozos resultantes de dividirlo, es decir:

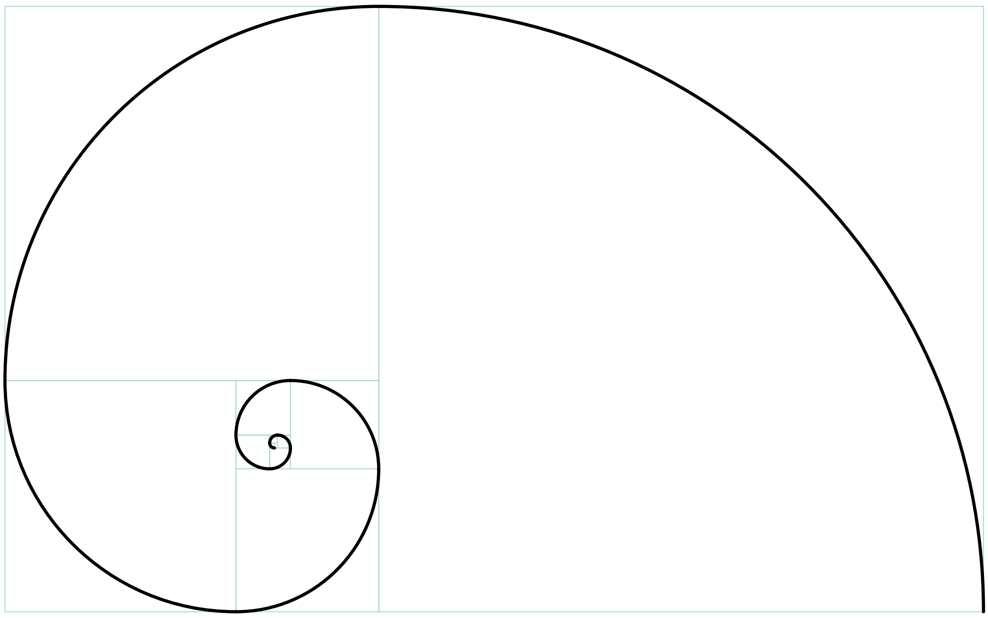


$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

Esta relación aparece recurrentemente en la naturaleza, puesto que implica una relación que se da en función del tamaño que ya tiene. Gráficamente se puede representar como:







5.6.2 Proporcion “raíz de dos”

5.6.3 Proporción cordobesa

6

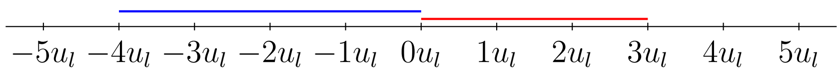
Cálculo de áreas y perímetros

Una de las actividades que más se asocia con la Geometría es el cálculo de áreas y perímetros. De una forma bastante errónea, incluso, se limita el campo de acción de la Geometría a tales menesteres. De facto, el cálculo de áreas y perímetros es una zona a caballo entre las materias de Geometría y Medida, con lo que puede tener sentido dejar su desarrollo a esta última. Sin embargo, con el objetivo de complementar los contenidos y ofrecer otras aproximaciones que se desarrollarán durante el cuerpo de este trabajo, se va trabajar sobre este tema.

6.1 £Qué es medir?

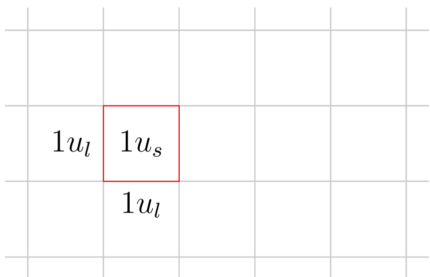
Lo primero, hay que aclarar que es *medir*. Es un concepto que tenemos tan asumido que no le prestamos atención. Y sin una buena comprensión de lo que significa medir, es fácil que, en lugar de utilizar el desarrollo de una mente matemática nos limitemos a desarrollar un ejercicio memorístico que no nos permitirá enfrentar problemas más allá de aquellos que ya hayamos trabajado de forma supervisada.

Medir consiste en comparar con una unidad de referencia (en este caso u_l). Por eso, cada medición debe de llevar asociada una unidad de medida.



Puesto que se compara con la unidad u_l, que es la distancia que hay entre $0u_l$ y $1u_l$, la línea azul mide $4u_l$ y la roja $3u_l$, porque necesito replicar 4 veces la unidad u_l para replicar la longitud de la línea azul, y 3 veces para replicar la longitud de la línea roja. De esta forma se miden las longitudes.

Pero, £cómo se miden las áreas? A partir de de la unidad de medida de longitud se construye una unidad de medida de superficie mediante un teselado que encaja perfectamente con el sistema de referencia de Descartes, con cuadrados de lado la unidad de longitud[1]



Así, igual que medir longitudes corresponde a replicar la longitud del segmento como repeticiones de la unidad de longitud (u_l), medir áreas consiste en replicar el área del cuadrado (u_s) de lado la unidad de longitud hasta conseguir el área de mi figura.

Este es el mecanismo que se va seguir para construir las áreas de las figuras planas.

[1]De aquí el nombre de "metros cuadrados"

6.2 Área de figuras planas

Puesto que los ángulos internos de un rectángulo son rectos, encaja sobre la retícula de base. Por tanto:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|l}\cline{1-4} 1u_s & 1u_s & 1u_s & 1u_s & \to 1u_s+1u_s+1u_s+1u_s = 4u_s \\ \cline{1-4} 1u_s & 1u_s & 1u_s & 1u_s & \to 1u_s+1u_s+1u_s+1u_s = 4u_s \\ \cline{1-4} \multicolumn{4}{c}{} & \hfill \overline{2\cdot 4u_s} \end{array}$$

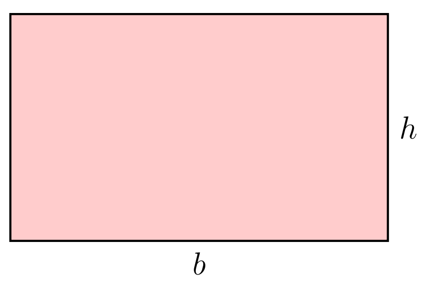
$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|l}\cline{1-5} 1u_s & 1u_s & 1u_s & 1u_s & 1u_s & \to 1u_s+1u_s+1u_s+1u_s+1u_s = 5u_s \\ \cline{1-5} 1u_s & 1u_s & 1u_s & 1u_s & 1u_s & \to 1u_s+1u_s+1u_s+1u_s+1u_s = 5u_s \\ \cline{1-5} 1u_s & 1u_s & 1u_s & 1u_s & 1u_s & \to 1u_s+1u_s+1u_s+1u_s+1u_s = 5u_s \\ \cline{1-5} \multicolumn{5}{c}{} & \hfill \overline{3\cdot 5u_s} \end{array}$$

Por tanto, en el caso general de un rectángulo de base b y altura h

$$\begin{array}{|c|c|c|l}\cline{1-3} 1u_s & \cdots\cdots b \cdots\cdots & 1u_s & = b \\ \cline{1-3} \vdots\, h\, \vdots & & \vdots\, h\, \vdots & \\ \cline{1-3} 1u_s & \cdots\cdots b \cdots\cdots & 1u_s & = b \\ \cline{1-3} \multicolumn{3}{c}{} & \overline{h\cdot b} \end{array}$$

6.2.1 Rectángulo

el área se calculará como el producto de los lados del rectángulo, que se suelen denominar habitualmente como *base* y *altura*



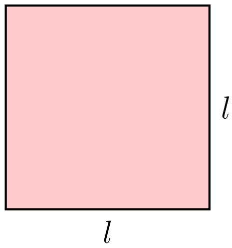
y así se obtiene la conocida expresión:

$$A = b \cdot h$$

A partir de esta forma básica se van a construir las áreas del resto de polígonos.

6.2.2 Cuadrado

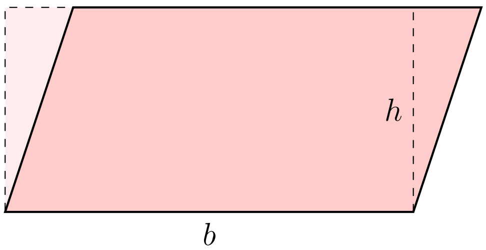
Puesto que un cuadrado se puede hacer corresponder a un rectángulo con todos sus lados congruentes:



particularizando la expresión del área de un rectángulo, el área de un cuadrado se puede expresar como:

$$A = l \cdot l = l^2$$

6.2.3 Paralelogramo



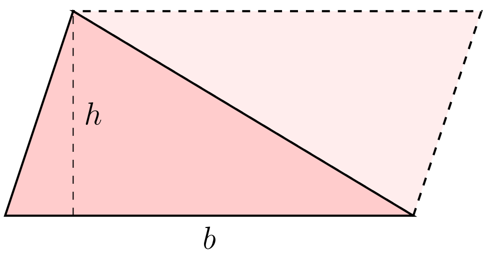
Debido al paralelismo de los lados, el triángulo que queda al cortar por una altura sobre uno de los vértices, como se indica en el dibujo, se puede trasladar de forma contigua al lado opuesto. Así, el área del paralelogramo es equivalente al de un rectángulo con las mismas base y altura:

$$A = b \cdot h$$

6.2.4 Triángulo

Hay varias aproximaciones para calcular el área de un triángulo.

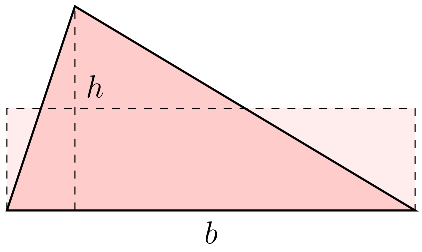
Una primera aproximación se basa en el hecho de que invirtiendo el triángulo y solapándolo por uno de los lados, se forma un paralelogramo, que ya se estudió en el ejemplo anterior. Entonces, el área del triángulo es la mitad de la área construida:



Duplicando el triángulo se obtiene un paralelogramo, con lo que el triángulo tiene la mitad del área que el paralelogramo:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

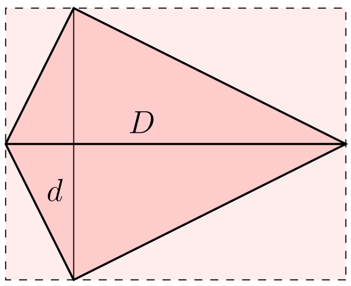
Otra aproximación establece que podemos cortar el triángulo de forma paralela a la base a la mitad de la altura:



Los triángulos que forman este corte junto con la altura se pueden desplazar para completar un rectángulo con la misma base que el triángulo, pero la mitad de su altura:

$$A = \frac{b}{2}h = \frac{b \cdot h}{2}$$

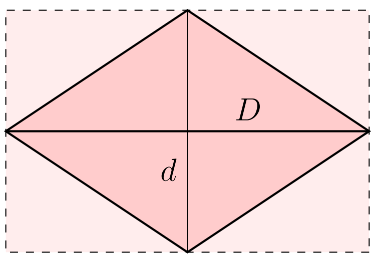
6.2.5 Cometa



Puesto que las diagonales de un cometa son perpendiculares, se puede observar que cada triángulo en el que queda dividido el cometa por las diagonales D y d puede duplicarse, dando lugar a un rectángulo de lados d y D. Por tanto, el área del cometa será la mitad del área de ese rectángulo:

$$A = \frac{d \cdot D}{2}$$

6.2.6 Rombo

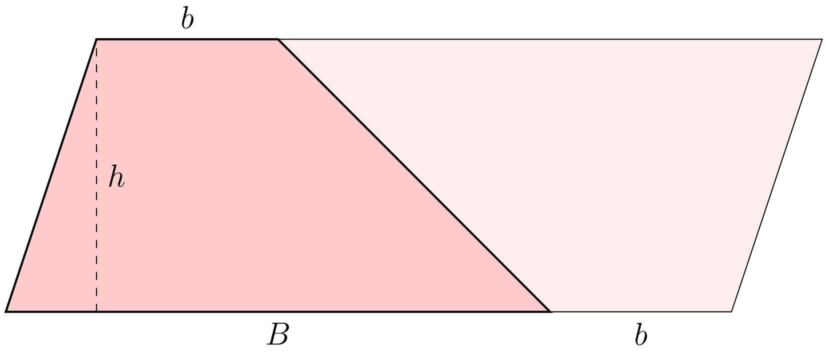


Mediante un razonamiento similar al del cometa, se puede observar que el área de un rombo es la mitad del área del rectángulo de lados las diagonales del mismo:

$$A = \frac{d \cdot D}{2}$$

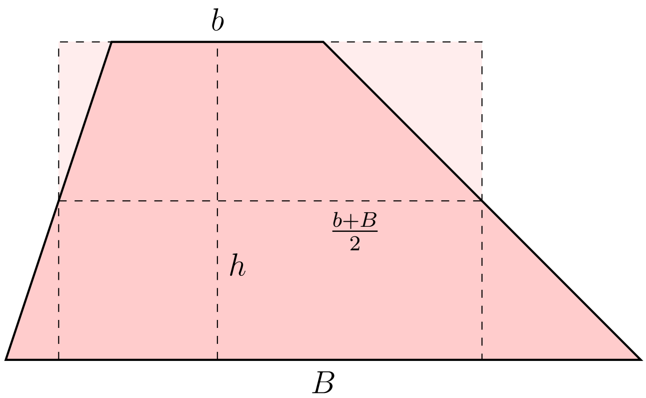
6.2.7 Trapecios

De nuevo, nos encontramos con varias demostraciones del área de un trapecio, basado en dos enfoques distintos. En el primero de ellos, duplicamos el trapecio, invirtiendolo verticalmente:



Entonces, el área del trapecio es la mitad que la del paralelogramo obtenido, que tiene base $b + B$ y altura h:

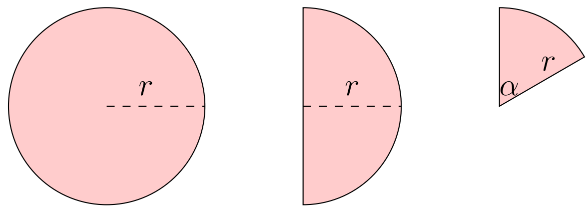
$$A = \frac{(b + B) \cdot h}{2}$$



Se puede observar que el área del trapecio es la del rectángulo con base a medio camino entre b y B, es decir, $(b + B)/2$

$$A = \frac{b + B}{2} \cdot h = \frac{(b + B) \cdot h}{2}$$

6.2.8 Círculo



El área de un círculo se calcula a partir del radio, r, como:

$$A = \pi \cdot r^2$$

Las partes del círculo, como semicírculo, cuarto de círculo y, en general, cualquier sector circular, se calculan a partir del concepto de proporcionalidad:

- Área del semicírculo: $A = \dfrac{1}{2}\pi \cdot r^2$
- Área del cuarto de círculo: $A = \dfrac{1}{4}\pi \cdot r^2$
- Área del sector circular: $A = \dfrac{\alpha}{360}\pi \cdot r^2$

Las medidas del área del círculo ha sido un problema abierto hasta hace relativamente poco debido a las características del número π.

Hasta el siglo XVIII no se demostró que es un número irracional. Y ya en el siglo XIX se demostró que es un número transcendente, es decir, que no se pueden encontrar como la raíz de ningún polinomio. Y esto cerró la búsqueda de milenios del problema de la cuadratura del círculo[2] quedando demostrado que es imposible de hacer.

Me he dejado en el tintero algunas áreas, como la de los polígonos regulares o el arco de círculo ... Espero que, a partir de lo que hemos visto, intentéis encontrarlo y resolverlo como ejercicio.

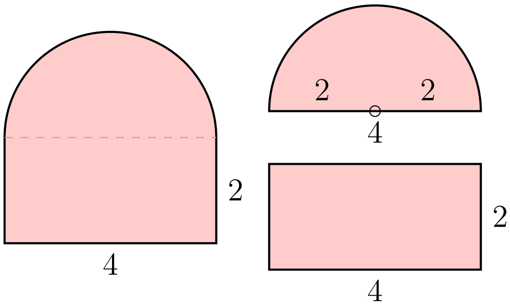
6.3 Estrategias para el cálculo de áreas

En las páginas previas se han construido las áreas de diferentes figuras geométricas. Creo que es de sumo interés pararse a observar los mecanismos que se han usado para llevar a cabo las anteriores construciones.

Primariamente han sido dos:

- *Factorización de figuras*: se ha construido el área de una figura a partir de sus componentes, o como parte de otra figura.
  En los casos anteriores se ha hecho por desdoblamiento, es decir, considerando el área de una figura que era el doble de la buscada, como en el caso del triángulo y el trapecio.
  Pero el mismo concepto se puede aplicar por subdivisión, dividiendo la figura en elementos más simples, cuyas áreas se suman. Un ejemplo podría ser el siguiente:

[2]Problema consistente en construir, usando sólo reglas y compás, un cuadrado con el área de un círculo dado.



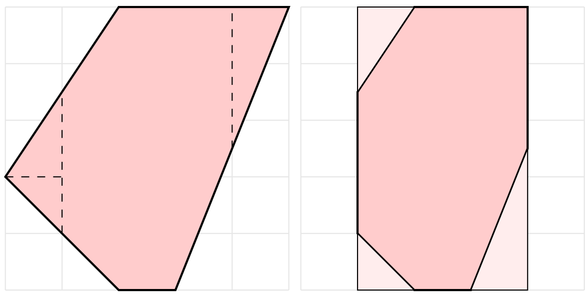
$A_s = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi 2^2$

$A_r = b \cdot h = 4 \cdot 2$

Esta figura se puede descomponer como dos figuras no solapadas, que se muestran a su derecha, y cuyas áreas se pueden calcular fácilmente:

$$A = A_r + A_s = 4 \cdot 2 + \frac{1}{2}\pi 2^2 = 8 + 2\pi$$

- *Reconstrucción de figuras*: La otra aproximación, que se ha utilizado como segundas demostraciones del triángulo y del trapecio, es reestructurar una figura de forma que da lugar a una figura cuyo área es directa.
  Aunque muy potente, este método sólo puede usarse cuando se dan las condiciones para poder llevar a cabo esta reestructuración con la seguridad de que no se está modificando el área. Considérese el siguiente ejemplo:



  Por tanto, el área de la izquierda es equivalente al área de la derecha, que es de cálculo inmediato:

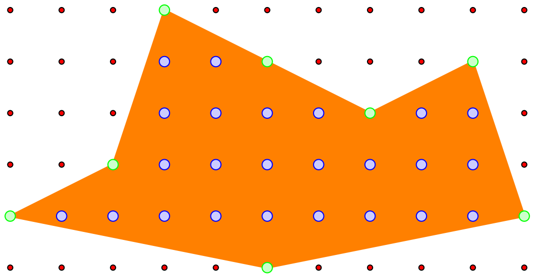
$$A = b \cdot h = 3 \cdot 5 = 15$$

Por supuesto, se pueden mezclar ambos enfoques y reconstruir la figura a un conjunto mínimo de figuras más simples y entonces factorizar. En la página 29 tienes más figuras en las que practicar.

6.4 Áreas sobre tramas: La fórmula de Pick

Hay una situación en particular que permite llevar a cabo una aproximación diferente a la justifiación lógica que estamos acostumbrados a ver en Matemáticas. La justificación lógica que lleva a un resultado que se establece de forma definitiva suele ser el final de un proceso que comienza mucho antes, con la percepción, a través de la exploración, de alguna propiedad que permanece entre diferentes situaciones.

Supongamos que se van a considerar únicamente polígonos cuyos vértices se encuentran en posiciones enteras, es decir, que van a estar en los vértices de una cuadrícula. A estos polígonos se les denomina *polígonos reticulares*, y a esta distribución se la denomina trama.



Se llaman puntos fronteras a los que quedan sobre los segmentos que determinan el polígono (marcados en el dibujo anterior en verde) y se llaman puntos interiores a los que quedan en el interior del polígono (marcados en el dibujo anterior en azul).

En los apéndices, en las páginas 24 y 28, puedes encontrar tramas y tablas preparadas para que las imprimas y puedas jugar, pero si no puedes imprimirlos, cualquier papel cuadriculado podría servirte.

Es muy importante, en los próximos pasos, que vayas desarrollando la exploración por tu cuenta, y que únicamente sigas leyendo cuando hayas llevado a cabo tu propia experimentación. Piensa que el tiempo que “gastas” en hacer las tareas es, en realidad, tiempo en el que estás asimilando conceptos y, por tanto, es tiempo de estudio.

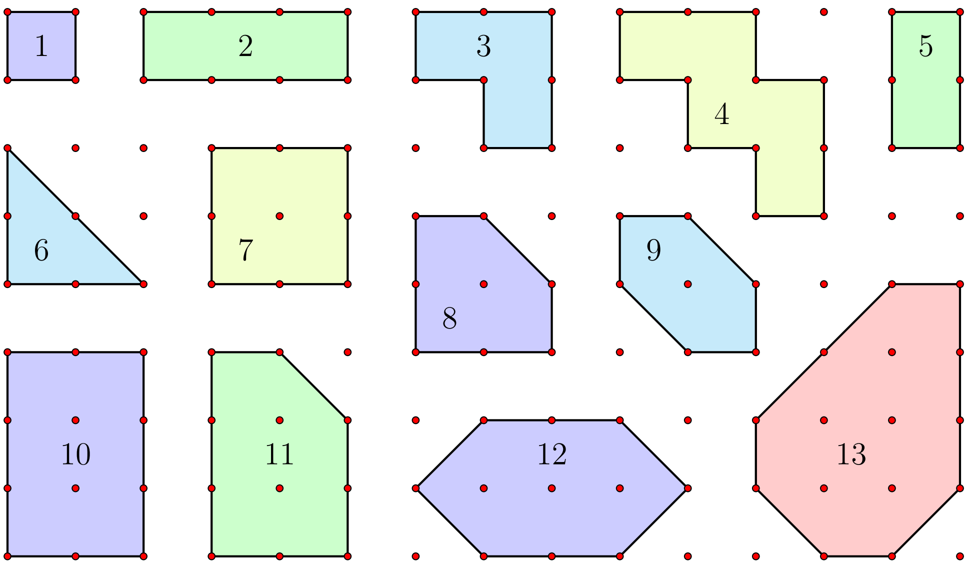
Representa en la malla 14 polígonos distintos en mallas de 4×4 (es decir, que los hagas todo en el espacio comprendido en una trama de 4 cuadrados de ancho y 4 cuadrados de alto, y así te deberían ocupar no demasiado espacio) en indica los puntos que se encuentran en el interior y en la frontera, así como el área de cada uno.

Te sugiero que, primero, construyas varios polígonos sin ningún punto interior, después con un punto interior y así sucesivamente.

£Notas algún patrón en las medidas?

(Para aquí)

Veamos algunos ejemplos



Nro	Puntos interiores	Puntos frontera	Área
1	0	4	1
2	0	8	3
3	0	8	3
4	0	12	5
5	0	6	2
6	0	6	2
7	1	8	4
8	1	7	3.5
9	1	6	3
10	2	10	6
11	2	9	5.5
12	3	8	6
13	5	10	9

A partir de los cinco primeros, parece que, sin haber puntos interiores, con los cuatro primeros establezco una unidad, y cuando voy subiendo dos vértices en la frontera, subo otra unidad de área. El caso 6 parece confirmar que no depende de la forma. Habría que comprobar algunos casos más, pero vamos a continuar.

Con las construcciones 7, 8 y 9 parece confirmar que, cada vez que se añade o quita un punto frontera, cambia en 1/2 el área, empezando por 1 para 4 puntos frontera.

Y, a partir de la siguiente secuencia, paracer que cada punto interior añade una unidad de área más.

De este desarrollo llegamos a la siguiente expresión, que fue desarrollada y demostrada por Georg Alexander Pick (1899):

Teorema. *Sea un polígono simple cuyos vértices tienen coordenadas enteras. Si B es el número de puntos enteros en el borde, I el número de puntos enteros en el interior del polígono, entonces el área A del polígono se puede calcular con la fórmula:*

$$A = I + \frac{B}{2} - 1$$

Lo más interesante de lo expuesto arriba, aparte de descubrir el Teorema de Pick, que permite calcular fácilmente el área de cualquier polígono construido sobre una trama cuadrada, problema muy útil y recurrente, es el mecanismo mediante el cual hemos ido descubriendo una regularidad: la exploración.

Es habitual en la enseñanza de las Matemáticas tratarla como algo ya construido y que parte de la justicación lógica, cuando resulta este aspecto el paso final de todo el proceso, aunque el que dota a las Matemáticas de su poder.

En la página 29 tienes más figuras en las que practicar.

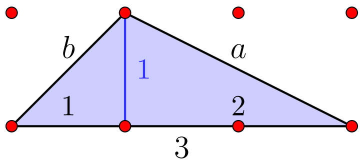
6.5 Cálculo de perímetros

Además del cálculo de áreas, otro problema habitual es el del cálculo de perímetros. El perímetro es la longitud total de la línea que determina el “borde” del polígono, y se determina como la suma de todos los lados. En algunos casos muy particulares se desarrollan y conocen fórmulas particulares:

- *Rectángulo*: $P = 2 \cdot b + 2 \cdot h$.
- *Cuadrado*: $P = 4l$.
- *Circunferencia*: $P = 2 \cdot \pi \cdot r$.
- *Semi-circunferencia*: $P = \pi \cdot r$.
- *Arco de circunferencia*: $P = \frac{\alpha}{180} \cdot \pi \cdot r$.

Pero, £cómo determinar, por ejemplo, los lados de un rombo a partir de sus diagonales? Es el mismo problema que nos encontramos si quisieramos determinar los perímetros de las figuras del ejemplo utilizado antes, cono la 9 o la 13.

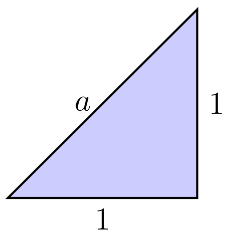
Trabajemos a partir de algunos ejemplos, en los que calcularemos áreas y perímetros.

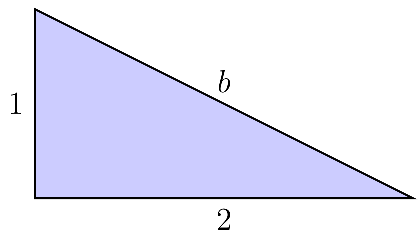


Por ser un triángulo de base $b = 3$ y altura $h = 1$, el área es de cálculo inmediato:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot 1}{2} = \frac{3}{2}$$

Pero el perímetro es la suma de los lados. La base sabemos cuanto mide, pero a y b no. Sin embargo, al ser una trama cuadrangular, tenemos muchos ángulos rectos a los que recurrir. La altura divide al triángulo en dos lados cuyos lados podemos determinar





Y estos dos problemas están en condiciones para aplicarse el Teorema de Pitágoras. Por tanto:

$$\begin{aligned} a^2 &= 1^2 + 1^2 \\ a^2 &= 2 \\ a &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^2 &= 2^2 + 1^2 \\ b^2 &= 5 \\ a &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

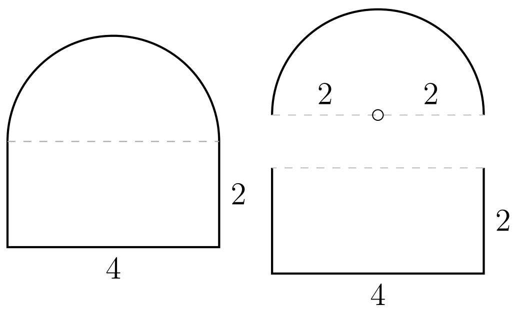
Por tanto, el perímetro de la figura es[3]

$$P = 3 + \sqrt{2} + \sqrt{5}$$

[3]No se van a pedir cálculos algebraicos de mayor envergadura en este curso más que la expresión de las cantidades que corresponden a las mediciones

De esta forma, sobre tramas cuadradas, es fácil calcular los perímetros, ya sea por medición directa, o por la aplicación del Teorema de Pitágoras, cuando tengamos una diagonal a la trama.

Las diferentes situaciones que podemos encontrar pueden complicarse enormemente. Como ejemplo, se puede encontrar figuras como la que sigue siguiente



$P_s = \pi r = 2\pi$

$P_r = 2 + 4 + 2 = 8$

en la que hay que realizar una aproximación similar a la de al factorización, y aparece una circunferencia o trozo de circunferencia. El perímetro se puede escribir como:

$$P = P_r + P_s = 8 + 2\pi$$

Existen otros cálculos de perímetros, cuyo tratamiento implicaría el uso de trigonometría u otras herramientas como sistemas de ecuaciones, pero esa es materia que se sale de nuestro ámbito de materia.

Se recomienda que se practique con las figuras de la página 29.

7 Geometría en el espacio

Ya hemos trabajado profusamente sobre el plano. Es el momento de elevarnos a una dimensión más, aquella en la que nos movemos: el espacio o las tres dimensiones.

En principio, se generalizan los conceptos que ya habéis aprendido sobre el plano, y se añaden otras que son específicas del nuevo contexto.

7.1 Puntos, rectas y planos

Los puntos siguen siendo localizaciones adimensionales, y las rectas siguen siendo una sucesión continua e infinita de puntos alineados.

El concepto de plano, que hasta ahora consistía en el espacio de trabajo, pasa ahora a ser un elemento más, imbuido en un espacio mayor, el *espacio*, entendido como el entorno de tres dimensiones en el que nos movemos, en el que existe el volumen. Recordemos que la definición proporcionada por Euclides es "aquella superficie que yace por igual respecto de las líneas que están en ella", y que viene a caracterizar a lo que podríamos representar como una hoja de papel, completamente recta, y que se extiende, en ancho y largo, hasta el infinito.

En el nivel en el que os vais a mover, con el concepto intuitivo es más que suficiente, equiparándose con una superficie, sin grosos, completamente "recta"[1].

7.1.1 Posición relativa de planos en el espacio: ángulos diédricos y poliédricos

Mientras que el plano era dividido en dos regiones desconectadas mediante una recta, en el espacio se necesita un plano para llevar a cabo la misma función, pudiéndose visualizar un plano como una hoja de papel completamente recta, que se extendiera hasta el infinito.

Así, cada plano separa el espacio en tres conjuntos disjuntos: el propio *plano* y dos regiones, denominadas *semiespacios*.

Dos planos en el espacio pueden estar en tres posiciones relativas[2]

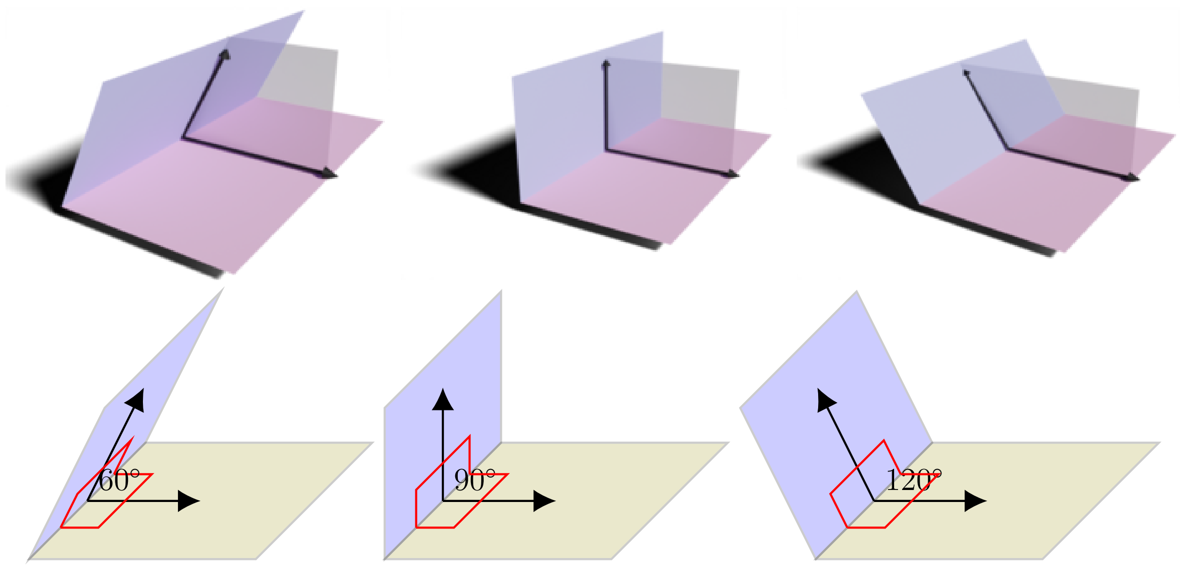
- *Coincidentes*: comparten todos sus puntos, es decir, no podríamos distinguirlos entre si.
- *Secantes*: se cortan en una recta.
- *Paralelas*: no se cortan en ningún punto, y cualquier punto de uno de los planos dista lo mismo del otro plano.

Para visualizarlo, tomad dos superficies rígidas, como dos trozos de cartón, e imagináos que se extienden hasta el infinito. Seguro que podéis visualizar las tres posiciones relativas descritas arriba.

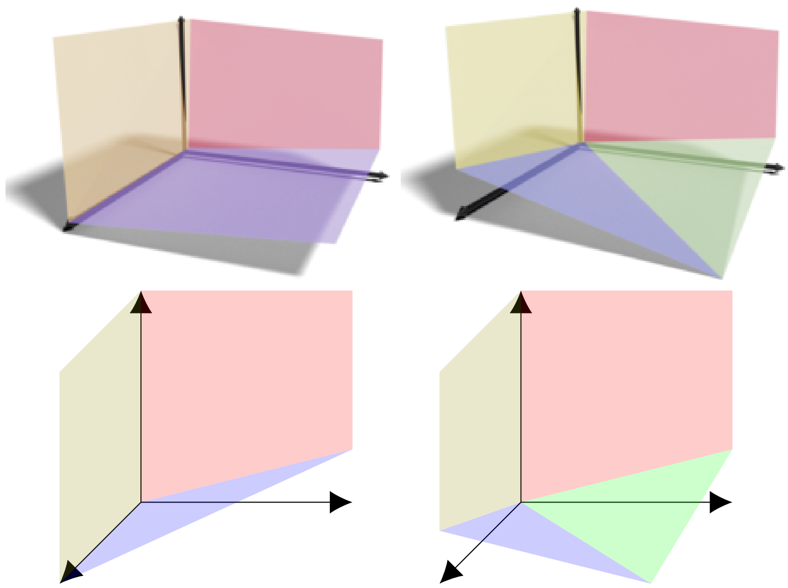
Cuando dos planos son secantes se cortan en una recta y el ángulo que forma se denomina *ángulo diedro*. Su medida se toma como el ángulo formado por dos semirectas contenidas en los planos y perpendiculares a la recta de corte:

[1] Observar que, por más vueltas que le doy, la definición sigue siendo vaga, mientras que todos tenemos el concepto intuitivo de plano como algo bastante evidente.

[2] Al igual que las rectas en el plano. £Empezáis a notar similitudes?



En los ángulos anteriores, el nombre *diedro* viene de la unión de los términos griegos *duo* (dos) y *edro* (asiento), refiriéndose este último término a las caras planas, sobre las que se puede *asentar* un poliedro al dejarlo en reposo. Siguiendo el mismo esquema se pueden nombrar, en función de cuantos planos se cortan en un determinado punto, como ángulos *triedros*, *tetraedros*, *pentaedros*, . . . , o, de forma genérica, *ángulo poliedro* a la región del espacio en el que coinciden todos los semiespacios que determinan varios planos que se cortan en un mismo punto. Al ese punto en el que se cortan todos se le denomina *vértice*.



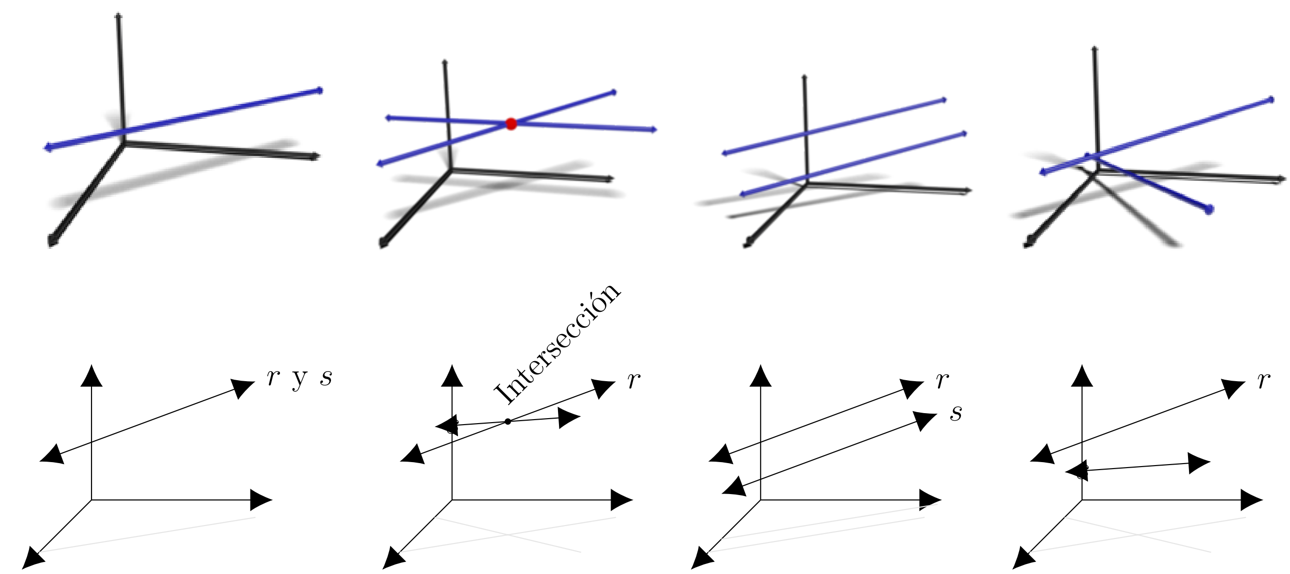
Triedro Tetraedro

7.1.2 Posición relativa de dos rectas

Al ser el espacio una extensión del plano, los elementos del plano también se encuentran en el espacio, incluidas las rectas. Cabe preguntarse si las rectas mantendrán sus relaciones en el espacio. Para poder ver mejor los casos, coge dos bolígrafos o lápices, imagina que se extienden hasta el infinito, e intenta posicionarlas de las siguientes formas:

- *Coincidentes*: si comparten todos sus puntos, es decir, no podríamos distinguirlas.
- *Secantes*: se cortan en un único punto.
- *Paralelas*: existe un plano que las contiene a las dos, pero no se cortan, es decir, existe un plano tal que las dos sean paralelas en este plano[3].
- *Se cruzan*: no se cortan ni existe un plano que contenga a las dos rectas.

Como se puede ver, se incluyen las posibilidades consideradas en el plano, además de la opción de que se crucen. En este caso, al no ser paralelas parece que se van a cortar. Sin embargo, pasan a alturas distintas y no se cortan, se cruzan, como su nombre indica[4].



Coincidentes Secantes Paralelas Se cruzan

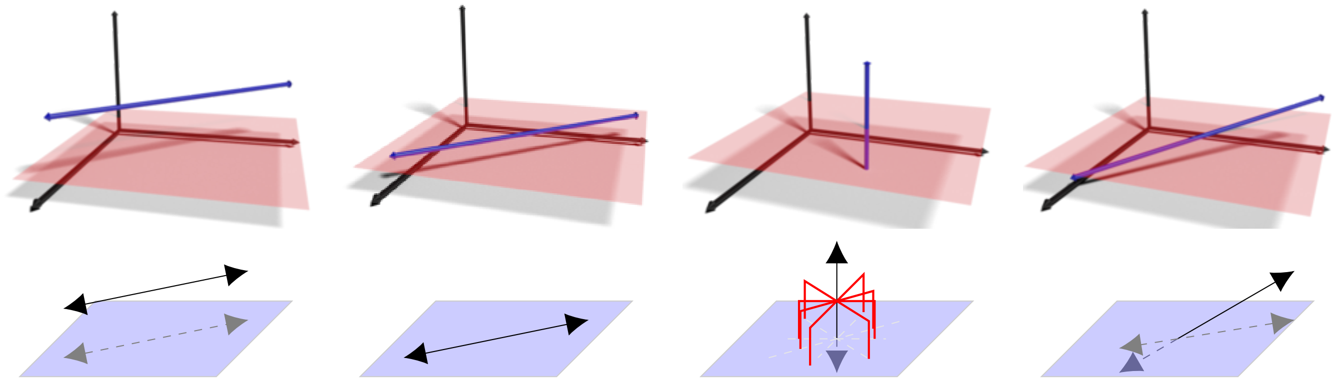
7.1.3 Posición relativa de una recta y un plano

. Y, £qué pasa si considero dos elementos de diferentes características como la recta y el plano? Nos podemos encontrar las siguientes situaciones:

- *Recta paralela al plano*: la recta no corta al plano.
- *Recta contenida en el plano*: todos los puntos de la recta son puntos del plano.
- *Recta perpendicular al plano*: una recta es perpendicular al plano si es perpendicular a toda recta incluida en el plano que pasa por el punto de corte.
- *Recta secante al plano*: la recta corta al plano en un único punto.

[3]Aunque esta caracterización suene un poco extraña, en cuanto lo pensemos un poco empieza a parecer natural. Para superar esta definición hay que empezar a hablar de direcciones y vectores, que sobrepasa el objetivo de este curso, que es la comprensión *intuitiva* de la Geometría

[4]Ten en cuenta que las flechas que se representan en las ilustraciones se extenderían infinitamente. Los flechas sólo son indicadores para que nos hagamos una representación mental de la situación, ante la imposibilidad de representar las rectas reales.



Paralela al plano Contenida en el plano Perpendicular al plano Secante al plano

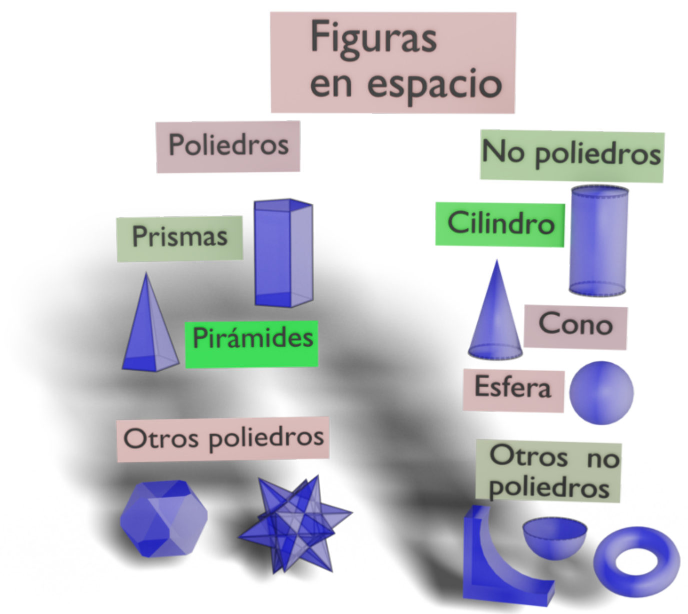
7.1.4 Curva, superficie y sólido

Supongo que estarás observando que muchos conceptos del plano se trasladan al espacio, como el concepto de punto o recta. Lo mismo ocurre ocurre con el concepto de *curva*, que va a corresponder al concepto de imaginar un trazo en el aire. Quizás el ejemplo más accesible actualmente sea el de un lápiz 3d, que viene a ser una impresora 3D en forma de bolígrafo.

Cualquier superficie sin agujeros que encierre una región sin huecos del espacio se dice que es una *superficie cerrada simple* y, a la región encerrada, su *interior*. A la unión de una superficie cerrada simple y su interior se la denomina *sólido*.

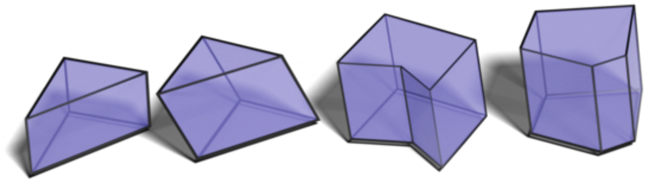
Una superficie cerrada simple se dice *convexa* si, para cualquier par de puntos de la superfie, el segmento que los une está en sólido delimitado por esa superficie.

Los sólidos se clasifican según varios criterios, pero el primero de todos es cómo son sus caras. Si todas sus caras son planas (ahora daremos una definición más precisa de esta expresión), tendremos los poliedros. A todos los que tengan alguna cara que no es plana se les engloban en el grupo de los sólidos no poliedros.

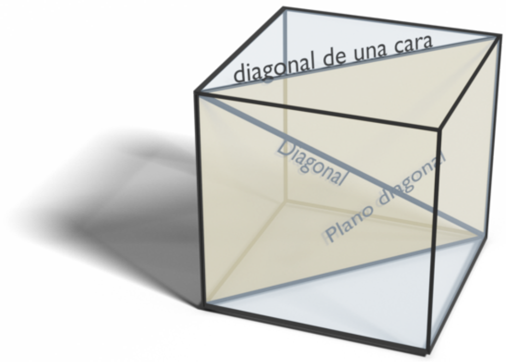


7.2 Poliedros

Definición. *Se llama poliedro a un sólido delimitado por una superficie cerrada simple formada únicamente por regiones poligonales planas. A cada región poligonal se le denomina* cara *del poliedro, y a los lados y vértices de las caras se les denomina* aristas *y* vértices *del poliedro.*



Se llama *diagonal* de un poliedro al segmento que une dos vértices que no pertenecen a una misma cara, y *plano diagonal* al plano que une dos aristas que no pertenecen a una misma cara[5]



Se encuentran habitualmente en la Naturaleza en los cristales minerales, en la forma de la cápsula de un virus, las celdas de una colmena, ... En las realizaciones del ser humano en arte, arquitectura, escultura, artesanía, ... De hecho, han sido objeto de estudio durante siglos: Platón, Euclides, Arquímedes, Kepler, Poincaré, Hilbert, Coxeter, ...

7.2.1 Clasificación de los poliedros

Se clasifican en función de múltiples criterios, como:

- *Convexidad* y *concavidad*.
- *Inclinación*: rectos u oblicuos.
- Según la construcción del modelo:
  - *Poliedro de aristas uniformes* cuando los pares de caras que se reúnen en un cada arista son iguales.
  - *Poliedro de caras uniformes*: cuando todas las caras son iguales.
  - *Poliedro de vértices uniformes* cuando en todos los vértices del poliedro convergen el mismo número de caras y en el mismo orden (existe una transformación isométrica que hace indistinguible un vértice, con sus aristas y caras adyacentes, de otro).

[5]Aunque esta definición me cuesta verificarla y he encontrado otras que no me cuadran mucho con esta

- *Poliedros regulares* son los poliedros de aristas, caras y vértices uniformes.

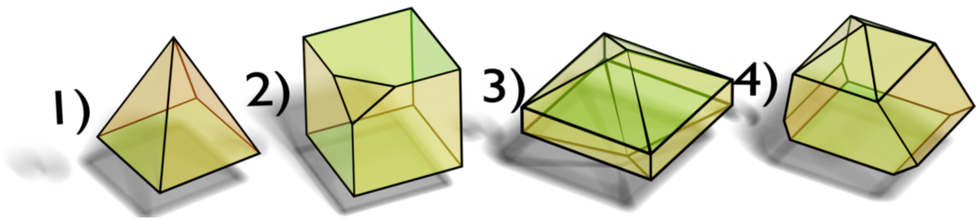
- Ejes y planos de simetría, diagonales, ángulos, etc.
- Se pueden combinar varios criterios.

Aunque pueda parece mucha información, no te preocupes. Al final, cuando veamos los grupos te quedará claro y, en realidad, no será tanto.

7.2.2 Relaciones entre los vértices, caras y aristas de los poliedros

Vamos a hacer un pequeño viaje lógico acerca de cómo deben ser los poliedros y que condiciones deben cumplir. Ten encuenta, primero, que para tener un vértice, deben incidir, al menos, tres caras. Si intersecamos dos caras, tenemos una arista.

A partir de los polígonos de la izquierda, rellena los datos de la tabla, a ver si observas alguna relación:



Polie-dro	Nro de caras (C)	Nro de vértices (V)	Nro de aristas (A)
(1)			
(2)			
(3)			
(4)			

Existe una relación entre el número de caras, vértices y aristas, que se expone en el:

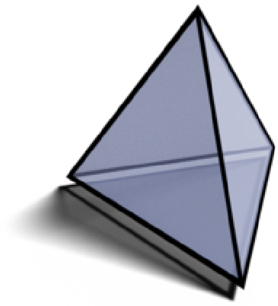
Teorema (Teorema de Euler)**.** *En cualquier poliedro se cumple que la suma del número de vértices y el de caras es igual al número de aristas más 2.*

$$C + V = A + 2$$

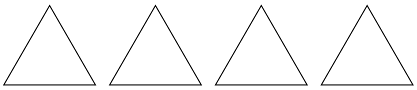
donde C es el número de caras, V es el número de vértices y A es el número de aristas.

Este teorema no es trivial y, de hecho, la demostración de Euler, publicada en 1758 (aunque escrita mucho antes), era errónea. Hasta 1811 no se publicó una demostración correcta, de la mano de Augustin Louis Cauchy.

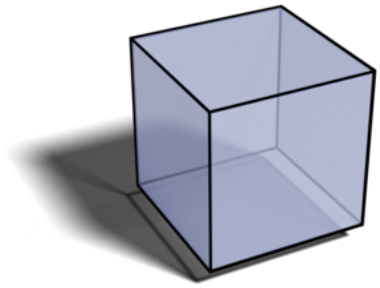
No es la única relación que existe en los poliedros: puesto que en cada arista siempre inciden dos caras, hay la mitad de aristas que lados suman los polígonos que forman las caras del poliedro. Además, cada arista une dos vértices, pero puesto que en un vértice puede incidir un número variable de aristas no se puede determinar, en general, una relación entre estas dos cantidades. En casos más específicos, como se verá más adelante, se podrán establecer relaciones.



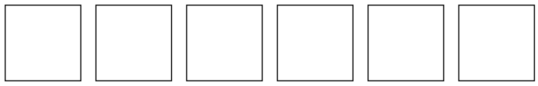
- 4 caras triangulares
- 4 vértices
- 6 aristas



Número de lados: $3 \cdot 4 = 12$



- 6 caras cuadradas
- 8 vértices
- 12 aristas



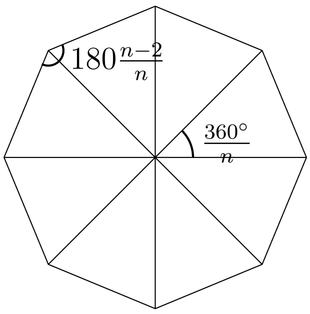
Número de lados: $4 \cdot 6 = 24$

7.2.3 Poliedros regulares

Definición. *Se llama poliedro regular a un poliedro con las siguientes características:*

- *la superficie es convexa,*
- *las caras son polígonos regulares congruentes,*
- *inciden el mismo número de caras en cada vértice.*

Puesto que los poliedros regulares se construyen con polígonos regulares, sus características serán relevantes para construir los poliedros.



Puesto que el ángulo central de un polígono regular de n lados va a medir $360°/n$, el ángulo interior del polígono es[6]

$$180° - \frac{360°}{n} = \frac{180°n - 2 \cdot 180°}{n} = 180°\frac{n-2}{n}$$

Entonces podemos determinar el ángulo interior en cualquier polígono regular a partir del número de datos:

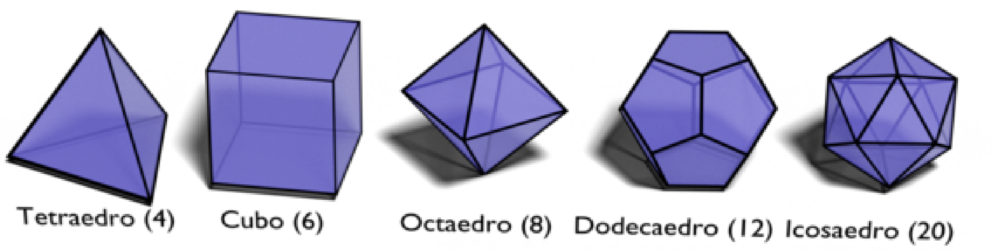
[6] Los polígonos regulares se pueden descomponer como una serie consecutiva de triángulos isósceles congruentes. Al determinar el ángulo central, $360°/n$, y puesto que la suma de los ángulos interiores de todo triángulo que tiene que sumar $180°$, la suma de los otros dos ángulos tiene que ser $180° - 360°/n$. Pero resulta que, como se puede observar en la ilustración, el ángulo interno del polígono regular es la suma de dos de esos ángulos.

Nombre	**Nro de lados**	**Ángulo interior**
Triángulo equilatero	3	$180° \frac{3-2}{3} =$
Cuadrado	4	$180° \frac{4-2}{4} =$
Pentágono	5	$180° \frac{5-2}{5} =$
Hexágono	6	$180° \frac{6-2}{6} =$
Heptágono	7	$180° \frac{7-2}{7} =$
Octógono	8	$180° \frac{8-2}{8} =$

En cualquier vértice del poliedro, los ángulos interiores de los polígonos que convergen en ese vértice tienen que sumar menos de 360°, o el poliedro "no podría cerrar", y, al menos, deben converger tres polígonos. A partir estas condiciones y de las medidas de los ángulos internos calculados arriba, podemos identificar qué poliedros regulares se pueden construir:

Tipos de caras (ángulo interior)	nro de caras por vértice	Suma de los ángulos en cada vértice	nro de caras	nro de vértices	nro de aristas	C + V - A	Nombre
Triángulo equilátero (60°)	3	180°	4	4	6	2	Tetraedro
	4	240°	8	6	12	2	Octaedro
	5	300°	20	12	30	2	Icosaedro
	6	360°					
Cuadrado (90°)	3	270°	6	8	12	2	Hexaedro
	4	360°					
Pentágono (108°)	3	324°	12	20	30	2	Dodecaedro
	4	432°					
Hexágono (120°)	3	360°					

Entonces, únicamente se pueden formar cinco poliedros regulares convexos, que reciben el nombre de *sólidos platónicos*.



Como ejercicio teórico, a partir del Teorema de Euler se puede comprobar también que sólo existen cinco poliedros regulares convexos. Llamando:

$$C = \text{nro de caras de } n \text{ lados } (n > 2)$$
$$V = \text{nro de vértices de orden } m \ (m > 2)$$
$$A = \text{nro de aristas}$$

Y teniendo en cuenta que, puesto que cada arista pertenece a dos caras, y cada arista une dos vértices:

$$A = \frac{nC}{2} \Rightarrow C = \frac{2A}{n} \qquad \text{y} \qquad A = \frac{mV}{2} \Rightarrow V = \frac{2A}{m}$$

Substituyendo en la fórmula de Euler y trabajando un poco de álgebra:

$$\begin{gathered} C + V - A = 2 \\ \frac{2A}{n} + \frac{2A}{m} - A = 2 \\ A(2m + 2n - mn) = 2mn \end{gathered}$$

Puesto que el número de aristas, A, es positivo, al igual que m y n, entonces $A > 0$ y $2mn > 0$, de donde se deduce que el otro elemento que se está multiplicando también es positivo

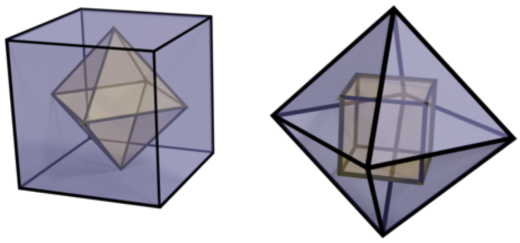
$$\begin{gathered} 2m + 2n - mn > 0 \\ 2m + 2n - mn - 4 > -4 \\ mn + 4 - 2m - 2n < 4 \\ (m-2) \cdot (n-2) < 4 \end{gathered}$$

Construyendo los diferentes valores de m y n que verifican esta condición se construyen los tipos de poliedros regulares que se pueden construir, según se desarrolla en la Tabla 7.1, en la página 112.

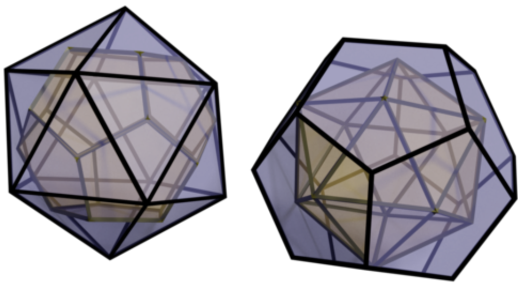
7.2.4 Poliedros duales

Si tomamos como vértices los centros de las caras de cada uno de los poliedros regulares y formamos el solido convexo que los tiene por extremos, obtenemos su *poliedro dual*. Si hacemos esto con todos los poliedros regulares, obtenemos otro poliedro regular, que es a su vez poliedro dual del primero. Así, se tienen pares de poliedros duales:

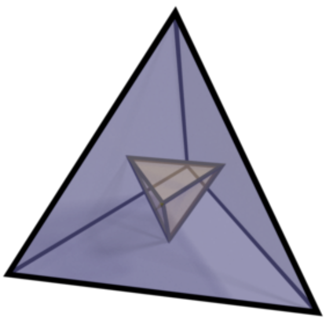
- Octaedro y hexaedro



- Icosaedro y dodecaedro



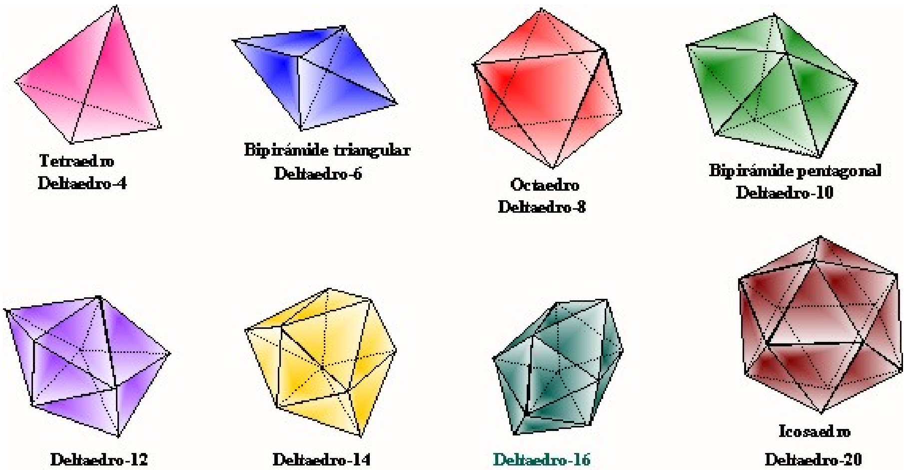
- Tetraedro consigo mismo



7.2.5 Deltaedros

Es el conjunto formado por los poliedros cuyas caras son triángulos equilateros iguales. El nombre proviene de la letra griega *delta mayúscul*, Δ, que tiene forma de triángulo.

Sólo hay ocho deltaedros convexos:



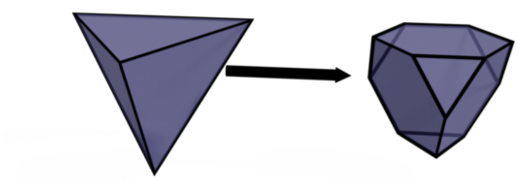
Como curiosidad, hay infinitos deltaedros cóncavos, algunos de ellos muy vistosos e interesantes[7], como:

- El Gran icosaedro, uno de los cuatro sólidos de Kepler-Poinsot.
- La Estrella octángula, la macla formada por dos tetraedros y estudiada por Kepler.
- El tetraedro estrellado Davinciano, que representa la primera estelación del tetraedro.
- El icosaedro estrellado Davinciano: Es un poliedro regular cóncavo estrellado que posee 60 caras exteriores representadas por triángulos equiláteros uniformes entre sí, tiene 32 vértices y 90 aristas
- El hexaedro estrellado Davinciano,que representa la primera estelación del cubo. Está compuesto por 24 caras exteriores triangulares equiláteras. Posee 8 vértices intermedios y 6 vértices exteriores, para un total de 14 vértices, posee 12 aristas intermedias, 24 aristas exteriores, para un total de 36 aristas
- El dodecaedro estrellado Davinciano.

7.2.6 Poliedros arquimedianos o semirregulares

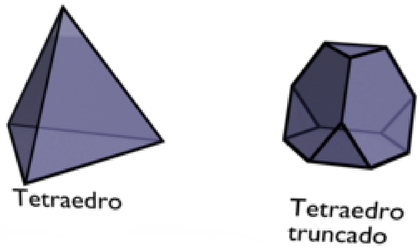
Se obtienen a partir de la relajación de la condición de igualdad de caras de los poliedros regulares, y conservandose que las caras sean polígonos regulares y todos los vértices tengan la misma cardinalidad.

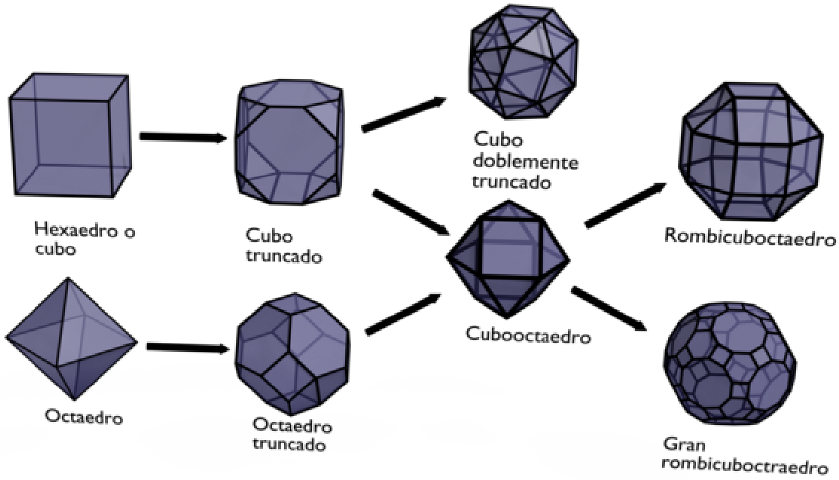
Un método de construcción es mediante el truncamiento: se toma un poliedro regular y se cortan las aristas que inciden en cada vértice por un plano, de manera que la sección producida sea un polígono regular cuyo lado sea de la misma longitud que el resto de las aristas.

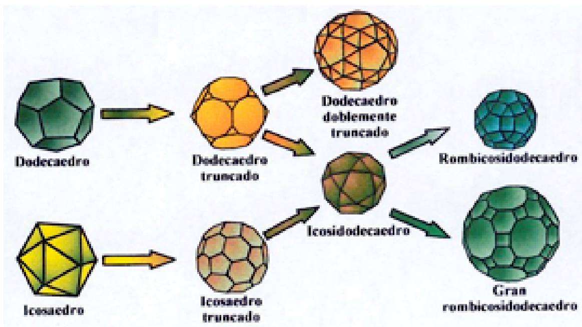


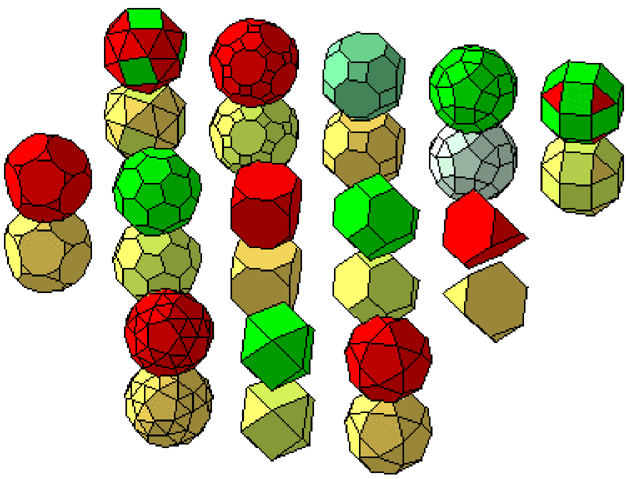
A pesar de la relajación, sólo hay trece nuevos poliedros arquimedianos, además de los prismas y antiprismas semirregulares, que se verán más adelante.

[7]Y os recomiendo que busquéis en internet, por curiosidad


Tetraedro
Tetraedro truncado

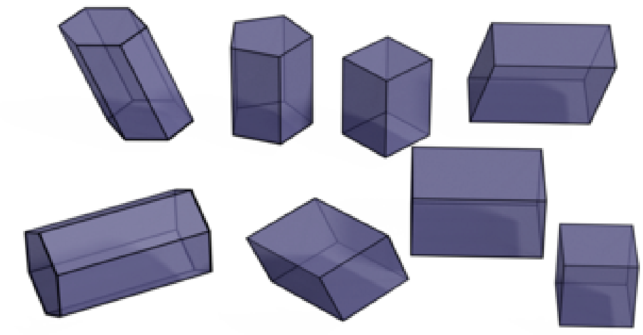

Hexaedro o cubo
Cubo truncado
Cubo doblemente truncado
Rombicuboctaedro
Cubooctaedro
Octaedro
Octaedro truncado
Gran rombicuboctraedro


Dodecaedro
Dodecaedro truncado
Dodecaedro doblemente truncado
Rombicosidodecaedro
Icosidodecaedro
Icosaedro
Icosaedro truncado
Gran rombicosidodecaedro

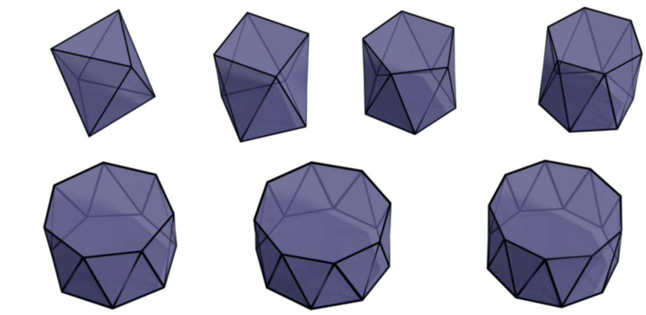


7.2.7 Prismas y antiprismas

Un prisma es un poliedro limitado por dos caras iguales y paralelas (bases) y tantos paralelogramos (caras laterales) como lados tienen las bases

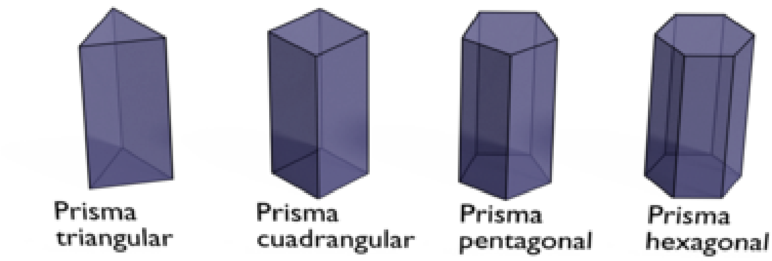


Cuando las bases las unimos con triángulos y no con paralelogramos, las figuras que obtenemos se llaman antiprismas.

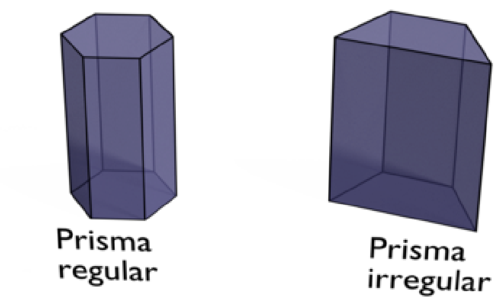


Los prismas se clasifican en función de varios criterios:

- del número de lados que forma la base

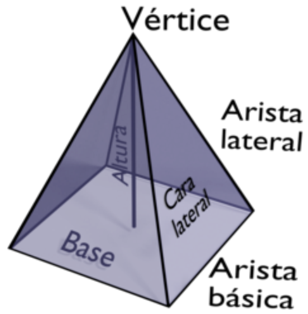


- De la regularidad del polígono que forma la base



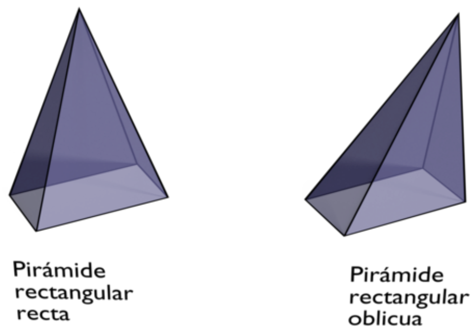
7.2.8 Pirámides

Una pirámide es un poliedro delimitado por un polígono, denominado base, y triángulos, delimitados por cada lado de la base y un punto exterior a ella denominado vértice.

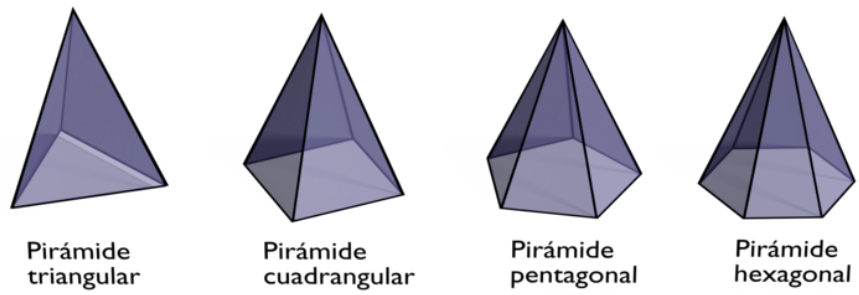


Existen diversos criterios de clasificación de las pirámides:

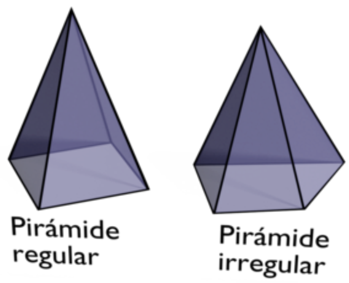
- Si la proyección del vértice verticalmente a la base coincide con el centro de la misma, o no.



- Según el número de lados del polígono que forma la base.

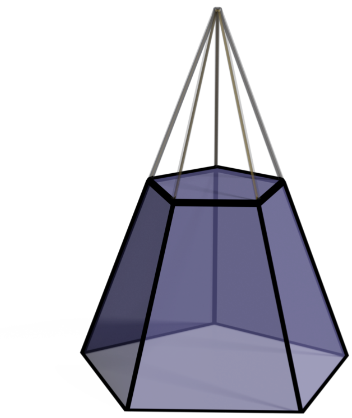


- En función de la regularidad del polígono que forma la base



7.2.9 Tronco de pirámide

A partir de una pirámide, cortando por un plano paralelo a la base, se forma el tronco de pirámide.



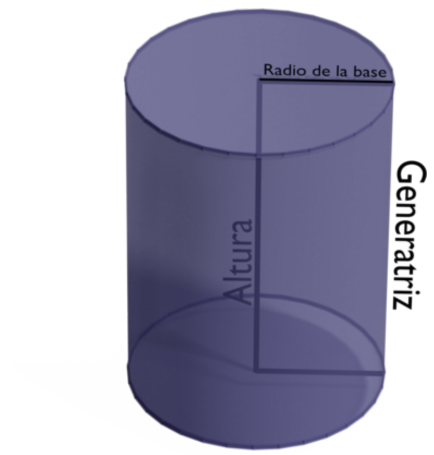
7.3 Cuerpos de revolución

Los cuerpos de revolución se construyen haciendo girar una curva alrededor de un eje. En los cálculos sobre este tipo de figuras siempre aparece el número π. Recuerda, de temas anteriores, que

- La longitud de la circunferencia es $L = 2\pi r$
- El área del círculo es $A = \pi r^2$

7.3.1 Cilindro

Se genera al girar un segmento alrededor de un eje paralelo al mismo.

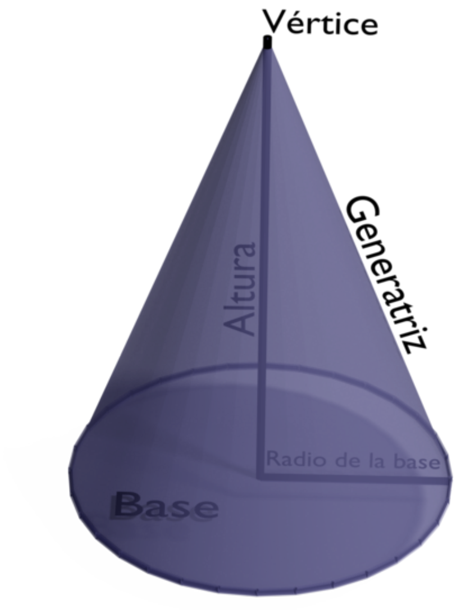


Los cilindros se clasifican en función de la orientación de su eje respecto a las bases

- **cilindro rectangular**: el eje del cilindro es perpendicular a las bases.
- **cilindro oblicuo**: el eje no es perpendicular a las bases.

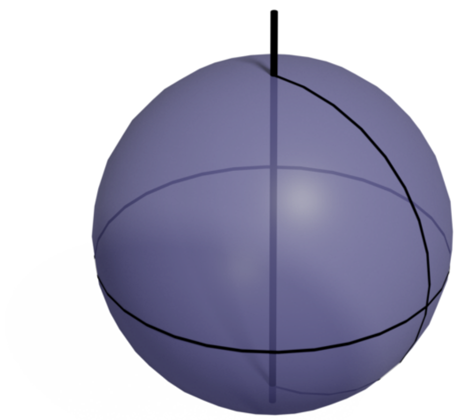
7.3.2 Cono

Se genera al revolucionar un segmento (generatriz) con un extremo en el eje de giro.



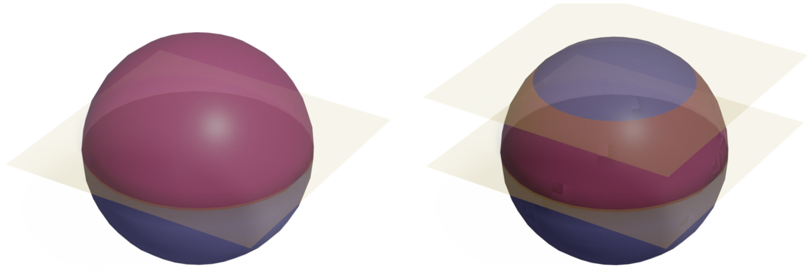
7.3.3 Esfera

Se genera al revolucionar una circunferencia sobre un eje que coincide con su diámetro.



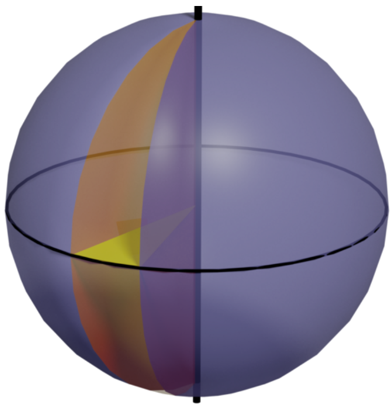
En las esferas es habitual encontrar el estudio de parte de la esfera, que tiene nombre propio, como:

- *Zona esférica y casquete esférico*: sólido definido por cortar una esfera con planos paralelos.

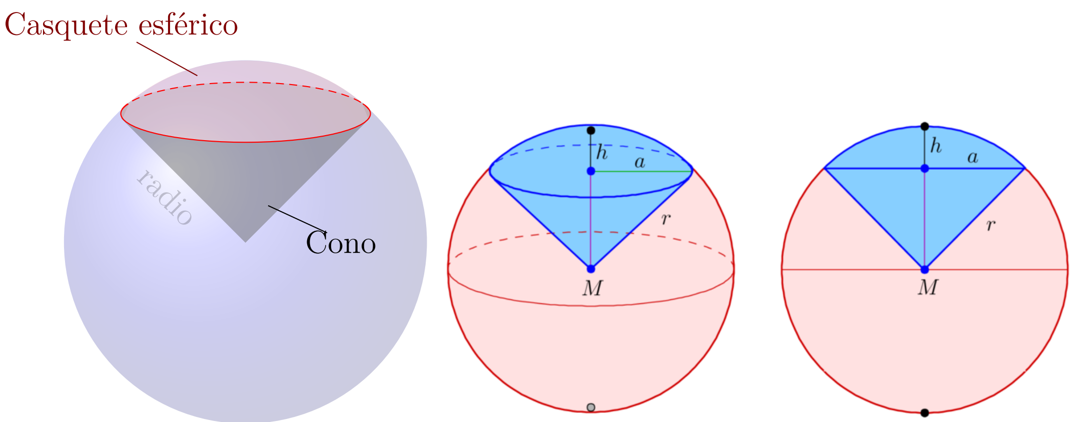


Casquete esférico Zona esférica

- *Huso esférico*: la parte de la superficie de una esfera comprendida entre dos planos que se cortan en el diámetro.



- *Sector esférico*: la parte de la esfera que se genera al girar un sector circular alrededor de un eje que pasa por el centro de la esfera. Viene a construir algo parecido a la galleta de un cucurucho de helado.

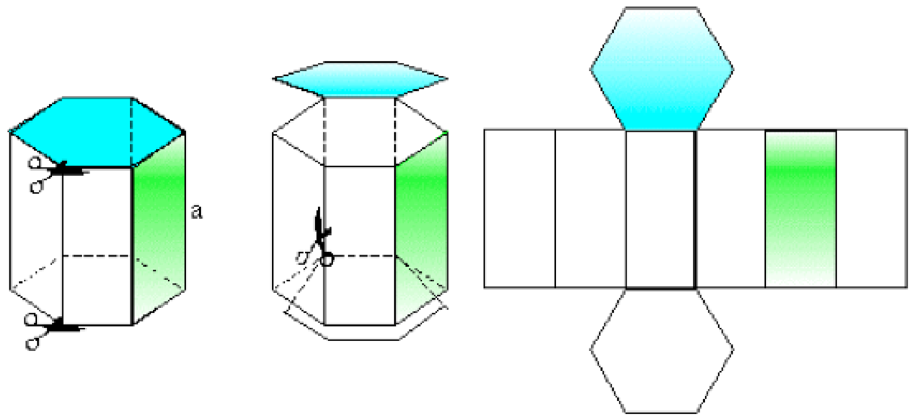


7.4 Desarrollo plano y área de los poliedros

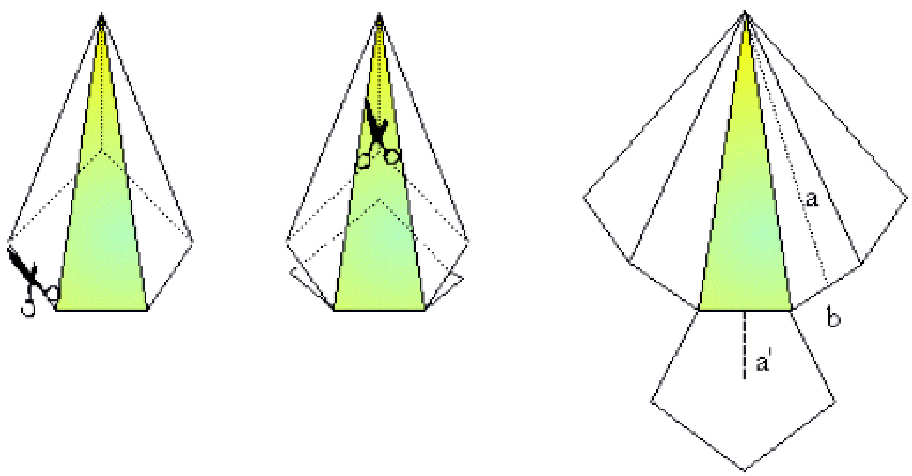
Se llama área de un poliedro al área de los paralelogramos que forma las caras del poliedro.

Prisma recto En el caso del prisma recto hay dos áreas:

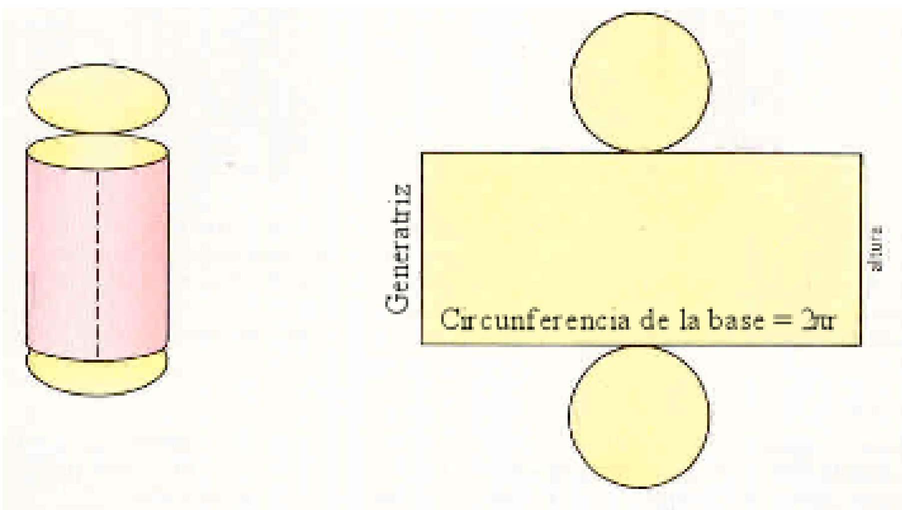
- el área lateral, que es el área de los paralelogramos que forman los laterales del prisma
- el área total, que es el área lateral más el área de las dos bases



Pirámide recta De la misma forma que se desarrollan los áreas de un prisma, se puede hacer con una pirámide.

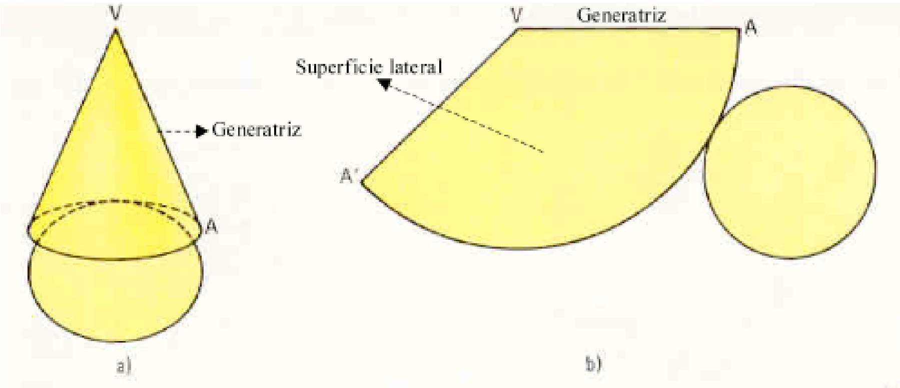


Cilindro



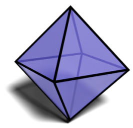
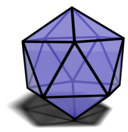
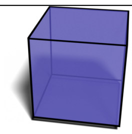
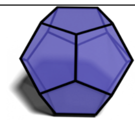
$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h = 2\pi r(r + h)$$

Áreas del cono



$$A = \pi r^2 + \frac{2\pi r}{2\pi a}\pi a^2 = \pi r^2 + \pi r a = \pi r(r+a)$$

Donde r es el radio de la base y a es la longitud de la generatriz

n	m	Resultados en $(m-2)(n-2) < 4$	Poliedro	Figura
3	3	$1(m-2) < 4 \Rightarrow m < 6$	Tetraedro	
	4	$m = 3, 4, 5$	Octaedro	
	5		Icosaedro	
4	3	$2(m-2) < 4 \Rightarrow m < 4$	Cubo	
5	3	$3(m-2) < 4 \Rightarrow m < 4/3 + 2 = 10/3$	Dodecaedro	
6		$4(m-2) < 4 \Rightarrow m < 3$	Imposible	

Cuadro 7.1: Los poliedros regulares

8

Localización: sistemas de referencia

Cuando el niño interactúa con el entorno empieza a establecer relaciones entre los elementos. Una de estas relaciones es la de posición, describiendo la situación relativa de los objetos con conceptos como:

- ... está delante de ...
- ... está detrás de ...
- ... está al lado ...
- ... está encima de ...
- ... está debajo de ...

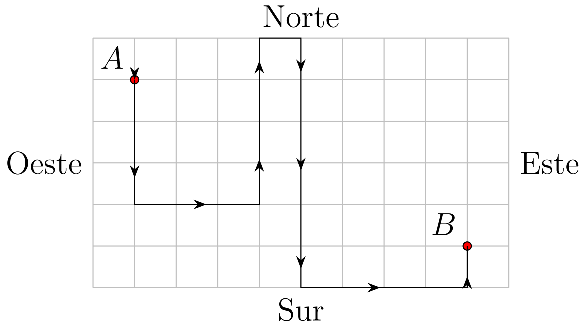
Después empieza, cuando su lenguaje lo permite, a diferenciar entre derecha e izquierda, siendo cada vez más específico en la descripción de las posiciones relativas de los objetos.

Se constata, por tanto, que la descripción de la situación de los objetos es una necesidad que se desarrolla ya en los primeros estadios de la evolución de los niños. Y, al comenzar los procesos de manipulación, que podrían corresponderse en el ámbito matemático con las transformaciones geométricas, se añade la necesidad de la descripción de las nuevas posiciones.

8.1 Sistema cartesiano

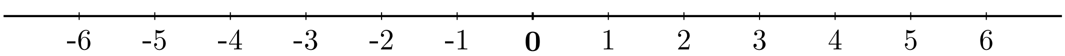
Una primera aproximación a una sistematización de la posición[1] sería la adjetivación de las transformaciones necesarias para llegar de una posición a otra, como por ejemplo:

a) 3 pasos hacia el sur
b) 3 pasos hacia el este
c) 4 pasos hacia el norte
d) 1 paso hacia el este
e) 6 pasos hacia el sur
f) 4 pasos hacia el este
g) 1 paso hacia el norte



Se puede observar que se consigue expresar una transformación de A a B a través de longitudes adjetivadas, es decir, con información añadida de dirección.

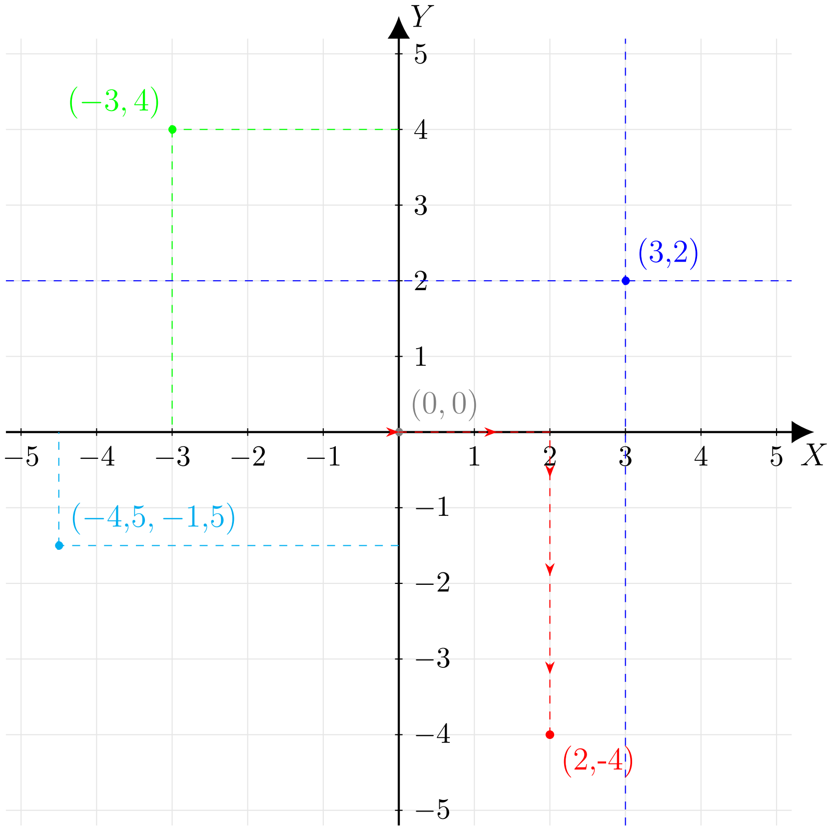
Rene Descartes (1596-1650) observó que ya tenemos un sistema para posicionar números: la recta real.



[1]Aunque vamos a trabajar inicialmente en el plano, estos resultados se pueden trasponer de forma natural a cualquier número de dimensiones. Lo cual le dota de gran potencia y elegancia.

En ella, tomando un origen, generalmente el 0, y una unidad, el espacio entre 0 y 1, se construyen el resto de las unidades a partir de la adición o substracción, que se corresponden con desplazamientos en la recta, de esa unidad de referencia.

Si generalizamos este sistema con dos rectas perpendiculares, se puede especificar cada posición en el plano como el desplazamiento independiente que se ha de realizar en cada uno de estos ejes para alcanzarla, y mediante paralelas a los ejes determinar el punto de intersección:



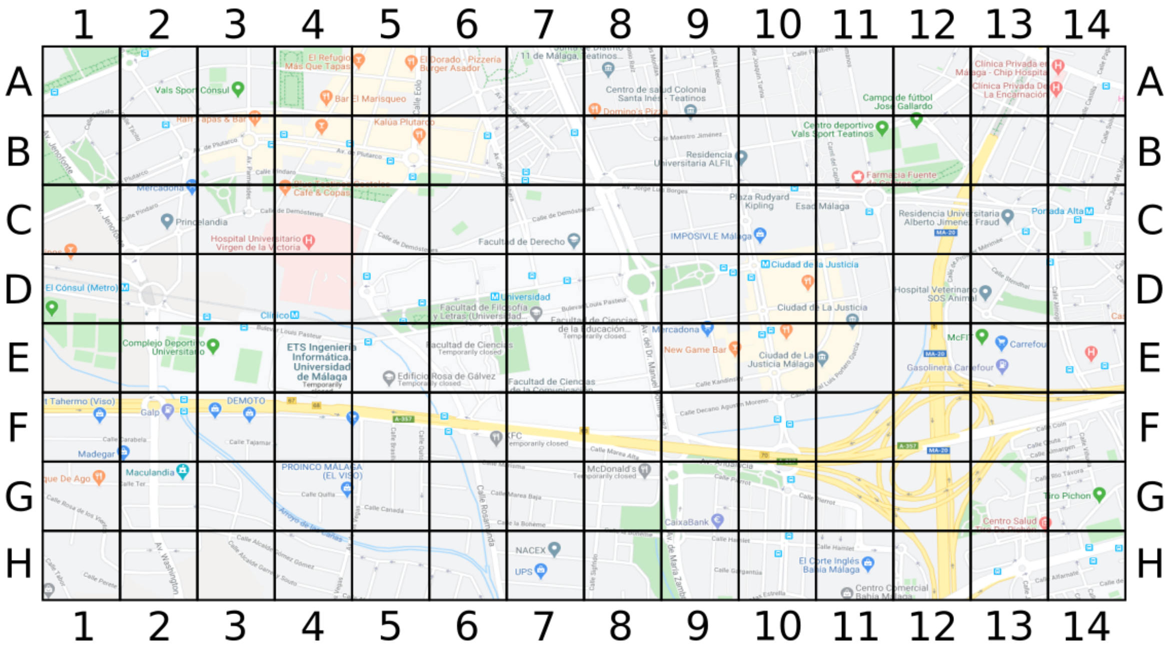
En el ejemplo del $(3, 2)$, se construye una paralela al eje Y en la posición del eje X indicada por la primera coordenada, 3, y una paralela al eje X en la posición del eje Y indicada por la segunda coordenada, 2. En la intersección es donde se cumplen las dos condiciones y, por tanto, tenemos situado el punto.

Otra forma de ver la posición del punto a partir de las coordenadas es la construcción de un camino progresivo para alcanzar el punto, partiendo del origen, $(0, 0)$. En el ejemplo, el $(2, -4)$, primero se realiza el desplazamiento indicado en el eje X por la primera coordenada, es decir, 2 en el sentido positico. Y después se concatena el desplazamiento en el eje Y indicado por la segunda coordenada, 4 en sentido negativo (-4) en el ejemplo, llegándose a la posición objetivo.

Como es posible observar, ambas aproximaciones son equivalentes y la única diferencia es la forma de aproximar la posición. Lo usual es que una de las dos formas sea la que sea fácil de visualizar. Conviene asimilar las dos formas, aunque sea a partir de la que se ha comprendido.

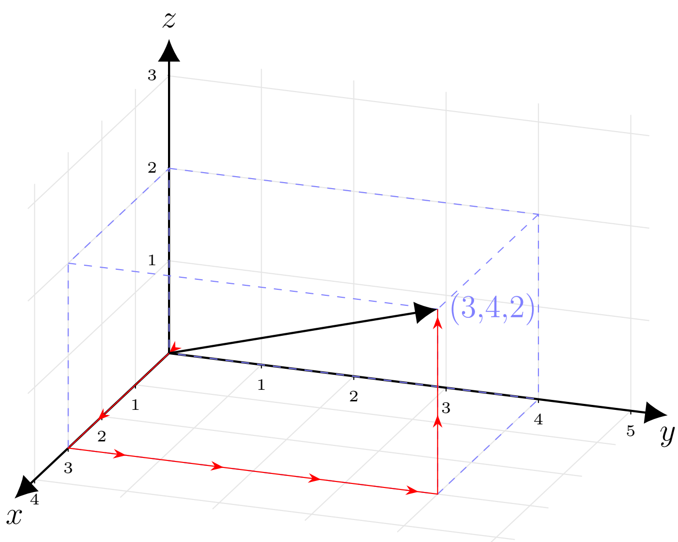
Al eje X se le denomina eje de abcisas y al eje Y eje de ordenadas.

Una variante de este sistema de referencia es el usado en planos y mapas (sobre todo si tiene algunos años o son mapas de carretera). Es el mismo que el usado en el juego de “los barquitos”.



En lugar de localizar las posiciones por cantidades numéricas que se identifican por el orden en que se enuncian, se utiliza un sistema de nomenclatura diferente para cada eje (letras y números). £Puedes decir donde está nuestra facultad?

El concepto anterior se puede generalizar a más de dos dimensiones y, aunque requiere un poquito de imaginación y abstracción, no es complicado de imaginar y visualizar si se trabaja un poquito o se usa algún elemento de referencia real que ayude a visualizar las posiciones.

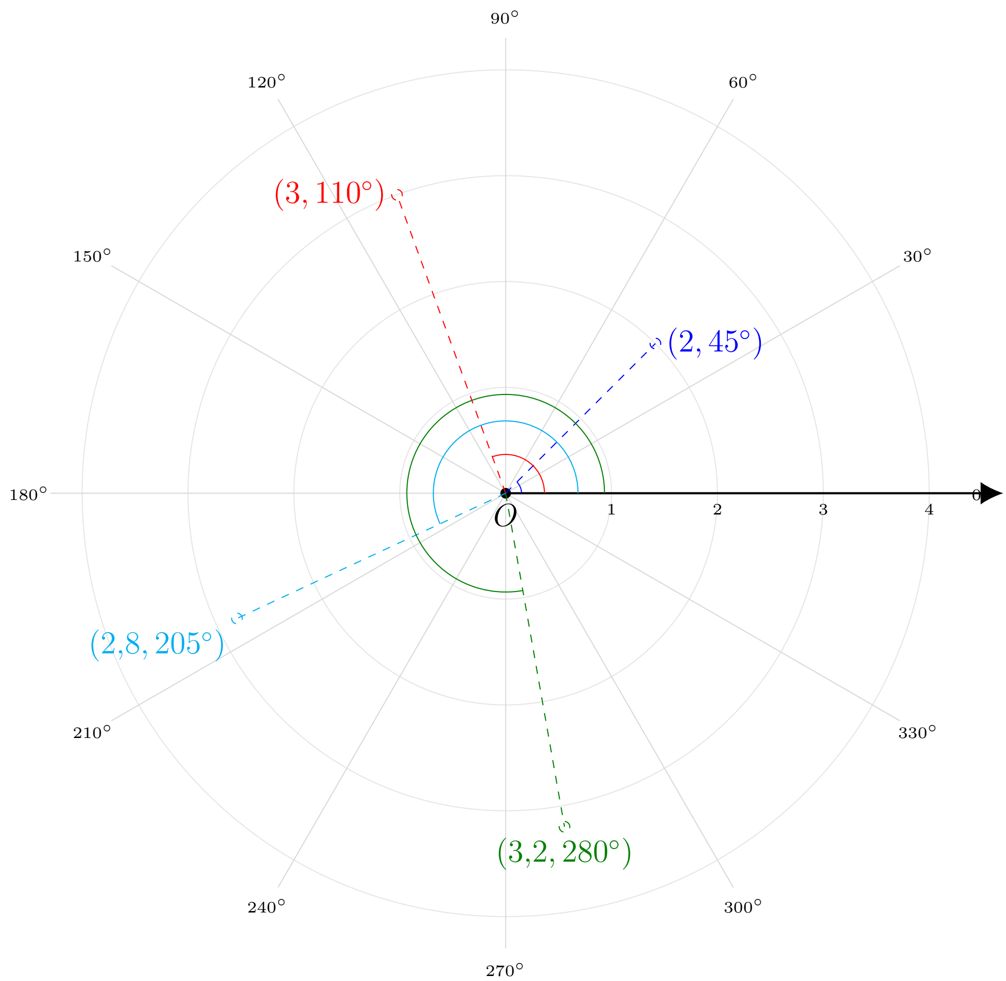


De nuevo, están representadas las dos aproximaciones, como construcción de intersecciones (que en este caso son planos) y de la construcción progresiva de la posición.

8.2 Sistemas de coordenadas polares

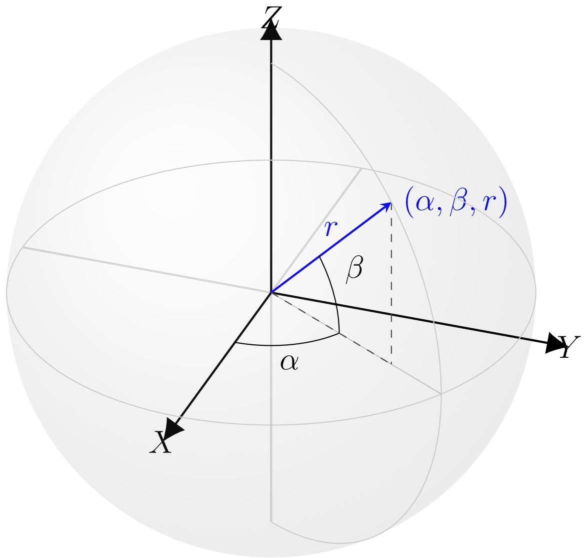
Aunque muy común, el sistema de coordenadas cartesiano no es el único que existe. De hecho, hay aplicaciones en el que ni siquiera es conveniente.

Una de las opciones es el sistema de coordenadas polar, en el que, en lugar de establecer una localización a partir de puntos, se establece como una distancia a un origen y un giro respecto de un semieje de referencia.



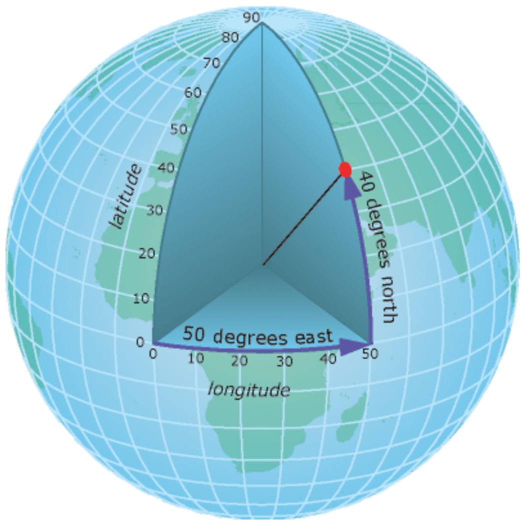
El funcionamiento de este sistema de referencia es similar a los anteriores, sólo que con información que ha interpretarse de forma distinta: situado en el origen y en la dirección en que indica el semieje de referencia, se gira en sentido antihorario el ángulo indicado por la posición, y posteriormente se avanza en esa dirección la distancia indicada. De esta forma es posible alcanzar cualquier localización del plano.

De nuevo, este sistema se puede generalizar a tres dimensiones, dando lugar a las denominadas *coordenadas geográficas*. Se comienza con una coordenada polar, correspondiente a un giro en el plano horizontal, en el dibujo etiquetado como α, y se añade un giro perpendicular al plano de giro inicial, etiquetado como β. Queda determinada así una única dirección en el espacio. En esa distancia se recorre la distancia etiquetada como r y se llega a la ubicación determinada.



Aunque con el mismo esquema básico, existen diversas aproximaciones, variando, fundamentalmente, en los puntos de referencia a partir de los cuales se comienzan a medir los ángulos.

Es posible observar que, dada una distancia r, todos los puntos que distan del origen esa distancia r forman una esfera. Así, dada una esfera, toda localización sobre la esfera se puede identificar con los ángulos de giro α y β, puesto que el radio está prefijado. Este método es el que se denomina *coordenadas geográficas* y se utiliza para realizar localizaciones sobre la superficie de nuestro planeta.



https://desktop.arcgis.com/es/arcmap/10.3/guide-books/map-projections/geographic-coordinate-system.htm

A los cortes horizontales de la esfera, que se producen al fijar β, se le denominan paralelos. Se denotan según su *latitud*, que corresponde con el ángulo β. El ecuador se toma como latitud cero y latitud norte o sur, según si β es positivo o negativo respectivamente. Al fijar un α se producen cortes que van desde el polo norte al polo sur. A estas líneas se las denomina *mediriano* y se denotan según su *longitud*, que se corresponde con el ángulo α. La longitud se miden respecto al meridiano que pasa por la ciudad inglesa de *Greenwich*, notandose como longitud Este u Oeste.

Habitualmente,

- La latitud y la longitud se miden en grados sexagesimales
- Todos los puntos ubicados en el mismo paralelo tienen la misma latitud
- Las localizaciones al norte del Ecuador se dicen que tienen latitud *Norte* y, los que se encuentran al sur, latitud *Sur*. Las latitudes se miden entre 0° y 90°.
- Los polos Norte y Sur tienen, respectivamente, latitudes 90° N y 90° S.
- Todos los puntos ubicados en el mismo meridiano tienen la misma longitud
- Las localizaciones al Este del meridiano de Greenwich, hasta un giro de 180°, se dice que tienen longitud Este, y las que están al Oeste, hasta un giro de 180° se dice que tienen logitud Oeste.
- La longitud varía entre los 0° y los 180°, Este y Oeste.

8.3 Mapas y escalas

Entroncado con este tema está el de las escalas en los mapas, que se trata en profundidad en el tema dedicado a las homotecias y a la semejanza.

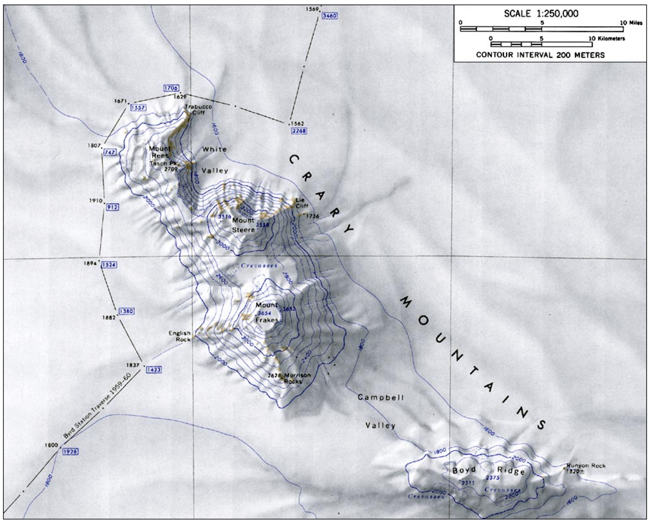
9

Semejanza y localización: mapas

Todos estamos habituados a ver mapas. Es el mejor sistema que tenemos para representar el mundo que nos rodea de una forma que podamos hacernos una idea de su distribución . . . y quepa en la guantera del coche o en la pantalla del móvil.

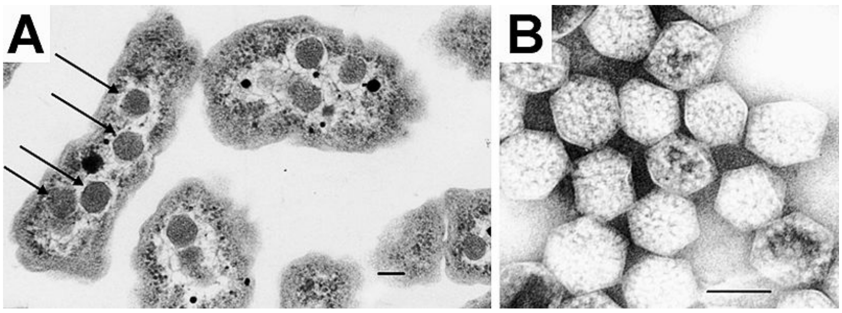
Ya se ha visto en el capítulo 8, “Localización: sistemas de referencia”, los sistemas de coordenadas y su aplicación en los mapas y los sistemas de posicionamiento terrestre. Sin embargo, el concepto de mapa también entronca con el de la Semejanza, visto en el capítulo 5.

Es habitual encontrarse con imágenes como:



https://es.wikipedia.org/wiki/Escala_(cartograf%C3%ADa)#/media/Archivo:CraryMtnsMap.jpg

o como



La barrita negra corresponde a $100nm = 0{,}0001mm$

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Carboxysomes_EM.jpg

Se puede observar que se usado un procedimiento similar, cambiar el tamaño sin cambiar la forma, para poder representar de forma asequible información que, de otra forma, estaría fuera del alcance de nuestros sentidos. En el primer caso por ser excesivamente grande, mientras que en el segundo por ser excesivamente pequeño.

Este procedimiento de "cambiar el tamaño sin cambiar la forma" lo hemos denominado homotecia. Y es una aplicación bastante directa de los conceptos desarrollados en el capítulo correspondiente.

Las escalas siguen una notación bastante universal, que se escribe como una razón[1] $n : m$, donde n corresponde a la medida en el mapa y m a la medida que correspondería en el mundo real.

Así, una escala etiquetada como 2 cm:10 km nos está informando que 2 cm en el mapa corresponde a 10 km en el mundo real. Entonces, £a cuánto corresponde 1 cm? De forma natural casi todo el mundo responde con, pues a la mitad de 10 km, es decir 5 km. De forma intuitiva se está estableciendo una relación de proporcionalidad de medidas, que es una de las características de la semejanza.

Esta relación de proporcionalidad se representó en el capítulo de semejanza como

$$\frac{2\,\text{cm}}{10\,\text{km}} = \frac{1\,\text{cm}}{5\,\text{km}}$$

De estas relaciones y con un poquito de álgebra, nada complejo, es muy fácil encontrar la correspondencia entre cualquier medida lineal en el plano y la realidad.

También es habitual encontrar escalas sin unidades, como en la primera imagen de este capítulo, en la que aparece $1 : 250000$. En este caso, las unidades de la medida de entrada se transfiere a la medida de salida. Así, una medida de 2 cm en nuestro plano correspondería a $2\,\text{cm} \cdot 250000 = 500000\,\text{cm} = 5000\,\text{m} = 5\,\text{km}$ en la realidad.

Esta es la forma estándard de reflejar la escala en los mapas, habiendo una norma ISO al respecto, con medidas recomendas: 100:1, 50:1, 20:1, 10:1, 5:1, 2:1, 1:1, 1:2, 1:5, 1:10, 1:20, 1:50, 1:100, 1:200, 1:500, 1:1000, 1:2000, 1:5000, 1:10000.

En función de la transformación que se lleva a cabo para representar al objeto se consideran tres tipos de escala:

- **Escala de reducción**: en la que el tamaño de la representación es menor que la del objeto representado. Permite representar en un espacio reducido objetos que son demasiado grandes para hacerse una idea de su forma. A este grupo corresponde los mapas de carreteras o los mapas topográficos. Se suelen denotar como $1 : m$.
  Este es el caso de la primera figura con la que se abre este capítulo. Una montaña es demasiado grande para verla a completa a simple vista, salvo que estés a mucha altura, que no suele ser nuestro caso. Así que, mediante un mapa que reduzca el tamaño a algo manejable, podemos hacernos una idea de su estructura y forma.
- **Escala natural**: en la que el tamaño de la representación corresponde al tamaño real del objeto representado. A esta escala se la suele denotar como $1 : 1$.

[1] Os recordamos que la razón entre dos segmentos es la división entre sus longitudes. Y las divisiones se pueden representar de diversas formas

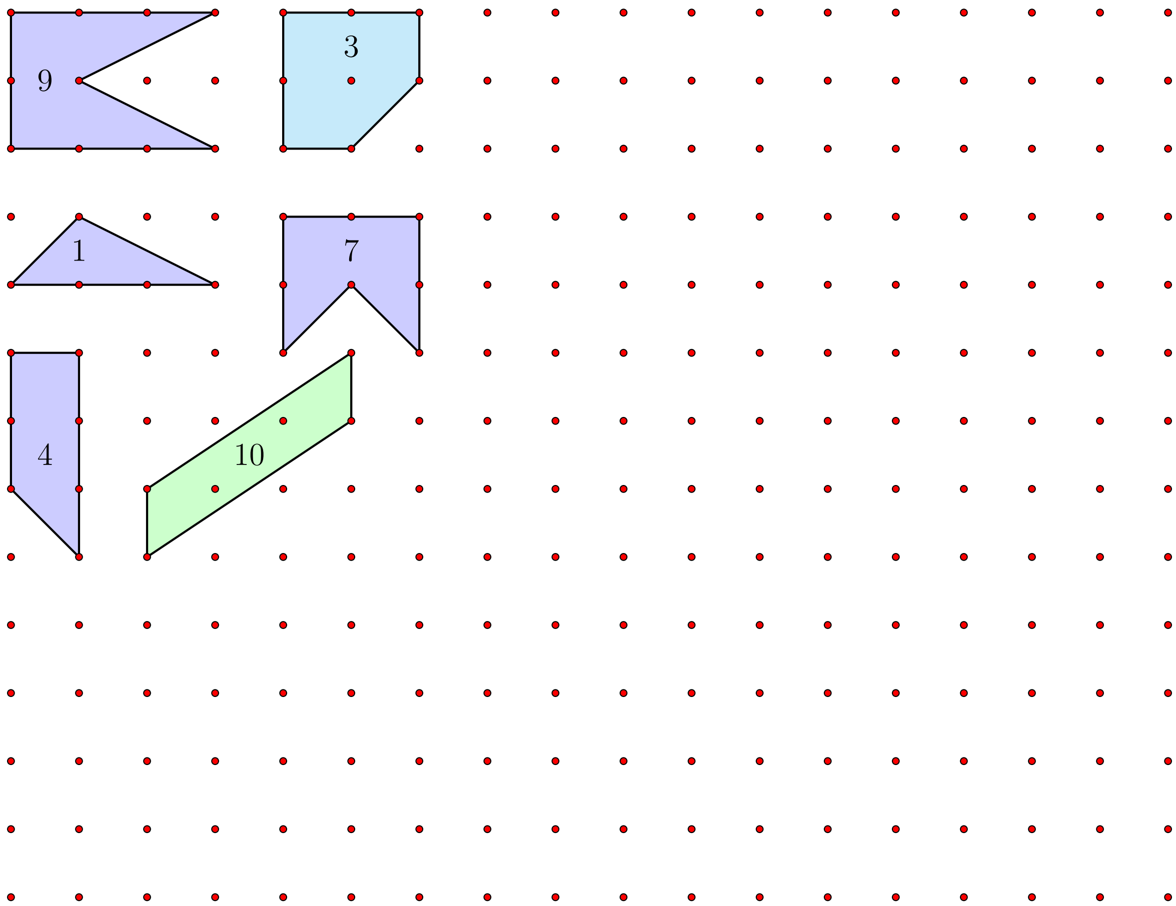
$$\frac{a}{b} = a/b = a : b$$

Seguro que las habéis visto todas en diferentes ocasiones. Aquí se usará la última de ellas.

- **Escala de ampliación**: en la que el tamaño de la representación es mayor que el tamaño del objeto representado. Sirve para ampliar y hacer visibles de objetos demasiado pequeños para que nuestra visión sea efectiva. La escala se suele denotar como $n : 1$.
  Este es el caso de la segunda figura con la que se abre este capítulo. A simple vista este tipo de organismos son indistinguibles. Si no tuvieramos herramientas como el microscopio, que nos permiten "escalar" su visión para ampliarlas, seguirían perteneciendo al reino de lo oculto.

Aunque puede parecer que estos conceptos se refieren completamente al campo de la medida, se pueden trabajar, sobre todo desde el punto del desarrollo de la percepción espacial, con los recursos proporcionados este curso.

Se proponen, sobre el siguiente gráfico, los siguientes problemas:



1. Dibujar cada una de las figuras a escala 1:2, 1:3, 1:4, etc ....
2. Comprobar qué ocurre con las distancias y las áreas de las figuras resultantes, en relación con las correspondientes medidas de la figuras originales.
3. Si las figuras repesentan edificios de una ciudad (es decir, nuestro dibujo es un mapa=), si la distancia entre dos puntos consecutivos es 1cm, 2cm, 3cm, 1km, etc ... cuales son las distancias que separan diferentes puntos.

Con estos ejemplos, y usando una herramienta eminentemente manipulativa, se pueden llevar a cabo actividades que se trasladan de forma directa a la interpretación de mapas, escalas y las relaciones de semejanza.

Didáctica

10 Las teorías sobre el aprendizaje geométrico

En los años setenta del siglo pasado se establecieron con fuerza los departamentos de didácticas de las Matemáticas en muchas universidades. El objetivo era comprender cómo se aprende Matemáticas para mejorar, en la medida de los posible, los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Ha sido muy grande el esfuerzo que se ha dedicado a estudiar la forma en la que se adquieren los conceptos y el modo matemático, y en la aplicación de este conocimiento.

10.1 La teoría acerca del aprendizaje de Piaget

Piaget fue uno de los primeros en hacer una aproximación sistemática al estudio de los modelos de aprendizaje en muchos diversos ámbitos, incluidos el de la Geometría, a través de experimentos con niños de diferentes edades. Su planteamiento le permitió establecer un marco teórico que ha sido base de los trabajos posteriores, siendo aun un estudio clave en muchos estudios de didáctica.

Desarrolla una serie de experimentos para determinar los niveles de abstracción en niños de diferentes edades. Entre otros, diseña experimentos basados en dos principios:

- Tests de "percepción": delimita la capacidad de discriminar entre diferentes objetos representados visualmente.
- Tests de "representación" (imaginería mental): estudia la capacidad para identificar formas mediante el tacto y la capacidad de reproducir formas mediante palillos o dibujos.

A partir de estos experimentos determina una serie de etapas en el desarrollo de las capacidades geométricas de los niño. En ellas establece que las primeras interacciones del niño con su entorno se basan casi totalmente en experiencias espaciales a través de la vista y el tacto. Estas capacidades de percepción se desarrollan hasta la edad de dos años, en lo que denomina el *estadio sensoriomotor*.

Al desarrollar el lenguaje, se verbaliza las relaciones del entorno físico y se produce un proceso de abstracción. A partir de los dos años comienza a desarrollar la capacidad de hacer reconstrucción de imágenes espaciales, que va perfeccionando desde los siete años en adelante en el periodo que denomina de *operaciones concretas*.

Establece tres etapas principales en la evolución de la capacidad de *justificar* los hechos geométricos:

- Primer nivel (7-8 años): observación desordenada. Las conclusiones son de tipo local y no se integran, pudiendo ser, incluso, contradictorias. No se justifican las conclusiones, sino que se asumen a partir de la observación empírica, dando por hecho que los hechos experimentados volverán a ocurrir.

  Es un pensamiento *no sistemático, ni reflexivo, ni lógico*.
- Segundo nivel (hasta los 11-12 años): utilizan la exploración con un objetivo de predicción, intentando justificarlas, aunque sin los procesos inductivos. Utilizando más la forma que el razonamiento, sin establecer las necesidades lógicas que llevan al hecho

matemático.
El pensamiento es *lógico, pero restringido al mundo empírico.*

- Tercer nivel (11-12 años en adelante): realizan inducciones empíricas, establecen hechos geométricos y los justifican mediante la deducción. También son capaces de realizar deducciones lógicas sobre hechos de los que no tienen evidencias empíricas.
  El pensamiento es *lógico y ajusta al sistema matemático.*

Establece también que, a medida que se produce la evolución conceptual, se produce una diferenciación progresiva de las propiedades geométricas:

- Primero se diferencian las que denomina *propiedades topológicas*[1], propiedades globales e independiente de la forma o el tamaño, como:
  - *cercanía* o *proximidad*: por ejemplo, dibujar un hombre con los ojos juntos, aun cuando éstos puedan haber sido situados por debajo de la boca;
  - *separación*: por ejemplo, no traslapar la cabeza y el cuerpo;
  - *ordenación*: por ejemplo, dibujar la nariz entre los ojos y la boca;
  - *cerramiento*: como dibujar los ojos dentro de la boca;
  - *continuidad*: como hacer que los brazos formen un continuo con el tronco y no con la cabeza.
- En el segundo grupo se encontrarían las *propiedades proyectivas*, que suponen la capacidad de predecir el aspecto que presentará un objeto al ser visto desde otros puntos de vista:
  - antes de este nivel, si un niño pequeño intenta dibujar una cara de perfil, pondrá los dos ojos y, posiblemente, la oreja entre ellos
  - pueden no ser capaces de darse cuenta de que al mirar un lápiz desde un extremo se verá un círculo.
  - La *rectitud* es una propiedad proyectiva, dado que las líneas rectas siguen mostrando aspecto rectilíneo cualquiera que sea el punto de vista desde el que se las observe.
- En el tercer grupo se tienen las propiedades más restrictivas, las *propiedades euclídeas*: tamaños, distancias, direcciones, que llevan a la medición de ángulos, áreas, etc.
  - Se identifican y diferencian figuras basándose en sus propiedades medibles, como ángulos, congruencia de lados, etc. Esto permite diferenciar un trapecio de un rectángulo que, proyectivamente, son equivalentes (observa un tablero de una mesa desde un lado ...)
  - Pueden determinar y reproducir la posición exacta de un punto en una hoja, o una figura geométrica, y decidir las medidas de lados y ángulos para lograrlo.

El trabajo de Piaget y su equipo es encomiable y un gran avance en el estudio de la didáctica. A partir de su trabajo han surgido diversas líneas de investigación que intentan determinar el desempeño de los estudiantes en actividades de predicción y justificación de hechos geométricos.

[1]Aunque hay trabajos posteriores (Martin, 1976; Darke, 1982) que cuestionan el uso dado por Piaget al término topológico, por no ser muy ajustado al concepto matemático, usándose más bien como noción psicológica.

10.2 El modelo de niveles de Van Hiele

El matrimonio Dina y Pierre Van Hiele, en sus disertaciones doctorales en 1957, establecen una teoría de enseñanza y aprendizaje de la geometría, que se desarrollaría posteriormente en van Hiele (1986).

En su teoría retomaron algunos de los conceptos de la teoría de Piaget, como

- la *hipótesis constructivista*, en la que se considera que el propio estudiante es el constructor activo de su propio conocimiento.
- el conocimiento no se organiza linealmente como un listado de términos, hechos y reglas, sino como un sistema de relaciones que vinculan conceptos geométricos y procesos en *esquemas conceptuales*
- el proceso de abstracción matemático se consigue a partir de la *propia reflexión*
- los conflictos o crisis a los que se enfrentan los estudiantes son vitales para la *transición* entre niveles de pensamiento
- los estudiantes no van a aprender por imitación o siguiendo explicaciones, por muy claras que sean, sino a partir de su *experiencia personal*

Sin embargo, establecen diferencias significativas tanto en la estructura del conocimiento, en los mecanismos de adquisición de los mismos y los condicionantes para su adquisición.

- El aprendizaje de la geometría se organiza en cinco niveles de abstracción.
- No se puede alcanzar un nivel sin haber pasado por los niveles anteriores.
- Los conceptos que son implícitos en un nivel, se hacen explícitos en el siguiente. Es decir, se formalizan.
- Cada nivel describe procesos de pensamiento que se ponen en juego ante tareas y situaciones geométricas, es decir, tiene su propio lenguaje, con sus símbolos y su semántica.
- Estudiantes de distinto nivel no pueden entenderse, al hablar lenguajes distintos.

10.2.1 Los niveles de Van Hielen

Los Van Hielen proponen que el aprendizaje de la geometría se construye como niveles de pensamiento, en los que se va adquiriendo, progresivamente, un mayor nivel de abstracción. Una instrucción adecuada facilitaría el paso por los distintos niveles, y debería componerse de cinco fases secuenciales: información, orientación guiada o dirigida, explicitación, orientación libre e integración.

Los niveles se suelen etiquetan con los números 0 a 4 o 1 a 5. A continuación se van a analizar cada uno de estos niveles y sus características.

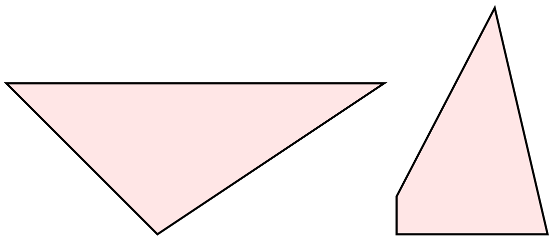
Nivel 0: Visualización. *Percepción espacial y pensamiento no geométrico, los objetos son formas y se conciben por su apariencia.*

Los objetos se perciben en su totalidad sin diferenciar sus componentes y sus propiedades o atributos. Se reconocen las figuras por su apariencia, sin existir un lenguaje geométrico básico para denominar a las figuras por su nombre y utilizando en muchos casos una terminología que hace referencia a objetos reales cercanos: tiene la forma *de una ventana*, o *de una rueda* o *de un cohete*, y en el caso de utilizar un lenguaje más preciso las palabras utilizadas están vacías de significado geométrico.

El objetivo en este nivel es conseguir, a través de las experiencias geométricas presentadas, la concreción de agrupaciones de formas que parecen similares, a través de la observación, la manipulación y la verbalización de los realizados, comenzando a considerar sus elementos.

Las personas en este nivel son capaces de hacer mediciones e, incluso, de hablar sobre las propiedades de las formas, pero no se piensa explícitamente en esas propiedades. Así, por ejemplo, un cuadrado que está representado con una diagonal vertical no se considerará como un cuadrado y se clasificará como un rombo. Se clasifican las figuras juntas porque tienen un aspecto similar.

Por ejemplo, en las siguientes figuras:



dirían que el primero no es un triángulo y, sin embargo, el segundo lo aceptan como tal, al parecerse a la forma en la que suelen ver representado un triángulo.

El resultado de este nivel pensamiento son las clases o agrupaciones de formas que parecen *similares*, que permiten introducirse en el siguiente nivel.

Nivel 1: Análisis. *Inicios del pensamiento geométrico: el estudiante es capaz de descubrir y generalizar propiedades que aún no conocen a partir de la observación y la manipulación*

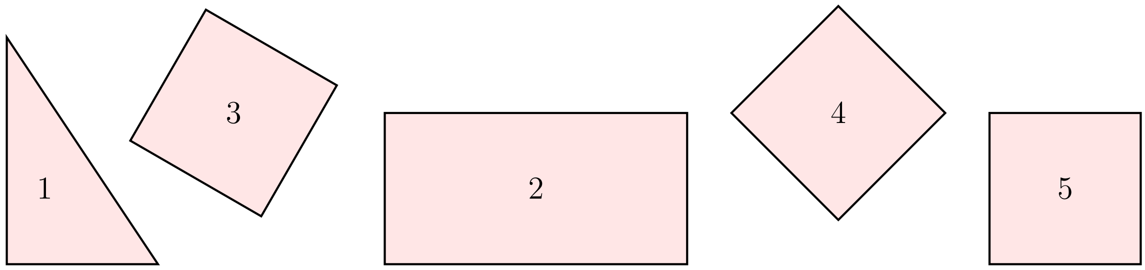
En este nivel se perciben los objetos geométricos formados por componentes y caracterizados por propiedades que se obtiene por la observación, manipulación/experimentación.

Ya se distinguen clases de elementos parecidos, así se habla de rectángulos, de triángulos, etc. y se pueden listar las distintas propiedades de las figuras. Sin embargo, no se identifica las propiedades necesarias y suficientes para que un tipo de figura quede determinada. Como muchas definiciones en Geometría se elaboran a partir de propiedades que se consideran suficientes, no se pueden elaborar dichas definiciones.

Esto puede provocar que las clases de objetos sean exclusivas, impidiendo considerar una forma geométrica en clases distintas: una figura es un rombo o un cuadrado, pero no puede ser a la vez las dos a la vez.

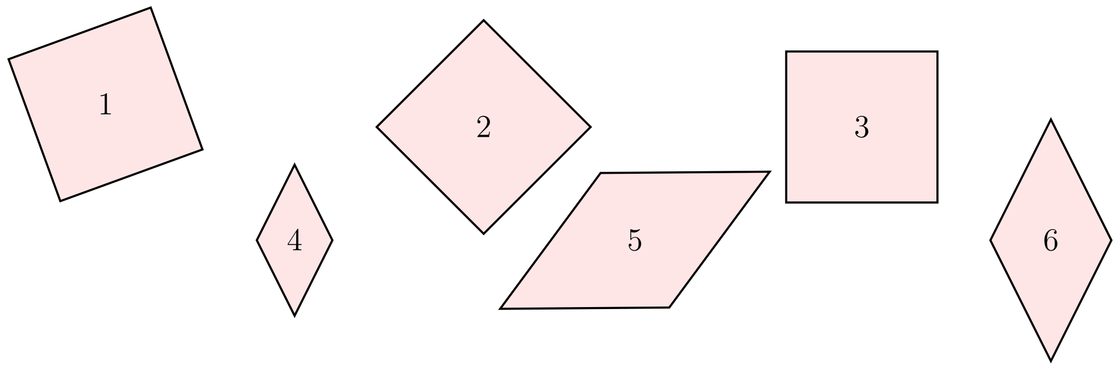
Mediante la experimentación con figuras u objetos pueden establecerse nuevas propiedades, aunque no se justifican. “Son así ...”

Considérese la pregunta: £cuáles de las siguientes figuras son cuadrados?



En este nivel identificarían como cuadrados las 3, 4 y 5, puesto que cumplen las propiedades de ser cuadrados.

£Cuales de las siguientes figuras son rombos?



En este nivel es habitual que se exponga que el 4, 5 y 6. Sin embargo, todos cumplen las condiciones de ser rombos. En este sentido se realizan clasificaciones excluyentes.

El resultado de este nivel son las restriciones observadas y que apuntan hacia las relaciones las formas: *las propiedades*.

Nivel 2: Deducción informal.*Relaciones entre las propiedades, inicio del razonamiento formal*

Se describen los objetos y figuras de manera formal y se comprende los significados de las definiciones. A medida que se es capaz de pensar en términos de propiedades de los objetos geométricos, sin las restricciones de un objeto en particular, se desarrollan relaciones entre estas propiedades. Por ejemplo:

- Si los cuatros ángulos son rectos, la figura es un rectángulo.
- Si es un cuadrado, todos los ángulos son rectos.
- Entonces un cuadrado es un rectángulo.

Se puede seguir y apreciar un argumento deductivo informal sobre las formas y sus propiedades. Esto permite clasificar las figuras geométricas usando sólo un mínimo de características. Por ejemplo:

- cuatro lados congruentes y al menos un ángulo recto puede ser suficiente para definir un cuadrado.
- los rectángulos son paralelogramos con un ángulo recto.

Las observaciones van más allá de las propias propiedades y comienzan a centrarse en argumentos lógicos sobre las propiedades.

Las *demostraciones* son más bien de tipo intuitivo que rigurosamente deductivas. Sin embargo, se entiende que un argumento lógico tiene características que obligan a aceptar la conclusión.

El resultado de este nivel son las *relaciones formales entre las propiedades de las formas*. La necesidad de relacionar formalmente, a través de demostraciones, unas con otras.

Nivel 3: Deducción. *Realización de razonamientos formales, entender la necesidad y el sentido de las demostraciones*

Se realizan deducciones y demostraciones, a partir de la naturaleza axiomática de las Matemáticas y se comprende las propiedades y se formalizan en sistemas axiomáticos.

Se plantea la correctitud de las conjeturas planteadas en el nivel anterior. Este es el paso de la formalización de la Geometría, mediante un sistema completo de *axiomas, definiciones, teoremas, corolarios y postulados*, como medio de expresión de las relaciones geométricas. Se crea la necesidad de construir un *sistema lógico* fundamentando en un conjunto mínimo de supuestos y del que se puedan derivar todos los resultados.

El nivel de abstracción ya es elevado, y se pueden llegar a conclusiones únicamente basadas en la lógica y sin la intuición. Es el nivel que se alcanza en los cursos de geometría de *bachillerato*.

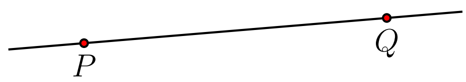
Como ejemplo, en el nivel 2 se observa claramente que las diagonales de un rectángulo se cortan en su punto medio. Sin embargo, en el nivel 3 existe la necesidad de probar esa proposición a partir de la argumentos deductivos. Un estudiante del nivel 2 puede seguir el argumento de la demostración, pero no siente la necesidad de llevarla a cabo.

Al adquirir este nivel, al tener un alto nivel de razonamiento lógico, se tiene una visión globalizadora de las Matemáticas.

El resultado de este nivel son los *sistemas axiomáticos deductivos* para la geometría.

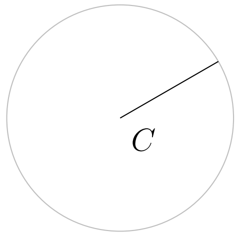
Un ejemplo de sistema axiomático para la Geometría es el que planteó Euclides, mediante sus cinco postulados:

1. Dados dos puntos se puede trazar una y sólo una recta que los une:

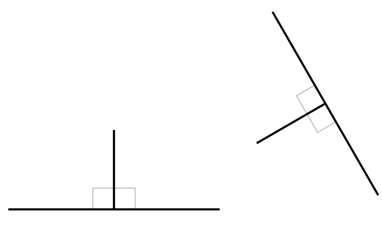


2. Cualquier segmento puede prolongarse de manera continua en cualquier sentido:

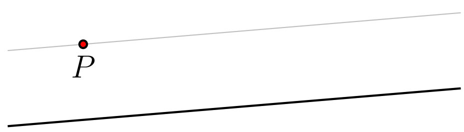
3. Se puede trazar una circunferencia con centro en cualquier punto y de cualquier radio:



4. Todos los ángulos rectos son congruentes:

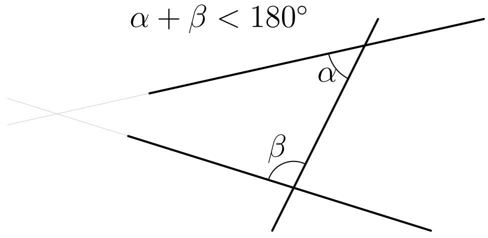


5. Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela a la recta dada.



Este último axioma fue originalmente postulado como:

Si una recta corta a otras dos formando, a un mismo lado de la secante, dos ángulos internos agudos, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en el que están dichos ángulos



Nivel 4: Rigor. *Trabajo con sistemas axiomáticos*

Este es el nivel más alto y con mayor abstracción del pensamiento geométrico. El objeto de estudio son los propios sistemas axiomáticos, no las deducciones dentro de un sistema, analizando y comparando los propios sistemas.

La única razón para aceptar una demostración es la argumentación, aunque sea contraria a la intuición o al sentido común.

Este es el nivel requerido en los cursos universitarios especializados en los que se estudia la geometría como una rama de las Matemáticas.

El resultado de este nivel son *comparaciones y contrastes entre diferentes sistemas axiomáticos de la Geometría.*

10.2.2 Características del modelo de Van Hiele

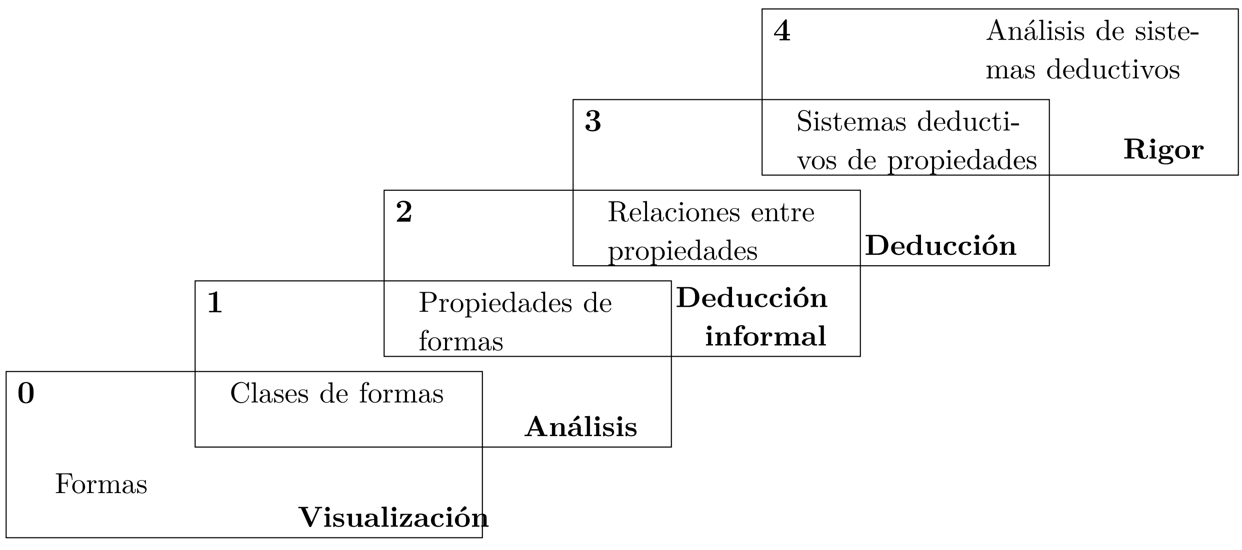


Figura 10.1: Niveles de Van Hielen

Los niveles de razonamiento de Van Hiele establecen cinco niveles sucesivos de abstracción de los conceptos geométricos. En cada nivel, salvo el más alto, se crean objetos (ideas) cuyas relaciones se convierten en los objetos del siguiente nivel. Esto implica un proceso de abstracción y complejidad conceptual creciente.

Se puede observar que:

- Los niveles son secuenciales, dando cada uno origen al siguiente.
- Para lograr alcanzar un nivel hay que haber superado los niveles previos, experimentando el pensamiento geométrico de ese nivel y creando los tipos de objeto o relaciones que son el foco de atención del pensamiento del siguiente nivel.
- Los niveles no son dependientes de la edad, en el sentido de los estadios de desarrollo de Piaget.

  Un alumno de tercero de primaria puede estar en el nivel 0, al igual que uno de bachillerato. Algunas personas pueden permanecer para siempre en el nivel 0, y un número importante de personas no alcanzan nunca el nivel 2.

  Sin embargo, la edad está relacionado con el tiempo que hemos tenido para tener experiencias, incluidas experiencias geométricas. Por lo que, en ese sentido, suele haber cierta correlación entre la edad y el nivel alcanzado.
- Es razonable aceptar que los niños de preescolar a segundo curso de primaria estén en el nivel 0, y muchos niños de tercero y cuarto.
- Puesto que el principal factor que influye en la progresión a través de los niveles son las experiencias geométricas, cuanto más y más ricas sean estas experiencias, más fácil es evolucionar a través de los niveles.

  La experiencia e interactuación con contenidos del siguiente nivel mejoran la experiencia del nivel actual, y preparan para el avance hacia el siguiente nivel.
- Si se utiliza un lenguaje que está en un nivel superior al que posee el estudiante, la comunicación fallará.

  Si un estudiante se enfrenta con objetos de pensamiento que aun no ha construido en el nivel anterior, es posible que recurra a un aprendizaje memorístico, que proporciona un éxito superficial y temporal. Por ejemplo, asumir que los rectángulos son cuadrados, sin haber construido esta relación a partir de las propiedades. O memorizar una demostración geométrica sin comprender la lógica de los pasos y la razón de ese proceso.

10.2.3 Recomendaciones para aplicación a los procesos de enseñanza-aprendizaje

Se expondrán, a continuación, algunas consideraciones acerca de cómo utilizar los conceptos de los niveles de Van Hielen para desarrollar una práctica de enseñanza-aprendizaje adecuada:

Nivel 0. En este nivel, en el que los alumnos establecen relaciones por comparación y sin la aplicación de propiedades, se propone:

- Actividades de
  - Clasificación, identificación y descripción de formas variadas.
  - Construcción, composición y descomposición de formas diversas
  - Modelos físicos para manipular.
  - Conviene que puedan utilizar variedad de formas diferentes.
- Se pretende que las características irrelevantes se perciban como **no** importantes. Por ejemplo, evitar que lleguen a pensar que sólo los triángulos equiláteros son realmente triángulos, o que un cuadrado girado 45° deja de ser un cuadrado

Nivel 1. En este nivel los estudiantes ya establecen clases de formas a partir de sus propiedades.

- A partir de los modelos concretos del nivel anterior, explorar las propiedades de las figuras.
- Para potenciar la identificación de esas propiedades: definir, medir, observar y cambiar las propiedades a partir de modelos concretos.
- Resolución de problemas en los que las propiedades de las formas sean aspectos importantes a tener en cuenta.
- Clasificar figuras usando las propiedades de las figuras y sus nombres. Por ejemplo, encontrar que propiedades hacen que unos triángulos sean similares, y en qué, y otros diferentes.
- Las exploraciones llevan a conclusiones inductivas sobre las formas. Una afirmación es verdadera porque se cumple en los casos que se comprueban. Para conseguir un buen aprendizaje hay que seleccionar los ejemplos de forma que no lleven a inducciones erróneas, con gran variedad de situaciones diferentes.

Nivel 2. Este nivel llega hasta el primer ciclo de la Educación Secundaria, y es el más alto con el que, en principio, os vais a enfrentar. En este nivel se establecen las propiedades de las formas y se comienza el camino de una visión eminentemente matemática de la Geometría.

- Incidir en las definiciones de las propiedades, y qué propiedades poseen los modelos: Hacer listas de propiedades y discutir qué propiedades son necesarias y cuáles son suficientes para una forma o concepto específico.
- Introducción de lenguaje de naturaleza deductiva aunque informal: todos, algunos, ninguno, si entonces, qué ocurre si, etc.
- Investigar la validez de la inversión de ciertas relaciones. Por ejemplo, el enunciado inverso de “Si una figura es un cuadrado debe tener cuatro ángulos rectos” sería, “Si tiene cuatro ángulos rectos, entonces debe ser un cuadrado”.
- Usar modelos y dibujos como herramientas con las que pensar y comenzar a buscar generalizaciones y contraejemplos.
- Estimular la formulación y demostración de hipótesis.
- En este nivel el alumnado comienza a usar razonamientos deductivos informales. Pueden seguir y usar argumentaciones lógicas, aunque puede resultarles difícil construir por si mismos demostraciones.
- Todavía es importante el uso de modelos físicos y dibujos geométricos para seguir una argumentación deductiva o para comprobar conjeturas o construir contraejemplos. Los modelos se convierten en una herramienta conceptual y de verificación en lugar de exploratoria.

La mayor parte de los contenidos curriculares propuestos para la Educación Infantil y Primaria se pueden englobar en los tres primeros niveles, excepto el planteamiento de conceptos abstractos tales como punto, recta, semirecta y plano en sentido de la Geometría. Estas ideas pueden ser excesivamente abstractas incluso para el nivel 2 (primer ciclo de educación secundaria).

Sin embargo, puede ser conveniente ir introduciéndolos, preparando el salto al siguiente nivel, que va a permitir formalizar los elementos del nivel actual.

11

La geometría en el currículum escolar

11.1 Una breve historia de las leyes educativas

Hasta hacer relativamente poco en términos históricos, siglos XVI y XVII, la educación estaba al alcance, únicamente, de las clases adineradas y a cargo de la Iglesia. Sólo los más adinerados podían acceder a competencias tan básicas como leer y escribir.

Fue durante la guerra de Independencia, en 1812, que se elaboró el Informe Quintana, en el que se analiza el estado de la Educación en España en aquel momento y se proponen líneas de actuación para llevar un cierto grado de educación a toda la sociedad, fuertemente influenciados por los planteamientos al respecto de la Asamblea Nacional francesa de 1792, en plena Revolución.

Establece así mismo la enseñanza pública en tres niveles:

- *Primera enseñanza*: universal.
- *Segunda enseñanza*: general.
- *Tercera enseñanza*: particular.

El regreso de Fernando VII, con su régimen absolutista, supuso la derogación de este proyecto.

En 1857 se impulsó la Ley Moyano, en la que se intentó dar respuesta al analfabetismo imperante en el momento, uno de los mayores de Europa. Se establecieron tres niveles de enseñanza:

- *Enseñanza primaria*: obligatoria, y gratuita para quien no pudiera pagarla. En la práctica dependió de los municipios o de las iniciativas privadas.
- *Enseñanza media*: para ella se crean Institutos de Bachillerato y Escuelas de Magisterio en las distintas provincias.
- *Enseñanza superior*: se imparte en las Universidades y su gestión se la reserva el Estado.

Esta ley estuvo en vigor durante más de cien años, como una ley de bases, que consolidaba un sistema educativo que se había ido fundamentando durante los cincuenta años anteriores, en un entorno político convulso. Sin embargo, sufrió varias reformas menores con los distintos gobiernos.

Durante la II República hubo diversas reformas del sistema educativo, incidiendo sobre el reconocimiento de las diferentes lenguas del Estado, la libertad de enseñanza religiosa o la creación de escuelas por todo el territorio nacional, para llevar la Educación Primaria a todos los niños[1]. Pero, hubo graves problemas de financiación y el proyecto se llevó a cabo sólo de forma parcial.

La Enseñanza Primaria Básica abarcaba entre los 6 y 12 años.

[1] Había más de un millón de niños sin escolarizar

En la post-guerra, durante el régimen franquista, se promulgan la *Ley de Instrucción pública* y la *Ley de Ordenación de las Enseñanzas Secundarias*, que proyecta sobre el sistema educativo la ideología del régimen. Ambas fueron reformadas en 1967.

Los cambios sociales y económicos se hicieron patentes en los años 70, y el sistema educativo tenía que adaptarse a la nueva situación. Se promulgó la Ley general de Educación. En ella se incluyen en el sistema educativo, además de la enseñanza primaria, secundaria y universitaria, la educación maternal, preescolar, especial y la formación profesional.

Es la primera ley que consigue, con carácter general, la escolarización de todos los niños en la educación obligatoria.

Ya en el régimen democrático, se aprueba en 1990 la denominada Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo. Descentralizó la enseñanza, permitiendo que las Comunidades Autónomas determinaran parte de los contenidos. Reestructuró las etapas educativas y amplió la educación obligatoria hasta los 16 años. Como os tiene que sonar, no incidimos más en ella y os dejamos las referencias por si tenéis curiosidad.

En 2002 se aprobó la LOCE, que no se llegó a aplicar, y en 2006 se aprueba la Ley Orgánica de Educación Introduce la asignatura de Educación para la Ciudadanía y las competencias básicas.

En 2013 se aprueba la Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa.

En 2020 encontramos la Ley Orgánica por la que se modifica la LOE de 2006, actualmente en vigor, y que substituye a la LOMCE anteriormente en vigor.

Tras una serie de modificaciones en cascada de las leyes educativas y de la promulgación de varios Reales Decretos que gestionan diferentes aspectos de la educación no universitaria, se promulga la Orden de 15 de Enero de 2021, en la que se desarrolla el currículo para la Educación Primaria en Andalucía.

Ahora mismo estamos en una situación muy divertida, aplicando el Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria, que todavía no se ha desarrollado en Andalucía.

Habréis podido observar que la evolución de las leyes educativas es un proceso en el que se pretende garantizar una educación generalizada a la sociedad. Ha sido un camino no exento de problemas, confrontaciones y desacuerdos. Pero, aun así, representa la necesidad que tenemos, como sociedad, de seguir avanzando.

11.2 El marco legal actual

El desarrollo curricular se organiza a partir de varios elementos troncales:

- Objetivos generales de etapa
- Competencias clave de etapa
- Competencias específicas del área

Además encontramos los Criterios de evaluación y Saberes básicos, que se organizan alrededor de las competencias específicas, sin que haya asociación directa entre los primeros y los segundos, sino que tienen una relación múltiple.

Vamos a estudiar los elementos que nos permiten construir el desarrollo de nuestra práctica:

11.2.1 Los saberes básicos en Matemáticas

Los saberes básicos se organizan en torno a diversas formas de sentido matemático:

- Sentido numérico: destrezas, comprensión y representaciones numéricas.
- Sentido de la medida: comprensión, comparación y manipulación de atributos de los objetos mediante medidas.
- Sentido espacial: identificación, representación y clasificación de formas, sus propiedades y relaciones, etc.
- Sentido algebraico: reconocimiento de patrones y relaciones entre variables, y modelización con expresiones simbólicas.
- Sentido estocástico: razonamiento e interpretación de datos, valoración crítica y toma de decisiones a partir de información estadística.
- Sentido socioafectivo: conocimientos, destrezas y actitudes esenciales para entender las emociones.

Cada sentido identifica un cuerpo de contenidos y conceptos relacionados fuertemente entre sí.

11.2.2 Las competencias específicas

Las competencias específicas del área de Matemáticas se pueden resumir como:

1. Interpretación y representación, a través de las Matemáticas, de situaciones de la vida diaria.
   Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: STEM1, STEM2, STEM4, CD2, CPSAA5, CE1, CE3, CCEC4.
2. Resolución de problemas mediante diversas técnicas y formas de razonamiento, comprobando la validez formal y con respecto al contexto. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: STEM1, STEM2, CPSAA4, CPSAA5, CE3.
3. Explorar, formular y comprobar conjeturas sencillas, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación (CCL1, STEM1, STEM2, CD1, CD3, CD5, CE3).
4. Pensamiento computacional, organización de datos, descomposición en partes, patrones, construcción algoritmos ... (STEM1, STEM2, STEM3, CD1, CD3, CD5, CE3).
5. Relacionar las diferentes ramas de las Matemáticas y con otras áreas o la vida cotidiana (STEM1, STEM3, CD3, CD5, CC4, CCEC1).
6. Comunicación y representación de conceptos y resultados matemáticos, lenguaje oral, escrito, gráfico, etc(CCL1, CCL3, STEM2, STEM4, CD1, CD5, CE3, CCEC4).
7. Desarrollar destrezas para la identificación y gestión emocional (STEM5, CPSAA1, CPSAA4, CPSAA5, CE2, CE3).
8. Destrezas sociales (CCL5, CP3, STEM3, CPSAA1, CPSAA3, CC2, CC3).

Donde, los descriptores operativos son:

Competencia en comunicación lingüística (CCL)

Al completar la Educación Primaria, el alumno o la alumna	**Al completar la enseñanza básica, el alumno o la alumna**
CCL1. Expresa hechos, conceptos, pensamientos, opiniones o sentimientos de forma oral, escrita, signada o multimodal, con claridad y adecuación a diferentes contextos cotidianos de su entorno personal, social y educativo, y participa en interacciones comunicativas con actitud cooperativa y respetuosa, tanto para intercambiar información y crear conocimiento como para construir vínculos personales.	CCL1. Se expresa de forma oral, escrita, signada o multimodal con coherencia, corrección y adecuación a los diferentes contextos sociales, y participa en interacciones comunicativas con actitud cooperativa y respetuosa tanto para intercambiar información, crear conocimiento y transmitir opiniones, como para construir vínculos personales.
CCL3. Localiza, selecciona y contrasta, con el debido acompañamiento, información sencilla procedente de dos o más fuentes, evaluando su fiabilidad y utilidad en función de los objetivos de lectura, y la integra y transforma en conocimiento para comunicarla adoptando un punto de vista creativo, crítico y personal a la par que respetuoso con la propiedad intelectual.	CCL3. Localiza, selecciona y contrasta de manera progresivamente autónoma información procedente de diferentes fuentes, evaluando su fiabilidad y pertinencia en función de los objetivos de lectura y evitando los riesgos de manipulación y desinformación, y la integra y transforma en conocimiento para comunicarla adoptando un punto de vista creativo, crítico y personal a la par que respetuoso con la propiedad intelectual.
CCL5. Pone sus prácticas comunicativas al servicio de la convivencia democrática, la gestión dialogada de los conflictos y la igualdad de derechos de todas las personas, detectando los usos discriminatorios, así como los abusos de poder, para favorecer la utilización no solo eficaz sino también ética de los diferentes sistemas de comunicación.	CCL5. Pone sus prácticas comunicativas al servicio de la convivencia democrática, la resolución dialogada de los conflictos y la igualdad de derechos de todas las personas, evitando los usos discriminatorios, así como los abusos de poder, para favorecer la utilización no solo eficaz sino también ética de los diferentes sistemas de comunicación.

Competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería (STEM)

Al completar la Educación Primaria, el alumno o la alumna	**Al completar la enseñanza básica, el alumno o la alumna**
STEM1. Utiliza, de manera guiada, algunos métodos inductivos y deductivos propios del razonamiento matemático en situaciones conocidas, y selecciona y emplea algunas estrategias para resolver problemas reflexionando sobre las soluciones obtenidas.	STEM1. Utiliza métodos inductivos y deductivos propios del razonamiento matemático en situaciones conocidas, y selecciona y emplea diferentes estrategias para resolver problemas analizando críticamente las soluciones y reformulando el procedimiento, si fuera necesario.
STEM2. Utiliza el pensamiento científico para entender y explicar algunos de los fenómenos que ocurren a su alrededor, confiando en el conocimiento como motor de desarrollo, utilizando herramientas e instrumentos adecuados, planteándose preguntas y realizando experimentos sencillos de forma guiada.	STEM2. Utiliza el pensamiento científico para entender y explicar los fenómenos que ocurren a su alrededor, confiando en el conocimiento como motor de desarrollo, planteándose preguntas y comprobando hipótesis mediante la experimentación y la indagación, utilizando herramientas e instrumentos adecuados, apreciando la importancia de la precisión y la veracidad y mostrando una actitud crítica acerca del alcance y las limitaciones de la ciencia.
STEM3. Realiza, de forma guiada, proyectos, diseñando, fabricando y evaluando diferentes prototipos o modelos, adaptándose ante la incertidumbre, para generar en equipo un producto creativo con un objetivo concreto, procurando la participación de todo el grupo y resolviendo pacíficamente los conflictos que puedan surgir.	STEM3. Plantea y desarrolla proyectos diseñando, fabricando y evaluando diferentes prototipos o modelos para generar o utilizar productos que den solución a una necesidad o problema de forma creativa y en equipo, procurando la participación de todo el grupo, resolviendo pacíficamente los conflictos que puedan surgir, adaptándose ante la incertidumbre y valorando la importancia de la sostenibilidad.
STEM4. Interpreta y transmite los elementos más relevantes de algunos métodos y resultados científicos, matemáticos y tecnológicos de forma clara y veraz, utilizando la terminología científica apropiada, en diferentes formatos (dibujos, diagramas, gráficos, símbolos) y aprovechando de forma crítica, ética y responsable la cultura digital para compartir y construir nuevos conocimientos.	STEM4. Interpreta y transmite los elementos más relevantes de procesos, razonamientos, demostraciones, métodos y resultados científicos, matemáticos y tecnológicos de forma clara y precisa y en diferentes formatos (gráficos, tablas, diagramas, fórmulas, esquemas, símbolos...), aprovechando de forma crítica la cultura digital e incluyendo el lenguaje matemático-formal con ética y responsabilidad, para compartir y construir nuevos conocimientos.
STEM5. Participa en acciones fundamentadas científicamente para promover la salud y preservar el medio ambiente y los seres vivos, aplicando principios de ética y seguridad y practicando el consumo responsable.	STEM5. Emprende acciones fundamentadas científicamente para promover la salud física, mental y social, y preservar el medio ambiente y los seres vivos; y aplica principios de ética y seguridad en la realización de proyectos para transformar su entorno próximo de forma sostenible, valorando su impacto global y practicando el consumo responsable.

Competencia digital (CD)

Al completar la Educación Primaria, el alumno o la alumna	**Al completar la enseñanza básica, el alumno o la alumna**
CD1. Realiza búsquedas guiadas en internet y hace uso de estrategias sencillas para el tratamiento digital de la información (palabras clave, selección de información relevante, organización de datos...) con una actitud crítica sobre los contenidos obtenidos.	CD1. Realiza búsquedas en internet atendiendo a criterios de validez, calidad, actualidad y fiabilidad, seleccionando los resultados de manera crítica y archivándolos, para recuperarlos, referenciarlos y reutilizarlos, respetando la propiedad intelectual.
CD2. Crea, integra y reelabora contenidos digitales en distintos formatos (texto, tabla, imagen, audio, vídeo, programa informático...) mediante el uso de diferentes herramientas digitales para expresar ideas, sentimientos y conocimientos, respetando la propiedad intelectual y los derechos de autor de los contenidos que reutiliza.	CD2. Gestiona y utiliza su entorno personal digital de aprendizaje para construir conocimiento y crear contenidos digitales, mediante estrategias de tratamiento de la información y el uso de diferentes herramientas digitales, seleccionando y configurando la más adecuada en función de la tarea y de sus necesidades de aprendizaje permanente.
CD3. Participa en actividades o proyectos escolares mediante el uso de herramientas o plataformas virtuales para construir nuevo conocimiento, comunicarse, trabajar cooperativamente, y compartir datos y contenidos en entornos digitales restringidos y supervisados de manera segura, con una actitud abierta y responsable ante su uso.	CD3. Se comunica, participa, colabora e interactúa compartiendo contenidos, datos e información mediante herramientas o plataformas virtuales, y gestiona de manera responsable sus acciones, presencia y visibilidad en la red, para ejercer una ciudadanía digital activa, cívica y reflexiva.
CD5. Se inicia en el desarrollo de soluciones digitales sencillas y sostenibles (reutilización de materiales tecnológicos, programación informática por bloques, robótica educativa) para resolver problemas concretos o retos propuestos de manera creativa, solicitando ayuda en caso necesario.	CD5. Desarrolla aplicaciones informáticas sencillas y soluciones tecnológicas creativas y sostenibles para resolver problemas concretos o responder a retos propuestos, mostrando interés y curiosidad por la evolución de las tecnologías digitales y por su desarrollo sostenible y uso ético.

Competencia personal, social y de aprender a aprender (CPSAA)

Al completar la Educación Primaria, el alumno o la alumna	**Al completar la enseñanza básica, el alumno o la alumna**
CPSAA1. Es consciente de las propias emociones, ideas y comportamientos personales y emplea estrategias para gestionarlas en situaciones de tensión o conflicto, adaptándose a los cambios y armonizándolos para alcanzar sus propios objetivos.	CPSAA1. Regula y expresa sus emociones, fortaleciendo el optimismo, la resiliencia, la autoeficacia y la búsqueda de propósito y motivación hacia el aprendizaje, para gestionar los retos y cambios y armonizarlos con sus propios objetivos.
CPSAA3. Reconoce y respeta las emociones y experiencias de las demás personas, participa activamente en el trabajo en grupo, asume las responsabilidades individuales asignadas y emplea estrategias cooperativas dirigidas a la consecución de objetivos compartidos.	CPSAA3. Comprende proactivamente las perspectivas y las experiencias de las demás personas y las incorpora a su aprendizaje, para participar en el trabajo en grupo, distribuyendo y aceptando tareas y responsabilidades de manera equitativa y empleando estrategias cooperativas.
CPSAA4. Reconoce el valor del esfuerzo y la dedicación personal para la mejora de su aprendizaje y adopta posturas críticas en procesos de reflexión guiados.	CPSAA4. Realiza autoevaluaciones sobre su proceso de aprendizaje, buscando fuentes fiables para validar, sustentar y contrastar la información y para obtener conclusiones relevantes.
CPSAA5. Planea objetivos a corto plazo, utiliza estrategias de aprendizaje autorregulado y participa en procesos de auto y coevaluación, reconociendo sus limitaciones y sabiendo buscar ayuda en el proceso de construcción del conocimiento.CPSAA5.	Planea objetivos a medio plazo y desarrolla procesos metacognitivos de retroalimentación para aprender de sus errores en el proceso de construcción del conocimiento.

Competencia ciudadana (CC)

Al completar la Educación Primaria, el alumno o la alumna	**Al completar la enseñanza básica, el alumno o la alumna**
CC2. Participa en actividades comunitarias, en la toma de decisiones y en la resolución de los conflictos de forma dialogada y respetuosa con los procedimientos democráticos, los principios y valores de la Unión Europea y la Constitución española, los derechos humanos y de la infancia, el valor de la diversidad, y el logro de la igualdad de género, la cohesión social y los Objetivos de Desarrollo Sostenible.	CC2. Analiza y asume fundadamente los principios y valores que emanan del proceso de integración europea, la Constitución española y los derechos humanos y de la infancia, participando en actividades comunitarias, como la toma de decisiones o la resolución de conflictos, con actitud democrática, respeto por la diversidad, y compromiso con la igualdad de género, la cohesión social, el desarrollo sostenible y el logro de la ciudadanía mundial.
CC3. Reflexiona y dialoga sobre valores y problemas éticos de actualidad, comprendiendo la necesidad de respetar diferentes culturas y creencias, de cuidar el entorno, de rechazar prejuicios y estereotipos, y de oponerse a cualquier forma de discriminación o violencia.	CC3. Comprende y analiza problemas éticos fundamentales y de actualidad, considerando críticamente los valores propios y ajenos, y desarrollando juicios propios para afrontar la controversia moral con actitud dialogante, argumentativa, respetuosa y opuesta a cualquier tipo de discriminación o violencia.
CC4. Comprende las relaciones sistémicas entre las acciones humanas y el entorno, y se inicia en la adopción de estilos de vida sostenibles, para contribuir a la conservación de la biodiversidad desde una perspectiva tanto local como global.	CC4. Comprende las relaciones sistémicas de interdependencia, ecodependencia e interconexión entre actuaciones locales y globales, y adopta, de forma consciente y motivada, un estilo de vida sostenible y ecosocialmente responsable.

Competencia emprendedora (CE)

Al completar la Educación Primaria, el alumno o la alumna	**Al completar la enseñanza básica, el alumno o la alumna**
CE1. Reconoce necesidades y retos que afrontar y elabora ideas originales, utilizando destrezas creativas y tomando conciencia de las consecuencias y efectos que las ideas pudieran generar en el entorno, para proponer soluciones valiosas que respondan a las necesidades detectadas.	CE1. Analiza necesidades y oportunidades y afronta retos con sentido crítico, haciendo balance de su sostenibilidad, valorando el impacto que puedan suponer en el entorno, para presentar ideas y soluciones innovadoras, éticas y sostenibles, dirigidas a crear valor en el ámbito personal, social, educativo y profesional.
CE2. Identifica fortalezas y debilidades propias utilizando estrategias de autoconocimiento y se inicia en el conocimiento de elementos económicos y financieros básicos, aplicándolos a situaciones y problemas de la vida cotidiana, para detectar aquellos recursos que puedan llevar las ideas originales y valiosas a la acción.	CE2. Evalúa las fortalezas y debilidades propias, haciendo uso de estrategias de autoconocimiento y autoeficacia, y comprende los elementos fundamentales de la economía y las finanzas, aplicando conocimientos económicos y financieros a actividades y situaciones concretas, utilizando destrezas que favorezcan el trabajo colaborativo y en equipo, para reunir y optimizar los recursos necesarios que lleven a la acción una experiencia emprendedora que genere valor.
CE3. Crea ideas y soluciones originales, planifica tareas, coopera con otros en equipo, valorando el proceso realizado y el resultado obtenido, para llevar a cabo una iniciativa emprendedora, considerando la experiencia como una oportunidad para aprender.	CE3. Desarrolla el proceso de creación de ideas y soluciones valiosas y toma decisiones, de manera razonada, utilizando estrategias ágiles de planificación y gestión, y reflexiona sobre el proceso realizado y el resultado obtenido, para llevar a término el proceso de creación de prototipos innovadores y de valor, considerando la experiencia como una oportunidad para aprender.

Competencia en conciencia y expresión culturales (CCEC)

Al completar la Educación Primaria, el alumno o la alumna	**Al completar la enseñanza básica, el alumno o la alumna**
CCEC1. Reconoce y aprecia los aspectos fundamentales del patrimonio cultural y artístico, comprendiendo las diferencias entre distintas culturas y la necesidad de respetarlas.	CCEC1. Conoce, aprecia críticamente y respeta el patrimonio cultural y artístico, implicándose en su conservación y valorando el enriquecimiento inherente a la diversidad cultural y artística.
CCEC4. Experimenta de forma creativa con diferentes medios y soportes, y diversas técnicas plásticas, visuales, audiovisuales, sonoras o corporales, para elaborar propuestas artísticas y culturales.	CCEC4. Conoce, selecciona y utiliza con creatividad diversos medios y soportes, así como técnicas plásticas, visuales, audiovisuales, sonoras o corporales, para la creación de productos artísticos y culturales, tanto de forma individual como colaborativa, identificando oportunidades de desarrollo personal, social y laboral, así como de emprendimiento.

11.2.3 Criterios de evaluación

A continuación se desarrollan los criterios de evaluación organizados por cada uno de los tres ciclos. En cada ciclo se desarrollan las Competencias Específicas y los Saberes Básicos que han de formar el esqueleto de la evaluación.

Por ejemplo, en el tercer ciclo encontramos indicadas las competencias:

- Competencia específica 1.
  1.1 Comprender problemas de la vida cotidiana a través de la reformulación de la pregunta, de forma verbal y gráfica.
  1.2 Elaborar representaciones matemáticas que ayuden en la búsqueda y elección de estrategias y herramientas, incluidas las tecnológicas, para la resolución de una situación problematizada.
- Competencia específica 2.
  2.1 Seleccionar entre diferentes estrategias para resolver un problema, justificando la elección.
  2.2 Obtener posibles soluciones de un problema, seleccionando entre varias estrategias conocidas de forma autónoma.
  2.3 Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema y su coherencia en el contexto planteado.
- Competencia específica 3.
  3.1 Formular conjeturas matemáticas sencillas investigando patrones, propiedades y relaciones de forma guiada.
  3.2 Plantear nuevos problemas sobre situaciones cotidianas que se resuelvan matemáticamente.
- Competencia específica 4.
  4.1 Modelizar situaciones de la vida cotidiana utilizando, de forma pautada, principios básicos del pensamiento computacional.
  4.2 Emplear herramientas tecnológicas adecuadas en la investigación y resolución de problemas.
- Competencia específica 5.
  5.1 Utilizar conexiones entre diferentes elementos matemáticos movilizando conocimientos y experiencias propios.
  5.2 Utilizar las conexiones entre las matemáticas, otras áreas y la vida cotidiana para resolver problemas en contextos no matemáticos.
- Competencia específica 6.
  6.1 Interpretar el lenguaje matemático sencillo presente en la vida cotidiana en diferentes formatos, adquiriendo vocabulario apropiado y mostrando la comprensión del mensaje.
  6.2 Comunicar en diferentes formatos las conjeturas y procesos matemáticos, utilizando lenguaje matemático adecuado.
- Competencia específica 7.
  7.1 Autorregular las emociones propias y reconocer algunas fortalezas y debilidades, desarrollando así la autoconfianza al abordar retos matemáticos.
  7.2 Elegir actitudes positivas ante retos matemáticos, tales como la perseverancia y la res-

ponsabilidad, valorando el error como una oportunidad de aprendizaje.

- Competencia específica 8.
  - 8.1 Trabajar en equipo activa, respetuosa y responsablemente, mostrando iniciativa, comunicándose de forma efectiva, valorando la diversidad, mostrando empatía y estableciendo relaciones saludables basadas en el respeto, la igualdad y la resolución pacífica de conflictos.
  - 8.2 Colaborar en el reparto de tareas, asumiendo y respetando las responsabilidades individuales asignadas y empleando estrategias de trabajo en equipo sencillas dirigidas a la consecución de objetivos compartidos.

Como veréis son una particularización de las competencias específicas vistas más arriba. A continuación se desarrollan los Saberes Básicos, que se separan en los Sentidos Matemáticos indicados arriba. En nuestro caso nos interesa especialmente el punto “C. Sentido espacial”, que en el tercer ciclo se encuentra como:

1. Figuras geométricas de dos y tres dimensiones.
   - Figuras geométricas en objetos de la vida cotidiana: identificación y clasificación atendiendo a sus elementos y a las relaciones entre ellos.
   - Técnicas de construcción de figuras geométricas por composición y descomposición, mediante materiales manipulables, instrumentos de dibujo y aplicaciones informáticas.
   - Vocabulario geométrico: descripción verbal de los elementos y las propiedades de figuras geométricas.
   - Propiedades de figuras geométricas: exploración mediante materiales manipulables (cuadrículas, geoplanos, policubos, etc.) y herramientas digitales (programas de geometría dinámica, realidad aumentada, robótica educativa, etc.).
2. Localización y sistemas de representación.
   - Localización y desplazamientos en planos y mapas a partir de puntos de referencia (incluidos los puntos cardinales), direcciones y cálculo de distancias (escalas): descripción e interpretación con el vocabulario adecuado en soportes físicos y virtuales.
   - Descripción de posiciones y movimientos en el primer cuadrante del sistema de coordenadas cartesiano.
3. Movimientos y transformaciones.
   - Transformaciones mediante giros, traslaciones y simetrías en situaciones de la vida cotidiana: identificación de figuras transformadas, generación a partir de patrones iniciales y predicción del resultado.
   - Semejanza en situaciones de la vida cotidiana: identificación de figuras semejantes, generación a partir de patrones iniciales y predicción del resultado.
4. Visualización, razonamiento y modelización geométrica.
   - Estrategias para el cálculo de áreas y perímetros de figuras planas en situaciones de la vida cotidiana.
   - Modelos geométricos en la resolución de problemas relacionados con los otros sentidos.
   - Elaboración de conjeturas sobre propiedades geométricas, utilizando instrumentos de dibujo (compás y transportador de ángulos) y programas de geometría dinámica.
   - Las ideas y las relaciones geométricas en el arte, las ciencias y la vida cotidiana.

11.2.4 Situaciones de aprendizaje

El concepto metodológico que soporta a esta nueva ley es el de Situaciones de Aprendizaje. Se pretende con ella que se construyan situaciones progresivas de adquisición de capacidades, que fomente la autogestión y el Aprender a Aprender. El cómo llevar este planteamiento a la realidad es el gran caballo de batalla que nos estamos encontrando en los centros. Se ha optado en ocaciones por el aprendizaje por proyectos que, si bien no corresponden exactamente al concepto propuesto, si se acerca muchísimo más que la clase magistral.

En los próximos meses veremos como discurre todo este galimatías.

11.3 Resumen

Para desarrollar una intervención empezaría por el nivel y los Saberes Básicos y las Competencias Específicas a desarrollar en ese nivel. Estos elementos determinarán las capacidades que quiero desarrollar en mis estudiantes.

Con esta información construyo una secuencia de situaciones de aprendizaje que lleven a la consecución de esos objetivos.

A continuación se proporcionan algunas orientaciones para el desarrollo de una Unidad Didáctica específica de geometría o la integración de aspectos geométricos en proyectos educativos más amplios, con el proposito de ubicarlo en un Proyecto de Intervención que se os pedirá próximamente.

1. Se selecciona un contenido puntual, en nuestro caso del currículum de Geometría, y las capacidades específicas que se pretende desarrollar, en alguno de los ciclos de Educación Primaria.
   Es importante que la selección de ese contenido se sitúe en el marco legislativo y se contextualice en los elementos del currículum escolar desarrollados en el Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria, mientras no tengamos la orden para Andalucía: Competencias Básicas y Saberes Básicos. A partir de ellos obtengo los Descriptores Operativos correspondientes.
2. Realizada esta inmersión en el marco legislativo, se procede con la búsqueda de información en libros de textos, revistas electrónicas, consultas en internet y cuantas fuentes de información podamos obtener; esta segunda fase también supone el análisis de esa información.
3. Se procede a preparar el propio proyecto de intervención, que tendrá un extensión de entre dos y cuatro páginas y en el que señalaremos:
   - *Portada*: con Titulo del proyecto, autor, grupo. Asignatura. Curso. Grado.
   - *Introducción-Descripción*: Titulo del proyecto, justificación e importancia: valor de la geometría, propósito del diseño, etapa-curso con la posibilidad de describir el contexto escolar en el que se desarrollará, marco legislativo, duración-temporización.
   - *Soporte legal* seleccionado para el desarrollo de esta Unidad. ąąąNo todo!!! Sólo lo que he usado y me interesa.

- *Metodología aplicada*: características de nuestra metodología, tipos de agrupamientos.
- *Recursos y materiales didácticos* a utilizar, sin olvidar las posibilidades que nuestro entono nos proporciona.
- *Actividades-tareas* a realizar por el alumno y el profesor.

  En este punto es conveniente que haya coherencia con los apartados anteriores. Es muy importante que las actividades-tareas sean realmente formativas, para lo cual es necesario que sean motivadoras, interesantes, lúdicas, divertidas, manipulativas y que permitan la participación de los alumnos y el trabajo colaborativo.

  También es de valorar que ofrezcan una continuidad que fomente la consecución de los objetivos y no una colección de actividades desconectadas.

  Es conveniente que contemos con tareas con aplicación practicas, juegos, pasatiempos, problemas cotidianos, etc.
- *Evaluación*. En este apartado se describirá el tipo de evaluación que llevaremos a cabo, sus características y los procedimientos que utilizaremos para valorar el grado de cumplimiento de los objetivos planteados. Recordad los elementos seleccionados del marco legal.
- *Bibliografía*.

La mayoría de estos pasos serán los mismos para la realización de una Unidad Didáctica cuando estéis en vuestros trabajos en el futuro. Así que es importante que asimiléis el proceso lo mejor posible.

Recursos didácticos y talleres

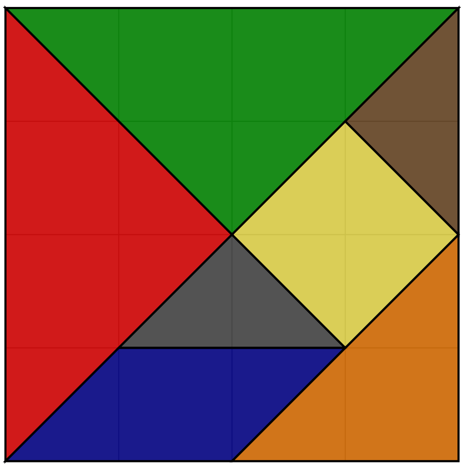
12

Geometría plana: Geoplanos y tangram

12.1 Tangram

12.1.1 Tangram clásico

El tangram clásico es un juego chino muy antiguo que consiste en formar siluetas de figuras con siete piezas, sin solaparlas. Las siete figuras se consiguen dividiendo un cuadrado y está formado por cinco triángulos isósceles y rectángulos (2+1+2), un cuadrado y un paralelogramo.

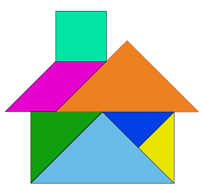


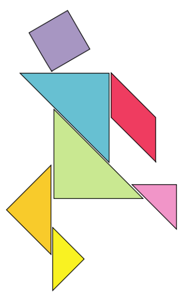
Puesto que, al formar las diferentes siluetas, han de formarse con todas las piezas, la figura resultante siempre tiene el mismo área.

Como curiosidad, hay piezas con distintas formas y la misma superficie, £eres capaz de encontrarlas?

Su origen es incierto y está rodeada de leyendas. Llegó a conocerse en Europa y Estados Unidos a principios del siglo XIX y su popularidad fue creciendo por su carácter lúdico y educativo. En la actualidad hay numerosos juegos y juguetes infantiles basados en él, al igual que diversas variantes, como se verá más adelante.

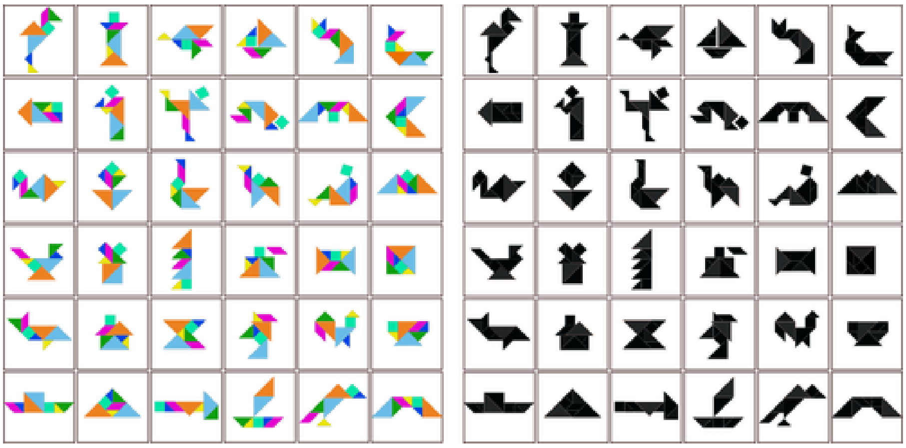
Puede ayudar a la percepción espacial y visual, además de la artística, a partir de la recreación de figuras o escenas





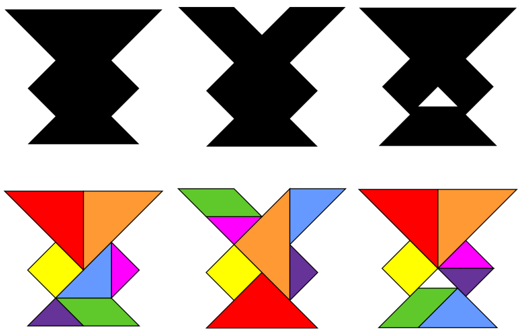
`https://pixabay.com/es/vectors/rompecabezas-chino-tangram-juego-28908/https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Tangram-man.svg`

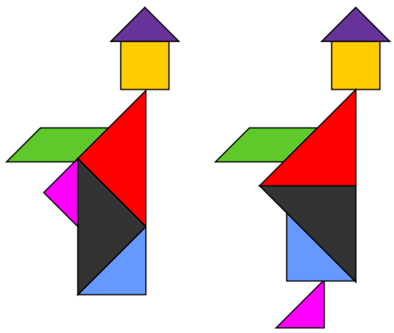
Se puede proporcionar un peril, como los de las figuras de la derecha, y que los discentes lleven a cabo la distribución que les lleva a la correspondiente figura, como se refleja en la izquierda.



https://publicdomainvectors.org/es/vectoriales-gratuitas/Predise%C3%B1adas-Tangram-vector-juego-matem%C3%A1tico/12529.html

Se pueden establecer problemas con medidas como las denominadas “paradojas”, en las que figuras aparentemente iguales, se diferencian en alguna pequeña característica. Suele corresponder a la redistribución de la superficie de una forma tan ligeramente diferente que a simple vista no lo percibimos. Aunque, normalmente, estos problemas exceden la capacidad de los alumnos de primaria.





https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:The_Magic_Dice_Cup_tangram_paradox.svg

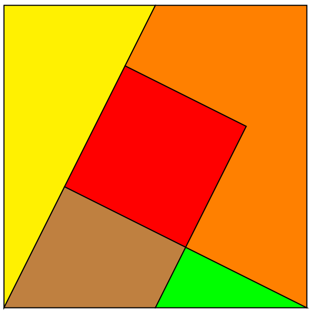
https://es.m.wikipedia.org/wiki/Archivo:Two_monks_tangram_paradox.svg

Si no se dispone de un tangram, se puede construir fácilmente, incluso como alfombras reconfigurables. Desde luego, un juego divertido para los niños.

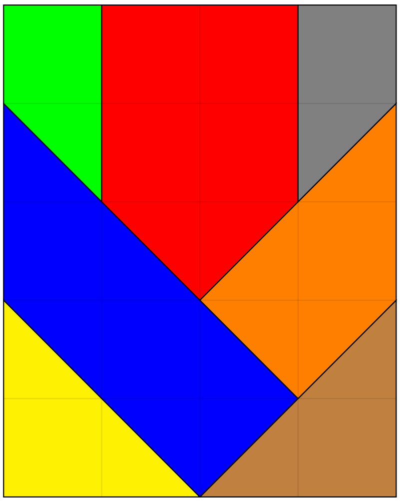
12.1.2 Otros tipos de tangram

Partiendo del mismo concepto, se han planteado otros tipos de tangram, como los siguientes:

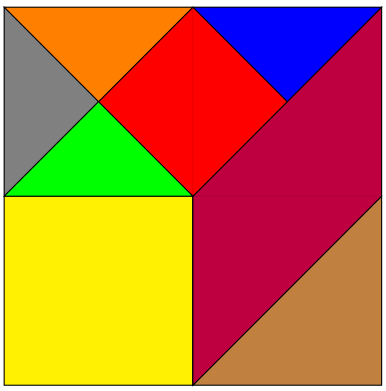
- *Tangram de Loyd*: Puedes ver desarrollos con este juego en `https://profmate.wordpress.com/2015/06/02/problemas-rompecabezas-y-tangram/`.



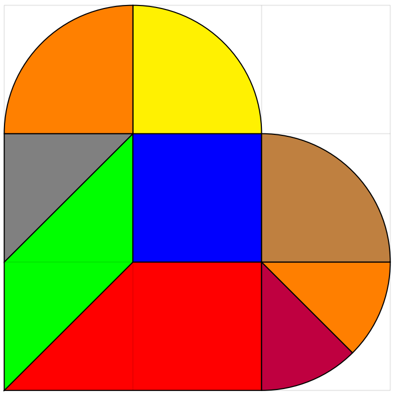
- *Tangram pitagórico*: Es una división de un rectángulo de 4×5.



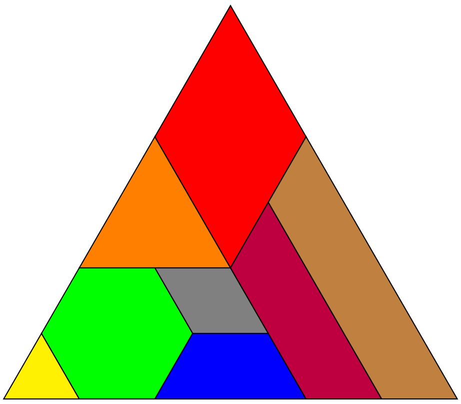
- Otro tangram también denominado *Tangram Pitagórico*: Puedes encontrar ejercicios y desarrollos en `https://profmate.wordpress.com/2014/04/08/pitagorico/`.



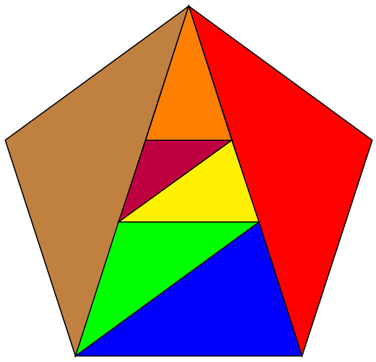
- *Cardiotangram*:



- *Tangram triangular*:



- También hay un Tangram pentagonal.



- Incluso hay un tangram *ovoide* o *ovotangram*, que podéis ver en `https://profmate.wordpress.com/2014/03/06/galeria-oval/`.

12.1.3 Aplicaciones del Tangram

El trabajo con una herramienta tan visual y manipulativa estimula múltiples capacidades:

- Visión espacial
- Técnicas de construcción geométrica
- Resolución de problemas
- Aplicación intuitiva de conceptos matemáticos

Y se puede utilizar en múltiples contextos, como:

- Manipulación de figuras elementales
- Clasificación de polígonos
- Elementos de los triángulos
- Clasificación de triángulos
- Teorema de Pitágoras
- Perímetros y áreas (medidas de longitud y superficie)
- Semejanza de figuras planas (razón se semejanza en longitudes y superficies).
- Medidas aproximadas y exactas
- Números racionales e irracionales
- Fracciones y porcentajes

Se puede ver que practicamente toda la geometría plana se puede plantear o, al menos, introducir partiendo de este puzzle.

12.1.4 Algo divertido sobre la historia del Tangram Chino

En el libro Viajes por el mundo Martin Gardner, cuenta lo siguiente:

> Muchos libros, e incluso algunas enciclopedias, declaran que el juego de los tangrams tiene unos 4000 años de antigüedad. En mi artículo de Scientific American de septiembre de 1959, afirmaba yo que los tangrams eran el más antiguo de los juegos de disección, y añadía que los chinos habían estado entreteniéndose con ellos desde hacía miles de años. Estas afirmaciones son enteramente erróneas. La persona responsable de semejante mito no es otro que Sam Loyd. En 1.903, cuando Loyd contaba 61 años y se hallaba en el pináculo de su fama, publicó un librito (extremadamente raro en la actualidad) titulado The Eighth Book of Tan (El octavo libro del tan). Ningún otro libro publicado en Occidente sobre los tangrams ha sido más original ni ha ejercido tan poderosa influencia. Además de contener centenares de figuras nuevas y excelentes, Loyd inventó una absurda leyenda acerca de los orígenes del pasatiempo. Ha sido la mayor tomadura de pelo de toda la historia de los rompecabezas, y el número de personas inteligentes que se dejaron atrapar por ella rivaliza con el de eruditos que se tragaron la espúrea historia de la bañera de H.L. Mencken.
>
> “Según el fallecido profesor Challenor -escribió Loyd-, cuyos documentos póstumos han quedado en posesión del autor, se sabe que hace más de cuatro mil años fueron compilados en China siete libros de tangrams, cada uno de los cuales contiene mil

diseños o tangrams. Estos libros son tan raros, que el profesor Challenor declara que a lo largo de cuarenta años de residencia en China tan sólo alcanzó a ver ediciones perfectas de los volúmenes primero y séptimo, así como fragmentos dispersos del segundo”

“A este respecto, es preciso mencionar que un soldado inglés descubrió en Pekín partes de uno de los libros, que estaba impreso con pan de oro sobre pergamino, y que las vendió por 300 libras a un coleccionista de antigüedades chinas, quien tuvo la bondad de facilitarme algunos de los más exquisitos diseños presentados en esta obra”

Según Loyd, Tan fue un legendario escritor Chino, adorado como una deidad. La organización de las figuras de sus siete libros se proponía mostrar siete estadios de la evolución de la Tierra. Sus tangrams comienzan con representaciones simbólicas del caos y del principio ying-yang. Siguen a éstos seres vivientes primitivos y estas figuras van ascendiendo por el árbol de la evolución, pasando por peces, pájaros y animales, hasta llegar a la especie humana. Dispersos por el camino podemos ver artefactos humanos, como escabeles, muebles, vestidos y obras arquitectónicas. Loyd salpica el viaje con aforismos de Confucio, y con citas de un filósofo llamado Chufutsé, de un comentarista llamado Li Hung Chang, y de su mítico profesor Challenor. Por ejemplo, se cita a Chang afirmando que conocía ya la totalidad de las figuras de los siete libros desde antes incluso de haber aprendido a hablar. Y no faltan alusiones a un “conocido” refrán chino, que habla del “loco que quiso el octavo libro de Ta”.

Como es obvio, todo lo anterior es pura fabulación. Cuando Henry Ernest Dudeney, el equivalente británico de Loyd, escribió un artículo sobre los tangrams para The Strand Magazine (noviembre de 1.908), repitió con toda seriedad el legendario cuento de Loyd. El artículo de Dudeney suscitó la curiosidad de sir James Murria, distinguido lexicógrafo y uno de los redactores del Oxford English Dictionary, quien hizo indagaciones por medio de uno de sus hijos, que se encontraba a la sazón enseñando en una universidad china. El juego, informó Murria a Dudeney, es conocido en china con el nombre de ch’i ch’iao t’u, que significa “siete-ingenioso plan” o , menos literalmente, “ingenioso rompecabezas de siete piezas”.

Murray no pudo hallar rastro de la palabra tangram en fecha anterior a 1864, en que figura en un diccionario de Webster. Debió de ser acuñada, conjeturó Murray, hacia 1850, por un americano que probablemente combinó la palabra tang, voz que significa “chino” en cantonés, con el familiar sufijo -grama, como en anagrama o criptograma. Recientemente, Meter Van Note ha propuesto acerca de este nombre una teoría diferente, que expone en su introducción a una reimpresión del imaginativo libro de Loyd que ha realizado Dover. Las familias chinas que viven en barcazas y lanchones de rio son llamadas tanka, y tan es una palabra china que significa prostituta. Es posible que los marinos americanos, a quienes las chicas tanka pudieron haber enseñado estos rompecabezas, dieran en llamarlos tangrams, los rompecabezas de las prostitutas.

Cuando Dudeney dio cuenta de las opiniones de Murray, en Amusements in Mathematics (pp 43-46), pudo haber añadido una broma de su cosecha. Un corresponsal americano, escribe Dudeney, le había informado de que poseía un juego chino de piezas de tan, talladas en madreperla, acompañado de un librito en papel de arroz, que contenía más de trescientas figuras. El corresponsal de Dudeney estaba intrigado por una misteriosa inscripción de la portada que había tratado de hacerse traducir, pero que ninguno de los chinos a quienes se la había mostrado había sido capaz de leérsela, o no estaba dispuesto a hacerlo. Dudeney reproducía la inscripción, solicitando ayuda de los lectores. Desconocemos qué respuesta tuvo su petición, pero Read, que posee un ejemplar del mismo librito, no tuvo dificultad en aclarar el misterio. La inscripción no es más que un texto al pie de los tangrams de dos hombres, y reza como sigue: "Dos hombres, uno frente a otro, bebiendo. Lo cual muestra la versatilidad del juego de las siete piezas".

12.1.5 Recursos online

En Internet podemos encontrar un número considerable de páginas interesantes acerca del tangram.

- Sobre construcción de Tangrams
  - `https://www.youtube.com/watch?v=7wWQWUWHr5U`
  - `https://www.youtube.com/watch?v=UjPrUObkMoY`
- Figuras geometrias con Tangrams
  - `https://www.youtube.com/watch?v=ktwV31Q7uqA`
  - `https://www.youtube.com/watch?v=9uPz16aF6ZI`
- Tangrams de animales
  - `https://www.youtube.com/watch?v=kaneUyPPw4o`

12.2 Geoplano

El Geoplano consiste en una superficie sobre la que se organizan de forma regular una serie de pivotes sobre los que se pueden, con hilos o gomillas de colores, construir formas geométricas y desarrollar, de forma manipulativa, sus propiedades a través de la experimentación.

Lo inventó el matemático y pedagógo egipcio Caleb Gattegno en 1960 para enseñar geometría a niños pequeños.

Es muy fácil de construir, pudiéndose hacer con cualquier plancha de madera y unos clavos o chinchetas. Incluso el proceso de construirse un geoplano implica una serie de desarrollos y estrategias geométricas que son muy interesantes.

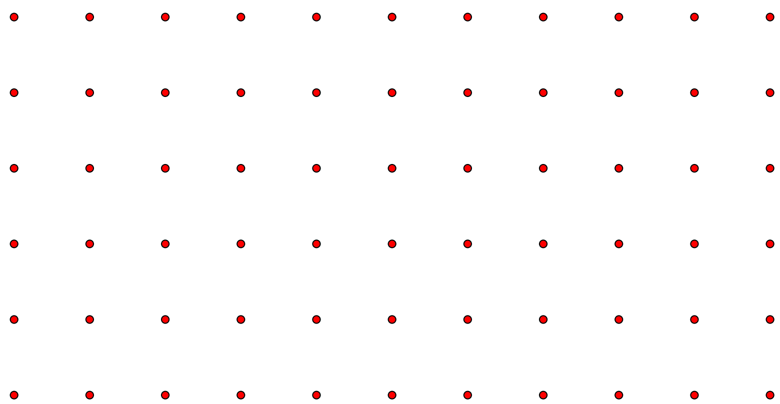
Los hay de diferentes tamaños, que viene determinado por el número de cuadrículas: desde 9 (3×3) hasta 121 (11×11).

Aunque es menos manipulativo, se puede trabajar sobre una hoja de papel cuadriculado o en el que se ha impreso la trama de puntos, dibujando.

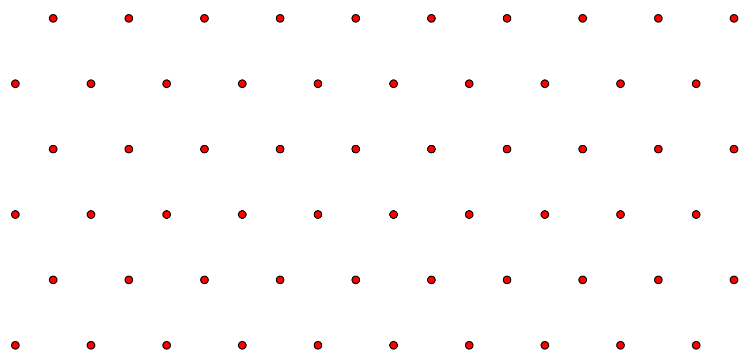
12.2.1 Tipos de geoplano

Se organizan en función del patrón de los pivotes. Los más comunes son:

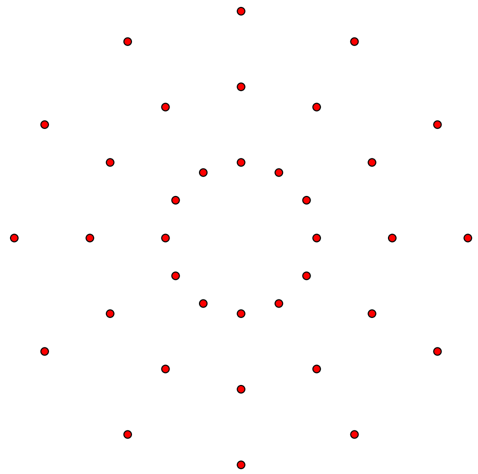
- *Geoplanos ortométricos*: los pivotes se distribuyen mediante una trama.



- *Geoplanos isométricos*: la trama forman triángulos equiláteros.

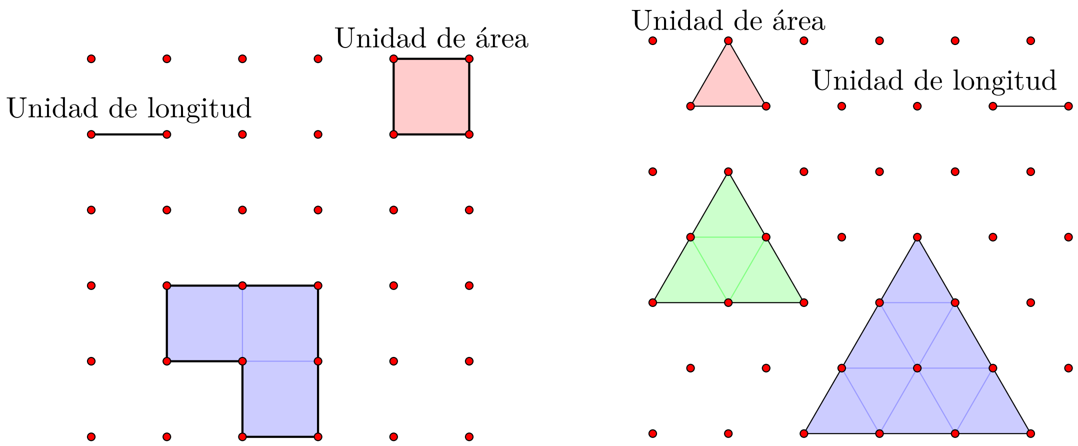


- *Geoplano circular*: los pivotes se disponen en una circunferencia.



A la hora de utilizarlo hay que tener en cuenta que las actividades a proponer se ajusten a la trama que subyace a la herramienta:

- Los vértices de los polígonos a construir deben estar situados sobre los puntos de la trama
- Las unidades de longitud deben corresponder a unidades de la trama
- En el caso de la trama cuadrada o triangular la unidad de superficie corresponderá al área entre puntos cercanos de la malla.

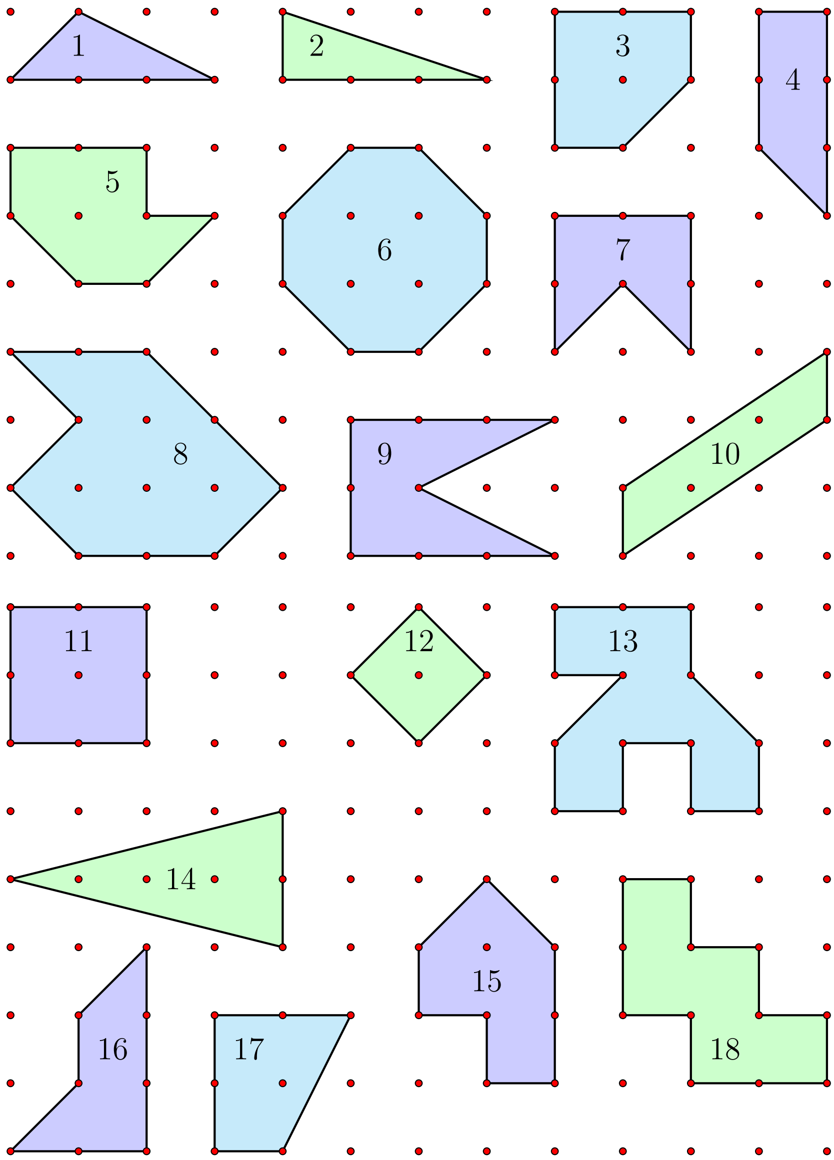


Es posible observar que es fácil de trabajar los conceptos de área y perímetros en estas construcciones:

- En la trama cuadrangular, la figura azul tendría perímetro 8. Tan sólo hay que contar los segmentos que forman el borde. Y el cálculo de área es similar, contando los cuadrados que están imbuidos, habiendo tres.
- En la trama triangular se procede de la misma forma, obteniéndose perímetros 6 y 9 y áreas 4 y 9 para los triángulos verde y azul, respectivamente.

Los geoplanos más recurrentes, debido al sistema de coordenadas cartesiano, que nos resulta muy cercano, y la aplicación del Teorema de Pitágoras para el cálculo de perímetros, es el Geoplano Ortométrico, de trama cuadrangular.

Se pueden desarrollar múltiples actividades alrededor de esta herramienta



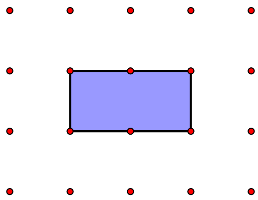
Como calcular el perímetro y el área de las figuras anteriores. O construir otros polígonos que tengan el mismo área. O construir otros polígonos con el mismo perímetro. Se propone, como ejercicio, realizar estas actividades.

A continuación vas a encontrar una serie de problemas que sería conveniente que trataras como un juego. Te recomiendo que cubras la continuación de la exposición y te centres en la parte que estás viendo en ese momento, y lleves a cabo por ti mismo la experiencia que se propone. El aprendizaje no estará en los resultados, sino en el procedimiento

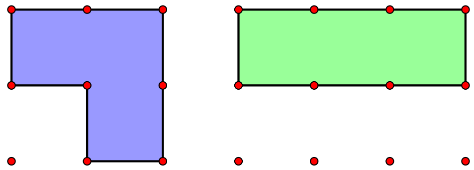
Necesitarás varias copias impresas de las páginas 24 y 27 (tampoco te pases).

Otra actividad muy interesante es la construcción de figuras mediante la unión de cuadrados, y puede estudiarse de forma muy fácil sobre una malla. A estas figuras se las denomina, genéricamente, poliminós.

Son muy conocidos los dominós, que sólo pueden hacerse con una configuración, salvo rotaciones y traslación, como la unión de dos cuadrados:



Si se consideran tres cuadrados, se tendrían los triminós, de los que hay sólo dos casos:

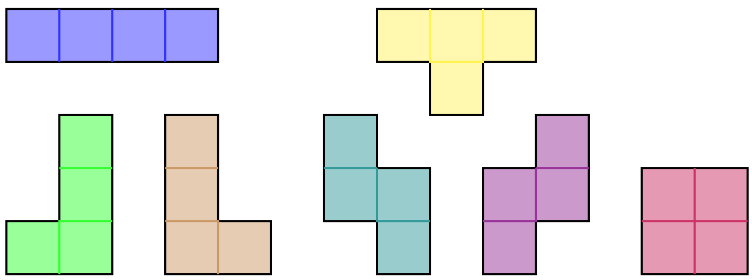


Continuemos este juego, y construye todos los posibles tetraminos. Un *tetramino* es un polígono compuesto por cuatro cuadrados. En los apéndices puedes encontrar patrones para imprimir y utilizar para trabajar.

Una vez encontrados los tetraminos, rellena una tabla con las áreas, perímetros y tamaño diagonal, que corresponde con la mayor distancia entre dos vértices del tetramino.

(Para aquí)

Si has hecho el trabajo anterior habrás obtenido unas figuras que, posiblemente, te suenen:



Efectivamente, el juego de Tetris se basa en los tetraminós. Hay sólo siete tetraminos, y si se consideran como equivalentes los que se pueden obtener como simetría, sólo hay cinco.

Los tetraminós se clasifican en función de las isometrías que se permiten para considerarlos congruentes:

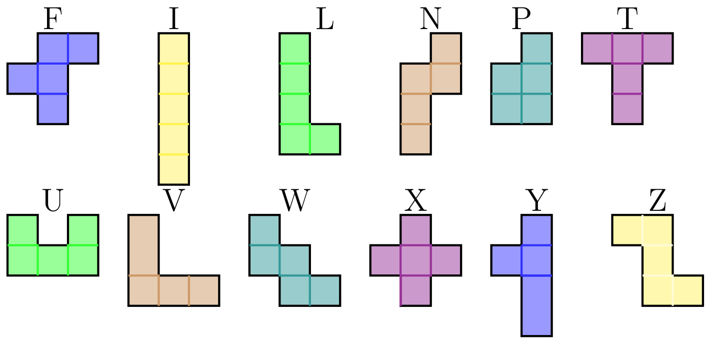
- *Tetrominós unilaterales*: son aquellos en los que se consideran congruentes si se pueden transformar unos en otros únicamente bajo las isometrías de traslación y giro. Bajo estas condiciones, hay siete tetraminós diferentes, que son los representados en la figura.
- *Tetraminós libres*: son aquellos en los que dos tetraminós se consideran congruentes si se pueden transformar unos en otros mediante traslación, giro y reflexión. En este caso sólo hay cinco, ya que dos parejas de las que se muestran en el dibujo se considerarían equivalentes.

- *Tetraminós fijos*: sólo se permite la traslación. Ni rotación ni traslación. En total hay 19. Puedes verificarlo girando las figuras.

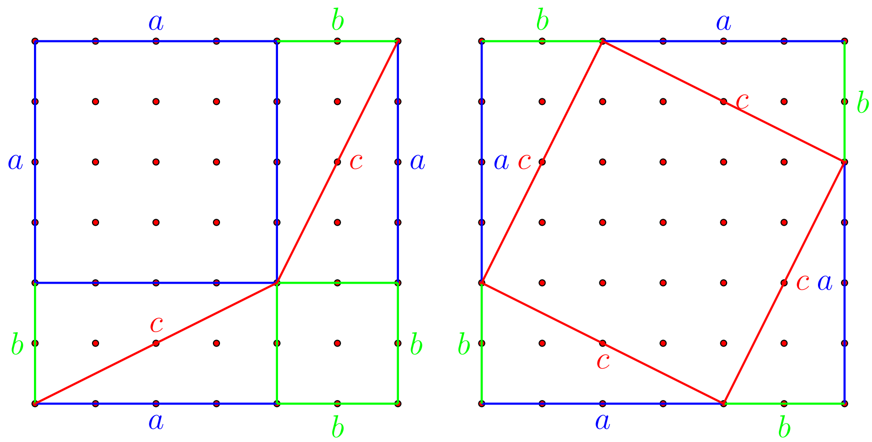
Vayamos un paso más allá ... £cómo será los pentaminos? Desarróllalos sobre una trama y vuelve a reflejar en una tabla su área, perímetro, y tamaño diagonal.

(Para aquí)

Deben de salirte doce pentaminos:



El Geoplano también permite hacer algunas demostraciones intuitivas, como la del Teorema de Pitágoras:



Y, por supuesto, el uso del Teorema de Pick para el cálculo de áreas, como se vio en el capítulo correspondiente, apoyándose en que un Geoplano es un caso particular de la aplicación de representación sobre malla.

13 MIRA y espejos: Transformaciones en el plano

13.1 Espejos

Un espejo es el mecanismo más natural para construir simetrías axiales. Además, se pueden conseguir muy baratos. Para el trabajo con niños es recomendable que sean de material plástico, y así evitar la posibilidad de roturas y cortes. He conseguido 10 espejos de un tamaño más que adecuado (15x10cm) construidos con material plástico por 20 euros.

El primer uso, y más evidente, del espejo es la identificación de un eje de simetría axial. Si situando el espejo sobre la figura soy capaz de ver, teniendo en cuenta la parte de la figura visible y la replicada en el espejo, la misma imagen que el original, he encontrado un eje de simetría.

Así, se puede ver que un círculo, un cuadrado o un triángulo equilatero o isósceles tienen ejes de simetría.

Figuras con simetrías: simetrías en letras:

De la misma forma, se pueden ver la simetría en letras. Un ejercicio que se podría proponer sería:

Utiliza un espejo para encontrar los ejes de simetría de las letras de abecedario:

A	B	C	D	E	F	G
H	I	J	K	L	M	N
Ñ	O	P	Q	R	S	T
U	V	W		X	Y	Z

Clasifica las letras en:

- Letras sin ejes de simetría:
- Letras con un eje de simetría:
    - Horizontal:

  - Vertical:
- Letras con dos ejes de simetría:
- Letras con más de dos ejes de simetría:

A partir de la simetría se pueden trabajar diferentes aspectos, como:

Perpendicularidad: si se coloca el espejo de forma que una línea siga "completamente recta" el espejo estará completamente perpendicular a dicha línea

Paralelismo: Si se coloca el espejo de forma paralela a una línea, su imagen también será paralela a la figura original. Así se demuestra la capacidad transitiva del paralelismo.

El uso de los espejos tiene múltiples aspectos didácticos y lúdicos. Se proponen algunos:

Lectura "al revés". Leer el texto reflejado en un espejo. Es un gran ejercicio de percepción.

Escribir "al revés". Creo que esto lo hemos hecho todos alguna vez. Escribir de forma que el reflejo en el espejo fuera legible. Leonardo da Vinci solía hacerlo habitualmente y tiene libros escritos de esa manera. Está comprobado, en el aprendizaje del dibujo artístico, que invertir un objeto al dibujarlo desarrolla enormemente la capacidad del estudiante.

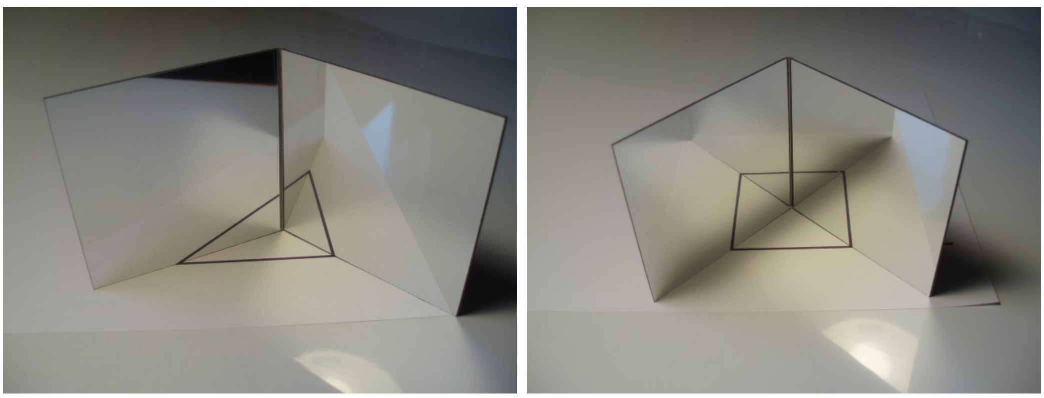
Se puede hacer viendo lo que se escribe o su reflejo.

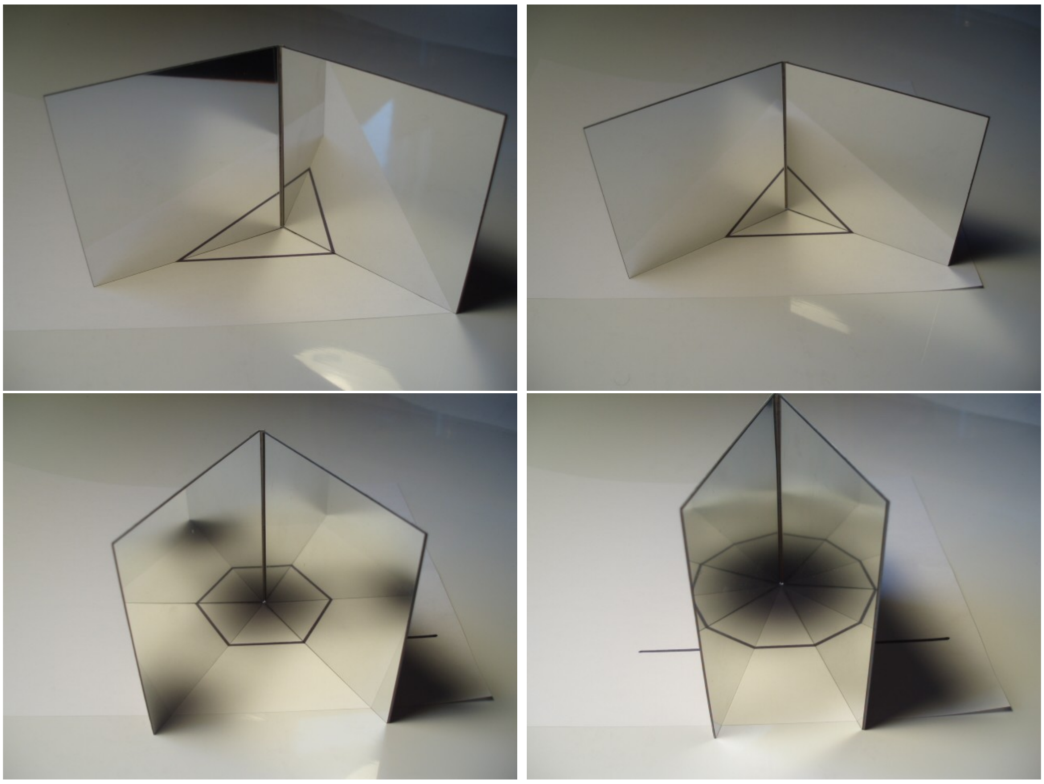
13.2 Libros de espejos

`http://www.ricardovazquez.es/04%20GEOMETRIA/Indexespejos.html`

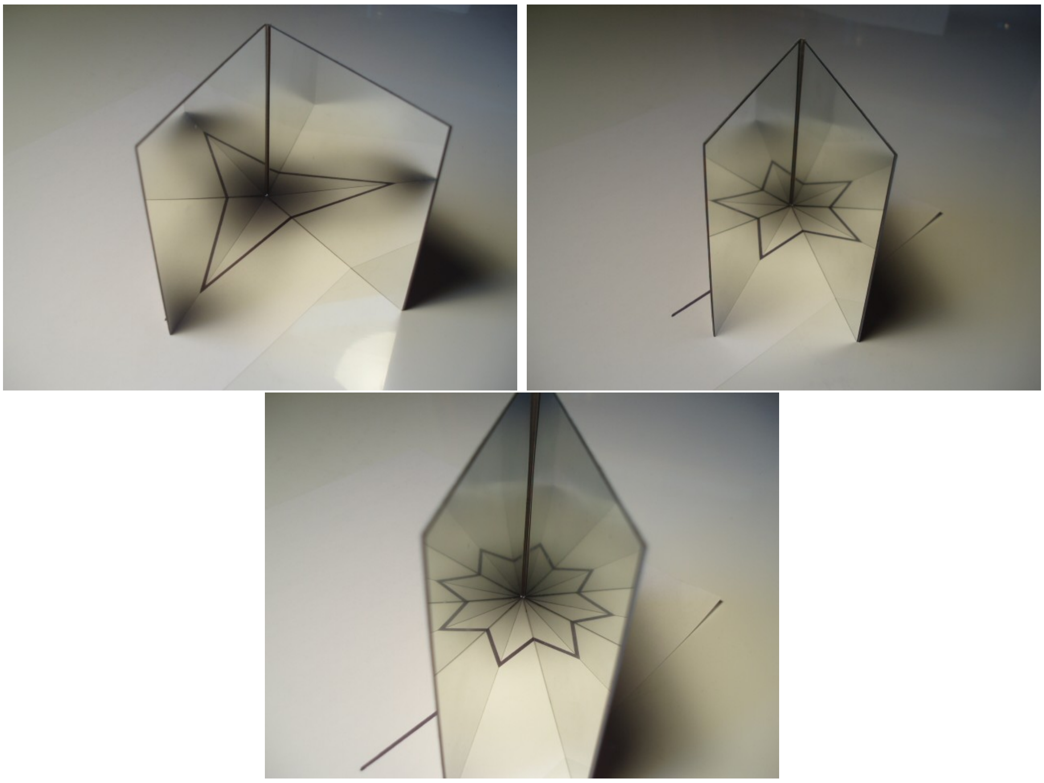
Tomando dos espejos y uniéndolos de manera flexible por un lateral formamos lo que se denomina un *libro de espejos*.

A partir de una recta, utilizando simetrías (puesto que el espejo hace de bisectriz) se pueden construir diferentes figuras:

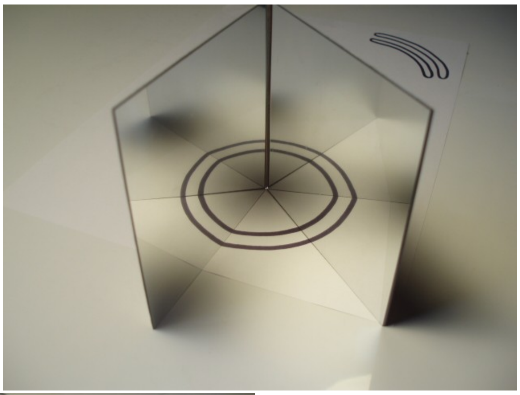
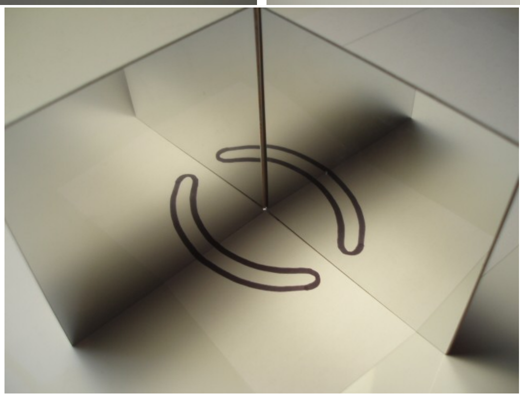




O, haciendo que se formen lados de diferente longitud, se forman polígonos estrellados:



A partir de otras figuras, como esta “salchicha”, se pueden hacer múltiples construcciones:

Complicando un poco más la “salchicha”:


A partir de una espiral:

En realidad, cualquier cosa es factible de ser sometida a simetrías y poder hacer construcciones a partir de ellas:

Este último ejemplo puede verse como una forma de representar de forma gráfica el concepto "multiplicar por cinco".

Construir teselaciones, mosaicos, frisos

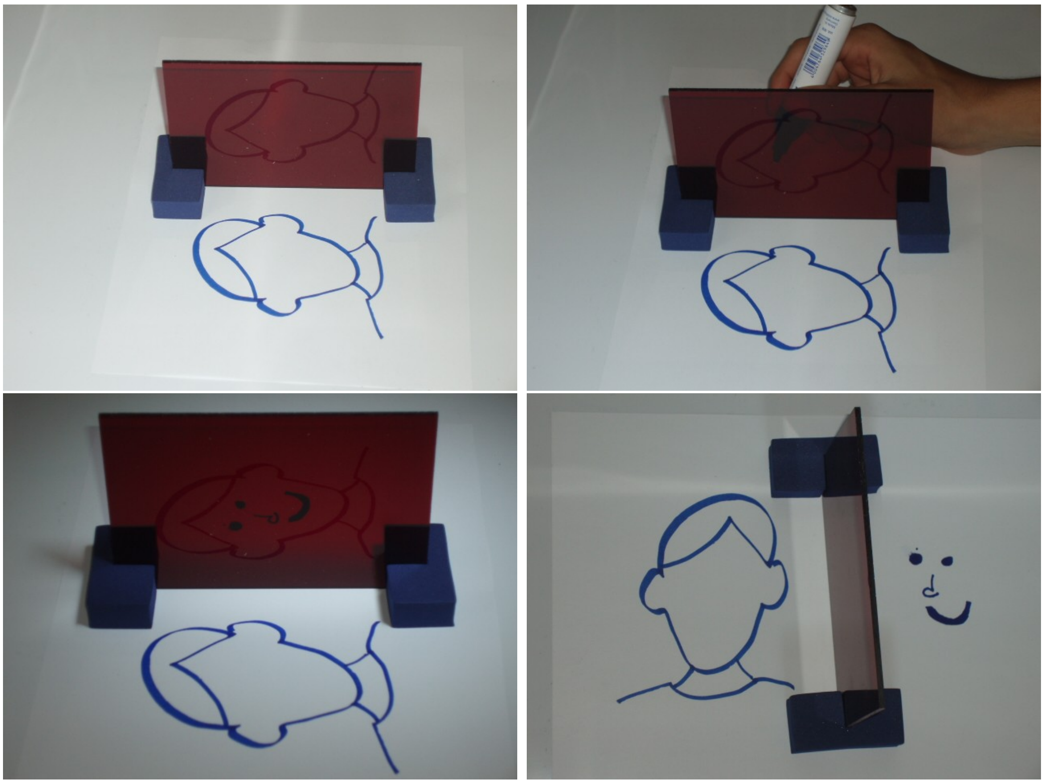
13.3 MIRA

Un MIRA suele ser una pieza de metacrilato, normalmente de color rojo, aunque los míos son de un tono azulado, con soportes para matenerse en vertical. Funciona como un espejo semitransparente, con lo que auna los efectos de reflejo de lo que tiene a un lado, y deja ver lo que hay al otro. Para ser funcional debe tener un buen equilibrio entre estas dos características.

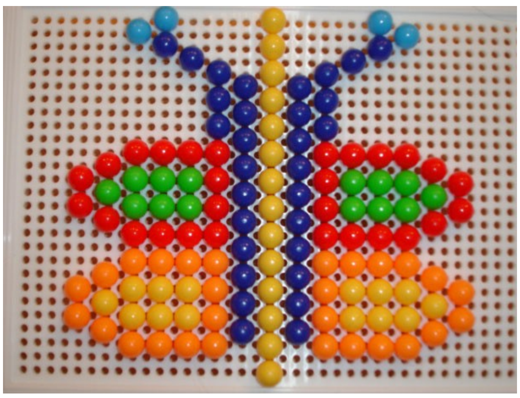
No es excesivamente caro. He conseguido cuatro placas de metacrilato coloreado de un tamaño cómodo (10x10cm) por 14 euros.

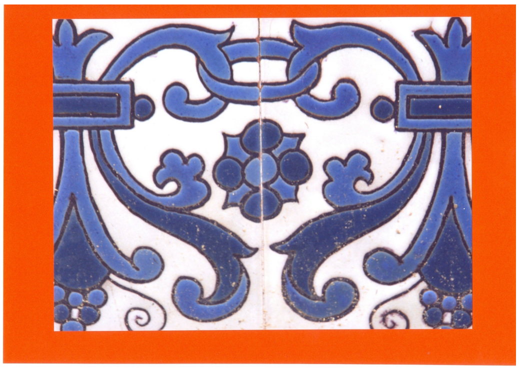
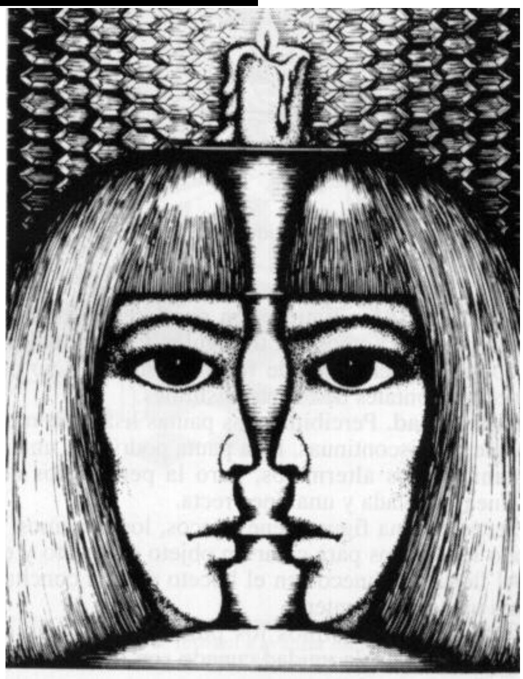
Se pueden desarrollar con él múltiples experiencias, como:

Concepto de simetría como transformación: es fácil representar el concepto de simetría a través de sus propiedades manipulativas.

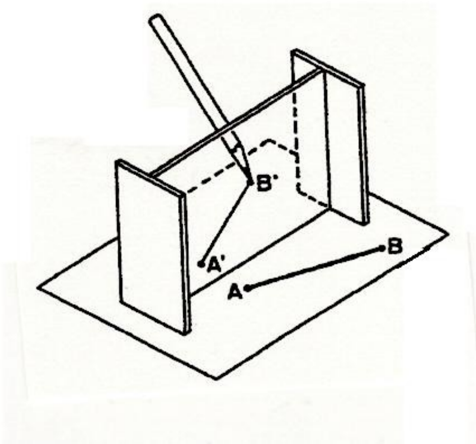


Comprobador de la propiedad de simetría: al aunar el efecto del espejo con la transparencia, se puede comprobar que la imagen reflejada coincida con la sección que debe ser su imagen. Tan sólo hay que colocar el MIRA en el eje de simetría, tarea que, a su vez, desarrolla la capacidad de detectar tales ejes.



Ayuda a la creación de simetrías: a través del uso de la transparencia y el reflejo, podemos ayudarnos para construir la simetría, usando la imagen reflejada como un "calco".



Como instrumento geométrico: para la construcción de mediatrices y bisectrices, al hacer coincidir los elementos determinantes con su reflejo.

Si se usa junto al geoplano, se puede desarrollar enormemente la relación entre transformaciones y distancias.

14 Otros recursos

14.1 Figuras geométricas

Identificación de propiedades
Encontrar elementos de las figuras
Identificar elementos congruentes en las figuras.
Clasificar figuras por sus características, independientemente de su posición.
Identificar los cuadriláteros que cumplen una determinada propiedad.

15 Figuras poliédricas

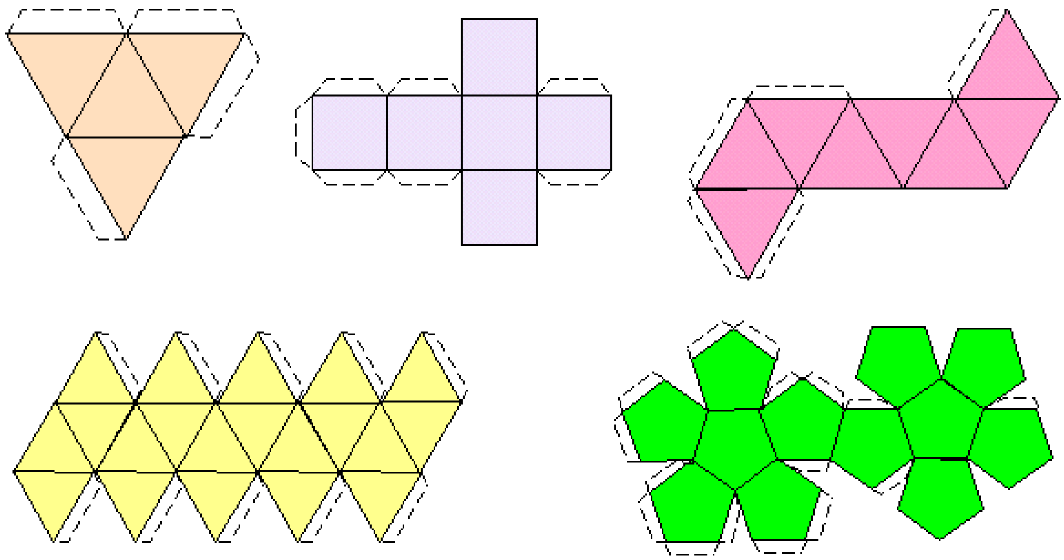
Para el trabajo con poliedros, construcciones en el espacio que, en principio, puede resultar complejo de visualizar, existe multitud de herramientas. Algunas de las cuales vamos a analizar a continuación.

Es importante tener en cuenta que, más importante que las herramientas en si mismas, es el uso que se le de. Por tanto, siempre es conveniente tener establecido un plan de trabajo y unos objetivos bien definidos.

Y, puesto que los poliedros incorporan muchos conceptos de los polígonos, muchas de estas herramientas se pueden utilizar para el trabajo con poliedros y con el de polígonos.

15.1 Recortables

Corresponden al desarrollo plano de los poliedros. Son relativamente fáciles de construir. Y Geogebra trae una herramienta de desarrollo plano de poliedros que, sin dar en muchas veces la forma más conveniente, puede servir de punto de partida.

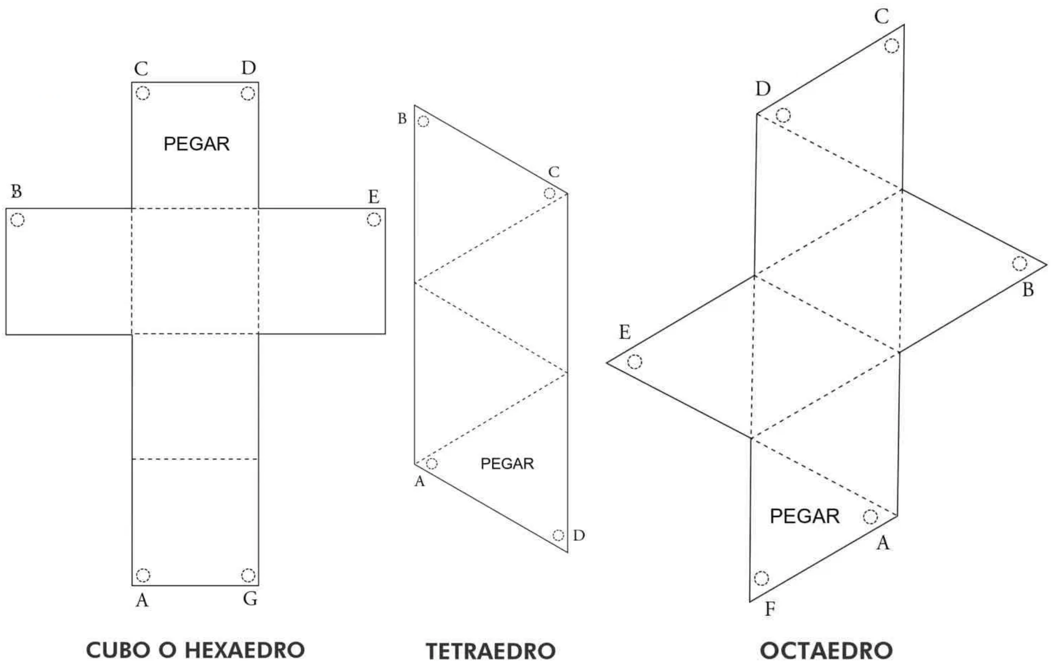


Su carácter eminentemente manipulativo lo convierte en un recurso muy estimulante. Además, al tener que montarlo, se facilita la relación entre el desarrollo plano de los poliedros.

En esta dirección hay una buena colección de desarrollos de cuerpos geométricos preparados para imprimir y trabajar con ellos.

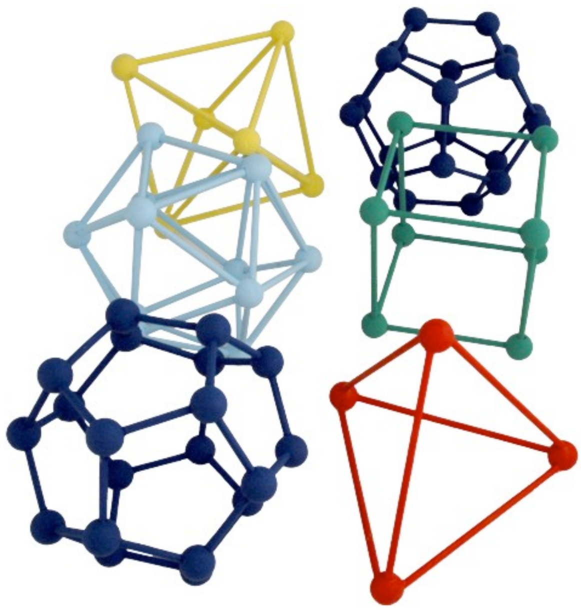
15.2 Recortables “pull-up” o automontables

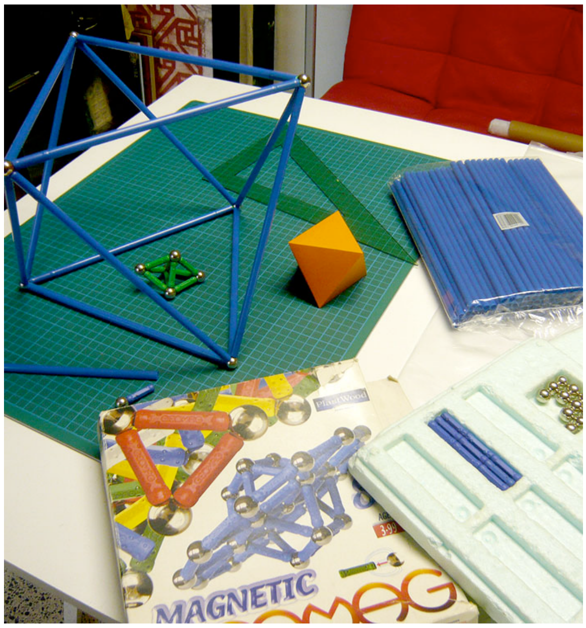
Podéis encontrar una serie de vídeos explicativos y de patrones en esta dirección. Son una ampliación del concepto de recortable, añadiendo la posibilidad de que se “automonten”. Con hilos, que se hacen pasar por agujeros estratégicamente colocados, de forma que al tirar de ellos la figura se “monta”. Es mucho más fácil verlo que explicarlo. Así que os recomiendo que visitéis la página referenciada que, además, proporciona una buena cantidad de recursos..



15.3 Construcción con varillas

Una herramienta muy divertida y útil consiste en varillas y bolas. Las bolas se utilizan como vértices y las varillas se utilizan como aristas. En algunos casos se unen por medios magnético mientras que, en otros, en las bolas hay agujeros en los que insertar las bolas. En el primer caso, puesto que los ángulos están prefijados, las figuras vienen predeterminadas, siendo más fáciles de construir, pero las construcciones son limitadas.



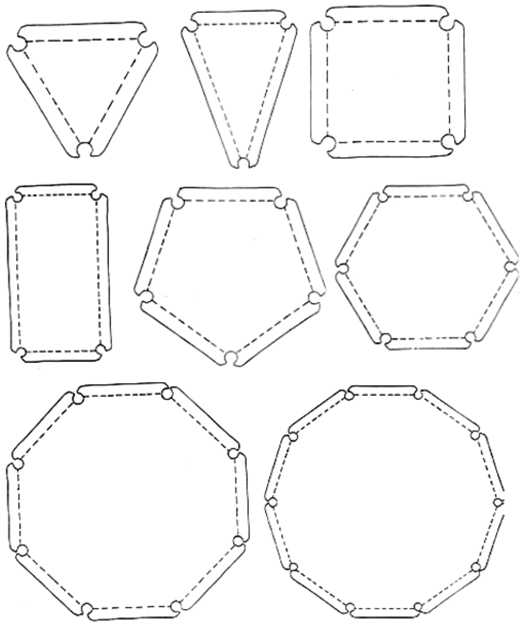


15.4 PLOT: poliedros troquelados

Inventado en 1959 por el arquitecto Fred Bassetti, se popularizó en España en los años 80 con una exposición itinerante denominada *Horizontes matemáticos*.

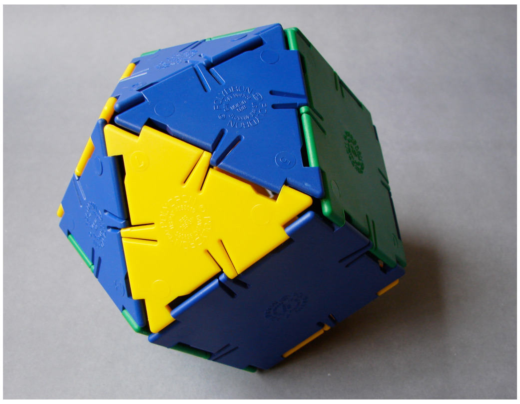
Consiste en polígonos de cartón con pestañas que permiten "engancharlos" con cartulinas. Su ventaja es que son fáciles de manipular y de usar. Su desventaja es que las combinaciones son limitadas, por que los tamaños de las aristas vienen predeterminados por construcción.

Es fácil encontrar o construir plantillas que, en su forma más básica se incluyen polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 8 y 10 lados. Es usual que todos los lados de los polígonos sean iguales para que se puedan unir dos polígonos cualesquiera. Además, podemos encontrar plantillas en las que se incluyen otras figuras con algunois lados de diferentes tamañaños, como el mostrado en la figura adjunta.



15.5 POLYDRON

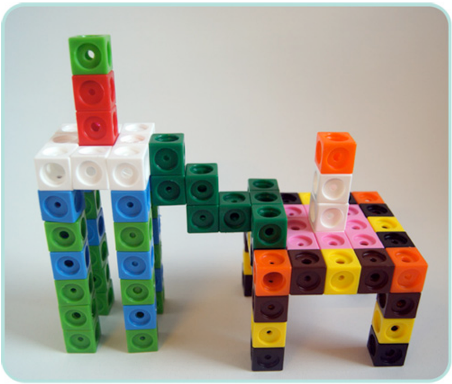
Es un conjunto de formas fabricadas en material plástico, muy resistentes, y que se enganchan unas con otras por medio de una articulación única por presión. Son fáciles de trabajar, con multitud de figuras para hacer las más diversas construcciones

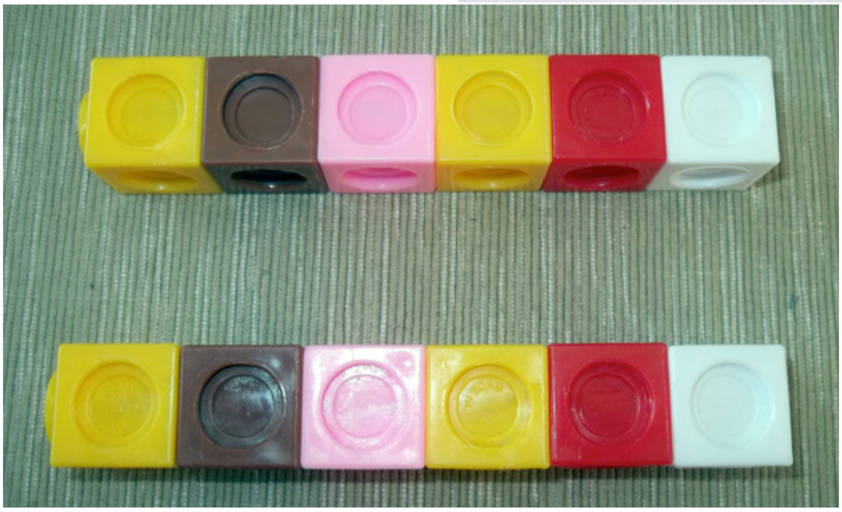


15.6 Policubos

Los policubos o multicubos son unas pequeñas piezas, con forma de cubo encajables, que permite realizar diversas construcciones. Como ventaja, la facilidad de su manejo y versatilidad. Como desventaja, que al ser cubos, sólo permite inserción en ángulos rectos y el resto de ángulos debe aproximarse.

En algunas versiones se suaviza este último condicionamiento mediante la adición de "medios cubos", cortados en diagonal. Lo que permite, además, construcciones en ángulos de 45°.



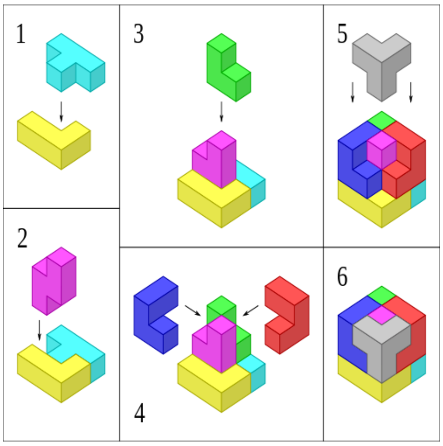


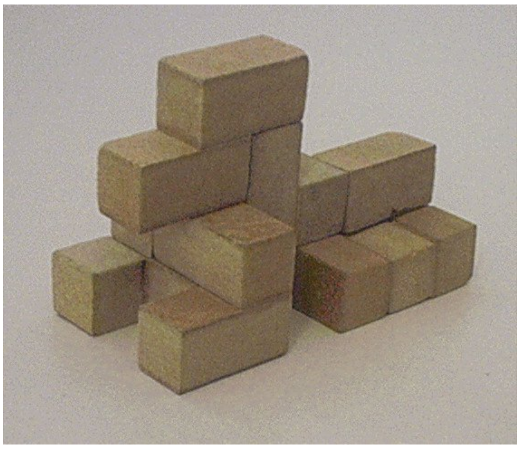
15.7 Cubos de soma

Es un rompecabezas inventado por Piet Hein en 1936, mientras asistía a una conferencia de mecánica cuántica[1]. Consiste en todas las posibles combinaciones de tres o cuatro cubos, unidas por sus caras, de tal forma que se forme, al menos, una esquina interior.

Se podrían ver como una generalización en tres dimensiones de los tetraminó del tetris.

Se pueden usar para resolver el *problema del cubo de Soma*, que consiste en montar un cubo con las diferentes piezas, o para tareas creativas.



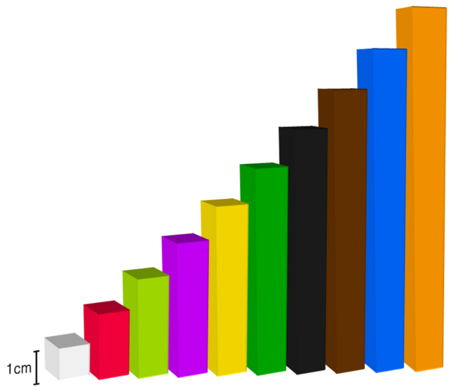


[1] Así sería de interesante la conferencia ;)

15.8 Regletas Cuisenaire

Creado por el maestro Georges Cuisenaire en los años 50. Consiste en regletas de tamaño gradual entre uno y diez.

Si bien su objetivo inicial es la introducción al cálculo, a modo de regleta, establece relaciones con los conceptos geométricos, pudiéndose utilizar fácilmente para la construcción de algunas figuras y para enlazar conceptos de geometría y medida.



16

Situaciones educativas

Incluir ejemplos de situaciones en el aula y cómo se pueden usar para enseñar elementos de Geometría

Recuerdo, hace algunos años, que tuve una alumna de Practicum que realizó, en su último curso, varias intervenciones y no sabía cual escoger como intervención principal para analizarla en el portafolio. Después de hablar con ella me pareció que estaba haciendo cosas muy interesantes y le propuse que escogiera la que considerara más significativa y para cada una de las otras me hiciera un "portafolio escueto" que añadiera como anexos.

Ciertamente, el trabajo era magnífico, o al menos así me lo pareció, y cuando llego al último anexo encuentro una intervención en la que intentaban explicar a alumnos de primaria, de muy baja edad (no recuerdo exactamente cuanto, pero pequeños) qué son los huesos y cómo funcionan en el cuerpo.

No había forma de que asumieran que había unas cosas dentro, que no podían ver. Tened en cuenta que son niños pequeños y, por tanto, lo que existe es lo que ven, ya que la capacidad de abstracción aun no está desarrollada. Y, sobre todo, no las "situaban" en el cuerpo.

Mi tutoranda, viendo como una alumna se palpaba buscando "eso" que contaba la profesora, se le ocurrió poner a un discente en la pizarra, dibujar su perfil y hacer que buscaran donde tenían "esas cosas duras en el cuerpo". Poco a poco, a partir del perfil, los alumnos fueron situando los diferentes grupos de huesos, descubrieron las articulaciones, con libros y búsquedas en Internet empezaron a ponerle nombre a los huesos, etc. En conclusión, a partir de un recurso tan poco costoso y tan accesible como el propio cuerpo y la dinámica corporal, los alumnos fueron capaces de, no sólo comprender que tienen huesos, donde están y cómo se comportan, sino que lo hicieron de una forma explorativa y dinámica.

Creo que es un ejemplo perfecto del uso de los recursos que tenemos a nuestro alrededor todos los días para desarrollar dinámicas educativas.

Como no siempre vamos a poder tener "ideas felices", os proponemos algunos puntos para empezar a trabajar conceptos de geometría en clase.

16.1 Cuerdas

Curvas, rectas, separación del plano en regiones.

16.2 Elementos arquitectónicos

16.2.1 Puertas y ventanas

Ángulos, áreas, volúmenes de revolución.

16.2.2 Pizarra, mesas, etc

Poliedros, áreas equivalentes, etc.

16.3 Mapas del tesoro

Escala, proporcionalidad.

A

Materiales para los talleres

A.1 Actividades con el Tangram

Las siguientes actividades se han extraído de `https://www.yumpu.com/es/document/read/22041725/taller-4-actividades-tangrams-y-puzzles-geometricos`.

1. Construye un tangram con cartulina o papel. Ayudate de alguno de los videos sobre construcción de tangrams.
2. Tomando como unidad el área del triángulo pequeño, calcula el área de las distintas piezas del tangram.

	T. Grande	T. Mediano	T. Pequeño	Cuadrado	Paralelogramo
Área					

3. Tomando como unidad la longitud del lado de la pieza “cuadrado”, calcula las longitudes de los lados de las distintas piezas del tangram.

	T. Grande	T. Mediano	T. Pequeño	Cuadrado	Paralelogramo
Longitud de los lados					

4. Construye polígonos anotando las piezas empleadas:
   a) Un cuadrado de área 8 triángulos pequeños.

   b) Un trapecio de área 6 triángulos pequeños.

   c) Un hexágono de área 5 triángulos pequeños.

   d) Un pentágono de área 6 triángulos pequeños.

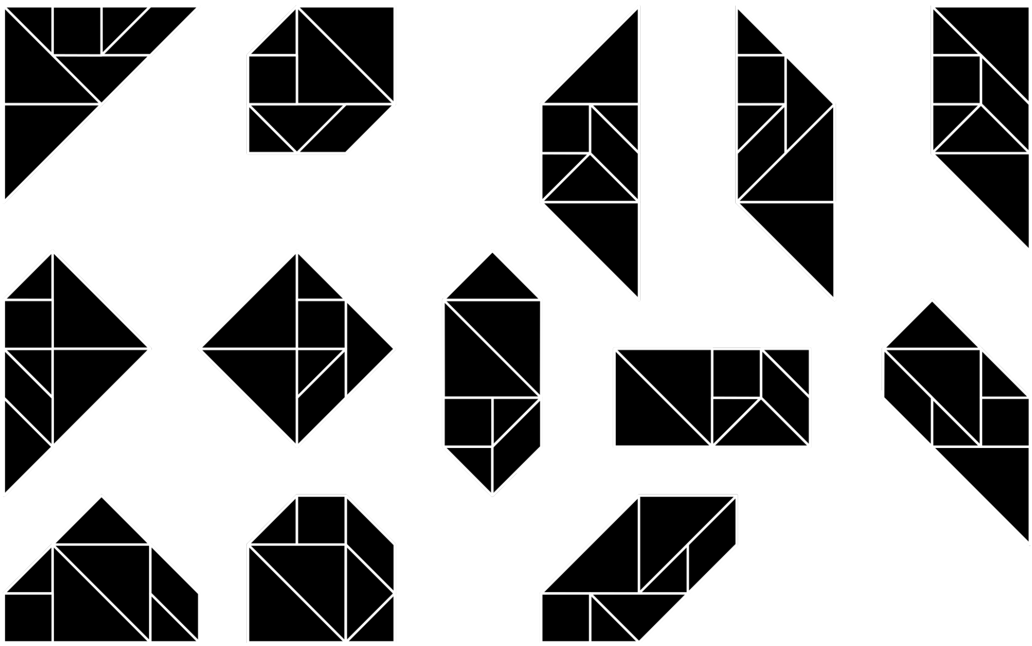
5. Utilizando los dos triángulos pequeños y el romboide, forma:
    a) un triángulo

    b) un rectángulo

    c) un trapecio

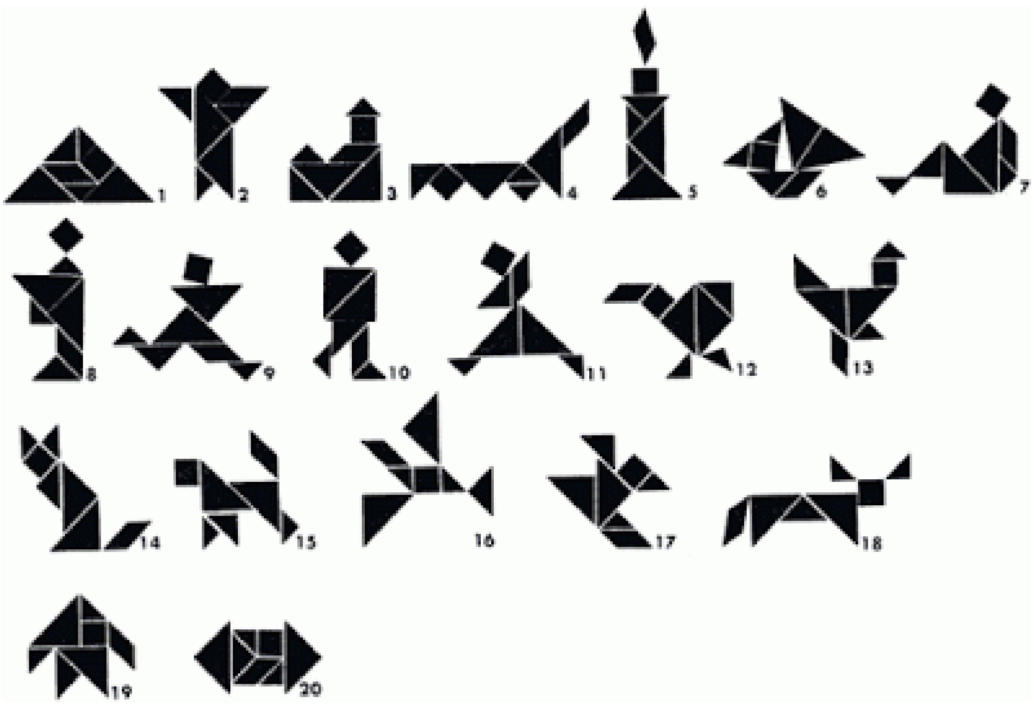
6. Utilizando las piezas que quieras del tangram forma cuatro rectángulos distintos.

7. Construcciones de figuras con el tangram.
    a) Construye cuatro de los siguientes polígonos con todas las piezas del tangram.



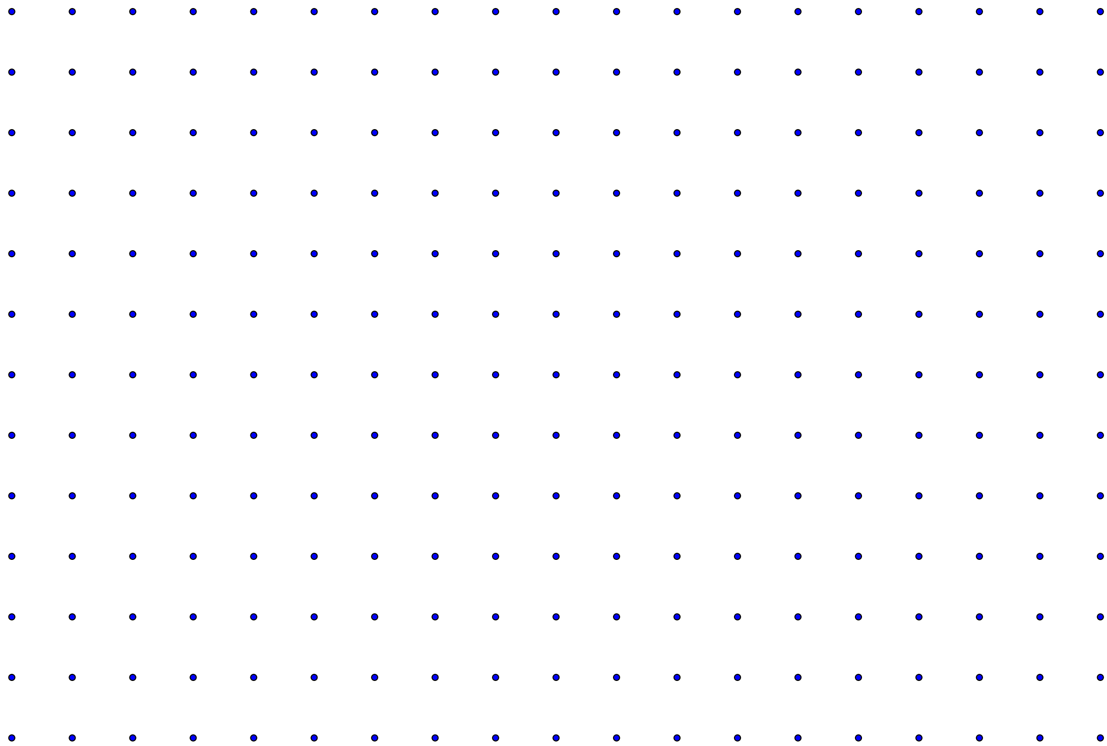
b) Construcción de polígonos diferentes: construye dos de los siguientes polígonos con todas las piezas del tangram.

c) Construcciones con todas las piezas del tngram 3 de las siguientes figuras

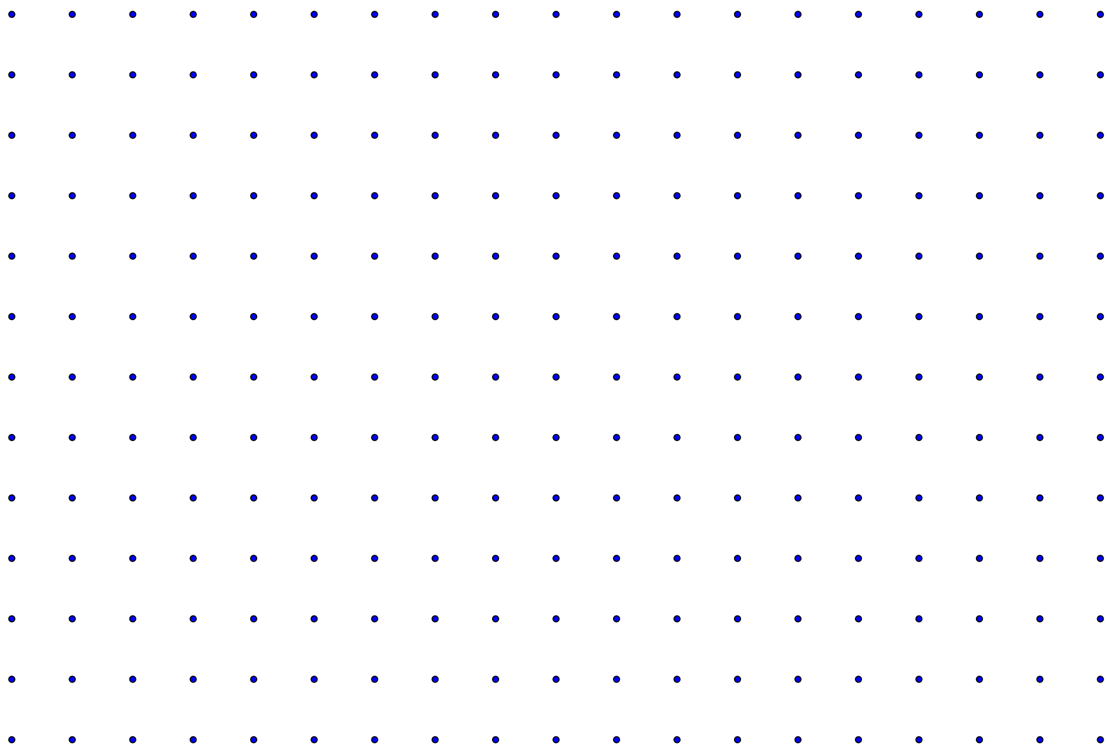


A.2 Actividades con geoplanos-mallas

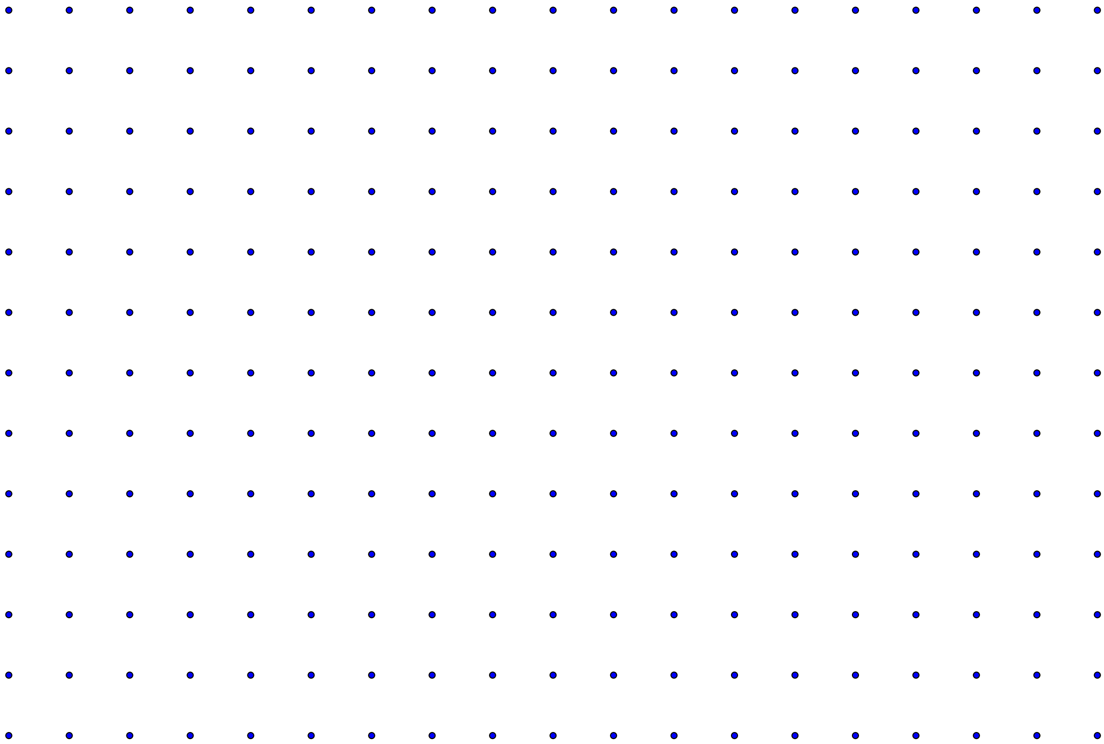
1. Dibuja distintos triángulos, clasifícalos atendiendo a los criterios que ya se han definido.



2. Dibuja distintos cuadriláteros y clasifícalo antendiendo a los criterios que ya se han definido.



3. Dibuja distintos polígonos y clasifícalos atendiendo al hecho de ser concavos o convexos.



4. Calcula el perímetro y el área de las siguientes figuras.

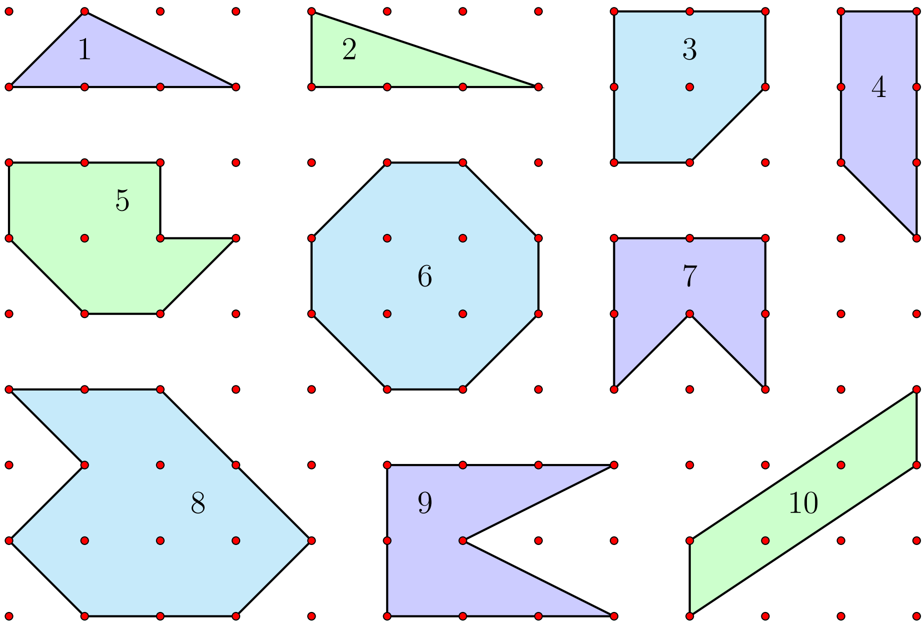
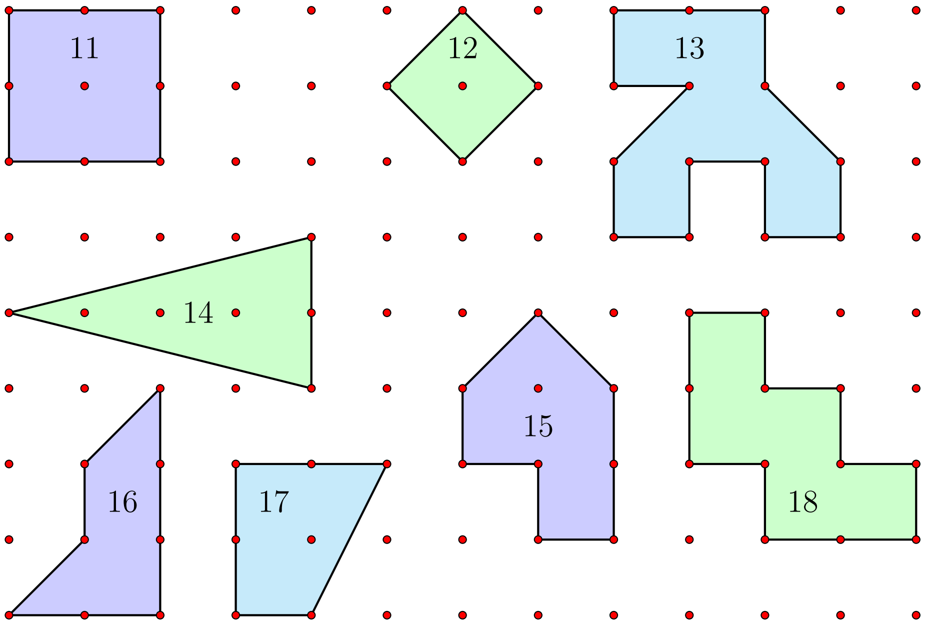
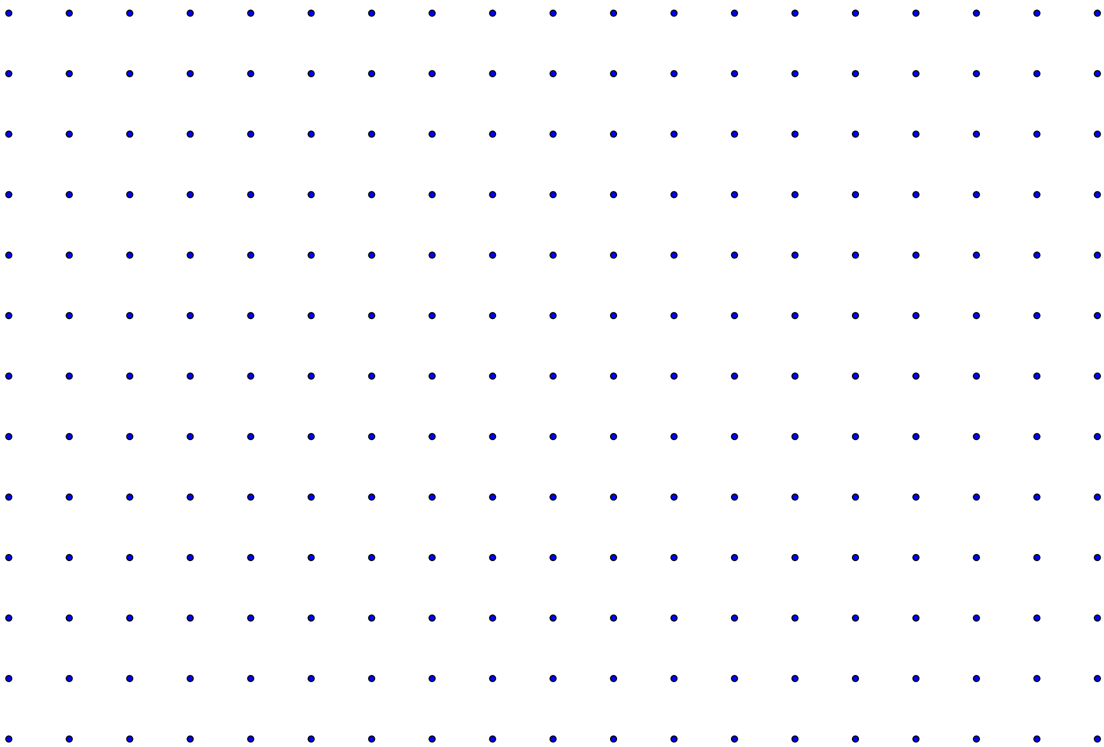


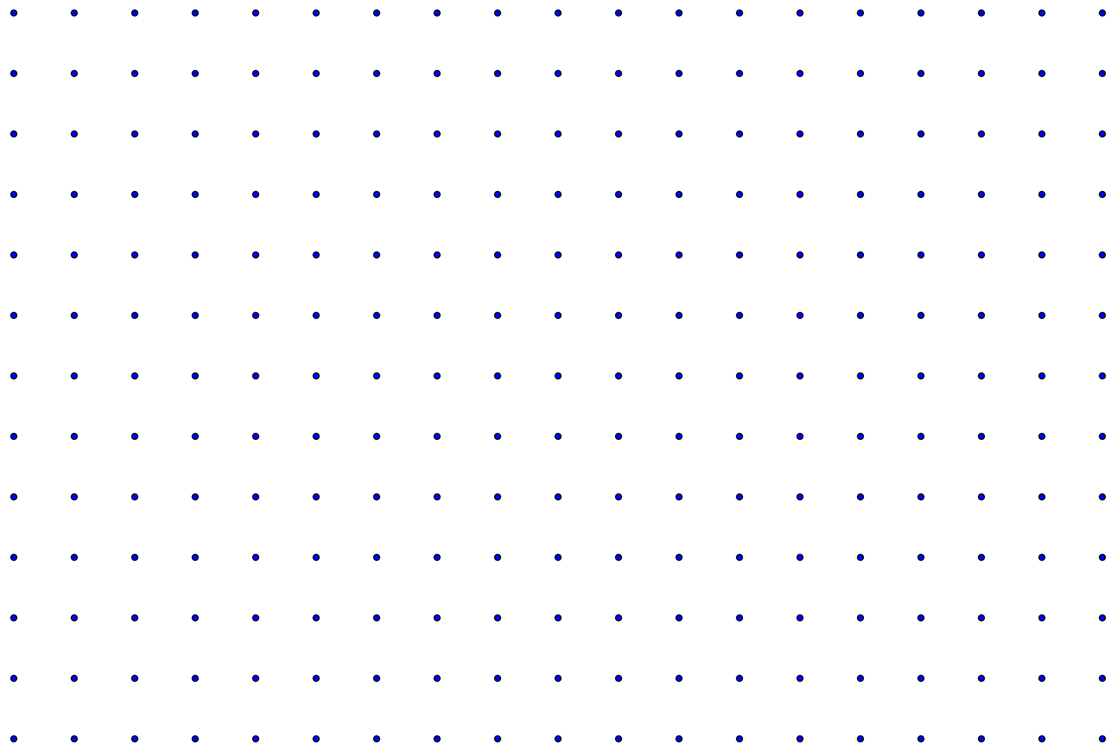
Figura	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Área										
Perímetro										

5. Para cada uno de los ocho polígonos de la siguiente figura, construye un polígono diferente, pero que tenga su mismo área.

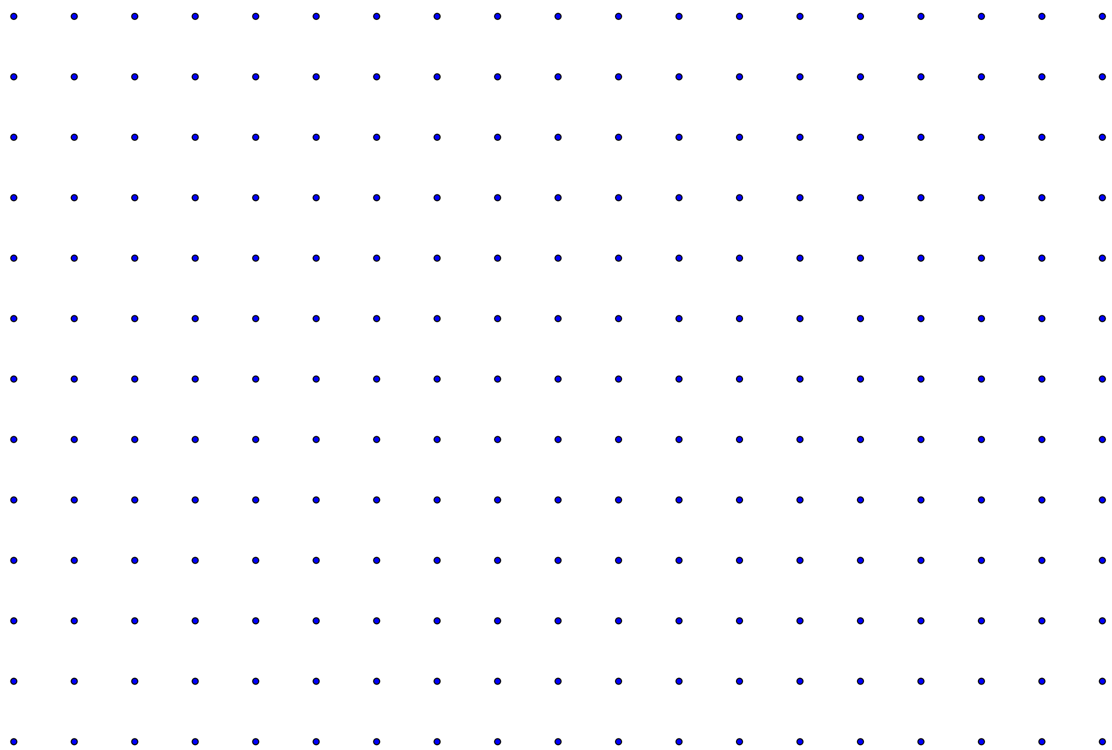




6. Para cada uno de los ocho polígonos de la actividad anterior, construye un polígono diferente, pero que tenga su mismo perímetro.



7. *Construcción de tetraminós*. En el cuerpo del trabajo se explican los poliminós. Desarrolla a continuación ls tetraminós, que son los poliminós formados por cuatro cuadrados unidos por sus lados.



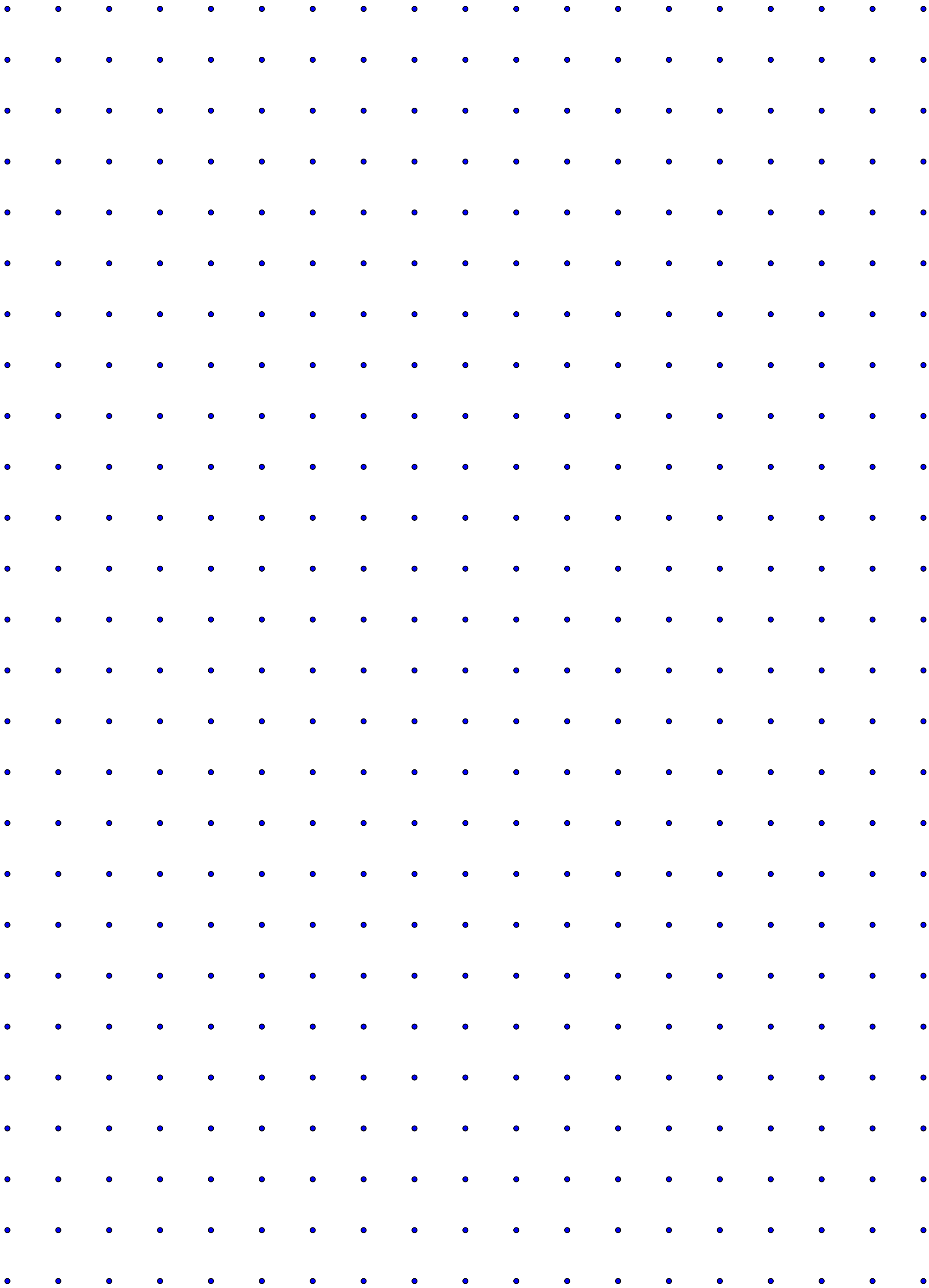
Cuando creas que ya los tienes, te animamos que compruebes que no te falta ninguno, o que no has repetido alguno. En el cuerpo de la práctica tienes todo el desarrollo, y se puede encontrar en el siguiente enlace

8. Una vez encontrados los tetraminós, rellenar la siguiente tabla descriptiva de los mismos.

Tetraminós	**Área**	**Perímetro**	**Tamaño diagonal**

El tamaño de la diagonal se refiere al tamaño de la mayor de las diagonales posibles. Debes considerar que la diagonal es el segmento que une vértices no consecutivos y para polígonos concavos es posible que sea un segmento no interior al polígono.

9. *Construcción de pentaminós.* En la siguiente trama cuadrada construir todos los polígonos distintos que estén compuestos por 5 cuadrados completos, unidos por sus lados



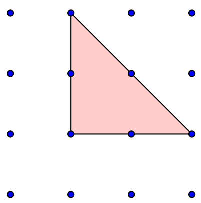
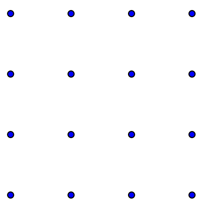
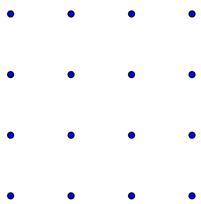
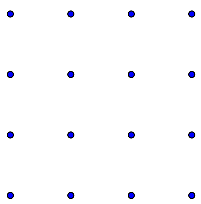
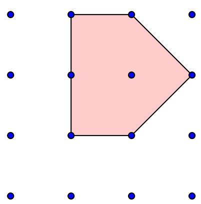
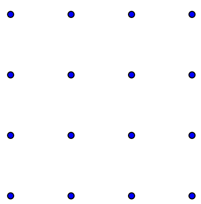
Cuando creas que ya los tienes, te animamos que compruebes que no te falta ninguno, o que no has repetido alguno, comparándolos con los desarrollados en el tema o con el siguiente enlace.

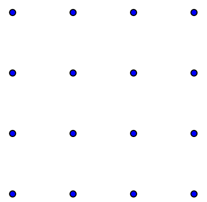
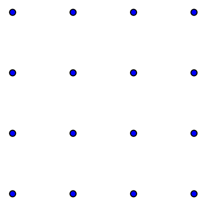
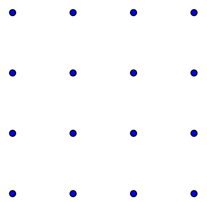
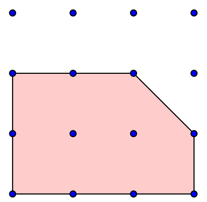
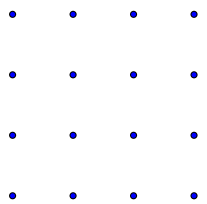
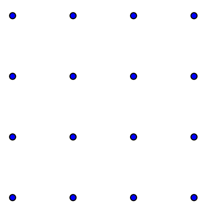
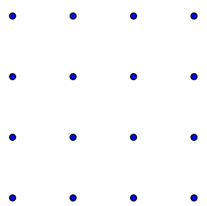
10. Una vez encontrados los pentaminós, rellenar la siguiente tabla descriptiva de los mismos.

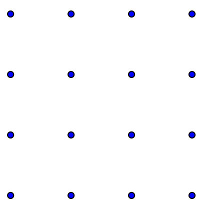
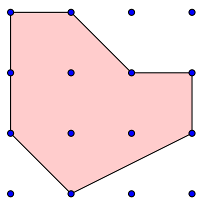
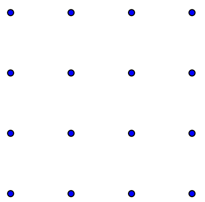
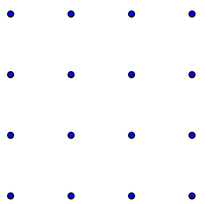
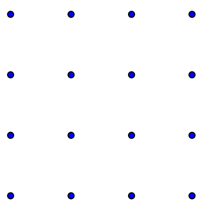
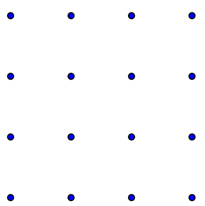
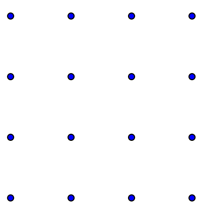
Pentaminós	**Área**	**Perímetro**	**Tamaño diagonal**

Como en el caso de los tetraminós el tamaño de la diagonal se refiere a la mayor de las posibles en cada caso.

11. Representa en la malla de 4x4, 20 polígonos distintos e indica en cada caso el número de puntos que se encuentran en el interior de cada polígono (puntos interiores del polígono) y cuantos puntos se encuentran contenidos en los lados (puntos fronteras del polígono). También indica el área de cada uno de ellos. Te sugiero que construya primero varios polígonos con ningún punto interior, a continuación varios con 1 punto interior, con dos puntos interiores y con tres puntos interiores. Te presentamos un ejemplo de cada tipo, y te pedimos que consigas otros en cada caso.

	Números de puntos por los que pasa el polígono: 6
	Números de puntos interiores al polígono: 0
	Área del polígono: 2. Para ver el area bastaría con comprobar que se trata de la mitad de un cuadrado de area 4.
	Números de puntos por los que pasa el polígono:
	Números de puntos interiores al polígono:
	Área del polígono:
	Números de puntos por los que pasa el polígono:
	Números de puntos interiores al polígono:
	Área del polígono:
	Números de puntos por los que pasa el polígono:
	Números de puntos interiores al polígono:
	Área del polígono:
	Números de puntos por los que pasa el polígono: 6
	Números de puntos interiores al polígono: 1
	Área del polígono: 3 En este caso se ve que contiene 2 cuadrados completos y dos medios, por tanto area 3.
	Números de puntos por los que pasa el polígono:
	Números de puntos interiores al polígono:
	Área del polígono:

	Números de puntos por los que pasa el polígono:
	Números de puntos interiores al polígono:
	Área del polígono:
	Números de puntos por los que pasa el polígono:
	Números de puntos interiores al polígono:
	Área del polígono:
	Números de puntos por los que pasa el polígono:
	Números de puntos interiores al polígono:
	Área del polígono:
	Números de puntos por los que pasa el polígono: 9
	Números de puntos interiores al polígono: 2
	Área del polígono: 5,5
	Números de puntos por los que pasa el polígono:
	Números de puntos interiores al polígono:
	Área del polígono:
	Números de puntos por los que pasa el polígono:
	Números de puntos interiores al polígono:
	Área del polígono:
	Números de puntos por los que pasa el polígono:
	Números de puntos interiores al polígono:
	Área del polígono:

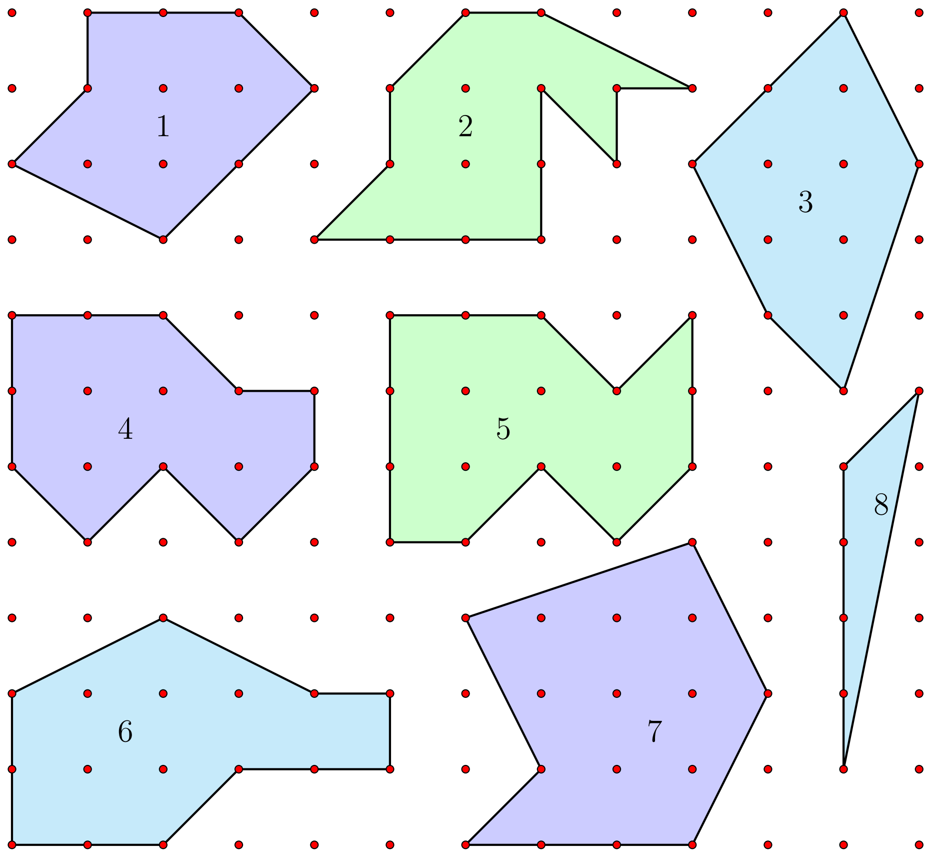
	Números de puntos por los que pasa el polígono:
	Números de puntos interiores al polígono:
	Área del polígono:
	Números de puntos por los que pasa el polígono: 8 fronteras
	Números de puntos interiores al polígono: 3 interiores
	Área del polígono: 6
	Números de puntos por los que pasa el polígono:
	Números de puntos interiores al polígono:
	Área del polígono:
	Números de puntos por los que pasa el polígono:
	Números de puntos interiores al polígono:
	Área del polígono:
	Números de puntos por los que pasa el polígono:
	Números de puntos interiores al polígono:
	Área del polígono:
	Números de puntos por los que pasa el polígono:
	Números de puntos interiores al polígono:
	Área del polígono:
	Números de puntos por los que pasa el polígono:
	Números de puntos interiores al polígono:
	Área del polígono:

12. Completa la siguiente tabla, incorporando los datos obtenidos en los 20 polígonos anteriores. Intenta encontrar una relación entre el área del polígono, los puntos de la malla por los que pasan los lados del polígono (puntos frontera) y puntos de la malla interiores al polígono (puntos interiores).

Polígono nž	**Puntos interiores**	**Puntos fronteras**	**Area**
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			

Como pista te aconsejo que mires en primer lugar los 5 polígonos que tienen un punto interior.

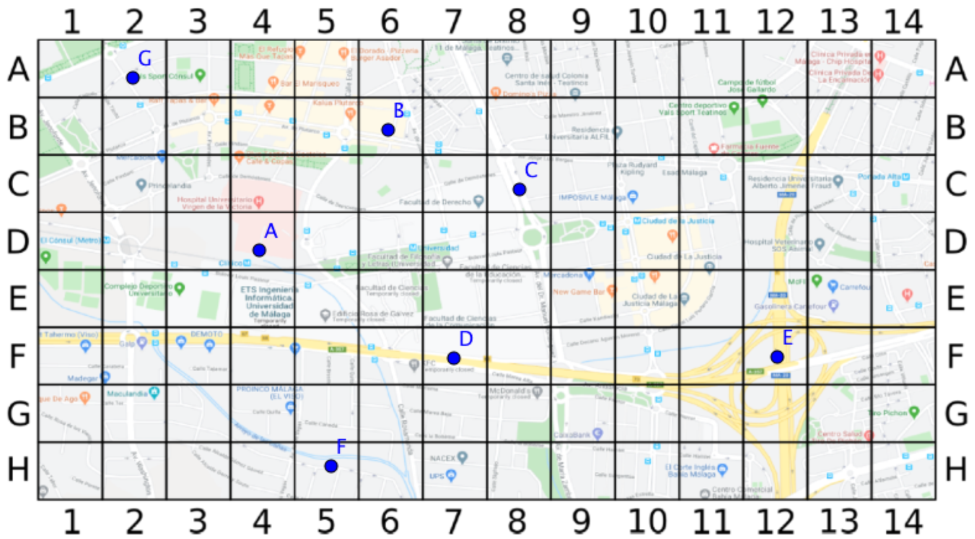
13. Utilizando la formula obtenida, calcula el área de las siguientes figuras:



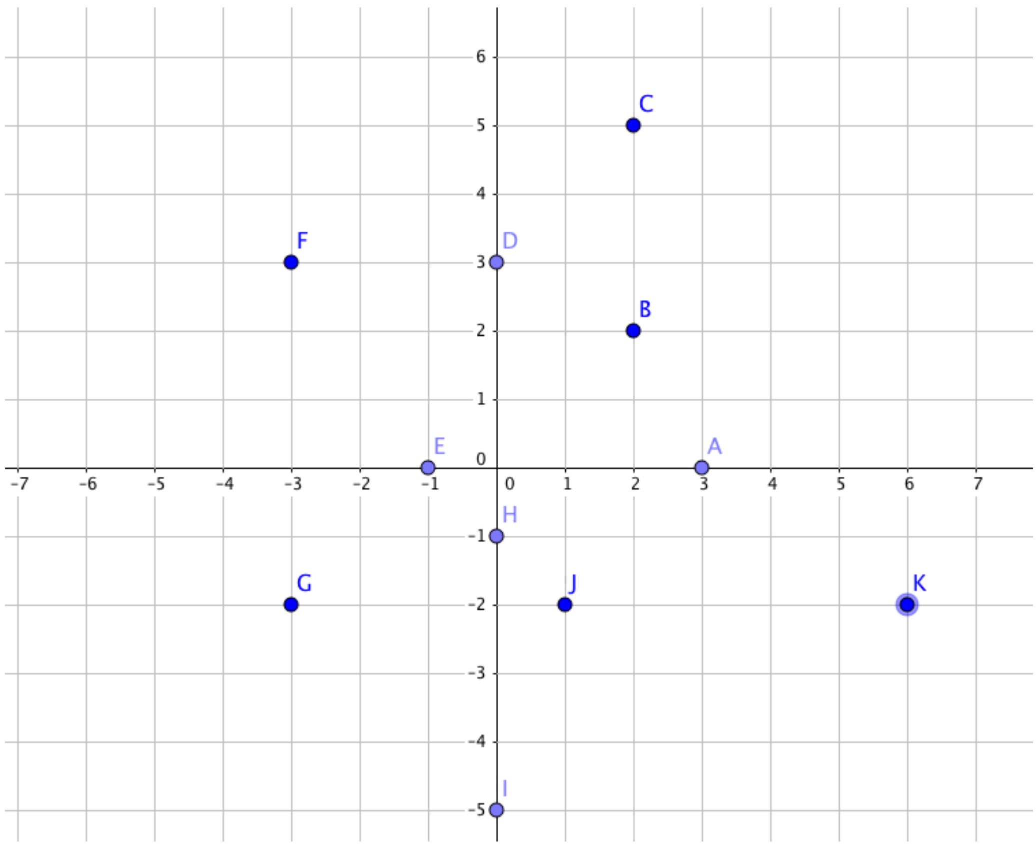
Polígono	P. Int.	P. Front.	Área	Perímetro
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				

A.3 Actividades de localización

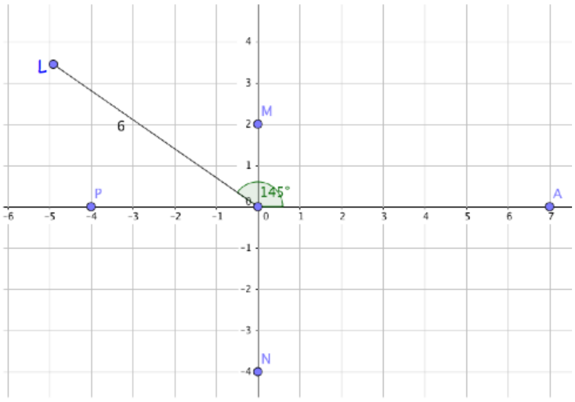
1. En el siguiente plano localiza los puntos indicados utilizando coordenadas alfanuméricas.

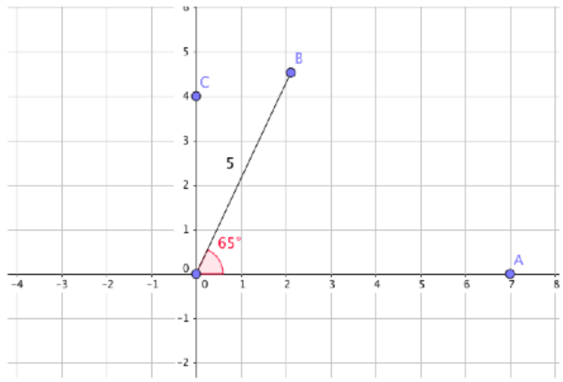


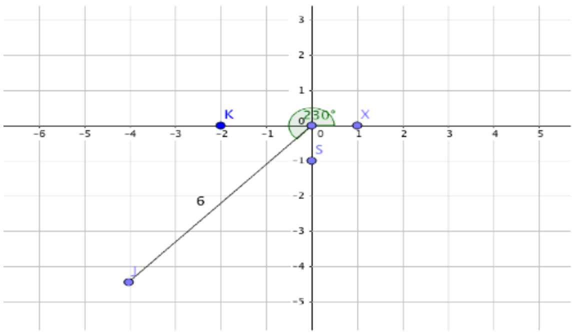
2. Determina las coordenadas cartesianas de los puntos representados en la siguiente cuadrícula.

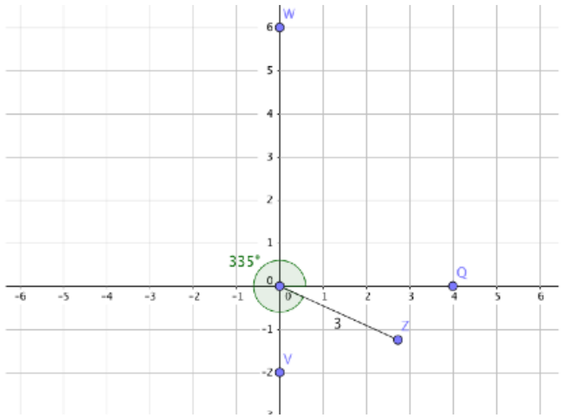


3. Indica las coordenadas polares de los siguientes puntos.







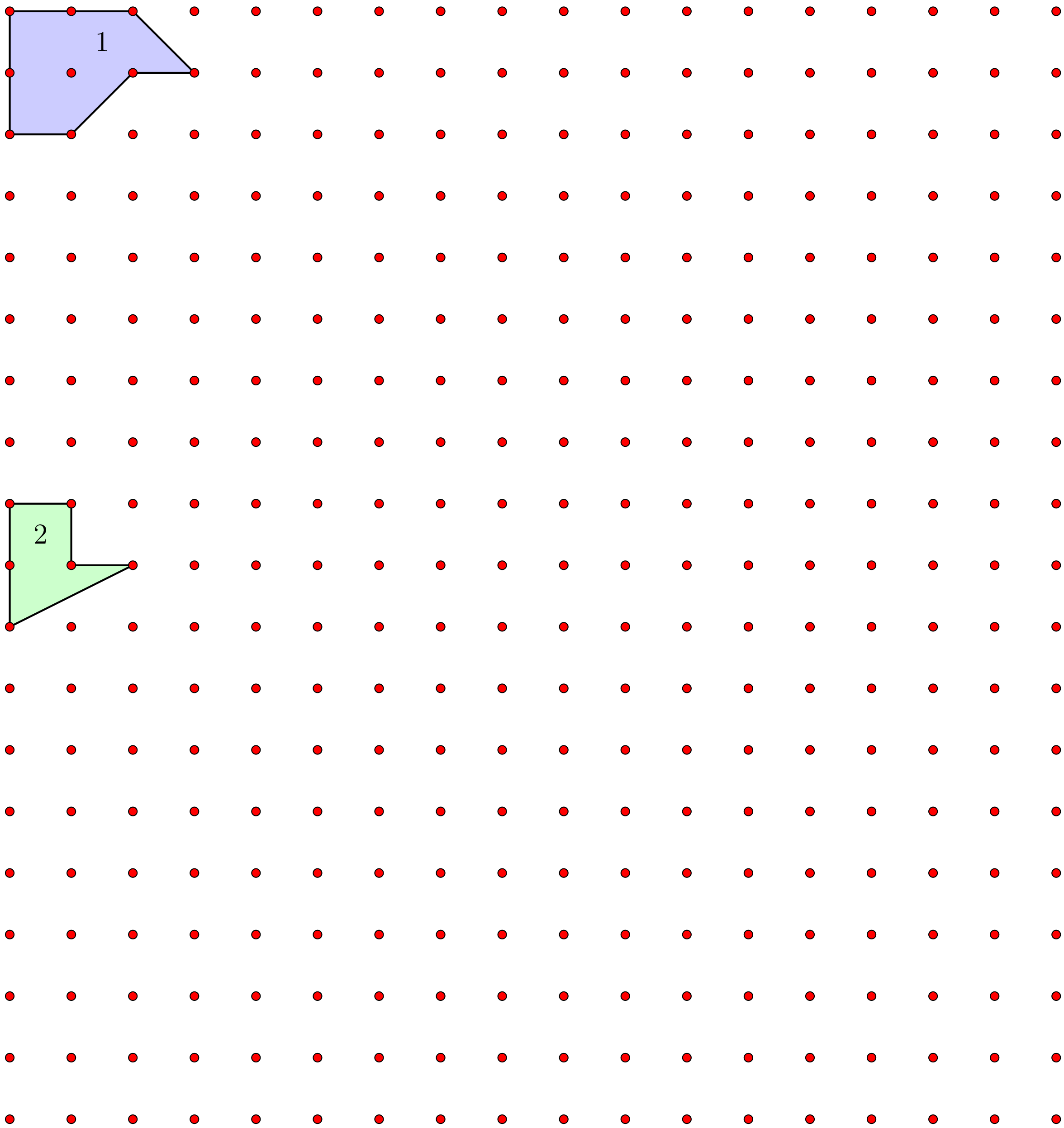


4. De forma aproximada indica las coordenadas geográficas de los puntos que aparecen en el siguiente mapa terráqueo.

A.4 Actividades con mapas

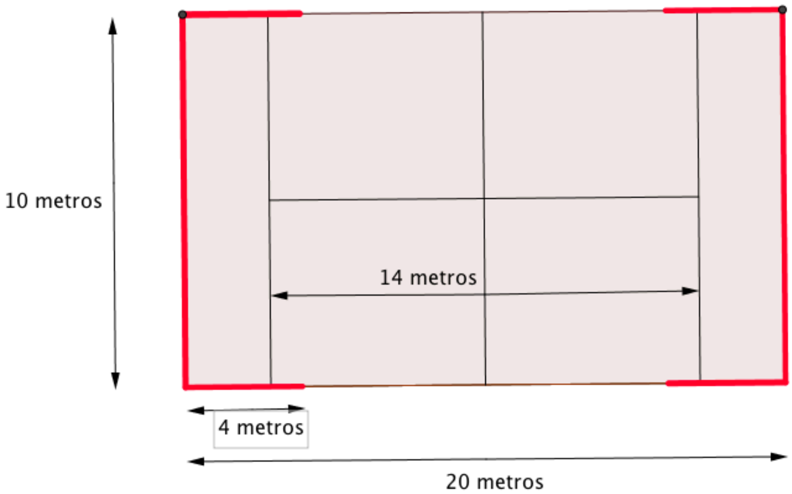
A.5 Actividades de escala

1. Para los siguientes figuras 1 y 2, construidas en la trama cuadrada resuelve las siguientes tareas:
   a) Construye polígonos a escala 1:2, 1:3 y 1:4.
   b) Comprueba que ocurre con las longitudes de los lados y las áreas de los polígonos encontrados. Utiliza el teorema de Pick para el cálculo de las áreas.

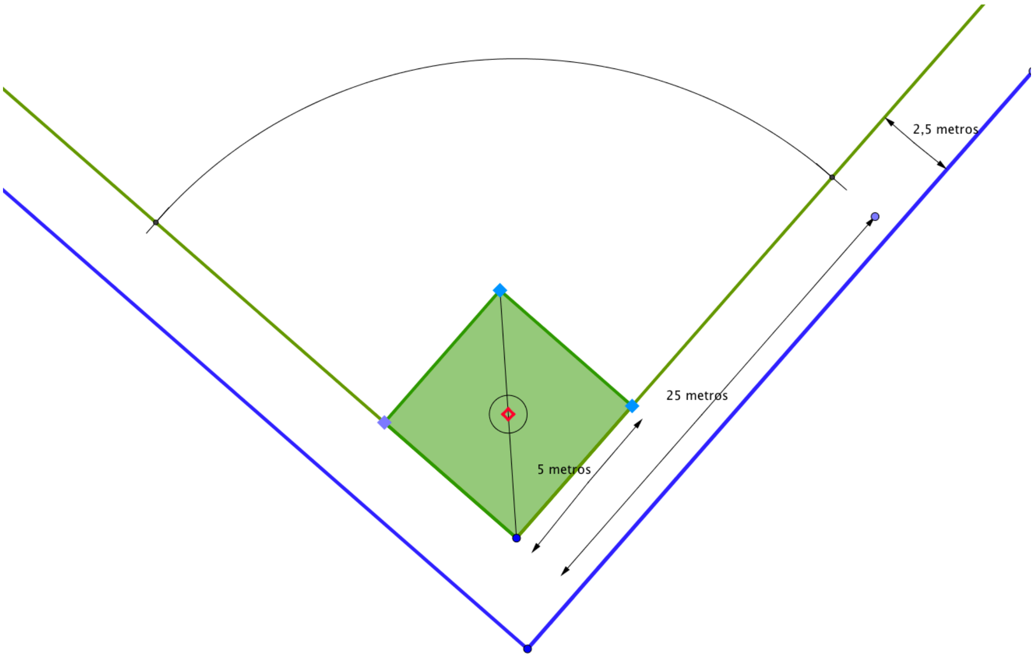


2. En el plano de la zona poniente de la ciudad de Málaga, la escala refleja que 1,31 unidades de longitud equivalen a 500 metros en la realidad. Obtén las dimensiones del paseo marítimo de poniente sabiendo que la dimensión del segmento que une el principio y el final de dicho paseo tiene 11,95 unidades de longitud.

3. En la siguiente figura se representa una pista de pádel con las medidas reglamentarias, pero sin disponer de una escala en la que poder asegurar que las medidas corresponden de forma proporcional a una pista real. Te proponemos que diseñes el plano correspondiente, en el que respetando las dimensiones reglamentarias, incluyas la escala correspondiente y podamos asegurar la semejanza entre la representación y la realidad.



4. Un grupo de niños del colegio pretenden realizar un campo de béisbol infantil. En la siguiente imagen se recoge un plano con las dimensiones que queremos que tenga. Diseña el plano correspondiente con la escala oportuna para que refleje la semejanza entre la pista real y nuestro plano.



5. La superficie de una explotación agraria de forma rectangular es de 80cm^2 en un mapa de escala 1:5.000. £Cuál es la superficie real en hectáreas? £Y en fanegas? Recuerda que la escala corresponde a la relación entre longitudes, y que las relaciones entre las unidades de superficie implicadas son:

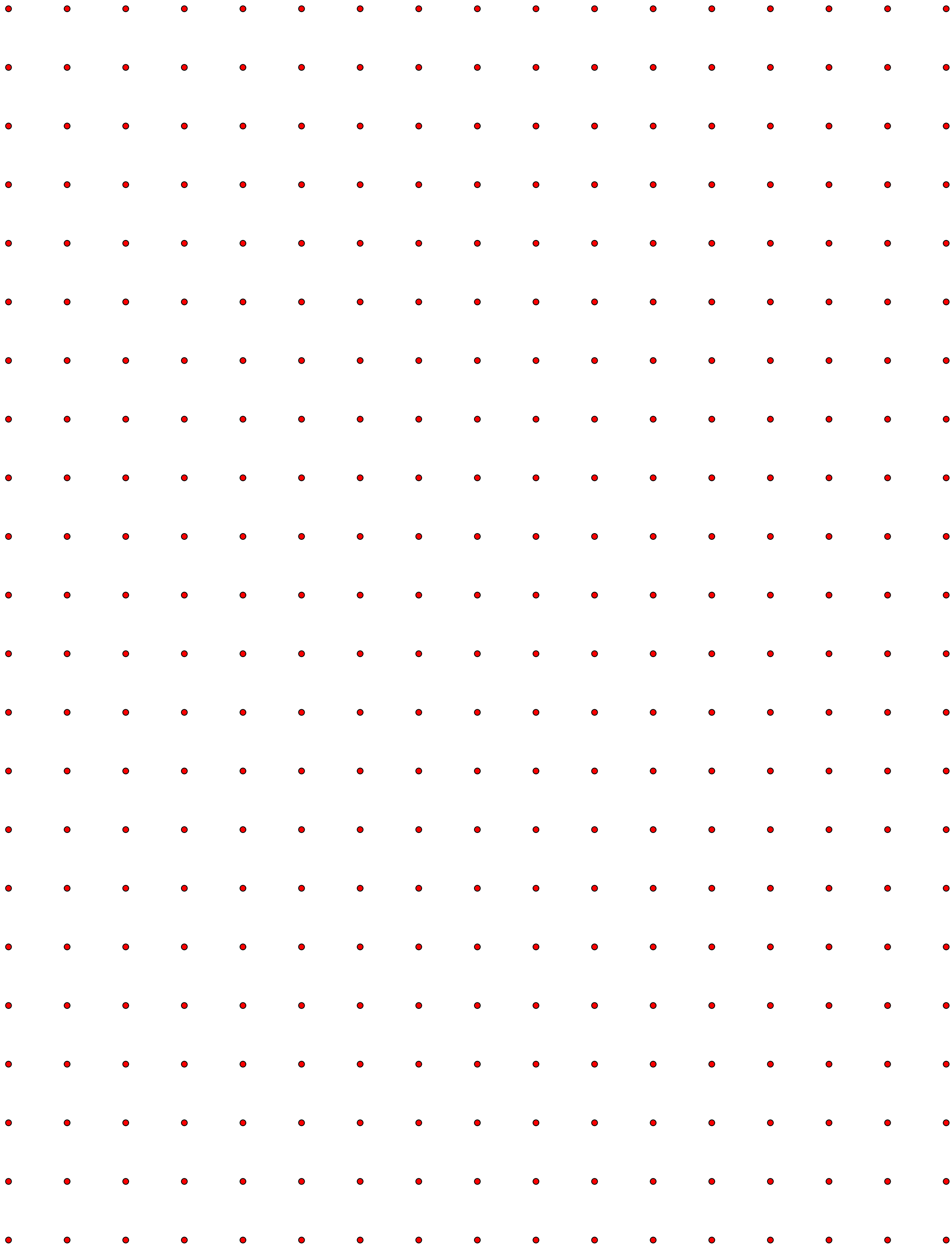
$$\begin{aligned} 1\text{área} &= 1\text{Dm}^2 = 100\text{m}^2 \\ 1\text{Ha} &= 1\text{Hm}^2 = 10{,}000\text{m}^2 = 110\text{áreas} \\ 1\text{Fanega} &= 64,596\text{áreas} \end{aligned}$$

B

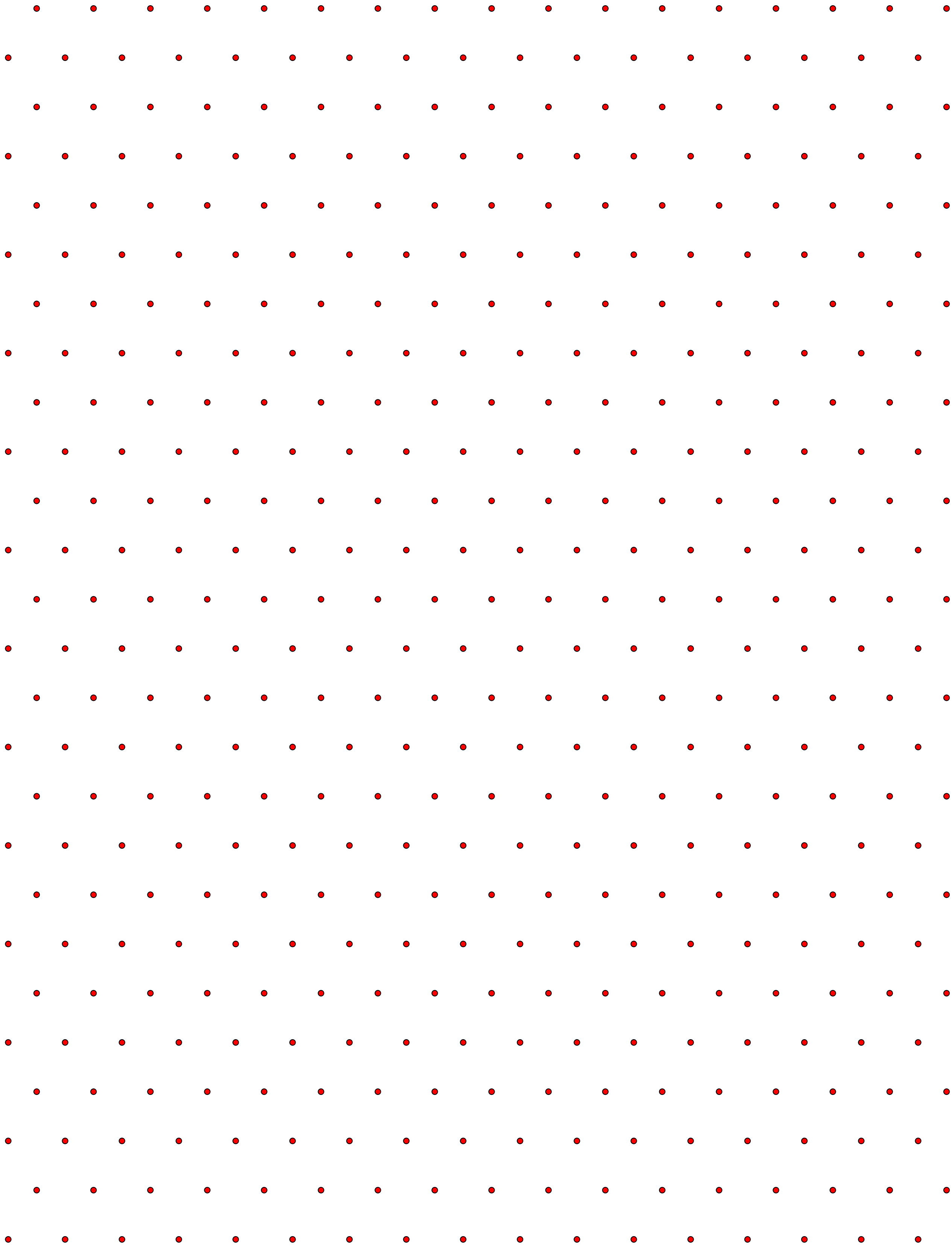
Recursos para trabajar

Se concede el derecho a imprimir y utilizar los modelos que se proporcionan a continuación para uso personal.

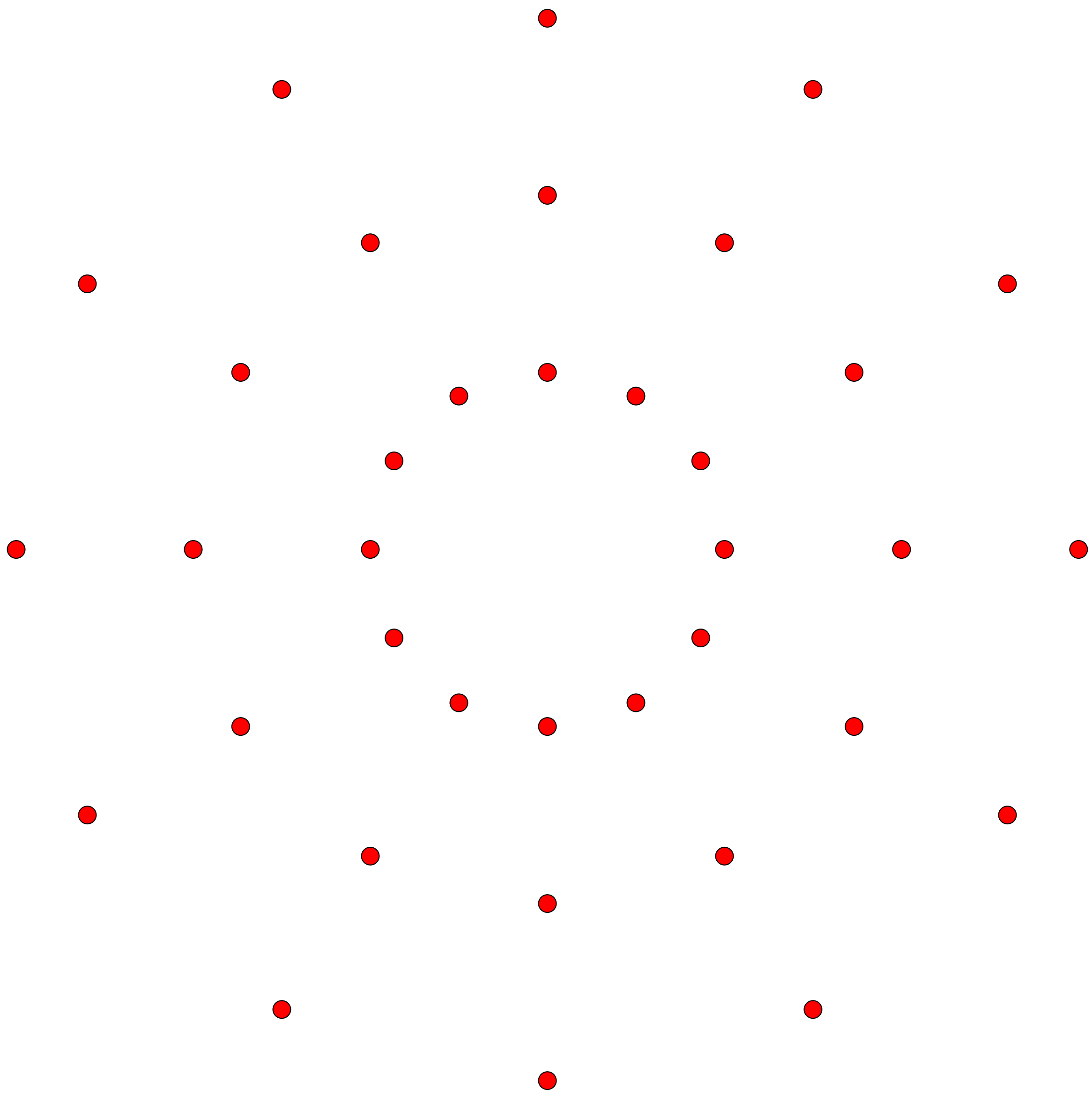
B.1 Trama cuadrangular



B.2 Trama triangular



B.3 Trama circular



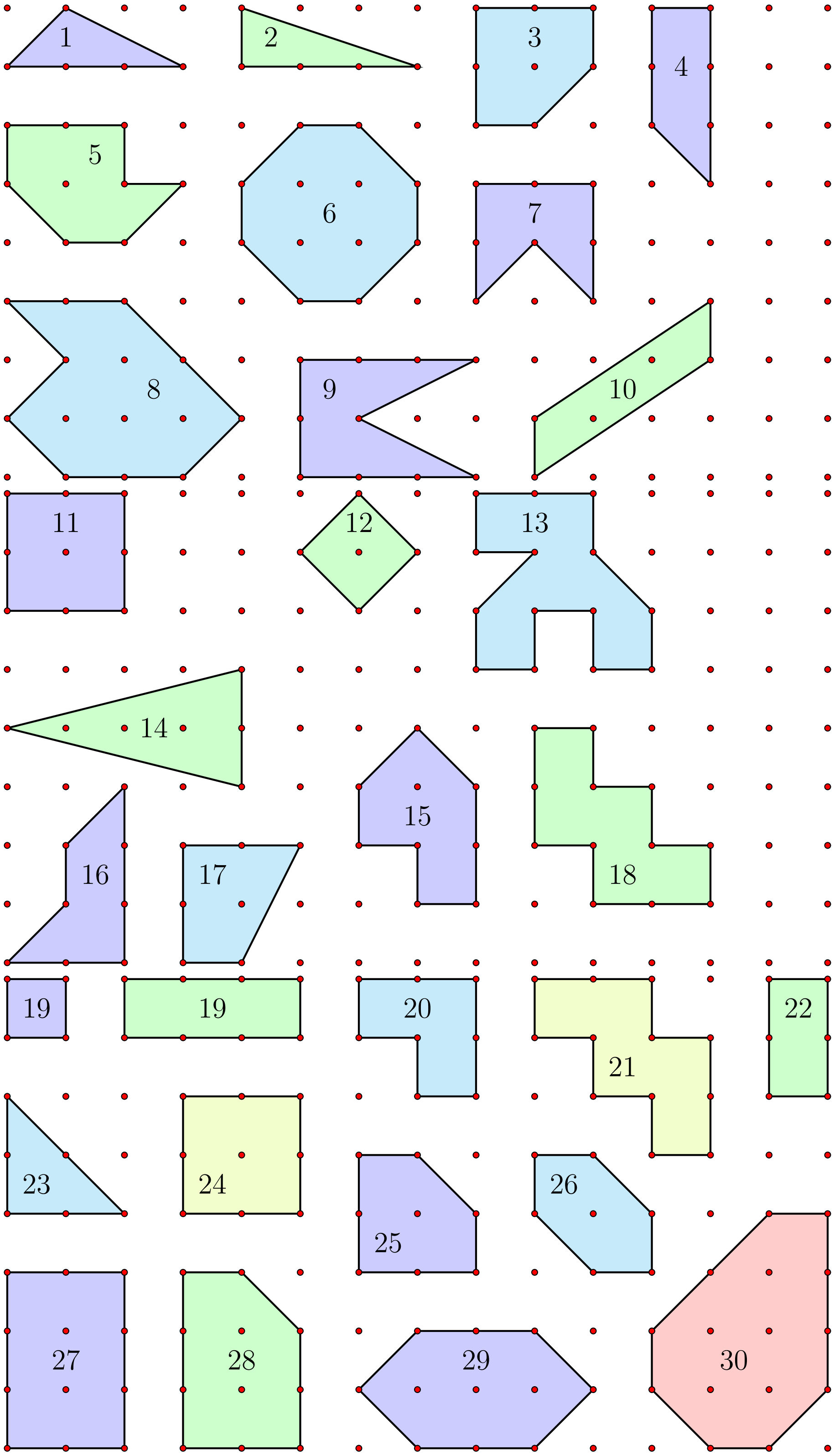
B.4 Análisis de tetraminós y pentaminós

Figura	Área	Perímetro	Tamaño diagonal

B.5 Análisis de polígonos reticulares

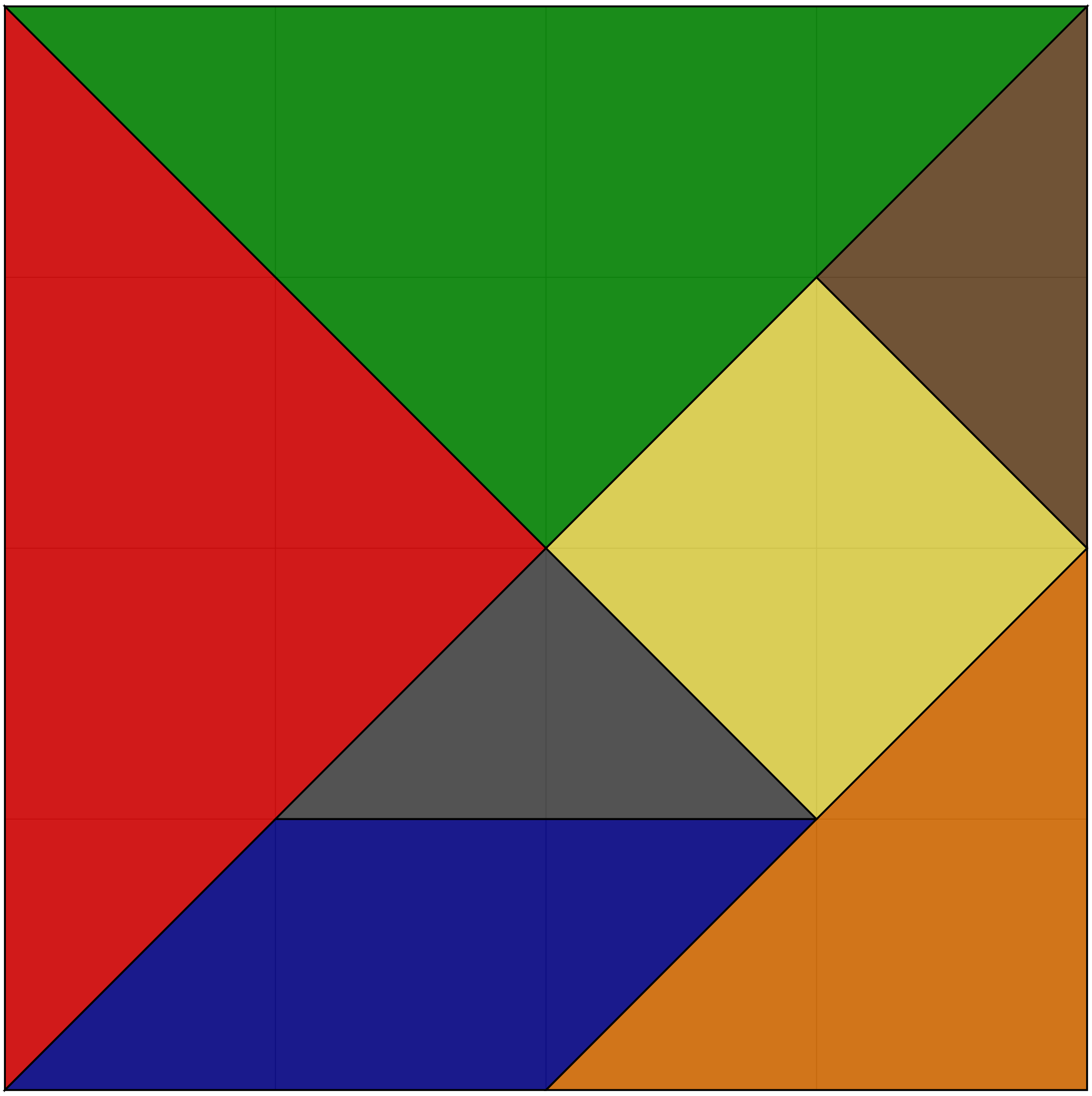
Nro	Puntos interiores	Puntos frontera	Área

B.6 Polígonos reticulares para practicar

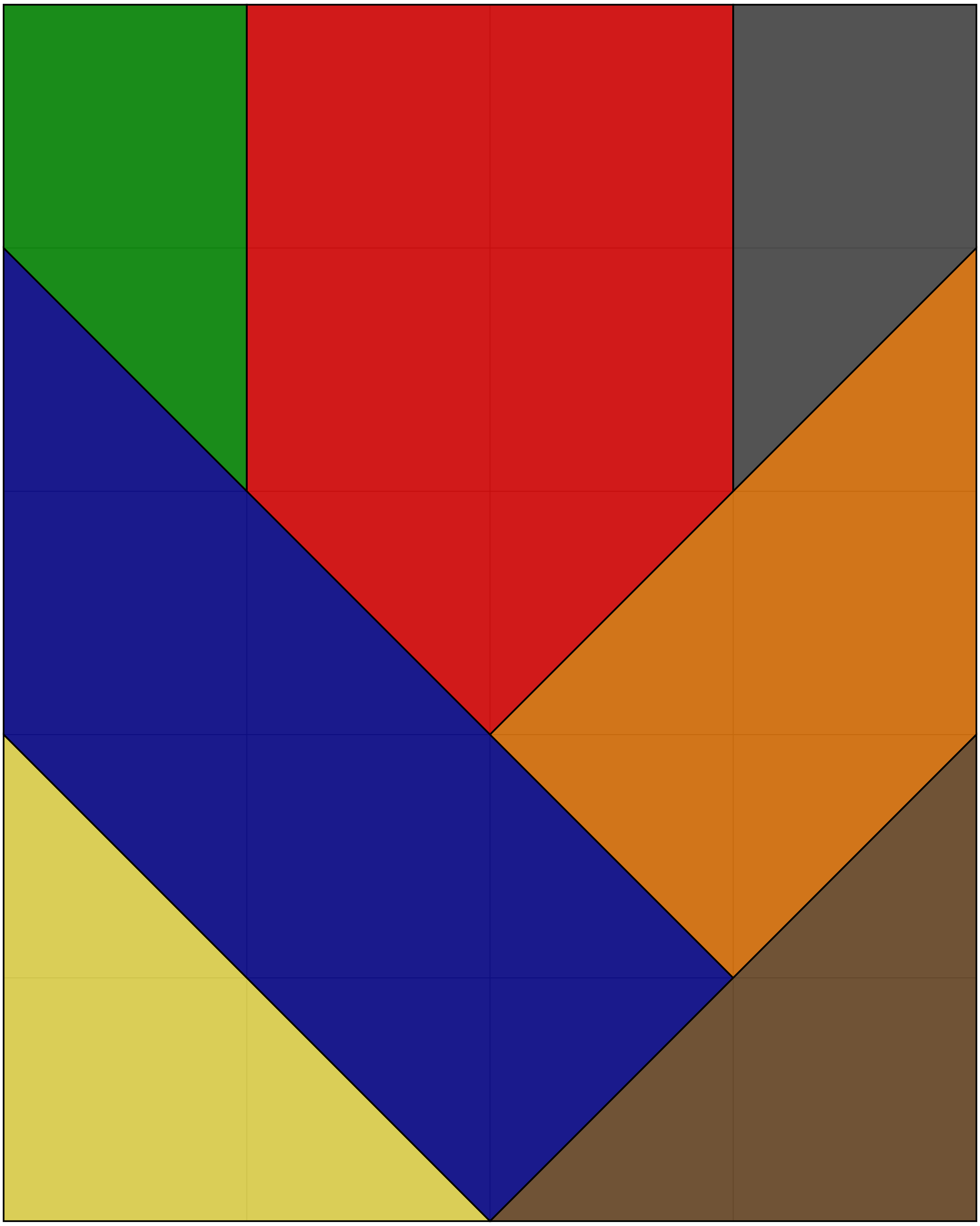


B.6.1 Tangrams para imprimir

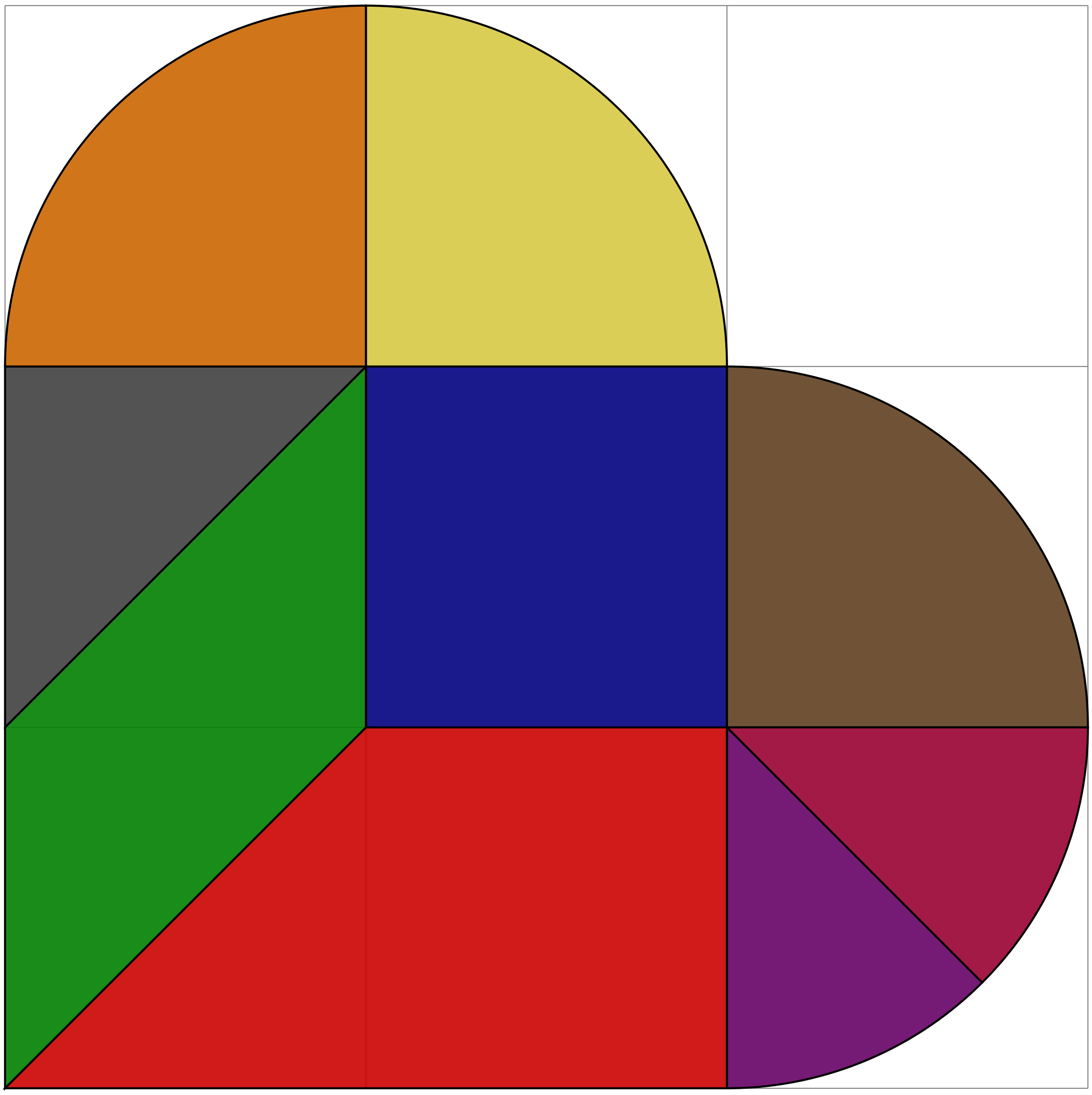
B.6.1.1 Tangram clásico



B.6.1.2 Tangram pitagórico



B.6.1.3 Cardiotangram



Referencias

Darke, I. (1982). A review of research related to the topological primacy thesis. *Educational Studies in Mathematics*, *13*, 119-142.

Euclides. (sobre el 300 a.C.) *Los elementos.* Descargado de `https://euclides.org/los-elementos/`

Godino, J. D., y Ruíz, F. (2003). *Geometría y su didáctica para maestros.* Universidad de Granada. Descargado de `http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/`

Jordan, C. (1887). *Cours d'analyse.*

Martin, J. L. (1976). An analysis of some of piagets topological task from a mathematical point of view. *Journal for research in mathematics education*, *7*, 8-24.

Ochaíta Alderete, E. (1983). Piaget's theory on space knowledge development. *Studies in Psychology*, *4*(14-15), 93-108. Descargado de `https://doi.org/10.1080/02109395.1983.10821356` doi: 10.1080/02109395.1983.10821356

Piaget, J., y Inhelder, B. (1947). *La représentation de l'espace chez l'enfant.* Paris: Presses Universitaires de France.

Pollak, H. O. (1997). Solving problems in the real world. En L. Steen (Ed.), *Why numbers count: Quantitative literacy for tomorrows america.* New York: The College Board.

van Hiele, P. (1986). *Structure and insight.* Orlando: Academic Press.

Veblen, O. (1905). Theory on plane curves in non-metrical analysis situs. *Transactions of the American Mathematical Society*, *6*(1), 83–98. Descargado de `http://www.jstor.org/stable/1986378`