



UNIVERSIDAD DE MALAGA

**SEMINARIO INTERDISCIPLINAR
SOBRE PROBLEMAS
REGIONALES Y URBANOS**

**Estimación de Índices de
Desigualdad y Pobreza a través del
Ajuste Econométrico de
Curvas de Lorenz**

Antonio Fernández Morales



UNIVERSIDAD DE MALAGA

SEMINARIO INTERDISCIPLINAR
SOBRE PROBLEMAS
REGIONALES Y URBANOS

Curso 1990-91

"Estimación de Índices de
Desigualdad y Pobreza a través del
Ajuste Económico de
Curvas de Lorenz"

Antonio Fernández Morales

Málaga, 1991

Nº 143

Documentos
de
Trabajo



**ESTIMACIÓN DE ÍNDICES DE
DESIGUALDAD Y POBREZA A TRAVÉS DEL
AJUSTE ECONÓMICO DE
CURVAS DE LORENZ**

ANTONIO FERNÁNDEZ MORALES

SEMINARIO INTERDISCIPLINAR SOBRE
PROBLEMAS REGIONALES Y URBANOS

DOCUMENTOS DE TRABAJO, 143

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA, 1991

INTRODUCCIÓN

La investigación sobre la desigualdad económica y la pobreza está cobrando un nuevo auge en los últimos años. Ello se debe a que se están produciendo multitud de aportaciones en el campo teórico de la medición de estos fenómenos, desde la sofisticación continua de los índices de desigualdad y pobreza, hasta la profundización en los criterios éticos o de bienestar asociados a dichos índices. Sin embargo, estas aportaciones no tienen su correspondiente desarrollo en el campo empírico. No se desarrollan métodos de estimación satisfactorios, y la calidad de la información deja mucho que desear, lo que constituye, sin duda, el mayor problema en este terreno.

La información sobre la distribución de la renta suele publicarse en forma de datos agrupados, generalmente en decilas o quintilas. Esto implica que la calidad de las estimaciones de índices de desigualdad y pobreza con dichos datos suele ser muy pobre. Está demostrado que con datos agrupados se llega a una importante subestimación de la desigualdad en una distribución. Por otra parte, la información de base en la que se basan estas publicaciones no es fácil de conseguir y, sobre todo, de manejar, debido al número muy elevado de observaciones de que constan las encuestas.

El objetivo básico de este trabajo consiste en encontrar un método para la estimación de índices de desigualdad y pobreza que sea eficaz, y a la vez sencillo y poco exigente en lo que se refiere a los datos.

El método que aquí se propone se basa en utilizar los datos agrupados para estimar econométricamente la curva de Lorenz de la distribución. Así, se puede obtener, partiendo de información agrupada, una representación continua de la distribución, que refleja la desigualdad existente, sin incurrir en la subestimación de la desigualdad inherente al agrupamiento.

Una vez estimada una curva de Lorenz continua se pueden obtener mediante integración numérica los índices de desigualdad y pobreza asociados a ella. Por otra parte, para los índices que no se relacionan directamente con la curva de Lorenz, se ha encontrado una relación con la derivada de la curva de forma que también pueden obtenerse integrando dicha derivada.

El trabajo se ha dividido en tres partes. En primer lugar, se ha realizado un estudio sobre las propiedades fundamentales de la curva de Lorenz con el objeto de poder discernir cuáles de las formas matemáticas propuestas pueden representar a la curva de Lorenz. Además, se han analizado las diferentes formas funcionales que se han aplicado a la curva de Lorenz, tanto en el terreno teórico, como en el empírico, puesto que se han comparado estimaciones para provincias españolas con características especiales para observar su comportamiento.

En segundo lugar, se han analizado los índices de desigualdad y pobreza más relevantes en la literatura económica, comparando sus propiedades y comportamiento.

Por último, se reseñan las expresiones que ligan a los índices de desigualdad y pobreza con la curva de Lorenz o con su primera derivada, en forma continua, y se han

estimado dichos índices para los datos de la distribución de la renta por provincias en España según la Encuesta de Presupuestos Familiares de 1980-81.

**1.- AJUSTE ECONOMÉTRICO DE FORMAS FUNCIONALES
CONTINUAS A LA CURVA DE LORENZ**

1.1.- LA CURVA DE LORENZ

La curva de Lorenz fue propuesta por este autor italiano en 1905, con el propósito de proporcionar un instrumento que permitiera comparar la desigualdad existente en diferentes distribuciones de renta. Desde entonces, la curva de Lorenz se ha convertido en un instrumento clásico en el estudio de la desigualdad económica, aunque se puede aplicar a muchos otros campos.

Por sí misma la curva de Lorenz constituye un criterio para ordenar distribuciones según su grado de desigualdad. Este criterio de ordenación parcial (parcial puesto que sólo puede aplicarse cuando las curvas de Lorenz no se cortan) está muy vinculado con un tipo especial de funciones de bienestar social, las funciones S-cóncavas, y en estudios muy recientes se están aplicando en su análisis conceptos más modernos como son los relacionados con la dominancia estocástica.

No obstante, en este trabajo la curva de Lorenz se utiliza como un instrumento para obtener estimaciones de indicadores de desigualdad y pobreza. Esto es posible debido a que hay muchos de estos indicadores que están basados en la curva de Lorenz. De hecho, el índice de desigualdad más conocido, el índice de Gini, está muy relacionado con la curva de Lorenz.

Como la curva de Lorenz se utilizará para obtener índices de desigualdad y pobreza, se dejan de lado los aspectos de la dominancia estocástica, y se tratarán a fondo los relacionados con las propiedades que definen a la curva, las formas funcionales que puede adoptar y los métodos econométricos de estimarlas.

1.1.1.- DEFINICIÓN DE LA CURVA DE LORENZ

Toda función de distribución de variable no negativa y media finita tiene asociada una Curva de Lorenz. La definición formal más general de la Curva de Lorenz consta de dos ecuaciones, que dan una expresión para la ordenada y otra para la abscisa de la curva en cada punto de la curva, que dependen de la función de distribución subyacente. Siguiendo a Kendall y Stuart se puede definir la curva de Lorenz de la forma siguiente:

Dada una función de distribución $F(x)$, con media μ y densidad $f(x)$, para $x > 0$, su curva de Lorenz asociada $L = \{(F(x), L(x)) / x \in [0, \infty)\}$ viene dada por:

Abscisa:

$$p = F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad (1)$$

Ordenada:

$$L(x) = F_1(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x tf(t) dt \quad (2)$$

Para cada valor de x , la ecuación de la abscisa da los valores de la función de distribución, $F(x)$, mientras que la ecuación de la ordenada da el momento centrado incompleto de primer orden (también llamado función de distribución del momento centrado de orden 1), F_1 .

La curva de Lorenz es una función $L: [0, \infty) \rightarrow L[0, 1]$, puesto que ambas coordenadas son distribuciones acumulativas. Es decir, la curva de Lorenz está inscrita en el cuadrado de lado 1.

Las ecuaciones anteriores nos darán una única expresión para la representación cartesiana de la curva de Lorenz ($L(p)$), (despejando t en (1) y resolviendo en (2)), si la función inversa de $F(x)$ está bien definida (es decir si $p=F(x)$ tiene una solución matemática de x en función de p y por tanto es invertible):

$$F^{-1}(t) = \underset{x}{\text{Min}}\{x: F(x) \geq t\} \quad (3)$$

La expresión resultante es la propuesta por Gastwirth(1971) como definición general de la curva de Lorenz:

$$L(p) = \mu^{-1} \int_0^p F^{-1}(t) dt, \quad 0 \leq p \leq 1 \quad (4)$$

1.1.2.-PROPIEDADES DE LA CURVA DE LORENZ

La curva de Lorenz puede definirse de forma alternativa a las anteriores a partir de sus propiedades matemáticas fundamentales. Dicha forma de caracterizar la curva de Lorenz se suele utilizar a la hora de buscar funciones matemáticas, independientes de funciones de distribución particulares, que puedan representar a una curva de Lorenz.

Así, podríamos definirla como:

Sea $L(p)$ una función definida y continua en $[0, 1]$ con segunda derivada $L''(p)$. $L(p)$ será una curva de Lorenz si y sólo si:

- i) $L(0) = 0$
- ii) $L(1) = 1$
- iii) $L'(0) \geq 0$
- iv) $L''(x) \geq 0$

Las condiciones i y ii significan que la curva debe pasar por los puntos (0,0) y (1,1), es decir, debe estar inscrita en un cuadrado de lado uno. Las condiciones iii y iv nos dicen que la curva debe ser creciente monótona y además convexa hacia el origen. Estas

propiedades son fácilmente demostrables¹.

Otras propiedades que verifica la curva de Lorenz son:

v) $L'(p) = x / \mu$

vi) $L''(p) = 1 / \mu f(x)$

vii) $L(p) \leq p$

viii) $0 \leq \int L(p) dp \leq 1/2$

ix) $L'(p) = 1$, en $p = F(\mu)$

x) $p - L(p) = \delta / 2\mu$, en $p = F(\mu)$

x) $L'(p) \rightarrow \infty$ cuando $p \rightarrow 1$

La propiedad v relaciona el valor de la pendiente de la curva de Lorenz con la renta marginal. Esta propiedad es muy útil para cualquier cálculo que implique valores marginales de renta, como son por ejemplo las líneas de pobreza. Por otra parte, la propiedad vi es la relación existente entre la segunda derivada de la curva de Lorenz y la función de densidad de x , $f(x)$.

La propiedad vii nos dice que la curva de Lorenz siempre estará por debajo de la diagonal principal, también llamada línea de equidistribución. La línea de equidistribución es la curva de Lorenz correspondiente a una distribución perfectamente equidistribuida, es decir, en la que todos los individuos tienen la misma renta.

La propiedad viii es una consecuencia lógica de la vii puesto que si la curva está siempre debajo de la bisectriz el área que comprende será forzosamente menor a 0,5.

La pendiente de la curva de Lorenz, según la propiedad ix se hace 1 en el valor que corresponde a la renta media, es decir, la pendiente de la curva de Lorenz se hace paralela a la línea de equidistribución en dicho punto.

La máxima diferencia entre p y $L(p)$ se produce en el punto correspondiente a la media de la distribución, es decir, donde la pendiente de la curva de Lorenz es igual a 1. Esta discrepancia entre p y $L(p)$, según la propiedad x es igual a la mitad del cociente entre la desviación media relativa y la media de la distribución. Este ratio es también conocido como Índice de Pietra y se ha usado como indicador de desigualdad.

1 Ver por ejemplo Dagum, C. (1980) o Levine, D.B. y Singer, N.B. (1970).

Por último, la propiedad xi merece un comentario aparte. Para funciones de distribución continuas con aproximación asintótica al eje horizontal por la derecha, es decir, sin un valor máximo de la variable finito, se cumplirá que la pendiente de la curva de Lorenz tenderá a infinito al aproximarse p a 1. Esta propiedad no se considera generalmente como necesaria o definitoria de la curva de Lorenz. De hecho, algunas de las formas continuas propuestas no la cumplen. No obstante, se debería comprobar cuál es el valor de la pendiente de la curva en el punto $p=1$, ya que, si no infinito, sí debe ser un valor suficientemente alejado de μ como para permitir un abanico de rentas altas suficientemente abierto y realista.

1.2.- AJUSTE DE FORMAS CONTINUAS A LA CURVA DE LORENZ

1.2.1.- LA CURVA DE LORENZ EMPÍRICA Y LA UTILIDAD DEL AJUSTE DE FORMAS CONTINUAS A LA CURVA DE LORENZ

Con frecuencia, la información estadística sobre la distribución de la renta está disponible, o publicada, en forma de datos agrupados. Además, en el caso de contar con información estadística de base (encuestas por ejemplo) más detallada sobre la distribución, el elevado número de observaciones hace muy engorroso el trabajo con datos micro y se prefiere agrupar en intervalos delimitados por fractiles. Esto significa que la población se ha dividido en un número, generalmente reducido, de clases o intervalos de renta, y por tanto sólo se dispone de ese número de puntos de la curva de Lorenz. La curva de Lorenz consiste entonces en una línea poligonal, llamada generalmente Curva de Lorenz empírica.

Se llama curva de Lorenz empírica a aquella curva de Lorenz que se construye directamente a partir de los datos procedentes del agrupamiento o de una muestra de la población, es decir, datos discretos. Estos datos consisten en un par de valores $(p_i, L(p_i))$ para cada una de los intervalos (x_{i-1}, x_i) en los que se ha agrupado a la población siguiendo un orden creciente.

La expresión matemática de la curva de Lorenz empírica es:

$$L(p) = \mu^{-1} \int_0^p F^{-1}(t) dt, 0 \leq p \leq 1 \quad (5)$$

Utilizar la curva de Lorenz empírica para calcular o derivar indicadores de desigualdad y pobreza induce necesariamente a un error consistente en la infravaloración del área de concentración. Esto se explica teniendo en cuenta que al agrupar a la población en intervalos de renta se está perdiendo información: la desigualdad existente dentro de cada intervalo. En otras palabras, al utilizar la curva de Lorenz empírica (poligonal) se está suponiendo que la distribución dentro de cada intervalo es uniforme, es decir, que todos los individuos del intervalo tienen asociado el valor medio del grupo, μ_i . Esta suposición implica así mismo que la Curva de Lorenz empírica representa una

distribución menos desigual que la poblacional.

Por otra parte, cuanto mayor sea el número de datos, es decir, más vértices tenga la poligonal, menor será la magnitud de dicho error.

Gráficamente, se puede observar la afirmación anterior, ya que el área comprendida entre la línea de equidistribución y la poligonal que constituye la curva de Lorenz empírica es menor que la comprendida entre la línea de equidistribución y la curva de Lorenz poblacional.

Se han propuesto varios métodos para evitar el serio error de agrupamiento cometido al usar la línea poligonal para la estimación de indicadores de desigualdad y pobreza. Los más utilizados son:

- Ajuste de una forma continua a la curva de Lorenz
- Ajuste de una función de distribución continua a la distribución de la renta.
- Cálculo de cotas a la curva de Lorenz

El ajuste de funciones continuas a los datos discretos de la curva de Lorenz empírica es un método muy utilizado en los estudios de desigualdad económica y pobreza. Entre otras importantes ventajas de este método de trabajo se encuentran:

- a) Si el ajuste es bueno se pueden conseguir resultados muy parecidos a los que se obtendrían a partir de la información estadística de base, pero a un costo mucho menor.
- b) El cálculo de indicadores de pobreza y desigualdad se simplifica enormemente, sobre todo cuando la forma funcional tiene asociada una fórmula sencilla para obtenerlos. De todas formas aquellos indicadores asociados a la curva de Lorenz se pueden obtener integrando numéricamente.
- c) La forma continua ajustada se convierte en un excelente instrumento para interpolar dentro de los intervalos o extrapolar en los grupos superiores y/o inferiores de renta. Esta característica es especialmente importante a la hora de estimar indicadores de pobreza cuando se utilizan líneas de pobreza no especificadas en el diseño de los datos de base.
- d) Mediante la derivada de la curva ajustada se pueden realizar simulaciones de la función de distribución de la renta subyacente, lo cual permite estimar valores marginales de renta, cuantiles e indicadores asociados directamente a la distribución y no a la curva de Lorenz.

1.2.2.- APROXIMACIONES ALTERNATIVAS

El error de agrupamiento cometido al trabajar con datos de la distribución de la renta agrupados es un problema que ha sido muy estudiado. El ajuste de una forma funcional continua a la curva de Lorenz es una propuesta relativamente reciente, y usada exclusivamente para la estimación de indicadores de desigualdad. No obstante, hay otras posibles soluciones al mencionado tipo de error.

La más conocida es, sin duda, el ajuste de funciones de densidad continuas a la

distribución de la renta, a partir de las cuales se puedan derivar los indicadores de desigualdad. El estudio de funciones de densidad aplicables a la distribución de la renta es un campo de una larga tradición y muy prolífico, que sigue siendo objeto de frecuentes aportaciones. Se han propuesto infinidad de funciones de densidad a la distribución de la renta. Algunas de estas funciones tienen asociados indicadores de desigualdad fácilmente estimables, incluso algunas tienen una expresión de la curva de Lorenz explícita.

Otra posible solución propuesta para la corrección del error de agrupamiento es la obtención de cotas inferiores y superiores a la curva de Lorenz, lo más próximas posibles, ante la imposibilidad de obtener los valores poblacionales de la misma.

A continuación se tratarán de forma breve ambas aproximaciones.

1.2.2.1.- AJUSTE DE FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN DE LA RENTA

Las primeras funciones que se propusieron como candidatas para describir la distribución de la renta, típicamente asimétrica hacia la derecha, fueron la de Pareto y la log-normal. Ambas son funciones sencillas, con uno y dos parámetros, respectivamente. No obstante, los ajustes que proporcionan no son muy buenos, prefiriéndose la función de Pareto para las colas altas de la distribución, y la log-normal para los tramos medios. Posiblemente, ésta es la causa de que las Curvas de Lorenz que tienen asociadas no suelen dar buenos resultados.

Posteriormente se ha propuesto una gran diversidad de funciones de distribución, generalmente generalizando funciones, cuya complejidad ha ido creciendo progresivamente, llegándose incluso a funciones con cuatro parámetros. A mayor complejidad se consiguen mejores ajustes, pero a costa de una dificultad creciente en el manejo. En el gráfico 1.2.2.1.a pueden observarse algunas de las más frecuentes y las relaciones entre ellas.

En relación con la estimación de indicadores de desigualdad, hay que mencionar lo siguiente: Generalmente las funciones mencionadas generan una fórmula de cálculo más o menos compleja del Índice de Gini. No obstante, obtener otros indicadores de desigualdad o pobreza resulta prácticamente imposible. Ello se debe a que las ecuaciones de la curva de Lorenz asociadas no suelen ser funciones explícitas, como puede apreciarse en la tabla 1.2.2.1, en la que se muestran las curvas de Lorenz asociadas a algunas funciones de distribución de la renta.

TABLA 1.2.2.1 (I): FAMILIAS PARAMÉTRICAS DE CURVAS DE LORENZ ASOCIADAS A VARIAS FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN

| FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN | CURVA DE LORENZ |
|---|---|
| IGUALITARIA $F(x) = \begin{cases} 0 & x < \mu \\ 1 & x \geq \mu \end{cases}$ | $L(p) = p$ |
| UNIFORME $F(x) = \frac{x - a}{\theta}, \quad a < x < a + \theta$ | $L(p) = \frac{ap - \theta \frac{p^2}{2}}{a + \frac{\theta}{2}}$ |
| EXPONENCIAL $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0$ | $L(p) = p + \frac{(1 - p)Ln(1 - p)}{(1 + \lambda)}$ |
| EXPONENCIAL 2 PARÁMETROS $F(x) = 1 - e^{-\lambda(x-a)}, \quad x > a$ | $L(p) = p + \frac{(1 - p)Ln(1 - p)}{(1 + \lambda a)}$ |

Fuentes: Dagum, C.(1980), Gastwirth, J, (1972,1973).

TABLA 1.2.2.1 (II): FAMILIAS PARAMÉTRICAS DE CURVAS DE LORENZ ASOCIADAS A VARIAS FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN

| FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN | CURVA DE LORENZ |
|---|---|
| <p>GEOMÉTRICA</p> $F(x) = 1 - \gamma^x, \quad 0 < \gamma < 1$ | $L(P) = 1 - k\gamma^{k-1} + (1 - \gamma)k[p - (1 - \gamma^{k-1})]$ |
| <p>PARETO</p> $F(x) = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^\alpha, \quad x > a, \alpha > 1$ | $L(p) = 1 - (1 - p)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$ |
| <p>SING-MADDALA</p> $F(x) = 1 - (1 + a_1 x^{a_2})^{-a_3}, \quad y \geq 0$ | $L(p) = B \left[1 - (1 - p)^{\frac{1}{a_3}}; 1 + \frac{1}{a_2}, a_3 - \frac{1}{a_2} \right]$ |
| <p>DAGUM I</p> $F(x) = (1 + \lambda x^{-\delta})^{-\beta}, \quad x > 0, \beta, \lambda, \delta > 0$ | $L(p) = B \left[p^{\frac{1}{\beta}}; \beta + \frac{1}{\delta}, 1 - \frac{1}{\delta} \right], \delta > 1$ |

Fuentes: Dagum, C.(1980), Gastwirth, J, (1972,1973).

1.2.2.2- CÁLCULO DE COTAS SUPERIORES E INFERIORES A LA CURVA DE LORENZ

Este método fue desarrollado por Gastwirth(1972), y posteriormente Mehran realizó una aportación en 1975. Con él se pretende obtener una cota superior y una inferior al índice de Gini poblacional, cuando se trabaja con datos agrupados. Estas cotas del índice de Gini Poblacional van asociadas geoméricamente a una curva de Lorenz inferior y a una curva de Lorenz superior, respectivamente, a la curva de Lorenz poblacional.

La curva de Lorenz superior (que proporciona una cota inferior al índice de Gini) más sencilla es la consistente en la línea poligonal que une los puntos de la curva de Lorenz obtenida de los datos agrupados, es decir, la curva de Lorenz empírica. Como ya se sabe, esta poligonal subestima el área de concentración y el índice de Gini, por lo que constituye una cota inferior del mismo.

Como curva de Lorenz inferior (y cota superior del índice de Gini) podemos considerar, en primer lugar, un caso sencillo, propuesto por Gastwirth,J.L.(1972). Consiste en la curva de Lorenz resultante de la suposición de que la renta se reparte dentro de cada intervalo (x_{i-1},x_i) dando la menor renta posible, x_{i-1} , a una fracción f de la población del intervalo, y al resto la renta máxima posible, x_i . El valor de f lo podemos obtener a partir de la renta media del intervalo μ_i .

$$f = 1 - \frac{\mu_i - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad (6)$$

Así tendremos en cada intervalo (p_{i-1},p_i) una curva de Lorenz consistente en una línea quebrada en el punto de abscisa p_i^* , que une $(p_{i-1},L(p_{i-1}))$ con $(p_i,L(p_i))$. El valor de $(p_i^*,L(p_i^*))$, llamado punto de interpolación, lo obtenemos de

$$\begin{aligned} p_i^* &= p_{i-1} + f(p_i - p_{i-1}) \\ L(p_i^*) &= L(p_{i-1}) + f\left(\frac{x_i - x_{i-1}}{\mu}\right) \end{aligned} \quad (7)$$

La expresión de esta curva de Lorenz inferior quedaría, por tanto:

$$L(p_{i-1}) + [L(p_i^*) - L(p_{i-1})] \frac{p-p_{i-1}}{p_i^*-p_{i-1}}, \quad p_{i-1} < p < p_i^* \quad (8)$$

$L(p)=$

$$L(p_i^*) + [L(p_i) - L(p_i^*)] \frac{p-p_i^*}{p_i-p_i^*}, \quad p_{i-1} < p < p_i^* \quad (9)$$

Se pueden obtener expresiones de curva de Lorenz superiores e inferiores más próximas entre sí, si la función de distribución subyacente posee una tasa de riesgo instantánea decreciente (DHR, Decreasing Hazard Rate) de densidades decrecientes². La función de distribución de la renta sólo cumple esta propiedad en la cola superior, por lo que las cotas obtenidas con este método sólo pueden aplicarse a los intervalos (x_{i-1}, x_i) que verifiquen la propiedad DHR. Utilizando esta propiedad se pueden obtener las siguientes Curvas de Lorenz superior e inferior.

Curva de Lorenz superior:

$$L(p) = L(p_{i-1}) + \frac{[L(p_i) - L(p_{i-1})]}{\mu_i} \left[x_{i-1} \frac{p - p_{i-1}}{p_i - p_{i-1}} + (\mu_i - x_{i-1}) \frac{(p - p_{i-1})^2}{(p_i - p_{i-1})^2} \right]^2 \quad (10)$$

Curva de Lorenz inferior:

$L(p) =$

$$L(p_{i-1}) + [L(p_i^*) - L(p_{i-1})] \frac{p - p_{i-1}}{p_i^* - p_{i-1}}, \quad p_{i-1} < p < p_i^* \quad (11)$$

$$L(p_i^*) + \frac{[L(p_i) - L(p_i^*)]}{\mu_i^*} \left[x_{i-1} \frac{p - p_i^*}{p_i - p_i^*} + (\mu_i^* - x_{i-1}) \frac{(p - p_i^*)^2}{(p_i - p_i^*)^2} \right], \quad p_i^* < p < p_i \quad (12)$$

En el caso de esta curva de Lorenz inferior se demuestra que la distribución más desigual posible cuando la función de distribución satisface la propiedad DHR es aquella en la que dentro de cada intervalo (x_{i-1}, x_i) la renta se reparte dando a una fracción f de la población del grupo la renta más baja posible x_{i-1} , y distribuyendo el resto de la renta uniformemente entre el resto de la población del grupo. El valor de f viene dado por:

$$f = 1 - \frac{2(\mu_i - x_{i-1})[L(p_i) - L(p_i^*)]}{x_i - x_{i-1}} \quad (13)$$

Ahora la curva de Lorenz inferior será lineal en (p_{i-1}, p_i^*) , y no lineal en (p_i^*, p_i) .

Las Curvas de Lorenz superiores e inferiores anteriores (excepto en el caso sencillo de la curva de Lorenz empírica) exigen para su cálculo el conocimiento de los límites y la media de cada intervalo de renta en los que se agrupa la población. Cuando no se conocen estos datos, se puede usar como Curva de Lorenz inferior la propuesta por Mehran(1975), basada en las tangentes a la curva de Lorenz poblacional en los puntos $(p_i, L(p_i))$. Las

2 Una función de distribución $F(x)$ definida en $[a, \infty)$ cumple la propiedad DHR si $-\log[1-F(x)]$ es cóncavo para $x \geq a$. Ver Gastwirth(1972).

pendientes de dichas tangentes se calculan a través de los puntos donde se cortan, es decir, los puntos de interpolación $(p_i^*, L(p_i^*))$. Estos valores se obtienen iterativamente según el procedimiento siguiente:

$$p_i = 2p_i - p_{i-1}^*; \quad p_{k-1}^* = 1 \quad (14)$$

$$L(p_i) = 2L(p_{i-1}) - L(p_{i-1}^*); \quad L(p_1^*) = 0 \quad (15)$$

Las pendientes de las tangentes son:

$$b_i = \begin{cases} \beta_i & \text{si } \beta_i > b_i^* \\ b_i^* & \text{si } \beta_i \leq b_i^* < \beta_{i+1} \\ \beta_{i+1} & \text{si } b_i^* > \beta_{i+1} \end{cases}$$

donde

$$b_i^* = \frac{L(p_i) - L(p_i^*)}{p_i - p_i^*}$$

$$\beta_i = \frac{L(p_i) - L(p_{i-1})}{p_i - p_{i-1}} \quad (16)$$

De esta manera, obtenemos una curva de Lorenz inferior, que no es tan precisa como las que aporta Gastwirth(1972), pero, por otra parte, necesita menos información para su cálculo.

1.2.3.- FORMAS FUNCIONALES DISPONIBLES

Dentro de la gran variedad de formas funcionales que se pueden ajustar a la curva de Lorenz podemos distinguir entre dos tipos bien diferenciados:

- Formas funcionales derivadas de una función de distribución de la renta.
- Formas funcionales que son independientes de las funciones de distribución de la renta.

Entre las especificaciones procedentes de funciones de distribución conocidas sólo se ha utilizado, y con escaso éxito, la correspondiente a la Ley de Pareto. Esta función es muy simple, pues sólo consta de un parámetro y no proporciona buenos ajustes.

La idea de utilizar especificaciones independientes de funciones de distribución particulares fue introducida por Kakwani y Podder(1973), y ha sido seguida por diversos autores. En general se considera una función admisible para representar una curva de Lorenz cuando cumple las propiedades i) a iv) del epígrafe 1.2.1. A continuación se comentarán brevemente las funciones que se han propuesto en la literatura desde entonces, y que figuran en la tabla 1.2.3. Por otra parte, las relaciones que existen entre ellas se pueden ver en la figura 1.2.3.

TABLA 3.3.1 (I).-FAMILIAS PARAMÉTRICAS DE CURVAS DE LORENZ NO ASOCIADAS A FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN PARTICULARES.

| | |
|-------------------------------------|---|
| Kakwani y Podder(1973) | $L(p) = p^\alpha e^{-\beta(1-p)}$ |
| Kakwani y Podder(1976) | $\eta = \alpha\pi^\alpha(\sqrt{2} - \pi)$ $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(p + L(p)), \quad \pi = \frac{1}{\sqrt{2}}(p - L(p))$ |
| Kakwani (1980) | $L(p) = p - Ap^\alpha(1-p)^\beta, \quad 0 < \alpha, < 1$ |
| Rasche, Gaffney, Koo, y Obst (1980) | $L(p) = [1 - (1-p)^\alpha]^{\frac{1}{\beta}}$ |

TABLA 3.3.1 (II).-FAMILIAS PARAMÉTRICAS DE CURVAS DE LORENZ NO ASOCIADAS A FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN PARTICULARES.

| | |
|---------------------------|---|
| Gupta (1984) | $L(p) = pA^{p-1}, \quad A > 0$ |
| Villaseñor y Arnold(1989) | $L(p) = \frac{-(bp + e) - (\alpha p^2 + \beta p + e^2)^{\frac{1}{2}}}{2}$ $e = -(a + b + d + 1), \quad \alpha < 0, -e > 0$ $\alpha = \beta^2 - 4a, \quad d \geq 0, a + d - 1 \leq 0$ $\beta = 2be - 4d$ |
| Ortega y otros (1991) | $L(p) = p^\alpha [1 - (1 - p)^\beta]; \quad \alpha \geq 0; 0 < \beta \leq 1$ |
| Bassman y otros (1990) | $L(p) = p^{ap+b} e^{-g(1-p^2)-h(1-p)}$ |

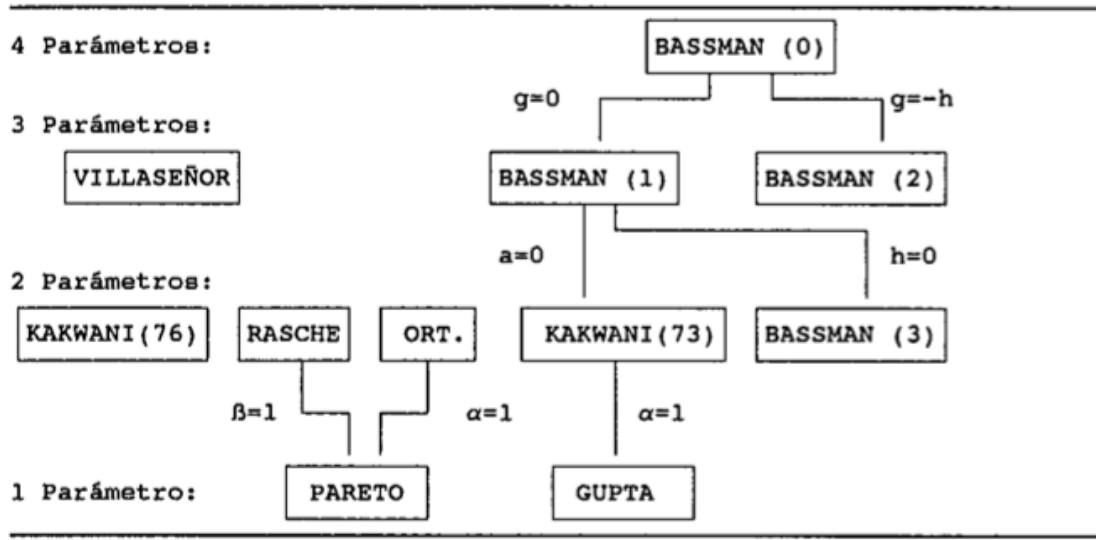


Figura 1.2.3: FAMILIAS PARAMÉTRICAS DE CURVAS DE LORENZ

Función propuesta por Kakwani y Podder (1973)

Fue la primera función no derivada de una función de distribución propuesta para el ajuste de la curva de Lorenz. Su especificación general³ es la siguiente:

$$L(p) = p^\alpha e^{-\beta(1-p)} \quad (17)$$

Como se puede observar, esta especificación se puede linealizar tomando logaritmos y, por tanto, puede ser estimada con Mínimos Cuadrados Ordinarios. Sin embargo, Kakwani y Podder proponen, además, un método de estimación consistente a través de MCG. No obstante, dicho método no mejora sustancialmente los resultados obtenidos con MCO, según prueban en su aplicación empírica para Australia.

La integral de esta curva, a la hora de calcular indicadores de desigualdad, puede obtenerse directamente a través de las tablas de la distribución gamma incompleta si β es negativo, y a través de las de la función hipergeométrica si α y β son no negativos.

La pendiente de esta especificación para la curva de Lorenz en el punto $p=1$ es igual a $L'(1)=\alpha+\beta^4$. Por tanto, la renta máxima que permite esta curva es igual a $\mu(\alpha+\beta)$, siendo μ la renta media. Este valor parece no ser suficientemente alto.

Por último, en general esta especificación de la curva de Lorenz parece ajustarse mejor a los tramos bajos de la distribución que a los tramos altos⁵.

Función propuesta por Kakwani y Podder (1976)

Kakwani y Podder proponen en 1976 una nueva forma de estimar la curva de Lorenz. Se trata de realizar un cambio de ejes de coordenadas, de forma que se pueda apreciar mejor la simetría de la curva. Para ello se toma como eje de abscisas la línea de equidistribución, manteniendo el origen en (0,0).

La función propuesta queda:

$$\begin{aligned} \eta &= \alpha\pi^\alpha(\sqrt{2} - \pi) \\ \eta &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p + L(p)), \quad \pi = \frac{1}{\sqrt{2}}(p - L(p)) \end{aligned} \quad (18)$$

Esta función también puede linealizarse y, por tanto, ser estimada con Mínimos Cuadrados Ordinarios.

Las medidas de desigualdad relacionadas con el ratio de concentración de esta curva se pueden obtener fácilmente a través de la fórmula del ratio de concentración

3 Además de esta especificación proponen un caso particular, con sólo un parámetro, cuando $\alpha=1$.

4 La derivada de la curva es igual a $L'(p)=(e^{-\beta(1-p)})(\alpha p^{\alpha-1} + \beta p^\alpha)$.

5 Ver A. Fernández Morales, G. Martín Reyes y A. García Lizana (1988).

(índice de Gini):

$$RC = 2a(\sqrt{2})^{1+\alpha+\beta} B(1+\alpha, 1+\beta)$$

Sin embargo, esta especificación tiene un importante inconveniente, a nuestro entender, consistente en que el cambio de coordenadas realizado para la estimación es incómodo de deshacer. Para obtener frecuencias estimadas es necesario resolver con métodos numéricos una ecuación no lineal bastante complicada. Esto dificulta enormemente la interpolación a lo largo de la curva.

Función propuesta por Rasche, Gaffney, Koo y Obst (1980)

La curva propuesta por Rasche y otros tiene una interesante propiedad consistente en que incluye a la curva de Lorenz derivada de la Ley de Pareto como caso particular cuando $b=1$. Su especificación es la siguiente:

$$L(p) = [1 - (1 - p)^\alpha]^\frac{1}{\beta} \quad (19)$$

El índice de Gini asociado a esta curva es fácil de calcular, a través de la fórmula:

$$G = 1 - (2/\alpha) B(1/\alpha, 1/\beta + 1)$$

Esta función tiene como inconveniente citado con frecuencia la imposibilidad de linealización. Ello implica que su estimación debe realizarse a través de métodos no lineales, como por ejemplo Mínimos Cuadrados No Lineales. No obstante, esto no constituye un problema de importancia, dado que la mayoría de los paquetes de software econométrico incorporan este método de estimación, y en las pruebas realizadas se han necesitado pocas iteraciones, como se verá más adelante.

Función propuesta por Kakwani(1980)

Kakwani vuelve a proponer una especificación diferente para la curva de Lorenz en 1980. Su especificación es:

$$L(p) = p - Ap^\alpha(1 - p)^\beta, \quad 0 < \alpha, < 1 \quad (20)$$

Esta curva da mejores ajustes que las propuestas por el mismo autor en ocasiones anteriores, y también puede estimarse usando Mínimos Cuadrados Ordinarios. No obstante, y a pesar de que ha sido usada varias veces en la literatura económica, esta especificación no es admisible en un sentido estricto, puesto que no está garantizada la propiedad i) mencionada en el epígrafe 1.2.1. Es decir, con esta curva nos podemos encontrar con valores negativos de $L(p)$.

Los valores negativos de $L(p)$ aparecen en el extremo inferior de la distribución, y sólo para valores muy pequeños de p . Por tanto, si bien para estudios de toda la distribución no tendrán mucha importancia, cuando se estudie la cola izquierda de la Curva, por ejemplo en estimaciones de indicadores de pobreza, sí que pueden distorsionar los resultados.

Función propuesta por Gupta (1984)

La curva de Ranjan Gupta(1984) es, en realidad, el caso particular de la propuesta por Kakwani y Podder (1973), cuando $\alpha=1$ (Gupta llama A a la expresión $e^{-\beta}$). Su especificación es:

$$L(p) = pA^{p-1}, \quad A > 0 \quad (21)$$

Se puede estimar a través de Mínimos Cuadrados Ordinarios utilizando la transformación logarítmica siguiente:

$$\ln\left(\frac{L(p)}{p}\right) = (1 - p)\ln(A) \quad (22)$$

Esta especificación constituye el miembro más sencillo, con sólo un parámetro, de la familia de curvas propuesta por Bassman y otros(1990), que también incluye a la de Kakwani y Podder (1973).

Función propuesta por Villaseñor y Arnold (1989)

La propuesta de Villaseñor (1989) consiste en ajustar a la curva de Lorenz empírica una rama de elipse. La especificación de la curva queda:

$$L(p) = \frac{-(bp + e) - (\alpha p^2 + \beta p + e^2)^{\frac{1}{2}}}{2} \quad (23)$$
$$e = -(a + b + d + 1), \quad \alpha < 0, -e > 0$$
$$\alpha = \beta^2 - 4a, \quad d \geq 0, a + d - 1 \leq 0$$
$$\beta = 2be - 4d$$

El método de estimación es de tipo no lineal, y la función a estimar tiene tres parámetros, lo cual resta un grado de libertad frente a las especificaciones anteriores, que sólo tienen uno o dos parámetros.

Este caso tiene la ventaja de que tanto la función de distribución como la función de densidad asociadas a la curva se pueden determinar, ya que las derivadas de esta curva son invertibles, lo cual facilita los problemas de interpolación. En cambio, las fórmulas de cálculo del índice de Gini son muy complicadas.

Función propuesta por el Ortega y otros (1991)

La curva de Lorenz propuesta por Ortega y otros también pertenece al grupo de las especificaciones no linealizables, por lo que su estimación se debe realizar usando métodos no lineales, lo cual no es demasiado problemático, como ya se mencionó. La forma funcional es la siguiente:

$$L(p) = p^\alpha [1 - (1 - p)^\beta]; \quad \alpha \geq 0; 0 < \beta \leq 1 \quad (24)$$

Por otra parte tiene el atractivo teórico de que, igual que la especificación de Rasche y otros, incluye como caso particular a la de Pareto. Además el cálculo del índice de Gini y otros Indicadores asociados resulta muy sencillo. Por ejemplo, las fórmulas de cálculo de los indicadores de Gini, Kakwani y Chackravarty son las siguientes:

Función propuesta por Bassman, Hayes, Slottje y Johnson (1990)

Estos autores han propuesto una forma funcional que generaliza la de Kakwani y Podder(1973), añadiendo dos nuevos parámetros. De esta manera nos encontramos con la forma general de 4 parámetros y cinco formas particulares de 3, 2 y un parámetro. La especificación de la forma general es la siguiente:

$$L(p) = p^{ap+b} e^{-g(1-p^2)-h(1-p)} \quad (25)$$

Las formas particulares de esta especificación son las siguientes:

Tres parámetros:

- i) $g=0$
- ii) $h=-g$

Dos parámetros:

- iii) $g=0, h=0$
- iv) $g=0, \alpha=1$ (especificación de Rasche(1973) con dos parámetros)

Un parámetro:

- v) $g=0, h=0, \alpha=1$ (especificación de Kakwani y Podder(1973) con un parámetro o Gupta(1984))

La estimación de estas curvas se puede realizar siempre con Mínimos Cuadrados Ordinarios, ya que la función general puede linealizarse tomando logaritmos. Además se pueden realizar contrastes de hipótesis para determinar el número óptimo de parámetros a incluir, estando generalmente entre dos y tres. Entre las formas particulares de esta curva, las que parecen dar peor resultado son la de un sólo parámetro y la de dos parámetros, que coincide con la de Kakwani y Podder(1973).

Por otra parte, los autores no dan fórmulas de cálculo para ningún indicador de desigualdad.

1.3.- ESTIMACIÓN Y ANALISIS COMPARATIVO DE LAS DIFERENTES FORMAS FUNCIONALES PARA LA CURVA DE LORENZ

Con el fin de realizar un análisis comparativo más detallado que el del apartado anterior, y utilizando los últimos datos disponibles para España de la distribución del ingreso, se han realizado varias estimaciones de las formas funcionales más usuales para la curva de Lorenz.

Para utilizar un abanico amplio de distribuciones, y poder analizar la sensibilidad y flexibilidad de las diferentes formas funcionales, se han estimado las Curvas de Lorenz correspondientes a España en el año 1988, como un valor intermedio, y a las siguientes provincias, como valores extremos:

La Rioja (Mayores Índice de Gini, $L(0,1)$ y $L(0,9)$)
Cuenca (Menor Índice de Gini y menor $L(0,9)$)
Ciudad Real (Menor $L(0,1)$)

Los datos proceden de la Encuesta Continua de Presupuestos Familiares del año 1988 para España, y de la Encuesta de Presupuestos Familiares de 1980-81, para las provincias analizadas.

Las formas funcionales que se han seleccionado son:

1 Parámetro:

Pareto Especificación de Pareto
Gupta Especificación de Gupta(1984)

2 Parámetros:

Kakwani Especificación de Kakwani y Podder (1973)
Rasche Especificación de Rasche y otros (1980)
Ortega Especificación de Ortega y otros (1991)
Bassman3 Especificación de Bassman y otros(1990) con $g=0, h=0$.

3 Parámetros:

Bassman1 Especificación de Bassman y otros(1990) con $g=0$.
Bassman2 Especificación de Bassman y otros(1990) con $g=-h$.

4 Parámetros:

Bassman0 Especificación general de Bassman y otros(1990).

Las estimaciones se han realizado con el software econométrico de Micro-TSP. Los resultados de las mismas se pueden ver en las tablas 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3 y 1.3.4.

TABLA 1.3.1: Ajustes de la curva de Lorenz a la distribución del ingreso en Cuenca (1980-81)

| p | L(p) (Real) | L(p) Ajustado | | | | | | | | |
|-----|-------------|---------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | | Pareto | Gupta | Kakwani | Basman3 | Rasche | Ortega | Bassman1 | Bassman2 | Bassman0 |
| 0.1 | 0.0261 | 0.047915 | 0.026253 | 0.027419 | 0.026695 | 0.024068 | 0.023075 | 0.025786 | 0.025695 | 0.026208 |
| 0.2 | 0.0642 | 0.098766 | 0.060917 | 0.061264 | 0.063751 | 0.062662 | 0.061423 | 0.066115 | 0.065878 | 0.062846 |
| 0.3 | 0.1102 | 0.153139 | 0.106015 | 0.104915 | 0.108175 | 0.111348 | 0.110380 | 0.111754 | 0.112619 | 0.112300 |
| 0.4 | 0.1672 | 0.211842 | 0.163999 | 0.161129 | 0.162356 | 0.169616 | 0.169241 | 0.164574 | 0.166285 | 0.170411 |
| 0.5 | 0.2370 | 0.276043 | 0.237842 | 0.233127 | 0.229908 | 0.238072 | 0.238429 | 0.228655 | 0.229975 | 0.235999 |
| 0.6 | 0.3189 | 0.347545 | 0.331136 | 0.324803 | 0.315597 | 0.318305 | 0.319311 | 0.309540 | 0.308862 | 0.312061 |
| 0.7 | 0.4153 | 0.429408 | 0.448218 | 0.440894 | 0.425681 | 0.413373 | 0.414636 | 0.414662 | 0.410641 | 0.406377 |
| 0.8 | 0.5311 | 0.527650 | 0.594316 | 0.587176 | 0.568444 | 0.529399 | 0.530021 | 0.554228 | 0.546716 | 0.533040 |
| 0.9 | 0.6796 | 0.658039 | 0.775722 | 0.770688 | 0.754938 | 0.681775 | 0.679843 | 0.742551 | 0.734305 | 0.716423 |
| SEC | | 0.008528 | 0.014508 | 0.012221 | 0.007267 | 0.000026 | 0.000024 | 0.004668 | 0.003417 | 0.001503 |

TABLA 1.3.2: Ajustes de la curva de Lorenz a la distribución del ingreso en La Rioja (1980-81)

| p | L(p) (Real) | L(p) Ajustado | | | | | | | | |
|-----|-------------|---------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | | Pareto | Gupta | Kakwani | Basman3 | Rasche | Ortega | Bassman1 | Bassman2 | Bassman0 |
| 0.1 | 0.0335 | 0.066306 | 0.037864 | 0.033708 | 0.033244 | 0.029979 | 0.029685 | 0.033331 | 0.033232 | 0.0335 |
| 0.2 | 0.0830 | 0.135239 | 0.084357 | 0.083087 | 0.084487 | 0.081012 | 0.080650 | 0.084254 | 0.084513 | 0.0820 |
| 0.3 | 0.1466 | 0.207255 | 0.140954 | 0.144944 | 0.146992 | 0.145887 | 0.145621 | 0.146629 | 0.147047 | 0.1468 |
| 0.4 | 0.2227 | 0.282965 | 0.209353 | 0.219484 | 0.220562 | 0.222709 | 0.222634 | 0.220335 | 0.220611 | 0.2229 |
| 0.5 | 0.3095 | 0.363233 | 0.291510 | 0.307556 | 0.306340 | 0.310882 | 0.311026 | 0.306467 | 0.306341 | 0.3097 |
| 0.6 | 0.4081 | 0.449349 | 0.389671 | 0.410337 | 0.406141 | 0.410596 | 0.410910 | 0.406739 | 0.406059 | 0.4078 |
| 0.7 | 0.5224 | 0.543416 | 0.506417 | 0.529244 | 0.522296 | 0.522859 | 0.523202 | 0.523337 | 0.522121 | 0.5197 |
| 0.8 | 0.6507 | 0.649363 | 0.644708 | 0.665903 | 0.657638 | 0.650020 | 0.650129 | 0.658903 | 0.657399 | 0.6503 |
| 0.9 | 0.8001 | 0.776726 | 0.807940 | 0.822142 | 0.815541 | 0.797846 | 0.797300 | 0.816566 | 0.815330 | 0.8067 |
| SEC | | 0.016694 | 0.001246 | 0.000785 | 0.000307 | 0.000030 | 0.000040 | 0.000297 | 0.000307 | 0.000 |

TABLA 1.3.3: Ajustes de la curva de Lorenz a la distribución del ingreso en Ciudad Real (1980-81)

| p | L(p) (Real) | L(p) Ajustado | | | | | | | | |
|-----|----------------|---------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | | Pareto | Gupta | Kakwani | Basman3 | Rasche | Ortega | Bassman1 | Bassman2 | Bassman0 |
| 0.1 | 0.0191 | 0.056298 | 0.025069 | 0.019849 | 0.019648 | 0.020636 | 0.020100 | 0.019026 | 0.019038 | 0.019160 |
| 0.2 | 0.0595 | 0.115490 | 0.058470 | 0.056715 | 0.057788 | 0.060110 | 0.059373 | 0.059776 | 0.059376 | 0.058479 |
| 0.3 | 0.1111 | 0.178119 | 0.102279 | 0.108176 | 0.109627 | 0.113508 | 0.112904 | 0.112992 | 0.113334 | 0.113230 |
| 0.4 | 0.1781 | 0.244925 | 0.159033 | 0.174862 | 0.175211 | 0.179761 | 0.179519 | 0.177432 | 0.178706 | 0.180127 |
| 0.5 | 0.2605 | 0.316965 | 0.231825 | 0.258158 | 0.256028 | 0.258940 | 0.259164 | 0.254732 | 0.256090 | 0.258238 |
| 0.6 | 0.3548 | 0.395849 | 0.324416 | 0.359888 | 0.354459 | 0.351989 | 0.352621 | 0.348137 | 0.348199 | 0.349360 |
| 0.7 | 0.4617 | 0.484257 | 0.441379 | 0.482236 | 0.473658 | 0.460970 | 0.461730 | 0.462260 | 0.459791 | 0.458242 |
| 0.8 | 0.5901 | 0.587343 | 0.588255 | 0.627729 | 0.617575 | 0.590033 | 0.590312 | 0.603219 | 0.598010 | 0.593135 |
| 0.9 | 0.7466 | 0.718141 | 0.771757 | 0.799237 | 0.791059 | 0.749035 | 0.747705 | 0.778997 | 0.773156 | 0.767022 |
| SEC | | 0.019675 | 0.003272 | 0.004667 | 0.002908 | 0.000028 | 0.000014 | 0.001303 | 0.000839 | 0.000482 |

TABLA 1.3.4: Ajustes de la curva de Lorenz a la distribución del ingreso en España (1988)

| p | L(p) (Real) | L(p) Ajustado | | | | | | | | |
|-----|----------------|---------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | | Pareto | Gupta | Kakwani | Basman3 | Rasche | Ortega | Bassman1 | Bassman2 | Bassman0 |
| 0.1 | 0.026870 | 0.059150 | 0.031054 | 0.027452 | 0.027035 | 0.025571 | 0.025052 | 0.026664 | 0.026593 | 0.026907 |
| 0.2 | 0.070637 | 0.121142 | 0.070726 | 0.069597 | 0.071120 | 0.070206 | 0.069544 | 0.072159 | 0.072134 | 0.070148 |
| 0.3 | 0.127784 | 0.186498 | 0.120810 | 0.124439 | 0.126572 | 0.127991 | 0.127483 | 0.128223 | 0.128788 | 0.128572 |
| 0.4 | 0.197447 | 0.255924 | 0.183430 | 0.192855 | 0.193751 | 0.197606 | 0.197438 | 0.194800 | 0.195759 | 0.198622 |
| 0.5 | 0.278908 | 0.330431 | 0.261104 | 0.276367 | 0.274435 | 0.278959 | 0.279198 | 0.273838 | 0.274470 | 0.278707 |
| 0.6 | 0.372710 | 0.411544 | 0.356801 | 0.376895 | 0.371241 | 0.372823 | 0.373398 | 0.368387 | 0.367803 | 0.370055 |
| 0.7 | 0.480844 | 0.501790 | 0.474028 | 0.496713 | 0.487533 | 0.481034 | 0.481696 | 0.482466 | 0.480028 | 0.477068 |
| 0.8 | 0.606925 | 0.605989 | 0.616918 | 0.638441 | 0.627486 | 0.607384 | 0.607620 | 0.621187 | 0.617027 | 0.607834 |
| 0.9 | 0.761802 | 0.736182 | 0.790335 | 0.805072 | 0.796221 | 0.760991 | 0.759890 | 0.790991 | 0.786762 | 0.775353 |
| SEC | | 0.015718 | 0.001793 | 0.003175 | 0.001689 | 0.000002 | 0.000010 | 0.001111 | 0.000775 | 0.000208 |

Las curvas de un solo parámetro, como es lógico, son las que proporcionan peores ajustes. En general, y atendiendo al criterio de la suma de errores al cuadrado, parece proporcionar mejor ajuste la especificación de Gupta que la de Pareto. No obstante, tienen un comportamiento bien diferenciado. La especificación de Pareto ajusta peor en la rama izquierda que en la derecha, de manera que sobreestima los valores de $L(p)$ de forma exagerada hasta los deciles 6,7 y 8. En cambio, subestima los valores de $L(p)$ para los últimos deciles.

La curva correspondiente a la especificación de Gupta tiene un comportamiento distinto. En la rama izquierda de la curva se comporta mejor que en la derecha. Sobreestima $L(p)$ en los primeros deciles pero en menor cuantía, y en la rama derecha, sin embargo, da valores muy altos a $L(p)$, divergiendo de los valores reales cuanto menores sean estos. Es decir, empeora el ajuste para distribuciones con valores bajos de la rama derecha de la curva (Cuenca, Ciudad Real). Este comportamiento en la región derecha de la curva de Lorenz lo muestran todos los miembros de la familia de curvas de Bassman, hallándose más exagerado en aquellos que al tener un número de parámetros más bajo son menos flexibles.

Entre las especificaciones con dos parámetros hay que distinguir entre las que son linealizables tomando logaritmos, que pertenecen a la familia de Bassman, y las que no son linealizables. En general, se observa que son mucho más flexibles, y por tanto proporcionan ajustes mejores, las curvas no linealizables.

Las curvas de la Familia de Bassman con dos parámetros (Bassman3 y Kakwani) muestran el comportamiento típico ya citado en la región derecha de la curva, es decir, una sobreestimación exagerada de los valores de $L(p)$. Según el error cuadrático medio, la curva de Bassman3 parece dar resultados ligeramente superiores. No obstante, a pesar de ofrecer errores cuadráticos mayores que las curvas no linealizables, hay que mencionar que en todas las estimaciones realizadas las mejores aproximaciones al valor de $L(0.1)$ son las de estas dos especificaciones.

Las curvas de dos parámetros no linealizables, Rasche y Bassman, son las que ofrecen las sumas de errores al cuadrado menores, incluso inferiores a las curvas de la familia de Bassman de 3 y 4 parámetros. El comportamiento de ambas especificaciones es muy parecido, resultando prácticamente indistinguibles gráficamente.

En relación a las curvas de la familia de Bassman de 3 y 4 parámetros, hay que señalar que tienen comportamientos muy parecidos. Suelen sobreestimar los valores altos de la curva, aunque menos en el caso de 4 parámetros. Estas curvas, a pesar de contar con un número relativamente alto de parámetros, no ofrecen mejores ajustes que las curvas no linealizables, con sólo dos parámetros.

A los comentarios anteriores se pueden añadir algunas consideraciones relativas a la región izquierda de la curva de Lorenz, que es la relevante a la hora de la estimación de indicadores de pobreza. Dentro de esta región izquierda de la curva de Lorenz se pueden distinguir dos zonas atendiendo al comportamiento de las diferentes especificaciones. En la cola muy baja de la distribución (desde $p=0$ hasta $p=0.15$), se observa que las curvas que se acercan más al valor real de $L(0.1)$ son las linealizables con dos parámetros. El resto de las especificaciones suele subestimar los valores de la curva de Lorenz en esta

zona, excepto las curvas de un sólo parámetro, que pasan a mucha distancia por encima. En la cola baja (a partir de $p=0.15$) la situación cambia: las curvas no linealizables aproximan mejor los valores de $L(0.2)$, mientras que las linealizables se van alejando, por defecto, a medida que el valor de $L(0.2)$ es menor.

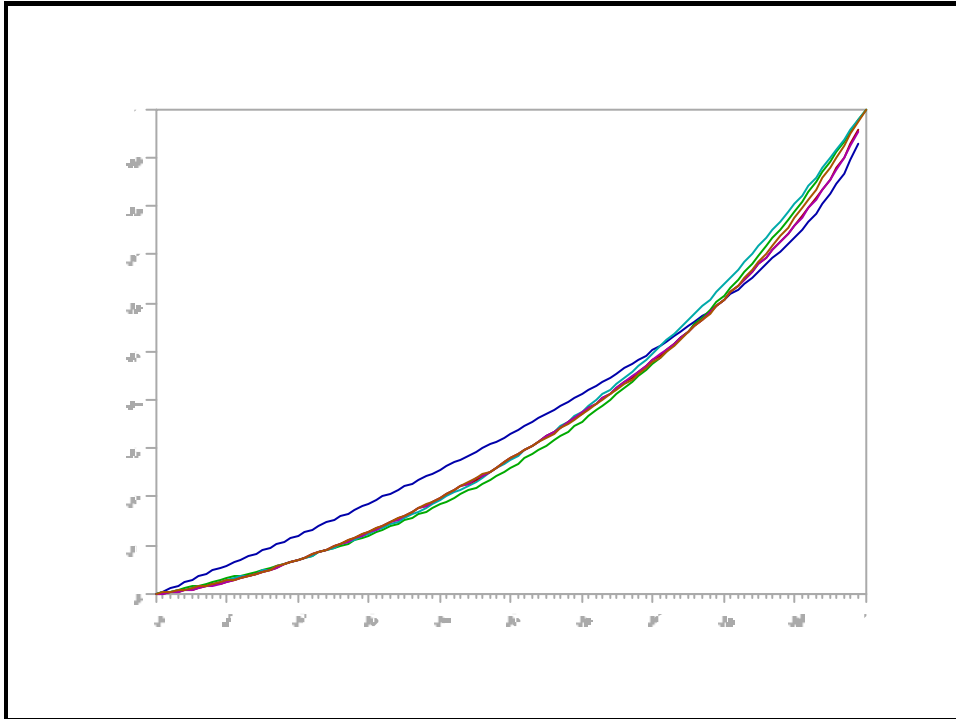


Fig.1.3.1: Curvas de Lorenz Ajustadas: España 1988

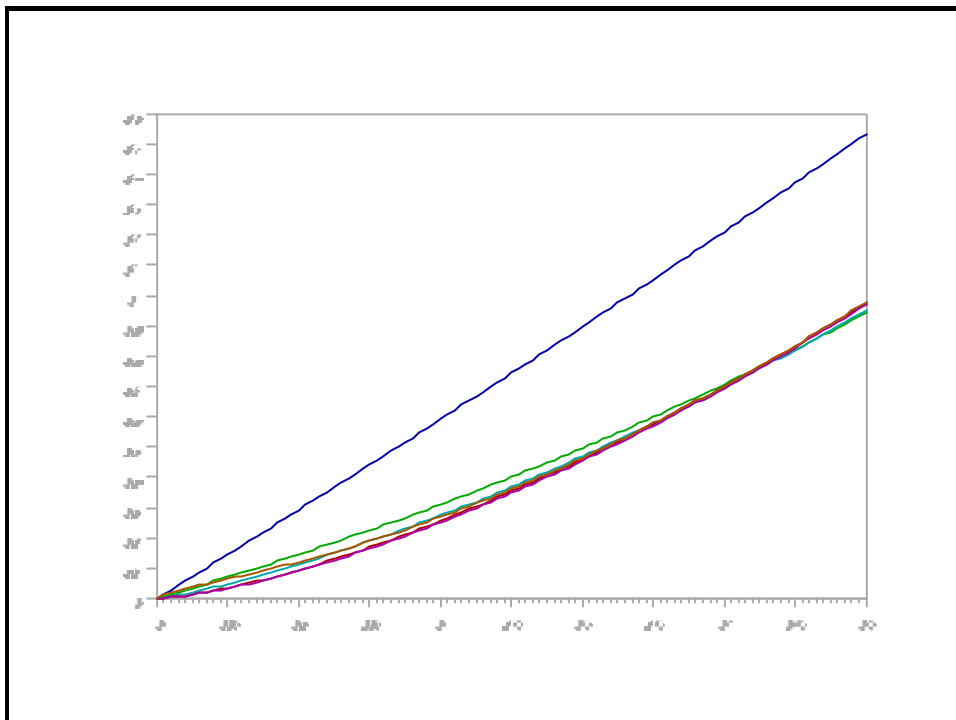


Fig.1.3.2: Curvas de Lorenz Ajustadas: España 1988

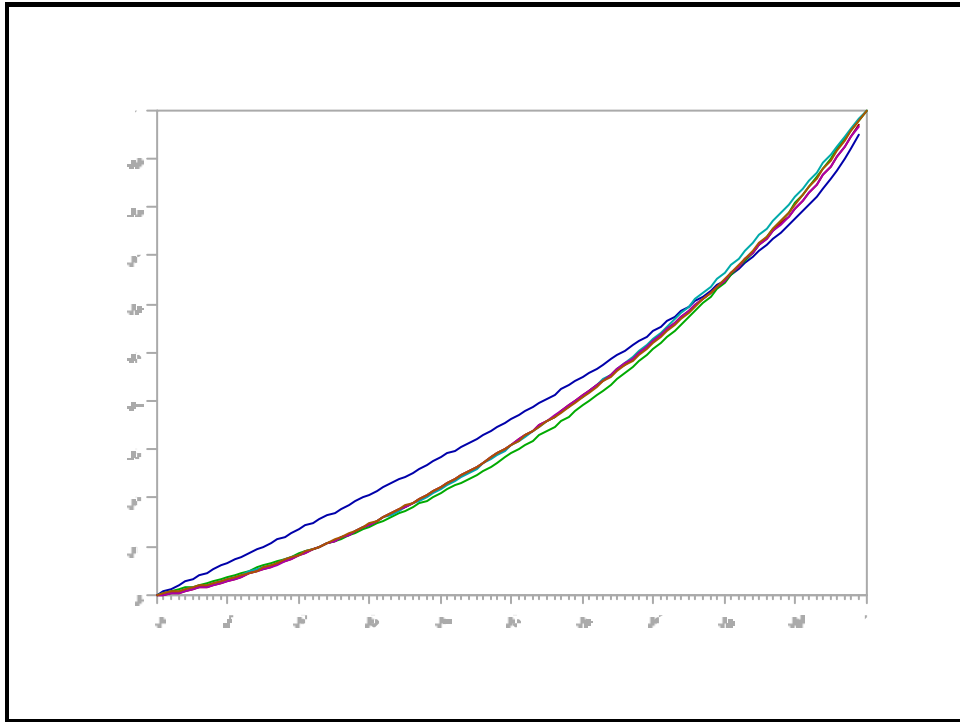


Fig.1.3.3:Curvas de Lorenz Ajustadas. Rioja1980-81

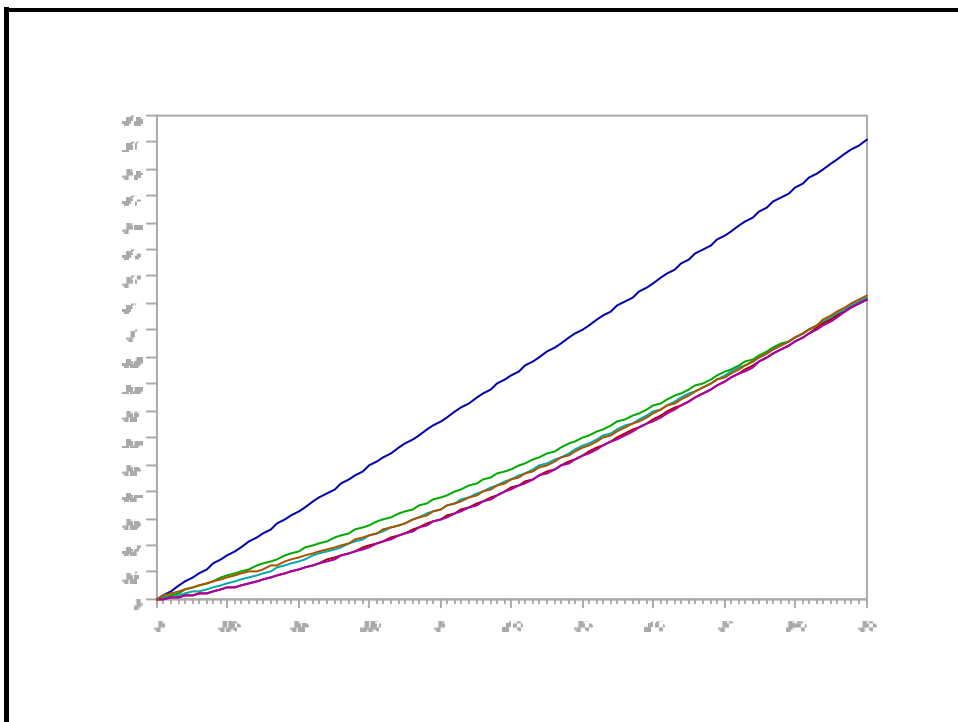


Fig.1.3.4:Curvas de Lorenz Ajustadas.Rioja 1980-81

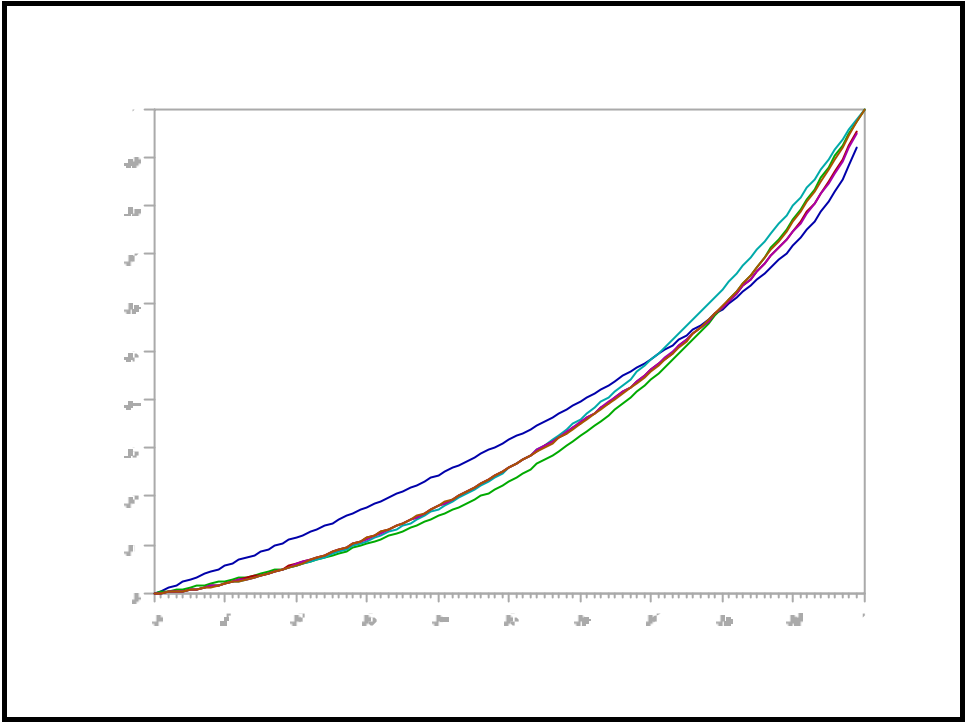


Fig.1.3.5:Curvas de Lorenz Ajustadas.C.Real1980-81

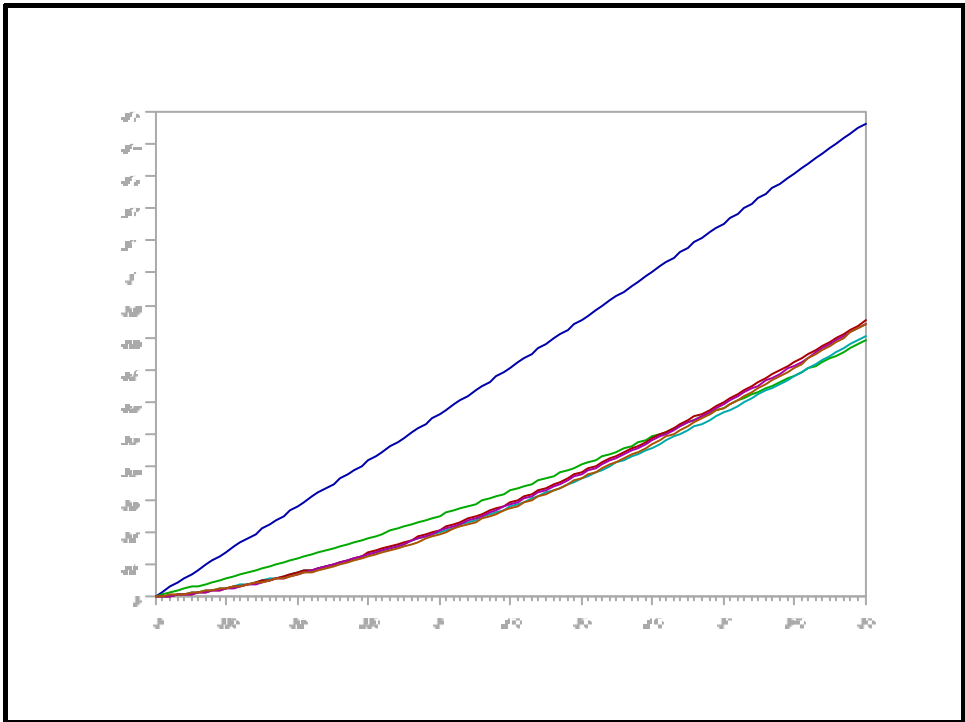


Fig.1.3.6:Curvas de Lorenz Ajustadas.C.Real1980-81

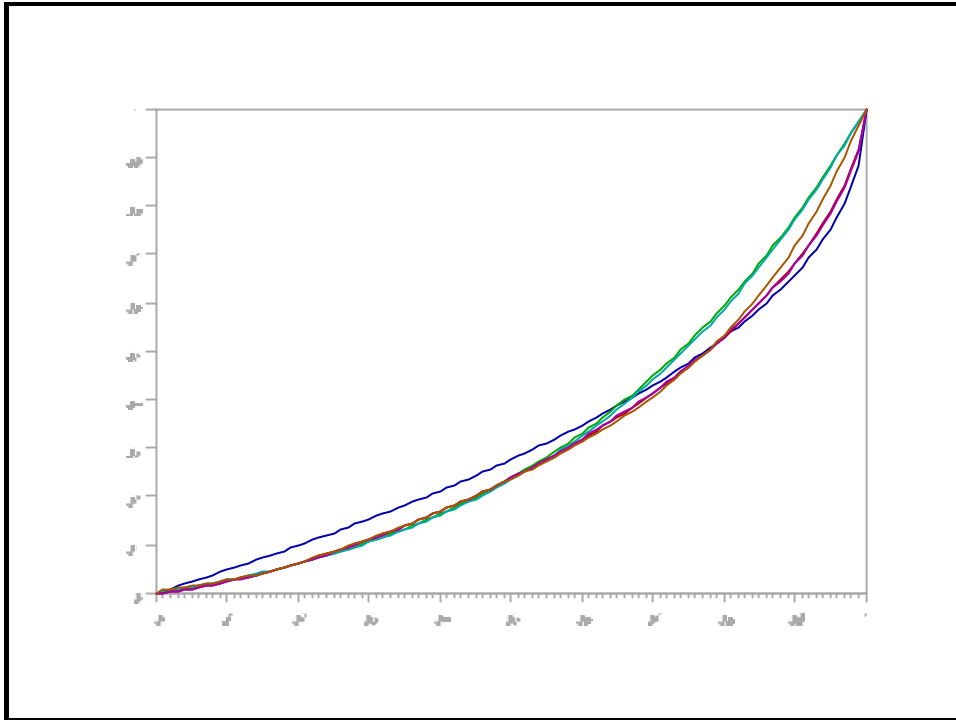


Fig.1.3.7:Curvas de Lorenz Ajustadas.Cuenca1980-81

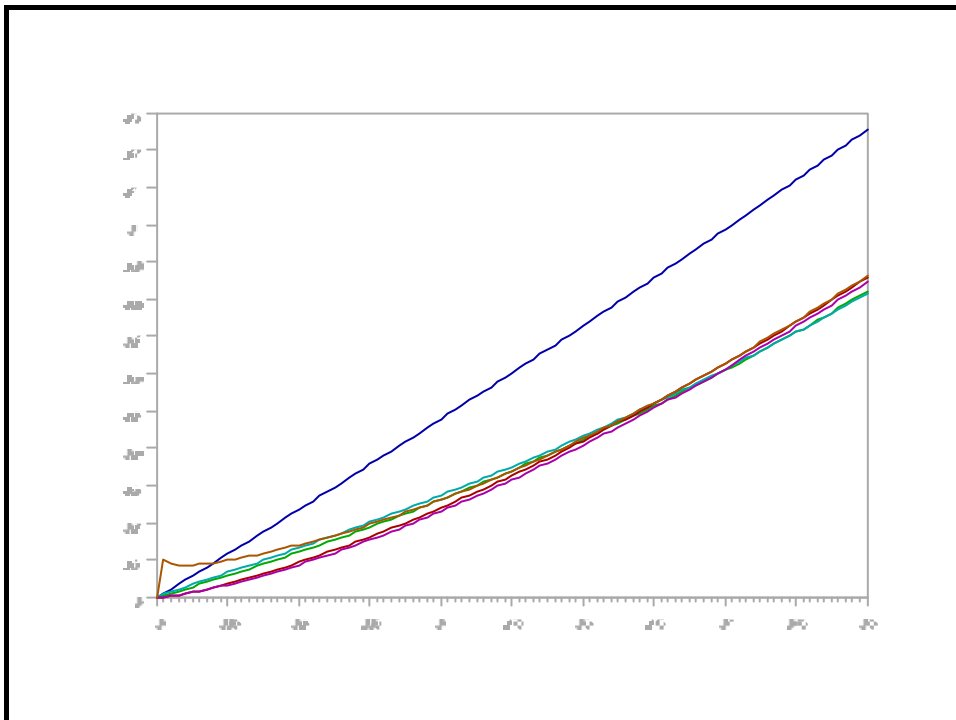


Fig.1.3.8:Curvas de Lorenz Ajustadas.Cuenca1980-81

2.- INDICADORES DE DESIGUALDAD Y POBREZA

2.1.- INDICADORES DE DESIGUALDAD

Los índices de desigualdad tienen una tradición larga en la Estadística Económica. Ya a principios de siglo se desarrollaban varias líneas de investigación en este campo. Por un lado la de los autores italianos relacionada con la curva de Lorenz y el índice de Gini; y por otro la relacionada con las funciones de bienestar social y los índices de Dalton. En la actualidad, con la abundante producción de índices de pobreza se ha revitalizado la literatura de los índices de desigualdad.

Los índices de desigualdad pretenden resumir en una sola medida el grado de desigualdad o concentración de una distribución. Para ello se compara la distribución estudiada con una distribución de referencia considerada objetiva o normativamente deseable (generalmente la equidistribuida).

El uso más frecuente de estos índices es el estudio de la desigualdad de la renta, ya sea ésta medida a través del ingreso, del gasto o de la riqueza. Sin embargo, se pueden aplicar a cualquier tipo de distribución.

Tradicionalmente, se han clasificado los indicadores de desigualdad en indicadores positivos e indicadores normativos. Esta distinción se realiza atendiendo a la presencia explícita en la formulación del indicador de criterios éticos, generalmente asociados a especificaciones de funciones de bienestar social. Sin embargo, esta distinción se hace cada día más difusa: se ha escrito mucho sobre las funciones de bienestar y criterios éticos asociados, de forma implícita, a los indicadores positivos. De hecho, todos los indicadores se corresponden unívocamente con una función de bienestar social, según se desprende del algoritmo de Atkinson-Kolm-Sen⁶. Por otra parte, se han desarrollado generalizaciones normativas de indicadores tan típicamente positivos como puede ser el índice de Gini.

Otra clasificación usual de los indicadores de desigualdad es aquella que atiende a la base del indicador. De esta forma se pueden clasificar en indicadores de base estadística, con base en la teoría de la información, y con base normativa.

La clasificación que se utilizará aquí, con fines expositivos, es la que reúne a los indicadores en: indicadores estadísticos sencillos, indicadores asociados a la curva de Lorenz, indicadores basados en la teoría de la información, e indicadores basados explícitamente en una función de bienestar.

2.1.1.- AXIOMÁTICA DE LOS INDICADORES DE DESIGUALDAD

Existe una gran variedad de índices de desigualdad propuestos en la literatura

6 El algoritmo de Atkinson-Kolm-Sen es una expresión que genera, de forma unívoca, a partir de una función de bienestar su indicador de desigualdad asociado (en el epígrafe dedicado a los indicadores de desigualdad basados explícitamente en funciones de bienestar se trata con más amplitud).

estadística y econométrica. Cada uno de ellos responde a definiciones y comportamientos muy diversos. Por ello, para poder comparar y seleccionar los adecuados a cada caso resulta útil disponer de un conjunto de propiedades deseables en los índices de desigualdad. En general, aquellos que satisfagan un número mayor de propiedades que otros serán más deseables. No obstante, según el objetivo del análisis, o el fin a que se dediquen dichos indicadores, puede resultar deseable o prioritaria determinada propiedad frente a otras.

Las propiedades o principios que se suelen citar como deseables en un índice de desigualdad son las siguientes⁷:

1.- **Principio de transferencias de Pigou-Dalton:** Cualquier transferencia de un individuo con renta a otro con menos renta, siempre que se conserve el orden relativo entre ellos, debe disminuir el valor del índice de desigualdad.

2.- **Independencia de escala en la renta:** Cualquier adición (o substracción) proporcional a las rentas de todos los individuos debe dejar inalterado el valor del índice de desigualdad.

3.- **Independencia de escala en los individuos:** Cualquier adición (o substracción) a la población proporcional a sus ingresos debe dejar inalterado el valor del índice de desigualdad.

4.- **Simetría:** Cualquier permutación de rentas entre personas debe dejar inalterado el valor del índice de desigualdad. Es decir, el índice no debe ser sensible a la posición de ningún individuo en particular.

Los índices que cumplen estas cuatro primeras propiedades se denominan índices S-convexos. Ello se debe a que se puede encontrar una función de bienestar social S-cóncava que ordene las distribuciones de forma exactamente opuesta a como lo haría cualquiera de estos índices. Por otra parte, el criterio de ordenación que proporcionan estos índices también coincide con el criterio de ordenación parcial⁸ de la curva de Lorenz, o dominancia en sentido de Lorenz.

5.- **Normalización:** El recorrido del índice de desigualdad debe ser $[0,1]$, correspondiendo el valor 0 para la igualdad perfecta, y el valor 1 para la desigualdad máxima.

6.- **Principio de las transferencias decrecientes⁹:** Cualquier transferencia de renta de una persona con renta y_i a otra con renta y_i-c ($c < y_i$) disminuirá en mayor grado el valor del índice de desigualdad que otra transferencia igual de un individuo con renta y_j ($y_j > y_i$) a un individuo con renta y_j-c .

7.- **Descomponibilidad aditiva:** Si la población está particionada en un número

7 La mayor parte de ellas se remonta a Dalton(1920).

8 El criterio de ordenación generado por la curva de Lorenz es parcial, ya que sólo se puede aplicar en caso de que las curvas no se corten.

9 Este principio se suele denominar en la terminología anglosajona "Diminishing Transfer Axiom" (DTA).

determinado de grupos, el indicador de desigualdad del conjunto de la población debe poder ser expresado como una suma ponderada de los indicadores de desigualdad correspondientes a cada subconjunto de la población.

En la tabla 2.1.1.1 se puede observar qué propiedades de entre las anteriores satisface cada uno de los indicadores que se citan en los epígrafes siguientes.

TABLA 2.1.1.1. PROPIEDADES DE LOS INDICES DE DESIGUALDAD

| INDICADOR | PROPIEDAD | | | | | | |
|------------------|-----------|----|----|----|----|-----|-----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| ELTETO Y FRIGYES | NO | SI | SI | SI | SI | NO | SI |
| Var(Log(y)) | NO | SI | SI | SI | NO | NO | SI |
| SMAXN | NO | SI | SI | SI | SI | NO | SI |
| DMR(Me) | NO | SI | SI | SI | NO | NO | SI |
| PIETRA | NO | SI | SI | SI | SI | NO | SI |
| GINI | SI | SI | SI | SI | SI | NO | NO |
| KAKWANI | SI | SI | SI | SI | SI | SI* | NO |
| CHACKRAVARTY | SI | SI | SI | SI | NO | SI* | NO |
| THEIL | SI | SI | SI | SI | NO | NO | SI |
| SHORROCKS | SI | SI | SI | SI | NO | SI* | SI |
| DALTON | SI | NO | SI | SI | NO | NO | SI |
| ATKINSON | SI | SI | SI | SI | SI | SI | SI* |

* Sólo la cumplen algunos miembros de esta clase de índices.

2.1.2.- INDICADORES ESTADISTICOS SENCILLOS

Los indicadores de desigualdad más sencillos provienen del campo de la Estadística. Son indicadores muy simples, que satisfacen pocas de las propiedades deseables. No obstante, tienen a su favor interpretaciones muy intuitivas.

En un primer grupo se pueden encontrar indicadores de desigualdad basados en medidas de posición y promedios. El **Indicador de Champernowne** (1973) consiste en la diferencia normalizada entre la media aritmética y la geométrica de la distribución, es decir,

$$CH = \frac{\mu - G}{\mu} \quad (26)$$

Otras medidas de desigualdad que usan medidas de posición son los **Indicadores de Elteto y Frigyes** (1968), consistentes en ratios normalizados de medias de la distribución.

$$EF1 = [\mu - E(X/x < \mu)] / \mu$$

$$EF2 = [E(X/x > \mu) - E(X/X < \mu)] / E(X/X > \mu)$$

$$EF3 = [E(X/X > \mu) - \mu] / E(X/x > \mu)$$

donde μ es la media de la distribución, $E(X/x < \mu)$ es la renta media de los individuos con renta inferior a la media global, y $E(X/x > \mu)$ es la renta media de los individuos con renta superior a la renta media.

Es lógico que para medir la desigualdad se acuda, por otra parte, a medidas de dispersión. En este sentido se han usado a veces la variancia, la desviación estándar y el coeficiente de variación. Sin embargo, dentro de este grupo de medidas, es más popular la **Variancia del logaritmo de la renta**. El uso de esta medida se debe a que una de las funciones de distribución que tradicionalmente se ha ajustado a la distribución de la renta es la log-normal. Por tanto una medida de dispersión de esta distribución es, en cierto sentido, apropiada para estudiar la desigualdad.

Las medidas relacionadas con la variancia son muy sensibles a los valores extremos de la derecha de la distribución, puesto que ésta es asimétrica a la derecha. Para corregir este defecto se ha propuesto utilizar como referencia para las desviaciones valores distintos a la media, como puede ser el extremo superior (x_{MAX} del recorrido, propuesto por Bartels(1977). Así se puede obtener el siguiente indicador, basado en la desviación estándar y normalizado:

$$SMAXN = \sqrt{E(X - x_{MAX})^2} \frac{\sqrt{N-1}}{x_{MX}^{-1}} \quad (27)$$

Otra forma de evitar la acusada sensibilidad a los valores extremos consiste en utilizar desviaciones absolutas medias, en vez de desviaciones cuadráticas. Según el valor de referencia de las desviaciones se obtienen diferentes indicadores. Los más citados son la **Desviación relativa media respecto a la mediana**, y la **Desviación relativa media respecto a la media**. Esta última, normalizada, es conocida como **índice de Pietra**. El índice de Pietra responde a la expresión:

$$P = \frac{1}{2} \frac{E(|X - \mu|)}{\mu} \quad (28)$$

El índice de Pietra tiene una interpretación muy interesante. Gráficamente consiste en la máxima desviación de la curva de Lorenz respecto a la línea de equidistribución. Por otra parte, representa el porcentaje de la renta total que habría que transferir de los individuos con renta superior a μ al resto de la población para conseguir la equidistribución.

También se han propuesto como indicadores de desigualdad, aunque de forma ocasional y con matizaciones, diferentes medidas de asimetría, como los coeficientes de Pearson o de Champernowne.

2.1.3.- ÍNDICE DE GINI Y GENERALIZACIONES

El índice de Gini es sin duda el indicador de desigualdad más conocido. Se debe a Gini, que lo dedujo en 1914 a partir de una medida de dispersión propia, la diferencia media (mean difference). Es un indicador muy conocido, estudiado, y también criticado. A partir del índice de Gini han surgido varias generalizaciones que pretenden subsanar las deficiencias detectadas en este indicador.

INDICE DE GINI

El índice de Gini se puede definir¹⁰ como:

$$G = \frac{\Delta_1}{2\mu'_1} \quad (29)$$

Donde μ'_1 es el momento de orden 1 respecto al origen y Δ_1 es la diferencia media (mean difference). La diferencia media se define como:

$$\Delta_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x - y| dF(x) dF(y) \quad (30)$$

¹⁰ Siguiendo a Kendall y Stuart(1969). Estos autores también dan fórmulas para el caso discreto.

donde X e Y son dos variables idénticamente distribuidas.

Una de las características más atractivas del índice de Gini consiste en que se puede deducir gráficamente a partir de la curva de Lorenz. Así el índice de Gini es dos veces el área comprendida entre la curva de Lorenz y la línea de equidistribución. Es fácil observar que el Índice de Gini varía entre 0 y 1. Toma el valor 0 para el caso de la equidistribución y el valor 1 para el caso de máxima desigualdad (cuando toda la densidad se concentra en un solo punto).

El índice de Gini satisface las cinco primeras propiedades mencionadas en el apartado 2.1.1. Por tanto, viola, por un lado, el Principio de las transferencias decrecientes y, por otro, la Descomponibilidad Aditiva.

El índice de Gini satisface el Principio de las transferencias, es decir, es un índice S-Convexo. Sin embargo, no satisface la versión de las transferencias decrecientes. Ello se debe a que su función de bienestar asociada es lineal, y no cóncava. Tiene, por tanto, una estructura lineal para un perfil de renta determinado, como se verá a continuación.

El Índice de Gini se ha considerado tradicionalmente como un indicador positivo, por no incluir de forma explícita en su formulación criterios éticos o de bienestar. No obstante, se puede encontrar la función de bienestar social que, si no de forma explícita, sí de forma implícita, está asociada a este indicador.

Siguiendo a Weimark (1981), se puede expresar el índice de Gini como

$$G = 1 - \frac{1}{n^2} \frac{\sum (2i - 1)y_i}{\mu(y)} \quad (31)$$

De esta expresión, que se corresponde con el algoritmo de Atkinson-Kolm-Sen (en el que $\Xi(y) = \xi$ representa el ingreso equivalente, es decir, la cantidad de renta total con la que, distribuida de forma igualitaria, se obtendría el mismo nivel de bienestar), se obtiene que la función de evaluación social del ingreso equivalente es

$$\xi = \Xi(y) = \sum (2i - 1) \frac{y_i}{n^2} \quad (32)$$

es decir, en la función de evaluación social correspondiente al índice de Gini los ingresos, ordenados de mayor a menor, se van ponderando con la serie de los n primeros números impares. La arbitrariedad de estas ponderaciones ha provocado fuertes críticas al índice de Gini.

Además, la función de bienestar social del índice de Gini es lineal para un perfil dado de renta con un orden concreto. No hay, por tanto, una función de bienestar social estrictamente cóncava que ordene las distribuciones en sentido exactamente contrario al índice de Gini.

Las principales críticas que ha recibido el índice de Gini tienen su origen, precisamente, en la falta de sensibilidad debida a la estructura lineal de su función de

evaluación social.

Por otra parte, tal como señala Yitzhaki (1983), el Índice de Gini no puede tener una función de bienestar social separable. Por ejemplo, si todas las personas incrementan su renta en lo mismo, sin cambiar el orden relativo dentro del conjunto, no varían las ponderaciones, y en cambio, la función de bienestar social debería cambiar, puesto que la utilidad marginal es decreciente. La no separabilidad aditiva, también resta potencia al uso de este índice a la hora de realizar estudios, tanto de descomposición del índice en componentes de la renta, como de tipo regional.

Hay autores, como Donaldson y Weimark(1980) o Kakwani(1980) que echan en falta alguna parametrización que permita incorporar de forma explícita juicios de valor alternativos. Este defecto lo subsanan generalizando el índice de Gini.

FAMILIA DE ÍNDICES DE GINI GENERALIZADOS DE KAKWANI

Kakwani, en 1980, propone un indicador de pobreza que generaliza el indicador de Sen, del cual deriva un indicador de desigualdad. El procedimiento para pasar de uno a otro se inspira en Sen(1976), y se trata de aplicar el indicador de pobreza a toda la población, en vez de al colectivo bajo la línea de la pobreza. Toda esta serie de indicadores, tanto de desigualdad como de pobreza, se basan en integrales ponderadas de la curva de Lorenz.

El índice de desigualdad de Kakwani, $K(k)$, responde a la siguiente expresión:

$$K_k = \frac{1}{\mu \sum_{i=1}^n i} \sum_{i=1}^n (\mu - x_i)(n + 1 - i)^k \quad (33)$$

Este índice es en realidad una familia de índices, pues depende de un parámetro k . Cuando $k=1$ (y para valores altos de n en el caso discreto) nos encontramos con el Índice de Gini.

Yitzhaki(1983) ha estudiado con detenimiento esta familia de índices, así como sus propiedades. Para ello utiliza el índice de igualdad siguiente:

$$\delta^*(v) = v(v - 1) \int_0^1 (1 - F(y))^{v-2} L(F(y)) dF \quad (34)$$

de forma que $K(k)=1-\delta^*(v+1)$. Es decir, el Índice de igualdad de Yitzhaki es el complementario a 1 del Índice de desigualdad de Kakwani, donde los parámetros de uno y otro índice siguen la relación $k=v-1$.

Expresado de esta forma se pueden obtener los siguientes casos particulares de esta familia de índices de igualdad según los valores del parámetro v :

- $v=0$ $\delta^*(0)= y_{\max}/\mu$
- $v=1$ $\delta^*(1)= 1$
- $v=2$ $\delta^*(2)= G$
- $v=\infty$ $\delta^*(\infty)= y_{\min}/\mu$

A partir del uso de propiedades de dominancia, Yitzhaki demuestra que los valores de v comprendidos entre 0 y 1 reflejan aversión a la igualdad, mientras que los valores mayores que 1 muestran aversión a la desigualdad.

Además, dentro de la región $v > 1$, el valor de v afecta a las ponderaciones de la integral de la curva de Lorenz de forma diferente en tres zonas (las ponderaciones de la integral no dependen de la forma de la función de distribución, información que va contenida exclusivamente en la forma de la curva de Lorenz, sino de los rangos $(1-F)$ procedentes de la ordenación creciente de las rentas). Cuando $1 < v < 2$ las ponderaciones aumentan con el rango $(1-F)$. Cuando $v=2$ son independientes; y para $v > 2$ las ponderaciones disminuyen con el rango.

| Valor de v | Comportamiento de $\eta^*(v)$ |
|----------------|---|
| $0 \leq v < 1$ | Aversión a la igualdad |
| $v = 1$ | Neutralidad ante la desigualdad |
| $v > 1$ | Aversión a la desigualdad |
| $1 < v < 2$ | Ponderaciones crecientes con el rango |
| $v = 2$ | Ponderaciones independientes del rango |
| $v > 2$ | Ponderaciones decrecientes con el rango |

La familia de índices de desigualdad de Kakwani no cumple la descomponibilidad aditiva, como les ocurre a todos los índices derivados hasta ahora del de Gini.

Por otra parte, la sensibilidad al lugar de la distribución donde ocurren las transferencias dependerá del valor del parámetro k , ya que, por ejemplo, para $k=1$ no se cumple el Principio de las transferencias decrecientes.

Entre las deficiencias de esta familia de índices hay que señalar que, aunque mejora algunos aspectos del índice de Gini, sigue sin resolver la descomponibilidad aditiva. Ello se debe a que, como demuestra Yitzhaki(1983), el tipo de agregación en base a rangos del tipo $(1-F(y))$ no puede representar funciones de bienestar aditivamente separables.

Por otra parte, a pesar de que este tipo de índices incluye una parametrización que permite incluir criterios éticos, no resulta tan claro como el tipo de parametrización del tipo del índice de Atkinson.

FAMILIA DE ÍNDICES DE GINI GENERALIZADOS DE CHACKRAVARTY

Como se ha mencionado antes, el índice de Gini no satisface el Principio de las transferencias decrecientes. Motivado por esta falta de sensibilidad del índice de Gini, Chackravarty(1988) propone como indicador de desigualdad una generalización del índice

de Gini que sí lo cumple.

Partiendo de la expresión que liga al Índice de Gini con la curva de Lorenz, Chackravarty propone el siguiente índice:

$$I_{\phi} = 2\phi^{-1} \left[\int_0^1 \phi(p - L(p)) dp \right] \quad (35)$$

Esta clase de índices de desigualdad depende de la forma de la función ϕ . El propio Chackravarty(1988) propone como forma idónea la consistente en $\phi(z)=z^{\alpha}$, con lo que el índice queda reducido a la siguiente expresión, que depende del parámetro α :

$$C_{\alpha} = 2 \left[\int_0^1 (p - L(p))^{\alpha} dp \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (36)$$

Como casos particulares de esta familia de índices tenemos:

Para $\alpha=1$ tendremos $C_1 =$ Índice de Gini,
 Para $\alpha \rightarrow \infty$ $C_{\infty} \rightarrow 2$ veces el Índice de Pietra.

Siempre que ϕ sea una función regular (continua, estrictamente creciente, estrictamente convexa y cumpla $\phi(0)=0$), el Índice de Gini Generalizado de Chackravarty, I_{ϕ} , será continuo entre 0 y 2, simétrico, satisfará el principio de Pigou-Dalton, y será estrictamente convexo dado un simplex determinado, (es decir, cumplirá el Principio de las transferencias decrecientes). La función $\phi(z)=z^{\alpha}$ es una función regular y, por tanto, (36) satisface todas las propiedades mencionadas.

La función de evaluación social asociada a este índice generalizado de Gini es

$$W = \mu(2 - I_{\phi}) \quad (37)$$

W es estrictamente cóncava en un simplex dado, linealmente homogénea y simétrica. Cuando no hay consideraciones de eficiencia, por ejemplo, cuando μ es constante, un incremento en I_{ϕ} es equivalente a una disminución en W .

Aunque este tipo de índice propuesto por Chakravarty subsana el problema de insensibilidad del índice de Gini al lugar donde se realizan las transferencias, sigue sin resolver el problema de la descomponibilidad aditiva.

Por otra parte, el atractivo del índice de Gini de su fácil e intuitiva interpretación en base a la curva de Lorenz queda algo diluido en esta especificación.

Otra deficiencia de esta familia de indicadores consiste en que no queda claro el significado del parámetro en relación con criterios éticos, tales como el grado de aversión a la desigualdad.

2.1.4.- INDICADORES BASADOS EN LA TEORÍA DE LA INFORMACIÓN

En la medición estadística de la concentración y de la desigualdad económica, se ha acudido al terreno de la teoría de la información. Más concretamente al concepto y medición de la entropía. En los sistemas físicos se denomina entropía al desorden existente en los mismos, que, por otra parte, tienden al estado de máxima entropía, de máximo desorden. Por otra parte, en el campo de la teoría de la información, el concepto de entropía representa la información esperada en situaciones de incertidumbre. En la medición de la desigualdad, por su parte, parece adecuado el uso de las medidas de entropía como indicadores de disparidad o de desigualdad.

Los indicadores de desigualdad procedentes de las medidas de entropía se derivan de la medida de entropía de Rényi de orden α :

$$I_{\alpha}(p) = \frac{1}{1-\alpha} \log \left(\sum_{n=1}^N p_n^{\alpha} \right), \quad \alpha > 0, \alpha \neq 1$$

$$= \sum_{n=1}^N p_n \log(p_n^{-1}), \quad \alpha = 1$$
(38)

Esta medida vale 0 cuando toda la densidad se concentra en un sólo punto (máxima concentración o desigualdad), y su valor máximo es $\log(N)$, correspondiente a una situación en que la densidad se reparte por igual en todos los puntos (equidistribución). Por tanto, para medir la desigualdad, se necesita una transformación de esta medida que, al menos, crezca y disminuya en el mismo sentido que la desigualdad. La transformación que se ha utilizado es $\log(N) - I_{\alpha}(p)$, que toma valor 0 para la situación de equidistribución, y $\log(N)$ para la máxima concentración.

Cuando $\alpha=1$, la medida $\log(N) - I_{\alpha}(p)$ se convierte en el conocido **índice de Theil**, que para el caso continuo toma la forma:

$$T = \int_0^{\infty} \frac{y}{\mu} \log \left(\frac{y}{\mu} \right) dF(y)$$
(39)

En el caso discreto, el índice de Theil tiene la siguiente expresión:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N\mu} \log \left(\frac{x_i}{\mu} \right)$$
(40)

En (39) se puede observar que este índice se puede expresar como una integral o suma ponderada de las tangentes de la curva de Lorenz (x_i/μ), donde las ponderaciones son los logaritmos de ellas mismas.

El índice de Theil oscila entre el valor 0, para las situaciones de equidistribución, y $\log(N)$, para la situación de máxima concentración (toda la renta se concentra en un solo individuo). Por tanto, no es un índice normalizado. Esta deficiencia se puede subsanar obteniendo el índice de Theil Normalizado, $T/\log(N)$.

Bartels(1977) propone como indicador de desigualdad, dentro de esta área la Medida de Entropía de Rényi de orden 2, es decir, donde $\alpha=2$. Esta medida tiene sobre el índice de Theil ventajas de cálculo, puesto que las ponderaciones de las tangentes de la curva de Lorenz son más sencillas. No obstante, esta medida no ha sido utilizada

posteriormente.

Las principales objeciones que se encuentran a los indicadores derivados de la teoría de la información, o basados en el concepto de entropía, se refieren precisamente a que dicho concepto no tiene un significado claro en la medición de la desigualdad. Se da la paradoja de que la máxima desigualdad o concentración coincide con la mínima entropía, y la equidistribución se corresponde con la entropía máxima.

FAMILIA DE ÍNDICES DE ENTROPÍA GENERALIZADA DE SHORROCKS

A partir de las medidas de entropía se ha derivado una familia de indicadores de desigualdad uniparamétrica más amplia, la Familia de índices de Entropía Generalizada de Shorrocks. Esta familia incluye como casos particulares a varios indicadores, como el índice de Theil, a la variancia del logaritmo de la renta, e incluso a una transformación del índice de Atkinson.

La expresión de esta familia de índices, para el caso discreto, es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 S_c &= \frac{1}{n} \frac{1}{c(c-1)} \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{y_i}{\mu} \right)^c - 1 \right], \quad c \neq 0,1 \\
 S_0 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{y_i}{\mu} \right) \\
 S_1 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i}{\mu} \right) \log \left(\frac{y_i}{\mu} \right)
 \end{aligned} \tag{41}$$

Esta familia de índices incluye los siguientes casos particulares:

| Valor de c | Índice |
|------------|---|
| c = 0 | Desviación logarítmica media Transformación monótona de un miembro de la familia de Atkinson |
| c = 1 | Índice de Theil |
| c = 2 | Coefficiente de Variación al cuadrado |

La relación entre el índice de Shorrocks cuando c=0 y una transformación monótona de la familia de Atkinson, más concretamente aquella con una función de bienestar social con utilidad logarítmica del ingreso, es la siguiente:

$$1 - e^{-S_c} = 1 - \prod \left(\frac{x_i}{\mu} \right)^{\frac{1}{n}} \tag{42}$$

El parámetro c de esta familia de indicadores permite añadir criterios éticos a la

medición de la desigualdad. Esto es posible debido a que el índice se hace más sensible a las transferencias en la cola inferior de la distribución a medida que c decrece. En el caso extremo, cuando c tiende a $-\infty$, el índice sólo se fija en el extremo inferior de la distribución, y genera ordenaciones similares a las del criterio maximin de Rawls. De todos los valores posibles de c , Shorrocks(1980) encuentra que el que, a su parecer, genera un indicador con mejores propiedades es $c=1$, es decir, el índice de Theil.

Shorrocks (1980) propuso esta familia de indicadores como los únicos indicadores de desigualdad relativos que cumplen las siguientes propiedades:

- a) Continuidad y Simetría
- b) Diferenciabilidad y S-Convexidad estricta
- c) Descomponibilidad aditiva
- d) Principio de Pigou-Dalton

Esta familia de indicadores, por otra parte, cumple todas las propiedades del epígrafe 2.1.1, excepto la normalización, puesto que varían entre 0 y $(1/c(c-1))(n^{c-1}-1)$ para $c>0, c\neq 1$, y entre 0 y $\text{Log}(N)$ para $c=1$; y la versión fuerte del axioma de las transferencias para los valores de $c=0,1,2$.

Además de las críticas generales a los indicadores basados en el concepto de entropía, podemos añadir la que Chackravarty(1988) realiza al encontrar que los valores de S_c no son monótonos en c .

2.1.5.- INDICADORES BASADOS EXPLÍCITAMENTE EN FUNCIONES DE BIENESTAR SOCIAL

Ya se ha visto en epígrafes anteriores que todos los indicadores de desigualdad positivos valoran de diferente forma los niveles de ingreso, unos son más sensibles a los niveles altos de renta, mientras que otros dan más importancia a los niveles medios o altos. Como réplica a este tipo de medición, se ha desarrollado una serie de indicadores basados directamente en funciones de bienestar social. Estas funciones de bienestar social miden el bienestar asociado a cada nivel de renta, de forma que en dicha medición se incluyen directamente todas las presunciones normativas incorporadas al índice.

INDICADOR DE DALTON

En 1920, Dalton propuso como indicador de desigualdad la medida resultante al comparar el bienestar actual (w^*) frente al bienestar máximo que se podría conseguir con la renta total actual equidistribuida ($\max w$):

$$I^D = 1 - \frac{w^*}{\max w} \quad (43)$$

El significado de este tipo de indicador es claro, supone el coste, en términos de bienestar, de soportar la distribución actual en vez de una distribución igualitaria, con el mismo nivel de renta total.

Según el tipo de función de bienestar elegida, se pueden generar diversos indicadores de Dalton. El más utilizado, que usa una función de bienestar del tipo $U(x_n) = \log x_n$, es el siguiente:

$$D = 1 - \log \frac{\tilde{u}}{\mu} \quad (44)$$

donde \tilde{u} representa la media geométrica de la distribución.

El principal problema del índice de Dalton consiste en que no es invariante ante transformaciones monótonas en la función de bienestar social, problema que resuelven los indicadores del tipo Atkinson-Kolm-Sen

INDICADORES DE ATKINSON-KOLM-SEN

Más recientemente se ha propuesto otra forma de generar indicadores de desigualdad a partir de la función de bienestar social. Son los llamados indicadores del tipo de Atkinson-Kolm-Sen. En este tipo de indicador se compara la renta media actual (μ) con la que sería necesaria para conseguir el mismo nivel de bienestar actual con rentas equidistribuidas, llamada ingreso equivalente (μ^E):

$$I^{A-K-S} = 1 - \frac{\mu^E}{\mu} \quad (45)$$

La expresión (20) es en realidad un algoritmo para generar indicadores de desigualdad a partir de funciones de bienestar social. Para cada función de bienestar social que defina un ingreso equivalente, mediante este algoritmo se genera, de forma unívoca, un indicador de desigualdad asociado.

El significado de los indicadores de Atkinson-Kolm-Sen consiste en el coste, ahora en términos de ingreso, de mantener la distribución actual frente a una situación de equidistribución con el mismo nivel de bienestar. En otras palabras, el porcentaje de la renta total que se podría ahorrar para obtener el mismo bienestar que el actual redistribuyendo la renta.

El indicador de desigualdad más conocido de este tipo es el índice de Atkinson, cuya expresión, en forma discreta, es la siguiente:

$$A_\epsilon = 1 - \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{y_i}{\mu} \right)^{1-\epsilon} \right]^{\frac{1}{1-\epsilon}} \quad (46)$$

$$A_1 = 1 - \prod_{i=1}^n \left(\frac{y_i}{\mu} \right)^{1/n}$$

Para llegar a la expresión de este indicador, Atkinson(1970) parte de una función de bienestar social continua, creciente, simétrica, S-Cóncava y aditivamente separable.

El parámetro ϵ se puede interpretar como un parámetro de aversión a la

desigualdad contenida en el índice. A medida que ε crece, el índice se hace más sensible a las transferencias en el extremo inferior de la distribución. Por tanto, cuando $\varepsilon \rightarrow \infty$ se llegaría a un indicador que genera ordenaciones equivalentes al criterio de Rawls, es decir, sólo tiene en cuenta transferencias que afecten al individuo más pobre. Por otra parte, cuando $\varepsilon=0$ los criterios de ordenación de distribuciones del índice sólo tendrían en cuenta la renta total, siguiendo un criterio utilitarista.

En realidad, como señala Dagum(1990), la expresión anterior puede ser interpretada en función de la Función Generatriz de Medias de Gini, que es una función que genera medias de cualquier orden:

$$A_r = 1 - \frac{M(r)}{\mu} = 1 - \frac{[\int_0^\infty y^r dF(y)]^r}{\mu} \quad (47)$$

Las medias que genera la función M(r) son las siguientes:

| Valor de r | Valor de M(r) |
|-------------------|-------------------------------|
| $r < -1$ | Media Armónica Generalizada |
| $r = -1$ | Media Armónica |
| $r \rightarrow 0$ | Media Geométrica |
| $r = 1$ | Media Aritmética |
| $r > 1$ | Media Cuadrática Generalizada |
| $r = 2$ | Media Cuadrática |

El índice de Atkinson es muy utilizado en la actualidad. No obstante, se le ha realizado una serie de críticas entre las que destacamos las siguientes:

Autores como Bartels(1977) opinan que los indicadores basados en funciones de bienestar son en realidad indicadores estadísticos, y que en su definición se podría prescindir fácilmente del paso intermedio de definir la función de bienestar asociada, y que por tanto no difieren tanto de los indicadores estadísticos positivos.

Otros autores, como Dagum(1990), critican la necesidad de elegir el valor del parámetro de aversión a la desigualdad, puesto que tal hecho confiere un alto grado de subjetividad al índice.

También Dagum(1990) critica la elección de la función de bienestar social individualista, puesto que este tipo de función sólo tiene en cuenta el valor de la renta de cada individuo, sin tener en cuenta en la valoración de su bienestar al resto de los individuos.

Otra crítica que se suele realizar al índice de Atkinson se basa en la incapacidad de dicho índice de tener en cuenta rentas negativas, mientras que otros índices, incluso más sencillos, como el índice de Gini, sí pueden operar con ellas.

2.2.- INDICADORES DE POBREZA

El desarrollo de indicadores de pobreza ha sido posterior al de los indicadores de desigualdad. Hasta la aportación de Sen(1973) sólo existían los que aquí se denominan indicadores sencillos o unidimensionales. No obstante, a partir de dicha fecha se ha producido una abundante literatura al respecto.

El desarrollo de los índices de pobreza en la década de los años setenta se debe a la reacción de Sen frente a los índices unidimensionales, que no tienen en cuenta aspectos distributivos. Esta preocupación de los aspectos distributivos entre los pobres responde al concepto de "privación relativa" introducido por Sen. La "privación relativa" consiste en que el sentimiento o la sensación de pobreza, para una misma renta individual, es tanto mayor cuanto peor repartido esté el resto de la renta.

Los indicadores de pobreza se han clasificado en este trabajo en dos grupos: unidimensionales y multidimensionales o complejos. Los indicadores unidimensionales sólo tienen en cuenta un aspecto de la pobreza, la extensión o la profundidad, por ejemplo. Los indicadores multidimensionales o complejos, por su parte, combinan en una sola medida varios aspectos de forma conjunta. Dentro de los indicadores multidimensionales, siguiendo a Foster y otros (1984) se han agrupado en: Indicador de Sen y generalizaciones, entendiéndose como generalizaciones aquellos indicadores que aportan al de Sen simplemente un esquema de ponderaciones ampliado con alguna parametrización (ya que la mayoría de los indicadores de pobreza, en algún sentido u otro son ampliaciones de la aportación de Sen); índices basados en índices de desigualdad; y finalmente índices de Foster.

2.2.1.- AXIOMÁTICA DE LOS INDICADORES DE POBREZA

De forma paralela a la axiomática de los indicadores de desigualdad, existe una serie de propiedades deseables en los indicadores de pobreza. La primera aportación en este sentido se debe a Sen(1973), que propuso los tres primeros axiomas que se citan a continuación. A partir de dicha aportación, el conjunto de axiomas que, en teoría, debe cumplir un indicador de pobreza, se ha ampliado. Los más importantes son los siguientes:

1.- **Dominio del índice:** Los cambios en las rentas de individuos no pobres no deben afectar al índice de pobreza.

2.- **Monotonía:** Un descenso en la renta de un individuo pobre, quedando inalteradas las demás, debe incrementar el valor del índice.

3.- **Axioma débil de las transferencias:** Una transferencia regresiva entre dos individuos pobres, siempre que el número de individuos pobres no varíe, debe incrementar el índice de pobreza. (La versión fuerte de este axioma implica un aumento en el valor del índice

incluso cuando el receptor de la transferencia cruce la línea de la pobreza, de forma que el número de pobres disminuye.)¹¹

4.- **Simetría:** Una permutación de los individuos debe dejar inalterado el valor del índice de pobreza.

Estas cuatro primeras propiedades equivalen al criterio de dominancia en sentido de Lorenz. Es decir, los índices de pobreza que satisfagan estas cuatro propiedades ordenarán a las distribuciones de renta según su pobreza de forma equivalente a como lo hacen las curvas de Lorenz, cuando no se intersectan y las distribuciones tienen la misma media. Esto también equivale a decir que dichos índices son S-Convexos, es decir, son funciones estrictamente decrecientes y estrictamente S-Convexas de los valores de las rentas por debajo de la línea de la pobreza.

5.- **Sensibilidad a las transferencias basada en los rangos:** Una transferencia regresiva de una cantidad fija de renta entre dos individuos pobres separados un número determinado de puestos en la ordenación según sus rentas deberá tener un efecto tanto mayor en el índice de pobreza como mayores sean los puestos que ocupan en la ordenación.

6.- **Sensibilidad a las transferencias basada en las rentas:** Una transferencia regresiva de una cantidad fija de renta entre dos individuos pobres cuyas rentas difieren en una cantidad también fija deberá tener un efecto tanto mayor en el índice de pobreza como menores sean las rentas de dichos individuos.

7.- **Descomponibilidad aditiva:** Si la población está particionada en un número determinado de grupos, el índice de pobreza del conjunto de la población debe poder ser expresado como una suma ponderada de los indicadores de desigualdad correspondientes a cada subconjunto de la población.

8.- **Monotonía subgrupal:** Si la población está dividida en un número determinado de grupos, un aumento en la pobreza de uno de ellos, manteniéndose constante la del resto de los grupos, debe incrementar la pobreza del conjunto de la población.

Las propiedades que satisfacen los principales indicadores de pobreza, que se analizarán en los epígrafes siguientes, se reflejan en la tabla 2.2.1.

11 En este sentido, Kundu y Smith(1983), en su Teorema de la Imposibilidad, demuestran que el axioma fuerte de las transferencias será violado por todo índice de pobreza que satisfaga las dos propiedades de monotonía siguientes: i) al añadir un individuo no pobre a la población el índice debe disminuir, ii) al añadir un individuo pobre a la población el índice debe aumentar.

TABLA 2.2.1. PROPIEDADES DE LOS INDICES DE POBREZA

| INDICE | PROPIEDADES | | | | | | | |
|--------------|-------------|----|-----|----|-----|----|----|----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| I. BASICO | SI | NO | NO | SI | NO | NO | SI | SI |
| I.DESVIACION | SI | SI | NO | SI | NO | NO | NO | SI |
| SEN | SI | SI | SI | SI | NO | NO | NO | NO |
| KAKWANI | SI | SI | SI | SI | SI* | SI | NO | NO |
| THON | SI | SI | SI* | SI | NO | NO | NO | NO |
| BLACKORBY | SI | SI | SI | SI | NO | NO | SI | SI |
| TAKAYAMA | SI | NO | SI | SI | NO | NO | NO | NO |
| CLARK | SI | SI | SI | SI | NO | NO | SI | SI |
| FOSTER(2) | SI | SI | NO | SI | NO | NO | SI | SI |
| FOSTER(3) | SI | SI | SI | SI | NO | NO | SI | SI |
| FOSTER(4) | SI | SI | SI | SI | SI | SI | SI | SI |

* Sólo la cumplen algunos miembros de esta clase de índices.

2.2.2.- INDICADORES SENCILLOS O UNIDIMENSIONALES

Los indicadores unidimensionales son los indicadores de pobreza más antiguos, y además los más sencillos. Básicamente son dos: el Indicador Básico (Head Count Ratio en la literatura anglosajona) y el Indicador o Tasa de Desviación (Aggregate Income Gap Ratio en la literatura anglosajona).

INDICADOR BÁSICO

El Indicador Básico mide un sólo aspecto de la pobreza: su extensión. Es decir, este indicador refleja el porcentaje de la población cuya renta está por debajo de la línea de la pobreza. Si denominamos z a la línea de la pobreza, y $F(y)$ a la función de distribución de la renta, tendremos que

$$IB = F(z) \quad (48)$$

Este indicador tiene en la sencillez su ventaja y su inconveniente. Por un lado es el más fácil de obtener, aunque por otra parte, la información que ofrece sobre la pobreza es muy limitada.

Además incumple propiedades importantes del epígrafe anterior, entre otras todas las relacionadas con las transferencias.

INDICADOR DE DESVIACIÓN

El indicador de desviación surgió en principio para complementar al Indicador Básico. Puesto que este último mide la extensión de la pobreza, resulta adecuado encontrar un indicador que mida otro importante aspecto de la pobreza: su intensidad. Para ello, el Indicador de Desviación consiste en la media de las desviaciones de la renta de cada uno de los q individuos pobres respecto a la línea de la pobreza, o "gaps".

$$ID = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q \frac{(z - y_i)}{z} = 1 - \frac{\mu_q}{z} \quad (49)$$

En otras palabras, como se aprecia en (24), el Indicador de Desviación se puede expresar como la distancia relativa entre la línea de la pobreza y la renta media de los pobres μ_q , es decir, es una medida de la profundidad de la pobreza. Este indicador sigue sin cumplir ninguno de los axiomas relativos a las transferencias mencionados en el epígrafe 2.2.1.

2.2.3.- ÍNDICE DE SEN Y GENERALIZACIONES

El índice de Sen fue el primer indicador de pobreza que cumplía el axioma (débil) de las transferencias. La motivación de este índice está en poder contar con un indicador de pobreza que tenga en cuenta, no sólo la extensión o la profundidad de la pobreza, sino que incluya aspectos distributivos en su medición.

La formulación original del Índice de Sen, para datos discretos, es la siguiente:

$$S = \frac{2}{(q+1)nz} \sum_{i=1}^q g_i r_i \quad (50)$$

donde g_i son las desviaciones de la renta de cada individuo respecto a la línea de la pobreza, y r_i son los rangos de cada individuo dentro de la ordenación según sus rentas.

La medida de Sen consiste, tal y como se observa en (25), en una suma ponderada y normalizada de los "gaps" individuales, utilizando como ponderaciones el puesto de cada individuo en la ordenación de la distribución. Este tipo de ponderaciones es el mismo que incorpora el índice de Gini.

De hecho, el índice de Sen se puede expresar como una combinación del índice de Gini de la población bajo la línea de la pobreza con los indicadores de pobreza unidimensionales:

$$S = IB[ID + (1 - ID)G_P \frac{q}{(q+1)}] \quad (51)$$

De (26) se desprende que el índice de Sen aplicado a toda la población, en vez de a la población pobre, se aproxima al índice de Gini para valores altos de n .

El índice de Sen satisface las cuatro primeras propiedades citadas en el epígrafe 2.2.1. Por tanto, se puede decir que el índice de Sen es un índice S-Convexo (es una función estrictamente decreciente y estrictamente S-Convexa de los q primeros individuos de la población), o lo que es lo mismo, sigue el criterio de dominancia en sentido de la curva de Lorenz para valores constantes de q , cuando éste se puede aplicar.

Pero no es el único índice que cumple las propiedades mencionadas. Se han propuesto diversos índices que, partiendo del de Sen, las cumplen, incorporando en algunos casos mejoras.

Las principales críticas al índice de Sen se basan en la imposibilidad de descomponer aditivamente el valor del índice, es decir, al violar las propiedades 7 y 8 del epígrafe 2.2.1, la aplicación del mismo en determinados estudios se ve realmente restringida.

Por otra parte, tampoco cumple las propiedades basadas en la sensibilidad a las transferencias, motivo este que ha propiciado la aparición de algunas generalizaciones del índice de Sen.

INDICES DE KAKWANI

El índice de Pobreza de Kakwani es una generalización del índice de Sen. Con esta clase de índices Kakwani pretende mejorarlo encontrando una clase de índices que además cumpla la sensibilidad a las transferencias, al menos, la basada en los rangos. La clase de índices de Kakwani consiste en una versión del índice de Sen en la que las ponderaciones de los "gaps" aparecen elevadas a un parámetro k :

$$K_k = \frac{q}{nz \sum_{i=1}^q i^k} \sum_{i=1}^q g_i r_i^k \quad (52)$$

Para valores de $k > 0$, este índice satisface las propiedades enunciadas por Sen(1973), es decir, es un índice S-Convexo. Pero, y esta es la motivación de este índice, para valores de $k > 1$, el índice también satisface la sensibilidad a las transferencias basada en los rangos. Por otra parte, la sensibilidad a las transferencias basada en las rentas sólo la cumple a partir de un valor de k suficientemente alto, que dependerá del valor de n .

Aunque esta clase de índices de pobreza mejora respecto al índice de Sen la sensibilidad a las transferencias, basada en los rangos, las críticas que soporta el índice de Sen son del mismo modo aplicables a la clase de índices de Pobreza de Kakwani.

ÍNDICES DE THON

Thon(1979) propone una generalización del índice de Sen que cumple la versión fuerte del axioma de las transferencias. Para conseguirlo, suma a cada ponderación en (50) un número fijo igual a $(n-q)$:

$$T = \frac{2}{n(n+1)z} \sum_{i=1}^q g_i (r_i + n - q) \quad (53)$$

Este indicador de pobreza da más importancia a criterios distributivos que a otros aspectos, tales como el número de pobres. Para conseguir que el indicador satisfaga el axioma fuerte de las transferencias, el índice se ha hecho menos sensible al número de individuos bajo la línea de la pobreza. Hay autores, como Sen(1982), que no consideran el axioma fuerte de las transferencias deseable para los indicadores de pobreza, tanto por el efecto que provoca en el indicador de insensibilización al número de pobres, como por verlo más adecuado a indicadores de desigualdad que de pobreza.

2.2.4.- ÍNDICES DE POBREZA BASADOS EN ÍNDICES DE DESIGUALDAD

En la aportación de Sen(1973), queda clara la relación que existe entre indicadores de desigualdad y pobreza. Ha habido varias líneas básicas de desarrollo de indicadores de pobreza a partir de los de desigualdad. Este método ha sido criticado por Foster y otros(1984) al señalar que este tipo de indicadores, al ser derivado de índices de desigualdad relativos, suele violar la monotonía.

INDICES DE BLACKORBY Y DONALDSON

Blackorby y Donaldson(1980) fueron los primeros en generar índices de pobreza a partir de índices de desigualdad. Estos autores demuestran que, siempre que se sustituya el índice de Gini en la expresión del índice de Sen (26) por un índice de desigualdad relativo

S-Convexo (R), se obtendrá una medida de pobreza que cumple el axioma de las transferencias:

$$B = IB(ID - (1 - ID)) \quad (54)$$

No obstante, esta clase de indicadores no ha tenido mucha repercusión y, entre otras críticas, Foster y otros(1984) consideran esta clase de indicadores demasiado restringida, puesto que en la expresión del índice de Sen se pueden modificar otros miembros de la ecuación para obtener medidas de pobreza, y no sólo sustituyendo el índice de desigualdad.

Por otra parte, Foster y otros(1984) añaden que la monotonía puede verse violada en esta clase de indicadores de pobreza, sobre todo si el indicador de desigualdad utilizado no es normalizado.

ÍNDICE DE TAKAYAMA

Un procedimiento alternativo al anterior para generar índices de pobreza a partir de índices de desigualdad ha sido propuesto por Hamada y Takayama(1977) y Takayama(1979). Consiste en aplicar un indicador de desigualdad a la distribución de la renta censurada en la línea de la pobreza, es decir, asignando a todos los individuos no pobres una renta igual a la línea de la pobreza. Estos autores consideran que así se incluye en la medición de la pobreza más información que en los índices que no ven más allá de la línea de la pobreza.

La medida propuesta por Takayama(1979) consiste en el índice de Gini de la distribución de la renta censurada en la línea de la pobreza.

El índice de Takayama, como él mismo señala, viola la monotonía. Por otra parte, Foster y otros(1984) señalan que en realidad el vector de los ingresos censurado no añade información al vector de las rentas de los individuos bajo la línea de la pobreza.

ÍNDICES DE CLARK

Otro método de generar índices de pobreza a partir de indicadores de desigualdad consiste en utilizar la siguiente expresión del índice de Sen:

$$S = IB ID(1 + G_g) \quad (55)$$

donde G_g es el índice de Gini aplicado a los "gaps" en vez de a las rentas de los individuos bajo la línea de la pobreza. Así, Clark y otros(1981) proponen sustituir G_g por otros indicadores de desigualdad para generar diferentes índices de pobreza.

Los indicadores de pobreza generados por este método están sujetos al mismo tipo de críticas que los propuestos por Blackorby y Donaldson(1980), ya que en realidad es un método muy parecido.

2.2.5.- ÍNDICES DE FOSTER

Foster y otros(1981) han propuesto una familia de índices de pobreza que ha tenido bastante éxito. Se trata de una familia uniparamétrica que tiene la expresión siguiente:

$$F_{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^q \left(\frac{g_i}{z}\right)^{\alpha-1}, \quad \alpha \geq 1 \quad (56)$$

Foster y otros prestan especial atención a un miembro de esta familia, F_3 . Este índice se puede considerar como una suma ponderada de los "gaps" individuales, de la misma manera que el índice de Sen, sólo que en este caso las ponderaciones son los propios "gaps". Además, se puede expresar en función de la combinación de indicadores de desigualdad y pobreza:

$$F_3 = IB[ID^2 + (1 - ID)^2 CV_q^2] \quad (57)$$

donde C_q es el coeficiente de variación de la población bajo la línea de la pobreza.

Esta familia de índices incluye como casos particulares el Indicador Básico ($\alpha=1$) y el producto $IB*IH$ ($\alpha=2$). Entre las propiedades que exhibe esta familia se encuentran: A partir de $\alpha>1$ satisfacen la monotonía; para $\alpha>2$ satisfacen el axioma de las transferencias; y para $\alpha>3$ satisfacen la sensibilidad a las transferencias basada en las rentas.

Otras importantes propiedades que satisfacen todos los miembros de la familia son la descomponibilidad aditiva y la monotonía subgrupal, que resultan de gran interés para estudiar la pobreza de una población y de determinados grupos, como por ejemplo en el análisis regional.

La familia de indicadores de Foster tiene implicaciones muy interesantes en los problemas de dominancia. En Foster y Shorrocks(1983), se puede ver cómo las ordenaciones parciales obtenidas a través de la dominancia de diverso orden de las funciones de distribución se corresponden exactamente con las de los miembros de esta familia de índices del mismo orden.

**3.- ESTIMACIÓN DE INDICADORES DE DESIGUALDAD Y POBREZA
PARA LAS PROVINCIAS ESPAÑOLAS (1980-81)**

3.1.- ESTIMACIÓN DE INDICADORES DE DESIGUALDAD Y POBREZA

La mayoría de los indicadores de desigualdad y pobreza se definieron para el caso discreto, es decir, para su aplicación al conjunto de todos los individuos de una población, o a datos agrupados. Como ya se comentó en epígrafes anteriores, trabajar con los datos completos de la población es difícil, y pocas veces se cuenta con dichos datos. Por otra parte, los datos agrupados, que son los que están disponibles generalmente, inducen a serios errores de agrupamiento.

Para soslayar estos problemas, se puede acudir a la forma continua de los indicadores de desigualdad y pobreza, y trabajar sobre distribuciones continuas ajustadas con procedimientos econométricos a los datos agrupados.

En este sentido, se pueden clasificar los índices de desigualdad y pobreza en índices relacionados directamente con la curva de Lorenz e índices no relacionados con la misma. Esta dicotomía es estudiada, desde una óptica algo distinta, por Yitzhaki(1983), que compara los índices de desigualdad de Atkinson y Kakwani, como paradigmas de ambos tipos de indicadores. Los índices basados en la curva de Lorenz (o en el índice de Gini) utilizan como ponderaciones para las rentas de cada individuo los rangos dentro de la ordenación según la renta. Esto quiere decir que, en realidad, se están integrando ordenadas de la función de distribución $(1-F(y))$. Los índices del tipo de Atkinson, en cambio, usan ponderaciones basadas en las propias rentas (y) , es decir, se integran abscisas de las funciones de distribución.

En este trabajo se propone el uso de la curva de Lorenz en vez de la función de distribución, ya que los índices que no están directamente vinculados con la curva de Lorenz se pueden expresar en función de su derivada, mientras que los primeros son más difíciles de expresar a través de la función de distribución.

3.1.1.- ÍNDICES RELACIONADOS DIRECTAMENTE CON LA CURVA DE LORENZ

El índice de desigualdad con una relación más directa con la curva de Lorenz es el índice de Gini. Como ya se vio este índice es igual a dos veces el área comprendida entre la curva de Lorenz y la línea de equidistribución. En forma continua se puede expresar como:

$$G = 2 \int_0^1 (p - L(p)) dp \quad (58)$$

donde $L(p)$ representa a la curva de Lorenz.

Los índices de desigualdad derivados del índice de Gini también pueden ser expresados en forma continua en función de la curva de Lorenz. De hecho, estos índices son integrales ponderadas de la curva de Lorenz.

La familia de índices de desigualdad de Kakwani, en forma continua, responde a:

$$K_\alpha = 1 - \alpha(\alpha + 1) \int_0^1 L(p)(1 - p)^{\alpha-1} dp \quad (59)$$

Por otra parte, los índices de Chakravarty se definen a partir de la curva de Lorenz como:

$$C_\alpha = 2 \left[\int_0^1 (p - L(p))^\alpha dp \right]^{1/\alpha} \quad (60)$$

Los indicadores de pobreza que están relacionados con la curva de Lorenz (o con el índice de Gini) también pueden ser expresados en forma continua como integrales de la curva de Lorenz. En este caso, las integrales tienen un recorrido desde 0 hasta el punto de la curva que corresponde a la línea de la pobreza, p^* (frente a las integrales de los índices de desigualdad que tenían un recorrido (0,1)).

El límite superior de estas integrales, p^* , se puede calcular de varias formas. Por un lado, corresponde al punto de la curva con abscisa en el indicador básico. Por otra parte, también se puede obtener acudiendo al punto donde la pendiente de la curva es igual a la razón entre la línea de la pobreza y la media de la distribución.

El propio índice de Sen está muy relacionado con el índice de Gini y, por tanto, con la curva de Lorenz. La expresión en forma continua del índice de Sen es la siguiente:

$$S = p^* - \frac{2\mu}{zp^*} \int_0^{p^*} L(p)(p^* - p)dp \quad (61)$$

Otros índices de pobreza derivados del índice de Sen tienen expresiones equivalentes. La familia de índices de pobreza de Kakwani tiene su forma continua:

$$K_\alpha = p^* - \frac{\alpha(\alpha + 1)\mu}{zp^{*k}} \int_0^{p^*} L(p)(p^* - p)^{\alpha-1} dp \quad (62)$$

Se puede observar que cuando estos índices de pobreza se aplican a toda la población, es decir, se considera como línea de pobreza la renta más alta, el índice de Sen se convierte en el índice de Gini, y los índices de pobreza de Kakwani se convierten en los índices de desigualdad del mismo autor.

3.1.2.- ÍNDICES RELACIONADOS CON LA DERIVADA DE LA CURVA DE LORENZ

Hay un gran número de indicadores de desigualdad y pobreza que no están relacionados directamente con la curva de Lorenz. Sin embargo, acudiendo al vínculo que existe entre la derivada de la curva de Lorenz y los valores marginales de la renta, se pueden expresar en función de la derivada de la curva de Lorenz.

La derivada de la curva de Lorenz se puede definir como

$$L'(p) = \frac{y}{\mu} \quad (63)$$

Por tanto, todos aquellos indicadores basados en sumas o integrales de la expresión y/μ se pueden estimar a partir de la derivada de la curva de Lorenz.

Los índices de desigualdad basados en la Teoría de la Información pertenecen al grupo de los que se pueden definir a partir de la derivada de la curva de Lorenz. Por ejemplo, el índice de Theil tiene la siguiente expresión:

El índice de Entropía Generalizada de Shorrocks, dentro de este grupo, tendría su

expresión en:

$$\begin{aligned}
 S_c &= \frac{1}{c(c-1)} \int_0^1 ((L'(p))^c - 1) dp, \quad c \neq 0,1 \\
 S_0 &= \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{L'(p)}\right) dp, \quad c = 0 \\
 S_1 &= \int_0^1 L'(p) \ln(L'(p)) dp, \quad c = 1
 \end{aligned} \tag{65}$$

Los índices de desigualdad basados explícitamente en funciones de bienestar social también pueden expresarse a través de la derivada de la curva de Lorenz. La familia de índices de desigualdad de Atkinson puede definirse como:

$$A_\epsilon = 1 - \left[\int_0^1 (L'(p))^{1-\epsilon} \right]^{\frac{1}{1-\epsilon}}, \quad \epsilon > 0, \quad \epsilon \neq 1 \tag{66}$$

Entre los índices de pobreza que se pueden expresar como función de la derivada de la curva de Lorenz, se encuentra la conocida familia de índices de Foster y otros, que responde a:

$$F_\alpha = \int_0^{p^*} \left(1 - \frac{\mu L'(p)}{z} \right)^{\alpha-1} \tag{67}$$

3.2.- ESTIMACIÓN DE INDICADORES DE DESIGUALDAD Y POBREZA PARA LAS PROVINCIAS ESPAÑOLAS (1980-81)

En este epígrafe, se encuentran los resultados de la aplicación de los métodos explicados en los apartados anteriores a los datos de distribución de la renta por provincias en España.

Los datos utilizados son los más recientes de distribución familiar de la renta por provincias, es decir, los procedentes de la Encuesta de Presupuestos Familiares (1980-81) del I.N.E. En esta publicación, los datos de la distribución de la renta vienen referidos al ingreso familiar.

Por otra parte, los datos vienen en forma del porcentaje de la renta total que absorbe cada decila de ingreso, es decir, se ha contado con diez puntos para el ajuste econométrico de cada curva de Lorenz.

La especificación de la curva de Lorenz que se ha utilizado es la de Ortega y otros (1991), cuyos resultados pueden verse en el Anexo 1. La razón para la elección de esta especificación radica en que de todas las especificaciones probadas en el epígrafe 1.3, parece ser la que, en términos generales se comporta mejor.

Una vez estimada la curva de Lorenz para cada provincia, se ha procedido a la estimación de los índices de desigualdad y pobreza. Los índices de desigualdad se han obtenido integrando las curvas de Lorenz estimadas y sus derivadas, de acuerdo con las fórmulas de los epígrafes 3.1.1 y 3.1.2, para cada provincia. Se han seleccionado los siguientes índices de desigualdad:

- Kakwani $\alpha = 0.5, 1$ (Gini), 1.5, 2, 3, 4
- Chakravarty $\alpha = 0.1, 1$ (Gini), 1.5, 2, 3, 4
- Shorrocks $c = -1, 0, 1$ (Theil), 2, 3, 4
- Atkinson $\epsilon = 0.5, 1.5, 2, 3, 4$

El resultado de estas estimaciones puede verse en las tablas 3.2.1 a 3.2.4.

Los índices de pobreza se han estimado a partir de los mismos datos que los índices de desigualdad. Es decir, se han usado las mismas estimaciones de la curva de Lorenz.

La línea de la pobreza se ha fijado para estas estimaciones en la mitad de la renta media nacional, que es el estándar fijado por la Comunidad Europea en los estudios de pobreza.

La estimación de los índices se ha realizado, también, integrando las curvas de Lorenz ajustadas y sus derivadas para cada provincia, de acuerdo con las expresiones de los epígrafes 3.1.1 y 3.1.2. Los índices que se han estimado son los siguientes:

- Indicador Básico
- Indicador de Desviación
- Índice de Sen
- Índice de Takayama
- Índices de Kakwani $\alpha = 0.5, 1$ (Sen), 1.5, 2, 3, 4
- Índices de Foster $\alpha = 2, 3, 4$

El resultado de las estimaciones puede verse en las tablas 3.2.5 a 3.2.7.

ÍNDICES DE DESIGUALDAD DE KAKWANI.
PROVINCIAS ESPAÑOLAS 1980-81

| PROVINCIA | K(1) | K(0.5) | K(1.5) | K(2) | K(3) | K(4) |
|-------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| ALAVA | .281921 | .220255 | .344436 | .389642 | .452689 | .495910 |
| ALBACETE | .320279 | .244684 | .392007 | .443777 | .515496 | .564102 |
| ALICANTE | .327382 | .254502 | .395087 | .443106 | .508802 | .553003 |
| ALMERIA | .382658 | .297645 | .455386 | .505829 | .573347 | .617795 |
| ASTURIAS | .311073 | .235790 | .383963 | .437118 | .511343 | .561917 |
| AVILA | .377774 | .293233 | .450649 | .501366 | .569439 | .614353 |
| BADAJOS | .340543 | .264255 | .409960 | .458984 | .525754 | .570460 |
| BALEARES | .334849 | .257750 | .405955 | .456633 | .526120 | .572846 |
| BARCELONA | .304786 | .236877 | .370547 | .417716 | .482941 | .527262 |
| BURGOS | .337811 | .255481 | .414053 | .469006 | .544812 | .595817 |
| CACERES | .351270 | .275146 | .419024 | .466270 | .529972 | .572315 |
| CADIZ | .312141 | .236492 | .385257 | .438564 | .512975 | .563652 |
| CANTABRIA | .321209 | .250681 | .387300 | .434141 | .498239 | .541414 |
| CASTELLON | .302576 | .232371 | .371239 | .421048 | .490479 | .537875 |
| CIUDAD REAL | .350423 | .265671 | .427307 | .482319 | .557700 | .608120 |
| CORDOBA | .334493 | .261590 | .401190 | .448087 | .511808 | .554463 |
| CORUÑA | .326522 | .251628 | .396520 | .446551 | .515368 | .561799 |
| CUENCA | .402617 | .318939 | .471657 | .518494 | .580123 | .620219 |
| GERONA | .306871 | .236199 | .375348 | .424820 | .493549 | .540346 |
| GRANADA | .356194 | .272659 | .430963 | .483982 | .556196 | .604348 |
| GUADALAJARA | .324508 | .246495 | .398194 | .451487 | .525347 | .575342 |
| GUIPUZCOA | .275237 | .215286 | .336934 | .381687 | .444291 | .487332 |
| HUELVA | .363094 | .276899 | .439634 | .493895 | .567686 | .616752 |
| HUESCA | .382429 | .302922 | .449685 | .495579 | .556325 | .596090 |
| JAEN | .350034 | .267074 | .425094 | .478579 | .551717 | .600629 |
| LEON | .347543 | .266386 | .421073 | .473356 | .544792 | .592598 |
| LERIDA | .286515 | .219585 | .354222 | .403866 | .473737 | .521831 |
| LUGO | .337485 | .260488 | .408093 | .458248 | .526844 | .572892 |
| MADRID | .337950 | .261426 | .407988 | .457637 | .525448 | .570938 |
| MALAGA | .330834 | .253497 | .402801 | .454366 | .525356 | .573214 |
| MURCIA | .317380 | .244231 | .386900 | .436867 | .505941 | .552749 |
| NAVARRA | .328299 | .255312 | .395983 | .443949 | .509533 | .553636 |
| ORENSE | .340145 | .260930 | .412714 | .464447 | .535334 | .582920 |
| PALENCIA | .335905 | .252762 | .413320 | .469350 | .546839 | .599027 |
| PALMAS LAS | .336519 | .259107 | .407709 | .458396 | .527838 | .574497 |
| PONTEVEDRA | .315243 | .239410 | .388048 | .440955 | .514620 | .564702 |
| RIOJA, LA | .270491 | .207004 | .337113 | .386510 | .456731 | .505486 |
| SALAMANCA | .354006 | .272803 | .426660 | .477972 | .547723 | .594239 |
| SANTA CRUZ | .334140 | .257919 | .404417 | .454408 | .522878 | .568905 |
| SEGOVIA | .349311 | .275188 | .415248 | .461004 | .522489 | .563288 |
| SEVILLA | .329862 | .254523 | .399833 | .449718 | .518185 | .564299 |
| SORIA | .361790 | .277358 | .436696 | .489635 | .561527 | .609342 |
| TARRAGONA | .317509 | .241263 | .390397 | .443283 | .516820 | .566758 |
| TERUEL | .325743 | .251214 | .395466 | .445289 | .513817 | .560061 |
| TOLEDO | .324325 | .251872 | .392027 | .440154 | .506128 | .550587 |
| VALENCIA | .335305 | .261500 | .402844 | .450437 | .515201 | .558587 |
| VALLADOLID | .286551 | .221049 | .352629 | .400824 | .468409 | .514849 |
| VIZCAYA | .301861 | .234538 | .367441 | .414565 | .479834 | .524250 |
| ZAMORA | .359598 | .282127 | .427638 | .474861 | .538269 | .580265 |
| ZARAGOZA | .332591 | .252136 | .407637 | .461775 | .536578 | .587026 |
| CEUTA Y M. | .356856 | .271774 | .433138 | .487406 | .561441 | .610808 |
| ESPAÑA | .343577 | .263353 | .416705 | .468790 | .540078 | .587867 |

ÍNDICES DE DESIGUALDAD DE KAKWANI.
PROVINCIAS ESPAÑOLAS 1973-74

| PROVINCIA | K(1) | K(0.5) | K(1.5) | K(2) | K(3) | K(4) |
|-------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| ALAVA | .324192 | .252397 | .391205 | .438739 | .503802 | .547614 |
| ALBACETE | .378405 | .290664 | .454424 | .507727 | .579573 | .627016 |
| ALICANTE | .328291 | .252167 | .399343 | .450218 | .520255 | .567504 |
| ALMERIA | .329890 | .250337 | .404389 | .458166 | .532536 | .582753 |
| ASTURIAS | .317953 | .243157 | .389182 | .440609 | .511902 | .560261 |
| AVILA | .374645 | .281387 | .456784 | .515267 | .594722 | .647222 |
| BADAJOS | .374536 | .289302 | .448533 | .500285 | .569989 | .616069 |
| BALEARES | .327133 | .248898 | .400643 | .453680 | .527045 | .576634 |
| BARCELONA | .302016 | .233854 | .368503 | .416417 | .482920 | .528224 |
| BURGOS | .368660 | .278916 | .448061 | .504503 | .581262 | .632164 |
| CACERES | .374976 | .288282 | .450393 | .503311 | .574710 | .621925 |
| CADIZ | .379352 | .292064 | .454789 | .507580 | .578646 | .625548 |
| CANTABRIA | .315627 | .247220 | .380259 | .426030 | .488662 | .530885 |
| CASTELLON | .327768 | .251186 | .399394 | .450783 | .521623 | .569445 |
| CIUDAD REAL | .407246 | .311884 | .487102 | .542612 | .616641 | .664909 |
| CORDOBA | .374987 | .297531 | .441077 | .486197 | .545974 | .585161 |
| CORUÑA | .333550 | .256375 | .404932 | .455894 | .525862 | .572951 |
| CUENCA | .353222 | .274734 | .423166 | .472209 | .538576 | .582760 |
| GERONA | .329725 | .253335 | .400845 | .451723 | .521712 | .568896 |
| GRANADA | .398365 | .306523 | .475893 | .529796 | .601839 | .649008 |
| GUADALAJARA | .366236 | .276494 | .445984 | .502803 | .580204 | .631583 |
| GUIPUZCOA | .319528 | .253276 | .381259 | .424352 | .482651 | .521633 |
| HUELVA | .353803 | .274539 | .424472 | .474109 | .541354 | .586141 |
| HUESCA | .313884 | .248316 | .375696 | .419057 | .477967 | .517499 |
| JAEN | .369209 | .290471 | .437308 | .484290 | .547044 | .588422 |
| LEON | .397907 | .314312 | .467401 | .514734 | .577222 | .617978 |
| LERIDA | .326870 | .247797 | .401330 | .455194 | .529820 | .580286 |
| LUGO | .352594 | .270387 | .426495 | .478909 | .550357 | .598064 |
| MADRID | .341168 | .265905 | .409413 | .457412 | .522598 | .566174 |
| MALAGA | .376880 | .288011 | .454242 | .508707 | .582295 | .630926 |
| MURCIA | .358947 | .281062 | .427499 | .475175 | .539293 | .581798 |
| NAVARRA | .325229 | .244889 | .401334 | .456681 | .533610 | .585691 |
| ORENSE | .412499 | .313466 | .495257 | .552922 | .629779 | .679710 |
| PALENCIA | .377512 | .288228 | .455209 | .509929 | .583865 | .632712 |
| PALMAS LAS | .314455 | .244091 | .381395 | .429226 | .495110 | .539705 |
| PONTEVEDRA | .337703 | .258333 | .410802 | .463077 | .534875 | .583143 |
| RIOJA, LA | .348327 | .268255 | .420607 | .471800 | .541574 | .588220 |
| SALAMANCA | .411224 | .314567 | .491843 | .547840 | .622417 | .670947 |
| SANTA CRUZ | .366663 | .281022 | .442136 | .495381 | .567549 | .615450 |
| SEGOVIA | .335359 | .253037 | .411978 | .467350 | .543883 | .595440 |
| SEVILLA | .360909 | .278999 | .433338 | .484227 | .553106 | .598887 |
| SORIA | .367337 | .275860 | .448716 | .506846 | .586093 | .638646 |
| TARRAGONA | .342898 | .264241 | .414472 | .465258 | .534614 | .581081 |
| TERUEL | .395752 | .300829 | .476651 | .533376 | .609523 | .659397 |
| TOLEDO | .385138 | .295064 | .462609 | .516889 | .589919 | .638007 |
| VALENCIA | .325021 | .250535 | .394807 | .444713 | .513395 | .559763 |
| VALLADOLID | .381768 | .298602 | .452760 | .501790 | .567243 | .610294 |
| VIZCAYA | .320880 | .250196 | .387189 | .434232 | .498654 | .542070 |
| ZAMORA | .350984 | .267476 | .426477 | .480295 | .553889 | .603091 |
| ZARAGOZA | .386788 | .302122 | .458658 | .508269 | .574431 | .617884 |
| ESPAÑA | .362436 | .277604 | .437664 | .490851 | .563085 | .611119 |

ÍNDICES DE DESIGUALDAD DE CHAKRAVARTY.
PROVINCIAS ESPAÑOLAS 1980-81

| PROVINCIA | C(0.5) | C(1) | C(1.5) | C(2) | C(3) | C(4) |
|-------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| ALAVA | .266436 | .281922 | .293260 | .302055 | .315003 | .324219 |
| ALBACETE | .302218 | .320279 | .333479 | .343703 | .358734 | .369418 |
| ALICANTE | .309015 | .327382 | .340786 | .351162 | .366409 | .377245 |
| ALMERIA | .360494 | .382657 | .398763 | .411195 | .429416 | .442335 |
| ASTURIAS | .293360 | .311073 | .324031 | .334070 | .348830 | .359320 |
| AVILA | .355976 | .377774 | .393621 | .405858 | .423799 | .436523 |
| BADAJOS | .321309 | .340544 | .354568 | .365418 | .381352 | .392671 |
| BALEARES | .315971 | .334849 | .348626 | .359289 | .374956 | .386089 |
| BARCELONA | .287874 | .304786 | .317150 | .326731 | .340825 | .350849 |
| BURGOS | .318413 | .337811 | .351978 | .362945 | .379053 | .390494 |
| CACERES | .331212 | .351270 | .365876 | .377166 | .393734 | .405494 |
| CADIZ | .294351 | .312141 | .325154 | .335236 | .350057 | .360590 |
| CANTABRIA | .303230 | .321209 | .334333 | .344495 | .359431 | .370046 |
| CASTELLON | .285680 | .302576 | .314937 | .324518 | .338613 | .348638 |
| CIUDAD REAL | .330283 | .350423 | .365117 | .376485 | .393178 | .405030 |
| CORDOBA | .315607 | .334493 | .348264 | .358919 | .374568 | .385684 |
| CORUÑA | .308190 | .326522 | .339908 | .350273 | .365506 | .376333 |
| CUENCA | .378590 | .402617 | .420043 | .433473 | .453124 | .467032 |
| GERONA | .289752 | .306870 | .319389 | .329091 | .343362 | .353511 |
| GRANADA | .335852 | .356194 | .371021 | .382486 | .399318 | .411268 |
| GUADALAJARA | .306056 | .324508 | .337993 | .348437 | .363787 | .374694 |
| GUIPUZCOA | .260158 | .275237 | .286283 | .294854 | .307474 | .316459 |
| HUELVA | .342232 | .363094 | .378294 | .390046 | .407294 | .419537 |
| HUESCA | .359875 | .382429 | .398811 | .411449 | .429958 | .443069 |
| JAEN | .330055 | .350035 | .364606 | .375879 | .392433 | .404187 |
| LEON | .327792 | .347543 | .361946 | .373088 | .389452 | .401073 |
| LERIDA | .270495 | .286515 | .298248 | .307347 | .320738 | .330264 |
| LUGO | .318451 | .337485 | .351371 | .362116 | .377902 | .389117 |
| MADRID | .318891 | .337950 | .351851 | .362608 | .378410 | .389636 |
| MALAGA | .312164 | .330834 | .344467 | .355021 | .370532 | .381555 |
| MURCIA | .299612 | .317380 | .330364 | .340421 | .355210 | .365724 |
| NAVARRA | .309870 | .328299 | .341747 | .352156 | .367452 | .378322 |
| ORENSE | .320889 | .340145 | .354194 | .365067 | .381038 | .392385 |
| PALENCIA | .316458 | .335905 | .350112 | .361110 | .377262 | .388731 |
| PALMAS LAS | .317534 | .336518 | .350371 | .361092 | .376843 | .388034 |
| PONTEVEDRA | .297344 | .315243 | .328333 | .338475 | .353383 | .363979 |
| RIOJA, LA | .255274 | .270490 | .281646 | .290300 | .303037 | .312098 |
| SALAMANCA | .333865 | .354005 | .368681 | .380030 | .396689 | .408518 |
| SANTA CRUZ | .315326 | .334140 | .347870 | .358495 | .374108 | .385202 |
| SEGOVIA | .329273 | .349311 | .363901 | .375177 | .391723 | .403464 |
| SEVILLA | .311325 | .329862 | .343394 | .353871 | .369265 | .380206 |
| SORIA | .341086 | .361790 | .376872 | .388531 | .405643 | .417790 |
| TARRAGONA | .299490 | .317509 | .330685 | .340891 | .355896 | .366559 |
| TERUEL | .307466 | .325743 | .339088 | .349422 | .364610 | .375406 |
| TOLEDO | .306161 | .324326 | .337586 | .347852 | .362941 | .373665 |
| VALENCIA | .316393 | .335305 | .349097 | .359768 | .375441 | .386576 |
| VALLADOLID | .270665 | .286551 | .298185 | .307207 | .320488 | .329938 |
| VIZCAYA | .285132 | .301862 | .314095 | .323577 | .337525 | .347448 |
| ZAMORA | .338930 | .359598 | .374637 | .386257 | .403301 | .415393 |
| ZARAGOZA | .313587 | .332591 | .346473 | .357220 | .373012 | .384230 |
| CEUTA Y M. | .336391 | .356857 | .371777 | .383316 | .400256 | .412283 |
| ESPAÑA | .324088 | .343577 | .357794 | .368794 | .384951 | .396428 |

ÍNDICES DE DESIGUALDAD DE CHAKRAVARTY.
PROVINCIAS ESPAÑOLAS 1973-74

| PROVINCIA | C(0.5) | C(1) | C(1.5) | C(2) | C(3) | C(4) |
|-------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| ALAVA | .306030 | .324192 | .337450 | .347713 | .362796 | .373517 |
| ALBACETE | .356568 | .378406 | .394291 | .406560 | .424554 | .437317 |
| ALICANTE | .309814 | .328291 | .341783 | .352230 | .367583 | .378495 |
| ALMERIA | .311081 | .329890 | .343632 | .354272 | .369907 | .381016 |
| ASTURIAS | .300055 | .317953 | .331036 | .341171 | .356071 | .366663 |
| AVILA | .352596 | .374645 | .390715 | .403136 | .421355 | .434276 |
| BADAJOS | .352986 | .374536 | .390212 | .402320 | .420077 | .432674 |
| BALEARES | .308561 | .327133 | .340703 | .351211 | .366654 | .377629 |
| BARCELONA | .285258 | .302017 | .314273 | .323773 | .337749 | .347692 |
| BURGOS | .347249 | .368660 | .384264 | .396327 | .414026 | .426584 |
| CACERES | .353385 | .374977 | .390686 | .402822 | .420622 | .433250 |
| CADIZ | .357460 | .379353 | .395274 | .407571 | .425602 | .438392 |
| CANTABRIA | .297987 | .315627 | .328508 | .338482 | .353144 | .363567 |
| CASTELLON | .309295 | .327768 | .341261 | .351708 | .367063 | .377975 |
| CIUDAD REAL | .383308 | .407245 | .424626 | .438032 | .457668 | .471580 |
| CORDOBA | .352908 | .374987 | .391030 | .403411 | .421548 | .434398 |
| CORUÑA | .314744 | .333550 | .347277 | .357903 | .373517 | .384612 |
| CUENCA | .333115 | .353222 | .367866 | .379186 | .395802 | .407598 |
| GERONA | .311159 | .329725 | .343280 | .353775 | .369198 | .380159 |
| GRANADA | .375111 | .398366 | .415254 | .428286 | .447378 | .460908 |
| GUADALAJARA | .344930 | .366236 | .381767 | .393776 | .411398 | .423901 |
| GUIPUZCOA | .301413 | .319528 | .332744 | .342972 | .357995 | .368667 |
| HUELVA | .333672 | .353804 | .368466 | .379802 | .396441 | .408254 |
| HUESCA | .296205 | .313884 | .326789 | .336779 | .351460 | .361892 |
| JAEN | .347802 | .369209 | .384774 | .396792 | .414411 | .426904 |
| LEON | .374321 | .397907 | .415020 | .428213 | .447523 | .461195 |
| LERIDA | .308219 | .326870 | .340499 | .351054 | .366564 | .377584 |
| LUGO | .332513 | .352594 | .367232 | .378553 | .395176 | .406979 |
| MADRID | .321865 | .341168 | .355238 | .366121 | .382103 | .393453 |
| MALAGA | .355101 | .376880 | .392731 | .404977 | .422939 | .435681 |
| MURCIA | .338361 | .358948 | .373929 | .385505 | .402487 | .414537 |
| NAVARRA | .306456 | .325229 | .338953 | .349580 | .365194 | .376283 |
| ORENSE | .388051 | .412499 | .430256 | .443954 | .464014 | .478224 |
| PALENCIA | .355676 | .377512 | .393405 | .405683 | .423692 | .436467 |
| PALMAS LAS | .296928 | .314455 | .327260 | .337179 | .351763 | .362133 |
| PONTEVEDRA | .318569 | .337703 | .351669 | .362479 | .378360 | .389643 |
| RIOJA, LA | .328565 | .348328 | .362735 | .373878 | .390242 | .401864 |
| SALAMANCA | .386979 | .411225 | .428824 | .442399 | .462278 | .476359 |
| SANTA CRUZ | .345623 | .366663 | .381984 | .393825 | .411201 | .423532 |
| SEGOVIA | .316040 | .335359 | .349472 | .360396 | .376444 | .387841 |
| SEVILLA | .340303 | .360909 | .375913 | .387510 | .404528 | .416607 |
| SORIA | .345782 | .367338 | .383055 | .395208 | .413037 | .425685 |
| TARRAGONA | .323499 | .342898 | .357045 | .367990 | .384066 | .395485 |
| TERUEL | .372544 | .395752 | .412627 | .425654 | .444747 | .458281 |
| TOLEDO | .362806 | .385138 | .401378 | .413919 | .432306 | .445345 |
| VALENCIA | .306787 | .325021 | .338337 | .348647 | .363803 | .374575 |
| VALLADOLID | .359591 | .381768 | .397881 | .410318 | .428542 | .441461 |
| VIZCAYA | .302928 | .320880 | .333986 | .344133 | .359048 | .369650 |
| ZAMORA | .330920 | .350983 | .365617 | .376937 | .393559 | .405362 |
| ZARAGOZA | .364274 | .386789 | .403141 | .415759 | .434247 | .447350 |
| ESPAÑA | .341679 | .362436 | .377556 | .389246 | .406402 | .418580 |

ÍNDICES DE DESIGUALDAD DE SHORROCKS.
PROVINCIAS ESPAÑOLAS 1980-81

| PROVINCIA | S(-1) | S(0) | S(1) | S(2) | S(3) | S(4) |
|-------------|---------|---------|---------|---------|----------|----------|
| ALAVA | .167934 | .138122 | .127181 | .147391 | .208315 | .362286 |
| ALBACETE | .270431 | .187930 | .163783 | .186298 | .266042 | .480005 |
| ALICANTE | .238929 | .187736 | .173159 | .218330 | .367161 | .839735 |
| ALMERIA | .358062 | .260358 | .238879 | .338221 | .727235 | 2.394811 |
| ASTURIAS | .276354 | .181937 | .154147 | .166050 | .216914 | .342078 |
| AVILA | .352474 | .254435 | .232316 | .321968 | .665529 | 2.076161 |
| BADAJOS | .267037 | .204389 | .187635 | .241084 | .423657 | 1.038390 |
| BALEARES | .277741 | .201356 | .180149 | .219158 | .351861 | .757477 |
| BARCELONA | .204648 | .162704 | .149146 | .178352 | .270174 | .525943 |
| BURGOS | .348746 | .216365 | .182240 | .203921 | .288898 | .519407 |
| CACERES | .264553 | .213820 | .201815 | .279391 | .557663 | 1.633434 |
| CADIZ | .280028 | .183449 | .155221 | .167203 | .218622 | .345394 |
| CANTABRIA | .221037 | .179138 | .167006 | .211934 | .357378 | .817137 |
| CASTELLON | .225541 | .165383 | .145979 | .164071 | .226281 | .384593 |
| CIUDAD REAL | .374349 | .231600 | .196515 | .227521 | .343904 | .684058 |
| CORDOBA | .238212 | .193784 | .182084 | .240818 | .439160 | 1.127635 |
| CORUÑA | .258256 | .190682 | .171125 | .205846 | .321949 | .664539 |
| CUENCA | .347509 | .280540 | .268994 | .441320 | 1.219018 | 5.524468 |
| GERONA | .227260 | .168951 | .150410 | .172446 | .245924 | .439689 |
| GRANADA | .348073 | .232648 | .203987 | .251049 | .420036 | .970172 |
| GUADALAJARA | .297979 | .196471 | .168007 | .187433 | .261048 | .454989 |
| GUIPUZCOA | .159194 | .131577 | .121045 | .138613 | .191317 | .320392 |
| HUELVA | .385544 | .245120 | .211809 | .258571 | .430346 | .990097 |
| HUESCA | .300182 | .251114 | .242827 | .382803 | .969018 | 3.907526 |
| JAEN | .344537 | .226410 | .196496 | .235011 | .373529 | .799156 |
| LEON | .320259 | .220064 | .194053 | .236669 | .386753 | .859871 |
| LERIDA | .206232 | .149864 | .130538 | .140397 | .179081 | .269747 |
| LUGO | .275335 | .203197 | .183419 | .227577 | .377698 | .853406 |
| MADRID | .270162 | .202661 | .184235 | .231525 | .392063 | .911426 |
| MALAGA | .283084 | .198932 | .175286 | .206612 | .314724 | .626998 |
| MURCIA | .245363 | .180754 | .161228 | .188863 | .281064 | .537478 |
| NAVARRA | .239642 | .188652 | .174227 | .220568 | .373607 | .863578 |
| ORENSE | .299828 | .209935 | .185717 | .224272 | .358053 | .766945 |
| PALENCIA | .366894 | .217731 | .180114 | .196111 | .266092 | .448340 |
| PALMAS LAS | .280372 | .203277 | .182042 | .222538 | .360614 | .787353 |
| PONTEVEDRA | .278669 | .185559 | .158375 | .173461 | .233045 | .383649 |
| RIOJA, LA | .188247 | .135396 | .116329 | .120101 | .142849 | .193442 |
| SALAMANCA | .317048 | .225426 | .202220 | .257079 | .451375 | 1.114121 |
| SANTA CRUZ | .268529 | .199050 | .179682 | .221461 | .362464 | .801490 |
| SEGOVIA | .248535 | .209250 | .200764 | .285812 | .593750 | 1.829461 |
| SEVILLA | .261248 | .194046 | .174909 | .213255 | .341691 | .731342 |
| SORIA | .357595 | .239464 | .210802 | .264255 | .457923 | 1.114677 |
| TARRAGONA | .281600 | .187874 | .160710 | .177226 | .241023 | .404356 |
| TERUEL | .254895 | .189395 | .170358 | .205365 | .321978 | .666602 |
| TOLEDO | .235997 | .184601 | .169671 | .211368 | .347803 | .770198 |
| VALENCIA | .245468 | .195820 | .182509 | .238235 | .426264 | 1.067233 |
| VALLADOLID | .193557 | .147051 | .130724 | .144664 | .192171 | .306805 |
| VIZCAYA | .201096 | .159737 | .146146 | .173326 | .258567 | .491621 |
| ZAMORA | .276803 | .223916 | .212125 | .301688 | .634137 | 1.997873 |
| ZARAGOZA | .324728 | .207871 | .176601 | .198082 | .280253 | .501738 |
| CEUTA Y M. | .372519 | .237205 | .204290 | .244900 | .393474 | .857955 |
| ESPAÑA | .310519 | .214838 | .189520 | .229430 | .369044 | .800494 |

ÍNDICES DE DESIGUALDAD DE SHORROCKS.
PROVINCIAS ESPAÑOLAS 1973-74

| PROVINCIA | S(-1) | S(0) | S(1) | S(2) | S(3) | S(4) |
|-------------|---------|---------|---------|---------|----------|----------|
| ALAVA | .230516 | .183444 | .169884 | .214335 | .359483 | .817440 |
| ALBACETE | .400182 | .262442 | .231414 | .302095 | .568840 | 1.567490 |
| ALICANTE | .270586 | .194482 | .172728 | .205097 | .315095 | .634620 |
| ALMERIA | .314162 | .203774 | .173715 | .194823 | .274892 | .489571 |
| ASTURIAS | .262912 | .184639 | .161405 | .183645 | .261770 | .470478 |
| AVILA | .529948 | .276467 | .224931 | .257810 | .392699 | .797843 |
| BADAJOS | .362798 | .252778 | .227423 | .304508 | .594045 | 1.713299 |
| BALEARES | .298159 | .198634 | .170853 | .193069 | .274825 | .495185 |
| BARCELONA | .207615 | .161213 | .145977 | .170342 | .248135 | .456091 |
| BURGOS | .449951 | .259985 | .217919 | .257218 | .408193 | .879004 |
| CACERES | .384810 | .256644 | .227259 | .296383 | .554997 | 1.514917 |
| CADIZ | .392106 | .262189 | .232933 | .308676 | .595873 | 1.699213 |
| CANTABRIA | .206376 | .171702 | .161565 | .206185 | .348401 | .795863 |
| CASTELLON | .276258 | .195111 | .171966 | .201618 | .303664 | .594196 |
| CIUDAD REAL | .538163 | .312201 | .268428 | .360796 | .736402 | 2.297344 |
| CORDOBA | .280842 | .240254 | .233896 | .366738 | .911565 | 3.577590 |
| CORUÑA | .279355 | .200541 | .178555 | .215009 | .339355 | .712482 |
| CUENCA | .286433 | .219432 | .202759 | .270949 | .513500 | 1.405995 |
| GERONA | .272704 | .196076 | .174313 | .207860 | .321898 | .656302 |
| GRANADA | .464738 | .292754 | .257288 | .350869 | .725240 | 2.289823 |
| GUADALAJARA | .453893 | .258188 | .214890 | .249844 | .386161 | .799138 |
| GUIPUZCOA | .193807 | .172793 | .168118 | .230543 | .435973 | 1.162682 |
| HUELVA | .294429 | .221357 | .203038 | .268101 | .499172 | 1.334999 |
| HUESCA | .189169 | .167106 | .161529 | .216130 | .391262 | .980345 |
| JAEN | .289460 | .235586 | .224514 | .331020 | .744257 | 2.571188 |
| LEON | .344513 | .274768 | .262064 | .418848 | 1.105546 | 4.734920 |
| LERIDA | .310693 | .200683 | .170460 | .189209 | .262103 | .453699 |
| LUGO | .331300 | .226533 | .199958 | .246836 | .413308 | .953820 |
| MADRID | .257382 | .203211 | .189077 | .249144 | .455423 | 1.178413 |
| MALAGA | .421686 | .264082 | .228866 | .289379 | .517010 | 1.323997 |
| MURCIA | .280427 | .223885 | .210911 | .296202 | .610223 | 1.872426 |
| NAVARRA | .333955 | .203445 | .168716 | .180959 | .237831 | .380633 |
| ORENSE | .639276 | .329960 | .274669 | .355006 | .683875 | 1.977756 |
| PALENCIA | .429178 | .265808 | .229551 | .289034 | .513324 | 1.304062 |
| PALMAS LAS | .221185 | .173632 | .159036 | .193297 | .303134 | .623520 |
| PONTEVEDRA | .303656 | .208496 | .182727 | .216458 | .334624 | .683476 |
| RIOJA, LA | .305695 | .218257 | .195507 | .244959 | .417781 | .987031 |
| SALAMANCA | .568801 | .320460 | .273650 | .367418 | .752114 | 2.360299 |
| SANTA CRUZ | .373163 | .246626 | .216647 | .273579 | .482219 | 1.205286 |
| SEGOVIA | .352387 | .214892 | .179521 | .197804 | .273117 | .472184 |
| SEVILLA | .323126 | .232965 | .210894 | .276502 | .513505 | 1.374631 |
| SORIA | .495905 | .264932 | .216060 | .244807 | .363602 | .709540 |
| TARRAGONA | .291442 | .210869 | .189347 | .235505 | .394704 | .907087 |
| TERUEL | .538898 | .299564 | .252375 | .318936 | .581383 | 1.545442 |
| TOLEDO | .438150 | .274919 | .239567 | .311592 | .587892 | 1.630350 |
| VALENCIA | .254816 | .188783 | .169526 | .203543 | .316938 | .649505 |
| VALLADOLID | .335659 | .255916 | .238899 | .348960 | .786399 | 2.747495 |
| VIZCAYA | .222280 | .179099 | .166509 | .210142 | .351286 | .793415 |
| ZAMORA | .352292 | .228549 | .197495 | .235115 | .371374 | .787817 |
| ZARAGOZA | .353711 | .264032 | .245009 | .358410 | .814854 | 2.888001 |
| ESPAÑA | .363356 | .241004 | .211473 | .264092 | .455242 | 1.100402 |

ÍNDICES DE DESIGUALDAD DE ATKINSON
PROVINCIAS ESPAÑOLAS 1980-81

| PROVINCIA | A(0.5) | A(1.5) | A(2) | A(3) | A(4) |
|-------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| ALAVA | .069478 | .188373 | .250862 | .379419 | .506464 |
| ALBACETE | .089426 | .257132 | .350592 | .546371 | .703936 |
| ALICANTE | .093740 | .246230 | .322887 | .475871 | .613492 |
| ALMERIA | .128685 | .323555 | .416953 | .594645 | .731372 |
| ASTURIAS | .084715 | .255329 | .355549 | .569609 | .732262 |
| AVILA | .125212 | .318939 | .413128 | .593689 | .732297 |
| BADAJOS | .101436 | .265554 | .347717 | .510707 | .651445 |
| BALEARÉS | .097752 | .267391 | .356699 | .538267 | .688105 |
| BARCELONA | .081114 | .218574 | .289923 | .435650 | .572693 |
| BURGOS | .099727 | .296887 | .410549 | .641073 | .792039 |
| CACERES | .108750 | .269859 | .345596 | .490226 | .617873 |
| CADIZ | .085306 | .257401 | .358586 | .574317 | .736649 |
| CANTABRIA | .090403 | .234593 | .306074 | .447511 | .578121 |
| CASTELLON | .079834 | .228092 | .310385 | .485238 | .640519 |
| CIUDAD REAL | .107168 | .312348 | .427819 | .656923 | .802879 |
| CORDOBA | .098315 | .249375 | .322229 | .463738 | .592028 |
| CORUÑA | .092942 | .254743 | .340158 | .515039 | .664468 |
| CUENCA | .145022 | .330444 | .409688 | .552156 | .670210 |
| GERONA | .082080 | .230903 | .312014 | .482449 | .634553 |
| GRANADA | .110623 | .306028 | .410081 | .616673 | .764057 |
| GUADALAJARA | .091937 | .270795 | .373025 | .586457 | .744536 |
| GUIPUZCOA | .066243 | .180439 | .240923 | .365914 | .490892 |
| HUELVA | .114976 | .322750 | .435058 | .654544 | .797715 |
| HUESCA | .130744 | .301252 | .374753 | .507525 | .621862 |
| JAEN | .106803 | .301562 | .407609 | .620000 | .769215 |
| LEON | .105287 | .291122 | .390065 | .589033 | .738970 |
| LERIDA | .071791 | .211230 | .291516 | .466852 | .626445 |
| LUGO | .099377 | .267659 | .354701 | .530194 | .677232 |
| MADRID | .099734 | .265638 | .350366 | .520235 | .664836 |
| MALAGA | .095369 | .267693 | .361091 | .553259 | .707040 |
| MURCIA | .087781 | .244449 | .328736 | .503707 | .655391 |
| NAVARRA | .094294 | .247013 | .323540 | .475946 | .613012 |
| ORENSE | .100836 | .279262 | .374475 | .567742 | .719097 |
| PALENCIA | .098912 | .302363 | .422896 | .665485 | .813319 |
| PALMAS LAS | .098740 | .269343 | .358870 | .540438 | .689852 |
| PONTEVEDRA | .086853 | .258288 | .357467 | .567742 | .728817 |
| RIOJA, LA | .064374 | .194946 | .272988 | .448398 | .612255 |
| SALAMANCA | .109398 | .293166 | .387666 | .575259 | .721650 |
| SANTA CRUZ | .097401 | .263037 | .348983 | .522855 | .670048 |
| SEGOVIA | .108128 | .261627 | .331582 | .462355 | .579770 |
| SEVILLA | .094894 | .257710 | .342752 | .515725 | .663554 |
| SORIA | .114179 | .312374 | .416634 | .621913 | .767442 |
| TARRAGONA | .088059 | .260614 | .359877 | .569521 | .729813 |
| TERUEL | .092511 | .252842 | .337217 | .509815 | .658452 |
| TOLEDO | .091930 | .243357 | .320188 | .474459 | .613517 |
| VALENCIA | .098596 | .253182 | .328831 | .477171 | .610198 |
| VALLADOLID | .071667 | .204576 | .278559 | .437142 | .587201 |
| VIZCAYA | .079548 | .215385 | .286323 | .431830 | .569301 |
| ZAMORA | .114223 | .279481 | .355922 | .500365 | .626479 |
| ZARAGOZA | .096596 | .285331 | .393372 | .615505 | .770142 |
| CEUTA Y M. | .111047 | .315051 | .426618 | .646875 | .792391 |
| ESPAÑA | .102883 | .285287 | .382731 | .579759 | .730686 |

ÍNDICES DE DESIGUALDAD DE ATKINSON
PROVINCIAS ESPAÑOLAS 1973-74

| PROVINCIA | A(0.5) | A(1.5) | A(2) | A(3) | A(4) |
|-------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| ALAVA | .091976 | .240663 | .315084 | .463267 | .598281 |
| ALBACETE | .125089 | .335729 | .444248 | .652415 | .791785 |
| ALICANTE | .093915 | .261074 | .350722 | .535098 | .687520 |
| ALMERIA | .095012 | .279901 | .385494 | .603835 | .759849 |
| ASTURIAS | .088125 | .252707 | .344187 | .536188 | .693554 |
| AVILA | .122999 | .371051 | .514303 | .768107 | .883827 |
| BADAJOS | .122740 | .320929 | .420153 | .611897 | .753057 |
| BALEARES | .093358 | .272147 | .373165 | .583153 | .740289 |
| BARCELONA | .079555 | .218836 | .292903 | .446650 | .590015 |
| BURGOS | .118715 | .345965 | .473380 | .713424 | .845462 |
| CACERES | .122830 | .328786 | .434588 | .638861 | .779913 |
| CADIZ | .125806 | .333568 | .439214 | .641944 | .781596 |
| CANTABRIA | .087464 | .224540 | .291660 | .423213 | .546687 |
| CASTELLON | .093609 | .263279 | .355469 | .545881 | .700113 |
| CIUDAD REAL | .145125 | .391097 | .518149 | .744085 | .862955 |
| CORDOBA | .125925 | .289253 | .359256 | .485038 | .594788 |
| CORUÑA | .096965 | .267442 | .358032 | .542956 | .694159 |
| CUENCA | .109393 | .280319 | .363813 | .526661 | .664670 |
| GERONA | .094741 | .262695 | .352503 | .536799 | .688820 |
| GRANADA | .138910 | .366390 | .481456 | .694450 | .824602 |
| GUADALAJARA | .117240 | .345826 | .475557 | .719365 | .850349 |
| GUIPUZCOA | .090774 | .219909 | .278820 | .387956 | .489213 |
| HUELVA | .109602 | .283954 | .370221 | .539397 | .680137 |
| HUESCA | .087310 | .214722 | .273963 | .385232 | .489527 |
| JAEN | .120834 | .289847 | .366255 | .508542 | .631633 |
| LEON | .141174 | .326788 | .407592 | .554442 | .675786 |
| LERIDA | .093341 | .277049 | .382863 | .602712 | .759711 |
| LUGO | .108400 | .297935 | .398171 | .598257 | .746715 |
| MADRID | .102087 | .261556 | .339395 | .491673 | .626172 |
| MALAGA | .123971 | .341791 | .457221 | .677402 | .814581 |
| MURCIA | .113599 | .280703 | .358915 | .507782 | .636891 |
| NAVARRA | .092810 | .285185 | .400088 | .637476 | .791990 |
| ORENSE | .148933 | .417454 | .560933 | .798850 | .900605 |
| PALENCIA | .124385 | .344457 | .461601 | .684240 | .820295 |
| PALMAS LAS | .086345 | .231450 | .306215 | .458030 | .597473 |
| PONTEVEDRA | .099377 | .279596 | .377456 | .577229 | .730258 |
| RIOJA, LA | .105861 | .285763 | .379033 | .565577 | .713277 |
| SALAMANCA | .148003 | .400841 | .531967 | .760768 | .874721 |
| SANTA CRUZ | .117304 | .320405 | .427041 | .635323 | .778956 |
| SEGOVIA | .098424 | .296966 | .413069 | .648678 | .799273 |
| SEVILLA | .113895 | .299092 | .392191 | .574822 | .718271 |
| SORIA | .118251 | .358199 | .497692 | .751395 | .873267 |
| TARRAGONA | .102573 | .277192 | .367844 | .550105 | .698101 |
| TERUEL | .136886 | .384899 | .518490 | .755383 | .872738 |
| TOLEDO | .129574 | .351312 | .466753 | .684344 | .818752 |
| VALENCIA | .092092 | .252458 | .337148 | .510731 | .659971 |
| VALLADOLID | .128607 | .314828 | .401311 | .564212 | .696362 |
| VIZCAYA | .090161 | .235049 | .307268 | .450701 | .582893 |
| ZAMORA | .107397 | .304873 | .413003 | .629005 | .777504 |
| ZARAGOZA | .131914 | .324188 | .413979 | .583012 | .716351 |
| ESPAÑA | .114577 | .314760 | .420529 | .628482 | .773641 |

ÍNDICES DE POBREZA
PROVINCIAS ESPAÑOLAS 1980-81

| PROVINCIA | IB | ID | S | T |
|-------------|----------|----------|----------|----------|
| ALAVA | 0.076049 | 0.259966 | 0.027438 | 0.019289 |
| ALBACETE | 0.315340 | 0.343198 | 0.149586 | 0.097948 |
| ALICANTE | 0.180852 | 0.295874 | 0.075614 | 0.050668 |
| ALMERIA | 0.424608 | 0.364934 | 0.211471 | 0.134226 |
| ASTURIAS | 0.184707 | 0.341976 | 0.088171 | 0.060031 |
| AVILA | 0.400328 | 0.361027 | 0.197459 | 0.126382 |
| BADAJOS | 0.433579 | 0.342497 | 0.203710 | 0.127231 |
| BALEARES | 0.207700 | 0.324094 | 0.094136 | 0.063305 |
| BARCELONA | 0.097648 | 0.278842 | 0.038726 | 0.026485 |
| BURGOS | 0.192797 | 0.361387 | 0.096824 | 0.066212 |
| CACERES | 0.489359 | 0.343595 | 0.228642 | 0.139191 |
| CADIZ | 0.244975 | 0.348223 | 0.118959 | 0.079602 |
| CANTABRIA | 0.139535 | 0.279704 | 0.055122 | 0.037388 |
| CASTELLON | 0.179729 | 0.311288 | 0.078700 | 0.053074 |
| CIUDAD REAL | 0.431227 | 0.389826 | 0.228765 | 0.146695 |
| CORDOBA | 0.277387 | 0.298795 | 0.115454 | 0.075367 |
| CORUÑA | 0.217338 | 0.318352 | 0.096355 | 0.064680 |
| CUENCA | 0.382498 | 0.333887 | 0.175078 | 0.111471 |
| GERONA | 0.160457 | 0.306496 | 0.068947 | 0.046877 |
| GRANADA | 0.363149 | 0.367112 | 0.182491 | 0.118833 |
| GUADALAJARA | 0.289660 | 0.353783 | 0.141905 | 0.094038 |
| GUIPUZCOA | 0.078148 | 0.256795 | 0.028025 | 0.019573 |
| HUELVA | 0.325947 | 0.374437 | 0.168070 | 0.111020 |
| HUESCA | 0.210287 | 0.287524 | 0.084367 | 0.056331 |
| JAEN | 0.428833 | 0.378058 | 0.221761 | 0.141358 |
| LEON | 0.305129 | 0.351461 | 0.147579 | 0.097479 |
| LERIDA | 0.144689 | 0.307314 | 0.062711 | 0.042669 |
| LUGO | 0.307548 | 0.331723 | 0.141431 | 0.092398 |
| MADRID | 0.120388 | 0.305683 | 0.051527 | 0.035534 |
| MALAGA | 0.239360 | 0.334844 | 0.111220 | 0.074534 |
| MURCIA | 0.253680 | 0.320812 | 0.113655 | 0.075218 |
| NAVARRA | 0.110910 | 0.287767 | 0.045597 | 0.030960 |
| ORENSE | 0.364799 | 0.352879 | 0.177591 | 0.114580 |
| PALENCIA | 0.202041 | 0.371282 | 0.103005 | 0.070964 |
| PALMAS LAS | 0.223311 | 0.326109 | 0.101181 | 0.067996 |
| PONTEVEDRA | 0.165536 | 0.338517 | 0.078118 | 0.053525 |
| RIOJA, LA | 0.157827 | 0.307330 | 0.068584 | 0.046378 |
| SALAMANCA | 0.369717 | 0.353708 | 0.180030 | 0.116049 |
| SANTA CRUZ | 0.256532 | 0.323386 | 0.115486 | 0.076545 |
| SEGOVIA | 0.258230 | 0.287676 | 0.103436 | 0.067855 |
| SEVILLA | 0.250764 | 0.321182 | 0.112532 | 0.074540 |
| SORIA | 0.332508 | 0.363959 | 0.166374 | 0.109300 |
| TARRAGONA | 0.181250 | 0.339732 | 0.085391 | 0.058452 |
| TERUEL | 0.360610 | 0.333926 | 0.166557 | 0.106723 |
| TOLEDO | 0.368348 | 0.321109 | 0.163416 | 0.103874 |
| VALENCIA | 0.198090 | 0.294612 | 0.081270 | 0.054668 |
| VALLADOLID | 0.113579 | 0.291386 | 0.046792 | 0.032032 |
| VIZCAYA | 0.097361 | 0.278559 | 0.038165 | 0.026340 |
| ZAMORA | 0.442228 | 0.335767 | 0.202690 | 0.125760 |
| ZARAGOZA | 0.209474 | 0.354837 | 0.102970 | 0.070105 |
| CEUTA Y M. | 0.217019 | 0.361055 | 0.107712 | 0.073630 |
| ESPAÑA | 0.209628 | 0.338263 | 0.098737 | 0.066750 |

ÍNDICES DE POBREZA
PROVINCIAS ESPAÑOLAS 1980-81

| PROVINCIA | F(1) | F(2) | F(3) | F(4) |
|-------------|----------|----------|----------|----------|
| ALAVA | 0.076049 | 0.020832 | 0.009215 | 0.005279 |
| ALBACETE | 0.315340 | 0.109238 | 0.055145 | 0.033200 |
| ALICANTE | 0.180852 | 0.054540 | 0.025069 | 0.014179 |
| ALMERIA | 0.424608 | 0.155966 | 0.080503 | 0.048782 |
| ASTURIAS | 0.184707 | 0.064179 | 0.032920 | 0.020246 |
| AVILA | 0.400328 | 0.145542 | 0.074857 | 0.045328 |
| BADAJOS | 0.433579 | 0.149517 | 0.073501 | 0.042827 |
| BALEARES | 0.207700 | 0.068334 | 0.033466 | 0.019803 |
| BARCELONA | 0.097648 | 0.028272 | 0.012857 | 0.007374 |
| BURGOS | 0.192797 | 0.070683 | 0.037660 | 0.023818 |
| CACERES | 0.489359 | 0.169162 | 0.081955 | 0.046807 |
| CADIZ | 0.244975 | 0.086317 | 0.044524 | 0.027396 |
| CANTABRIA | 0.139535 | 0.040069 | 0.017891 | 0.009992 |
| CASTELLON | 0.179729 | 0.056971 | 0.027279 | 0.015929 |
| CIUDAD REAL | 0.431227 | 0.169110 | 0.092832 | 0.059421 |
| CORDOBA | 0.277387 | 0.083912 | 0.037985 | 0.020968 |
| CORUÑA | 0.217338 | 0.070212 | 0.033881 | 0.019808 |
| CUENCA | 0.382498 | 0.128734 | 0.061807 | 0.035258 |
| GERONA | 0.160457 | 0.050206 | 0.023856 | 0.013882 |
| GRANADA | 0.363149 | 0.134326 | 0.070762 | 0.043901 |
| GUADALAJARA | 0.289660 | 0.103487 | 0.053674 | 0.033072 |
| GUIPUZCOA | 0.078148 | 0.021131 | 0.009258 | 0.005269 |
| HUELVA | 0.325947 | 0.123053 | 0.066140 | 0.041789 |
| HUESCA | 0.210287 | 0.061501 | 0.027285 | 0.014919 |
| JAEN | 0.428833 | 0.163131 | 0.087303 | 0.054701 |
| LEON | 0.305129 | 0.108254 | 0.055573 | 0.033886 |
| LERIDA | 0.144689 | 0.045491 | 0.021774 | 0.012777 |
| LUGO | 0.307548 | 0.103038 | 0.050523 | 0.029682 |
| MADRID | 0.120388 | 0.037831 | 0.018118 | 0.010671 |
| MALAGA | 0.239360 | 0.081165 | 0.040568 | 0.024335 |
| MURCIA | 0.253680 | 0.082404 | 0.039794 | 0.023216 |
| NAVARRA | 0.110910 | 0.032953 | 0.015190 | 0.008739 |
| ORENSE | 0.364799 | 0.129742 | 0.066304 | 0.040147 |
| PALENCIA | 0.202041 | 0.076023 | 0.041280 | 0.026482 |
| PALMAS LAS | 0.223311 | 0.073843 | 0.036231 | 0.021440 |
| PONTEVEDRA | 0.165536 | 0.057052 | 0.029127 | 0.017874 |
| RIOJA, LA | 0.157827 | 0.049530 | 0.023662 | 0.013847 |
| SALAMANCA | 0.369717 | 0.131784 | 0.067262 | 0.040629 |
| SANTA CRUZ | 0.256532 | 0.083979 | 0.040710 | 0.023796 |
| SEGOVIA | 0.258230 | 0.075324 | 0.033125 | 0.017890 |
| SEVILLA | 0.250764 | 0.081561 | 0.039383 | 0.022965 |
| SORIA | 0.332508 | 0.122029 | 0.064064 | 0.039691 |
| TARRAGONA | 0.181250 | 0.062592 | 0.031951 | 0.019578 |
| TERUEL | 0.360610 | 0.121434 | 0.059444 | 0.034766 |
| TOLEDO | 0.368348 | 0.119302 | 0.056406 | 0.032020 |
| VALENCIA | 0.198090 | 0.059392 | 0.027072 | 0.015173 |
| VALLADOLID | 0.113579 | 0.034131 | 0.015886 | 0.009201 |
| VIZCAYA | 0.097361 | 0.028166 | 0.012802 | 0.007343 |
| ZAMORA | 0.442228 | 0.149508 | 0.071673 | 0.040727 |
| ZARAGOZA | 0.209474 | 0.075340 | 0.039525 | 0.024677 |
| CEUTA Y M. | 0.217019 | 0.079367 | 0.042067 | 0.026443 |
| ESPAÑA | 0.209628 | 0.071925 | 0.036359 | 0.022043 |

ÍNDICES DE POBREZA
PROVINCIAS ESPAÑOLAS 1980-81

| PROVINCIA | K(0.5) | K(1) | K(1.5) | K(2) | K(3) | K(4) |
|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| ALAVA | 0.031932 | 0.027438 | 0.030925 | 0.033069 | 0.036473 | 0.039021 |
| ALBACETE | 0.148774 | 0.149586 | 0.162894 | 0.173117 | 0.188510 | 0.199648 |
| ALICANTE | 0.082604 | 0.075614 | 0.082272 | 0.087652 | 0.096088 | 0.102317 |
| ALMERIA | 0.208976 | 0.211471 | 0.228694 | 0.242118 | 0.262126 | 0.276467 |
| ASTURIAS | 0.092393 | 0.088171 | 0.095859 | 0.101893 | 0.111138 | 0.117844 |
| AVILA | 0.193473 | 0.197459 | 0.214090 | 0.226846 | 0.245860 | 0.259509 |
| BADAJOS | 0.202354 | 0.203710 | 0.220768 | 0.234119 | 0.254164 | 0.268655 |
| BALEARES | 0.098860 | 0.094136 | 0.102445 | 0.109003 | 0.119081 | 0.126437 |
| BARCELONA | 0.045231 | 0.038726 | 0.042404 | 0.045171 | 0.049669 | 0.053026 |
| BURGOS | 0.100535 | 0.096824 | 0.104967 | 0.111393 | 0.121168 | 0.128202 |
| CACERES | 0.224324 | 0.228642 | 0.247508 | 0.262055 | 0.283786 | 0.299468 |
| CADIZ | 0.123237 | 0.118959 | 0.128893 | 0.136914 | 0.149142 | 0.157986 |
| CANTABRIA | 0.061372 | 0.055122 | 0.060436 | 0.064482 | 0.070865 | 0.075607 |
| CASTELLON | 0.084396 | 0.078700 | 0.085737 | 0.091309 | 0.099966 | 0.106322 |
| CIUDAD REAL | 0.220564 | 0.228765 | 0.247710 | 0.262122 | 0.283385 | 0.298478 |
| CORDOBA | 0.118606 | 0.115454 | 0.126139 | 0.134386 | 0.147000 | 0.156273 |
| CORUÑA | 0.099096 | 0.096355 | 0.105376 | 0.112227 | 0.122685 | 0.130330 |
| CUENCA | 0.175219 | 0.175078 | 0.189851 | 0.201335 | 0.218610 | 0.231123 |
| GERONA | 0.073689 | 0.068947 | 0.075493 | 0.080461 | 0.088158 | 0.093817 |
| GRANADA | 0.177356 | 0.182491 | 0.198285 | 0.210241 | 0.228033 | 0.240780 |
| GUADALAJARA | 0.143305 | 0.141905 | 0.154064 | 0.163607 | 0.177994 | 0.188367 |
| GUIPUZCOA | 0.033030 | 0.028025 | 0.031442 | 0.033609 | 0.037079 | 0.039681 |
| HUELVA | 0.169210 | 0.168070 | 0.181666 | 0.192489 | 0.208700 | 0.220287 |
| HUESCA | 0.088457 | 0.084367 | 0.092527 | 0.098669 | 0.108123 | 0.115101 |
| JAEN | 0.219419 | 0.221761 | 0.239580 | 0.253618 | 0.274505 | 0.289408 |
| LEON | 0.144919 | 0.147579 | 0.160835 | 0.170820 | 0.185779 | 0.196566 |
| LERIDA | 0.068578 | 0.062711 | 0.068408 | 0.072861 | 0.079844 | 0.084985 |
| LUGO | 0.143149 | 0.141431 | 0.153842 | 0.163543 | 0.178238 | 0.188918 |
| MADRID | 0.056303 | 0.051527 | 0.056591 | 0.060297 | 0.066083 | 0.070342 |
| MALAGA | 0.112868 | 0.111220 | 0.121352 | 0.129086 | 0.140810 | 0.149325 |
| MURCIA | 0.117767 | 0.113655 | 0.123709 | 0.131663 | 0.143833 | 0.152721 |
| NAVARRA | 0.052851 | 0.045597 | 0.049535 | 0.052702 | 0.057865 | 0.061708 |
| ORENSE | 0.178385 | 0.177591 | 0.192389 | 0.204120 | 0.221768 | 0.234489 |
| PALENCIA | 0.101897 | 0.103005 | 0.112494 | 0.119418 | 0.129744 | 0.137132 |
| PALMAS LAS | 0.103279 | 0.101181 | 0.110581 | 0.117704 | 0.128535 | 0.136429 |
| PONTEVEDRA | 0.081964 | 0.078118 | 0.085168 | 0.090567 | 0.098840 | 0.104849 |
| RIOJA, LA | 0.074963 | 0.068584 | 0.074643 | 0.079497 | 0.087119 | 0.092730 |
| SALAMANCA | 0.180189 | 0.180030 | 0.195047 | 0.206880 | 0.224651 | 0.237453 |
| SANTA CRUZ | 0.118542 | 0.115486 | 0.125836 | 0.133901 | 0.146192 | 0.155158 |
| SEGOVIA | 0.106362 | 0.103436 | 0.113346 | 0.120845 | 0.132333 | 0.140807 |
| SEVILLA | 0.117182 | 0.112532 | 0.122356 | 0.130188 | 0.142189 | 0.150954 |
| SORIA | 0.165253 | 0.166374 | 0.180480 | 0.191406 | 0.207748 | 0.219474 |
| TARRAGONA | 0.087379 | 0.085391 | 0.093422 | 0.099389 | 0.108442 | 0.115009 |
| TERUEL | 0.167451 | 0.166557 | 0.180926 | 0.192224 | 0.209297 | 0.221691 |
| TOLEDO | 0.163008 | 0.163416 | 0.177951 | 0.189185 | 0.206176 | 0.218559 |
| VALENCIA | 0.083707 | 0.081270 | 0.089451 | 0.095439 | 0.104616 | 0.111378 |
| VALLADOLID | 0.052779 | 0.046792 | 0.051260 | 0.054629 | 0.059991 | 0.063966 |
| VIZCAYA | 0.043620 | 0.038165 | 0.042166 | 0.044988 | 0.049485 | 0.052831 |
| ZAMORA | 0.198738 | 0.202690 | 0.219965 | 0.233185 | 0.252989 | 0.267323 |
| ZARAGOZA | 0.105038 | 0.102970 | 0.112083 | 0.119063 | 0.129613 | 0.137218 |
| CEUTA Y M. | 0.106386 | 0.107712 | 0.117706 | 0.125019 | 0.135957 | 0.143815 |
| ESPAÑA | 0.102403 | 0.098737 | 0.107422 | 0.114202 | 0.124547 | 0.132055 |

4.- CONCLUSIONES

En este trabajo se ha desarrollado un método para la estimación de índices de desigualdad y pobreza a partir de datos agrupados, más concretamente, porcentajes de la renta total absorbida por cada decil (o en general, fractil). El método se resume en dos fases:

- Ajuste econométrico de una forma funcional continua a la curva de Lorenz procedente de los datos empíricos.
- Integración numérica de las expresiones que ligan a los índices de desigualdad y pobreza con la curva de Lorenz o con su primera derivada.

Para llevar a cabo estas dos fases se ha realizado un análisis tanto de las formas funcionales disponibles para la curva de Lorenz como de los índices de desigualdad y pobreza del que se desprenden las siguientes conclusiones:

-Los índices de desigualdad y pobreza pueden calcularse a partir de distribuciones empíricas discretas, o a partir de distribuciones continuas. En el primer caso, distribuciones discretas, se puede trabajar con los datos originales, que son difíciles de conseguir y suponen un volumen de información ingente, o bien con datos agrupados, que son más accesibles, pero inducen a errores de agrupamiento.

-Para obtener los índices de distribuciones continuas, se necesita seleccionar y ajustar a los datos empíricos una función que los represente con la suficiente precisión. Las funciones de distribución que se han ajustado a la distribución de la renta no son útiles en este campo, puesto que las que son suficientemente sencillas para generar sin dificultad los indicadores ofrecen ajustes pobres; en cambio, las funciones que ajustan mejor son más complicadas y no siempre generan fácilmente los índices de desigualdad y pobreza.

-La función de distribución no es la única función continua que puede representar la distribución de la renta. La curva de Lorenz también representa de manera unívoca la distribución de la renta.

-La curva de Lorenz presenta ciertas ventajas frente a la función de distribución para representar a la distribución de la renta a la hora de estimar índices de desigualdad y pobreza:

-Su relación con la mayoría de los índices de desigualdad y pobreza es más sencilla y, por tanto, los genera más fácilmente.

-Permite comparaciones, en sentido de desigualdad y bienestar social, más simples, incluso gráficamente.

-Los datos de la distribución de la renta en forma de proporción de renta total absorbida por grupos de renta son frecuentes en las publicaciones estadísticas oficiales.

-Formas funcionales sencillas proporcionan ajustes muy buenos a las curvas de Lorenz empíricas.

-Se han propuesto diversas formas funcionales para representar a la curva de Lorenz. Son familias de funciones paramétricas sencillas en las que el número de parámetros varía de uno a cuatro.

-Sólo una de las formas propuestas para la curva de Lorenz se deriva de una función de distribución conocida, la de Pareto. Esta es la que proporciona peores ajustes.

-Atendiendo al método de ajuste econométrico aplicable, las funciones propuestas para representar a la curva de Lorenz se pueden agrupar en funciones linealizables y funciones no linealizables con logaritmos. Las funciones linealizables se pueden ajustar usando Mínimos Cuadrados Ordinarios, mientras que las no linealizables han de ser estimadas por métodos no lineales, como los Mínimos Cuadrados No Lineales.

-Para analizar el comportamiento empírico de las diversas especificaciones disponibles, se han realizado estimaciones de la curva de Lorenz correspondientes a España en 1988, y a provincias con características extremas (los índices de Gini más alto y más bajo de España en 1980-81, y las ordenadas más altas y bajas para los deciles 1 y 10), llegándose a las siguientes conclusiones:

-En general, y atendiendo a la suma de errores cuadráticos y los coeficientes de determinación, ajustan mejor las funciones no linealizables que las linealizables (incluso con un número menor de coeficientes estimados).

-Dentro del grupo de las especificaciones linealizables, las especificaciones correspondientes a la familia de Bassman, con miembros de 1, 2, 3 y 4 parámetros, tienen un comportamiento empírico común, sobreestiman la región derecha de la curva de Lorenz, de forma más acusada en los casos en que los valores empíricos son menores y en las especificaciones de menos coeficientes.

-Las especificaciones no lineales, Rasche y Ortega, son las que proporcionan mejores ajustes, mostrando ambas un comportamiento muy parecido.

-En la región muy baja de la curva de Lorenz, no se mantienen los comportamientos citados, arrojando las especificaciones de Bassman con dos parámetros mejores ajustes que las funciones no linealizables.

-Parece desprenderse del análisis realizado que las especificaciones de la curva de Lorenz más adecuadas para la estimación de índices de desigualdad y pobreza son las propuestas por Rasche y otros y por Ortega y otros. No obstante, en el caso de estimar índices de pobreza para el extremo inferior de la distribución, es decir, con una línea de la pobreza cerca del primer decil, sería recomendable usar alguno de los dos miembros de dos parámetros de la familia de Bassman.

- Los índices de desigualdad se han clasificado tradicionalmente en dos grupos: índices positivos (índices sencillos, índice de Gini y derivados e índices de entropía) e índices normativos (índices de Dalton y Atkinson), atendiendo a la especificación explícita en su formulación de criterios éticos o de bienestar. Esta distinción parece estar perdiendo vigencia puesto que se han desarrollado algoritmos que permiten determinar las funciones de evaluación social asociadas a cualquier índice de desigualdad.

- Atendiendo a criterios de bienestar social, es muy importante tener en cuenta los índices de desigualdad que verifican el Principio de las transferencias de Pigou-Dalton (índices S-convexos) y los que además verifican el Principio de las transferencias decrecientes. Aquellos índices que no verifican ninguno de los dos principios mencionados no se pueden considerar adecuados para una medición coherente de la desigualdad. Los que verifican el primero de los principios se corresponden con funciones de bienestar social S-cóncavas, es decir, son coherentes con el criterio de la curva de Lorenz, aunque pueden generar funciones de bienestar social lineales. En cambio, los que

verifican el segundo de los principios se derivan de funciones de evaluación social cóncavas, es decir, son sensibles al lugar de la distribución donde ocurren las transferencias, pudiendo ponderar cada vez más las colas bajas de las distribuciones. Además son más flexibles para incorporar criterios éticos a voluntad del investigador.

- Los índices de pobreza se enfrentan a una disyuntiva similar, aunque hay autores que opinan que la sensibilidad al lugar donde ocurren las transferencias, debido a su incompatibilidad manifiesta con el Axioma de la monotonía, puede no ser una característica deseable en los índices de pobreza. Hay que tener en cuenta que la mayor parte de los índices de pobreza, por muy sofisticados que sean, pueden expresarse en función del Indicador Básico y, en la práctica, la componente del índice debida al Indicador Básico suele dominar el valor del índice.

- Atendiendo a los métodos empíricos de estimación y la relación con la curva de Lorenz, se pueden agrupar los índices de desigualdad en aquellos que integran abscisas de la función de distribución, como los de Atkinson, o los de Entropía, y los que integran ordenadas (o rangos en la ordenación creciente según la renta), como el de Gini y los que de él se derivan. Los índices que pertenecen al segundo grupo pueden obtenerse calculando integrales ponderadas y normalizadas de la curva de Lorenz. Los del primer grupo, en cambio, se pueden obtener integrando la primera derivada de la curva de Lorenz.

- Por otra parte, los índices de desigualdad relacionados con la primera derivada de la curva de Lorenz poseen la descomponibilidad aditiva, por generar funciones de bienestar social aditivamente separables, mientras que los relacionados directamente con la curva de Lorenz no.

- Los índices de pobreza están muy relacionados con los índices de desigualdad, y les son aplicables los dos puntos anteriores, encuadrándose la mayoría de ellos en el grupo de los relacionados con la curva de Lorenz, ya que son generalizaciones del índice de Sen, que, a su vez, depende del índice de Gini. En el grupo de los aditivamente descomponibles, se encuentra la familia de Foster y otros, que incluye al Indicador Básico.

Por último, el método desarrollado en este trabajo no ha quedado en una simple propuesta, sino que ha sido aplicado a la distribución de la renta familiar por provincias en España, según la información de la Encuesta de Presupuestos Familiares de 1980-81, publicada por el I.N.E. Es decir, se ha probado con un grupo de 52 distribuciones del ingreso familiar, incluyéndose en este trabajo los resultados de las dos fases.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ATKINSON, ANTHONY B. (1981): La economía de la desigualdad. Crítica. Barcelona 1981.
- ATKINSON, A.B. (1988): "Acerca de la Medida de la Pobreza." Boletín del ICE, N.2121 (15-21 Feb 1988)
- BARTELS, C.P.A (1977): Economic Aspects of Regional Welfare. Income Distribution and Welfare. Martinius Nijhoff Social Science Division. Leiden, 1977.
- BARTELS, C.P.A.; BERTENS, A.M. (1976): "A Factor and Regression Analysis Of Regional Differences in Income-Level and Concentration in Netherland". Applied Economics, 1976,8
- BLACKORBY, C. y DONALDSON, D.(1978): "Measures of Relative Equality and Their Meaning in Terms of Social Welfare." Journal of Economic Theory, 18, pp. 59-80.
- BLACKORBY, C. y DONALDSON, D. (1987): "Welfare Ratios and Distributionally Sensitive Cost-Benefit Analysis." Journal Of Public Economics 34
- BLACKORBY, C. y DONALDSON, D. (1980): "Ethical Indices for the Measurement of Poverty." Econometrica, Vol. 48, N.4 (May 1980)
- BRAUN, D. (1988): "Multiple Measurements of U.S. Income Inequality." The Review of Econmics and Statistics, 1988.
- CASAS SANCHEZ, J.M.; CALLEALTA BARROSO,F.J. (1989): "Indicadores de bienestar social: Un análisis comparativo regional". III Reunión ASEPELT-España Sevilla 1989
- CHACKRAVARTY, S. R. (1988): "Extended Gini Indices of Inequality." International Economic Review, V.29,No.1, Feb 1988.
- CHACKRAVARTY, S. R. (1983): "Ethically Flexible Measures of Poverty." Canadian Journal Of Economics, XVI N.1 Feb 1983.
- CHAMPERNOWNE, D.G. (1973): The Distribution of Income between Persons. Cambridge University Press, 1973.
- CHAMPERNOWNE, D. G. (1974): "A Comparison of Measures of Inequality of Income Distribution." The Economic Journal, Dic 1974.
- CLARK, STEPHEN; HEMMING, RICHARD. y ULPH, DAVID (1981): "On Indices for Measurement of Poverty." The Economic Journal, 91, (June 1981).
- DAGUM, C. (1980): "Lorenz Curve." The Eciclopedya of Statistics.
- DAGUM, C.(1990): "On the Relationship between Income Inequality Measures and

- Social Welfare Functions." Journal of Econometrics, Vol.43, nº12.
- DALTON, H. (1920): "The Measurement of the Inequality of Incomes." The Economic Journal, Vol.30, pp.348-361.
- DANZIGER, SHELDON y GOTTSCHALK, PETER (1987): "Earnings Inequality, the Spatial Concentration of Poverty, and the Underclass." Aea Papers and Proceedings Vol.77 No.2 (May 1987)
- DANZIGER, SHELDON y GOTTSCHALK, PETER (1986): "Do Rising Tides Lift all Boats? The Impact of Secular and Cyclical Changes on Poverty." American Economic Review, Vol. 76, No.2, May 1986
- DESAI, MEGHNAD y SHAH, ANUP (1988): "An Econometric Approach to the Measurement of Poverty." Oxford Economic Papers 40 (1988)
- DONALDSON, DAVID y WEIMARK, JOHN A. (1980): "A Single-Parameter Generalization of the Gini Indices of Inequality." Journal of Economic Theory, 22, pp.67-86.
- DONALDSON, DAVID y WEIMARK, JOHN A. (1983): "Ethically Flexible Gini Indices for INcome Distributions in the Continuum." Journal of Economic Theory, 29, pp.353-358.
- DONALDSON, DAVID y WEYMARK, JOHN A. (1986): "Properties of Fixed-Population Poverty Indices." International Economic Review, V.2, N.3, Oct 1986
- EQUIPO ECB (1989): "Contexto socioeconómico de la pobreza en España." Cáritas, 288.
- ELTETO, O. y FRIGYES, E.(1968): "New Income Inequality Measures as Efficient Tools for Causal Analysis and Planning." Econometrica, Vol. 36, pp. 383-396.
- ESTEBAN, A. M. (1976): "La medición de la desigualdad. Una visión escéptica de las contribuciones recientes." Investigaciones Económicas.
- FERNANDEZ MORALES, A.; GARCIA LIZANA,A. y MARTIN REYES,G. (1988): "Técnicas para la medición de la pobreza y su distribución territorial en España." XIV Reunión de Estudios Regionales, A.E.C.R., Torremolinos.
- FISHBURN, PETER (1976): "Continua of Stochastic Dominance Relations for Bounded Probability Distributions." Journal of Mathematical Economics, 3.
- FOSTER, JAMES; GREER, JOEL.y THORBECKE, ERIK. (1984): "A Class of Decomposable Poverty Measures." Econometrica, Vol. 52, No. 3 (May, 1984).
- FOSTER, JAMES E.y SHORROCKS, ANTHONY F. (1988): "Poverty Orderings." Econometrica, Vol. 56, No. 1(Jan, 1988)
- GARCIA LIZANA,A.; MARTIN REYES,G.; LADOUX AGUILAR,M y FERNÁNDEZ

- MORALES, A (1989): "Employment, unemployment and poverty in Spain." XV European Symposium on Social Welfare, Noordwijkerhout (Holanda)
- GASTWIRTH, JOSEPH L. (1971): "A General Definition of the Lornz Curve." Econometrica, Vol.39, No. 6.
- GASTWIRTH, JOSEPH L. (1972): "The Estimation of the Lorenz Curve and Gini Index." The Review of Economics and Statistics,54
- GASTWIRTH, JOSEPH L. (1974): "The Estimation Of a Family of Measures of Economic Inequality." Journal of Econometrics, 3.
- GUPTA, MANASH RANJAN (1984): "Functional Form for Estimating the Lorenz Curve." Econometrica, Vol.52, No.5,(Sep 1984)
- HAMADA, K. y TAKAYAMA, N. (1979): "Censored Income Distributions and the Measurement of Poverty." Bulletin of the International Statistical Institute, 47, pp.617-630.
- KAKWANI, NANAK (1980): "On a Class of Poverty Measures." Econometrica, Vol.48,N.2 (Mar 1980)
- KAKWANI, NANAK (1980): "Functional Forms for Estimating the Lorenz Curve: A Reply." Econometrica, Vol. 48, N.4 (May 1980)
- KAKWANI, NANAK C.; PODDER, N. (1973): "On the Estimation of Lorenz Curves From Grouped Observations." International Economic Review, V.14,N.2(Jun 1973)
- KAKWANI, NANAK C.; PODDER, N. (1976): "Efficient Estimation of the Lorenz Curve and Associated Inequality Measures from Grouped Observations." Econometrica, Vol. 44,N. 1 (Jun 1976)
- KENDALL, M.G. y STUART, A. (1969): The Advanced Theory of Statistics Vol I. Griffin and Co. London, 1969.
- KOLM, S.C. (1976): "Unequal Inequalities I." Journal of Economic Theory, 12, pp.416-442.
- KOLM, S.C. (1976): "Unequal Inequalities II." Journal of Economic Theory, 13, pp.82-111.
- KUNDU, A. y SMITH, T.E. (1983): "An Impossibility Theorem on Poverty Indices." International Economic Review, V.24,N.2, Jun 1983
- LEVINE, DANIEL B. y SINGER, NEIL M. (1970): "The Mathematical Relation Between the Income Density Function and the Measurement of Income Inequality." Econometrica, Vol. 38, N. 2 (Mar 1970)

- MARTIN REYES,G.; GARCIA LIZANA,A. y FERNÁNDEZ MORALES, A.(1989): "La distribución territorial de la pobreza en España" CEBS: La pobreza en la España de los 80. ACEBO, Madrid.
- MCDONALD, JAMES B. (1984): "Some Generalized Functions for the Size Distribution of Income." Econometrica, Vol.52,No.3 (May 1984)
- MEHRAN, FARHAD (1975): "Bounds on the Gini Index Based on Observed Points of the Lorenz Curve." J.A.S.A. Mar 1975 V.70
- PAGLIN, MORTON (1975): "The Measurement and Trend of Inequality: A Basic Revision." The American Economic Review, Vol.65 N.4 Sep 1976
- PYATT, GRAHAM; CHEN, CHAU-NAN y FEI, JOHN (1980): "The Distribution of Income by Factor Components." The Quarterly Journal of Economics, Nov 1980
- PYATT, GRAHAM (1987): "Measuring Welfare, Poverty and Inequality." The Economic Journal,97 (Jun 1987)
- RASCHE, R. H.; GAFFNEY, J.; KOO, A.Y. y OBST, N. (1980): "Functional Forms for Estimating the Lorenz Curve." Econometrica, Vol. 48, N.4 (May 1980)
- RIESE, MARTIN (1987): "An Extension of the Lorenz-Diagram with Special Reference to Survival Analysis." Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 49,2.
- ROBERTI, PAOLO (1974): "Income Distribution: A Time-Series and a Cross-Section Study." The economic Journal, Sep 1974.
- RUIZ CASTILLO,J. (1987): La medición de la pobreza y la desigualdad en España 1980-81. Estudios Económicos n.42. Banco de España.
- SATCHELL, S. E. (1987): "Source and Subgroup Decomposition Inequalities For the Lorenz Curve." International Economic Review, V.28,N.2(Jun 1987)
- SEN, AMARTYA (1973): On Economic Inequality. Oxford University Press, New York.
- SEN, AMARTYA (1983): "Poor, Relatively Speaking." Oxford Economic Papers, 35 (1983)
- SEN, AMARTYA (1985): "A Sociological Approach to the Measurement of Pov. A Reply to Professor Peter Townsend." Oxford Economic Papers, 37 (1985)
- SEN, PRANAB KUMAR (1986): "The Gini Coefficient and Poverty Indexes: Some Reconsiderations." J.A.S.A. Dec 1986 V.81 N.396
- SHORROCKS, A.F. (1980): "The Class of Additively Decomposable Inequality Measures." Econometrica, Vol. 48, nº 3 (abr 1980).

- TAKAYAMA, NORIYUKI (1979): "Poverty, Income Inequality, and their Measures: Professor Sen's Axiomatic Approach Reconsidered." Econometrica, Vol. 47, No. 3 (May, 1979).
- TEJEIRO, EDUARDO (1989): "Las E.P.F. como instrumento para estudiar la pobreza: sus posibilidades y limitaciones." Seminario Métodos de Análisis y programas de actuación frente a la pobreza. Seminario I.U. Ortega y Gasset. Madrid 1989.
- THON, D.(1979): "On Measuring Poverty." Review of Income and Wealth, 25, pp.429-440.
- TOWNSEND, PETER (1985): "A Sociological Approach to the Measurement of Poverty." Oxford Economic Papers, 37.
- VAN PRAAG, BERNARD; GOEDHART, THEO y KAPTEIN, ARIE (1980): "The Poverty Line-A Pilot Survey in Europe." The Review of Economics and Statistics, V.62
- VAN PRAAG, BERNARD M. S.; HAGENAARS, ALDI J. M. y VAN WEEREN, HANS (1982): "Poverty in Europe." The Review of Income and Wealth, V. 28(3)
- VILLASEÑOR, JOSE A. y ARNOLD, BARRY C. (1989): "Elliptical Lorenz Curves." Journal of Econometrics, 40 (1989)
- WEIMARK, J.A. (1981): "Generalized Gini Inequality Indices." Mathematical Social Sciences, 1 (1981), pp.409-430
- YITHAKI, S. (1979): "Relative Deprivation and the Gini Coefficient." Quarterly Journal of Economics, 93 (1973), pp.321-324.
- YITKHAKI, S. (1983): "On an Extension of the Gini Inequality Index." International Economic Review, 24 (1983), pp.617-627.

ANEXO 1

ESTIMACIONES DE LA CURVA DE LORENZ PARA LAS PROVINCIAS ESPAÑOLAS (1980-81)

En este Anexo se recogen los resultados de la estimación de la distribución de la renta correspondiente a las provincias españolas en 1980-81 de las siguientes especificaciones de la curva de Lorenz:

- Pareto
- Gupta (1984)
- Kakwani y Podder (1973)
- Rasche y otros (1980)
- Equipo ECB (1990)
- Kakwani (1980)
- Bassman y Slottje (1990)-0 (4 parámetros)
- Bassman y Slottje (1990)-1 (3 parámetros)
- Bassman y Slottje (1990)-2 (3 parámetros)
- Bassman y Slottje (1990)-3 (2 parámetros)

Los datos proceden de las Encuestas de Presupuestos Familiares de los años mencionados, y corresponden a ingresos familiares después de impuestos.

Las estimaciones se han realizado con el programa RATS versión 4.30, que utiliza para el ajuste de Mínimos Cuadrados No Lineales el método de Gauss-Newton.

En las tablas aparecen, para cada estimación, los valores de los coeficientes estimados, seguidos del correspondiente estadístico t. Como medidas de bondad del ajuste aparecen el coeficiente de determinación (R^2), la suma de errores al cuadrado (SEC) y el error estándar de la estimación (EE). Cuando la estimación se realiza con una transformación logarítmica, estas medidas aparecen seguidas de una L (R^2L , SECL y EEL), y se incluyen el coeficiente de determinación y la suma de errores al cuadrado correspondientes a la forma no linealizada.

ESPECIFICACIÓN PARETO

| PROVINCIA | α | t | R^2L | SECL | EEL | R^2 | SEC |
|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| ALAVA | 0.616228 | 40.34139 | 0.988919 | 0.023333 | 0.002592 | 0.832643 | 0.010545 |
| ALBACETE | 0.585427 | 28.69843 | 0.979059 | 0.041612 | 0.004623 | 0.720850 | 0.016961 |
| ALICANTE | 0.562311 | 34.68176 | 0.985281 | 0.026287 | 0.002920 | 0.798065 | 0.011684 |
| ALMERIA | 0.497856 | 30.73243 | 0.981619 | 0.026242 | 0.002915 | 0.754976 | 0.012646 |
| ASTURIAS | 0.599641 | 28.66328 | 0.979106 | 0.043764 | 0.004862 | 0.699388 | 0.018971 |
| AVILA | 0.503362 | 31.30932 | 0.982214 | 0.025846 | 0.002871 | 0.753265 | 0.012868 |
| BADAJOS | 0.553094 | 29.53152 | 0.979998 | 0.035076 | 0.003897 | 0.763758 | 0.013281 |
| BALEARES | 0.561361 | 30.15820 | 0.980891 | 0.034646 | 0.003849 | 0.747134 | 0.014683 |
| BARCELONA | 0.589072 | 37.54103 | 0.987316 | 0.024621 | 0.002735 | 0.811649 | 0.011406 |
| BURGOS | 0.568115 | 26.41313 | 0.975747 | 0.046261 | 0.005140 | 0.662933 | 0.020326 |
| CACERES | 0.528905 | 35.98194 | 0.986240 | 0.021606 | 0.002400 | 0.814648 | 0.009999 |
| CADIZ | 0.597690 | 28.87619 | 0.979411 | 0.042841 | 0.004760 | 0.698518 | 0.019024 |
| CANTABRIA | 0.565790 | 37.97820 | 0.987582 | 0.022193 | 0.002465 | 0.820214 | 0.010425 |
| CASTELLON | 0.605804 | 30.20811 | 0.980930 | 0.040216 | 0.004468 | 0.750436 | 0.015569 |
| CIUDAD REAL | 0.549967 | 26.69764 | 0.976270 | 0.042434 | 0.004714 | 0.664722 | 0.019675 |
| CORDOBA | 0.552063 | 34.71387 | 0.985238 | 0.025290 | 0.002810 | 0.812108 | 0.010527 |
| CORUÑA | 0.569697 | 31.61610 | 0.982514 | 0.032468 | 0.003607 | 0.761182 | 0.014088 |
| CUENCA | 0.466023 | 35.83879 | 0.986134 | 0.016908 | 0.001878 | 0.818212 | 0.008528 |
| GERONA | 0.591782 | 34.55039 | 0.985222 | 0.029336 | 0.003259 | 0.774671 | 0.013893 |
| GRANADA | 0.538905 | 27.62277 | 0.977619 | 0.038060 | 0.004228 | 0.702543 | 0.016834 |
| GUADALAJARA | 0.582645 | 27.77396 | 0.977803 | 0.044007 | 0.004889 | 0.694577 | 0.018635 |
| GUIPUZCOA | 0.627715 | 38.72783 | 0.988001 | 0.026270 | 0.002918 | 0.832360 | 0.010669 |
| HUELVA | 0.533210 | 26.48957 | 0.975825 | 0.040516 | 0.004501 | 0.676263 | 0.018177 |
| HUESCA | 0.485545 | 39.94642 | 0.988709 | 0.014773 | 0.001641 | 0.839447 | 0.007890 |
| JAEN | 0.549858 | 26.60213 | 0.975960 | 0.042722 | 0.004746 | 0.688198 | 0.017940 |
| LEON | 0.547248 | 29.11944 | 0.979676 | 0.035317 | 0.003924 | 0.721199 | 0.015961 |
| LERIDA | 0.626902 | 31.38342 | 0.982270 | 0.039901 | 0.004433 | 0.753584 | 0.015959 |
| LUGO | 0.557011 | 30.29198 | 0.981039 | 0.033811 | 0.003756 | 0.755010 | 0.014085 |
| MADRID | 0.553743 | 31.59993 | 0.982497 | 0.030706 | 0.003411 | 0.767907 | 0.013289 |
| MALAGA | 0.565966 | 31.01544 | 0.981920 | 0.033297 | 0.003699 | 0.738245 | 0.015491 |
| MURCIA | 0.582080 | 31.75339 | 0.982664 | 0.033602 | 0.003733 | 0.760586 | 0.014447 |
| NAVARRA | 0.558875 | 36.18954 | 0.986437 | 0.023848 | 0.002649 | 0.802246 | 0.011430 |
| ORENSE | 0.556764 | 29.15158 | 0.979692 | 0.036476 | 0.004052 | 0.728353 | 0.015758 |
| PALENCIA | 0.572822 | 25.96334 | 0.975020 | 0.048675 | 0.005408 | 0.642264 | 0.021914 |
| PALMAS LAS | 0.557811 | 30.79524 | 0.981656 | 0.032809 | 0.003645 | 0.750444 | 0.014468 |
| PONTEVEDRA | 0.593181 | 28.80935 | 0.979291 | 0.042393 | 0.004710 | 0.704980 | 0.018385 |
| RIOJA, LA | 0.651162 | 31.53739 | 0.982413 | 0.042630 | 0.004736 | 0.750391 | 0.016694 |
| SALAMANCA | 0.536479 | 29.84978 | 0.980580 | 0.032300 | 0.003588 | 0.739199 | 0.014578 |
| SANTA CRUZ | 0.557688 | 32.61531 | 0.983522 | 0.029236 | 0.003248 | 0.766944 | 0.013498 |
| SEGOVIA | 0.529512 | 36.72953 | 0.986707 | 0.020783 | 0.002309 | 0.833580 | 0.008876 |
| SEVILLA | 0.564451 | 32.01852 | 0.982918 | 0.031077 | 0.003453 | 0.765371 | 0.013699 |
| SORIA | 0.531971 | 27.45146 | 0.977321 | 0.037552 | 0.004172 | 0.702754 | 0.016525 |
| TARRAGONA | 0.591510 | 28.11813 | 0.978321 | 0.044252 | 0.004916 | 0.701331 | 0.018515 |
| TERUEL | 0.571822 | 31.03572 | 0.981842 | 0.033946 | 0.003771 | 0.759939 | 0.014100 |
| TOLEDO | 0.569284 | 32.89312 | 0.983684 | 0.029952 | 0.003328 | 0.789325 | 0.012234 |
| VALENCIA | 0.549767 | 36.05188 | 0.986310 | 0.023253 | 0.002583 | 0.808650 | 0.010799 |
| VALLADOLID | 0.617238 | 36.30032 | 0.986519 | 0.028911 | 0.003212 | 0.790034 | 0.013429 |
| VIZCAYA | 0.596485 | 34.70725 | 0.985278 | 0.029535 | 0.003281 | 0.802605 | 0.012065 |
| ZAMORA | 0.518359 | 35.93167 | 0.986192 | 0.020811 | 0.002312 | 0.815012 | 0.009751 |
| ZARAGOZA | 0.57198 | 27.5567 | 0.977582 | 0.043082 | 0.004786 | 0.682119 | 0.019301 |
| CEUTA Y M. | 0.542266 | 26.0901 | 0.975148 | 0.043197 | 0.004799 | 0.673451 | 0.018666 |
| ESPAÑA | 0.551847 | 29.38068 | 0.980020 | 0.035278 | 0.003919 | 0.725029 | 0.015889 |

ESPECIFICACION GUPTA 1984

| PROVINCIA | A | t | R ² L | SECL | EEL(10 ⁻¹) | R ² | SEC(10 ⁻²) |
|-------------|----------|------|------------------|-------|------------------------|----------------|------------------------|
| ALAVA | 3.130327 | 18.7 | .9152 | .0840 | 1.0511 | .9154 | .4906 |
| ALBACETE | 3.490657 | 52.5 | .9864 | .0129 | .1615 | .9445 | .3150 |
| ALICANTE | 3.655786 | 25.3 | .9458 | .0595 | .7438 | .9410 | .3179 |
| ALMERIA | 4.692633 | 30.3 | .9585 | .0592 | .7403 | .7933 | 1.0077 |
| ASTURIAS | 3.669798 | 28.5 | .9612 | .0472 | .5910 | .9459 | .3200 |
| AVILA | 4.326514 | 49.0 | .9820 | .0203 | .2546 | .8639 | .6693 |
| BADAJOS | 3.434815 | 47.2 | .9792 | .0155 | .1947 | .9381 | .3244 |
| BALEARES | 3.647264 | 49.8 | .9842 | .0153 | .1917 | .9417 | .3167 |
| BARCELONA | 3.324057 | 27.1 | .9537 | .0445 | .5570 | .9356 | .3609 |
| BURGOS | 4.155815 | 32.8 | .9694 | .0429 | .5370 | .9052 | .5401 |
| CACERES | 3.755745 | 39.2 | .9724 | .0259 | .3240 | .9325 | .3392 |
| CADIZ | 3.763708 | 25.4 | .9526 | .0619 | .7740 | .9423 | .3415 |
| CANTABRIA | 3.455336 | 32.5 | .9648 | .0331 | .4138 | .9404 | .3203 |
| CASTELLON | 3.313194 | 28.3 | .9581 | .0405 | .5072 | .9369 | .3658 |
| CIUDAD REAL | 4.651804 | 21.3 | .9334 | .1186 | 1.4834 | .8263 | .9665 |
| CORDOBA | 3.441669 | 38.8 | .9718 | .0230 | .2879 | .9379 | .3230 |
| CORUÑA | 3.617374 | 37.2 | .9737 | .0271 | .3394 | .9431 | .3134 |
| CUENCA | 4.419393 | 34.5 | .9569 | .0420 | .5257 | .8303 | .7480 |
| GERONA | 3.565675 | 21.9 | .9359 | .0766 | .9576 | .9458 | .3109 |
| GRANADA | 4.330266 | 31.6 | .9649 | .0488 | .6105 | .8742 | .6723 |
| GUADALAJARA | 3.609431 | 70.7 | .9925 | .0075 | .0938 | .9454 | .3127 |
| GUIPUZCOA | 2.946156 | 20.5 | .9257 | .0628 | .7857 | .8786 | .7095 |
| HUELVA | 4.310324 | 56.0 | .9877 | .0155 | .1938 | .8766 | .6561 |
| HUESCA | 4.228191 | 34.3 | .9615 | .0401 | .5022 | .8712 | .5922 |
| JAEN | 4.029409 | 46.5 | .9825 | .0204 | .2551 | .9153 | .4594 |
| LEON | 4.024883 | 40.8 | .9777 | .0265 | .3319 | .9152 | .4568 |
| LERIDA | 3.222333 | 23.7 | .9455 | .0552 | .6906 | .9305 | .4176 |
| LUGO | 3.719403 | 37.9 | .9735 | .0272 | .3410 | .9386 | .3299 |
| MADRID | 3.842338 | 28.3 | .9557 | .0513 | .6420 | .9312 | .3682 |
| MÁLAGA | 3.763036 | 39.4 | .9769 | .0256 | .3210 | .9384 | .3413 |
| MURCIA | 3.586346 | 26.8 | .9533 | .0517 | .6467 | .9447 | .3114 |
| NAVARRA | 3.779979 | 23.6 | .9403 | .0722 | .9025 | .9357 | .3464 |
| ORENSE | 3.893892 | 34.3 | .9694 | .0356 | .4452 | .9284 | .3897 |
| PALENCIA | 4.327827 | 24.4 | .9492 | .0816 | 1.0202 | .8844 | .6703 |
| PALMAS LAS | 3.816624 | 36.7 | .9730 | .0303 | .3787 | .9339 | .3587 |
| PONTEVEDRA | 3.682590 | 30.4 | .9650 | .0417 | .5213 | .9448 | .3222 |
| RIOJA, LA | 2.941936 | 31.0 | .9669 | .0274 | .3436 | .8842 | .7158 |
| SALAMANCA | 4.125423 | 37.9 | .9741 | .0317 | .3964 | .9012 | .5195 |
| SANTA CRUZ | 3.792050 | 32.2 | .9656 | .0388 | .4855 | .9353 | .3503 |
| SEGOVIA | 3.512735 | 40.3 | .9704 | .0221 | .2769 | .9368 | .3128 |
| SEVILLA | 3.626706 | 39.3 | .9758 | .0243 | .3049 | .9423 | .3143 |
| SORIA | 4.195351 | 50.4 | .9845 | .0184 | .2301 | .8918 | .5681 |
| TARRAGONA | 3.721501 | 25.5 | .9513 | .0601 | .7513 | .9431 | .3304 |
| TERUEL | 3.365412 | 74.0 | .9922 | .0061 | .0765 | .9371 | .3444 |
| TOLEDO | 3.323549 | 53.8 | .9854 | .0113 | .1417 | .9330 | .3611 |
| VALENCIA | 3.672576 | 32.1 | .9634 | .0373 | .4671 | .9390 | .3205 |
| VALLADOLID | 3.292758 | 19.7 | .9249 | .0829 | 1.0365 | .9366 | .3758 |
| VIZCAYA | 3.342126 | 21.4 | .9304 | .0720 | .9003 | .9376 | .3532 |
| ZAMORA | 3.764768 | 44.6 | .9766 | .0201 | .2513 | .9305 | .3418 |
| ZARAGOZA | 4.222404 | 22.6 | .9413 | .0918 | 1.1477 | .8974 | .5879 |
| CEUTA Y M. | 4.371394 | 32.3 | .9665 | .0473 | .5922 | .8694 | .7066 |
| ESPAÑA | 4.040061 | 34.1 | .9696 | .0381 | .4768 | .9143 | .4657 |

ESPECIFICACION KAKWANI Y PODDER 1973

| PROVINCIA | α | t | β | t | R^2L | SECL | EEL | R^2 | SEC |
|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| ALAVA | 1.331156 | 24.34525 | 0.506073 | 4.68757 | 0.998636 | 0.015056 | 0.001882 | 0.943994 | 0.005082 |
| ALBACETE | 1.111379 | 34.87218 | 1.036497 | 16.47153 | 0.999536 | 0.005115 | 0.000639 | 0.979899 | 0.001848 |
| ALICANTE | 1.243916 | 18.79807 | 0.828547 | 6.341451 | 0.998096 | 0.022052 | 0.002756 | 0.928317 | 0.006441 |
| ALMERIA | 1.20488 | 14.92861 | 1.153091 | 7.235833 | 0.997453 | 0.032805 | 0.004100 | 0.889950 | 0.009784 |
| ASTURIAS | 1.26227 | 44.88447 | 0.797176 | 14.35647 | 0.999665 | 0.003983 | 0.000497 | 0.981271 | 0.001753 |
| AVILA | 1.041609 | 16.83415 | 1.384967 | 11.33639 | 0.998381 | 0.019281 | 0.002410 | 0.923340 | 0.006816 |
| BADAJOS | 0.964812 | 17.79862 | 1.301443 | 12.15956 | 0.998572 | 0.014798 | 0.001849 | 0.958891 | 0.003666 |
| BALEARES | 1.095329 | 25.06434 | 1.111163 | 12.8777 | 0.999139 | 0.009617 | 0.001202 | 0.963210 | 0.003336 |
| BARCELONA | 1.225774 | 24.62743 | 0.768213 | 7.816997 | 0.99887 | 0.012476 | 0.001559 | 0.950164 | 0.004506 |
| BURGOS | 1.243425 | 37.09661 | 0.957687 | 14.47062 | 0.999549 | 0.005658 | 0.000707 | 0.975866 | 0.002253 |
| CACERES | 1.074115 | 16.08237 | 1.181156 | 8.956858 | 0.997984 | 0.022464 | 0.002808 | 0.916184 | 0.007388 |
| CADIZ | 1.299996 | 40.19033 | 0.750096 | 11.7448 | 0.999567 | 0.005269 | 0.000658 | 0.978847 | 0.001983 |
| CANTABRIA | 1.167178 | 21.02827 | 0.919319 | 8.388454 | 0.998593 | 0.015515 | 0.001939 | 0.936762 | 0.005653 |
| CASTELLON | 1.218756 | 26.74783 | 0.778400 | 8.652152 | 0.999053 | 0.010455 | 0.001306 | 0.971123 | 0.002654 |
| CIUDAD REAL | 1.404909 | 25.35141 | 0.760752 | 6.952585 | 0.998874 | 0.015466 | 0.001933 | 0.949845 | 0.004667 |
| CORDOBA | 1.062357 | 16.61608 | 1.116373 | 8.843346 | 0.998063 | 0.020586 | 0.002573 | 0.935264 | 0.005732 |
| CORUÑA | 1.163344 | 25.65205 | 0.972500 | 10.86058 | 0.999087 | 0.010358 | 0.001294 | 0.959014 | 0.003724 |
| CUENCA | 0.924646 | 10.57766 | 1.630509 | 9.44683 | 0.996652 | 0.038483 | 0.004810 | 0.857757 | 0.012221 |
| GERONA | 1.322329 | 28.03106 | 0.653216 | 7.013034 | 0.999050 | 0.011207 | 0.001400 | 0.954608 | 0.004167 |
| GRANADA | 1.231299 | 22.44024 | 1.022063 | 9.433888 | 0.998799 | 0.015162 | 0.001895 | 0.946936 | 0.004848 |
| GUADALAJARA | 1.074527 | 38.08443 | 1.140629 | 20.47499 | 0.999642 | 0.004009 | 0.000501 | 0.986176 | 0.001281 |
| GUIPUZCOA | 1.275567 | 23.33025 | 0.552041 | 5.113723 | 0.998568 | 0.015054 | 0.001881 | 0.954255 | 0.004145 |
| HUELVA | 1.105173 | 26.83087 | 1.25932 | 15.48422 | 0.999301 | 0.008544 | 0.001068 | 0.964110 | 0.003284 |
| HUESCA | 1.053733 | 12.07339 | 1.33873 | 7.768564 | 0.996709 | 0.038362 | 0.004795 | 0.853723 | 0.012629 |
| JAEN | 1.127176 | 25.01094 | 1.149733 | 12.92065 | 0.999139 | 0.010228 | 0.001278 | 0.966554 | 0.003064 |
| LEON | 1.157518 | 24.84174 | 1.090421 | 11.85216 | 0.999085 | 0.010934 | 0.001366 | 0.957041 | 0.003916 |
| LERIDA | 1.279479 | 36.81343 | 0.634143 | 9.240798 | 0.999453 | 0.006083 | 0.000760 | 0.977476 | 0.002091 |
| LUGO | 1.14046 | 20.99275 | 1.0442 | 9.734691 | 0.998695 | 0.014863 | 0.001857 | 0.951220 | 0.004408 |
| MADRID | 1.22337 | 19.43591 | 0.917719 | 7.384245 | 0.998312 | 0.019953 | 0.002494 | 0.935142 | 0.005853 |
| MALAGA | 1.168908 | 29.84859 | 1.001308 | 12.94973 | 0.999336 | 0.007723 | 0.000965 | 0.964702 | 0.003230 |
| MURCIA | 1.248349 | 24.65074 | 0.800869 | 8.009494 | 0.998883 | 0.012915 | 0.001614 | 0.956747 | 0.003952 |
| NAVARRA | 1.286743 | 20.19529 | 0.779825 | 6.198757 | 0.998288 | 0.020445 | 0.002555 | 0.921847 | 0.007032 |
| ORENSE | 1.186722 | 22.77703 | 1.001328 | 9.733599 | 0.998845 | 0.013671 | 0.001708 | 0.955836 | 0.004027 |
| PALENCIA | 1.346665 | 39.12204 | 0.800259 | 11.77448 | 0.999547 | 0.005967 | 0.000745 | 0.975096 | 0.002346 |
| PALMAS LAS | 1.172847 | 24.55098 | 1.007893 | 10.6854 | 0.999016 | 0.011493 | 0.001436 | 0.953548 | 0.004220 |
| PONTEVEDRA | 1.242691 | 40.98862 | 0.838203 | 14.00227 | 0.999608 | 0.004629 | 0.000578 | 0.978932 | 0.001963 |
| RIOJA, LA | 1.201653 | 62.0159 | 0.692353 | 18.09675 | 0.999818 | 0.001890 | 0.000236 | 0.991583 | 0.000785 |
| SALAMANCA | 1.164517 | 21.57338 | 1.101672 | 10.33651 | 0.998786 | 0.014674 | 0.001834 | 0.942360 | 0.005213 |
| SANTA CRUZ | 1.200024 | 23.04187 | 0.949316 | 9.23183 | 0.998834 | 0.013659 | 0.001707 | 0.946448 | 0.004851 |
| SEGOVIA | 0.969913 | 14.81562 | 1.314092 | 10.16628 | 0.997930 | 0.021583 | 0.002697 | 0.919658 | 0.007009 |
| SEVILLA | 1.144465 | 24.20298 | 1.011281 | 10.83146 | 0.999002 | 0.011260 | 0.001407 | 0.956501 | 0.003940 |
| SORIA | 1.100746 | 22.53276 | 1.240774 | 12.86379 | 0.998999 | 0.012018 | 0.001502 | 0.955467 | 0.004044 |
| TARRAGONA | 1.283217 | 29.37719 | 0.770996 | 8.939469 | 0.999196 | 0.009609 | 0.001201 | 0.972810 | 0.002529 |
| TERUEL | 1.006069 | 28.90223 | 1.201911 | 17.48738 | 0.999417 | 0.006102 | 0.000762 | 0.973852 | 0.002363 |
| TOLEDO | 1.034724 | 22.57552 | 1.134443 | 12.53559 | 0.998985 | 0.010579 | 0.001322 | 0.961139 | 0.003482 |
| VALENCIA | 1.168645 | 18.79644 | 0.977478 | 7.962495 | 0.998286 | 0.019467 | 0.002433 | 0.926554 | 0.006550 |
| VALLADOLID | 1.342664 | 31.75383 | 0.534592 | 6.403251 | 0.999212 | 0.009004 | 0.001125 | 0.961752 | 0.003525 |
| VIZCAYA | 1.292336 | 21.48101 | 0.645988 | 5.438172 | 0.998381 | 0.018228 | 0.002278 | 0.942455 | 0.005218 |
| ZAMORA | 0.982429 | 15.62257 | 1.359382 | 10.94817 | 0.998169 | 0.019915 | 0.002489 | 0.918785 | 0.007120 |
| ZARAGOZA | 1.362108 | 31.73416 | 0.745983 | 8.802258 | 0.999288 | 0.009278 | 0.001159 | 0.964061 | 0.003355 |
| CEUTA Y M. | 1.230139 | 23.29712 | 1.033739 | 9.915349 | 0.998894 | 0.014041 | 0.001755 | 0.956224 | 0.004026 |
| ESPAÑA | 1.205936 | 25.2892 | 1.001332 | 10.63502 | 0.999057 | 0.011452 | 0.001431 | 0.954402 | 0.004165 |

ESPECIFICAION RASCHE 1980

| PROVINCIA | α | t | β | t | R^2 | SEC | EE |
|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| ALAVA | 0.764370 | 84.02868 | 0.753219 | 80.32064 | 0.999879 | 0.000109 | 0.000013 |
| ALBACETE | 0.769572 | 97.48531 | 0.693098 | 90.11594 | 0.999911 | 0.000081 | 0.000010 |
| ALICANTE | 0.718050 | 276.6429 | 0.733241 | 266.1932 | 0.999989 | 0.000009 | 0.000001 |
| ALMERIA | 0.665159 | 266.2856 | 0.708927 | 258.6263 | 0.999989 | 0.000009 | 0.000001 |
| ASTURIAS | 0.800817 | 232.0688 | 0.677246 | 210.4458 | 0.999984 | 0.000014 | 0.000001 |
| AVILA | 0.674287 | 82.17943 | 0.706350 | 79.38714 | 0.999888 | 0.000099 | 0.000012 |
| BADAJOS | 0.708280 | 49.73472 | 0.724149 | 47.81406 | 0.999676 | 0.000288 | 0.000036 |
| BALEARES | 0.734686 | 136.5066 | 0.706017 | 128.672 | 0.999956 | 0.000039 | 0.000004 |
| BARCELONA | 0.745530 | 172.1395 | 0.738328 | 164.3817 | 0.999971 | 0.000025 | 0.000003 |
| BURGOS | 0.778013 | 206.3284 | 0.661373 | 186.805 | 0.999980 | 0.000018 | 0.000002 |
| CACERES | 0.674487 | 419.2096 | 0.744007 | 412.8423 | 0.999995 | 0.000003 | 0.000000 |
| CADIZ | 0.800852 | 198.6471 | 0.675754 | 179.9834 | 0.999978 | 0.000020 | 0.000002 |
| CANTABRIA | 0.715392 | 176.8179 | 0.744943 | 171.3321 | 0.999974 | 0.000023 | 0.000002 |
| CASTELLON | 0.777493 | 103.6633 | 0.710502 | 96.48003 | 0.999920 | 0.000072 | 0.000009 |
| CIUDAD REAL | 0.759780 | 163.9762 | 0.660940 | 149.3657 | 0.999969 | 0.000028 | 0.000003 |
| CORDOBA | 0.695429 | 103.3552 | 0.746227 | 101.0099 | 0.999925 | 0.000065 | 0.000008 |
| CORUÑA | 0.740768 | 388.946 | 0.711852 | 366.9431 | 0.999994 | 0.000004 | 0.000000 |
| CUENCA | 0.603707 | 149.5396 | 0.747726 | 152.5645 | 0.999969 | 0.000026 | 0.000003 |
| GERONA | 0.766970 | 112.0747 | 0.714421 | 104.9009 | 0.999933 | 0.000061 | 0.000007 |
| GRANADA | 0.72873 | 354.7336 | 0.682103 | 330.7808 | 0.999993 | 0.000005 | 0.000000 |
| GUADALAJARA | 0.779923 | 104.3883 | 0.677716 | 95.33698 | 0.999922 | 0.000071 | 0.000008 |
| GUIPUZCOA | 0.771463 | 172.6923 | 0.756072 | 164.913 | 0.999971 | 0.000026 | 0.000003 |
| HUELVA | 0.732643 | 125.3587 | 0.668966 | 115.8634 | 0.999949 | 0.000046 | 0.000005 |
| HUESCA | 0.619068 | 88.79055 | 0.759795 | 90.40822 | 0.999909 | 0.000078 | 0.000009 |
| JAEN | 0.742616 | 101.4246 | 0.677325 | 93.83412 | 0.999921 | 0.000071 | 0.000008 |
| LEON | 0.733218 | 189.6958 | 0.689744 | 177.333 | 0.999977 | 0.000020 | 0.000002 |
| LERIDA | 0.804179 | 214.9036 | 0.708499 | 198.0764 | 0.999981 | 0.000017 | 0.000002 |
| LUGO | 0.725046 | 122.0163 | 0.711753 | 115.786 | 0.999945 | 0.000048 | 0.000006 |
| MADRID | 0.719071 | 242.9297 | 0.717059 | 231.7036 | 0.999986 | 0.000012 | 0.000001 |
| MALAGA | 0.750838 | 117.9826 | 0.696115 | 109.9649 | 0.999940 | 0.000054 | 0.000006 |
| MURCIA | 0.754732 | 436.1814 | 0.711256 | 409.3127 | 0.999995 | 0.000003 | 0.000000 |
| NAVARRA | 0.716208 | 92.7531 | 0.733820 | 89.33964 | 0.999906 | 0.000084 | 0.000010 |
| ORENSE | 0.738171 | 181.4794 | 0.695230 | 169.8479 | 0.999975 | 0.000022 | 0.000002 |
| PALENCIA | 0.793548 | 232.7968 | 0.650137 | 208.3062 | 0.999984 | 0.000014 | 0.000001 |
| PALMAS LAS | 0.732409 | 285.0856 | 0.705911 | 268.9371 | 0.99999 | 0.000009 | 0.000001 |
| PONTEVEDRA | 0.790939 | 290.515 | 0.680424 | 264.7631 | 0.99999 | 0.000009 | 0.000001 |
| RIOJA, LA | 0.831139 | 164.0738 | 0.706750 | 149.85 | 0.999967 | 0.000030 | 0.000003 |
| SALAMANCA | 0.713291 | 312.4036 | 0.700189 | 295.9709 | 0.999991 | 0.000007 | 0.000000 |
| SANTA CRUZ | 0.728596 | 258.3105 | 0.713033 | 244.9571 | 0.999987 | 0.000010 | 0.000001 |
| SEGOVIA | 0.662244 | 147.8199 | 0.760083 | 147.5204 | 0.999965 | 0.000030 | 0.000003 |
| SEVILLA | 0.733947 | 269.5302 | 0.713804 | 255.189 | 0.999988 | 0.000010 | 0.000001 |
| SORIA | 0.719766 | 124.5716 | 0.683036 | 116.623 | 0.999949 | 0.000046 | 0.000005 |
| TARRAGONA | 0.786789 | 156.3755 | 0.681064 | 142.7598 | 0.999965 | 0.000032 | 0.000004 |
| TERUEL | 0.739540 | 82.59074 | 0.714137 | 78.04841 | 0.999879 | 0.000109 | 0.000013 |
| TOLEDO | 0.723760 | 104.9335 | 0.731836 | 100.6766 | 0.999926 | 0.000066 | 0.000008 |
| VALENCIA | 0.70149 | 275.523 | 0.738790 | 267.6058 | 0.999989 | 0.000009 | 0.000001 |
| VALLADOLID | 0.788405 | 98.39787 | 0.723211 | 91.87149 | 0.999911 | 0.000081 | 0.000010 |
| VIZCAYA | 0.749905 | 119.747 | 0.738266 | 114.1682 | 0.999941 | 0.000052 | 0.000006 |
| ZAMORA | 0.662570 | 138.9923 | 0.744704 | 137.6434 | 0.999960 | 0.000034 | 0.000004 |
| ZARAGOZA | 0.777000 | 185.6291 | 0.669361 | 168.8968 | 0.999975 | 0.000022 | 0.000002 |
| CEUTA Y M. | 0.741572 | 180.1444 | 0.669021 | 165.9475 | 0.999975 | 0.000022 | 0.000002 |
| ESPAÑA | 0.737005 | 464.0048 | 0.691603 | 433.5928 | 0.999996 | 0.000003 | 0.000000 |

ESPECIFICACION EQUIPO ECB 1990

| PROVINCIA | α | t | β | t | R^2 | SEC | EEE |
|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|------------|------------|
| ALAVA | 0.339715 | 22.37628 | 0.711546 | 94.75952 | 0.999897 | 0.00009321 | 0.00001165 |
| ALBACETE | 0.461223 | 25.23948 | 0.701831 | 82.77863 | 0.999881 | 0.00010897 | 0.00001362 |
| ALICANTE | 0.384076 | 74.55819 | 0.653718 | 300.1542 | 0.999989 | 0.00000949 | 0.00000119 |
| ALMERIA | 0.444475 | 141.4217 | 0.587246 | 537.8594 | 0.999996 | 0.00000296 | 0.00000037 |
| ASTURIAS | 0.491430 | 77.13639 | 0.734652 | 232.143 | 0.999986 | 0.00001283 | 0.00000160 |
| AVILA | 0.448587 | 26.53439 | 0.596575 | 99.15866 | 0.999903 | 0.00008624 | 0.00001078 |
| BADAJOS | 0.404502 | 12.3594 | 0.640354 | 48.2244 | 0.999590 | 0.00036534 | 0.00004567 |
| BALEARES | 0.438397 | 31.50071 | 0.664806 | 111.9287 | 0.999929 | 0.00006385 | 0.00000798 |
| BARCELONA | 0.370204 | 65.45798 | 0.686232 | 263.4589 | 0.999986 | 0.00001205 | 0.00000151 |
| BURGOS | 0.532531 | 65.0333 | 0.702489 | 188.8291 | 0.999979 | 0.00001948 | 0.00000244 |
| CACERES | 0.369363 | 83.96992 | 0.608609 | 366.0472 | 0.999992 | 0.00000676 | 0.00000085 |
| CADIZ | 0.494649 | 78.67536 | 0.734192 | 235.5758 | 0.999986 | 0.00001243 | 0.00000155 |
| CANTABRIA | 0.361444 | 73.68425 | 0.654122 | 312.594 | 0.999999 | 0.00000895 | 0.00000112 |
| CASTELLON | 0.422631 | 25.18662 | 0.715928 | 87.79993 | 0.999892 | 0.00009890 | 0.00001236 |
| CIUDAD REAL | 0.536678 | 76.25001 | 0.680248 | 224.9423 | 0.999984 | 0.00001409 | 0.00000176 |
| CORDOBA | 0.361782 | 21.77159 | 0.632389 | 94.32273 | 0.999886 | 0.00010043 | 0.00001255 |
| CORUÑA | 0.424789 | 67.61633 | 0.673396 | 244.7108 | 0.999985 | 0.00001341 | 0.00000168 |
| CUENCA | 0.374468 | 41.76023 | 0.533430 | 194.6603 | 0.999971 | 0.00002494 | 0.00000312 |
| GERONA | 0.415100 | 39.15967 | 0.704227 | 140.2299 | 0.999956 | 0.00003969 | 0.00000496 |
| GRANADA | 0.492740 | 60.88226 | 0.650568 | 198.803 | 0.999978 | 0.00001951 | 0.00000244 |
| GUADALAJARA | 0.494035 | 29.70307 | 0.709708 | 91.19584 | 0.999907 | 0.00008594 | 0.00001074 |
| GUIPUZCOA | 0.333962 | 40.17603 | 0.720522 | 171.2489 | 0.999968 | 0.00002839 | 0.00000355 |
| HUELVA | 0.523325 | 34.40283 | 0.651080 | 106.7672 | 0.999928 | 0.00006564 | 0.00000821 |
| HUESCA | 0.347763 | 32.12639 | 0.553625 | 156.2672 | 0.999954 | 0.00003932 | 0.00000491 |
| JAEN | 0.501665 | 26.29627 | 0.665471 | 83.31017 | 0.999881 | 0.00010823 | 0.00001353 |
| LEON | 0.474392 | 50.91791 | 0.658104 | 170.3503 | 0.999970 | 0.00002681 | 0.00000335 |
| LERIDA | 0.423229 | 51.60098 | 0.746879 | 174.3876 | 0.999974 | 0.00002399 | 0.00000300 |
| LUGO | 0.427626 | 27.58779 | 0.655469 | 101.0757 | 0.999911 | 0.00007999 | 0.00001000 |
| MADRID | 0.417175 | 48.18093 | 0.650146 | 181.2756 | 0.999972 | 0.00002527 | 0.00000316 |
| MALAGA | 0.456969 | 38.6944 | 0.680368 | 130.6646 | 0.999950 | 0.00004515 | 0.00000564 |
| MURCIA | 0.423890 | 76.76624 | 0.689331 | 273.9653 | 0.999988 | 0.00001050 | 0.00000131 |
| NAVARRA | 0.383015 | 30.02935 | 0.651707 | 121.4259 | 0.999935 | 0.00005818 | 0.00000727 |
| ORENSE | 0.461324 | 40.28967 | 0.665569 | 136.9784 | 0.999954 | 0.00004164 | 0.00000521 |
| PALENCIA | 0.557157 | 99.56959 | 0.718099 | 274.1293 | 0.999990 | 0.00000882 | 0.00000110 |
| PALMAS LAS | 0.438730 | 67.48981 | 0.662017 | 240.3231 | 0.999984 | 0.00001389 | 0.00000174 |
| PONTEVEDRA | 0.485773 | 83.95533 | 0.723560 | 257.9295 | 0.999988 | 0.00001062 | 0.00000133 |
| RIOJA, LA | 0.424067 | 40.22128 | 0.779187 | 131.6199 | 0.999957 | 0.00004007 | 0.00000501 |
| SALAMANCA | 0.454545 | 72.07193 | 0.638433 | 255.0556 | 0.999986 | 0.00001246 | 0.00000156 |
| SANTA CRUZ | 0.424049 | 122.4486 | 0.659704 | 449.9404 | 0.999995 | 0.00000403 | 0.00000050 |
| SEGOVIA | 0.339786 | 26.08598 | 0.600124 | 123.3631 | 0.999929 | 0.00006170 | 0.00000771 |
| SEVILLA | 0.421753 | 56.74155 | 0.666146 | 208.1217 | 0.999979 | 0.00001875 | 0.00000234 |
| SORIA | 0.492588 | 30.83336 | 0.640638 | 101.7379 | 0.999917 | 0.00007532 | 0.00000942 |
| TARRAGONA | 0.485217 | 39.86875 | 0.718875 | 123.1683 | 0.999949 | 0.00004693 | 0.00000587 |
| TERUEL | 0.420528 | 20.70927 | 0.672835 | 75.64232 | 0.999844 | 0.00014101 | 0.00001763 |
| TOLEDO | 0.386377 | 23.28782 | 0.659923 | 92.6908 | 0.999889 | 0.00009864 | 0.00001233 |
| VALENCIA | 0.375503 | 176.2449 | 0.636825 | 735.9413 | 0.999998 | 0.00000162 | 0.00000020 |
| VALLADOLID | 0.394612 | 30.5823 | 0.731541 | 111.4361 | 0.999932 | 0.00006190 | 0.00000774 |
| VIZCAYA | 0.369947 | 29.75329 | 0.691245 | 119.2392 | 0.999935 | 0.00005847 | 0.00000731 |
| ZAMORA | 0.369967 | 35.02854 | 0.595813 | 154.5055 | 0.999956 | 0.00003832 | 0.00000479 |
| ZARAGOZA | 0.513335 | 75.37761 | 0.703456 | 225.4769 | 0.999985 | 0.00001391 | 0.00000174 |
| CEUTA Y M. | 0.521356 | 40.6113 | 0.661566 | 125.0823 | 0.999948 | 0.00004733 | 0.00000592 |
| ESPAÑA | 0.469401 | 118.8803 | 0.662998 | 399.3112 | 0.999994 | 0.00000488 | 0.00000061 |

ESPECIFICACION KAKWANI 1980

| PROVINCIA | LOG(A) | t | α | t | β | t | R ² L | SEC(10 ⁻³) | EEL(10 ⁻⁴) | R ² | SEC(10 ⁻⁴) |
|-------------|-----------|-------|-----------|-------|----------|-------|------------------|------------------------|------------------------|----------------|------------------------|
| ALAVA | -.7025163 | -27.0 | .8132460 | 54.1 | .5606382 | 37.3 | .9981131 | 1.6120 | 2.6867 | .9992971 | .4079 |
| ALBACETE | -.3640660 | -65.9 | .9660236 | 302.6 | .6757402 | 211.7 | .9999389 | .0727 | .1212 | .9999535 | .0264 |
| ALICANTE | -.5165831 | -41.9 | .8825562 | 123.9 | .5512528 | 77.4 | .9996654 | .3622 | .6037 | .9997656 | .1263 |
| ALMERIA | -.3854055 | -61.0 | .9119459 | 249.7 | .5061097 | 138.5 | .9999254 | .0952 | .1587 | .9999041 | .0467 |
| ASTURIAS | -.4224365 | -22.1 | .9138105 | 82.8 | .6795094 | 61.6 | .9991571 | .8679 | 1.4465 | .9995683 | .2555 |
| AVILA | -.3497868 | -13.9 | .9471960 | 65.3 | .5316307 | 36.6 | .9989023 | 1.4998 | 2.4996 | .9984071 | .7836 |
| BADAJOS | -.3233435 | -11.6 | 1.0084760 | 62.6 | .6279720 | 39.0 | .9986964 | 1.8492 | 3.0820 | .9989615 | .5444 |
| BALEARES | -.3802314 | -91.4 | .9544956 | 396.9 | .6198389 | 257.7 | .9999664 | .0412 | .0688 | .9999657 | .0186 |
| BARCELONA | -.5795696 | -51.2 | .8674888 | 132.5 | .5693504 | 86.9 | .9996959 | .3058 | .5097 | .9998951 | .0588 |
| BURGOS | -.3419258 | -17.9 | .9353236 | 84.8 | .6610099 | 59.9 | .9992179 | .8684 | 1.4474 | .9994795 | .2967 |
| CACERES | -.4479380 | -95.4 | .9239855 | 340.3 | .5220096 | 192.2 | .9999592 | .0526 | .0877 | .9999559 | .0222 |
| CADIZ | -.4395960 | -18.5 | .8986463 | 65.6 | .6678614 | 48.8 | .9986588 | 1.3366 | 2.2277 | .9995204 | .2841 |
| CANTABRIA | -.5407227 | -50.4 | .8851353 | 142.7 | .5431523 | 87.6 | .9997516 | .2744 | .4574 | .9998662 | .0720 |
| CASTELLON | -.4560219 | -18.5 | .9262426 | 65.2 | .6684197 | 47.1 | .9986634 | 1.4379 | 2.3965 | .9993133 | .3985 |
| CIUDAD REAL | -.3785741 | -32.5 | .8981984 | 133.6 | .6099781 | 90.7 | .9996933 | .3225 | .5375 | .9997396 | .1449 |
| CORDOBA | -.4460270 | -22.3 | .9427473 | 81.5 | .5630988 | 48.6 | .9992552 | .9553 | 1.5922 | .9993107 | .3588 |
| CORUÑA | -.4388291 | -57.9 | .9225692 | 210.7 | .6063098 | 138.5 | .9998796 | .1368 | .2280 | .9999291 | .0391 |
| CUENCA | -.3532395 | -37.9 | .9556013 | 177.6 | .4618825 | 85.8 | .9998691 | .2067 | .3445 | .9997415 | .1139 |
| GERONA | -.5659544 | -30.9 | .8515304 | 80.5 | .5865647 | 55.5 | .9991484 | .7972 | 1.3286 | .9996884 | .1790 |
| GRANADA | -.3568693 | -42.8 | .9295068 | 192.7 | .5958918 | 123.5 | .9998587 | .1660 | .2768 | .9998434 | .0837 |
| GUADALAJARA | -.3254311 | -12.5 | .9772850 | 65.2 | .6922584 | 46.1 | .9986760 | 1.6036 | 2.6727 | .9991809 | .4693 |
| GUIPUZCOA | -.6674555 | -26.6 | .8487666 | 58.5 | .5998829 | 41.3 | .9983610 | 1.4999 | 2.4999 | .9994284 | .3341 |
| HUELVA | -.2884102 | -26.6 | .9683194 | 154.4 | .6202093 | 98.9 | .9997801 | .2807 | .4679 | .9997875 | .1130 |
| HUESCA | -.4509977 | -33.1 | .9070698 | 115.3 | .4451885 | 56.6 | .9996859 | .4412 | .7354 | .9995663 | .1995 |
| JÆEN | -.3062546 | -32.2 | .9697371 | 176.5 | .6402649 | 116.5 | .9998278 | .2154 | .3590 | .9999129 | .0472 |
| LEON | -.3694578 | -37.6 | .9377963 | 165.1 | .6026028 | 106.1 | .9998073 | .2302 | .3836 | .9998074 | .1038 |
| LERIDA | -.5202034 | -28.9 | .8924449 | 85.7 | .6810209 | 65.4 | .9992031 | .7732 | 1.2888 | .9996317 | .2214 |
| LUGO | -.4001976 | -24.2 | .9401861 | 98.4 | .6015574 | 62.9 | .9994597 | .6512 | 1.0853 | .9994860 | .2765 |
| MADRID | -.4500953 | -28.5 | .9063367 | 99.3 | .5709588 | 62.5 | .9994760 | .5942 | .9904 | .9995682 | .2314 |
| MALAGA | -.4221996 | -17.1 | .9208187 | 64.6 | .6100009 | 42.8 | .9987134 | 1.4492 | 2.4153 | .9990245 | .5414 |
| MURCIA | -.4795523 | -58.9 | .8989748 | 190.9 | .6104041 | 129.6 | .9998497 | .1582 | .2638 | .9999127 | .0491 |
| NAVARRA | -.5523259 | -28.6 | .8555375 | 76.6 | .5280752 | 47.3 | .9991348 | .8893 | 1.4822 | .9995684 | .2326 |
| ORENSE | -.3864937 | -49.0 | .9342410 | 205.0 | .6108745 | 134.0 | .9998732 | .1482 | .2471 | .9999093 | .0494 |
| PALENCIA | -.3560232 | -23.0 | .9165049 | 102.6 | .6654311 | 74.4 | .9994567 | .5698 | .9496 | .9996977 | .1753 |
| PALMAS LAS | -.4187818 | -33.7 | .9223640 | 128.5 | .5954078 | 82.9 | .9996806 | .3679 | .6131 | .9997308 | .1462 |
| PONTEVEDRA | -.4153891 | -29.6 | .9192450 | 113.3 | .6693113 | 82.5 | .9995541 | .4696 | .7827 | .9997767 | .1305 |
| RIOJA, LA | -.5029293 | -66.0 | .9226798 | 209.5 | .7407654 | 168.2 | .9998641 | .1385 | .2308 | .9999598 | .0248 |
| SALAMANCA | -.3843353 | -32.2 | .9280668 | 134.4 | .5747022 | 83.2 | .9997180 | .3400 | .5667 | .9997497 | .1316 |
| SANTA CRUZ | -.4592212 | -48.7 | .9030724 | 165.6 | .5740541 | 105.2 | .9998100 | .2123 | .3539 | .9998916 | .0587 |
| SEGOVIA | -.4225769 | -39.2 | .9586041 | 153.7 | .5319330 | 85.3 | .9998035 | .2774 | .4624 | .9997469 | .1254 |
| SEVILLA | -.4345217 | -93.5 | .9262579 | 344.7 | .5979283 | 222.5 | .9999556 | .0515 | .0858 | .9999659 | .0186 |
| SORIA | -.3109406 | -48.8 | .9639921 | 261.5 | .6045873 | 164.0 | .9999246 | .0969 | .1616 | .9998971 | .0540 |
| TARRAGONA | -.4099431 | -33.0 | .9203712 | 128.4 | .6686769 | 93.3 | .9996531 | .3666 | .6111 | .9997839 | .1256 |
| TERUEL | -.3656762 | -40.1 | .9839252 | 186.8 | .6438972 | 122.2 | .9998473 | .1980 | .3300 | .9998757 | .0680 |
| TOLEDO | -.4137638 | -54.7 | .9638722 | 220.4 | .6127806 | 140.1 | .9998928 | .1365 | .2275 | .9999449 | .0297 |
| VALENCIA | -.4995935 | -77.4 | .8947468 | 239.7 | .5353147 | 143.4 | .9999137 | .0994 | .1657 | .9999549 | .0237 |
| VALLADOLID | -.6350080 | -29.9 | .8299011 | 67.5 | .6016610 | 48.9 | .9987494 | 1.0771 | 1.7952 | .9995992 | .2376 |
| VIZCAYA | -.5742234 | -18.6 | .8664771 | 48.6 | .5873847 | 32.9 | .9976924 | 2.2653 | 3.7755 | .9987805 | .6907 |
| ZAMORA | -.4059834 | -25.5 | .9501149 | 103.3 | .5234969 | 56.9 | .9995680 | .6030 | 1.0050 | .9994189 | .2860 |
| ZARAGOZA | -.4084518 | -24.0 | .8959807 | 91.3 | .6350712 | 64.7 | .9993246 | .6868 | 1.1447 | .9996851 | .1804 |
| CEUTA Y M. | -.3196439 | -35.2 | .9453278 | 180.0 | .6222011 | 118.4 | .9998347 | .1969 | .3282 | .9998845 | .0625 |
| ESPAÑA | -.3942288 | -48.4 | .9220747 | 195.8 | .5991561 | 127.2 | .9998618 | .1582 | .2637 | .9999129 | .0473 |

ESPECIFICACION BASSMAN 1990-1 (I)

| PROVINCIA | a | t | b | t | -h | t | -g | t |
|-------------|------------|------|-----------|------|------------|------|-----------|------|
| ALAVA | -8.325889 | -9.4 | .2199116 | 1.3 | .7764082 | 5.6 | -5.713559 | -11. |
| ALBACETE | -3.911709 | -2.8 | .6309386 | 2.5 | -.2062225 | -.9 | -2.799039 | -3.6 |
| ALICANTE | -5.778748 | -3.1 | .6953205 | 2.0 | 1.2791770 | 4.4 | -4.578684 | -4.3 |
| ALMERIA | -9.770590 | -3.6 | .0253124 | .0 | 1.0326570 | 2.4 | -7.047729 | -4.5 |
| ASTURIAS | -6.150101 | -4.0 | .3079912 | 1.1 | -.5794283 | -2.4 | -3.853090 | -4.4 |
| AVILA | -6.402742 | -1.6 | .3056367 | .4 | .2497162 | .4 | -4.720314 | -2.1 |
| BADAJOS | -2.817589 | -1.9 | .8663345 | 3.4 | .6503202 | 2.9 | -2.697755 | -3.3 |
| BALEARES | -5.122302 | -2.7 | .4812853 | 1.4 | .0585327 | .1 | -3.706807 | -3.4 |
| BARCELONA | -6.669985 | -3.7 | .3756443 | 1.1 | .4784749 | 1.7 | -4.687620 | -4.6 |
| BURGOS | -8.095595 | -4.4 | -.0518553 | -.1 | -.8850122 | -3.1 | -4.964228 | -4.7 |
| CACERES | -7.700041 | -2.6 | .1601301 | .3 | .6267663 | 1.4 | -5.597184 | -3.4 |
| CADIZ | -8.733946 | -8.4 | -.1239788 | -.6 | -.8169097 | -5.0 | -5.282546 | -8.9 |
| CANTABRIA | -7.696070 | -3.4 | .1661268 | .4 | .4090326 | 1.1 | -5.353297 | -4.1 |
| CASTELLON | -2.339393 | -2.7 | 1.1439700 | 7.3 | .8802705 | 6.5 | -2.259109 | -4.5 |
| CIUDAD REAL | -3.862486 | -1.3 | 1.1048810 | 2.1 | 1.0124730 | 2.2 | -3.243867 | -2.0 |
| CORDOBA | -5.347470 | -3.1 | .5765255 | 1.8 | .9533641 | 3.5 | -4.297047 | -4.4 |
| CORUÑA | -6.999472 | -4.3 | .2139596 | .7 | .0226925 | .1 | -4.761540 | -5.1 |
| CUENCA | -10.481850 | -2.3 | -.3626620 | -.4 | .5947547 | .8 | -7.500556 | -2.9 |
| GERONA | -6.504366 | -3.5 | .4802861 | 1.4 | .4913145 | 1.7 | -4.535372 | -4.4 |
| GRANADA | -7.198307 | -4.0 | .3259186 | 1.0 | .3894677 | 1.4 | -5.092199 | -5.0 |
| GUADALAJARA | -7.937482 | -4.0 | -.3099808 | -.8 | -1.6955680 | -5.5 | -4.551975 | -4.0 |
| GUIPUZCOA | -3.024409 | -2.6 | 1.1457520 | 5.6 | 1.4111690 | 8.0 | -2.829406 | -4.3 |
| HUELVA | -6.444538 | -2.9 | .2115365 | .5 | -.4497703 | -1.3 | -4.330288 | -3.4 |
| HUESCA | -11.745340 | -2.9 | -.4597907 | -.6 | .7663318 | 1.2 | -8.209097 | -3.6 |
| JAEN | -3.221703 | -1.6 | .8740723 | 2.4 | .3137342 | 1.0 | -2.697867 | -2.3 |
| LEON | -5.500048 | -2.3 | .4896164 | 1.1 | .1186502 | .3 | -3.956560 | -2.9 |
| LERIDA | -4.308455 | -3.9 | .7536369 | 3.8 | .2985316 | 1.7 | -3.092090 | -5.0 |
| LUGO | -6.425941 | -4.9 | .3807183 | 1.6 | .4810236 | 2.4 | -4.679321 | -6.3 |
| MADRID | -6.891376 | -4.6 | .4464638 | 1.6 | .9250079 | 4.0 | -5.122490 | -6.1 |
| MALAGA | -5.301444 | -2.1 | .4662198 | 1.0 | -.1579710 | -.4 | -3.651521 | -2.5 |
| MURCIA | -4.992128 | -3.4 | .7231794 | 2.8 | .7397206 | 3.3 | -3.814324 | -4.6 |
| NAVARRA | -10.679930 | -6.2 | -.2010557 | -.6 | .5242691 | 1.9 | -7.157302 | -7.3 |
| ORENSE | -3.985767 | -2.1 | .8532529 | 2.5 | .6980030 | 2.3 | -3.281699 | -3.0 |
| PALENCIA | -5.912474 | -3.8 | .5056723 | 1.8 | -.1731063 | -.7 | -3.914592 | -4.4 |
| PALMAS LAS | -7.435929 | -3.5 | .1536731 | .4 | -.0085512 | -.1 | -5.029293 | -4.1 |
| PONTEVEDRA | -5.655732 | -3.7 | .4110205 | 1.5 | -.3869897 | -1.6 | -3.669730 | -4.2 |
| RIOJA, LA | -3.921734 | -5.9 | .6162606 | 5.2 | -.4270764 | -4.1 | -2.520656 | -6.7 |
| SALAMANCA | -9.060199 | -4.1 | -.1088830 | -.2 | -.0568273 | -.1 | -6.040866 | -4.9 |
| SANTA CRUZ | -6.863648 | -3.1 | .3274830 | .8 | .3459951 | 1.0 | -4.829981 | -3.9 |
| SEGOVIA | -8.767678 | -3.8 | -.1462570 | -.3 | .3319116 | .9 | -6.165507 | -4.7 |
| SEVILLA | -5.806731 | -3.0 | .4327687 | 1.2 | .2293771 | .7 | -4.159136 | -3.7 |
| SORIA | -6.703128 | -3.5 | .2342818 | .6 | -.0541053 | -.1 | -4.677572 | -4.3 |
| TARRAGONA | -1.957171 | -1.5 | 1.2589930 | 5.4 | .8263251 | 4.1 | -1.995568 | -2.7 |
| TERUEL | -4.304833 | -2.2 | .4657559 | 1.3 | -.3515634 | -1.1 | -3.048433 | -2.7 |
| TOLEDO | -4.439200 | -2.2 | .5642938 | 1.5 | .2167677 | .7 | -3.382411 | -2.9 |
| VALENCIA | -8.194458 | -3.8 | .1336129 | .3 | .6055515 | 1.8 | -5.784890 | -4.7 |
| VALLADOLID | -6.423934 | -4.0 | .4756472 | 1.6 | .4023020 | 1.6 | -4.381867 | -4.8 |
| VIZCAYA | -5.229277 | -4.4 | .8028033 | 3.8 | 1.2990520 | 7.1 | -4.162318 | -6.2 |
| ZAMORA | -7.779227 | -2.0 | -.0006943 | -.0 | .1404875 | .2 | -5.490274 | -2.5 |
| ZARAGOZA | -8.860063 | -7.6 | .0358352 | .17 | -.1671184 | -.9 | -5.684420 | -8.6 |
| CEUTA Y M. | -4.145998 | -2.1 | .8726534 | 2.57 | .6758892 | 2.2 | -3.384414 | -3.1 |
| ESPAÑA | -7.311174 | -3.7 | .2129440 | .60 | .0309091 | .1 | -4.969922 | -4.4 |

ESPECIFICACION BASSMAN 1990-1 (II)

| PROVINCIA | R ² L | SECL(10 ⁻²) | EEL(10 ⁻³) | R ² | SEC(10 ⁻³) |
|-------------|------------------|-------------------------|------------------------|----------------|------------------------|
| ALAVA | .9999795 | .0187 | .0375 | .9986960 | .0948 |
| ALBACETE | .9999505 | .0445 | .0891 | .9968660 | .1834 |
| ALICANTE | .9999133 | .0822 | .1645 | .9939136 | .3210 |
| ALMERIA | .9998319 | .1749 | .3499 | .9784682 | .6361 |
| ASTURIAS | .9999431 | .0558 | .1117 | .9970758 | .1856 |
| AVILA | .9996325 | .3503 | .7007 | .9596839 | 1.2786 |
| BADAJOS | .9999419 | .0482 | .0964 | .9960471 | .1890 |
| BALEARES | .9999049 | .0862 | .1724 | .9937507 | .3187 |
| BARCELONA | .9999159 | .0763 | .1526 | .9945123 | .3444 |
| BURGOS | .9999218 | .0806 | .1613 | .9961934 | .1980 |
| CACERES | .9997797 | .1977 | .3954 | .9840052 | .6631 |
| CADIZ | .9999745 | .0256 | .0513 | .9980377 | .1236 |
| CANTABRIA | .9998640 | .1224 | .2449 | .9913437 | .4745 |
| CASTELLON | .9999802 | .0179 | .0359 | .9988781 | .0739 |
| CIUDAD REAL | .9998304 | .1923 | .3847 | .9895534 | .4826 |
| CORDOBA | .9999183 | .0701 | .1402 | .9935073 | .3185 |
| CORUÑA | .9999314 | .0635 | .1271 | .9954011 | .2500 |
| CUENCA | .9994527 | .4947 | .9894 | .9224220 | 1.5036 |
| GERONA | .9999197 | .0785 | .1570 | .9945977 | .3405 |
| GRANADA | .9999265 | .0756 | .1513 | .9936862 | .2690 |
| GUADALAJARA | .9998977 | .0933 | .1867 | .9965471 | .1980 |
| GUIPUZCOA | .9999647 | .0307 | .0615 | .9984155 | .1205 |
| HUELVA | .9998809 | .1178 | .2356 | .9890123 | .4426 |
| HUESCA | .9996029 | .3692 | .7385 | .9496078 | 1.3657 |
| JAEN | .9999000 | .0964 | .1929 | .9931000 | .3161 |
| LEON | .9998661 | .1302 | .2604 | .9893894 | .4881 |
| LERIDA | .9999694 | .0282 | .0565 | .9991060 | .0656 |
| LUGO | .9999570 | .0398 | .0796 | .9963960 | .1785 |
| MADRID | .9999460 | .0521 | .1043 | .9954789 | .2211 |
| MALAGA | .9998426 | .1496 | .2992 | .9889307 | .5878 |
| MURCIA | .9999479 | .0495 | .0991 | .9963791 | .2122 |
| NAVARRA | .9999287 | .0699 | .1399 | .9943961 | .2919 |
| ORENSE | .9999127 | .0842 | .1685 | .9931919 | .3346 |
| PALENCIA | .9999481 | .0564 | .1128 | .9953985 | .2461 |
| PALMAS LAS | .9998867 | .1079 | .2159 | .9937564 | .3128 |
| PONTEVEDRA | .9999430 | .0555 | .1110 | .9966403 | .2061 |
| RIOJA, LA | .9999879 | .0104 | .0208 | .9993616 | .0520 |
| SALAMANCA | .9998856 | .1123 | .2247 | .9917873 | .3494 |
| SANTA CRUZ | .9998828 | .1121 | .2243 | .9913956 | .4361 |
| SEGOVIA | .9998505 | .1244 | .2489 | .9893306 | .4448 |
| SEVILLA | .9999033 | .0889 | .1778 | .9930936 | .3641 |
| SORIA | .9999096 | .0876 | .1753 | .9909816 | .3621 |
| TARRAGONA | .9999595 | .0399 | .0799 | .9969041 | .1870 |
| TERUEL | .9998928 | .0906 | .1812 | .9937209 | .3441 |
| TOLEDO | .9998876 | .0947 | .1895 | .9943181 | .3095 |
| VALENCIA | .9998793 | .1115 | .2231 | .9908450 | .4466 |
| VALLADOLID | .9999355 | .0614 | .1228 | .9968223 | .2292 |
| VIZCAYA | .9999651 | .0324 | .0649 | .9984578 | .0993 |
| ZAMORA | .9996071 | .3413 | .6827 | .9747341 | .9543 |
| ZARAGOZA | .9999703 | .0320 | .0640 | .9974965 | .1348 |
| CEUTA Y M. | .9999166 | .0864 | .1728 | .9930833 | .2982 |
| ESPAÑA | .9999078 | .0914 | .1829 | .9928698 | .3398 |

ESPECIFICACION BASSMAN 1990-1

| PROVINCIA | α | t | β | t | -h | t | R ² L | SECL(10 ⁻²) | EEL(10 ⁻²) | R ² | SEC(10 ⁻²) |
|-------------|----------|-----|----------|------|-----------|------|------------------|-------------------------|------------------------|----------------|------------------------|
| ALAVA | 1.645078 | 3.4 | 1.960775 | 10.5 | 1.482604 | 2.5 | .9994517 | .5033 | .0838 | .9809 | .1384 |
| ALBACETE | 0.973007 | 3.6 | 1.483777 | 14.1 | 0.139738 | 0.4 | .9998214 | .1608 | .0268 | .9889 | .0649 |
| ALICANTE | 2.211703 | 5.2 | 2.090399 | 12.7 | 1.845102 | 3.5 | .9995854 | .3934 | .0655 | .9728 | .1429 |
| ALMERIA | 2.528692 | 3.9 | 2.172684 | 8.6 | 1.903756 | 2.4 | .9991236 | .9122 | .1520 | .9003 | .2944 |
| ASTURIAS | 0.574084 | 1.6 | 1.481988 | 10.7 | -0.103186 | -0.2 | .9997187 | .2762 | .0460 | .9841 | .1009 |
| AVILA | 1.834873 | 3.3 | 1.743868 | 8.0 | 0.833146 | 1.2 | .9992857 | .6810 | .1135 | .9089 | .2889 |
| BADAJOS | 1.890373 | 7.1 | 1.688313 | 16.3 | 0.983762 | 3.0 | .9998119 | .1562 | .0260 | .9870 | .0619 |
| BALEARES | 1.346599 | 3.7 | 1.610712 | 11.4 | 0.516693 | 1.1 | .9996801 | .2901 | .0483 | .9776 | .1139 |
| BARCELONA | 1.510573 | 3.5 | 1.803914 | 10.8 | 1.057864 | 2.0 | .9995568 | .4024 | .0670 | .9759 | .1506 |
| BURGOS | 0.567683 | 1.2 | 1.460694 | 8.3 | -0.271433 | -0.4 | .9995672 | .4464 | .0744 | .9728 | .1414 |
| CACERES | 2.067835 | 3.7 | 1.865535 | 8.7 | 1.318578 | 1.9 | .9992616 | .6627 | .1104 | .9411 | .2440 |
| CADIZ | 0.484842 | 1.0 | 1.485559 | 8.5 | -0.163987 | -0.3 | .9995634 | .4398 | .0733 | .9797 | .1278 |
| CANTABRIA | 1.646188 | 3.3 | 1.797222 | 9.2 | 1.070700 | 1.7 | .9993916 | .5478 | .0913 | .9627 | .2040 |
| CASTELLON | 1.603071 | 7.8 | 1.832297 | 22.8 | 1.159496 | 4.6 | .9998969 | .0937 | .0156 | .9947 | .0345 |
| CIUDAD REAL | 1.798519 | 4.5 | 2.093254 | 13.5 | 1.413414 | 2.9 | .9996927 | .3485 | .0580 | .9717 | .1303 |
| CORDOBA | 2.151483 | 5.4 | 1.885792 | 12.2 | 1.484479 | 3.0 | .9995989 | .3441 | .0573 | .9747 | .1240 |
| CORUÑA | 1.310088 | 3.0 | 1.664752 | 10.0 | 0.611218 | 1.1 | .9995682 | .4000 | .0666 | .9749 | .1364 |
| CUENCA | 2.607679 | 3.3 | 1.922681 | 6.3 | 1.521823 | 1.6 | .9985290 | 1.3297 | .2216 | .7591 | .4668 |
| GERONA | 1.410499 | 3.3 | 1.862168 | 11.4 | 1.051886 | 2.0 | .9996073 | .3838 | .0639 | .9767 | .1463 |
| GRANADA | 1.688299 | 3.7 | 1.877460 | 10.5 | 1.018863 | 1.8 | .9995529 | .4605 | .0767 | .9648 | .1499 |
| GUADALAJARA | 0.006356 | 0.0 | 1.076960 | 6.4 | -1.132944 | -2.1 | .9995608 | .4008 | .0668 | .9777 | .1273 |
| GUIPUZCOA | 1.913303 | 7.3 | 2.007843 | 19.8 | 1.760883 | 5.5 | .9998285 | .1495 | .0249 | .9923 | .0580 |
| HUELVA | 1.112426 | 2.6 | 1.530931 | 9.2 | 0.085453 | 0.1 | .9995996 | .3961 | .0660 | .9625 | .1510 |
| HUESCA | 2.580690 | 3.2 | 2.041437 | 6.6 | 1.780976 | 1.8 | .9985273 | 1.3694 | .2282 | .8234 | .4783 |
| JAEEN | 1.486455 | 4.9 | 1.696085 | 14.3 | 0.647190 | 1.7 | .9997879 | .2044 | .0340 | .9815 | .0847 |
| LEON | 1.404707 | 3.4 | 1.695140 | 10.7 | 0.607680 | 1.2 | .9996272 | .3625 | .0604 | .9677 | .1482 |
| LERIDA | 1.087679 | 3.9 | 1.695765 | 15.6 | 0.680713 | 2.0 | .9998158 | .1701 | .0283 | .9923 | .0562 |
| LUGO | 1.740135 | 4.2 | 1.806460 | 11.4 | 1.059387 | 2.1 | .9996061 | .3647 | .0607 | .9776 | .1106 |
| MADRID | 2.048092 | 4.5 | 2.007234 | 11.5 | 1.558147 | 2.8 | .9995429 | .4416 | .0736 | .9716 | .1385 |
| MALAGA | 1.070976 | 2.7 | 1.578801 | 10.2 | 0.293356 | 0.6 | .9996344 | .3475 | .0579 | .9710 | .1539 |
| MURCIA | 1.664405 | 4.8 | 1.885365 | 13.9 | 1.211171 | 2.8 | .9997209 | .2654 | .0442 | .9837 | .0953 |
| NAVARRA | 1.810572 | 2.9 | 1.979701 | 8.2 | 1.408911 | 1.8 | .9991539 | .8303 | .1383 | .9530 | .2446 |
| ORENSE | 1.741261 | 5.2 | 1.853153 | 14.3 | 1.103621 | 2.7 | .9997472 | .2441 | .0406 | .9794 | .1010 |
| PALENCIA | 0.919040 | 2.5 | 1.698408 | 12.1 | 0.310737 | 0.7 | .9997392 | .2838 | .0473 | .9804 | .1043 |
| PALMAS LAS | 1.340896 | 2.8 | 1.686047 | 9.2 | 0.613069 | 1.0 | .9994928 | .4833 | .0805 | .9669 | .1655 |
| PONTEVEDRA | 0.748463 | 2.2 | 1.529150 | 11.5 | 0.066588 | 0.1 | .9997378 | .2554 | .0425 | .9843 | .0962 |
| RIOJA, LA | 0.477166 | 2.1 | 1.384279 | 16.3 | -0.115523 | -0.4 | .9998788 | .1047 | .0174 | .9956 | .0357 |
| SALAMANCA | 1.481965 | 2.7 | 1.731707 | 8.1 | 0.689823 | 1.0 | .9993342 | .6539 | .1089 | .9509 | .2087 |
| SANTIA CRUZ | 1.565350 | 3.4 | 1.799129 | 10.1 | 0.942980 | 1.7 | .9995210 | .4584 | .0764 | .9659 | .1723 |
| SEGOVIA | 1.992001 | 3.5 | 1.732310 | 7.9 | 1.093968 | 1.6 | .9991730 | .6886 | .1147 | .9453 | .2279 |
| SEVILLA | 1.451549 | 3.6 | 1.700015 | 11.0 | 0.743446 | 1.5 | .9996241 | .3456 | .0576 | .9744 | .1345 |
| SORIA | 1.459896 | 3.3 | 1.659490 | 9.8 | 0.524042 | 0.9 | .9995747 | .4124 | .0687 | .9637 | .1457 |
| TARRAGONA | 1.525376 | 7.2 | 1.867022 | 22.6 | 1.072977 | 4.1 | .9998996 | .0990 | .0165 | .9924 | .0458 |
| TERUEL | 1.015112 | 3.1 | 1.394582 | 11.1 | 0.025222 | 0.0 | .9997298 | .2285 | .0380 | .9820 | .0981 |
| TOLEDO | 1.463585 | 4.2 | 1.594880 | 11.8 | 0.634833 | 1.5 | .9996863 | .2645 | .0440 | .9807 | .1047 |
| VALENCIA | 1.900992 | 3.6 | 1.896210 | 9.2 | 1.320563 | 2.0 | .9993420 | .6082 | .1013 | .9565 | .2118 |
| VALLADOLID | 1.223042 | 3.0 | 1.810757 | 11.7 | 0.943900 | 1.9 | .9996360 | .3463 | .0577 | .9822 | .1282 |
| VIZCAYA | 2.034555 | 5.6 | 2.071019 | 14.6 | 1.813514 | 4.1 | .9996888 | .2896 | .0482 | .9858 | .0913 |
| ZAMORA | 1.802076 | 3.0 | 1.672136 | 7.1 | 0.819085 | 1.1 | .9990922 | .7887 | .1314 | .9222 | .2936 |
| ZARAGOZA | 1.060052 | 2.2 | 1.767820 | 9.4 | 0.535475 | 0.9 | .9995253 | .5116 | .0852 | .9731 | .1447 |
| CEUTA Y M. | 1.760281 | 5.1 | 1.903850 | 14.3 | 1.094202 | 2.6 | .9997525 | .2564 | .0427 | .9768 | .0996 |
| ESPAÑA | 1.362041 | 3.0 | 1.727228 | 9.7 | 0.645191 | 1.1 | .9995381 | .4580 | .0763 | .9660 | .1616 |

ESPECIFICACION BASSMAN 1990-2

| PROVINCIA | α | t | β | t | -h | t | R ² L | SECL(10 ⁻²) | EEL(10 ⁻³) | R ² | SEC(10 ⁻²) |
|-------------|-----------|------|----------|-------|-----------|------|------------------|-------------------------|------------------------|----------------|------------------------|
| ALAVA | -.8217544 | -2.5 | 1.569426 | 65.8 | -1.517211 | -3.9 | .9996814 | .2924 | .4874 | .9904 | .0697 |
| ALBACETE | .6560837 | 2.8 | 1.452393 | 86.2 | -0.244706 | -0.9 | .9998379 | .1459 | .2433 | .9910 | .0526 |
| ALICANTE | -.7637199 | -2.8 | 1.597204 | 80.1 | -1.774257 | -5.5 | .9997845 | .2045 | .3408 | .9852 | .0779 |
| ALMERIA | -.6280878 | -1.3 | 1.669464 | 49.7 | -1.935198 | -3.5 | .9994416 | .5812 | .9686 | .9380 | .1831 |
| ASTURIAS | .5870258 | 1.8 | 1.519570 | 65.6 | -0.085655 | -0.2 | .9997184 | .2764 | .4607 | .9866 | .0845 |
| AVILA | .3922645 | 0.8 | 1.527624 | 45.7 | -0.920514 | -1.7 | .9993972 | .5747 | .9579 | .9268 | .2320 |
| BADAJOS | .2943719 | 1.6 | 1.425978 | 104.8 | -0.957530 | -4.3 | .9998853 | .0952 | .1588 | .9918 | .0388 |
| BALEARES | .4228275 | 1.4 | 1.478500 | 69.1 | -0.605943 | -1.7 | .9997402 | .2356 | .3927 | .9832 | .0855 |
| BARCELONA | -.2723705 | -0.8 | 1.526166 | 66.0 | -1.110043 | -2.9 | .9996969 | .2752 | .4587 | .9842 | .0989 |
| BURGOS | .7948540 | 1.9 | 1.546968 | 51.5 | 0.007353 | 0.0 | .9995494 | .4648 | .7746 | .9769 | .1197 |
| CACERES | -.1453428 | -0.3 | 1.518738 | 50.0 | -1.372561 | -2.8 | .9994706 | .4751 | .7918 | .9597 | .1669 |
| CADIZ | .5368134 | 1.3 | 1.543239 | 52.6 | -0.098292 | -0.2 | .9995599 | .4433 | .7389 | .9838 | .1019 |
| CANTABRIA | -.1811239 | -0.4 | 1.517586 | 54.6 | -1.150903 | -2.5 | .9995591 | .3969 | .6615 | .9745 | .1392 |
| CASTELLON | -.2436516 | -2.0 | 1.520860 | 174.0 | -1.087161 | -7.7 | .9999567 | .0393 | .0655 | .9975 | .0162 |
| CIUDAD REAL | -.4709182 | -1.5 | 1.714808 | 78.1 | -1.347286 | -3.8 | .9997811 | .2482 | .4138 | .9818 | .0839 |
| CORDOBA | -.2652993 | -1.0 | 1.490483 | 76.4 | -1.455072 | -4.6 | .9997720 | .1956 | .3260 | .9849 | .0737 |
| CORUÑA | .2032555 | 0.6 | 1.509270 | 60.9 | -0.733740 | -1.8 | .9996593 | .3157 | .5261 | .9823 | .0962 |
| CUENCA | .0145005 | 0.0 | 1.524961 | 34.1 | -1.630947 | -2.2 | .9988604 | 1.0301 | 1.7169 | .8236 | .3417 |
| GERONA | -.3576724 | -1.1 | 1.585684 | 70.3 | -1.098112 | -3.0 | .9997318 | .2621 | .4369 | .9847 | .0961 |
| GRANADA | -.0504736 | -0.1 | 1.611357 | 64.2 | -1.095096 | -2.7 | .9996855 | .3239 | .5399 | .9771 | .0974 |
| GUADALAJARA | 1.5583600 | 3.5 | 1.397715 | 43.5 | 0.758145 | 1.4 | .9994176 | .5315 | .8859 | .9769 | .1319 |
| GUIPUZCOA | -.8687852 | -6.3 | 1.533411 | 150.7 | -1.623970 | -9.8 | .9999388 | .0533 | .0888 | .9968 | .0237 |
| HUELVA | .8208270 | 2.2 | 1.518111 | 56.3 | -0.267461 | -0.6 | .9996216 | .3743 | .6238 | .9687 | .1259 |
| HUESCA | -.4328441 | -0.7 | 1.574605 | 35.9 | -1.883093 | -2.6 | .9989340 | .9912 | 1.6520 | .8768 | .3337 |
| JAEN | .4020164 | 1.6 | 1.525748 | 86.5 | -0.671465 | -2.3 | .9998338 | .1602 | .2671 | .9862 | .0628 |
| LEON | .3333146 | 1.0 | 1.538666 | 64.2 | -0.694515 | -1.7 | .9996961 | .2956 | .4926 | .9753 | .1133 |
| LERIDA | -.0624351 | -0.3 | 1.517225 | 101.1 | -0.717695 | -2.9 | .9998746 | .1158 | .1931 | .9953 | .0338 |
| LUGO | -.0448134 | -0.1 | 1.528276 | 71.1 | -1.110964 | -3.2 | .9997433 | .2377 | .3961 | .9864 | .0670 |
| MADRID | -.5114874 | -1.7 | 1.593798 | 72.3 | -1.554826 | -4.3 | .9997412 | .2499 | .4166 | .9843 | .0767 |
| MALAGA | .4887261 | 1.4 | 1.507501 | 61.2 | -0.413630 | -1.0 | .9996712 | .3125 | .5209 | .9759 | .1277 |
| MURCIA | -.3189399 | -1.3 | 1.563587 | 89.9 | -1.201054 | -4.2 | .9998363 | .1556 | .2594 | .9903 | .0563 |
| NAVARRA | -.5981700 | -1.3 | 1.612009 | 48.7 | -1.519533 | -2.8 | .9994253 | .5639 | .9399 | .9715 | .1480 |
| ORENSE | -.0587244 | -0.2 | 1.559477 | 88.7 | -1.085678 | -3.8 | .9998351 | .1592 | .2653 | .9864 | .0666 |
| PALENCIA | .3005497 | 1.0 | 1.622998 | 74.5 | -0.440238 | -1.2 | .9997758 | .2440 | .4067 | .9850 | .0799 |
| PALMAS LAS | .2212518 | 0.5 | 1.530711 | 55.4 | -0.747360 | -1.6 | .9995877 | .3929 | .6548 | .9762 | .1192 |
| PONTEVEDRA | .5102062 | 1.7 | 1.519879 | 70.3 | -0.221707 | -0.6 | .9997533 | .2403 | .4005 | .9872 | .0779 |
| RIOJA, LA | .5586193 | 2.8 | 1.421990 | 98.2 | -0.015220 | -0.0 | .9998751 | .1080 | .1800 | .9963 | .0297 |
| SALAMANCA | .2078816 | 0.4 | 1.557853 | 48.58 | -0.858110 | -1.6 | .9994606 | .5298 | .8830 | .9651 | .1484 |
| SANTA CRUZ | -.0482938 | -0.1 | 1.553130 | 60.6 | -1.018802 | -2.4 | .9996469 | .3379 | .5631 | .9763 | .1200 |
| SEGOVIA | .0989908 | 0.2 | 1.448290 | 46.1 | -1.207223 | -2.3 | .9993917 | .5065 | .8442 | .9629 | .1543 |
| SEVILLA | .1662369 | 0.5 | 1.506924 | 66.7 | -0.819024 | -2.2 | .9997147 | .2623 | .4371 | .9817 | .0964 |
| SORIA | .4887012 | 1.4 | 1.527632 | 59.5 | -0.655866 | -1.5 | .9996504 | .3390 | .5651 | .9728 | .1089 |
| TARRAGONA | -.1800016 | -1.2 | 1.578592 | 152.3 | -1.001766 | -5.9 | .9999439 | .0553 | .0922 | .9953 | .0280 |
| TERUEL | .8629306 | 3.0 | 1.395106 | 67.4 | -0.158594 | -0.4 | .9997394 | .2204 | .3673 | .9845 | .0846 |
| TOLEDO | .3723633 | 1.3 | 1.429587 | 71.2 | -0.691761 | -2.1 | .9997543 | .2072 | .3454 | .9859 | .0765 |
| VALENCIA | -.3222143 | -0.8 | 1.549327 | 54.7 | -1.382693 | -3.0 | .9995535 | .4127 | .6879 | .9719 | .1370 |
| VALLADOLID | -.3752652 | -1.2 | 1.563416 | 72.5 | -0.999422 | -2.8 | .9997486 | .2392 | .3986 | .9886 | .0822 |
| VIZCAYA | -.8773070 | -4.1 | 1.585445 | 101.9 | -1.728675 | -6.8 | .9998662 | .1245 | .2075 | .9938 | .0392 |
| ZAMORA | .3520860 | 0.7 | 1.461609 | 40.7 | -0.943204 | -1.6 | .9992373 | .6627 | 1.1045 | .9401 | .2260 |
| ZARAGOZA | .0338783 | 0.0 | 1.635287 | 57.5 | -0.710884 | -1.5 | .9996135 | .4164 | .6941 | .9818 | .0979 |
| CEUTA Y M. | -.0292249 | -0.1 | 1.612998 | 89.1 | -1.082294 | -3.7 | .9998371 | .1688 | .2813 | .9849 | .0648 |
| ESPAÑA | .1957906 | 0.5 | 1.562967 | 58.7 | -0.771991 | -1.7 | .9996316 | .3653 | .6089 | .9755 | .1165 |

ESPECIFICACION BASSMAN 1990-3

| PROVINCIA | α | t | β | t | R ² L | SECL(10 ⁻²) | EEL(10 ⁻³) | R ² | SEC(10 ⁻²) |
|-------------|-----------|------|----------|-------|------------------|-------------------------|------------------------|----------------|------------------------|
| ALAVA | .4375879 | 5.5 | 1.487363 | 72.8 | .9988542 | .1051 | 1.5025 | .9387 | .3555 |
| ALBACETE | .8591994 | 27.3 | 1.439157 | 177.5 | .9998160 | .0165 | .2367 | .9871 | .0732 |
| ALICANTE | .7089801 | 8.2 | 1.501238 | 67.6 | .9986901 | .1242 | 1.7756 | .9262 | .3976 |
| ALMERIA | .9781996 | 9.4 | 1.564793 | 58.3 | .9982547 | .1816 | 2.5951 | .8749 | .6098 |
| ASTURIAS | .6581234 | 16.1 | 1.514937 | 144.1 | .9997159 | .0278 | .3984 | .9842 | .0934 |
| AVILA | 1.1563260 | 16.2 | 1.477835 | 80.3 | .9991040 | .0854 | 1.2204 | .9209 | .3891 |
| BADAJOS | 1.0891590 | 22.3 | 1.374187 | 109.4 | .9995212 | .0397 | .5682 | .9734 | .1391 |
| BALEARES | .9257838 | 20.0 | 1.445726 | 121.5 | .9996066 | .0356 | .5096 | .9707 | .1588 |
| BARCELONA | .6490069 | 10.1 | 1.466126 | 89.2 | .9992493 | .0681 | .9738 | .9504 | .2781 |
| BURGOS | .7887502 | 14.9 | 1.547366 | 114.0 | .9995494 | .0464 | .6640 | .9791 | .1188 |
| CACERES | .9939343 | 12.2 | 1.444499 | 69.2 | .9987782 | .1096 | 1.5665 | .9146 | .4296 |
| CADIZ | .6184002 | 11.9 | 1.537922 | 115.6 | .9995567 | .0446 | .6379 | .9807 | .1137 |
| CANTABRIA | .7741687 | 10.9 | 1.455336 | 80.0 | .9990739 | .0833 | 1.1912 | .9357 | .3458 |
| CASTELLON | .6587328 | 13.0 | 1.462057 | 112.1 | .9995279 | .0429 | .6131 | .9784 | .1250 |
| CIUDAD REAL | .6473798 | 9.1 | 1.641936 | 89.6 | .9992533 | .0847 | 1.2101 | .9477 | .2908 |
| CORDOBA | .9424656 | 12.9 | 1.411781 | 75.0 | .9989580 | .0894 | 1.2772 | .9426 | .2984 |
| CORUÑA | .8122877 | 14.9 | 1.469583 | 105.1 | .9994676 | .0493 | .7047 | .9638 | .1994 |
| CUENCA | 1.3682480 | 12.8 | 1.436746 | 52.2 | .9978897 | .1907 | 2.7251 | .8352 | .7267 |
| GERONA | .5538017 | 8.8 | 1.526289 | 94.3 | .9993249 | .0659 | .9427 | .9526 | .2719 |
| GRANADA | .8584978 | 13.1 | 1.552126 | 91.9 | .9993014 | .0719 | 1.0279 | .9498 | .2681 |
| GUADALAJARA | .9290706 | 14.1 | 1.438721 | 85.1 | .9992099 | .0721 | 1.0302 | .9883 | .0668 |
| GUIPUZCOA | .4791715 | 6.4 | 1.445574 | 75.5 | .9989412 | .0923 | 1.3190 | .9557 | .2587 |
| HUELVA | 1.0428300 | 21.4 | 1.503645 | 119.7 | .9995978 | .0397 | .5684 | .9702 | .1581 |
| HUESCA | 1.1301940 | 9.9 | 1.472752 | 50.3 | .9976761 | .2160 | 3.0871 | .8238 | .8101 |
| JAEN | .9593578 | 22.3 | 1.489430 | 134.5 | .9996795 | .0309 | .4414 | .9753 | .1339 |
| LEON | .9097887 | 17.4 | 1.501101 | 111.8 | .9995325 | .0454 | .6496 | .9616 | .2065 |
| LERIDA | .5332792 | 12.9 | 1.478406 | 138.9 | .9996906 | .0285 | .4082 | .9814 | .1117 |
| LUGO | .8773285 | 14.1 | 1.468186 | 91.8 | .9993037 | .0644 | .9212 | .9583 | .2241 |
| MADRID | .7790767 | 9.8 | 1.509701 | 74.1 | .9989158 | .1047 | 1.4963 | .9361 | .3420 |
| MALAGA | .8320548 | 17.7 | 1.485129 | 122.8 | .9996118 | .0368 | .5271 | .9676 | .1795 |
| MURCIA | .6779805 | 11.0 | 1.498625 | 94.7 | .9993361 | .0631 | .9022 | .9603 | .2232 |
| NAVARRA | .6630998 | 7.4 | 1.529820 | 66.7 | .9986491 | .1325 | 1.8937 | .9123 | .4723 |
| ORENSE | .8424290 | 14.7 | 1.500755 | 101.8 | .9994324 | .0548 | .7829 | .961 | .207 |
| PALENCIA | .6659646 | 15.5 | 1.599187 | 144.7 | .9997171 | .0307 | .4399 | .977 | .129 |
| PALMAS LAS | .8415888 | 14.3 | 1.490287 | 98.5 | .9993944 | .0577 | .8245 | .957 | .233 |
| PONTEVEDRA | .6942315 | 17.7 | 1.507887 | 149.5 | .9997366 | .0256 | .3664 | .982 | .101 |
| RIOJA, LA | .5712531 | 22.5 | 1.421167 | 217.1 | .9998750 | .0108 | .1544 | .995 | .030 |
| SALAMANCA | .9201459 | 13.5 | 1.511439 | 86.3 | .9992133 | .0772 | 1.1038 | .944 | .294 |
| SANTA CRUZ | .7973502 | 12.5 | 1.498025 | 91.2 | .9992891 | .0680 | .9718 | .947 | .283 |
| SEGOVIA | 1.1010310 | 14.3 | 1.382994 | 69.9 | .9988144 | .0987 | 1.4104 | .923 | .376 |
| SEVILLA | .8460578 | 15.7 | 1.462625 | 105.6 | .9994741 | .0483 | .6908 | .961 | .209 |
| SORIA | 1.0330950 | 19.2 | 1.492158 | 108.0 | .9995041 | .0480 | .6870 | .962 | .195 |
| TARRAGONA | .6515019 | 13.5 | 1.524409 | 123.1 | .9996086 | .0386 | .5519 | .978 | .124 |
| TERUEL | .9945699 | 26.9 | 1.386528 | 145.6 | .9997296 | .0228 | .3267 | .981 | .099 |
| TOLEDO | .9465516 | 20.2 | 1.392171 | 115.7 | .9995671 | .0365 | .5216 | .970 | .160 |
| VALENCIA | .8254735 | 10.4 | 1.474539 | 72.5 | .9988713 | .1043 | 1.4906 | .924 | .397 |
| VALLADOLID | .4542929 | 7.8 | 1.509359 | 100.5 | .9994024 | .0568 | .8124 | .959 | .238 |
| VIZCAYA | .5575589 | 6.8 | 1.491944 | 71.1 | .9988068 | .1110 | 1.5861 | .941 | .329 |
| ZAMORA | 1.1349820 | 15.0 | 1.410593 | 72.4 | .9988995 | .0956 | 1.3659 | .918 | .402 |
| ZARAGOZA | .6239396 | 10.5 | 1.596837 | 105.0 | .9994589 | .0583 | .8331 | .964 | .204 |
| CEUTA Y M. | .8691200 | 15.1 | 1.554459 | 104.7 | .9994642 | .0555 | .7931 | .962 | .204 |
| ESPAÑA | .8365724 | 14.4 | 1.521212 | 101.9 | .9994334 | .0561 | .8027 | .957 | .231 |