

Universidad de Málaga

Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Telecomunicación



TESIS DOCTORAL POR COMPENDIO

UNCONVENTIONAL DISTRIBUTIONS FOR
WIRELESS FADING MODELING

Autor:

IVÁN RICARDO SÁNCHEZ SALAZAR

Doctorado en Ingeniería de Telecomunicación

Ph.D. in Telecommunication Engineering

Director:


FRANCISCO JAVIER LÓPEZ MARTÍNEZ

AÑO 2024



UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

AUTOR: Iván Ricardo Sánchez Salazar

 <https://orcid.org/0000-0003-0686-8612>

EDITA: Publicaciones y Divulgación Científica. Universidad de Málaga



Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 4.0 Internacional:

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode>

Cualquier parte de esta obra se puede reproducir sin autorización pero con el reconocimiento y atribución de los autores.

No se puede hacer uso comercial de la obra y no se puede alterar, transformar o hacer obras derivadas.

Esta Tesis Doctoral está depositada en el Repositorio Institucional de la Universidad de Málaga (RIUMA): riuma.uma.es





DECLARACIÓN DE AUTORÍA Y ORIGINALIDAD DE LA TESIS PRESENTADA PARA OBTENER EL TÍTULO DE DOCTOR

D. Iván Ricardo Sánchez Salazar

Estudiante del programa de doctorado en **Ingeniería de Telecomunicación** de la Universidad de Málaga, autor/a de la tesis presentada para la obtención del título de doctor por la Universidad de Málaga, titulada: **Unconventional distributions for wireless fading modeling**.

Realizada bajo la tutorización y dirección de **Francisco Javier López Martínez**.

DECLARO QUE:

La tesis presentada es una obra original que no infringe los derechos de propiedad intelectual ni los derechos de propiedad industrial u otros, conforme al ordenamiento jurídico vigente (Real Decreto Legislativo 1/1996, de 12 de abril, por el que se aprueba el texto refundido de la Ley de Propiedad Intelectual, regularizando, aclarando y armonizando las disposiciones legales vigentes sobre la materia), modificado por la Ley 2/2019, de 1 de marzo.

Igualmente asumo, ante a la Universidad de Málaga y ante cualquier otra instancia, la responsabilidad que pudiera derivarse en caso de plagio de contenidos en la tesis presentada, conforme al ordenamiento jurídico vigente.

En Málaga, a **13 de Diciembre de 2023**.

| | |
|--|--|
| | |
| Fdo.: Iván Ricardo Sánchez Salazar Doctorando | Fdo.: Francisco Javier López Martínez Tutor y director de tesis |





UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

AUTORIZACIÓN PARA LA LECTURA DE LA TESIS

Por la presente, el Dr. Francisco Javier López Martínez, profesor del Departamento de Teoría de la Señal, Telemática y Comunicaciones de la Universidad de Granada, profesor Titular de Universidad (en excedencia) del Departamento de Ingeniería de Comunicaciones de la Universidad de Málaga, y profesor perteneciente al programa de doctorado en Ingeniería de Telecomunicación de la Universidad de Málaga,

CERTIFICA

Que D. Iván Ricardo Sánchez Salazar, ha realizado en el Departamento de Ingeniería de Comunicaciones de la Universidad de Málaga bajo su dirección, el trabajo de investigación correspondiente a su TESIS DOCTORAL titulada:

"Unconventional distributions for wireless fading modeling"

En dicho trabajo, se han propuesto aportaciones originales para el modelado de canales inalámbricos afectados por desvanecimientos, así como para el análisis de prestaciones de sistemas de comunicaciones. Los resultados de dicha tesis han dado lugar a dos publicaciones en revistas indexadas en JCR, así como a una aportación a congreso internacional, superando el requisito de 1 punto ANECA del programa de doctorado regulado por el Real Decreto 99/2011.

Por todo ello, y dada la unidad temática de las distintas contribuciones y la metodología común seguida en todas ellas, el director considera que esta tesis es apta para su presentación al Tribunal que ha de evaluarla y AUTORIZA la presentación de la tesis por COMPENDIO DE PUBLICACIONES en la Universidad de Málaga. Igualmente, certifica que las publicaciones que avalan la tesis no han sido empleadas en trabajos anteriores a la misma.

Málaga, 13 de Diciembre de 2023

El director:

Fdo.: Francisco Javier López Martínez



UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DE
TELECOMUNICACIÓN

Reunido el tribunal examinador en el día de la fecha, constituido por:

Presidente: Dr. D. _____

Secretario: Dr. D. _____

Vocal: Dr. D. _____

para juzgar la Tesis Doctoral titulada "*Unconventional distributions for wireless fading modeling*", realizada por D. Iván Ricardo Sánchez Salazar, y dirigida por el Dr. Francisco Javier López Martínez,

acordó por _____ otorgar la calificación de

y, para que conste, se extiende firmada por los componentes del tribunal la presente diligencia.

Málaga, a _____ de _____ del _____

El presidente:

El secretario:

El vocal:

Fdo.: _____

Fdo.: _____

Fdo.: _____



UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

Agradecimientos

En este significativo momento, primero quiero dar la honra y gloria a Dios por todo lo que me ha dado en la vida. También quiero expresar mi sincero y profundo agradecimiento a Francisco Javier López Martínez; su experiencia y sabiduría fueron mi apoyo fundamental para dar forma y guiar la realización de esta tesis doctoral.

Quiero expresar mi reconocimiento a la Universidad de Málaga por proporcionar el entorno propicio para la investigación y el aprendizaje. La infraestructura, recursos y apoyo administrativo fueron esenciales para llevar a cabo este proyecto de manera eficiente.

Dedico un agradecimiento especial a mi familia (Carla, Ariadne y Jorgito), mi mamita Carmen y mis hermanos por su apoyo constante y comprensión durante este viaje académico. Su aliento ha sido mi fuente de fortaleza y motivación.

También dedico un agradecimiento especial a mi Papito Jorge y mi ñañon Cesarín que están en el cielo. ¡Papá, se cumplió nuestro último sueño! Sé que donde estés estarás muy feliz.

En resumen, este logro no hubiera sido posible sin la colaboración, orientación y apoyo de todas las personas mencionadas anteriormente. A cada uno de ustedes, mi más profundo agradecimiento por contribuir al éxito de esta tesis doctoral.

Atentamente,

Iván Ricardo Sánchez Salazar



UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

Resumen

El rápido desarrollo de los sistemas de comunicaciones inalámbricos en la última década ha venido de la mano de la profusión de nuevos casos de uso en el ámbito de 4G, 5G y sus evoluciones, así como al uso de nuevas bandas de frecuencia. Por este motivo, se ha puesto de manifiesto la necesidad de disponer de modelos más precisos que permitan capturar los efectos que sufre la señal al propagarse por el medio inalámbrico. En esta tesis doctoral, se propone el uso de un conjunto de distribuciones *no convencionales* para el modelado de canales inalámbricos, como contraposición a las distribuciones habitualmente empleadas en la literatura basadas en suma de rayos o combinación de *clusters* de señales.

En primer lugar, se realiza una reformulación de la distribución Log-Logística para su uso en canales inalámbricos, y que viene motivada por la validación empírica realizada por otros autores en diversos entornos. A partir de dicha reformulación, se establecen las condiciones para que un canal inalámbrico puede modelarse mediante la distribución Log-Logística, y se identifican una serie de inconsistencias existentes en la literatura en este sentido. Por último, se ejemplifica cómo esta distribución es útil para el análisis de prestaciones de sistemas de comunicaciones afectados por *fading*.

En segundo lugar, se realiza una reformulación de la distribución de Lomax para el modelado de canales inalámbricos, motivada por la conexión de dicha distribución con una señal compleja cuyas componentes en fase y cuadratura se distribuyen de acuerdo con la distribución Student-t (en lugar de Gaussiana). A partir de dicha reformulación, se establecen las condiciones para que un canal inalámbrico puede modelarse mediante la distribución de Lomax, y se analizan las ventajas del uso de esta distribución en relación con otras alternativas que presentan el mismo número de parámetros. La posibilidad de calcular estadísticos de Laplace, como la función generadora de momentos generalizada, permite su aplicación directa a un mayor número de escenarios, y una mayor versatilidad para el análisis de prestaciones de sistemas de comunicaciones afectados por *fading* severo.



UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

Abstract

The rapid development of wireless communication systems in the last decade comes in hand with the appearance of a number of new use cases in the evolution from 4G to 5G (and potentially 6G), as well as with the use of higher frequency bands. Because of these aspects, there is a clear need for more accurate models that can capture the propagation effects suffered by information signals when propagating through the wireless environment. In this PhD dissertation, we advocate for the use of a set of *unconventional* distributions to model wireless channels. This is in contrast with the usual approaches in the literature based on sum of rays, or in combination of clusters of signals.

First, we reformulate the Log-Logistic distribution (rather well-known in general statistics and other fields beyond communications) to enable its use for wireless channel modeling. This choice is motivated by its recent use by other authors in several scenarios, and supported by empirical verification. With such reformulation, we clearly establish the conditions for this distribution to be a valid candidate to model fading channels, and also identifying some inconsistencies found in the related literature. Then, we exemplify how the Log-Logistic distribution can be used for analyzing the performance of wireless communication systems affected by fading.

Second, we also present a reformulation of the Lomax distribution (also well-known in statistics, economics, and other areas) to allow for its use as a fading distribution. This choice is motivated by recent works that point out the connection of the Lomax distribution with a complex signal with uncorrelated in-phase and quadrature components distributed according to Student-t distribution (instead of Gaussian). Based on this new reformulation, we discuss the conditions required for a wireless channel to be modeled by the Lomax distribution. Then, the key benefits of this distribution are compared with state-of-the-art alternatives (with equal number of parameters) conventionally used for this purpose. The possibility of expressing Laplace-domain statistics in compact closed-form, such as the generalized moment generating function, allows its direct application to a larger number of scenarios, and an improved versatility for performance analysis of wireless communication systems affected by severe fading.



UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Objetivos | 2 |
| 1.2. Organización | 3 |
| 1.3. Publicaciones | 3 |
| 2. Antecedentes | 5 |
| 2.1. Estado del arte | 5 |
| 2.1.1. Canales basados en rayos | 5 |
| 2.1.2. Canales basados en <i>clusters</i> | 6 |
| 2.1.3. Canales basados en distribuciones estadísticas no convencionales | 7 |
| 2.2. Modelo de sistema | 8 |
| 3. Resumen de los resultados | 11 |
| 3.1. Canales Log-Logísticos | 11 |
| 3.1.1. Introducción | 11 |
| 3.1.2. Caracterización Estadística | 12 |
| 3.1.3. Aplicaciones | 14 |
| Probabilidad de <i>outage</i> | 14 |
| Capacidad media | 15 |
| 3.1.4. Evaluación Numérica | 15 |
| 3.1.5. Ajuste a medidas | 19 |
| 3.1.6. Conclusiones | 23 |
| 3.2. Canales Lomax | 23 |
| 3.2.1. Introducción | 23 |
| 3.2.2. Estadísticos | 24 |
| 3.2.3. Aplicaciones | 27 |
| Probabilidad de Corte | 27 |
| Capacidad de Canal | 28 |
| Probabilidad de Error de Símbolo | 29 |
| Modelado de fading compuesto | 29 |
| 3.2.4. Evaluación Numérica | 30 |
| Estadísticos de la distribución Lomax | 30 |
| Probabilidad de Corte | 33 |
| Capacidad de Canal | 35 |
| Probabilidad de Error de Símbolo | 37 |

| | |
|---|-----------|
| Fading Compuesto | 38 |
| 4. Conclusiones y líneas futuras | 39 |
| 4.1. Conclusiones | 39 |
| 4.2. Líneas futuras | 40 |
| A. Publications | 41 |
| A.1. A Formulation of the Log-Logistic Distribution for Fading Channel Modeling | 41 |
| A.2. The Lomax Distribution for Wireless Channel Modeling: a Preliminary Study | 43 |
| A.3. The Lomax Distribution for Wireless Channel Modeling: Theory and Ap- plications | 47 |
| Bibliografía | 49 |



Índice de figuras

| | | |
|------|--|----|
| 3.1. | Función densidad de probabilidad de la SNR instantánea en el receptor en canales con la distribución- \mathcal{L} , para distintos valores de β . El parámetro $\bar{\gamma} = 1$ y por tanto $\alpha = \text{sinc}(1/\beta)$ | 16 |
| 3.2. | <i>Amount of Fading</i> en canales con distribución- \mathcal{L} en función de β . El caso del canal Rayleigh se incluye como referencia. Las líneas continuas corresponden a la expresión teórica del AoF en (3.18), mientras que los marcadores corresponden a simulaciones de Monte Carlo (MC). | 17 |
| 3.3. | Probabilidad de <i>outage</i> en función de la SNR $\bar{\gamma}$ en canales con distribución- \mathcal{L} , para distintos valores del parámetro β . Las líneas continuas corresponden a las expresiones teóricas en (3.22). Las líneas discontinuas corresponden a las expresiones asintóticas de la OP en (3.23). El caso del canal Rayleigh se incluye como referencia, mientras que los marcadores corresponden a simulaciones de MC. | 18 |
| 3.4. | Capacidad media vs. $\bar{\gamma}$ para canales con distribución- \mathcal{L} , considerando distintos valores de β . Las líneas continuas corresponden a las expresiones teóricas en (3.27). Las líneas discontinuas corresponden a las expresiones asintóticas en (3.28). Los casos de los canales Rayleigh y AWGN se incluyen como referencia, mientras que los marcadores corresponden a simulaciones de MC. | 19 |
| 3.5. | Distribuciones estadísticas del <i>fading</i> rápido en canales aire-tierra en sistemas UAV a frecuencias de 1 y 4 GHz, en condiciones de visión directa (LOS). Las CDF empíricas se han extraído de [41], mientras que los valores de ajuste corregidos para la distribución LL se muestran en la figura. Los valores de bondad de ajuste (goodness-of-fit= son $\text{RMSE}_{1\text{GHz}} = 3,92e - 3$ y $\text{RMSE}_{4\text{GHz}} = 1,1e - 2$ | 21 |
| 3.6. | Distribuciones estadísticas del <i>fading</i> rápido en canales aire-tierra en sistemas UAV a frecuencias de 1 y 4 GHz, en condiciones sin visión directa (NLOS). Las CDF empíricas se han extraído de [41], mientras que los valores de ajuste corregidos para la distribución LL se muestran en la figura. Los valores de bondad de ajuste (goodness-of-fit= son $\text{RMSE}_{1\text{GHz}} = 4,61e - 3$ and $\text{RMSE}_{4\text{GHz}} = 3,71e - 2$ | 22 |
| 3.7. | \mathcal{L}_x PDF para diferentes valores de α . El caso de fading Rayleigh es usado para fines de comparación (línea verde sólida). Marcas representan las simulaciones MC. | 31 |

| | |
|--|----|
| 3.8. \mathcal{L}_x AoF para diferentes valores de α . El caso de fading Rayleigh es usado para fines de comparación (línea roja discontinua). Marcas representan las simulaciones MC. | 31 |
| 3.9. \mathcal{L}_x GMGF para diferentes valores de α y n , como una función de s . Marcas representan las simulaciones MC. | 32 |
| 3.10. OP vs. $\bar{\gamma}$ bajo fading \mathcal{L}_x para diferentes valores de α . El caso fading Rayleigh es incluido con fines de comparación. Líneas cortadas corresponden a expresiones asintóticas en ec. (13). | 33 |
| 3.11. OP vs. $\bar{\gamma}$ bajo fading \mathcal{L}_x usando SC recepción, para diferentes valores de α and L . Líneas cortadas corresponden a expresiones asintóticas en ec. (16). | 34 |
| 3.12. Capacidad promedio vs. $\bar{\gamma}$ bajo fading \mathcal{L}_x para diferentes valores de α . El caso de fading Rayleigh y no fading (AWGN) son incluidos como referencia. Líneas entrecortadas corresponde a la expresión asintótica in ec. (18). | 35 |
| 3.13. Ganancia de capacidad $\Delta\bar{C}$ de los esquemas SC vs a la SNR promedio por rama, para diferentes valores de α y L | 36 |
| 3.14. SEP vs. $\bar{\gamma}$ bajo fading \mathcal{L}_x para diferentes valores de α | 37 |
| 3.15. PDF del modelo de atenuación compuesta basado en la distribución inversa-gamma, para diferentes valores de m y α . Se considera $\bar{W} = 2$ | 38 |



Lista de Acrónimos

| | |
|--------------|--|
| 5G | Fifth Generation Quinta generación |
| 6G | Sixth Generation Sexta generación |
| AoF | Amount of fading Nivel de desvanecimientos |
| AWGN | Additive White Gaussian Noise Ruido blanco Gaussiano |
| BDPSK | Binary Differential Phase Shift Keying Modulación binaria por desplazamiento diferencial de fase |
| BS | Base Station Estación base |
| CDF | Cumulative Distribution Function Función de distribución de probabilidad |
| CLT | Central Limit Theorem Teorema del límite central |
| DL | DownLink Enlace descendente |
| FTR | Fluctuating Two Ray Dos rayos fluctuantes |
| GMGF | Generalized Moment Generating Function Función generadora de momentos generalizada |
| IFTR | Independent Fluctuating Two Ray Dos rayos fluctuantes independientes |
| LL | Log-Logistic |

| | |
|-------------|--|
| | Log-Logística |
| LOS | Line-Of-Sight con visión directa |
| M2M | Machine-to-Machine entre máquinas |
| MC | Monte Carlo Montecarlo |
| MGF | Moment Generating Function Función Generadora de Momentos |
| NLOS | Non Line-Of-Sight sin visión directa |
| NWDP | N-Wave with Diffuse Power <i>N</i> -rayos con componente difusa |
| OP | Outage Probability Probabilidad de <i>outage</i> (corte) |
| PDF | Probability Density Function Función de densidad de probabilidad |
| RF | Radio Frequency Radiofrecuencia |
| RMSE | Root Mean Square Error Error cuadrático medio raíz |
| RV | Random Variable Variable aleatoria |
| SC | Selection Combining Combinación por selección |
| SEP | Symbol Error Probability Probabilidad de error de símbolo |
| SINR | Signal-to-Interference-plus-Noise Ratio Relación señal-interferencia más ruido |
| SNR | Signal-to-Noise Ratio Relación señal-ruido |

| | |
|-------------|---|
| TWDP | Two-Wave with Diffuse Power Dos rayos con componente difusa |
| V2X | Vehicle-to-everything entre vehículo y X |
| UAV | Unmanned Aerial Vehicle Vehículo aérea no tripulado |



UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

Capítulo 1

Introducción

En la última década, los sistemas de comunicaciones inalámbricos han experimentado una profunda evolución. Los sistemas clásicos de telefonía móvil y celular desplegados en los 90 y en la primera década del nuevo siglo estaban diseñados principalmente para proporcionar servicios de voz en estructuras de macroceldas, con prioridad para los casos de uso en exteriores. El desarrollo de los sistemas de redes inalámbricas de área local y de los dispositivos tipo *smartphone* y *tablet* han sido claves para la evolución hacia arquitecturas de red basadas enteramente en transmisión de paquetes de datos a través de Internet. Así, han aparecido multitud de escenarios y casos de uso para las redes móviles e inalámbricas que difieren sustancialmente de los considerados hasta entonces.

Si tomamos como ejemplo la gran variedad de casos de uso considerados para quinta generación (5G) [1], se incluyen nuevos escenarios como *device-to-device* (D2D), *machine-to-machine* (M2M) y *vehicular-to-everything* (V2X) entre muchos otros. Así, los requisitos de prestaciones en términos de velocidad de transmisión, latencia o fiabilidad deben de poder conseguirse en situaciones bastante diferentes. Dado que la naturaleza de los canales inalámbricos es fuertemente dependiente del escenario de operación, se requiere de una caracterización precisa de las condiciones reales de propagación en estos nuevos escenarios. En esta línea, se han desarrollado modelos de canal muy avanzados en el contexto de 5G, con el objetivo de incorporar en la medida de lo posible la geometría de transmisor, receptor y entorno [2], [3]. Aunque esta combinación de aspectos geométricos con conceptos estadísticos es útil para generar condiciones razonablemente realistas de propagación de manera sintética, su complejidad suele ser extraordinariamente alta debido al elevado número de parámetros de que constan estos modelos.

En un caso general, debido a la propagación multicamino, la señal que llega al receptor se compone de una superposición de ondas electromagnéticas, cada una de las cuales tendrá una amplitud y una fase determinadas [4]. Por desgracia, la distribución de la señal recibida para un número arbitrario de componentes sinusoidales es muy complicada de caracterizar – se trata del conocido como *random-phase problem*, un problema abierto por décadas en la literatura. Sin embargo, el problema presenta una solución aproximada mediante la aplicación del teorema del límite central (CLT), siendo los populares modelos de Rayleigh y Rice [5] dos soluciones particulares para los casos sin visión directa, y

con una componente dominante, respectivamente.

En la literatura reciente, el modelado de canales inalámbricos se ha venido desarrollando fundamentalmente desde dos puntos de vista diferentes¹: los modelos basados en suma de rayos (*ray-based*), y los modelos basados en suma de grupos de rayos (*cluster-based*). Dentro del primer tipo, tenemos ejemplos como los modelos Two-Wave with Diffuse Power (TWDP) [7], *N*-Wave with Diffuse Power (NWDP) [8], Fluctuating Two-Ray (FTR) [9], [10] o Independently Fluctuating Two-Ray (IFTR)[11], y han sido de gran utilidad para el modelado de canales en *body-area networks* o en frecuencias milimétricas. En cuanto a los modelos *cluster-based*, se inspiran en la formulación original de Yacoub para la definición de los modelos κ - μ y η - μ [12], y que ha sido empleada posteriormente para el desarrollo de otros modelos generalizados como κ - μ shadowed [13]-[17], o α - η - κ - μ [18].

Además de estos criterios, que comparten una definición subyacente basada en un modelo físico de propagación, existe una tercera alternativa que se ha venido empleando para el modelado de canales estadísticos: el uso de determinadas distribuciones por su buen ajuste a medidas empíricas, o por su simplicidad analítica. Este es el caso de modelos ampliamente usados, como son el de Nakagami-*m*[19], Weibull [20] o inverse-Gamma [21]. En ocasiones, de manera posterior a su definición y uso, suelen encontrarse conexiones con modelos físicos subyacentes basados en suma de rayos o de *clusters*: por ejemplo, el modelo de Nakagami-*m* puede relacionarse con un modelo basado en *clusters* para valores enteros del parámetro *m*, mientras que el modelo de Weibull puede conectarse con un modelo de Rayleigh (basado en rayos) al que se le aplica una transformación no lineal. Por tanto, esta tercera vía ofrece la posibilidad de considerar distribuciones que, si bien pueden no tener una clara motivación física a primera vista, puedan ser adecuadas para el modelado de canales inalámbricos.

1.1. Objetivos

En esta tesis doctoral, se plantea el uso lo que denominaremos distribuciones *no convencionales* para el modelado de canales inalámbricos con desvanecimientos. Con ello, se persigue un nuevo enfoque que permita el uso de distribuciones bien conocidas en otros ámbitos, para el modelado de canales de comunicaciones. De manera más específica, los objetivos definidos para este trabajo doctoral buscan responder las siguientes preguntas:

- ¿En qué condiciones puede una distribución estadística cualquiera emplearse para modelar canales con *fading*?
- ¿Puede el uso de una distribución sin (a priori) una clara interpretación física ser recomendable respecto a otras alternativas?
- ¿Cuáles son las implicaciones asociadas, desde puntos de vista teórico (análisis de prestaciones) y práctico (empíricas o físicas)?

¹Ambos criterios han sido unificados recientemente [6]

Para cumplir estos objetivos, se analizan dos distribuciones ampliamente conocidas en estadística: Log-Logística y Lomax.

1.2. Organización

La memoria de esta tesis doctoral, organizada para su presentación por compendio de publicaciones, se estructura del siguiente modo:

- **Capítulo 1:** Se presenta una breve introducción al trabajo realizado, y se establecen su motivación y objetivos principales. Se listan el conjunto de publicaciones que avalan esta tesis doctoral.
- **Capítulo 2:** Se presenta una breve descripción del estado del arte, así como otros conceptos preliminares.
- **Capítulo 3:** Se presenta un resumen general de los principales resultados de la tesis doctoral.
- **Capítulo 4:** Se presentan las principales conclusiones, y se detallan las líneas futuras de trabajo que emanan de esta tesis.
- **Apéndice A:** Se incluye una copia de las publicaciones que avalan la tesis doctoral.

1.3. Publicaciones

Esta tesis doctoral se avala por las siguientes publicaciones:

- [22] I. Sánchez y F. J. López-Martínez, «A Formulation of the Log-Logistic Distribution for Fading Channel Modeling», *Electronics*, vol. 11, n.º 15, pág. 2409, 2022. DOI: 110.3390/electronics11152409.
- [23] I. Sanchez y F. J. Lopez-Martinez, «The Lomax Distribution for Wireless Channel Modeling: a Preliminary Study», en *2023 IEEE Seventh Ecuador Technical Chapters Meeting (ETCM)*, 2023, págs. 1-4. DOI: 10.1109/ETCM58927.2023.10309028.
- [24] I. Sanchez y F. J. Lopez-Martinez, «The Lomax Distribution for Wireless Channel Modeling: Theory and Applications», *IEEE Open J. Veh. Technol.*, vol. 5, págs. 162-171, 2024. DOI: 10.1109/OJVT.2023.3342074.

Cabe destacar que [23] obtuvo el premio al mejor artículo científico en el *track* de Comunicaciones en la conferencia internacional IEEE ECTM 2023, celebrada en Octubre de 2023. Por su parte, [22] corresponde a una publicación en revista tipo Q2 (Categoría *Electrical and Electronic Engineering*) dentro del índice JCR de 2022, con factor de impacto 2.9. Finalmente, [24] corresponde a una publicación en revista tipo Q1 (Categoría *Electrical and Electronic Engineering*) dentro del índice JCR de 2022, con factor de impacto 6.4.



UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

Capítulo 2

Antecedentes

En este capítulo, se realiza una descripción del estado del arte relacionado con el tema central de esta tesis doctoral, y se introducen los aspectos fundamentales necesarios para su contextualización.

2.1. Estado del arte

En este apartado, se describen las tres estrategias dominantes en la literatura para el modelado de canales inalámbricos, correspondientes a formulaciones (i) basadas en rayos; (ii) basadas en agrupaciones de rayos, o *clusters*; (iii) basadas en distribuciones estadísticas no convencionales.

2.1.1. Canales basados en rayos

Según esta formulación, la señal recibida en un entorno afectado por propagación multicamino puede modelarse como la superposición de un número determinado de ondas P [25], de amplitudes y fases determinadas:

$$r = R \exp(j\phi) = \sum_{i=1}^P a_i \exp(j\varphi_i). \quad (2.1)$$

En este contexto, es habitual diferenciar entre lo que se denominan ondas dominantes (o componentes especulares), y las componentes difusas. En general, las componentes especulares suelen ser pocas, de potencia relativamente elevada, y se asocian a condiciones de propagación en las que hay una visión directa, o bien cuando se produce una reflexión especular en una superficie. Por su parte, las componentes difusas se suelen asociar a un número elevado de componentes provenientes de reflexiones no especulares (es decir, en las que un rayo incidente en una superficie, en general rugosa, genera varias componentes de baja potencia en diferentes direcciones espaciales). Así, es posible reformular (2.1) como

$$r = R \exp(j\phi) = \sum_{i=1}^N V_i \exp(j\theta_i) + \underbrace{\sum_{i=1}^M A_i \exp(j\Phi_i)}_{A_d = X + jY}, \quad (2.2)$$

donde $V_i \exp(j\theta_i)$ representa la i -ésima componente especular. En general, suele asumirse que su amplitud es constante y que su fase es aleatoria, uniformemente distribuida en el intervalo $[0, 2\pi)$, e independiente entre las diferentes componentes. Matemáticamente, esto se expresa como $\theta_i \sim \mathcal{U}[0, 2\pi)$. Para la componente difusa, suele asumirse que se genera mediante la combinación de un número suficientemente alto de componentes relativamente débiles e independientes, por lo que es posible aplicar a este término el CLT. Así, la componente difusa A_d se puede aproximar por un término Gaussiano y de media cero, donde $X, Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Definiendo Ω_0 como la potencia media de la componente difusa, podemos escribir $\mathbb{E}\{|A_d|^2\} = \Omega_0 = 2\sigma^2$, y donde $\mathbb{E}\{\cdot\}$ representa el operador esperanza.

El modelo descrito mediante la ecuación (2.2) incluye al modelo de Rayleigh como caso especial para $N = 0$; es decir, para el caso en el que no hay componentes especulares presentes. De igual manera, para $N = 1$ se obtiene el modelo de Rice, y que consta de una única componente especular o dominante. Para $N = 2$ se tiene el modelo de dos rayos con componente difusa, denominado TWDP y formulado por Durgin, Rappaport y de Wolf [7]. El caso general se analiza, por ejemplo, en [8], aunque su complejidad analítica crece sustancialmente cuando $N > 2$. Para un modelo de 2 rayos con componente difusa (es decir, el modelo TWDP), es habitual caracterizar la distribución empleando los siguientes parámetros:

$$K = \frac{V_1^2 + V_2^2}{2\sigma^2}, \quad (2.3)$$

$$\Delta = \frac{2V_1V_2}{V_1^2 + V_2^2}, \quad (2.4)$$

y donde K representa el cociente entre la potencia total asociada a las componentes dominantes especulares, y la potencia total de la componente difusa. Por su parte, el parámetro Δ representa la amplitud relativa de las dos componentes especulares, tomando valores $\Delta \rightarrow 0$ cuando solamente hay una componente especular (es decir, el caso Rice), o bien $\Delta \rightarrow 1$ cuando ambas componentes especulares tienen igual amplitud.

Dentro de esta familia de modelos, es posible incorporar diferentes generalizaciones de estos modelos mediante la consideración de amplitudes aleatorias para las componentes especulares. Así, es posible generalizar el modelo TWDP añadiendo fluctuaciones a sus componentes dominantes, de diferentes maneras. Por ejemplo, el modelo de dos rayos fluctuantes (FTR) definido en [9] considera una fuente común de fluctuación para sus dos componentes especulares. El caso de fluctuaciones independientes para cada componente especular (IFTR), aunque originalmente fue sugerido también en [9], fue formalizado posteriormente en [11].

2.1.2. Canales basados en *clusters*

La formulación basada en *clusters* fue originalmente propuesta por Yacoub a la hora de proponer los modelos κ - μ y η - μ [12]. En ella, la señal recibida puede descomponerse en varias agrupaciones o *clusters* de ondas, y en los que cada *cluster* se compone de ondas

que han sufrido *scattering* y con retardos similares. Por su parte, la dispersión de retardo de los diferentes *clusters* es relativamente grande. En cada cluster, la señal consta de una componente dominante, y su correspondiente componente difusa. Matemáticamente, la envolvente de potencia de la señal recibida puede expresarse como:

$$W = \sum_{i=1}^{\mu} (X_i + \xi p_i)^2 + (Y_i + \xi q_i)^2, \quad (2.5)$$

donde μ representa el número de clusters, X_i e Y_i son variables aleatorias Gaussianas e independientes, de media cero y varianza σ^2 , y que representan a las partes reales e imaginaria de la componente difusa para el i -ésimo *cluster* de ondas. Por último p_i y q_i son las partes reales e imaginarias correspondientes a la i -ésima componente dominante. En general, suelen considerarse constantes, aunque pueden generalizarse para incluir fluctuación en la componentes dominantes a través de la variable ξ , y que corresponde a una variable Nakagami- m normalizada, es decir, con $\mathbb{E}[\xi^2] = 1$.

El modelo físico que se ha descrito corresponde con el modelo κ - μ *shadowed* originalmente definido en [13], y para el que la relación señal-ruido (SNR) instantánea puede definirse como $\gamma = \bar{\gamma}W/\bar{W}$, y donde $\bar{\gamma} = \mathbb{E}[\gamma]$ representa la SNR media, mientras que $\bar{W} = \mathbb{E}[W] = d^2 + 2\sigma^2\mu$ corresponde a la potencia media de la señal recibida. El parámetro $d^2 = \sum_{i=1}^{\mu} p_i^2 + q_i^2$ captura la potencia agregada de las componentes dominantes, de modo que es posible definir un parámetro $\kappa = d^2/(2\sigma^2\mu)$ similar a la K de Rice, representando la relación entre la potencia total de las componentes dominantes y la potencia total de las componentes difusas. Este modelo puede expresarse de manera más compacta usando notación compleja [17]

$$W = \sum_{i=1}^{\mu} |\tilde{Z}_i + \xi \tilde{\rho}_i|^2, \quad (2.6)$$

y donde ahora \tilde{Z}_i y $\tilde{\rho}_i$ se relacionan con las variables en (2.6) como $\tilde{Z}_i = X_i + jY_i$ y $\tilde{\rho}_i = p_i + jq_i$.

2.1.3. Canales basados en distribuciones estadísticas no convencionales

Debido a la complejidad matemática de los modelos basados en rayos, y al hecho de que la mayoría de los casos de uso para comunicaciones inalámbricas tenían lugar en exteriores y sobre largas distancias, durante décadas los modelos prominentes han sido los modelos de Rayleigh y Rice. Sin embargo, cabe destacar como excepción a estos modelos físicamente bien justificados un tercer modelo contendiente: es el caso de la distribución de Nakagami, conocida habitualmente como Nakagami- m [19]. En esta distribución, la envolvente de amplitud de la señal ($R = |r|$ en la ecuación (2.1)) se distribuye de acuerdo a la siguiente función de densidad de probabilidad (PDF):

$$f_R(r) = \frac{2m^m}{\Gamma(m)\Omega^m} r^{2m-1} \exp\left(-\frac{mr^2}{\Omega}\right), \quad (2.7)$$

donde $m \in (0, \infty]$ es el parámetro¹ de forma de la distribución, $\Gamma(\cdot)$ es la función Gamma, y $\Omega = \mathbb{E}[R^2]$. De otro modo, este modelo se corresponde con una distribución de la potencia recibida $W = R^2$ que sigue la distribución Gamma

$$f_W(w) = \frac{m^m}{\Gamma(m)\Omega^m} w^{m-1} \exp\left(-\frac{mw}{\Omega}\right). \quad (2.8)$$

A diferencia de los modelos de Rayleigh y Rice, el modelo de Nakagami no se propuso basándose en una realidad física subyacente, sino simplemente basándose en criterios estadísticos, puesto que permitía obtener un mejor ajuste a determinadas medidas empíricas. Debido a su simplicidad analítica, este modelo se ha empleado ampliamente en la comunidad científica como una alternativa a los modelos de Rice y Rayleigh, incluyendo a este último como caso particular cuando $m = 1$. Tras la definición de los modelos basados en *clusters* a primeros del siglo XXI, se demuestra que el modelo Nakagami- m puede encuadrarse dentro de este tipo de formulación para valores enteros o semi-enteros del parámetro m .

Siguiendo esta filosofía basada en emplear modelos estadísticos sin una motivación física evidente a priori, se han propuesto diferentes modelos en la literatura: es el caso del modelo de Weibull [20], [26], ampliamente empleado en diversos campos de la estadística y que ha sido muy utilizado en el ámbito de teoría de la comunicación para el análisis de prestaciones de sistemas de comunicaciones. Estudiando la literatura relacionada, encontramos otros ejemplos como: distribución inverse-Gaussian [27], inverse-Gamma [21], [28], log-logística [29], de Lomax [30], [31] e incluso hiperexponencial [32]. Aunque las dos primeras han sido estudiadas con profundidad en la literatura, no es el caso del resto. Esto motiva el trabajo a desarrollarse en el marco de esta tesis doctoral.

2.2. Modelo de sistema

En adelante, y por simplicidad aunque sin pérdida de generalidad, se va a considerar el siguiente modelo canónico para un sistema de comunicaciones punto a punto. En él, un transmisor envía un mensaje a un receptor a través de un canal de comunicaciones inalámbrico. El símbolo transmitido x pertenece a una constelación \mathcal{S} cuya energía media se considera normalizada; es decir, $\mathbb{E}_{\mathcal{S}}\{|x|^2\} = 1$.

La señal recibida y puede expresarse como:

$$y = \underbrace{\sqrt{P_T S_T} h x}_{y_{rx}} + n, \quad (2.9)$$

donde P_T se define como la potencia disponible en el transmisor, S_T captura las pérdidas globales sufridas por la señal, y que incluye las ganancias de las antenas transmisora y

¹Clásicamente, se establece que $m \geq 0,5$, aunque matemáticamente la distribución está bien definida para $m > 0$.

receptora, las pérdidas dependientes de la frecuencia, así como las pérdidas de propagación debidas a la distancia (*path loss*) de tipo $d^{-\alpha}$, y donde d es la distancia en metros y α es el exponente de pérdidas que suele tomar valores entre 2 y 4. El término n corresponde al ruido blanco aditivo Gaussiano ruido blanco Gaussiano aditivo (AWGN), y que se modela mediante una variable aleatoria Gaussiana de media cero y varianza N_0 , es decir $n \sim \mathcal{CN}(0, N_0)$. Por último, h es una variable aleatoria que modela el comportamiento del canal con desvanecimientos, que se supone que es plano en el rango de operación (transmisión de banda estrecha). Por conveniencia, es habitual asumir que la variable h se encuentra normalizada, de modo que $\mathbb{E}\{|h|^2\} = 1$.

La SNR instantánea en el receptor puede expresarse como

$$\gamma = \frac{P_T S_T |x|^2}{N_0} |h|^2, \quad (2.10)$$

y donde la SNR media se define como $\bar{\gamma} \triangleq \mathbb{E}\{\gamma\} = P_T S_T / N_0$. En lo sucesivo, y a no ser que se indique lo contrario, se llevará a cabo una caracterización estadística de la variable γ que representa la SNR instantánea del canal. En ocasiones, será de interés estudiar la distribución de la amplitud de la señal útil recibida, y que se denota como $r = |y_{rx}|$. En este caso, la distribución de r puede obtenerse a partir de la de γ de manera directa empleando técnicas estándar de transformación de variables aleatorias [33].



UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

Capítulo 3

Resumen de los resultados

En este capítulo, se presenta un resumen de los principales resultados obtenidos en este trabajo. En concreto, se procede a describir la caracterización estadística de las distribuciones Log-Logística y de Lomax para el modelado de canales de comunicaciones, en el ámbito de los sistemas inalámbricos.

3.1. Canales Log-Logísticos

3.1.1. Introducción

La investigación en modelado estocástico de canales ha sido intensa desde los trabajos originales de Nakagami y Beckmann en los años 60 [4], [19]. Durante décadas, los modelos de canal basados en el CLT como los de Rice y Rayleigh han sido los más empleados para modelar condiciones de propagación en presencia de propagación multicanal, para los casos con visión directa (LOS) y sin visión directa (NLOS), respectivamente. En otros escenarios donde un modelado alternativo se hacía necesario, la distribución de Nakagami- m ha venido empleándose debido a su sencilla formulación matemática, comparada con otras alternativas como los modelos Nakagami- q o de Beckmann. Con el inicio del nuevo siglo, se han propuesto nuevas alternativas para el modelado de canales inalámbricos, dando lugar a nuevas distribuciones más generales y que suelen referirse como modelos de canal generalizados [12], [13], [34], [35]. Dichos modelos han sido verificados en entornos de propagación reales, y han sido muy útiles para caracterizar condiciones de propagación más generales que los canales de Rayleigh, Rice o Nakagami.

Aun así, el mecanismo que gobierna la propagación de las ondas electromagnéticas es muy complicado matemáticamente, por lo que estos modelos a veces no son suficientes para caracterizar con precisión los canales en determinados escenarios, o para ajustarse bien a medidas reales. En ciertos casos, la elección de una determinada distribución para modelar los canales inalámbricos no responde a razones que encuentren una clara justificación física, sino que se hace simplemente por conveniencia. Por ejemplo, la distribución de Weibull se propuso en [20], [36] como alternativa en entornos interiores, simplemente

por no ser excesivamente complicada desde el punto de vista matemático, mejorando el ajuste en relación a las distribuciones clásicas.

De igual manera, en algunos contextos se ha considerado el uso de la distribución Log-Logística (LL)¹ [37], [38] para modelar las fluctuaciones en la amplitud o en la potencia de las señales recibidas en sistemas de comunicaciones afectados por *fading*. Algunos ejemplos corresponden a canales en redes de área corporal [39], [40], redes celulares en la banda de milimétricas con desalineamiento de ganancia [32], dispersión en entornos con alta densidad de hojas [29], canales aire-tierra en sistemas de comunicaciones con drones (vehículos aéreos no tripulados (UAV)) [41], [42], comunicaciones ópticas inalámbricas submarinas afectadas por turbulencia [43], y otros muchos escenarios [44]-[47]. Sin embargo, y pese al interés que ha suscitado recientemente el uso de la distribución LL en el modelado de canales inalámbricos, no se ha llevado a cabo una caracterización estadística integral de esta distribución con el objetivo específico de formalizar su uso en este ámbito.

Es por ello que se propone reformular la distribución LL, para lo cual proponemos el nombre alternativo de distribución- \mathcal{L} . Así, se definen de manera clara sus estadísticos fundamentales, y se destacan las principales diferencias con otros modelos, así como sus ventajas. Es interesante destacar que en algunos casos, el ajuste de la distribución LL no se asocia con una distribución válida para modelar físicamente un canal de comunicaciones; esto se solventa empleando la reformulación a través de la distribución- \mathcal{L} . A modo de ejemplo, se ilustra cómo puede emplearse la distribución- \mathcal{L} para el análisis de prestaciones de sistemas de comunicaciones en presencia de fading, analizando métricas habituales como la probabilidad de *outage* (OP) y la capacidad media. Finalmente, se ilustra la influencia de los parámetros de la distribución en dichas métricas de prestaciones, gracias a técnicas de análisis asintótico.

3.1.2. Caracterización Estadística

En adelante, nos centraremos en caracterizar estadísticamente la distribución- \mathcal{L} para el modelado de la SNR instantánea en el receptor, y que denotaremos por γ de acuerdo a lo definido en la Sección 2.2. Sin embargo, es preciso destacar que de manera similar a la distribución Log-Normal, una transformación de tipo potencia n -ésima sobre una variable que sigue la distribución- \mathcal{L} da lugar a otra variable que también sigue la distribución- \mathcal{L} . Matemáticamente, si $z \sim \mathcal{L}(\alpha, \beta)$, entonces $z^n \sim \mathcal{L}(\alpha^n, \beta/n)$. Por tanto, la distribución- \mathcal{L} puede en realidad emplearse tanto para caracterizar las fluctuaciones aleatorias de la SNR como las de la amplitud de la envolvente del canal $|h|$.

¹también conocida como distribución de Fisk.

Para una variable γ que se distribuye de acuerdo a la distribución LL convencional, su PDF puede expresarse como [37]:

$$f_{\gamma}(\gamma) = \frac{\beta/\alpha (\gamma/\alpha)^{\beta-1}}{\left(1 + (\gamma/\alpha)^{\beta}\right)^2}, \quad (3.1)$$

donde $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ son los parámetros de escalado y forma de la distribución LL, respectivamente. Para poder modelar el canal inalámbrico (en este caso, su SNR instantánea) adecuadamente, se propone una reformulación de manera que aparezca de manera explícita la SNR media como parámetro. Así, empleando (3.1), se obtiene que $\bar{\gamma} \triangleq \mathbb{E}\{\gamma\} = \frac{\alpha\pi/\beta}{\sin(\pi/\beta)}$, válida para $\beta > 1$. Usando la definición habitual de la función $\text{sinc}(\cdot)$, se establece la equivalencia $\alpha = \bar{\gamma} \cdot \text{sinc}(1/\beta)$. Debido a la restricción $\beta > 1$, todas las sucesivas evaluaciones de la función $\text{sinc}(\cdot)$ tienen un argumento menor que 1, y por tanto dan lugar a valores positivos. Considerando todo lo anterior, se define de manera formal la PDF de la distribución- \mathcal{L} como:

$$f_{\gamma}(\gamma) = \frac{\beta \cdot \text{sinc}(1/\beta)^{\beta}}{\bar{\gamma}} \frac{(\gamma/\bar{\gamma})^{\beta-1}}{\left(\text{sinc}(1/\beta)^{\beta} + (\gamma/\bar{\gamma})^{\beta}\right)^2}. \quad (3.2)$$

Así, la distribución- \mathcal{L} consta de un parámetro de forma (β), además del parámetro que modela la SNR media. De este modo, puede clasificarse dentro del conjunto de distribuciones para la SNR que constan de un único parámetro, como son las versiones (elevadas al cuadrado) de las distribuciones de Rice, Nakagami- m , Nakagami- q o Weibull. Al igual que la distribución *inverse gamma* [21], el momento de orden 1 de γ se define únicamente para $\beta > 1$. Como dicho momento se corresponde con la SNR media $\bar{\gamma}$, este hecho impone una restricción física al rango de valores válidos para el parámetro β para los que puede modelar un canal inalámbrico físicamente consistente. Cabe destacar que la distribución LL se usa a menudo por su capacidad para modelar un comportamiento de tipo *heavy-tail*, con un decaimiento más lento que la distribución exponencial. Sin embargo, esto ocurre solamente para valores de $\beta < 1$ [38], lo que se corresponde con el rango de valores de β para los que la distribución- \mathcal{L} no está definida. Por tanto, la PDF en (3.2) queda definida para $\bar{\gamma} \geq 0$ y $\beta > 1$. Para obtener una expresión de la función de distribución de probabilidad (CDF) de la distribución- \mathcal{L} , basta con integrar sobre (3.2), lo que da el siguiente resultado:

$$F_{\gamma}(\gamma) = \frac{(\gamma/\bar{\gamma})^{\beta}}{\text{sinc}(1/\beta)^{\beta} + (\gamma/\bar{\gamma})^{\beta}}. \quad (3.3)$$

Por su parte, los momentos de la distribución quedan definidos, para $k < \beta$, mediante

$$\mathbb{E}\{\gamma^k\} = \bar{\gamma}^k \frac{\text{sinc}(1/\beta)^k}{\text{sinc}(k/\beta)}. \quad (3.4)$$

A partir de la expresión de los momentos, se puede calcular una métrica muy habitual en canales con *fading*, denominada *amount of fading* (AoF). Empleando la definición del AoF

en [48], se tiene:

$$\text{AoF} = \frac{\mathbb{E}[\gamma^2]}{\bar{\gamma}^2} - 1 = \frac{\text{sinc}(1/\beta)^2}{\text{sinc}(2/\beta)} - 1, \quad (3.5)$$

y que es válido únicamente para $\beta > 2$.

Un aspecto interesante de esta distribución es que su CDF inversa, conocida también como función cuantil, puede expresarse de manera cerrada como:

$$F_\gamma^{-1}(p; \bar{\gamma}, \beta) = \bar{\gamma} \text{sinc}(1/\beta) \left(\frac{p}{1-p} \right)^{1/\beta}, \quad (3.6)$$

y donde $0 \leq p \leq 1$ indica un valor de probabilidad. Esto es una de las ventajas de la distribución- \mathcal{L} , ya que facilita la generación de muestras incorreladas de la distribución mediante el método de inversión de la CDF.

3.1.3. Aplicaciones

Una vez se han caracterizado los estadísticos principales de la distribución- \mathcal{L} , es momento de mostrar algunos ejemplos de interés relativos a su uso para análisis de prestaciones de sistemas de comunicaciones. Para ello, se eligen dos métricas muy habituales en el ámbito de la teoría de la comunicación, como son la OP y la capacidad media.

Probabilidad de outage

Por definición, la OP es la probabilidad de que la SNR instantánea γ caiga por debajo de una SNR umbral definida por γ_{th} . Es una métrica muy empleada para cuantificar la probabilidad de error, sin ceñirse a un esquema de modulación concreto. La OP puede obtenerse evaluando directamente la CDF de la SNR en el valor umbral:

$$\text{OP}(\gamma_{\text{th}}; \bar{\gamma}, \beta) = F_\gamma(\gamma_{\text{th}}). \quad (3.7)$$

Para el rango de valores en los que la SNR media es suficientemente grande (en comparación con el valor de SNR umbral elegido), y que suele referirse como régimen de alta SNR, es posible aproximar la OP en la forma $\text{OP} \approx G_c(\gamma_{\text{th}}/\bar{\gamma})^{G_d}$ [49]. El parámetro G_c suele denominarse *power offset* o *coding gain*, mientras que el término G_d se refiere a *diversity order* u orden de diversidad. Este último parámetro tiene una gran relevancia, ya que indica la pendiente con la que decae la OP en función de la SNR. Tomando el límite en (3.3), se obtiene:

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{\gamma} \rightarrow \infty} \text{OP}(\gamma_{\text{th}}; \bar{\gamma}, \beta) &= \text{OP}_{\text{asy}}(\gamma_{\text{th}}; \bar{\gamma}, \beta) \\ &= \left(\frac{\gamma_{\text{th}}}{\bar{\gamma} \text{sinc}(1/\beta)} \right)^\beta. \end{aligned} \quad (3.8)$$

En esta expresión, se aprecia cómo el *power offset* viene dado por $G_c = \text{sinc}(1/\beta)^{-\beta}$, mientras que el orden de diversidad de la distribución- \mathcal{L} es $G_d = \beta > 1$. Queda claro que

cuando β crece, la OP (y por tanto, la probabilidad de error) decae mucho más rápido. Esto pone de manifiesto que la severidad del *fading* en canales tipo \mathcal{L} está determinada por el parámetro β .

Capacidad media

La capacidad media normalizada (o eficiencia espectral) se define como [50, (8)]

$$C \text{ [bps/Hz]} = \int_0^{\infty} \log_2(1 + \gamma) f_{\gamma}(\gamma) d\gamma, \quad (3.9)$$

y donde γ indica la SNR instantánea en el receptor, mientras que $f_{\gamma}(\gamma)$ es la PDF de γ . El análisis de la capacidad de sistemas de comunicaciones en canales LL no se ha considerado hasta la fecha.

Sustituyendo (??) en (3.27), la capacidad media queda expresada en forma integral. Gracias a la sencilla forma de la PDF de la distribución- \mathcal{L} , la capacidad puede evaluarse de manera numérica de manera muy eficiente empleando software convencional de cálculo numérico (por ejemplo, empleando la rutina `integral` en MATLAB).

Con la intención de comprender mejor el rol del parámetro β en la capacidad media, empleamos una aproximación asintótica válida en el régimen de alta SNR basada en la técnica asintótica descrita en [51, eq.(8), (9)], y que proporciona una cota inferior muy precisa para la capacidad mediante:

$$C \approx \log_2(\bar{\gamma}) - t, \quad (3.10)$$

y donde el parámetro t puede verse como una pérdida de capacidad respecto al caso en el que no hay *fading*; es decir, pérdida de capacidad con respecto al canal AWGN. El parámetro t puede calcularse a partir de la expresión de los momentos en (3.4) tras algunos cálculos, obteniendo:

$$t = -\log_2(e) \frac{d}{dn} \left. \frac{E\{\gamma^n\}}{\bar{\gamma}^n} \right|_{n=0} \quad (3.11)$$

$$= -\log_2(e) \log(\text{sinc}(1/\beta)), \quad (3.12)$$

y $\log(\cdot)$ es el logaritmo natural (o neperiano). Podemos ver cómo la pérdida de capacidad t crece cuando β decrece; es decir, la capacidad mejora cuando β aumenta. Esto es coherente con las conclusiones obtenidas en el análisis asintótico de la OP, en las que se veía cómo un menor valor de β implicaba unas peores prestaciones.

3.1.4. Evaluación Numérica

A continuación, se incluyen evidencias gráficas como complemento a los análisis teóricos que se han descrito en el apartado anterior. Además de la evaluación de las expresiones teóricas, se incluyen simulaciones de MC para validación adicional de su corrección.

En primer lugar, en la Fig. 3.7 se evalúa la PDF de la distribución- \mathcal{L} para diferentes valores de β , y donde se fija la SNR al valor $\bar{\gamma} = 1$ para mayor simplicidad. Podemos apreciar cómo valores más pequeños de β se corresponden con una PDF con valores más concentrados cerca del origen. Por tanto, los valores bajos de SNR se vuelven más probables cuando β decrece. Por el contrario, cuando β crece puede verse como los valores de la SNR tienden a estar más concentrados en torno al valor medio, que en este caso es $\bar{\gamma} = 1$.

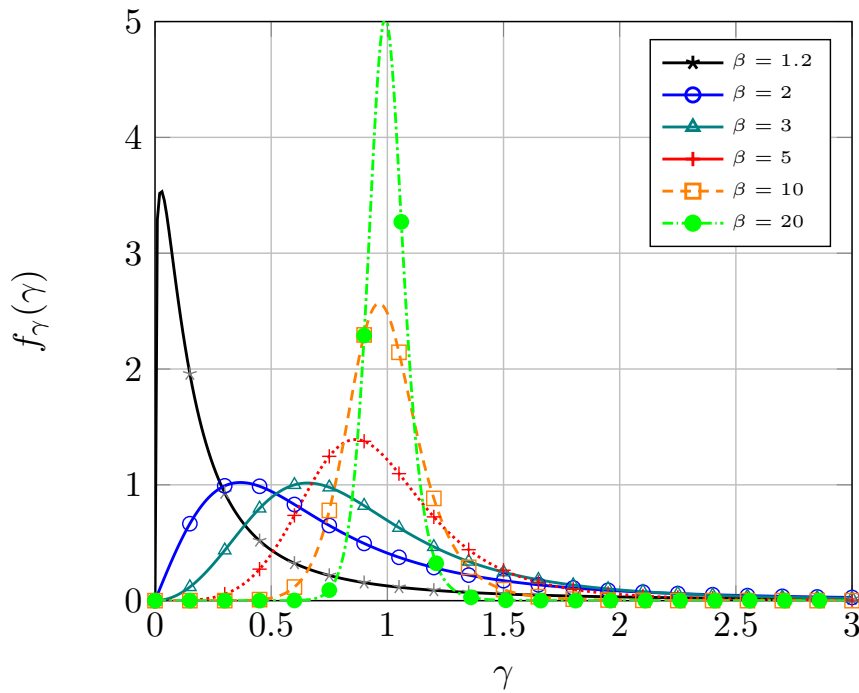


FIGURA 3.1: Función densidad de probabilidad de la SNR instantánea en el receptor en canales con la distribución- \mathcal{L} , para distintos valores de β . El parámetro $\bar{\gamma} = 1$ y por tanto $\alpha = \text{sinc}(1/\beta)$.

En la Fig. 3.8 se representa la métrica AoF en función del parámetro β . Recordar que el momento k -ésimo de la distribución- \mathcal{L} se define solamente para $k < \beta$, lo que implica que el AoF está definido solo para $\beta > 2$. En la figura puede verse que valores pequeños de β se corresponden con valores más altos de AoF, lo que implica una mayor severidad de *fading*. Un aspecto interesante es que $\text{AoF} = 1$ para $\beta \approx 2,7$, es decir, para este valor de β se tiene el mismo AoF que en el canal de Rayleigh. Por tanto, queda patente que la severidad de *fading* en canales que siguen la distribución- \mathcal{L} está determinada por el parámetro β , y permite emular un comportamiento de tipo *hyper-Rayleigh* [52] en el sentido del AoF.

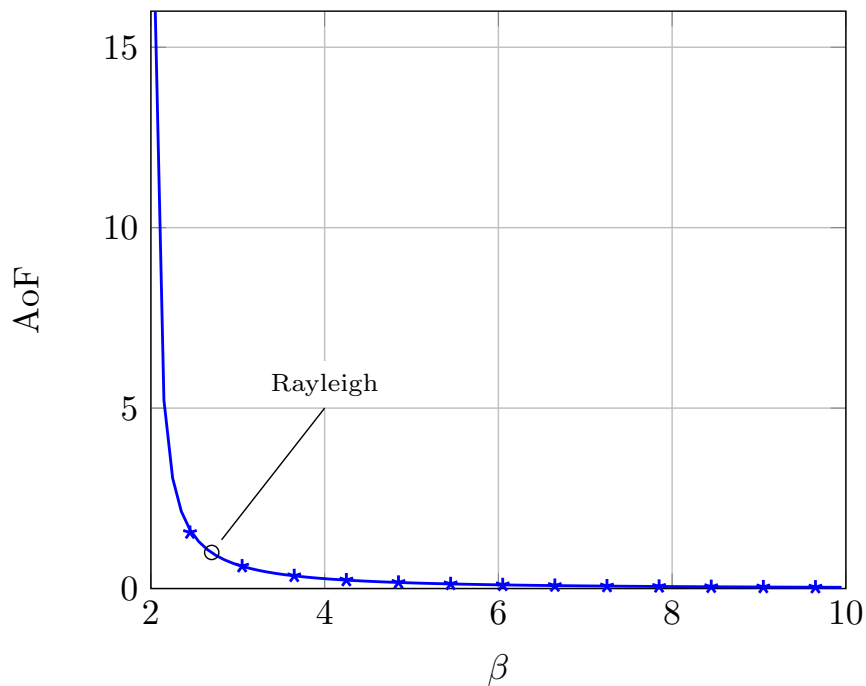


FIGURA 3.2: *Amount of Fading* en canales con distribución- \mathcal{L} en función de β . El caso del canal Rayleigh se incluye como referencia. Las líneas continuas corresponden a la expresión teórica del AoF en (3.18), mientras que los marcadores corresponden a simulaciones de MC.

En la Fig. 3.10 se muestra la evolución de la OP en función de la SNR media, para diferentes valores del parámetro β . El valor de la SNR umbral se establece en $\gamma_{\text{th}} = 1$ (es decir, $\gamma_{\text{th}} = 0$ dB). Puede comprobarse cómo la OP mejora sustancialmente para valores mayores de β , lo que es consistente con lo pronosticado por el análisis asintótico. Concretamente, podemos ver cómo la aproximación de alta SNR para la OP converge a la curva exacta para valores altos de SNR media. Además, se comprueba que la pendiente de las curvas de OP depende en exclusiva del parámetro β . Es interesante destacar que parámetro β que controla la pendiente negativa de la OP tiene la restricción física de ser $\beta > 1$; por tanto, y de acuerdo a la definición hecha en [52], puede concluirse que la distribución- \mathcal{L} -distribution NO muestra comportamiento *hyper-Rayleigh* en el sentido de la OP.

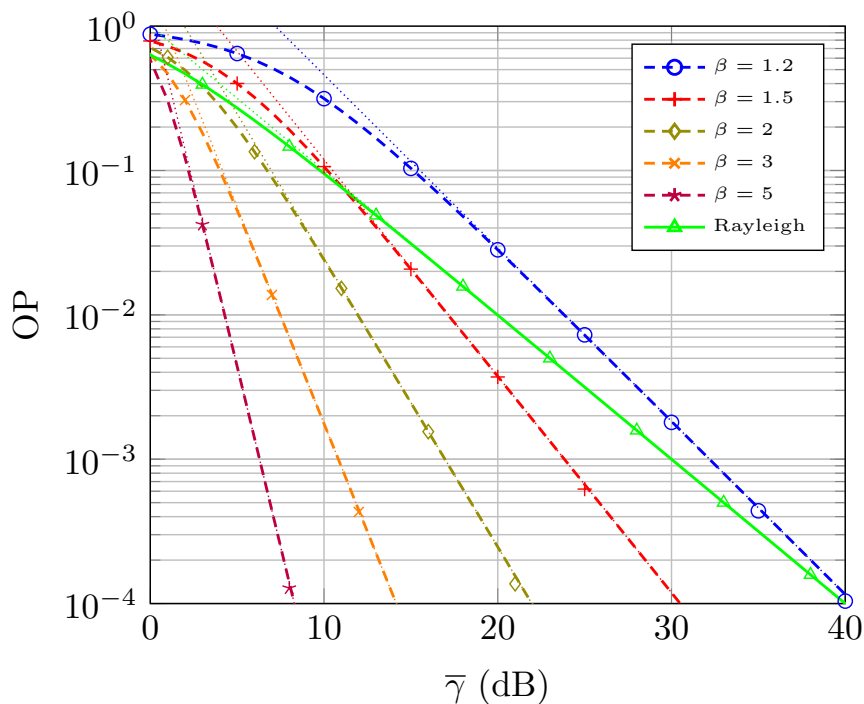


FIGURA 3.3: Probabilidad de *outage* en función de la SNR $\bar{\gamma}$ en canales con distribución- \mathcal{L} , para distintos valores del parámetro β . Las líneas continuas corresponden a las expresiones teóricas en (3.22). Las líneas discontinuas corresponden a las expresiones asintóticas de la OP en (3.23). El caso del canal Rayleigh se incluye como referencia, mientras que los marcadores corresponden a simulaciones de MC.

Por último, en la Fig. 3.12 se evalúa la capacidad media para diferentes valores de β , incluyéndose como casos de referencia tanto el canal sin *fading* (es decir, canal AWGN) con $C = \log_2(1 + \gamma)$, así como el canal Rayleigh. Puede apreciarse cómo la capacidad del canal se reduce cuando β decrece, lo que confirma la intuición sugerida por el análisis asintótico de capacidad llevado a cabo en la sección anterior. Podemos ver cómo para valores muy bajos de β , es posible obtener una capacidad inferior incluso a la del caso Rayleigh. Por tanto, la distribución- \mathcal{L} es capaz de tener un comportamiento *hyper-Rayleigh* en el sentido de la capacidad [52]. Por el contrario, cuando β aumenta, la pérdida de capacidad con relación al caso AWGN (y que es una cota superior estricta debido a la desigualdad de Jensen) se ve reducida de manera notable.

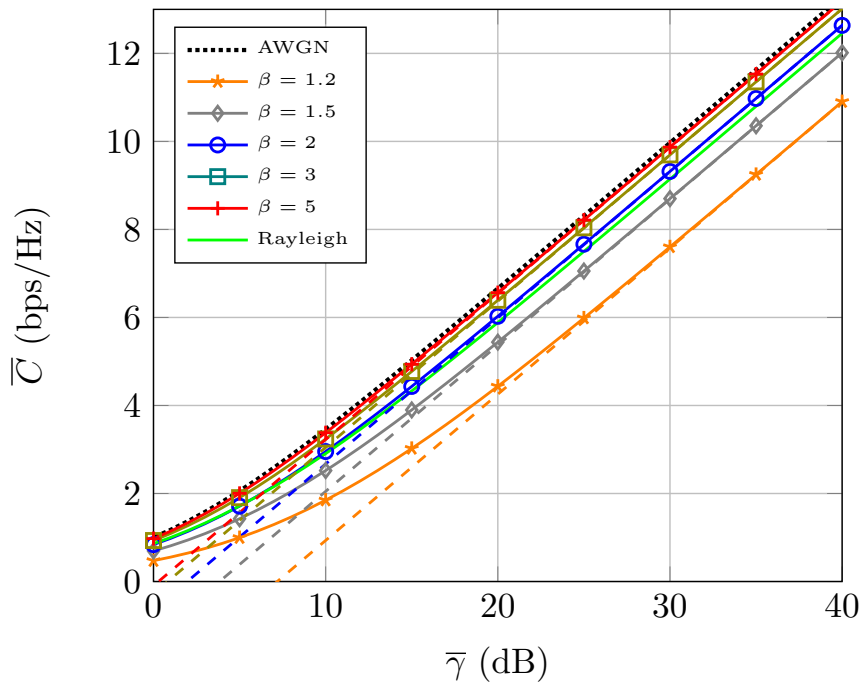


FIGURA 3.4: Capacidad media vs. $\bar{\gamma}$ para canales con distribución- \mathcal{L} , considerando distintos valores de β . Las líneas continuas corresponden a las expresiones teóricas en (3.27). Las líneas discontinuas corresponden a las expresiones asintóticas en (3.28). Los casos de los canales Rayleigh y AWGN se incluyen como referencia, mientras que los marcadores corresponden a simulaciones de MC.

3.1.5. Ajuste a medidas

En esta subsección, se discuten algunas implicaciones relacionadas con las reparametrización propuesta para la distribución LL cuando se emplea para ajuste de canal, y se identifican algunos problemas relacionados con las bases fundamentales de los canales inalámbricos. Uno de los objetivos de la reparametrización de la distribución LL era el conseguir una nueva distribución en la que sus parámetros tuviesen en cuenta las limitaciones físicas de dichos canales, y de manera destacada el hecho de que la potencia recibida es finita. Sin embargo, este ha sido un aspecto que en ocasiones no ha sido tenido en cuenta en la literatura relacionada, cuando se ha usado la distribución LL para ajuste basado en los parámetros α y β .

Por ejemplo, vamos a considerar primero el escenario analizado en [32], en el que se propone usar la distribución LL para modelar la ganancia con errores de alineamiento en sistemas de comunicaciones en ondas milimétricas cuando se emplea un patrón de radiación isotrópico. El motivo fundamental de emplear la distribución LL es su capacidad de modelar comportamiento de tipo *heavy-tail* que no puede ser reproducido cuando se usa la distribución exponencial. Observando con detalle el resultado del ajuste que se incluye en [32, Tabla III], podemos comprobar cómo para todas las combinaciones posibles de números de antenas transmisoras y receptoras (es decir, 4, 16, 64 y 256), el mejor ajuste siempre se conseguía para valores de $\beta < 1$ (específicamente, $\beta \in [0,547, 0,877]$). Aunque ese es precisamente el rango de valores del parámetro β que muestra un comportamiento de tipo *heavy-tail*, también es el rango de valores para los que el primer momento de la distribución no está definido, en este caso la ganancia media con desalineamiento. Por tanto, hay que tener precaución cuando estos valores de parámetros se empleen para realizar análisis de prestaciones, ya que pueden afectar a la definición de la SNR media.

A continuación, se considera el escenario analizado en [41], [42], y en el que se emplea la distribución LL para modelar los desvanecimientos rápidos en comunicaciones aire-tierra en sistemas UAV operando en frecuencias de 1 y 4 GHz. La distribución LL proporciona un mejor ajuste que las distribuciones de Rayleigh y Rice en ambos casos, empleando la parametrización clásica de la distribución LL basada en α y β . En todos los valores analizados, se obtuvieron valores de α cercanos a uno, lo que es consistente con el hecho de que las muestras de señal consideradas tienen una mediana cercana a uno, y el parámetro α corresponde precisamente a la mediana de la distribución LL. Mirando con detalle los ajustes realizados, es posible comprobar cómo el ajuste para los valores de *amplitud* daba los siguientes valores de β , para los escenarios con y sin visión directa: $\beta_{\text{LOS}} = \{1.41/1.12\}$ y $\beta_{\text{NLOS}} = \{1.74/1.38\}$ para las frecuencias de 1/4 GHz, respectivamente. Sin embargo, y como se razona a continuación, estos valores no parecen consistentes con las condiciones previamente discutidas sobre la validez de la distribución LL para modelar canales físicos:

- En primer lugar, cuando tenemos valores de $\beta \in (1, 2)$, el momento de segundo orden de la distribución LL no existe. Esto implica que para la envolvente de señal r se tenga que $\mathbb{E}\{|r|^2\} \rightarrow \infty$ para los rangos obtenidos de β en el ajuste. Esta inconsistencia puede verse también del siguiente modo: si la envolvente de amplitud $r \sim \mathcal{L}(\alpha_{\text{env}}, \beta_{\text{env}})$, entonces su envolvente de potencia (o, de manera equivalente, su SNR) $\gamma \propto r^2 \sim \mathcal{L}(\alpha_{\text{pow}}, \beta_{\text{pow}})$, con $\alpha_{\text{pow}} = \alpha_{\text{env}}^2$ y $\beta_{\text{pow}} = \beta_{\text{env}}/2$ [38]. Por tanto, la condición $\beta_{\text{pow}} = \beta_{\text{env}}/2 > 1$ debe cumplirse, lo que implica que $\beta_{\text{env}} > 2$ es un requisito para hacer ajustes de envolventes de amplitud.
- En segundo lugar, para los escenarios que se están considerando, cabría esperar que los escenarios tipo LOS estuviesen asociados a una menor severidad del *fading*

que los NLOS, así como que para frecuencias superiores se experimentase también un *fading* menos severo debido a la menor importancia relativa de las componentes difusas en relación a las de visión directa. Los valores de ajuste para β incluidos en [41] parecen incorrectos, por lo que se ha procedido a rehacer el ajuste sobre las CDFs empíricas disponibles en dicho artículo empleando la parametrización $\alpha - \beta$. Los valores correctos de β en estos casos son $\beta_{\text{LOS}} = \{6.677/19.9\}$ y $\beta_{\text{NLOS}} = \{4.244/9.311\}$ para las frecuencias de 1/4 GHz, respectivamente. Con ellos, se confirma que un mayor valor de β se corresponde con un escenario más suave en cuanto a *fading*. Tal y como se indica en [41], los valores estimados para el parámetro α son cercanos a 1 en todos los casos.

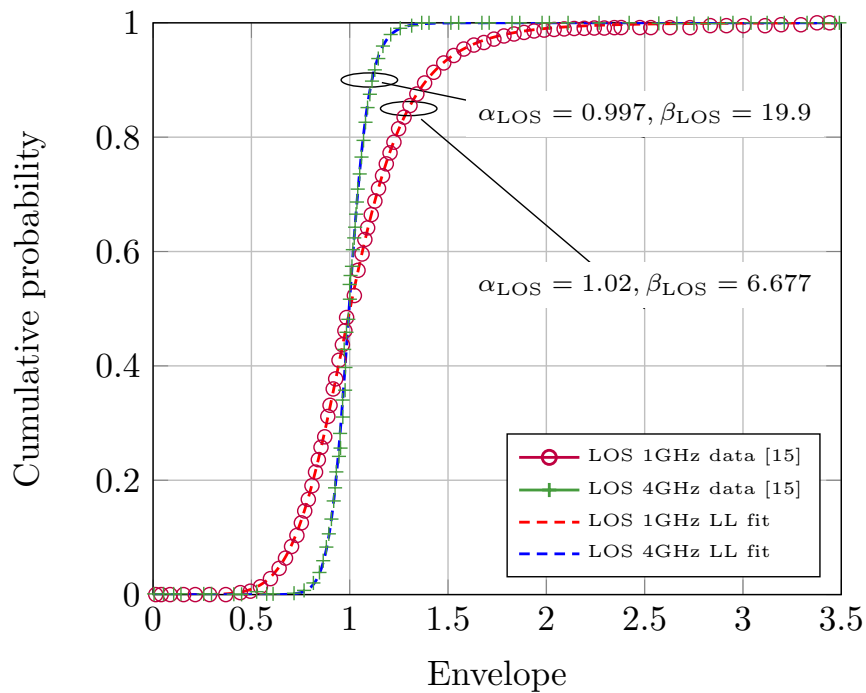


FIGURA 3.5: Distribuciones estadísticas del *fading* rápido en canales aire-tierra en sistemas UAV a frecuencias de 1 y 4 GHz, en condiciones de visión directa (LOS). Las CDF empíricas se han extraído de [41], mientras que los valores de ajuste corregidos para la distribución LL se muestran en la figura. Los valores de bondad de ajuste (goodness-of-fit= son $\text{RMSE}_{1\text{GHz}} = 3,92e - 3$ y $\text{RMSE}_{4\text{GHz}} = 1,1e - 2$.

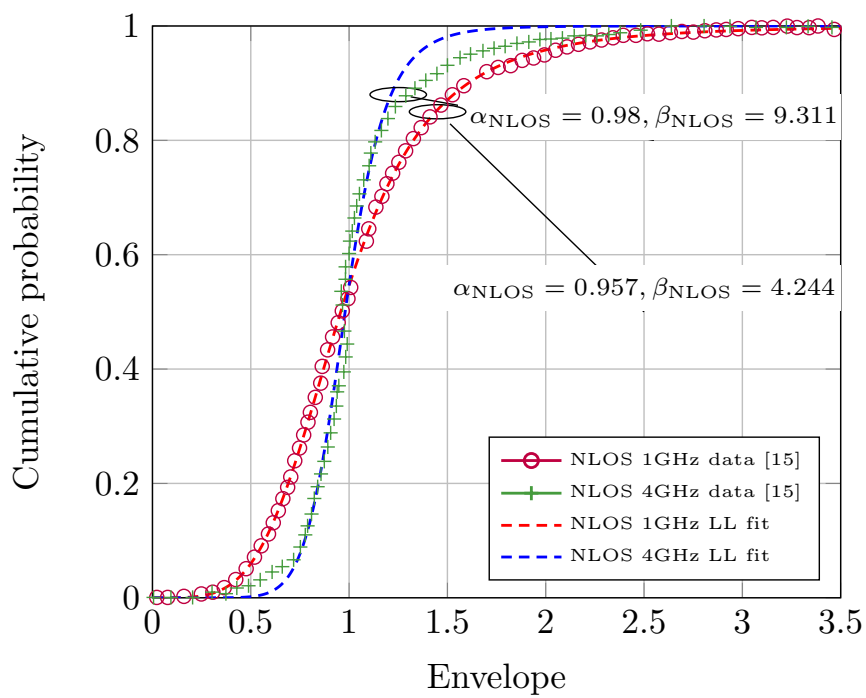


FIGURA 3.6: Distribuciones estadísticas del *fading* rápido en canales aire-tierra en sistemas UAV a frecuencias de 1 y 4 GHz, en condiciones sin visión directa (NLOS). Las CDF empíricas se han extraído de [41], mientras que los valores de ajuste corregidos para la distribución LL se muestran en la figura. Los valores de bondad de ajuste (goodness-of-fit= son $\text{RMSE}_{1\text{GHz}} = 4,61e - 3$ and $\text{RMSE}_{4\text{GHz}} = 3,71e - 2$

3.1.6. Conclusiones

En este apartado, se ha presentado la distribución- \mathcal{L} como una reformulación de la distribución LL, adecuada para aplicaciones de modelado de canal inalámbrico. Sus estadísticos fundamentales se expresan de manera sencilla, lo que hace que puedan emplearse para análisis de prestaciones de sistemas de comunicaciones. Un ejemplo se encuentra en la reciente publicación en [53]. Además, se han puesto de manifiesto algunos problemas prácticos asociados al uso de la distribución LL para ajuste de canales inalámbricos, evidenciando algunas inconsistencias detectadas en la literatura. Se ha establecido el papel fundamental del parámetro β en la severidad de los desvanecimientos, y se ha demostrado que la distribución- \mathcal{L} puede modelar condiciones de propagación más severas que el canal Rayleigh, clasificándose dentro de la categoría *strong hyper-Rayleigh* definida en [52].

3.2. Canales Lomax

3.2.1. Introducción

Las señales de radio que se emplean para transmitir información experimentan numerosos efectos al atravesar el medio inalámbrico y que incluyen atenuación, retardo, dispersión o difracción, entre otros. La caracterización conjunta de los efectos sobre la señal de información suele conocerse como modelado de canal. Aunque un modelo exacto para estos canales es extremadamente complicado debido a la complejidad del problema subyacente (formulado mediante las ecuaciones de Maxwell y las leyes electromagnéticas [54]), existen diversos modelos simplificados que se usan ampliamente en la literatura. Este es el caso, por ejemplo, de los modelos Gaussianos como los de Rayleigh y Rice [55], y que se inspiran en el teorema del límite central debido a la recepción de un elevado número de ondas reflejadas en los *scatterers* del entorno.

Sin embargo, debido a que la propagación de las ondas de radio es mucho más sofisticada que lo que dichos modelos simplificados pueden capturar, existen otros modelos alternativos para canales inalámbricos que son más completos, aunque a la vez más complicados matemáticamente [4], [12], [13], [19], [34], [35]. Las referencias anteriormente expuestas contemplan distribuciones que incorporan efectos de propagación adicionales como *clustering*, fluctuación de las componentes de visión directa, o incluso no linealidades. En otros casos, la elección de una distribución determinada obedece a calidad en el ajuste a datos experimentales, o incluso a razones de simplicidad matemática. Podemos encontrar varios ejemplos de distribuciones ampliamente usadas en el ámbito de la estadística y propuestas para su uso en modelado de canales inalámbricos, como son los casos de Weibull [20], [36], inverse-gamma [21] o Log-Logística [22].

Mirando con más profundidad en la literatura relacionada, encontramos que la distribución de Lomax² ha sido considerada por algunos autores en el ámbito del modelado

²relacionada con la distribución de Pareto de Tipo II.

de canal inalámbrico [30], [31]. A primera vista, el uso de esta distribución puede parecer poco convencional desde un punto de vista físico. Sin embargo, los autores en [31] conectan la distribución de Lomax con una señal compleja subyacente que se distribuye de acuerdo a una distribución conjunta de tipo student- T , y en la que sus partes real e imaginaria están incorreladas y se distribuyen de acuerdo a una distribución de Lomax. En otro contexto, la distribución de Lomax aparece a la hora de caracterizar la distribución de la potencia recibida en canales Rayleigh, en los que existe cierta incertidumbre paramétrica [56]. Esta puede deberse a una estimación imperfecta debido al efecto de tener un número finito y reducido de muestras, algo habitual en entornos tipo comunicaciones ultra-fiables y de baja latencia (URLLC). En la literatura de comunicaciones, la distribución de Lomax se ha empleado en diversos escenarios, y que incluyen distribución de contenidos en comunicaciones D2D [57], [58], análisis de prestaciones en presencia de interferencia [59], medidas de espectro cooperativas en redes inalámbricas cognitivas [60], y otros muchos [61]-[63].

Motivados por todas estas consideraciones, nuestro objetivo es formalizar de manera analítica el uso de la distribución de Lomax como una alternativa para el modelado del *fading* en sistemas de comunicaciones inalámbricas. Como se verá más tarde, esto requiere una redefinición de sus parámetros de manera que puedan incorporarse adecuadamente restricciones físicas como la existencia de su momento de primer orden (es decir, la potencia media recibida). En adelante, emplearemos la notación distribución- \mathcal{L}_x para referirnos a dicha reparametrización de la distribución de Lomax. Se van a presentar expresiones cerradas para la PDF, CDF y los momentos, así como de otros estadísticos importantes en el dominio de Laplace, tales como la Función Generadora de Momentos (MGF) y la MGF generalizada (GMGF). A modo de ejemplo, se calculan métricas de prestaciones para sistemas de comunicaciones que operan en canales sujetos a la distribución- \mathcal{L}_x , como son la capacidad media y la probabilidad de *outage*. Además, se incluyen métricas adicionales como de probabilidad de error, recepción con diversidad basada en *selection combining* (SC), y modelado de canales tipo *composite*.

3.2.2. Estadísticos

La definición clásica de la distribución de Lomax se hace de acuerdo a la siguiente PDF:

$$f_{\gamma}(\gamma) = \frac{\alpha}{\lambda} \left[1 + \frac{\gamma}{\lambda} \right]^{-(\alpha+1)}, \quad (3.13)$$

y donde $\alpha > 0$ y $\lambda > 0$ son sus parámetros de forma y escala, respectivamente. De igual manera que se hizo con la distribución LL, queremos emplear una formulación de la distribución de Lomax para modelar la SNR instantánea γ , y establecer que la SNR media sea explícitamente un parámetro de la misma. Así, calculando el momento de primer orden empleando (3.13), tenemos que $\bar{\gamma} = \mathbb{E}\{\gamma\} = \frac{\lambda}{\alpha-1}$. Esto nos permite expresar el parámetro de escala como $\lambda = (\alpha - 1)\bar{\gamma}$. Con esta redefinición paramétrica, la PDF de

la distribución- \mathcal{L}_x viene dada por:

$$f_\gamma(\gamma) = \frac{\alpha}{\bar{\gamma}(\alpha-1)} \left[1 + \frac{\gamma}{\bar{\gamma}(\alpha-1)} \right]^{-(\alpha+1)}, \quad (3.14)$$

donde $\bar{\gamma} > 0$ y $\alpha > 1$. Esta expresión se obtiene mediante simple sustitución de λ en (3.13).

Si comparamos (3.14) con (3.13), comprobamos cómo la expresión para la distribución- \mathcal{L}_x solamente es válida para $\alpha > 1$. Esto se debe a que para $\alpha \leq 1$, el momento de primer orden de la distribución de Lomax no está definido. Por tanto, la distribución- \mathcal{L}_x únicamente tiene sentido físico cuando $\alpha > 1$, es decir, cuando la potencia media recibida (o en su caso, la SNR media) toma un valor finito. Teniendo esto en cuenta, la CDF de la distribución- \mathcal{L}_x puede expresarse como:

$$F_\gamma(\gamma; \alpha, \bar{\gamma}) = F_\gamma(\gamma) = 1 - \left[1 + \frac{\gamma}{\bar{\gamma}(\alpha-1)} \right]^{-\alpha}, \quad (3.15)$$

lo que se obtiene por integración directa de (3.14).

Un aspecto interesante es que, gracias a esta redefinición de la distribución de Lomax, se puede demostrar fácilmente la convergencia en distribución a la distribución exponencial. Tomando sobre la CDF el límite cuando α tiende a infinito, se tiene:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} 1 - \left[1 + \frac{\gamma}{\bar{\gamma}(\alpha-1)} \right]^{-\alpha} = 1 - e^{-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}}. \quad (3.16)$$

De igual modo, es posible encontrar una expresión cerrada para los momentos de orden k de la distribución- \mathcal{L}_x :

$$\mathbb{E} \{ \gamma^k \} = \bar{\gamma}^k \frac{(\alpha-1)^k \Gamma(\alpha-k) \Gamma(1+k)}{\Gamma(\alpha)}, \quad (3.17)$$

donde nuevamente $\bar{\gamma} > 0$ y $\alpha > k$, y $\Gamma(\cdot)$ es la función Gamma [64, eq. (8.31)].

Con la expresión de los momentos, y haciendo uso de las propiedades de la función Gamma $\Gamma(z+1)z\Gamma(z)$, se puede obtener un expresión simplificada para el AoF [48]:

$$\text{AoF} = \frac{\mathbb{E}[\gamma^2]}{\bar{\gamma}^2} - 1 = \frac{2(\alpha-1)^2 \Gamma(\alpha-2)}{\Gamma(\alpha)} - 1 = \frac{\alpha}{\alpha-2}, \quad (3.18)$$

válida para $\alpha > 2$.

Un aspecto diferenciador de la distribución- \mathcal{L}_x es que su CDF inversa (o función cuantil) puede expresarse de manera cerrada. Esto permite la generación de secuencias incorreladas de variables aleatorias mediante el método de la transformación inversa.

Despejando γ en (3.15), se obtiene:

$$F_{\gamma}^{-1}(p; \bar{\gamma}, \alpha) = \bar{\gamma}(\alpha - 1) \left[(1 - p)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1 \right], \quad (3.19)$$

y donde $0 \leq p \leq 1$ indica un valor de probabilidad.

Estos resultados permiten una caracterización completa de la distribución- \mathcal{L}_x en términos de sus estadísticos de primer orden. Sin embargo, y a diferencia del caso de la distribución LL, es posible caracterizar esta distribución en el dominio de Laplace, calculando métricas adicionales como la MGF y su forma generalizada GMGF. Para el caso de esta última, es posible encontrar una expresión cerrada de la misma como:

$$M_{\gamma}^n(s) \triangleq \mathbb{E}\{\gamma^n e^{s\gamma}\} = \alpha(\alpha - 1)^n \bar{\gamma}^n U(n + 1, n + 1 - \alpha, s(1 - \alpha)\bar{\gamma}), \quad (3.20)$$

usando la integral que aparece en [64, pág. 9.211.4], y donde $U(\cdot, \cdot, \cdot)$ es la función confluyente hipergeométrica de Tricomi [64, Eq. (9.211)].

La GMGF aparece de manera natural en muchos escenarios de interés en comunicaciones, a la hora de calcular métricas de probabilidad o de capacidad. Algunos ejemplos son: cálculo de la probabilidad de *outage* en escenarios limitados por interferencia [65], [66], seguridad en capa física [67], detección de energía [68], análisis de capacidad [69] o modelado de canales tipo *composite* [21]. Además, esta función incluye como caso particular la MGF convencional para $n = 0$, dando lugar a la siguiente expresión:

$$M_{\gamma}(s) = \alpha U(1, 1 - \alpha, s(1 - \alpha)\bar{\gamma}). \quad (3.21)$$

Esto aporta beneficios adicionales desde una perspectiva de análisis de rendimiento, ya que varias métricas de rendimiento en comunicaciones inalámbricas se expresan en términos de la función generadora de momentos MGF y sus generalizaciones [48].

Ahora comparamos la distribución \mathcal{L}_x con otras distribuciones utilizadas en la literatura para modelar canales inalámbricos. Para una comparación justa, solo consideramos los casos de distribuciones con un parámetro de forma [9], [20], [22], [70], [71]. En la Tabla 3.1, se presentan cuáles de las funciones estadísticas relevantes están disponibles en forma cerrada, tomando la convención habitual en la literatura que considera como *closed-form* como aquella que incluye un número finito de funciones bien conocidas [72]. Esto incluye clásicamente funciones especiales como las funciones de Bessel o las funciones hipergeométricas, pero no funciones más complicadas como las funciones de Meijer-G o Fox-H. Observamos que uno de los beneficios clave de la distribución de tipo \mathcal{L}_x es que todas las cinco métricas estadísticas admiten una expresión en forma cerrada. Esto solamente ocurre con la distribución Nakagami- m , si incluimos la implementación numérica de su ICDF disponible en MATLAB o Mathematica dentro de la definición en forma cerrada (por eso la entrada correspondiente en la 3.1 está marcada con un asterisco). Incluso en distribuciones por lo demás tratables como las distribuciones Rician y Folded-Normal, la

| Fading model | Closed-form statistics | | | | |
|------------------|------------------------|-----|-----|------|------|
| | PDF | CDF | MGF | GMGF | ICDF |
| Nakagami- m | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | * |
| Rician | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✗ |
| Weibull | ✓ | ✓ | ✗ | ✗ | ✓ |
| Hoyt | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✗ |
| Inverse Gaussian | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✗ |
| Folded-normal | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✗ |
| Log-logistic | ✓ | ✓ | ✗ | ✗ | ✓ |
| Lomax | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |

TABLA 3.1: Comparación entre modelos de fading .

inversión de la función de distribución acumulativa debe implementarse numéricamente [73].

3.2.3. Aplicaciones

Con las definiciones y expresiones anteriores en la Sección 3, es posible realizar un análisis de rendimiento de sistemas de comunicación inalámbrica que operan bajo canales de atenuación tipo \mathcal{L}_x . A continuación, analizaremos varios escenarios que incluyen métricas de rendimiento relevantes en comunicaciones inalámbricas. Estas incluyen la probabilidad de corte (OP), la capacidad del canal, el análisis de la tasa de error y el modelo de atenuación compuesta, denominado comúnmente como *composite fading*. También se evalúa el efecto de la diversidad bajo atenuación tipo \mathcal{L}_x , considerando el caso de la estrategia de Combinación por Selección (SC).

Probabilidad de Corte

Tal y como se indicó en la sección 3.1.3, la OP se define como la probabilidad de que la SNR esté por debajo de cierto umbral, es decir,

$$\text{OP}(\gamma_{\text{th}}; \bar{\gamma}, \alpha) \triangleq \Pr\{\gamma < \gamma_{\text{th}}\} = F_{\gamma}(\gamma_{\text{th}}). \quad (3.22)$$

Por lo tanto, puede evaluarse directamente a partir de la CDF en (3.15). De igual manera, para valores suficientemente grandes del SNR promedio, y siempre que la OP admite una aproximación ajustada de tipo ley de potencias; es posible expresar $\text{OP} \approx G_c(\gamma_{\text{th}}/\bar{\gamma})^{G_d}$ [49] bajo ciertas condiciones. Recordar que G_c se conoce como *power offset*, mientras que a G_d se refiere como *diversity order*. Tomando un límite en (3.15), se puede derivar dicha aproximación para el caso del fading en \mathcal{L}_x :

$$\lim_{\bar{\gamma} \rightarrow \infty} \text{OP}(\gamma_{\text{th}}; \bar{\gamma}, \alpha) = \text{OP}_{\text{asy}}(\gamma_{\text{th}}; \bar{\gamma}, \alpha) = \frac{\alpha \gamma_{\text{th}}}{\bar{\gamma}(\alpha - 1)}. \quad (3.23)$$

Se puede identificar $G_c = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$ como el power offset, y $G_d = 1$ como el orden de diversidad de la distribución \mathcal{L}_x . A partir de (3.23), se puede ver fácilmente que a medida

que α aumenta (es decir, a medida que disminuye la severidad del desvanecimiento), la OP se reduce.

El análisis de la OP puede extenderse directamente al caso de la recepción de diversidad. Para este propósito, consideramos la estrategia de bajo coste SC, en la cual un receptor de múltiples ramas equipado con L antenas de recepción elige aquella con la mayor relación SNR para la recepción. Matemáticamente, esto se puede expresar como:

$$\gamma_{SC} = \max_k (\gamma_k), \quad k = 1 \dots L. \quad (3.24)$$

Por lo tanto, la OP para la estrategia SC se expresa como [48]

$$\text{OP}_{SC}(\gamma_{th}; \bar{\gamma}, \alpha) = F_{\gamma_{SC}}(\gamma_{th}) = (F_{\gamma}(\gamma_{th}))^L, \quad (3.25)$$

donde se asume, por simplicidad, el caso con ramas de recepción independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.). La función asintótica de la CDF para el caso SC también se puede derivar como:

$$\lim_{\bar{\gamma} \rightarrow \infty} \text{OP}_{SC}(\gamma_{th}; \bar{\gamma}, \alpha) = \left(\frac{\alpha \gamma}{\bar{\gamma}(\alpha - 1)} \right)^L. \quad (3.26)$$

Se observa cómo incluso al utilizar una estrategia de recepción simple como SC, se puede lograr una diversidad completa, ya que la orden de diversidad aumenta con L .

Capacidad de Canal

Por definición, la capacidad de canal promedio normalizada [50] se expresa como:

$$\bar{C} [\text{bps/Hz}] = \int_0^{\infty} \log_2(1 + \gamma) f_{\gamma}(\gamma) d\gamma. \quad (3.27)$$

Ahora, reemplazando (3.14) en (3.27), se puede evaluar la capacidad promedio. Una expresión analítica en términos de funciones hipergeométricas del tipo ${}_3F_2(\cdot)$ se puede obtener siguiendo pasos similares a los de [74]. También es posible evaluarla de manera eficiente en forma numérica mediante herramientas de software convencionales (por ejemplo, la función `integral` de MATLAB). Ahora, de manera similar al caso de la OP, también es posible obtener una aproximación simple válida para valores suficientemente grandes de la SNR. Específicamente, utilizando la formulación en [51, ecuaciones (8), (9)], se obtiene una cota inferior ajustada para la capacidad promedio como:

$$\bar{C} \approx \log_2(\bar{\gamma}) - t, \quad (3.28)$$

con

$$t = -\log_2(e) \frac{d}{dn} \left. \frac{E\{\gamma^n\}}{\bar{\gamma}^n} \right|_{n=0} \quad (3.29)$$

$$= -\log_2(e) (\log(\alpha - 1) - \gamma_e - \Psi(\alpha)), \quad (3.30)$$

y donde $\gamma_e = 0,57721 \dots$ es la constante de Euler-Mascheroni, y $\Psi(\cdot)$ es la función Digamma [75, eq. 6.1.3]. El parámetro t se puede calcular a partir de (3.17) utilizando la regla de la cadena para derivadas, y tiene dimensiones de capacidad. Por lo tanto, t representa cierta pérdida de rendimiento con respecto al caso sin *fading* (ver Notación en la publicación A.3 para más detalles), para el cual $t = 0$. Al igual que con la OP, un valor mayor de α se traduce en una mayor capacidad.

El caso de la estrategia SC también puede considerarse aquí, observando que la función PDF bajo SC se puede expresar como:

$$f_{\gamma_{SC}}(\gamma) = L f_{\gamma}(\gamma) F_{\gamma}(\gamma)^{L-1}. \quad (3.31)$$

la capacidad a través de (3.27) puede ser evaluada.

Probabilidad de Error de Símbolo

Una de las aplicaciones más populares de la MGF es la evaluación de las probabilidades de error en presencia de desvanecimientos. El enfoque de la MGF propuesto por Simon y Alouini para el análisis de la probabilidad de error de símbolo (SEP) [48] es uno de los pilares de la teoría de la comunicación moderna. Con este enfoque, la SEP de prácticamente todos los esquemas de modulación modernos se puede expresar en términos de la MGF de la distribución de *fading* subyacente.

Como ejemplo de aplicación simple, para el caso específico de la modulación binaria por desplazamiento diferencial de fase (BDPSK), la SEP bajo devanecimientos de tipo \mathcal{L}_x se puede expresar de forma cerrada utilizando (3.21) como:

$$\text{SEP}(\bar{\gamma}) = \frac{1}{2} M_{\gamma}(-1) = \alpha U(1, 1 - \alpha, (\alpha - 1)\bar{\gamma}). \quad (3.32)$$

Modelado de fading compuesto

Hasta ahora, solo hemos considerado el caso de utilizar la distribución \mathcal{L}_x para modelar el *fast-fading*. En muchos casos, la potencia promedio recibida experimenta otro tipo de fluctuaciones causadas por efectos macroscópicos debidos a obstáculos. A menudo, estos se conocen como atenuación por ensombrecimiento, o simplemente *shadowing*, y ocurren en escalas de tiempo diferentes en comparación con el desvanecimiento rápido. En esta situación, la potencia recibida instantánea se puede reformular como:

$$W = P_T \bar{S}_T S G, \quad (3.33)$$

donde S es un proceso aleatorio independiente de $G = |h|^2$ encargado de modelar el efecto del *shadowing*. Por conveniencia, se define S como una variable aleatoria normalizada, y su efecto promedio agregado se captura mediante \bar{S}_T . Por lo tanto, los efectos conjuntos de S y G sobre la variable aleatoria W suelen denominarse *desvanecimiento compuesto*,

donde la operación de composición se identifica con un producto de variables aleatorias independientes.

Clásicamente, se asume que S sigue una distribución log-normal. Sin embargo, debido a la mala tratabilidad analítica de dicha distribución, se han propuesto las distribuciones gamma [76] e inversa-gamma [21] como buenas candidatas para reemplazar la distribución log-normal para modelar la atenuación por *shadowing*. En el caso de esta última, se demostró recientemente en esta última referencia que la PDF de W se puede expresar en términos de la GMGF de la distribución de fading subyacente (es decir, de G), como:

$$f_W(u) = \frac{\bar{W}^m (m-1)^m}{u^{m+1} \Gamma(m)} M_G^m \left(\frac{(1-m)\bar{W}}{u} \right), \quad (3.34)$$

donde $m \in \mathbb{R}^+$, $m > 1$ es el parámetro de forma de la distribución inversa-gamma, y $\bar{W} = P_T \bar{S}_T$. Por lo tanto, la caracterización compacta de la distribución \mathcal{L}_x en el dominio de Laplace proporciona una expresión en forma cerrada para (3.34) a través de (3.20).

3.2.4. Evaluación Numérica

En esta sección, evaluamos algunas de las métricas de rendimiento previamente derivadas. Cuando sea necesario, se han incluido simulaciones de Monte Carlo (MC) como una verificación para validar las expresiones teóricas. En diferentes instancias, se ha incluido el caso de desvanecimiento Rayleigh con fines de referencia.

Estadísticos de la distribución Lomax

Primero, evaluamos en la Figura 3.7 la PDF de la distribución \mathcal{L}_x para varios valores de α . El parámetro $\bar{\gamma}$ se establece en uno, por simplicidad. Se observa que para valores grandes de α (es decir, desvanecimientos más suaves), la PDF de \mathcal{L}_x tiende a comportarse de manera similar a la distribución exponencial (es decir, la distribución de la SNR bajo desvanecimiento tipo Rayleigh). Por el contrario, a medida que α se reduce (es decir, mayor severidad de atenuación), la probabilidad de valores más bajos de SNR aumenta.

En la Figura 3.8, se representa el AoF en función del parámetro α . Recordemos que la AoF está definida solo para $\alpha > 2$. Confirmamos el papel del parámetro α para capturar la severidad del desvanecimiento, ya que la AoF es inversamente proporcional a α . Se observa que, para valores finitos de α , el AoF para el fading \mathcal{L}_x siempre es mayor que el del caso de Rayleigh. Por lo tanto, esto implica que la distribución \mathcal{L}_x es de tipo hyper-Rayleigh en cuanto la AoF [52].

En la Figura 3.9, se confirma la validez de la expresión de la GMGF en 3.20. Se observa que dicha GMGF no está limitada solo a valores enteros de los parámetros α y/o n , como es en ocasiones el caso en otras distribuciones [65]. Vemos cómo, para un α dado y un s negativo más grande, la evaluación de la GMGF produce un valor más pequeño a medida que n crece. Esto se traduce en un valor más pequeño de una medida de probabilidad, por ejemplo, una probabilidad de error más pequeña. Se obtiene una conclusión similar para

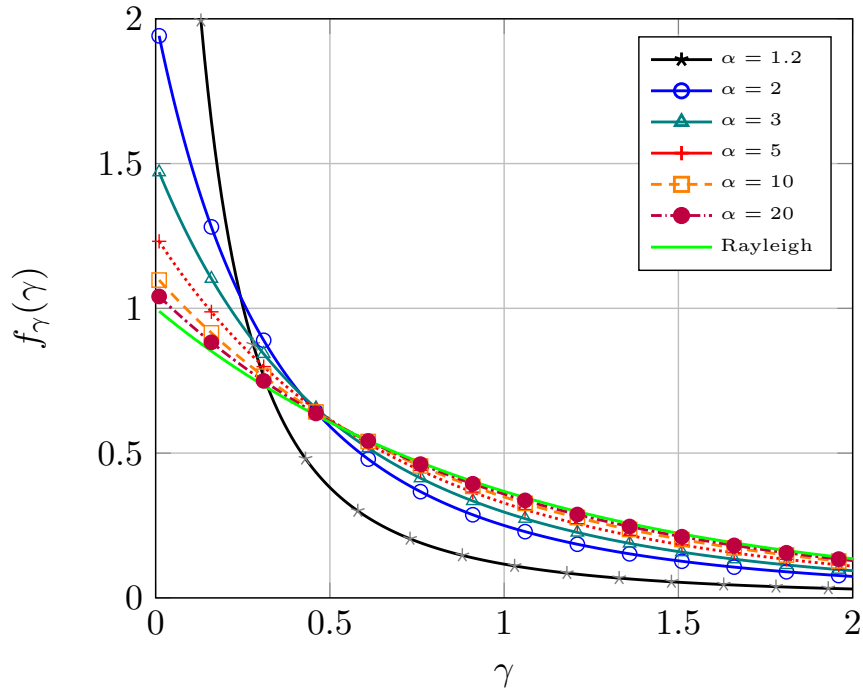


FIGURA 3.7: \mathcal{L}_x PDF para diferentes valores de α . El caso de fading Rayleigh es usado para fines de comparación (línea verde sólida). Marcas representan las simulaciones MC.

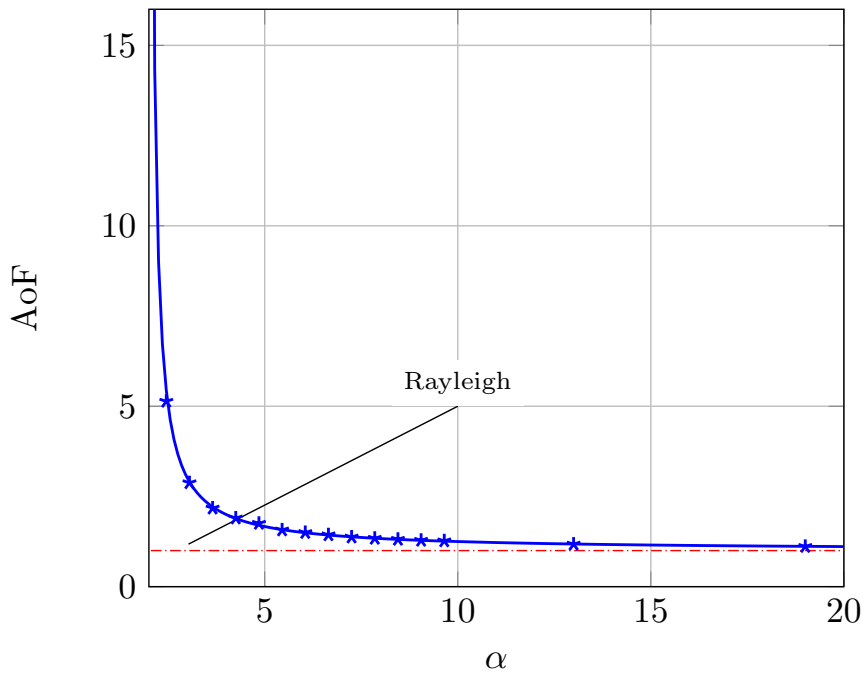


FIGURA 3.8: \mathcal{L}_x AoF para diferentes valores de α . El caso de fading Rayleigh es usado para fines de comparación (línea roja discontinua). Marcas representan las simulaciones MC.

un n fijo a medida que α crece (es decir, a medida que la severidad del desvanecimiento disminuye).

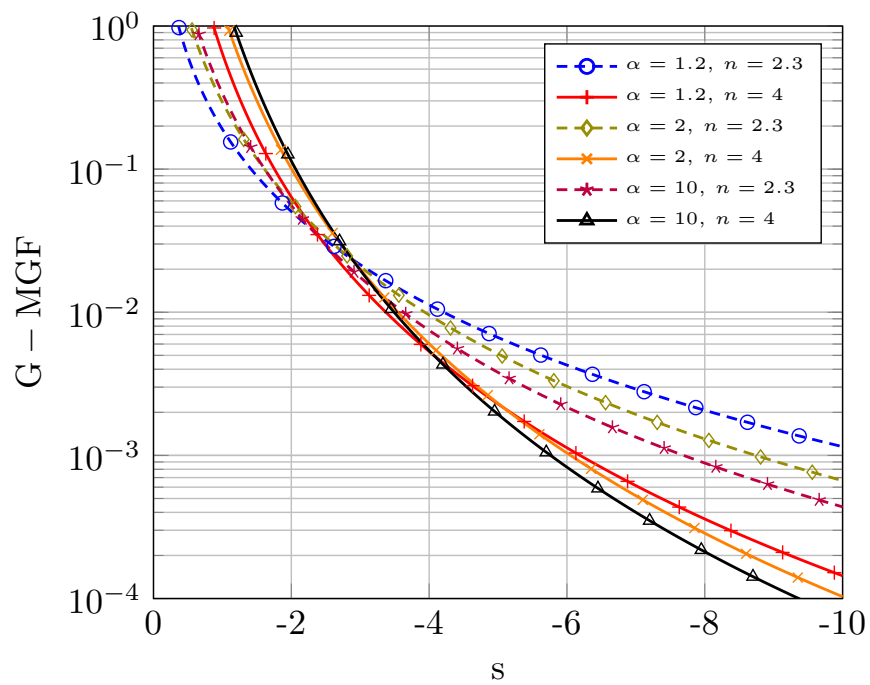


FIGURA 3.9: \mathcal{L}_x GMGF para diferentes valores de α y n , como una función de s .
Marcas representan las simulaciones MC.

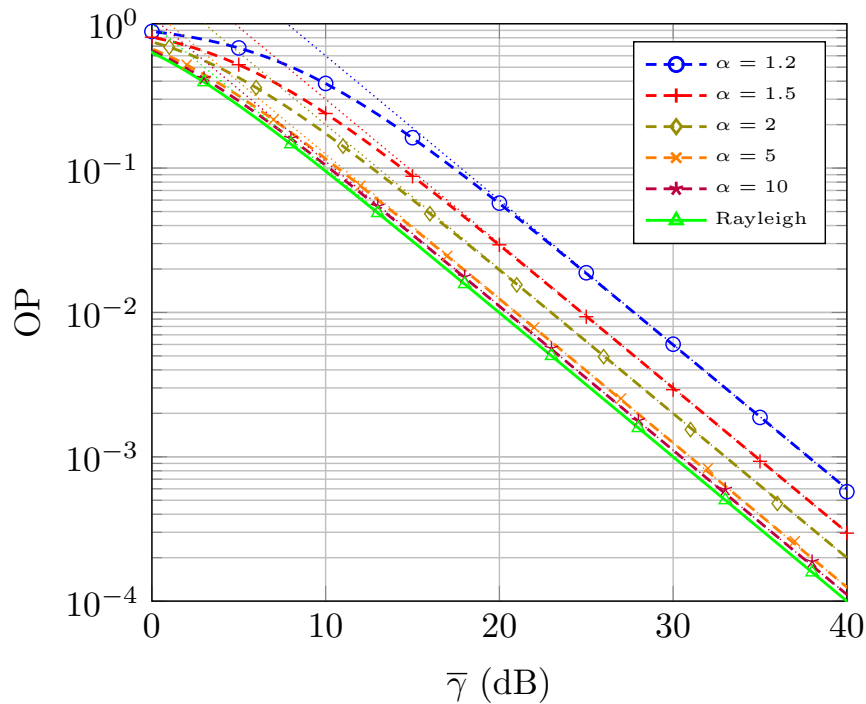


FIGURA 3.10: OP vs. $\bar{\gamma}$ bajo fading \mathcal{L}_x para diferentes valores de α . El caso fading Rayleigh es incluido con fines de comparación. Líneas cortadas corresponden a expresiones asintóticas en ec. (13).

Probabilidad de Corte

En la Figura 3.10, se estudia la OP bajo fading \mathcal{L}_x , considerando nuevamente diferentes valores del parámetro α . Primero, consideramos el caso de recepción de una sola rama, y establecemos el umbral $\gamma_{th} = 1$ (es decir, 0 dB). Observamos que para valores mayores de α , la OP mejora (como confirma la teoría). El caso de Rayleigh sirve como límite inferior de rendimiento para valores suficientemente grandes de α ; por lo tanto, la distribución \mathcal{L}_x también es hyper-Rayleigh en el sentido de la OP [52]. También observamos que la OP asintótica coincide estrechamente con la exacta en el régimen de alta SNR.

En la Figura 3.11, evaluamos el caso de utilizar un mayor número de ramas de recepción y una estrategia SC. Las líneas sólidas y discontinuas representan los casos de desvanecimientos más suave ($\alpha = 10$) y más severos ($\alpha = 1.2$), respectivamente. Las líneas punteadas indican los valores asintóticos de la OP. Como predice la teoría, el esquema SC logra una diversidad completa, de modo que el decaimiento asintótico es ahora proporcional a L , el número de ramas de recepción.

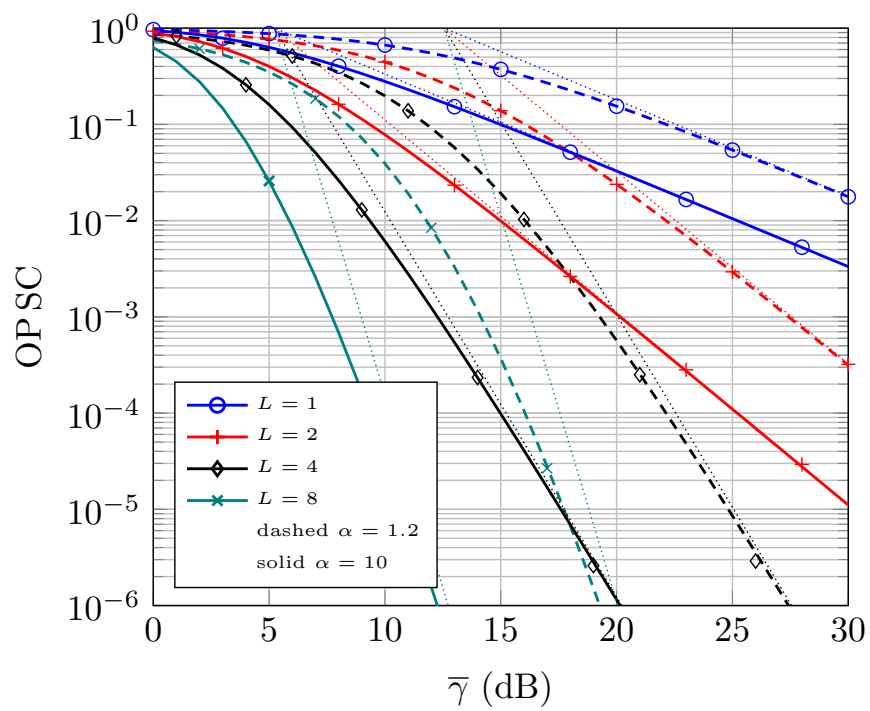


FIGURA 3.11: OP vs. $\bar{\gamma}$ bajo fading \mathcal{L}_x usando SC recepción, para diferentes valores de α and L . Líneas cortadas corresponden a expresiones asintóticas en ec. (16).

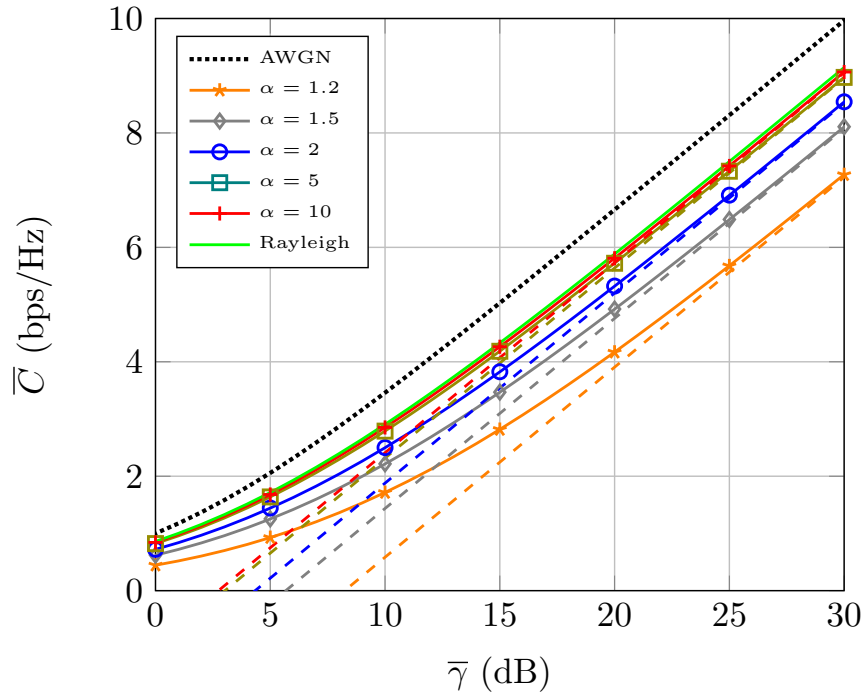


FIGURA 3.12: Capacidad promedio vs. $\bar{\gamma}$ bajo fading \mathcal{L}_x para diferentes valores de α . El caso de fading Rayleigh y no fading (AWGN) son incluidos como referencia. Líneas entrecortadas corresponde a la expresión asintótica in ec. (18).

Capacidad de Canal

Ahora evaluamos la capacidad promedio en la Figura 3.12 para diferentes valores de α , considerando el caso de recepción de una sola rama. Los casos de Rayleigh y AWGN (es decir, sin atenuación) se incluyen con fines de referencia. A medida que α aumenta, la capacidad también crece y tiende a la del caso de Rayleigh, pero siempre permanece muy por debajo de la referencia AWGN. De manera similar, a medida que α disminuye, la capacidad se reduce, mostrando una gran brecha de rendimiento en comparación con el caso de Rayleigh. En todos los casos, observamos que la capacidad bajo desvanecimientos distribuidos como \mathcal{L}_x siempre es inferior a la del caso de Rayleigh para valores finitos de α . Por lo tanto, la distribución \mathcal{L}_x exhibe un comportamiento hyper-Rayleigh en el sentido de la capacidad [52].

En la Figura 3.13, analizamos el aumento de la capacidad debido al uso de la estrategia SC, para diferentes valores de L y α . Para mayor claridad, representamos la métrica $\Delta\bar{C} \triangleq \bar{C}_{SC}(\bar{\gamma}, L) - \bar{C}_{SC}(\bar{\gamma}, 1)$, es decir, la ganancia de capacidad debido al esquema de diversidad, en comparación con el caso sin diversidad. En primer lugar, observamos un comportamiento intuitivo en el que la ganancia de capacidad aumenta con L , independientemente del régimen de SNR. También observamos que la ganancia de capacidad se vuelve más notable en el régimen de alta SNR cuando los desvanecimientos son más severos (es decir, para valores más bajos de α). Esto confirma la importancia de los esquemas de diversidad como contramedidas al *fading*, especialmente en el caso de desvanecimientos profundos.

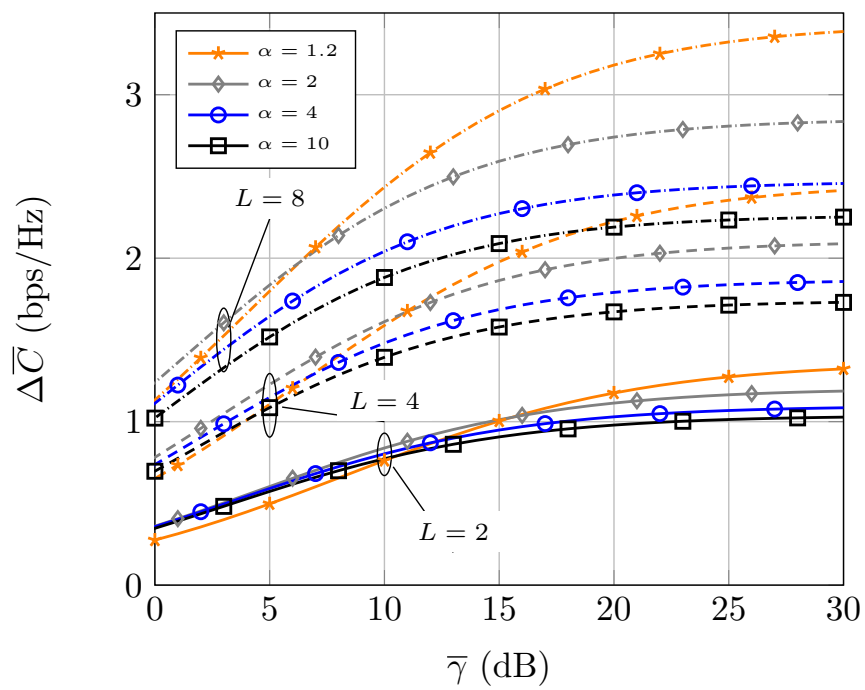


FIGURA 3.13: Ganancia de capacidad $\Delta\bar{C}$ de los esquemas SC vs a la SNR promedio por rama, para diferentes valores de α y L .

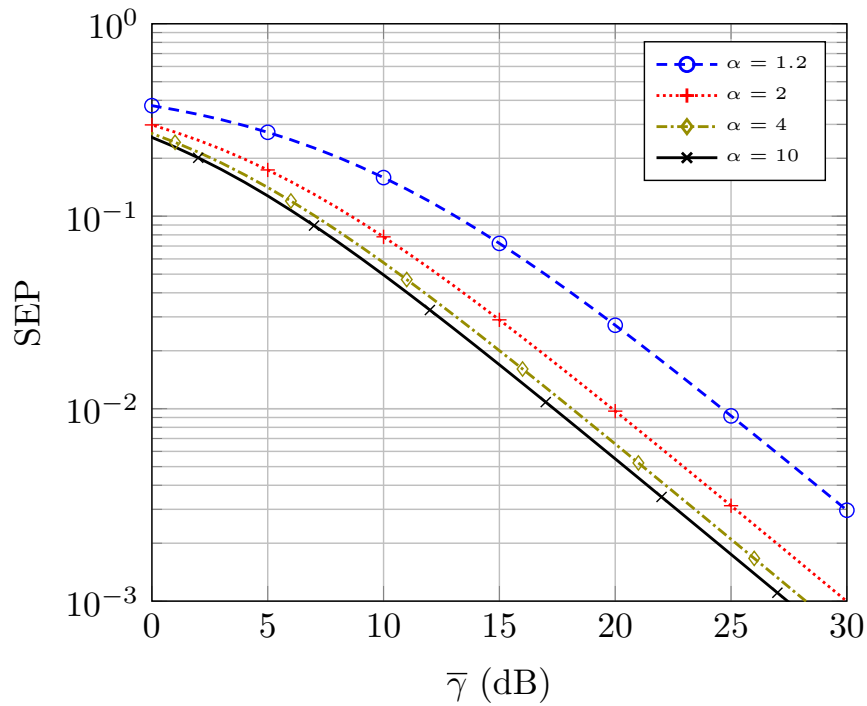


FIGURA 3.14: SEP vs. $\bar{\gamma}$ bajo fading \mathcal{L}_x para diferentes valores de α .

Probabilidad de Error de Símbolo

Es hora de analizar el rendimiento en términos de errores bajo desvanecimientos distribuidos \mathcal{L}_x . Como se describe en la Sección 3.2.3, utilizamos el caso de DPSK binario con fines ejemplares. En la Figura 3.14, representamos la Probabilidad de Error de Símbolo (en este caso, también coincidente con la probabilidad de error de bit) para diferentes valores de α , mediante la evaluación directa de (3.32). Observamos una tendencia similar a la de la Figura 3.10, es decir, la probabilidad de error es mayor a medida que α se reduce, y decae con una pendiente unitaria independientemente de α .

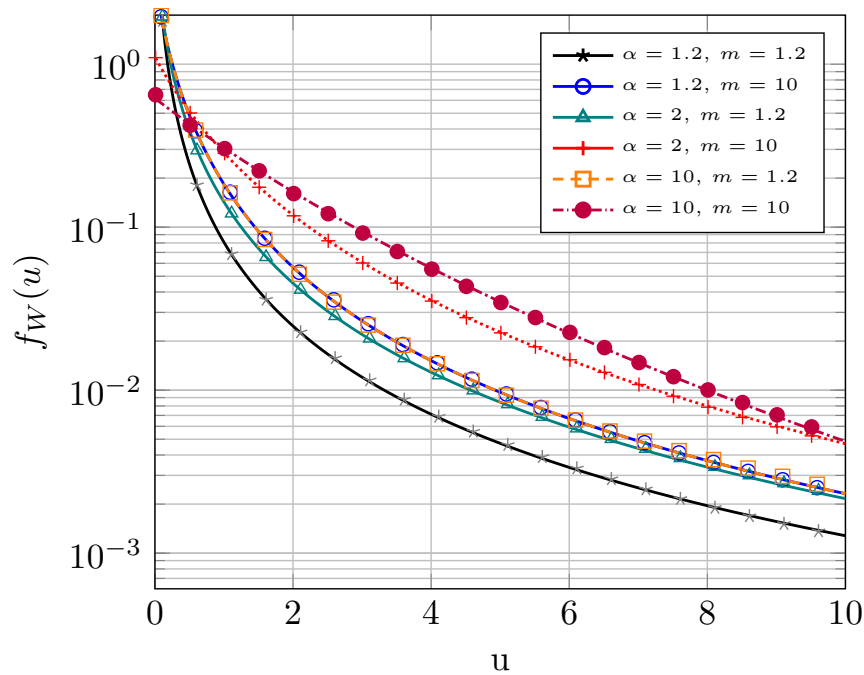


FIGURA 3.15: PDF del modelo de atenuación compuesta basado en la distribución inversa-gamma, para diferentes valores de m y α . Se considera $\bar{W} = 2$.

Fading Compuesto

Finalmente, ejemplificamos la flexibilidad de la distribución \mathcal{L}_x para extender su comportamiento y modelar fading compuesto. Consideramos que el coeficiente de potencia de fading por *shadowing*, S , sigue una distribución inversa-gamma, y el coeficiente de potencia de *fast-fading*, G , sigue una distribución \mathcal{L}_x . Por lo tanto, la PDF conjunta está dada por (3.34) y se representa en la Figura 3.15 para varios valores de m (parámetro de severidad de sombra) y α (parámetro de severidad de fading). Utilizamos una escala logarítmica para la PDF, con el fin de obtener una mejor representación. Observamos que aumentar la severidad general del fading compuesto, es decir, reducir m o α , hace que los valores más bajos sean más probables. Sin embargo, notamos que los valores de m y α no son directamente intercambiables, lo que confirma las diferentes características de la distribución \mathcal{L}_x en comparación con la inversa-gamma.

Capítulo 4

Conclusiones y líneas futuras

Tras la descripción de las principales contribuciones de esta tesis, en este capítulo final se resumen las principales conclusiones que derivan del trabajo realizado. Además, se plantean algunas líneas de trabajo futuras que pueden servir para desarrollar aún más las planteadas y desarrolladas en el ámbito de esta tesis.

4.1. Conclusiones

En esta tesis se ha contribuido al campo del modelado estadístico de canales con desvanecimientos, mediante el uso de distribuciones no convencionales como la Log-Logística y la distribución de Lomax. Las principales conclusiones que se han obtenido del trabajo realizado son las siguientes

- En lo relativo a la primera de las cuestiones que nos planteábamos en los objetivos, sobre ¿En qué condiciones puede una distribución estadística cualquiera emplearse para modelar canales con *fading*? Se ha establecido la necesidad de que las distribuciones empleadas para modelado de canal inalámbrico deben redefinirse con la precaución de que su potencia media esté definida, y sea explícitamente uno de los parámetros de la distribución. De esta manera, se dota de cierto sentido físico a las distribuciones empleadas, y se posibilita su uso para análisis de prestaciones de sistemas de comunicaciones. Se han detectado y corregido algunas inconsistencias identificadas en la literatura, relacionadas con el uso de la distribución log-logística con un conjunto de parámetros que no satisfacían estas condiciones.
- En cuanto a la pregunta ¿Puede el uso de una distribución sin (a priori) una clara interpretación física ser recomendable respecto a otras alternativas? Hemos podido comprobar que dependiendo del caso, existen ventajas en términos de complejidad/simplicidad analítica. Pese a que la distribución pueda no tener a priori una motivación física, es importante establecer el efecto de modificar sus parámetros en aspectos cuantificables, como por ejemplo la severidad del fading o el orden de diversidad.
- Por último, en relación a la cuestión ¿Cuáles son las implicaciones asociadas, desde puntos de vista teórico (análisis de prestaciones) y práctico (empíricas o físicas)?,

se ha podido responder desde ambas vertientes. La caracterización de una distribución en cuanto a sus estadísticos fundamentales, incluyendo estadísticos en el dominio de Laplace, permite una mayor versatilidad y facilita su uso para aplicaciones más sofisticadas. Es el caso, por ejemplo, de la distribución de Lomax, para la cual su GMGF puede expresarse de manera cerrada. Además, el hecho de que estas distribuciones proporcionen un ajuste mejor que otras alternativas en determinadas condiciones, justifican su uso desde un punto de vista práctico.

4.2. Líneas futuras

Pese a que los objetivos originalmente planteados para esta tesis doctoral se consideran ampliamente superados, existen varias líneas de trabajo que emanan de los resultados obtenidos, y que pueden posibilitar nuevas contribuciones de relevancia. A continuación se ilustran algunas de ellas:

- La redefinición formal de las distribuciones log-logística y de Lomax posibilita su uso para análisis de prestaciones de sistemas de comunicaciones afectados por este tipo de *fading*. Trabajos recientes [53] han tomado como base nuestros resultados [22] para el análisis de prestaciones en entornos donde se emplean comunicaciones ópticas inalámbricas para comunicaciones submarinas. El desarrollo de nuevas herramientas analíticas que permita avanzar en el análisis de prestaciones es una línea con gran potencial.
- Durante el trabajo inicial de la tesis, se identificaron otras distribuciones no convencionales candidatas para su uso en el modelado de canal inalámbrico. Un ejemplo es el de la distribución hiperexponencial, propuesta para modelar la ganancia de sistemas de comunicaciones en la banda de milimétricas sujetos a errores de apuntamiento [32]. La redefinición de esta u otras distribuciones siguiendo el procedimiento aquí empleado es una alternativa de trabajo en esta línea.
- Las distribuciones aquí propuestas tienen un único parámetro de forma. Es posible considerar distribuciones generalizadas con parámetros adicionales, de modo que permitan una mayor flexibilidad, aunque potencialmente a costa de una mayor complejidad matemática. La generalización de las distribuciones de Lomax o log-logística para considerar efectos como los que se tienen en canales compuesto (*composite*) o producto, siguiendo la metodología propuesta en [21], es una línea futura de trabajo con recorrido.

Apéndice A

Publications

A.1. A Formulation of the Log-Logistic Distribution for Fading Channel Modeling

[22] I. Sánchez y F. J. López-Martínez, «A Formulation of the Log-Logistic Distribution for Fading Channel Modeling», *Electronics*, vol. 11, n.º 15, pág. 2409, 2022. DOI: 110.3390/electronics11152409.

Article

A Formulation of the Log-Logistic Distribution for Fading Channel Modeling

Iván Sánchez ^{1,2,*} and Francisco Javier López-Martínez ^{2,3} ¹ Department of Telecommunication Engineering, Universidad de las Américas, Quito 170503, Ecuador² ComSP Lab, Telecommunication Research Institute (TELMA), Universidad de Málaga, 29010 Málaga, Spain; fjlm@ugr.es³ Department Signal Theory, Networking and Communications, Universidad de Granada, 18071 Granada, Spain

* Correspondence: ivan.sanchez.salazar@udla.edu.ec

Abstract: In some scenarios, the log-logistic (LL) distribution is shown to provide the best fit to field measurements in the context of wireless channel modeling. However, a fading channel model based on the LL distribution has not been formulated yet. In this work, we introduce the \mathcal{L} -distribution as a reformulation of the LL distribution for channel modeling purposes. We provide closed-form expressions for its PDF, CDF, and moments. Performance analysis of wireless communication systems operating under \mathcal{L} -fading channels is exemplified, providing exact and asymptotic expressions for relevant metrics such as the outage probability and the average capacity. Finally, important practical aspects related to the use of the \mathcal{L} -distribution for channel fitting purposes are discussed in two contexts: (i) millimeter-wave links with misaligned gain, and (ii) air-ground channels in unmanned aerial vehicle communications.

Keywords: fading channels; log-logistic distribution; performance analysis; wireless communications



Citation: Sánchez, I.; López-Martínez, F.J. A Formulation of the Log-Logistic Distribution for Fading Channel Modeling. *Electronics* **2022**, *11*, 2409. <https://doi.org/10.3390/electronics11152409>

Academic Editor: Ikmo Park

Received: 30 June 2022

Accepted: 29 July 2022

Published: 2 August 2022

Publisher's Note: MDPI stays neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.



Copyright: © 2022 by the authors. Licensee MDPI, Basel, Switzerland. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

1. Introduction

The research in stochastic fading models has been intense since the prominent works by Nakagami and Beckmann [1,2]. For decades, fading models arising from the central limit theorem (CLT), such as Rayleigh and Rice ones, have been widely used to model propagation conditions in multipath fading channels for non-line-of-sight (NLOS) and line-of-sight (LOS) conditions, respectively. In those scenarios in which a more sophisticated modeling was required, the Nakagami- m model is usually preferred because of its simple mathematical tractability, compared to other alternatives such as Nakagami- q or Beckmann fading models. With the new century, a number of relevant and more general fading distributions have been proposed [3–6], which have proven useful to accommodate to a wider set of propagation environments while being supported by empirical evidences.

Still, because of the complex nature of the propagation mechanisms that affect electromagnetic waves, the use of different distributions is required in some scenarios in order to better respond to field measurements. In many cases, the choice of a certain target distribution to model fading channels does not respond to a physically-justified choice of distribution, but instead to convenience. For instance, this is the case of the Weibull distribution, which was proposed in [7,8] as an alternative to model indoor propagation channels because of a reasonable analytical simplicity and its improved fit compared to other alternatives.

In some contexts, the use of the log-logistic (LL) distribution (also known as Fisk distribution) [9,10] has been proposed to model the amplitude or power fluctuations of the signals affected by fading. Several examples include in-body to out-of-body channels [11,12], millimeter-wave cellular networks with misaligned gain [13], scattering caused by foliage [14], air-ground channels in the context of unmanned aerial vehicle (UAV) communications [15,16], underwater optical wireless communications affected by turbulence [17], and others [18–21].

A.2. The Lomax Distribution for Wireless Channel Modeling: a Preliminary Study

[23] I. Sanchez y F. J. Lopez-Martinez, «The Lomax Distribution for Wireless Channel Modeling: a Preliminary Study», en *2023 IEEE Seventh Ecuador Technical Chapters Meeting (ETCM)*, 2023, págs. 1-4. DOI: 10.1109/ETCM58927.2023.10309028.

CONFERS THIS

Best Communications Paper Award Certificate

for the paper entitled:

The Lomax Distribution for Wireless Channel Modeling: a Preliminary Study

to

Iván Sánchez and F. Javier Lopez-Martinez

received at the Ecuadorian Technical Meeting 2023
held at Ambato, 10th-13th October 2023.

Ing. Mónica Huerta, PhD
General Chair ETCM 2023

Ing. José Varela, PhD
General Chair ETCM 2023

The Lomax Distribution for Wireless Channel Modeling: a Preliminary Study

Ivan Sánchez

Dept. of Telecommunication Engineering,
Universidad de las Américas,
Quito 170503, Ecuador.
ComSP Lab, TELMA Research Institute,
Universidad de Málaga,
Málaga 29010, Spain.
ivan.sanchez.salazar@uma.es

F. Javier López-Martínez

Dept. Signal Theory, Networking and Communications,
Universidad de Granada,
Granada 18071, Spain.
ComSP Lab, TELMA Research Institute,
Universidad de Málaga,
Málaga 29010, Spain.
fjlm@ugr.es

Abstract—We investigate the application of the Lomax distribution for wireless fading modeling purposes. By a proper redefinition of its shape parameters, we present closed-form expressions for its main statistics: probability density function, cumulative distribution function, moment generating function, and raw moments. Then, relevant performance indicators such as the amount of fading, the average capacity and outage probability are derived, and compared to the relevant case of Rayleigh fading.

Keywords—Fading channels, Lomax distribution, performance analysis, wireless communications.

I. INTRODUCTION

Radio signals used to transmit information experience a number of effects when traversing the wireless medium, including attenuation, delay, scattering, diffraction, and many others. The characterization of these aggregate effects over the desired information signal is referred to as channel modeling. While an exact model for such channels is very challenging due to the complexity of the problem, e.g., based on Maxwell equations and electromagnetic laws [1], some simplified models are of widespread use in the literature. For instance, this is the case of the Gaussian models like Rayleigh and Rice [2], inspired in the central limit theorem due to the reception of a large number of scattered waves.

However, since radio propagation is far more involved than what these simplified models are able to capture, the literature is rich in other alternatives for stochastic wireless channel modeling [3–8]. In these aforementioned cases the resulting distributions are based on some propagation effects such as clustering, line-of-sight fluctuation, or non-linearities. However, in other circumstances the choice of a given distribution is only based on goodness of fit to experimental data, or even its mathematical simplicity. Several examples of such distributions borrowed from the field of statistics include the Weibull [9, 10] or Log-Logistic [11] ones.

This work was funded in part by Junta de Andalucía through grant EMERGIA20-00297, in part by MCIN/AEI/10.13039/501100011033 through grant PID2020-118139RB-I00, in part by Universidad de Málaga and TELMA Research Institute, and in part by Universidad de las Américas.

Digging a bit deeper into the literature, the Lomax¹ distribution has also been considered by some authors as a candidate for wireless channel modeling [12]. At first glance, the use of such a distribution may seem unconventional from a physical perspective. However, the authors in [12] connect the Lomax distribution with an underlying complex signal distributed according to a joint T-distribution, being its uncorrelated real and imaginary parts Lomax distributed. In the communications literature, the Lomax distribution has been used in a number of scenarios, including content delivery in D2D communications [13, 14], bit error performance under interference [15], cooperative spectrum sensing in cognitive radio networks [16], and others [17–20].

Paper contribution: Motivated by the above considerations, we formalize the use of the Lomax distribution as a candidate to model fading in wireless channels. This requires a redefinition of its parameters, so that physical restrictions such as the existence of its first moment (i.e., the average received power) are properly included. In the sequel, we will use the shorthand notation \mathcal{L}_x distribution to refer to such a redefinition of the Lomax distribution. Closed-form expressions for its probability density function (PDF), cumulative distribution function (CDF), moment generating function (MGF), and raw moments are derived. The performance of wireless communication systems operating under \mathcal{L}_x fading is exemplified, computing relevant performance metrics such as the outage probability (OP) and average capacity (AC) in exact and asymptotic form.

Structure: The remainder of this paper is organized as follows: The main statistics of the \mathcal{L}_x distribution are derived in Section II, and their application to derive performance metrics in communications is carried out in Section III. Numerical results are given in Section IV, whereas the main conclusions are outlined in Section V.

Notation: $F_{(\cdot)}(\cdot)$ and $f_{(\cdot)}(\cdot)$ denote a CDF and PDF, respectively. $F_{(\cdot)}^{-1}(p; \cdot)$ denotes an inverse CDF. $M_\gamma(s)$ is a moment

¹also known as Pareto Type II distribution.



UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

A.3. The Lomax Distribution for Wireless Channel Modeling: Theory and Applications

[24] I. Sanchez y F. J. Lopez-Martinez, «The Lomax Distribution for Wireless Channel Modeling: Theory and Applications», *IEEE Open J. Veh. Technol.*, vol. 5, págs. 162-171, 2024. DOI: 10.1109/OJVT.2023.3342074.

The Lomax Distribution for Wireless Channel Modeling: Theory and Applications

IVAN SÁNCHEZ ^{1,2} AND F. JAVIER LÓPEZ-MARTÍNEZ ^{1,3} (Senior Member, IEEE)

¹Communications and Signal Processing Lab, Telecommunication Research Institute (TELMA), Universidad de Málaga, 29010 Málaga, Spain

²Department of Telecommunication Engineering, Universidad de las Américas, Quito 170503, Ecuador

³Department Signal Theory, Networking and Communications, Research Centre for Information and Communication Technologies (CITIC-UGR), University of Granada, 18071 Granada, Spain

CORRESPONDING AUTHOR: IVAN SÁNCHEZ (e-mail: ivan.sanchez.salazar@uma.es)

This work was supported in part by Junta de Andalucía under Grant EMERGIA20-00297, in part by European Social and Regional Funds and Junta de Andalucía under Grant UMA20-FEDERJA-002, in part by MCIN/AEI/10.13039/501100011033 under Grant PID2020-118139RB-I00, and in part by Universidad de Málaga and TELMA Research Institute. A short version of this manuscript was published at IEEE ETCM 2023 conference [doi: 10.1109/ETCM58927.2023.10309028].

ABSTRACT We investigate the application of the Lomax distribution for wireless fading modeling purposes. By a proper redefinition of its scale parameter, we present closed-form expressions for its main statistics: probability density function, cumulative distribution function, raw moments and Laplace-domain statistics. Then, relevant performance indicators are derived, including the amount of fading, channel capacity, outage probability and error rate. Other applications include diversity reception using selection combining, as well as composite fading modeling. The Lomax distribution is compared to the relevant case of Rayleigh fading, and to other benchmark distributions of similar complexity used in the literature.

INDEX TERMS Fading channels, Lomax distribution, performance analysis, wireless communications.

I. INTRODUCTION

Radio signals used to transmit information experience a number of effects when traversing the wireless medium, including attenuation, delay, scattering, diffraction, and many others. The characterization of these aggregate effects over the desired information signal is referred to as channel modeling. While an exact model for such channels is very challenging due to the complexity of the problem, e.g., based on Maxwell equations and electromagnetic laws [2], some simplified models are of widespread use in the literature. For instance, this is the case of the Gaussian models like Rayleigh and Rice [3], inspired in the central limit theorem due to the reception of a large number of scattered waves.

However, since radio propagation is far more involved than what these simplified models are able to capture, the literature is rich in other alternatives for stochastic wireless channel modeling [4], [5], [6], [7], [8], [9]. In these aforementioned cases the resulting distributions are based on some propagation effects such as clustering, line-of-sight fluctuation, or other effects. In general terms, the two dominant approaches for wireless channel modeling can be categorized as *ray-based* and *cluster-based*. In the former, the received signal is

modeled as a coherent sum of incident waves, each of these with a different amplitude and phase. In the latter, the received signal is structured into clusters of waves, where each cluster is composed by groups of scattered waves with similar delays. Ray-based formulations include popular fading models in the literature such as Durgin's Two-Wave with Diffuse Power (TWDP) [10] and other generalizations [11], [12], [13], [14]. On the other hand, cluster-based models include Yacoub's κ - μ and η - μ models [6], and subsequent extensions [8], [15], [16], [17], [18], [19].

Besides these two approaches based on an underlying physical model for propagation, there exist a third way to statistical channel modeling: since radio propagation mechanisms are very complex to be accurately modeled in every possible situation, sometimes the use of certain distributions borrowed from statistics may be justified based on goodness of fit to experimental data, or even its mathematical simplicity. This is the case, among others, of the Weibull [20], [21], inverse-gamma [22], [23], Log-Logistic [24] distributions. Interestingly, after their definition and extensive use by the research community, these somehow unconventional models may even be connected to an underlying physical

Bibliografía

- [1] A. Osseiran et al., «Scenarios for 5G mobile and wireless communications: the vision of the METIS project», *IEEE Commun. Mag.*, vol. 52, n.º 5, págs. 26-35, 2014.
- [2] K. Haneda et al., «5G 3GPP-like channel models for outdoor urban microcellular and macrocellular environments», en *IEEE 83rd Vehicular Technology Conference (VTC Spring)*, 2016, págs. 1-7.
- [3] S. Hur, S. Baek, B. Kim, Y. Chang, A. F. Molisch, T. S. Rappaport, K. Haneda y J. Park, «Proposal on millimeter-wave channel modeling for 5G cellular system», *IEEE J. Sel. Topics Signal Process.*, vol. 10, n.º 3, págs. 454-469, 2016.
- [4] P. Beckmann, «Statistical distribution of the amplitude and phase of a multiply scattered field», *J. Res. Natl. Bur. Stand. D. (U.S.)*, vol. 66D, n.º 3, págs. 231-240, 1962.
- [5] S. O. Rice, «Statistical properties of a sine wave plus random noise», *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 27, n.º 1, págs. 109-157, 1948.
- [6] J. D. V. Sánchez, F. J. López-Martínez, J. F. Paris y J. M. Romero-Jerez, «The Multi-Cluster Fluctuating Two-Ray Fading Model», *IEEE Trans. Wireless Commun.*, págs. 1-1, 2023.
- [7] G. D. Durgin, T. S. Rappaport y D. A. de Wolf, «New analytical models and probability density functions for fading in wireless communications», *IEEE Trans. Commun.*, vol. 50, n.º 6, págs. 1005-1015, 2002.
- [8] J. M. Romero-Jerez, F. J. Lopez-Martinez, J. P. Peña-Martín y A. Abdi, «Stochastic Fading Channel Models With Multiple Dominant Specular Components», *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 71, n.º 3, págs. 2229-2239, 2022.
- [9] J. M. Romero-Jerez, F. J. Lopez-Martinez, J. F. Paris y A. J. Goldsmith, «The fluctuating two-ray fading model: Statistical characterization and performance analysis», *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 16, n.º 7, págs. 4420-4432, 2017.
- [10] M. Olyaei, J. M. Romero-Jerez, F. J. Lopez-Martinez y A. J. Goldsmith, «Alternative Formulations for the Fluctuating Two-Ray Fading Model», *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 21, n.º 11, págs. 9404-9416, 2022.
- [11] M. Olyaei, J. A. Cortés, F. J. Lopez-Martinez, J. F. Paris y J. M. Romero-Jerez, «The Fluctuating Two-Ray Fading Model With Independent Specular Components», *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 72, n.º 5, págs. 5533-5545, 2023.
- [12] M. D. Yacoub, «The κ - μ distribution and the η - μ distribution», *IEEE Antennas Propag. Mag.*, vol. 49, n.º 1, págs. 68-81, 2007.

- [13] J. F. Paris, «Statistical characterization of κ - μ shadowed fading», *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 63, n.º 2, págs. 518-526, 2014.
- [14] S. L. Cotton, «Human body shadowing in cellular device-to-device communications: channel modeling using the shadowed κ - μ fading model», *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, vol. 33, n.º 1, págs. 111-119, 2015.
- [15] L. Moreno-Pozas, F. J. Lopez-Martinez, S. L. Cotton, J. F. Paris y E. Martos-Naya, «Comments on “Human Body Shadowing in Cellular Device-to-Device Communications: Channel Modeling Using the Shadowed $\kappa - \mu$ Fading Model”», *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, vol. 35, n.º 2, págs. 517-520, 2017.
- [16] P. Ramirez-Espinosa, F. J. Lopez-Martinez, J. F. Paris, M. D. Yacoub y E. Martos-Naya, «An Extension of the κ - μ Shadowed Fading Model: Statistical Characterization and Applications», *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 67, n.º 5, págs. 3826-3837, 2018.
- [17] L. Moreno-Pozas, F. J. Lopez-Martinez, J. F. Paris y E. Martos-Naya, «The κ - μ Shadowed Fading Model: Unifying the κ - μ and η - μ Distributions», *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 65, n.º 12, págs. 9630-9641, 2016.
- [18] M. D. Yacoub, «The α - η - κ - μ Fading Model», *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 64, n.º 8, págs. 3597-3610, 2016.
- [19] M. Nakagami, «The m-Distribution—A General Formula of Intensity Distribution of Rapid Fading», en *Statistical Methods in Radio Wave Propagation*, W. HOFFMAN, ed., Pergamon, 1960, págs. 3 -36.
- [20] F. Babich y G. Lombardi, «Statistical analysis and characterization of the indoor propagation channel», *IEEE Trans. Commun.*, vol. 48, n.º 3, págs. 455-464, 2000.
- [21] P. Ramírez-Espinosa y F. J. López-Martínez, «Composite Fading Models Based on Inverse Gamma Shadowing: Theory and Validation», *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 20, n.º 8, págs. 5034-5045, 2021.
- [22] I. Sánchez y F. J. López-Martínez, «A Formulation of the Log-Logistic Distribution for Fading Channel Modeling», *Electronics*, vol. 11, n.º 15, pág. 2409, 2022.
- [23] I. Sanchez y F. J. Lopez-Martinez, «The Lomax Distribution for Wireless Channel Modeling: a Preliminary Study», en *2023 IEEE Seventh Ecuador Technical Chapters Meeting (ETCM)*, 2023, págs. 1-4.
- [24] —, «The Lomax Distribution for Wireless Channel Modeling: Theory and Applications», *IEEE Open J. Veh. Technol.*, vol. 5, págs. 162-171, 2024.
- [25] G. D. Durgin, «Theory of stochastic local area channel modeling for wireless communications», Tesis doct., Virginia Tech, 2000.
- [26] G. Tzeremes y C. Christodoulou, «Use of Weibull distribution for describing outdoor multipath fading», en *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium (IEEE Cat. No.02CH37313)*, vol. 1, 2002, 232-235 vol.1.
- [27] T. Eltoft, «The Rician inverse Gaussian distribution: a new model for non-Rayleigh signal amplitude statistics», *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 14, n.º 11, págs. 1722-1735, 2005.

- [28] S. K. Yoo, N. Simmons, S. L. Cotton, P. C. Sofotasios, M. Matthaiou, M. Valkama y G. K. Karagiannidis, «The κ - μ /Inverse Gamma and η - μ /Inverse Gamma Composite Fading Models: Fundamental Statistics and Empirical Validation», *IEEE Trans. Commun.*, vol. 69, n.º 8, págs. 5514-5530, 2021.
- [29] J. Liang y Q. Liang, «Outdoor Propagation Channel Modeling in Foliage Environment», *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 59, n.º 5, págs. 2243-2252, 2010.
- [30] D. K. Wilson, C. R. Hart, C. L. Pettit, D. J. Breton, E. T. Nykaza y V. E. Ostashev, «Scattered signal distributions, parametric uncertainties, and Bayesian sequential updating», en *Proceedings of Meetings on Acoustics*, AIP Publishing, vol. 31, 2017.
- [31] D. K. Wilson, D. J. Breton, C. R. Hart, V. E. Ostashev, E. T. Nykaza y C. L. Pettit, «Impact of Parametric Uncertainties on Scattered Signal Distributions and Receiver Operating Characteristics», en *Tech. Report (Eng. Res. Development Center, U.S.); ERDC TR-18-7*, 2018.
- [32] M. Rebato, J. Park, P. Popovski, E. De Carvalho y M. Zorzi, «Stochastic Geometric Coverage Analysis in mmWave Cellular Networks With Realistic Channel and Antenna Radiation Models», *IEEE Trans. Commun.*, vol. 67, n.º 5, págs. 3736-3752, 2019.
- [33] A. Papoulis y S. U. Pillai, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, Fourth. Boston: McGraw Hill, 2002.
- [34] M. D. Yacoub, «The α - μ Distribution: A Physical Fading Model for the Stacy Distribution», *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 56, n.º 1, págs. 27-34, 2007.
- [35] S. K. Yoo, S. L. Cotton, P. C. Sofotasios, M. Matthaiou, M. Valkama y G. K. Karagiannidis, «The Fisher-Snedecor \mathcal{F} Distribution: A Simple and Accurate Composite Fading Model», *IEEE Commun. Lett.*, vol. 21, n.º 7, págs. 1661-1664, 2017.
- [36] H. Hashemi, «The indoor radio propagation channel», *Proc. IEEE*, vol. 81, n.º 7, págs. 943-968, 1993.
- [37] P. R. Fisk, «The Graduation of Income Distributions», *Econometrica*, vol. 29, n.º 2, págs. 171-185, 1961.
- [38] A. H. Muse, S. M. Mwalili, O. Ngesa y col., «On the log-logistic distribution and its generalizations: a survey», *Int. J. Statistics and Probability*, vol. 10, n.º 3, pág. 93, 2021.
- [39] S. Chamaani, Y. I. Nechayev, P. S. Hall, C. Constantinou y S. A. Mirtaheri, «Short-term and long-term fading of in-body to out-of-body channel in MICS band», en *Proc. 5th European Conference on Antennas and Propagation (EUCAP)*, 2011, págs. 3797-3800.
- [40] D. Song, L. Wang, Z. Xu y G. Chen, «Joint Code Rate Compatible Design of DP-LDPC Code Pairs for Joint Source Channel Coding Over Implant-to-External Channel», *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 21, n.º 7, págs. 5526-5540, 2022.
- [41] Z. Cui, C. Briso-Rodríguez, K. Guan, C. Calvo-Ramírez, B. Ai y Z. Zhong, «Measurement-Based Modeling and Analysis of UAV Air-Ground Channels at 1 and 4 GHz», *IEEE Antennas Wireless Propag. Lett.*, vol. 18, n.º 9, págs. 1804-1808, 2019.

- [42] Z. Cui, C. Briso-Rodríguez, K. Guan, Z. Zhong y F. Quitin, «Multi-Frequency Air-to-Ground Channel Measurements and Analysis for UAV Communication Systems», *IEEE Access*, vol. 8, págs. 110 565-110 574, 2020.
- [43] W. Jiang, W. Liu y Z. Xu, «Experimental Investigation of Turbulence Channel Characteristics for Underwater Optical Wireless Communications», en *2021 IEEE/CIC International Conference on Communications in China (ICCC)*, 2021, págs. 858-863.
- [44] T. Kumpuniemi, M. Hämäläinen, K. Y. Yazdandoost y J. Linatti, «Human Body Shadowing Effect on Dynamic UWB On-Body Radio Channels», *IEEE Antennas Wireless Propag. Lett.*, vol. 16, págs. 1871-1874, 2017.
- [45] Z. Rezeki y M. Alouini, «On the Capacity of Multiple Access and Broadcast Fading Channels with Full Channel State Information at Low SNR», *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 13, n.º 1, págs. 464-475, 2014.
- [46] D. B. Smith, D. Miniutti, T. A. Lamahewa y L. W. Hanlen, «Propagation Models for Body-Area Networks: A Survey and New Outlook», *IEEE Antennas Propag. Mag.*, vol. 55, n.º 5, págs. 97-117, 2013.
- [47] A. Pittolo y A. M. Tonello, «Physical layer security in PLC networks: Achievable secrecy rate and channel effects», en *2013 IEEE 17th Int. Symp. on Power Line Communications and Its Applications*, 2013, págs. 273-278.
- [48] M. K. Simon y M.-S. Alouini, *Digital communication over fading channels*. John Wiley & Sons, 2005, vol. 95.
- [49] Z. Wang y G. Giannakis, «A Simple and General Parameterization Quantifying Performance in Fading Channels», *IEEE Trans. Commun.*, vol. 51, n.º 8, págs. 1389-1398, ago. de 2003.
- [50] A. J. Goldsmith y P. P. Varaiya, «Capacity of fading channels with channel side information», *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 43, n.º 6, págs. 1986-1992, 1997.
- [51] F. Yilmaz y M. S. Alouini, «Novel asymptotic results on the high-order statistics of the channel capacity over generalized fading channels», en *2012 IEEE 13th International Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC)*, 2012, págs. 389-393.
- [52] C. Garcia-Corrales, U. Fernandez-Plazaola, F. J. Cañete, J. F. Paris y F. J. Lopez-Martinez, «Unveiling the hyper-Rayleigh regime of the fluctuating two-ray fading model», *IEEE Access*, vol. 7, págs. 75 367-75 377, 2019.
- [53] Y. H. Al-Badarneh, M. K. Alshawaqfeh y O. S. Badarneh, «Selection Combining Over Log-Logistic Fading Channels With Applications to Underwater Optical Wireless Communications», *IEEE Wireless Commun. Lett.*, vol. 12, n.º 9, págs. 1568-1572, 2023.
- [54] L. Tsang, J. A. Kong y K.-H. Ding, *Scattering of electromagnetic waves: theories and applications*. John Wiley & Sons, 2004.
- [55] S. O. Rice, «Distribution of the duration of fades in radio transmission: Gaussian noise model», *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 37, n.º 3, págs. 581-635, 1958.
- [56] T. Kallehauge, P. Ramirez-Espinosa, A. E. Kalør y P. Popovski, «Statistical Characterization of URLLC : Frequentist and Bayesian Approaches», en *Ultra-Reliable and*

- Low-Latency Communications (URLLC) Theory and Practice*. John Wiley y Sons, Ltd, 2023, cap. 2, págs. 15-59. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/9781119818366.ch2>.
- [57] A. S. Daghaj y Q. Z. Ahmed, «Video Content Delivery Using Multiple Devices to Single Device Communications», en *2016 IEEE 83rd Vehicular Technology Conference (VTC Spring)*, 2016, págs. 1-5.
- [58] A. S. Daghaj, H. Zhu y J. Wang, «Content Delivery Analysis in Multiple Devices to Single Device Communications», *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 67, n.º 11, págs. 10218-10231, 2018.
- [59] S. Nadarajah y S. Kotz, «Expressions for bit error probability», *Wirel. Commun. Mob. Comput.*, vol. 8, n.º 7, págs. 885-894, 2008. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/wcm.535>.
- [60] X.-L. Huang, F. Hu, J. Wu, H.-H. Chen, G. Wang y T. Jiang, «Intelligent Cooperative Spectrum Sensing via Hierarchical Dirichlet Process in Cognitive Radio Networks», *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, vol. 33, n.º 5, págs. 771-787, 2015.
- [61] O. L. Alcaraz López, H. Alves y M. Latva-aho, «Joint Power Control and Rate Allocation Enabling Ultra-Reliability and Energy Efficiency in SIMO Wireless Networks», *IEEE Trans. Commun.*, vol. 67, n.º 8, págs. 5768-5782, 2019.
- [62] X.-L. Huang, J. Wu, W. Li, Z. Zhang, F. Zhu y M. Wu, «Historical Spectrum Sensing Data Mining for Cognitive Radio Enabled Vehicular Ad-Hoc Networks», *IEEE Trans. Dependable Secure Comput.*, vol. 13, n.º 1, págs. 59-70, 2016.
- [63] O. L. Alcaraz López, H. Alves y M. Latva-Aho, «Rate Control under Finite Blocklength for Downlink Cellular Networks with Reliability Constraints», en *2018 15th International Symposium on Wireless Communication Systems (ISWCS)*, 2018, págs. 1-6.
- [64] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*. San Diego, CA, USA: Academic Press, 2007.
- [65] J. P. Pena-Martín, J. M. Romero-Jerez y F. J. Lopez-Martinez, «Generalized MGF of the Two-Wave With Diffuse Power Fading Model With Applications», *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 67, n.º 6, págs. 5525-5529, 2018.
- [66] J. Gong, H. Lee y J. Kang, «Generalized MGF of Inverse Gaussian Distribution With Applications to Wireless Communications», *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 69, n.º 2, págs. 2332-2336, 2020.
- [67] G. Gomez, F. J. Lopez-Martinez, D. Morales-Jimenez y M. McKay, «On the Equivalence between Interference and Eavesdropping in Wireless Communications», *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. PP, n.º 99, págs. 1-1, 2015.
- [68] J. P. Pena-Martín, J. M. Romero-Jerez y F. J. Lopez-Martinez, «Generalized MGF of Beckmann Fading With Applications to Wireless Communications Performance Analysis», *IEEE Trans. Commun.*, vol. 65, n.º 9, págs. 3933-3943, 2017.
- [69] M. Di Renzo, F. Graziosi y F. Santucci, «Channel Capacity Over Generalized Fading Channels: A Novel MGF-Based Approach for Performance Analysis and Design of Wireless Communication Systems», *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 59, n.º 1, págs. 127-149, 2010.

- [70] J. Reig, V. M. Rodrigo Peñarrocha, L. Rubio, M. T. Martínez-Inglés y J. M. Molina-García-Pardo, «The Folded Normal Distribution: A New Model for the Small-Scale Fading in Line-of-Sight (LOS) Condition», *IEEE Access*, vol. 7, págs. 77 328-77 339, 2019.
- [71] N. D. Chatzidiamantis, H. G. Sandalidis, G. K. Karagiannidis y M. Matthaiou, «Inverse Gaussian Modeling of Turbulence-Induced Fading in Free-Space Optical Systems», *J. Light. Technol.*, vol. 29, n.º 10, págs. 1590-1596, 2011.
- [72] F. J. Lopez-Martinez, D. Morales-Jimenez, E. Martos-Naya y J. F. Paris, «On the Bivariate Nakagami-m Cumulative Distribution Function: Closed-Form Expression and Applications», *IEEE Trans. Commun.*, vol. 61, n.º 4, págs. 1404-1414, 2013.
- [73] F. J. Lopez-Martinez, L. Moreno-Pozas y E. Martos-Naya, «Novel results for the κ - μ Extreme fading distribution: generation of white samples and capacity analysis», *IEEE Commun. Lett.*, vol. 19, n.º 9, págs. 1580-1583, 2015.
- [74] S. K. Yoo, P. C. Sofotasios, S. L. Cotton, S. Muhaidat, F. J. Lopez-Martinez, J. M. Romero-Jerez y G. K. Karagiannidis, «A Comprehensive Analysis of the Achievable Channel Capacity in \mathcal{F} Composite Fading Channels», *IEEE Access*, vol. 7, págs. 34 078-34 094, 2019.
- [75] M. Abramowitz e I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, 10th. US Dept. Of Commerce, National Bureau Of Standards, Washington DC, 1972.
- [76] A. Abdi y M. Kaveh, «A Comparative Study of Two Shadow Fading Models in Ultrawideband and Other Wireless Systems», *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 10, n.º 5, págs. 1428-1434, 2011.