



UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

PROGRAMA DE DOCTORADO EN MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, ESTADÍSTICA
E INVESTIGACIÓN OPERATIVA Y MATEMÁTICA APLICADA

Modelado y simulación de procesos sedimentarios en aguas someras

JUAN CARLOS GONZÁLEZ AGUIRRE

TESIS DOCTORAL

DIRECTORES:

MANUEL JESÚS CASTRO DÍAZ
TOMÁS MORALES DE LUNA


UNIVERSIDAD DE MÁLAGA 2021





UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

AUTOR: Juan Carlos González Aguirre

 <https://orcid.org/0000-0002-7067-5527>

EDITA: Publicaciones y Divulgación Científica. Universidad de Málaga



Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 4.0 Internacional:

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode>

Cualquier parte de esta obra se puede reproducir sin autorización pero con el reconocimiento y atribución de los autores.

No se puede hacer uso comercial de la obra y no se puede alterar, transformar o hacer obras derivadas.

Esta Tesis Doctoral está depositada en el Repositorio Institucional de la Universidad de Málaga (RIUMA): riuma.uma.es





DECLARACIÓN DE AUTORÍA Y ORIGINALIDAD DE LA TESIS PRESENTADA PARA OBTENER EL TÍTULO DE DOCTOR

D. JUAN CARLOS GONZÁLEZ AGUIRRE

Estudiante del programa de doctorado Matemáticas de la Universidad de Málaga, autor de la tesis, presentada para la obtención del título de doctor por la Universidad de Málaga, titulada:

Modelado y simulación de procesos sedimentarios en aguas someras

Realizada bajo la tutorización de Manuel Jesús Castro Díaz y la dirección de Manuel Jesús Castro Díaz y Tomás Morales de Luna.

DECLARO QUE:

La tesis presentada es una obra original que no infringe los derechos de propiedad intelectual ni los derechos de propiedad industrial u otros, conforme al ordenamiento jurídico vigente (Real Decreto Legislativo 1/1996, de 12 de abril, por el que se aprueba el texto refundido de la Ley de Propiedad Intelectual, regularizando, aclarando y armonizando las disposiciones legales vigentes sobre la materia), modificado por la Ley 2/2019, de 1 de marzo.

Igualmente asumo, ante a la Universidad de Málaga y ante cualquier otra instancia, la responsabilidad que pudiera derivarse en caso de plagio de contenidos en la tesis presentada, conforme al ordenamiento jurídico vigente.

En Málaga, a 2 de Marzo de 2021

Fdo.: Juan Carlos González Aguirre



UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

D. Manuel Jesús Castro Díaz, Catedrático de Universidad del Departamento de Análisis Matemático, Estadística e Investigación Operativa, y Matemática Aplicada de la Universidad de Málaga y D. Tomás Morales de Luna, Profesor Titular del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Córdoba

CERTIFICAN:

Que D. Juan Carlos González Aguirre ha realizado en el Departamento de Análisis Matemático, Estadística e Investigación Operativa, y Matemática Aplicada de la Universidad de Málaga, bajo nuestra dirección, el trabajo de investigación correspondiente a su Tesis Doctoral, titulado:

Modelado y simulación de procesos sedimentarios en aguas someras

Revisado el presente trabajo, estimo que puede ser presentado al Tribunal que ha de juzgarlo. Y para que conste a efectos de lo establecido en el artículo octavo del Real Decreto 99/2011, autorizo la presentación de este trabajo en la Universidad de Málaga.

En Málaga, a 2 de Marzo de 2021



Dr. Manuel Jesús Castro Díaz.



Dr. Tomás Morales de Luna



UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

Agradecimientos

Es mi deber y deseo sincero agradecer a todas aquellas personas que han contribuido a que esta memoria se pudiera realizar.

Mis más sinceros agradecimientos a Manuel J. Castro Díaz y Tomás Morales de Luna, directores de este trabajo, por toda la ayuda y consejos brindados. Por el conocimiento compartido durante el desarrollo de este trabajo. Por su paciencia y el buen ambiente de trabajo creado

De igual forma, quiero agradecer a los miembros del grupo EDANYA, muy en especial a Carlos Parés, por darme la oportunidad de realizar este trabajo como un miembro más del grupo. A los demás miembros del grupo, Jorge Macías, José Manuel González Vida, Mari Luz Muñoz, Sergio Ortega, Carlos Sánchez Linares y Marc de la Asunción, muchas gracias por el buen ambiente de trabajo y por los buenos momentos. Agradezco a mis compañeros del programa de doctorado, Hugo Carrillo, Kleiton Schneider, Cipriano Escalante, Ernesto Guerrero, Ernesto Pimentel, Irene Gómez y Emanuelle Macca, con quienes he compartido experiencias que quedarán en la memoria. Muchas gracias a todos y cada uno de ustedes por hacer mi estadía en Málaga una excelente experiencia.

Quiero extender este agradecimiento a las personas de la Universidad de Santiago de Compostela que me acompañaron en los inicios de esta aventura Elena, Elisa, Saray, Carlos, María, Arís, Jose, Suso, Andrea.

Finalmente agradezco al programa de investigación e innovación de la Unión Europea Horizonte 2020 que bajo el acuerdo de subvención Marie Skłodowska-Curie No. 675661 financiaron esta investigación.

Dedicatoria

Para Atilana y Oscar, quienes han creído en mi incondicionalmente y han sido el motor de toda mi vida.

Índice general

Índice de Figuras	XIII
Índice de Tablas	XVII
Resumen	XIX
1. Introducción	1
1.1. Transporte de fondo	2
1.1.1. Flujo del transporte solido	3
1.2. Transporte en suspensión	5
1.2.1. Procesos de Erosión y depósito	7
1.2.2. Flujos turbidíticos	8
1.3. Transporte por fondo y suspensión en ríos o canales	11
2. Derivación de un nuevo modelo para el transporte y arrastre de sedimentos	15
2.1. Deducción de un modelo sin usar la hipótesis de Boussinesq	16
2.1.1. Integración vertical de las ecuaciones	16
2.1.2. Formulación general del modelo	21
2.1.3. Hiperbolicidad del sistema	22
2.1.4. Aproximación de las velocidades características	24
2.2. Hiperbolicidad y estructura espectral del modelo con hipótesis de Boussinesq	26
2.2.1. Hiperbolicidad del modelo	27
2.2.2. Estructura espectral	29
2.3. Soluciones estacionarias	32
2.3.1. Estado del agua en calma con erosión y depósito	33
3. Método de volúmenes finitos	35
3.1. Introducción	35
3.2. Preliminares de volúmenes finitos	36
3.3. Método de volúmenes finitos camino-conservativos	39
3.3.1. Esquemas numéricos camino-conservativos	41

3.3.2.	Algunos esquemas numéricos camino-conservativos	43
3.4.	Extensión a segundo orden en espacio	48
3.4.1.	Esquemas de segundo orden basados en reconstrucción de estados	48
3.4.2.	Reconstrucción tipo MUSCL	49
3.4.3.	Elección de la pendiente	50
3.5.	Esquema desacoplado de primer orden para el transporte de sedimentos	52
3.5.1.	Flujo numérico	53
3.5.2.	Discretización del término fuente	54
3.5.3.	Discretización del término S_c como producto no conservativo	56
3.5.4.	Evolución morfológica	58
3.5.5.	Escritura del esquema desacoplado como un esquema camino conservativo	58
3.6.	Esquema de VF acoplado camino conservativo para el transporte de sedimentos	59
3.6.1.	Esquema numérico PVM para el sistema morfo-dinámico	60
3.6.2.	Esquema de volúmenes finitos para el transporte de sedimentos basado en un esquema PVM	62
3.6.3.	Tratamiento seco-mojado	64
3.6.4.	Esquema numérico bien equilibrado	64
3.6.5.	Resolución de los términos de erosión depósito y fricción	66
3.7.	Método tipo <i>splitting</i> de segundo orden en tiempo	68
3.7.1.	<i>Splitting</i> de Strang	68
4.	Extensión al caso bidimensional	71
4.1.	Modelo matemático bidimensional	71
4.1.1.	Forma vectorial	72
4.1.2.	Invarianza bajo rotaciones	73
4.2.	Esquema numérico bidimensional	74
4.2.1.	Discretización del dominio	74
4.2.2.	Esquema numérico	74
5.	Experimentos numéricos	77
5.1.	Experimentos unidimensionales	77
5.1.1.	Experimento numérico 1	77
5.1.2.	Experimento numérico 2	80
5.1.3.	Precisión numérica para un caso test	83
5.2.	Experimentos bidimensionales	86
5.2.1.	Estado del agua en reposo	86
5.2.2.	Evolución de una duna	89
5.2.3.	Rotura de presa en canal con apertura abrupta	92
5.2.4.	Rotura de presa en canal con apertura simétrica	96
6.	Conclusiones	103

Índice de figuras

1.1.	Esquema del transporte de sedimento por carga en suspensión y por carga de fondo	2
1.2.	Curva de Shields	4
1.3.	Esquema de una corriente turbidítica	9
2.1.	Esquema gráfico de la demostración de la hiperbolicidad	24
2.2.	Esquema gráfico del procedimiento para aproximar las velocidades características	25
3.1.	Representación gráfica de una malla de volúmenes finitos	37
3.2.	Reconstrucción MUSCL sobre una celda de volumen finito en coordenadas locales. Los valores extrapolados en la frontera son $\mathbf{W}_{i-1/2}^+$ y $\mathbf{W}_{i+1/2}^-$	50
3.3.	Reconstrucción MUSCL sobre tres celdas consecutivas de volumen finito	51
4.1.	Malla de volúmenes finitos bidimensional	75
5.1.	Comparación de los resultados numéricos obtenidos por parte de los diversos esquemas y los resultados experimentales al tiempo $5 t_0$. SL representa la superficie libre del agua y b la superficie del fondo	78
5.2.	Comparación de los resultados numéricos obtenidos por parte de los diversos esquemas y los resultados experimentales al tiempo $7.5 t_0$. SL representa la superficie libre del agua y b la superficie del fondo	79
5.3.	Comparación de los resultados numéricos obtenidos por parte de los diversos esquemas y los resultados experimentales al tiempo $10 t_0$. SL representa la superficie libre del agua y b la superficie del fondo	79
5.4.	Comparación de los resultados numéricos obtenidos por parte de los diversos esquemas y los resultados experimentales al tiempo $t = 1.0 s$. SL representa la superficie libre del agua y b la superficie del fondo	81
5.5.	Comparación de los resultados numéricos obtenidos por parte de los diversos esquemas y los resultados experimentales al tiempo $t = 1.25 s$. SL representa la superficie libre del agua y b la superficie del fondo	82
5.6.	Comparación de los resultados numéricos obtenidos por parte de los diversos esquemas y los resultados experimentales al tiempo $t = 1.5 s$. SL representa la superficie libre del agua y b la superficie del fondo	82



5.7. Superficie libre del agua para $t = 0.2 s$	85
5.8. Fondo para $t = 0.2 s$	86
5.9. Descarga unitaria para $t = 0.2 s$	87
5.10. Comparación entre los resultados numéricos del esquema de primer orden, el esquema de segundo orden y los datos experimentales al tiempo $t = 1 s$	88
5.11. Comparación entre los resultados numéricos del esquema de primer orden, el esquema de segundo orden y los datos experimentales al tiempo $t = 1.25 s$	89
5.12. Comparación entre los resultados numéricos del esquema de primer orden, el esquema de segundo orden y los datos experimentales al tiempo $t = 1.5 s$	90
5.13. Superficie libre del agua y fondo al tiempo $t = 0 s$ (izquierda). Superficie libre del agua y fondo al tiempo $t = 30 s$ (derecha).	91
5.14. Densidad al tiempo $t = 0 s$ (izquierda) y densidad al tiempo $t = 30 s$ (derecha).	91
5.15. Evolución temporal de la altura del agua (a), la carga en suspensión (b), la densidad de la mezcla (c) y el fondo sedimenta (b), en los puntos $P_1 = (0, 0)$ y $P_2 = (-0.8, 0.5)$	92
5.16. Resultados numéricos al tiempo $t = 40 s$; (a) Superficie libre, (b) Fondo, (c) Flujo en la dirección x y (d) flujo en la dirección y	93
5.17. Diseño del canal y condiciones iniciales: (a) Perfil longitudinal y (b) vista en planta.	94
5.18. Superficie libre al tiempo $t = 12 s$ (izquierda) y fondo al tiempo $t = 12 s$ (derecha).	94
5.19. Sección transversal en $x = 1.15 m$ al tiempo $t = 12 s$	95
5.20. Sección transversal en $x = 1.3 m$ al tiempo $t = 12 s$	95
5.21. Sección transversal en $x = 1.6 m$ al tiempo $t = 12 s$	95
5.22. Evolución temporal de la superficie libre del agua en el punto (4.2, 0.125).	96
5.23. Evolución temporal de la superficie libre del agua en el punto (4.2, 0.375).	96
5.24. Configuración del experimento, dimensiones del canal: (a) Vista en planta, (b) Elevación y (c) secciones transversales.	97
5.25. Superficie libre del agua al tiempo $t = 20 s$ (izquierda) y fondo al tiempo $t = 20 s$ (derecha).	98
5.26. Nivel del fondo en la sección $y = 0.2$ al tiempo $t = 20 s$. La diversas líneas en los datos experimentales son los resultados de las pruebas de reproducibilidad llevadas a cabo durante el experimento físico	98
5.27. Nivel del fondo en la sección $y = 0.6$ al tiempo $t = 20 s$. La diversas líneas en los datos experimentales son los resultados de las pruebas de reproducibilidad llevadas a cabo durante el experimento físico	99



5.28. Nivel del fondo en la sección $y = 1.45$ al tiempo $t = 20 s$. La diversas líneas en los datos experimentales son los resultados de las pruebas de reproducibilidad llevadas a cabo durante el experimento físico 99

5.29. Evolución temporal de la superficie libre del agua en el punto US1 (ver Tabla 5.5). La diversas líneas en los datos experimentales son los resultados de las pruebas de reproducibilidad llevadas a cabo durante el experimento físico 100

5.30. Evolución temporal de la superficie libre del agua en el punto US3 (ver Tabla 5.5). 100

5.31. Evolución temporal de la superficie libre del agua en el punto US5 (ver Tabla 5.5). 101

5.32. Evolución temporal de la superficie libre del agua en el punto US6, (ver Tabla 5.5). La diversas líneas en los datos experimentales son los resultados de las pruebas de reproducibilidad llevadas a cabo durante el experimento físico 101



Índice de Tablas

3.1. Esquemas clásicos de volúmenes finitos escritos como métodos PVM . . .	47
5.1. Cálculo de los errores y el orden para h . El error espacial en la norma uno, para la k -ésima malla, se denota por $\varepsilon_{\Delta x_k}$	84
5.2. Cálculo de los errores y el orden para b . El error espacial en la norma uno, para la k -ésima malla, se denota por $\varepsilon_{\Delta x_k}$	84
5.3. Cálculo de los errores y el orden para q . El error espacial en la norma uno, para la k -ésima malla, se denota por $\varepsilon_{\Delta x_k}$	84
5.4. Condiciones iniciales para el nivel del agua.	98
5.5. Coordenadas de los puntos de medición.	100



Resumen

En Geofísica y Ciencias de la Tierra el término fluvial suele usarse para referirse a los procesos asociados a los ríos o corrientes. Estos procesos incluyen la erosión (el desgaste producido en la superficie de un cuerpo) o deposición (proceso por el cual se agrega material a una masa de tierra). La erosión y el depósito inducen cambios sobre las superficies donde estos ocurren, que se suelen llamar cambios morfológicos. Por ejemplo, la evolución del cauce de un río es el resultado de la erosión del mismo donde la corriente es muy fuerte y del depósito donde la corriente es más débil. La partículas que son movidas o erosionadas del fondo del cauce y luego depositadas dan lugar al transporte de sedimentos. Por sedimento entenderemos a la materia sólida que hay en el fluido y que cuando éste está en reposo se cae al fondo por efectos de la gravedad. El sedimento puede ser transportado por la corriente de un río como carga en suspensión (fracciones finas de sedimentos que son llevadas o movidas por el flujo sin tocar el fondo), y como carga de fondo (fracciones gruesas de sedimento que se mueven cerca del fondo, ya sea rondando, deslizándose o saltando), véase [108].

Dentro de las diversas aplicaciones que tiene el estudio del transporte de sedimentos, una de las más importantes está en el campo de la ingeniería civil. Por ejemplo, planificar como extender la vida útil de una presa al formarse el embalse, ya que la sedimentación reduce la capacidad del embalse para almacenar agua que puede ser utilizada para riego, para su uso como agua potable, y también disminuye la producción eléctrica. Otras de las aplicaciones que puede tener el transporte de sedimentos se pueden encontrar en el ámbito de la ingeniería ambiental, como por ejemplo saber donde habrá mayor concentración de alimentos para un criadero de peces, o conocer la evolución de un contaminante en un lago y así poder tomar decisiones para mitigar el daño que dicho contaminante pueda ocasionar en el afluente. Hoy en día, un tema que es de gran importancia son las inundaciones que ocurren frecuentemente, como resultado del cambio climático. Estas inundaciones son el resultado de las lluvias más frecuentes y con mayor intensidad, que pueden resultar en una mayor acumulación de agua en los ríos, que aunado a la reducción de la capacidad de los mismos, debida a la sedimentación del cauce, dan como resultado el desborde de los mismos. Estos desbordes pueden resultar en pérdidas tanto económicas como humanas. Por estas razones, el estudio del transporte de sedimentos juega un papel importante en el desarrollo de la sociedad.

Para entender como funciona el transporte de sedimentos debemos ser capaces de entender las relaciones que existen entre el movimiento del agua y el movimiento del

material sedimentario. El movimiento del agua está caracterizado por la evolución temporal tanto de la altura del agua como de su velocidad, mientras que el movimiento del material sedimentario se puede cuantificar con la evolución temporal de la profundidad del fondo sedimentado y la velocidad con la que éste es transportado. Teniendo en cuenta esto, surge de modo natural un primer enfoque para poder modelar este tipo de fenómenos, el cual se basa en acoplar las ecuaciones de Saint-Venant, véase [101], junto con la ecuación de Exner, véase [42, 43]. Las ecuaciones de Saint-Venant, también llamadas *shallow water*, describen las variables hidrodinámicas: la altura del agua y su velocidad. La ecuación de Exner permite predecir la evolución morfodinámica del fondo, es decir la evolución temporal de su altura. La ecuación de Exner depende de la definición del flujo de transporte de sólido para la carga por fondo. La definición de este término usualmente se hace de modo empírico y se han propuesto muchas formulaciones, principalmente empíricas, como las que se pueden encontrar en los trabajos [83, 41, 59, 122], entre otras. Este tipo de enfoques ha sido utilizado ampliamente para modelar el transporte de sedimentos por carga de fondo, véase [10, 20, 79, 12, 87, 106, 67], entre otros.

Como se ha mencionado anteriormente, el transporte de sedimentos también se da por carga en suspensión, la cual corresponde a las partículas que han sido desprendidas del fondo, como resultado de la erosión del mismo, y que permanecen flotando en la corriente hasta que ésta no tiene la fuerza suficiente para seguir las transportando. Entonces, por efectos de la gravedad, estas partículas son depositadas en el fondo en regiones aguas abajo. Es por ello que el modelo de Exner necesita ser complementado para tener en cuenta esta carga suspendida. En [93] se propuso un modelo, basado en las ecuaciones de Saint-Venant, que toma en cuenta los efectos de la carga suspendida. Más aún, en este modelo se introduce una tercera ecuación para modelar la conservación de la carga en suspensión. Una de las desventajas de este modelo es que no se tienen en cuenta los cambios morfológicos. En los trabajos [15, 64] se mejora el modelo presentado en [93], agregando una ecuación que toma en cuenta los cambios que el fondo pueda tener como resultado de la corriente y así poder tener en cuenta cómo estos cambios afectan al flujo de la mezcla de agua y sedimentos. Modelos de este tipo han sido empleados, por ejemplo, en [104, 124, 77, 4, 11, 78, 80]. Todos estos tipos de modelos han sido deducidos bajo la suposición de presión hidrostática, pero en un trabajo reciente, véase [13], se ha propuesto un modelo matemático con presión no hidrostática para el transporte de sedimentos, es decir, un modelo en el cual los efectos de presión no son solo debidos al peso del fluido en reposo, sino también a la presión hidrodinámica adicional relacionada con la velocidad del fluido.

Otra de las hipótesis en la que están basados la mayoría de los modelos que se han empleado para el transporte de sedimentos es suponer que la densidad de la mezcla de agua y sedimentos puede considerarse casi constante, es decir, que la concentración de sedimentos en suspensión es pequeña. Esto lleva a despreciar y no tener en cuenta las variaciones de la densidad en la parte convectiva del modelo, de forma que sólo aparecen en los términos de presión. A esta suposición se la conoce como hipótesis de Boussinesq y puede ayudar a que los modelos resultantes más sencillos. No obstante, esta

simplificación, puede ocasionar imprecisiones en los resultados obtenidos para muchas situaciones reales. Por ejemplo en [34], donde se presenta un modelo para transporte de sedimentos tanto por carga suspendida como por carga de fondo, deducido sin hacer uso de la hipótesis de Boussinesq. En él se mencionan los defectos que presentan aquellos modelos matemáticos donde la densidad no es considerada en alguna de las variables conservadas a determinar, dicho de otro modo, es importante tener en cuenta el cambio espacial de la densidad en la parte convectiva del modelo.

Una alternativa para modelar matemáticamente el transporte de sedimentos sin hacer uso de la hipótesis de Boussinesq es considerar modelos matemáticos completamente tridimensionales, tales como los que se ha propuesto en [69, 65, 90]. Otra opción es el uso de modelos basados en partículas como los propuestos en [51, 89]. Las desventajas de estos tipos de modelos es que su costo, desde el punto de vista computacional, es muy elevado y que son muy difíciles de implementar en situaciones prácticas reales. Una forma más de modelar el transporte de sedimentos es utilizando modelos de dos fases y modelos tipo bicapas o multicapas, véase por ejemplo [49, 82]. Estos últimos pueden presentar algunas dificultades, como por ejemplo, la desaparición de unas de las fases o la pérdida de hiperbolicidad.

Es por estas razones que en este trabajo nos planteamos los siguientes objetivos:

- Deducir un modelo matemático de tipo aguas someras para el transporte de sedimentos sin hacer uso de la hipótesis de Boussinesq, con lo que se tendrá en cuenta la densidad de la mezcla de agua y sedimentos tanto en el término de presión como en el término convectivo del modelo.
- Desarrollar esquemas numéricos eficientes y robustos para calcular la solución numérica del modelo matemático obtenido.

Esta memoria está organizada de la siguiente manera:

- En el capítulo uno se presentan algunos modelos que han sido ampliamente estudiados para el transporte de sedimentos. Estos modelos parten del sistema de aguas someras, a los que se acopla la ecuación de Exner para la evolución del fondo. Como se ha mencionado antes, estos modelos solo tienen en cuenta el transporte por carga de fondo. Además se presenta un modelo que toma en cuenta el transporte de sedimentos tanto por carga de fondo como por carga en suspensión. Finalmente se presenta un modelo para flujos turbidíticos. Estos modelos ayudan a predecir el comportamiento de las acumulaciones sedimentarias en las margenes continentales, que resultan de la acumulación de sedimentos provenientes de la masa continental.
- En el capítulo dos se lleva a cabo la deducción de un modelo matemático para el transporte de sedimentos, donde no se ha utilizado la hipótesis de Boussinesq. Se hace el estudio de hiperbolicidad del modelo obtenido y se presenta una forma de

aproximar las velocidades características del sistema, que se usarán posteriormente en la solución numérica del modelo. Por otra parte, también se lleva a cabo el estudio de hiperbolicidad de uno de los modelos presentados en el capítulo uno. Finalmente, se hace un breve estudio de las soluciones estacionarias para el modelo deducido, por una parte, se estudian cuando no se tienen en cuenta los flujos de erosión y depósito y por lo otra se presentan las soluciones del agua en reposo cuando los flujos de erosión y depósito son tomados en cuenta.

- En el capítulo tres se presentan los resultados fundamentales que usaremos para la derivación de un esquema numérico de volúmenes finitos para el modelo deducido. En particular se hace un breve repaso de los esquemas camino-conservativos de primer orden y su extensión a segundo orden. A continuación se presenta el esquema numérico que hemos desarrollado para aproximar la solución numérica del modelo deducido en el capítulo dos. El esquema numérico es de dos pasos, siguiendo ideas similares a lo hecho en [92, 70, 84, 21]. En el primer paso se considera la aproximación de la parte hiperbólica del sistema utilizando un esquema numérico camino-conservativo, véase [94, 125]. En particular, el esquema numérico considerado no desacopla los términos responsables del transporte por carga y en suspensión. Como se mostró en [32], si se los esquemas numéricos que desacoplan la componente hidrodinámica y el transporte de fondo, pueden resultar inestables, en función del régimen del fluido. En el segundo paso del algoritmo, se aproximan los términos de erosión y depósito utilizando un esquema semi-implícito. que hasta donde conocemos, es original. El tratamiento semi-implícito de estos términos se traduce en un mayor robustez del esquema numérico. En particular, el esquema resultante preserva la positividad de la densidad y del espesor del fondo sedimentado. Dado que el esquema numérico elegido en el primer paso se construye de tal manera que garantiza la positividad de la altura del agua y de la carga suspendida, podemos garantizar que la solución global preservará la positividad y que el esquema es robusto.
- En el capítulo cuatro se realiza la extensión bidimensional del modelo matemático deducido en el capítulo dos, así como su aproximación numérica mediante el método de líneas, utilizando el esquema numérico presentado en el capítulo tres. Dicha extensión, se hace teniendo en cuenta que el sistema es invariante bajo rotaciones.
- En el capítulo cinco se presentan varios experimentos numéricos, tanto unidimensionales como bidimensionales. Estos experimentos numéricos nos permiten validar el modelo matemático deducido así como el esquema numérico propuesto para resolverlo, comparando los resultados con datos experimentales obtenidos en canales de laboratorio.

Esta tesis ha dado lugar a las siguientes publicaciones:

- J.C. González-Aguirre, M.J. Castro, T. Morales de Luna. A robust model for rapidly varying flows over movable bottom with suspended and bedload transport: Modelling and numerical approach. *Advances in Water Resources*, doi.org/10.1016/j.advwatres.2020.103575, 2020.
- J.C. González-Aguirre, J.A. González-Vázquez, J. Alavez-Ramírez, R. Silva, M.E. Vázquez-Cendón. Numerical simulation of bed load and suspendedload sediment transport using well-balanced numerical schemes. *Enviado a Communications on Applied Mathematics and Computation*, 2020.

Algunos resultados de esta tesis se han presentado en los siguientes congresos:

- Presentación oral: One dimensional numerical simulation of sediment transport based in shallow water flows. IX Symposium on the Iberian Atlantic Margin, Coimbra (Portugal). Septiembre 2018.
- Poster y charla corta: Numerical simulations of dam-break flows with sediment transport over movable bottom. Numerical Methods for Hyperbolic Problems (NumHyp2019), Málaga (España). Junio 2019.
- Poster: Numerical simulations of sediment transport based in shallow water equations. 9th International Congress on Industrial and Applied Mathematics. Valencia (España). Julio 2019.

Capítulo 1

Introducción

La mecánica de fluidos computacional es una de las herramientas más importantes para el estudio de múltiples fenómenos que ocurren en el medio ambiente, como por ejemplo, el flujo que se origina después de la rotura de una presa, la inundación producida por una riada, el comportamiento del agua después del desborde de ríos, la evolución de un agente contaminante en algún cuerpo de agua, la erosión en el lecho de un afluente, así como el transporte de sedimentos, entre otros. Para reducir los riesgos asociados a dichos fenómenos, es necesario tener predicciones muy fiables de los mismos y de las posibles consecuencias. Por desgracia es muy complicado y muy costoso desarrollar simulaciones físicas de dichos fenómenos en laboratorio.

Una alternativa es la simulación numérica de estos fluidos. Para poder llevar a cabo esto, es necesario tener o desarrollar modelos matemáticos que tengan en cuenta los fenómenos físicos a tratar. Del mismo modo, es importante desarrollar esquemas numéricos que den predicciones fiables, que ayuden a la toma de decisiones.

El transporte de sedimentos en ríos y los cambios morfológicos en los mismos están estrechamente relacionados. El término carga, como a menudo se define al transporte de sedimentos, es la cantidad de sedimento que es transportada en la corriente. Más específicamente se usa para definir la tasa (volumen o peso por unidad de tiempo y ancho) a la cual el sedimento es transportado.

En esta tesis nos centramos en el estudio del transporte de sedimentos tanto por carga en suspensión como por carga de fondo. Para esto último, es necesario estudiar o desarrollar modelos matemáticos que tengan en cuenta la interacción entre la evolución morfológica del sedimento y el fluido. Para el primero, hay que tener en cuenta el continuo intercambio entre el fondo sedimentado del cauce y el sedimento en suspensión, como se representa esquemáticamente en la Figura 1.1, lo cual es de suma importancia en la evolución del fondo de un río o de las áreas costeras. En este capítulo se dará una breve introducción al estudio del transporte de sedimentos y presentaremos algunos modelos matemáticos que pueden ser utilizados para predecir y entender los fenómenos que involucran al transporte de sedimentos.

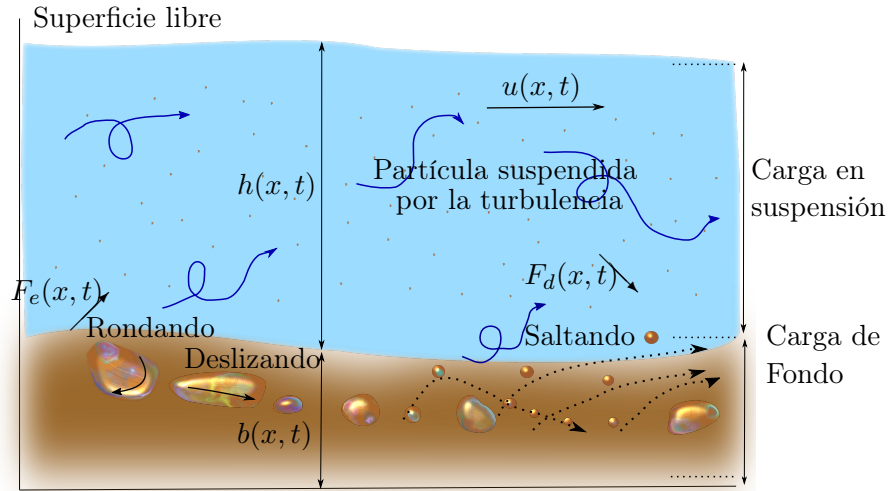


Figura 1.1: Esquema del transporte de sedimento por carga en suspensión y por carga de fondo

1.1. Transporte de fondo

El transporte de fondo es el modo de transporte de sedimentos donde las partículas sedimentarias se deslizan, ruedan o viajan en una sucesión de pequeños saltos, denominado saltación, pero siempre cerca del fondo. Esto se puede observar en la Figura 1.1. Este tipo de transporte usualmente se modela usando un sistema acoplado que contiene una componente hidrodinámica, que describe el comportamiento del fluido y una componente morfodinámica, que describe la evolución del fondo. A este tipo de sistema se le conoce como sistema tipo Exner para el transporte de sedimentos. La componente hidrodinámica se modela utilizando las ecuaciones de las aguas someras o ecuaciones de Saint-Venant [101], y la componente morfodinámica se modela a través de la ecuación de Exner, (ver [42, 43]), la cual sostiene que la variación temporal de un cierto volumen de la capa de sedimento se debe a la variación neta del transporte del sólido a través de las fronteras del volumen. El sistema toma entonces la forma:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right) = -gh \left(\frac{\partial b}{\partial x} + S_f \right), \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{1}{1-\psi} \frac{\partial q_b}{\partial x} = 0, \quad (1.3)$$

donde h representa la altura del agua, u es el promedio de la velocidad horizontal del fluido, b es la altura del fondo sedimentado, S_f es el término de fricción, g es la aceleración de la gravedad, q_b mide la tasa por unidad de tiempo del transporte por

carga de fondo y ψ es la porosidad del fondo sedimentado. Este modelo ha sido empleado en trabajos como [67, 2, 87, 20]. Notemos que la evolución del fondo se calcula a partir de las condiciones hidrodinámicas, mediante el término de transporte de fondo q_b

1.1.1. Flujo del transporte solido

Para cerrar el sistema tipo Exner, es necesario especificar el término del transporte de fondo, también conocido como transporte de caudal sólido. Las formulaciones para éste están basadas en leyes empíricas y sus expresiones han sido propuestas bajo la hipótesis de sedimentos granulares no cohesivos.

La más simple de la formulaciones fue propuesta por Grass [59], en la cual q_b viene determinado en función de la velocidad fluido y de un coeficiente constante A_g , que toma en cuenta las propiedades del material solido

$$q_b = A_g u |u|^{m_g - 1}, \quad 1 \leq m_g \leq 4. \quad (1.4)$$

El valor constante A_g se suele obtener de forma experimental y varía entre 0 y 1, de forma que si el valor es muy próximo a cero entonces el modelo refleja una interacción débil entre el fondo sedimentario y el fluido, mientras que si este valor es próximo a uno, la interacción entre el fondo y el fluido se dice que es fuerte, [20].

En la práctica, el cálculo del flujo del transporte se basa en el esfuerzo de tensión del fondo τ_b , es decir, en las fuerzas del agua que actúan sobre el fondo. En general, se define

$$\tau_b = \rho_0 g h S_f,$$

donde ρ_0 es la densidad del agua y S_f es el término de fricción, que puede calcularse mediante leyes empíricas. Las más usadas son:

- Darcy-Weisbach:

$$S_f = \frac{f u |u|}{8 g h}, \quad (1.5)$$

donde f es el coeficiente de Darcy-Weisbach.

- Manning:

$$S_f = \frac{\mu_f^2 u |u|}{h^{4/3}}, \quad (1.6)$$

donde μ_f es el coeficiente de Manning.

Las partículas en un lecho granular con circulación de corriente de agua en algún momento comenzarán a moverse. Para saber si una partícula puede o no estar en movimiento se emplea el diagrama de Shields, propuesto por éste en 1936. En el diagrama de Shields se propone la curva de principio de movimiento (o curva de Shields) en los ejes θ , esfuerzo de tensión del fondo y Re^* , Numero de Reynolds granular (véase Figura 1.2). Si el esfuerzo de tensión del fondo está por de bajo de la curva no habrá movimiento,

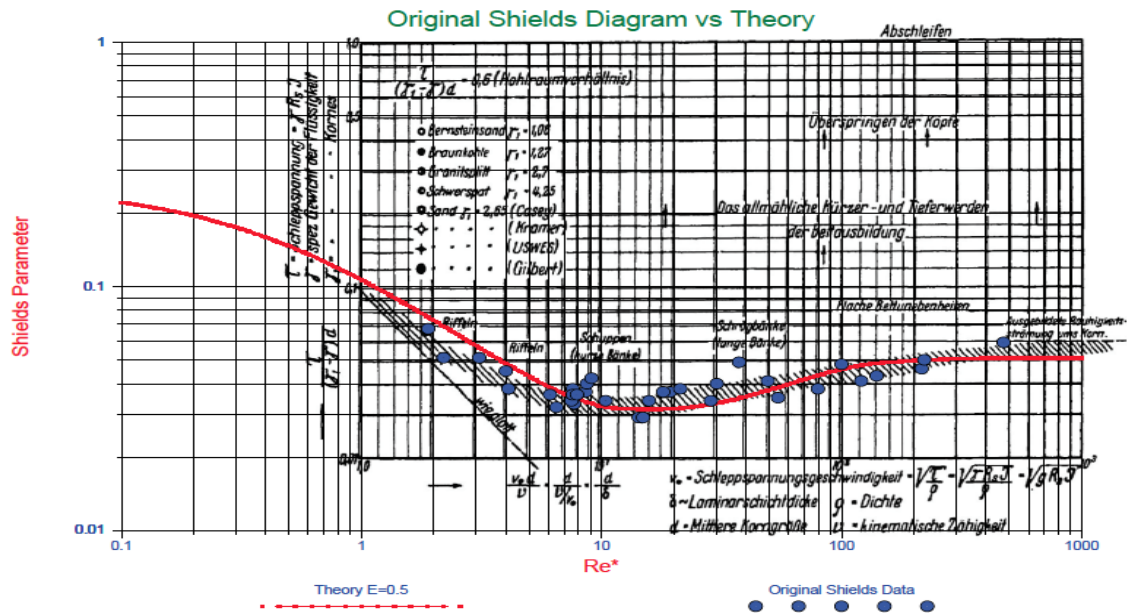


Figura 1.2: Curva de Shields

mientras que si éste está por encima de la curva las partículas podrán moverse, [102]. Los valores que están sobre la curva reciben los valores críticos de Shields y se denota por θ_c .

El esfuerzo de tensión del fondo se define de forma adimensional y se denota por θ , donde θ recibe el nombre de parámetro de Shields. Este parámetro se define como el cociente de las fuerzas de arrastre y el peso sumergido:

$$\theta = \frac{\tau_b}{(\rho_s - \rho_0)gd}, \quad (1.7)$$

donde ρ_s es la densidad del sedimento y d es el diámetro del sedimento. En este tipo de modelos de transporte de fondo o transporte de sólido, las partículas sedimentarias comienzan a moverse cuando el parámetro de Shields (θ) es mayor que el parámetro crítico de Shields (θ_c), es decir, cuando el parámetro de Shields está por encima de la curva de Shields.

La tasa de transporte de fondo puede ser formulada en función del parámetro de Shields como:

$$q_b \equiv \text{sgn}(u)Q\Phi(\theta), \quad (1.8)$$

para alguna función Φ que depende del parámetro de Shields (θ). Aquí Q representa el caudal característico y se define como

$$Q = d\sqrt{g\frac{\rho_s - \rho_0}{\rho_0}}d. \quad (1.9)$$

En la literatura podemos encontrar numerosas formulaciones que dependen del parámetro de Shields para estimar el transporte de fondo, entre las más comunes están:

- Meyer-Peter & Müller, [83]:

$$\Phi(\theta) = 8(\theta - \theta_c)_+^{3/2}. \quad (1.10)$$

- Fernández Luque y Van Beek, [44]:

$$\Phi(\theta) = 5.7(\theta - \theta_c)_+^{3/2}. \quad (1.11)$$

- Nielsen, [91]:

$$\Phi(\theta) = 12\sqrt{\theta}(\theta - \theta_c)_+. \quad (1.12)$$

- Ribberink, [100]:

$$\Phi(\theta) = 11(\theta - \theta_c)_+^{1.65}. \quad (1.13)$$

En cada una de estas formulaciones el valor $(\theta - \theta_c)_+$ se calcula como sigue

$$(\theta - \theta_c)_+ = \begin{cases} \theta - \theta_c & \text{si } \theta \geq \theta_c, \\ 0 & \text{si } \theta < \theta_c. \end{cases} \quad (1.14)$$

La hiperbolicidad de este tipo de modelos ha sido estudiada en [32]. En particular se tiene que cuando el parámetro de Shields se calcula empleando la formulación de Darcy-Weisbach el sistema resulta ser siempre hiperbólico. Por otro lado, si se calcula empleando la formulación de Manning, el sistema resulta ser hiperbólico condicionalmente. De hecho se demuestra que si $u < 6\sqrt{gh}$ el modelo es siempre hiperbólico, (véase [32]). Por lo tanto, los regímenes habituales de aplicación de estos modelos se encuentran en la región de hiperbolicidad.

1.2. Transporte en suspensión

En la sección previa hemos presentado brevemente los sistemas tipo Exner que se utilizan para modelar el transporte de fondo. En esta sección haremos lo propio para los sistemas que se usan para modelar el movimiento de las partículas sedimentarias en un fluido cuando éstas pierden el contacto con el fondo durante un largo periodo de tiempo. En este caso las partículas sedimentarias se dicen que están en suspensión y el modelo de transporte se denomina transporte en suspensión o carga suspendida. A la combinación de la partículas sedimentarias y el fluido se le suele conocer como la mezcla (*mezcla de agua y sedimentos*), que se caracteriza por una concentración volumétrica c y cuya densidad viene dada por

$$\rho = \rho_0 + c(\rho_s - \rho_0). \quad (1.15)$$

La forma más común para completar el sistema (1.1) - (1.3) es considerar una ecuación de transporte para la concentración volumétrica del material sedimentario

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = 0. \quad (1.16)$$

Tomando en cuenta esta última ecuación y la conservación de la masa (1.1) se sigue que

$$h \frac{\partial c}{\partial t} + hu \frac{\partial c}{\partial x} + c \frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial hu}{\partial x} = 0, \quad (1.17)$$

de donde se sigue que

$$\frac{\partial hc}{\partial t} + \frac{\partial huc}{\partial x} = 0, \quad (1.18)$$

que es la ecuación de conservación para la carga en suspensión.

Más aún, el sedimento en suspensión no es solo transportado si no que también existe un intercambio entre el sedimento en suspensión y el fondo. Este intercambio es el resultado de los procesos de erosión del fondo y el depósito. Por lo tanto, la ecuación (1.18) se reemplaza por

$$\frac{\partial hc}{\partial t} + \frac{\partial huc}{\partial x} = \phi_b, \quad (1.19)$$

donde ϕ_b mide el flujo de erosión y depósito y suele definirse como

$$\phi_b = F_e - F_d,$$

siendo F_e el flujo de erosión y F_d el flujo de depósito. Estos últimos flujos también se formulan empíricamente. Así, un sistema que tiene en cuenta el transporte por fondo y suspensión puede formularse como:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = \frac{\phi_b}{1 - \psi}, \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right) = -gh \left(\frac{\partial b}{\partial x} + S_f \right), \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial hc}{\partial t} + \frac{\partial huc}{\partial x} = \phi_b \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{1}{1 - \psi} \frac{\partial q_b}{\partial x} = -\frac{\phi_b}{1 - \psi} \quad (1.23)$$

donde, como antes, h es la altura del agua, u es el promedio en la columna de agua de la velocidad horizontal, c es la concentración volumétrica promediada en la vertical, b es la altura del fondo sedimentado, S_f es el término de fricción, q_b es el flujo del transporte de fondo, g es la gravedad, ψ es la porosidad, F_e y F_d representan el flujo de erosión y de depósito, respectivamente.

1.2.1. Procesos de Erosión y depósito

En esta sección presentaremos algunas formulaciones para el cálculo del flujo de erosión y el flujo de depósito. En la literatura podemos encontrar diversas formulaciones que han sido propuestas para calcular dichos flujos, algunas de ellas se pueden encontrar en [1, 9, 68, 71, 72, 84, 96].

Flujo de erosión

El flujo de erosión es el resultado de la turbulencia que puede tener el fluido y con ello pueda arrancar partículas del fondo sedimentado para hacerlas entrar en la corriente. Una de las formulaciones más empleadas y que se usa en trabajos como [80, 78, 15], fue introducida en [64], y se formula como sigue:

$$F_e = \begin{cases} \varphi(\theta - \theta_c)uh^{-1}d^{-0.2} & \text{si } \theta \geq \theta_c, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (1.24)$$

donde φ es un valor constante adimensional que se calcula como

$$\varphi = \phi \frac{560(1 - \psi)\nu^{0.8}}{3(R_s g)^{0.4}\theta_c}, \quad (1.25)$$

siendo ϕ un valor constante que deberá ser calibrado de acuerdo al experimento que se quiere recrear, $R_s = (\rho_s - \rho_0)/\rho_0$ es la densidad relativa sumergida y ν es la viscosidad cinemática del fluido. La expresión (1.25) se deduce de las formulas presentadas en [64] y [15].

De igual manera, otra formulación bastante popular propone que el flujo de erosión se puede modelar como el producto de la velocidad de caída (velocidad de asentamiento supuesto que el agua está en reposo) por la fracción de volumen del sedimento en el fondo por el coeficiente de arrastre

$$F_e = \omega_0 \mathcal{P} E_s. \quad (1.26)$$

El coeficiente de arrastre de sedimentos E_s se calcula usando la expresión propuesta por Garcia y Parker [52],

$$E_s = \frac{1.3 \times 10^{-7} \mathcal{Z}^5}{1 + 4.3 \times 10^{-7} \mathcal{Z}^5}, \quad (1.27)$$

donde

$$\mathcal{Z} = \alpha_1 \frac{\sqrt{c_D}|u|}{\omega_0} \mathcal{R}_p^{\alpha_2}, \quad (1.28)$$

y

$$\mathcal{R}_p = \frac{\sqrt{R_s g d} d}{\nu} \quad (1.29)$$

es el número de Reynolds de la partícula y c_D es el coeficiente de dragado. En [96, 9, 72, 71] se pueden encontrar los valores característicos de los parámetros (α_1, α_2) . La

constante \mathcal{P} representa la fracción del volumen de sedimento en el fondo. En [53] se dice que si \mathcal{P} representa la fracción volumétrica de sólidos, entonces, $\psi = 1 - \mathcal{P}$ denota la porosidad del volumen de control. Finalmente ω_0 es la velocidad de caída que puede obtenerse de forma experimental o usando la formulación propuesta por Zhang y Xie [126] y que ha sido empleada en [4, 80, 124, 127], entre otros trabajos.

$$\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{13.95\nu}{d}\right)^2 + 1.09R_s g d} - \frac{13.95\nu}{d}. \quad (1.30)$$

Flujos de depósito

En [64] se propone la siguiente formulación para el cálculo del flujo de depósito

$$F_d = \omega_0(1 - C_b)^m C_b, \quad (1.31)$$

siendo C_b la concentración volumétrica local cercana al fondo. Usualmente esta concentración C_b se supone proporcional a la concentración volumétrica c , es decir $C_b := \alpha c$, donde α es un coeficiente usualmente mayor que $1 - \psi$ (véase [15]). Cao propone calcular $\alpha := \min\{2, (1 - \psi)/c\}$. Siguiendo [76], el exponente m se calcula utilizando el número de Reynolds de la partícula,

$$m = 4.45\mathcal{R}_p^{-0.1}$$

Otras formulaciones proponen calcular el flujo de depósito como el producto de la velocidad de caída por la concentración por fracción de volumen cercana al fondo C_b

$$F_d = \omega_0 C_b. \quad (1.32)$$

En este caso, la concentración cercana al fondo C_b se calcula usando la fórmula propuesta por Bradford y Katopodes [9], la cual establece

$$\frac{C_b}{c} = 0.4 \left(\frac{d}{D_{sg}}\right)^{1.64} + 1.64, \quad (1.33)$$

donde D_{sg} es el tamaño geométrico medio de las partículas de la carga en suspensión de la mezcla de sedimentos y agua.

1.2.2. Flujos turbidíticos

Un fenómeno particular que está relacionado con con el transporte de sedimentos por carga en suspensión son las llamadas corrientes turbidíticas. Este tipo de corrientes se caracterizan por generar una pluma hiperpical o *hyperpycnal plume*, en inglés, que evoluciona a medida que la corriente se adentra el fluido ambiente. Cuando un río contiene una concentración elevada de sedimentos en suspensión, en la medida que la densidad del río es mayor que la del cuerpo de agua que lo recibe, el río puede hundirse y crear una corriente turbidítica. La pluma hiperpical puede viajar largas distancias

hasta perder su densidad al mezclarse con el agua que la rodea y depositar su carga de sedimentos en el fondo. Una representación esquemática de una corriente turbidítica se muestra en la Figura 1.3.

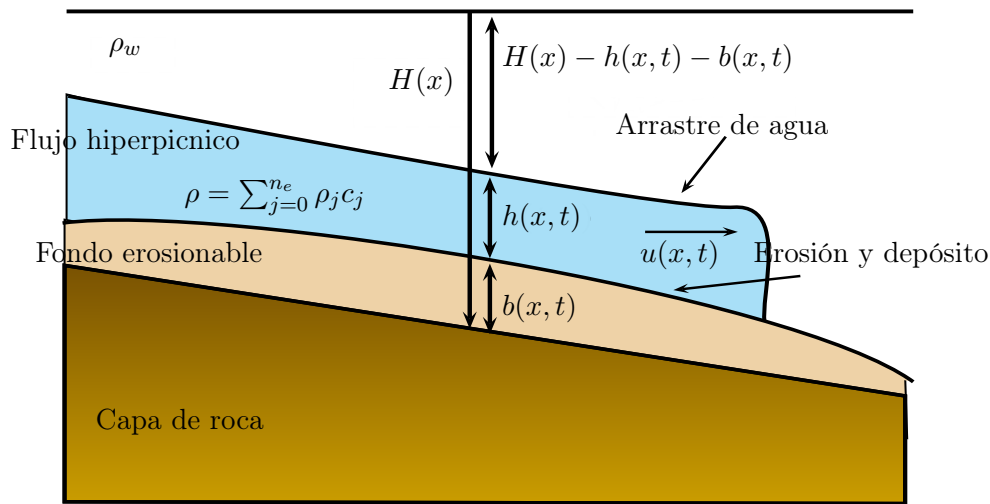


Figura 1.3: Esquema de una corriente turbidítica

Las corrientes turbidíticas son de gran importancia por su impacto profundo en las plataformas continentales y en las cuencas de los océanos. Comúnmente se acepta que son uno de los procesos potenciales a través de los cuales el sedimento puede ser llevado al fondo del mar. Una preocupación adicional son los efectos destructivos que las corrientes turbidíticas puedan tener en las estructuras submarinas como lo son cables, tuberías y pilones de puentes.

Algunos modelos han sido desarrollados a partir de experimentos a escala de corrientes turbidíticas conducidas por partículas, [1, 9]. En [84] se introdujo un modelo general que puede ser usado para describir corrientes turbidíticas.

Consideremos $n_e \geq 1$ especies de sedimentos con densidad constante ρ_j para $j = 1, \dots, n_e$ transportadas a través de una corriente de agua de densidad ρ_0 que desemboca o se sumerge en un fluido ambiente de densidad ρ_w .

Las ecuaciones que gobiernan este tipo de fenómenos toman la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = \phi_\eta + \phi_b, \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hu^2 + g(R_0 + R_c) \frac{h^2}{2} \right) \\ \qquad \qquad \qquad = -g(R_0 + R_c) h \frac{\partial}{\partial x} (b - H) + u\phi_\eta + \frac{u}{2}\phi_b, \\ \frac{\partial hc_j}{\partial t} + \frac{\partial hc_j u}{\partial x} = \phi_b^j, \quad j = 1, \dots, n_s, \\ \frac{\partial b}{\partial t} + \xi \frac{\partial q_b}{\partial x} = -\xi\phi_b, \end{array} \right. \quad (1.34)$$

donde h es la altura de la pluma, u es la velocidad horizontal, c_j representa la concentración volumétrica promediada en la vertical de la j -ésima especie de sedimentos, $c = \sum_{j=1}^{n_e} c_j$ es la concentración volumétrica total promediada en la vertical y

$$R_{sj} = \frac{\rho_j - \rho_0}{\rho_0}, \quad j = 1, \dots, n_e; \quad R_0 = \frac{\rho_0 - \rho_w}{\rho_0}; \quad \text{y} \quad R_c = \sum_{j=1}^{n_e} R_{sj} c_j. \quad (1.35)$$

H es la altura del fondo no erosionable medido desde una nivel de referencia. Usualmente se le suele llamar la profundidad de la capa de roca. Se denota por b a la altura de la capa de sedimentos en el fondo que puede ser modificada por el fluido por medio la erosión y el depósito y/o el transporte de fondo y $\xi = \frac{1}{1 - \psi}$.

El término fuente ϕ_η representa la cantidad de agua del medio que es arrastrada y que se mezcla con la pluma debido a la turbulencia. En general este arrastre de agua puede calcularse como

$$\phi_\eta = E_w |u|, \quad (1.36)$$

donde E_w representa el coeficiente de arrastre del agua y es calculado como función del número de Richardson

$$\mathcal{R}_i = \frac{R_c g h}{u^2}.$$

El término fuente ϕ_b^j representa el flujo de erosión y depósito de la j -ésima especie. El flujo de sedimentos, de la j -ésima especie, en el fondo es determinado por las tasas de erosión F_e^j y depósito F_d^j ,

$$\phi_b^j = F_e^j - F_d^j.$$

El flujo total de sedimentos en el fondo se calcula como

$$\phi_b = \sum_{j=1}^{n_e} F_e^j - F_d^j = F_e - F_d. \quad (1.37)$$

Para este tipo de sistemas, el movimiento del fluido ambiente (el mar o el océano que recibe la pluma) no se modeliza.

1.3. Transporte por fondo y suspensión en ríos o canales

Un modelo ampliamente estudiado para modelar el transporte de sedimentos en ríos o canales es el propuesto por Hu y Cao, 2009 [64] y que ha sido empleado en [15]. El modelo está basado en las ecuaciones de las aguas someras (también conocidas como ecuaciones de Saint-Venant) [101]. En este modelo se añade un término fuente a la ecuación de la conservación de masa que tiene en cuenta el intercambio de masa resultado de la entrada y salida de las partículas sedimentarias en suspensión. Al sistema de Saint-Venant se le acopla la ecuación de la conservación de masa para la carga en suspensión, junto con la ecuación de Exner [42, 43].

$$\frac{\partial(h\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(h\rho u)}{\partial x} = -\rho_b \frac{\partial b}{\partial t}, \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial(h\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(h\rho u^2 + \frac{1}{2}gh^2\rho \right) = -g(h\rho) \left(\frac{\partial b}{\partial x} + S_f \right), \quad (1.39)$$

$$\frac{\partial(hc)}{\partial t} + \frac{\partial(huc)}{\partial x} = \phi_b, \quad (1.40)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{1}{1-\psi} \frac{\partial q_b}{\partial x} = -\frac{\phi_b}{1-\psi}, \quad (1.41)$$

donde h es la altura de la mezcla de agua y sedimentos, u es la velocidad horizontal, ρ es la densidad de la mezcla, b es la altura de la capa de sedimentos que puede ser modificada por fluido gracias al flujo de erosión y el flujo de depósito, S_f es el término de fricción, c es la concentración volumétrica del sedimento, ϕ_b es el flujo de erosión y depósito, ψ es la porosidad del fondo, q_b es el flujo de transporte de fondo y $\rho_b = \rho_0\psi + \rho_s(1-\psi)$ es la densidad del fondo saturado y la densidad de la mezcla ρ está determinada en la ecuación (1.15).

Con el fin de tener una ecuación que describa el comportamiento de la altura de la mezcla, el sistema de ecuaciones (1.38)-(1.41) se reescribe de la siguiente manera:

Desarrollando la ecuación (1.38) se tiene:

$$\rho \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} \right) + h \frac{\partial \rho}{\partial t} + hu \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho_b \frac{\partial b}{\partial t}. \quad (1.42)$$

De la definición de ρ (1.15), se puede ver que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = (\rho_s - \rho_0) \frac{\partial c}{\partial t} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = (\rho_s - \rho_0) \frac{\partial c}{\partial x}.$$

Sustituyendo estas expresiones en (1.42), se sigue que:

$$\rho \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} \right) = -\rho_b \frac{\partial b}{\partial t} + (\rho_0 - \rho_s) \left(h \frac{\partial c}{\partial t} + hu \frac{\partial c}{\partial x} \right). \quad (1.43)$$

De la ecuación (1.40), se obtiene la siguiente igualdad

$$h \frac{\partial c}{\partial t} + hu \frac{\partial c}{\partial x} = \phi_b - c \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} \right). \quad (1.44)$$

Sustituyendo (1.41), pero despreciando el transporte por carga fondo q_b , y (1.44) en la ecuación (1.43) se obtiene

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} \right) (\rho + c(\rho_0 - \rho_s)) = \frac{\phi_b}{1 - \psi} (\rho_b + (1 - \psi)(\rho_0 - \rho_s)). \quad (1.45)$$

Teniendo en cuenta la definición de la densidad de la mezcla y la densidad del fondo saturado, (1.45) toma la forma

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = \frac{\phi_b}{1 - \psi}. \quad (1.46)$$

La ecuación (1.46) representa el balance de masa para la mezcla de agua y sedimentos. En el término fuente se tiene en cuenta el intercambio entre la mezcla y el fondo sedimentado. Dicho término fuente no solo es significativo para eventos extraordinarios (por ejemplo, rotura de presas e inundaciones) sino que también es significativo para flujos en los cuales haya la presencia de transporte de sedimentos y evolución morfológica. Sin la presencia de este término fuente, los efectos que puedan darse debido a la entrada de partículas en la corriente, gracias al flujo de erosión y la salida de las mismas gracias al flujo de depósito, no serían tomados en cuenta al modelar la conservación del volumen y esto podría acarrear problemas como la creación o destrucción de masa de forma espuria.

Realizando un proceso similar al descrito previamente, la ecuación (1.39) se puede reescribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right) &= gh \left(-\frac{\partial b}{\partial x} - S_f \right) \\ &\quad - \frac{(\rho_s - \rho_0)gh^2}{2\rho} \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{(\rho_b - \rho)\phi_b u}{\rho(1 - \psi)}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

La ecuación (1.47) representa la ley de balance para el momento por unidad de volumen de la mezcla de agua y sedimento.

El segundo término en el lado derecho de la ecuación (1.47) representa el efecto de la concentración volumétrica variable del sedimento en el sentido de la corriente y el tercer término, representa la transferencia de momento debida al intercambio entre la columna de agua y el fondo movable. La carga en suspensión se modelan mediante

$$\frac{\partial(hc)}{\partial t} + \frac{\partial(hcu)}{\partial x} = \phi_b, \quad (1.48)$$

que representa el balance del sedimento suspendido por unidad de volumen. Por último, la variación del fondo se modelan mediante la ecuación de Exner

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{1}{1 - \psi} \frac{\partial q_b}{\partial x} = -\frac{\phi_b}{1 - \psi}, \quad (1.49)$$

donde q_b representa el transporte de la carga de fondo.

Observación 1.3.1 *Los modelos matemáticos presentados previamente consideran una distribución hidrostática de la presión. En el trabajo de Cantero-Chinchilla et al. [13], se propone un sistema donde la componente hidrodinámica se modela mediante un sistema no-hidrostático, lo cual es más realista para el modelado del transporte de sedimentos. La contrapartida es que, el modelo resultante es computacionalmente más costoso de resolver. En este trabajo nos limitaremos a modelos cuya componente hidrodinámica se supone hidrostática.*

Capítulo 2

Derivación de un nuevo modelo para el transporte y arrastre de sedimentos en aguas someras

La mayoría de los modelos que se pueden encontrar en la literatura para modelar el transporte de sedimentos utilizan la hipótesis de Boussinesq para su deducción, es decir, en la deducción de estos modelos se ha supuesto que las variaciones de la densidad de la mezcla de sedimentos y agua son pequeñas, con lo cual, en los términos de inercia y en la ecuación de continuidad, se considera constante dicha densidad. Sin embargo, incluso variaciones pequeñas pueden ser relevantes cuando se está hablando de la flotabilidad de las partículas sedimentarias, es decir, es necesario conservar las variaciones de la densidad de la mezcla en el término de flotabilidad en la ecuación de movimiento vertical. Además, la hipótesis de Boussinesq suponen una restricción a la aplicabilidad del modelo.

En este capítulo se deduce un modelo matemático para el transporte de sedimentos, tanto por carga de fondo como por carga en suspensión, sin hacer uso de la hipótesis de Boussinesq, es decir, que en los términos de inercia y en la ecuación de continuidad no se supondrá que la densidad de la mezcla puede ser aproximada por una constante. También se hará el estudio de hiperbolicidad para el sistema deducido así como para el sistema que hemos presentado en la sección 1.3.

Sean $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ el dominio espacial y $t \geq 0$ el dominio temporal. Consideremos agua fluyendo sobre un fondo movable $b(\mathbf{x}, t)$, tal que el flujo contiene partículas sedimentarias en suspensión de diámetro d y concentración volumétrica $c(\mathbf{x}, t)$, dando lugar a una mezcla de agua y sedimentos que tiene una densidad $\rho(\mathbf{x}, t)$. El movimiento del flujo puede ser descrito mediante la evolución temporal de su altura $h(\mathbf{x}, t)$ y de su velocidad $\mathbf{u}(\mathbf{x}, z, t) = (u(\mathbf{x}, z, t), v(\mathbf{x}, z, t), w(\mathbf{x}, z, t))$. Denotaremos por ρ_0 a la densidad del agua pura, por ρ_s a la densidad del sedimento, por ψ a la porosidad del fondo y por $\rho_b = \rho_0\psi + \rho_s(1 - \psi)$ a la densidad del fondo saturado. Como se mencionó en el Capítulo 1, la evolución del fondo es el resultado de los flujos de erosión $F_e(\mathbf{x}, t)$, depósito $F_d(\mathbf{x}, t)$ y del transporte de fondo $q_b(\mathbf{x}, t)$.

2.1. Deducción de un modelo sin usar la hipótesis de Boussinesq

La deducción de los modelos clásicos para el transporte de sedimentos emplea la hipótesis de Boussinesq para flujos con transporte por carga en suspensión, ver por ejemplo [64, 76, 93, 16, 77], entre otros. Para los casos en los cuales esta suposición no sea cierta, los modelos no nos proporcionarán soluciones fiables. Por ello, en este apartado presentamos la deducción de un modelo matemático para el transporte de sedimentos sin usar dicha hipótesis, resultando en un modelo más realista.

El punto de partida para la derivación de nuestro modelo son las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de continuidad para la densidad $\rho(\mathbf{x}, t)$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \mathcal{T} + \rho \mathbf{g}, \quad (2.3)$$

donde $p(\mathbf{x}, t)$ denota la presión instantánea. El vector $\mathbf{g} = (0, 0, -g)^t$ es la gravedad y

$$\mathcal{T} = \mu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t) \quad (2.4)$$

es el tensor de esfuerzos (*tensor stress*), donde μ es el producto del coeficiente de viscosidad cinemática (ν) y la densidad (ρ). Más detalles acerca de la deducción de este modelo pueden ser consultadas por ejemplo en [23]. Consideraremos las condiciones de frontera cinemáticas. Dichas condiciones han sido detalladas en [84].

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u|_{z=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + v|_{z=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} - w|_{z=\eta} = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + u|_{z=b} \frac{\partial b}{\partial x} + v|_{z=b} \frac{\partial b}{\partial y} - w|_{z=b} = -\tilde{\phi}_b, \quad (2.6)$$

donde $\tilde{\phi}_b = (1 + (\partial_x b)^2 + (\partial_y b)^2)^{1/2} \varphi^b$, φ^b es la tasa normal de depósito/erosión y la variable $\eta = h + b$ representa la superficie libre del fluido.

En lo que sigue y por simplicidad, consideraremos despreciables las variaciones en la dirección horizontal y deduciendo un modelo integrado en altura unidimensional. Sin embargo todo lo aquí expuesto puede ser extendido fácilmente en otro caso.

2.1.1. Integración vertical de las ecuaciones

Para llevar a cabo el proceso de integración en la vertical, consideraremos que los efectos horizontales son predominantes, es decir, que los efectos en la vertical son despreciables. Del mismo modo supondremos que las variaciones verticales de la velocidad

son pequeñas en comparación que las variaciones horizontales de la velocidad. Teniendo en cuenta estas consideraciones, procedemos a integrar sobre la vertical las ecuaciones para obtener un modelo matemático para el flujo del transporte de sedimentos.

Integrando la ecuación (2.1) desde $z = b$ hasta $z = \eta$, obtenemos

$$\int_b^\eta \frac{\partial \rho}{\partial t} dz + \int_b^\eta \frac{\partial \rho u}{\partial x} dz = \rho w|_{z=b} - \rho w|_{z=\eta}. \quad (2.7)$$

Teniendo en cuenta las condiciones de frontera cinemática (2.5) y (2.6), la ecuación (2.7) toma la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_b^\eta \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_b^\eta \rho u dz = \rho \tilde{\phi}_b. \quad (2.8)$$

La ecuación de conservación del momento (2.3) escrita en términos de sus componentes se escribe como

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho u w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x^2} + \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial z} \right), \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial \rho w u}{\partial x} + \frac{\partial \rho w^2}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial x} + 2 \frac{\partial w}{\partial z^2} \right) - \rho g, \quad (2.10)$$

donde $\tilde{\tau} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$.

Junto a la hipótesis de que las variaciones verticales son despreciables, haremos la suposición de presión hidrostática en (2.10)

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (2.11)$$

Del mismo modo, consideremos despreciables los efectos viscosos horizontales, es decir, $\partial_{xx} u = 0$. Por lo tanto, integrando (2.9) desde b hasta η se tiene que

$$\int_b^\eta \frac{\partial \rho u}{\partial t} dz + \int_b^\eta \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} dz + \int_b^\eta \frac{\partial p}{\partial x} dz = \rho u|_{z=b} w|_{z=b} - \rho u|_{z=\eta} w|_{z=\eta} + \mu (\tilde{\tau}|_{z=\eta} - \tilde{\tau}|_{z=b}), \quad (2.12)$$

teniendo en cuenta las condiciones de frontera cinemáticas, (2.12) toma la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_b^\eta \rho u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_b^\eta \rho u^2 dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_b^\eta p dz = \rho u|_{z=b} \tilde{\phi}_b + \mu (\tilde{\tau}|_{z=\eta} - \tilde{\tau}|_{z=b}). \quad (2.13)$$

Definición 2.1.1 Para cualquier función $f(x, z, t)$ se define su promedio en la dirección vertical como

$$\bar{f} = \frac{1}{h} \int_b^\eta f dz. \quad (2.14)$$

La parte fluctuante \hat{f} de f relativa al promedio se define como

$$\hat{f} = f - \bar{f}. \quad (2.15)$$

A partir de la Definición (2.1.1) se puede ver que dadas dos funciones f_1, f_2 se tiene

$$h\overline{f_1 f_2} + \int_b^\eta \widehat{f_1} \widehat{f_2} dz = \int_b^\eta f_1 f_2 dz. \quad (2.16)$$

Usando la Definición (2.1.1) y teniendo en cuenta (2.16), la ecuación (2.8) se transforma en

$$\frac{\partial h\bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(h\bar{\rho}\bar{u} + \int_b^\eta \widehat{\rho u} dz \right) = \rho \tilde{\phi}_b. \quad (2.17)$$

Integrando la ecuación de la presión hidrostática (2.11) y teniendo en cuenta (2.15), se tiene que

$$p(x, z, t) = g\bar{\rho}(\eta - z) + g \int_z^\eta \widehat{\rho} dz', \quad (2.18)$$

por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial x} p(x, z, t) = g\bar{\rho} \frac{\partial \eta}{\partial x} + g(\eta - z) \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial x} \int_z^\eta \widehat{\rho} dz'. \quad (2.19)$$

De esta última ecuación podemos obtener que

$$\int_b^\eta \frac{\partial p}{\partial x} dz = gh\bar{\rho} \frac{\partial \eta}{\partial x} + g \frac{h^2}{2} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + g \int_b^\eta \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_z^\eta \widehat{\rho} dz' \right) dz. \quad (2.20)$$

Sustituyendo (2.20) en (2.13) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_b^\eta (\rho u) dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_b^\eta (\rho u^2) dz + gh\bar{\rho} \frac{\partial \eta}{\partial x} + gh\bar{\rho} \frac{\partial \eta}{\partial x} + g \frac{h^2}{2} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} \\ + g \int_b^\eta \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_z^\eta \widehat{\rho} dz' \right) dz = \mu(\tilde{\tau}|_{z=\eta} - \tilde{\tau}|_{z=b}) + \rho u|_{z=b} \tilde{\phi}_b. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Usando la definición 2.1.1 y teniendo en cuenta la ecuación (2.15), obtenemos la ecuación de momentos promediada en la vertical

$$\begin{aligned} \frac{\partial h\bar{\rho}\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial h(\bar{\rho}\bar{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{h^2}{2} \bar{\rho} \right) = -gh\bar{\rho} \frac{\partial b}{\partial x} \\ + \mu(\tilde{\tau}|_{z=\eta} - \tilde{\tau}|_{z=b}) + \rho u|_{z=b} \tilde{\phi}_b - \frac{\partial}{\partial t} \int_b^\eta \widehat{\rho u} dz \\ - \frac{\partial}{\partial x} \int_b^\eta \widehat{\rho u^2} dz - g \int_b^\eta \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_z^\eta \widehat{\rho} dz' \right) dz. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Consideraremos que el tensor de esfuerzos puede ser expresado en términos de la velocidad promedio \bar{u} , con lo cual podemos escribir

$$\mu(\tilde{\tau}|_{z=\eta} - \tilde{\tau}|_{z=b}) = \tau(\bar{u}). \quad (2.23)$$

Siguiendo el trabajo desarrollado en [84], escribiremos

$$\phi_b = c \tilde{\phi}_b. \quad (2.24)$$

Asumiremos que la partes fluctuantes son despreciables. Comúnmente, se puede expresar la velocidad en la superficie $u|_{z=\eta}$ y en el fondo $u|_{z=b}$ por medio de la velocidad promedio \bar{u} . Las consideraciones entrópicas llevan a asumir que $u|_{z=\eta} = \bar{u}$ y $u|_{z=b} = \frac{1}{2}\bar{u}$ (véase [96, 8] para más detalles). Teniendo en cuenta estas consideraciones, y usando la definición de la densidad de la mezcla (1.15) en el término fuente de la ecuación (2.17), obtenemos

$$\frac{\partial h\bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{\rho}\bar{u}}{\partial x} = \rho_0\tilde{\phi}_b + \phi_b(\rho_s - \rho_0). \quad (2.25)$$

Por su parte, usando las consideraciones señaladas previamente, la ecuación de la conservación de los momentos (2.22), toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial h\bar{\rho}\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{\rho}\bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{h^2}{2} \bar{\rho} \right) &= -gh\bar{\rho} \frac{\partial b}{\partial x} \\ &+ \tau(\bar{u}) + \bar{\rho} \frac{\bar{u}}{2} \phi_b. \end{aligned} \quad (2.26)$$

A partir de ahora omitiremos el uso del símbolo $\bar{}$ para referirnos a las variables promediadas en la vertical y los efectos del tensor de esfuerzos serán medidos a través del término de fricción S_f .

Para tener en cuenta las deformaciones del fondo en la ecuación (2.25), siguiendo lo hecho en [64], la densidad del sedimento ρ_s , que aparece en el término fuente, suele escribirse en términos de la densidad del fondo saturado $\rho_b = \rho_0\psi + \rho_s(1 - \psi)$, con lo cual (2.25) se puede escribir como

$$\frac{\partial h\rho}{\partial t} + \frac{\partial h\rho u}{\partial x} = \frac{\phi_b\rho_b}{1 - \psi} + \rho_0 \left(\tilde{\phi}_b - \frac{\phi_b}{1 - \psi} \right). \quad (2.27)$$

Consideremos el caso simple donde el sedimento está confinado en un dominio cerrado, es decir, que no existe flujo de sedimento a través de las fronteras, más aún supongamos que $u = 0$. Entonces, en el interior del dominio, la conservación de la masa del sedimento se expresa como

$$\frac{\partial}{\partial t} (h\rho + \rho_b b) = 0. \quad (2.28)$$

Bajo las consideraciones previas, estamos diciendo que no existe arrastre de fondo y el movimiento del fondo es resultado de los procesos de erosión y depósito. Entonces, la ecuación para la evolución morfodinámica toma la forma

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -\frac{\phi_b}{1 - \psi}. \quad (2.29)$$

Sustituyendo (2.27) y (2.29) en la conservación de la masa del sedimento (2.28), se tiene que

$$\tilde{\phi}_b - \frac{\phi_b}{1 - \psi} = 0. \quad (2.30)$$

Desarrollando la forma integral promediada (2.17) de la ecuación de continuidad (2.1), despreciando los términos de fluctuación y teniendo en cuenta que la densidad es transportada y considerando la ecuación (2.30), podemos obtener la ecuación de conservación del volumen del agua

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = \frac{\phi_b}{1 - \psi}. \quad (2.31)$$

En este punto debemos recalcar que no hemos utilizado la hipótesis de Boussinesq en el proceso de deducción del modelo. Finalmente el modelo para el transporte de sedimentos tanto por carga en suspensión como por carga de fondo toma la forma

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = \frac{\phi_b}{1 - \psi}, \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial h\rho}{\partial t} + \frac{\partial h\rho u}{\partial x} = \frac{\phi_b \rho_b}{1 - \psi}, \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial h\rho u}{\partial t} + \frac{\partial h\rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{h^2}{2} \rho \right) = -gh\rho \left(\frac{\partial b}{\partial x} + S_f \right) + \rho \frac{u}{2} \phi_b, \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{1}{1 - \psi} \frac{\partial q_b}{\partial x} = -\frac{\phi_b}{1 - \psi}, \quad (2.35)$$

donde h es la altura del fluido, u es el promedio vertical de la velocidad horizontal, ρ es la densidad promedio en la vertical, b es la altura del fondo sedimentado, g es la gravedad, ϕ_b es el flujo de sedimentos en el fondo, S_f es término de fricción, ψ es la porosidad del sedimento y q_b representa el flujo de sedimento por carga de fondo. Como se ha mencionado en la sección 1.2, el flujo de sedimentos se calcula como $\phi_b = F_e - F_d$. En esa misma sección se han presentado algunas formulaciones para el flujo de erosión F_e y el flujo de depósito F_d . Para este modelo en particular, se emplea la formulación dada en (1.26) para el flujo de erosión y la formulación (1.32) para el flujo de depósito. Por su parte, el término de fricción se calcula mediante la formulación de Manning (1.6).

Comparando el modelo deducido en esta sección con el modelo presentado en la sección 1.3 podemos ver que la ecuación de la conservación del volumen (2.32) es similar a la ecuación (1.46). La evolución temporal del fondo sedimentado se modela por la ecuación de Exner, como se puede ver en las ecuaciones (2.35) y (1.49).

La ecuación de la conservación de los momentos (2.34) se diferencia de la conservación de los momentos (1.47) porque en (2.34) la densidad de la mezcla aparece en cada uno de los términos, mientras que en (1.47) la densidad de la mezcla solo está presente en los dos últimos términos del término fuente de dicha ecuación. Más aún,

el tercer término en el lado derecho de (1.47) es el responsable de los efectos de la concentración variable en el fluido, mientras que estos efectos, en la ecuación (2.34), se tienen en cuenta tanto en el término convectivo así como en los términos de presión. Ambas modelos poseen un término que modela la transferencia de momento debida al intercambio de partículas entre el fondo saturado y la columna del fluido

Una diferencia muy marcada entre ambos modelos es la forma como se modela la evolución de la carga en suspensión. Mientras que en la ecuación (1.48) se emplea la concentración volumétrica del sedimento por unidad de volumen en la ecuación (2.33) se usa la densidad de la mezcla.

2.1.2. Formulación general del modelo

El sistema en ecuaciones diferenciales parciales (2.32)–(2.35) puede ser escrito en forma vectorial de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{W})}{\partial x} + \mathbf{B}(\mathbf{W}) \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = \mathbf{G}(\mathbf{W}) + \mathbf{S}_f(\mathbf{W}), \quad (2.36)$$

donde el vector de variables conservadas toma la forma $\mathbf{W} = (h, h\rho, h\rho u, b)^t$.

El flujo físico, en el que se consideran los efectos convectivos, se escribe como

$$\mathbf{F}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} hu \\ h\rho u \\ h\rho u^2 \\ \frac{q_b}{1-\psi} \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

la matriz $\mathbf{B}(\mathbf{W})$ que tiene en cuenta los términos de presión, toma la forma

$$\mathbf{B}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{g}{2}h\rho & \frac{g}{2}h & 0 & gh\rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

los términos fuentes que tienen en cuenta la erosión y el depósito y el término de fricción tienen la forma

$$\mathbf{G}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} \frac{\phi_b}{1-\psi} \\ \frac{\phi_b \rho_b}{1-\psi} \\ \frac{\rho_b \phi_b}{2} \\ \frac{\phi_b}{1-\psi} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -gh\rho S_f \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

El sistema (2.36) también puede ser escrito en forma cuasi-lineal como

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathcal{A}(\mathbf{W}) \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = \mathbf{G}(\mathbf{W}) + \mathbf{S}_f(\mathbf{W}), \quad (2.40)$$

donde $\mathcal{A}(\mathbf{W}) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}} + \mathbf{B}(\mathbf{W})$.

2.1.3. Hiperbolicidad del sistema

Dado que el flujo del transporte del fondo q_b no depende de la profundidad del fondo b , se tiene que $\frac{\partial q_b}{\partial b} = 0$.

Consideremos la matriz

$$\mathcal{A}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} u & -\frac{u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{g}{2}h\rho & \frac{g}{2}h - u^2 & 2u & gh\rho \\ \alpha & \beta & \delta & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

donde

$$\alpha = \frac{\partial q_b}{\partial h}, \quad \beta = \frac{\partial q_b}{\partial(h\rho)}, \quad \delta = \frac{\partial q_b}{\partial(h\rho u)}.$$

Siguiendo la idea introducida en [32], el flujo del transporte de la carga de fondo puede ser escrito como función del parámetro de Shields, es decir,

$$q_b \equiv \text{sgn}(u)\Phi(\theta),$$

para alguna función Φ . En el caso particular de la formulación de Meyer-Peter & Müller, que utilizaremos en este trabajo, se tiene que

$$\Phi(\theta) = 8Q(\theta - \theta_c)_+^{3/2}.$$

Cabe señalar que todo lo argumentado en este trabajo puede ser fácilmente generalizado para cualquier otra formulación del flujo de transporte de sólido. Así, teniendo en cuenta la forma de q_b , se tiene que

$$\alpha = \text{sgn}(u)\Phi'(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial h} \quad \beta = \text{sgn}(u)\Phi'(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial(h\rho)} \quad \delta = \text{sgn}(u)\Phi'(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial(h\rho u)}. \quad (2.42)$$

De la definición (1.7) del parámetro de Shields, utilizando la formulación de Manning para el cálculo de τ_b , se ve que

$$\frac{\partial \theta}{\partial h} = -\frac{1}{6}\rho u \frac{\partial \theta}{\partial(h\rho u)}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial(h\rho)} = -u \frac{\partial \theta}{\partial(h\rho u)}. \quad (2.43)$$

Por lo tanto, sustituyendo (2.43) en (2.42), es fácil obtener que

$$\alpha = -\frac{1}{6}\rho u\delta, \quad \beta = -u\delta. \quad (2.44)$$

Mediante algunos cálculos simples se puede ver que el polinomio característico de la matriz \mathcal{A} puede escribirse como

$$p(\lambda) = -(u - \lambda)(\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0), \quad (2.45)$$

siendo

$$\begin{aligned} a_2 &= -2u \\ a_1 &= -\left(gh\rho\left(\delta + \frac{1}{2\rho}\right) + \left(\frac{g}{2}h - u^2\right)\right) \\ a_0 &= -gh\rho\left(\beta + \frac{\alpha}{\rho}\right). \end{aligned}$$

Es claro pues que u es un valor propio de la matriz \mathcal{A} .

Para probar la hiperbolicidad del sistema (2.40) necesitamos asegurar que el polinomio cúbico en el lado derecho de (2.45) tiene tres raíces reales. Primero, notemos que dicho polinomio cúbico puede ser escrito como

$$P_A(\lambda) = f(\lambda) - d(\lambda), \quad (2.46)$$

donde

$$f(\lambda) = \lambda((u - \lambda)^2 - gh), \quad (2.47)$$

$$d(\lambda) = gh\rho\left(\lambda - \frac{7}{6}u\right)\delta. \quad (2.48)$$

Entonces, el polinomio cúbico tendrá tres raíces si la recta $d(\lambda)$ corta a la curva $f(\lambda)$ en tres puntos. Esto ocurre si la raíz de $d(\lambda)$, que es $\alpha_d = \frac{7}{6}u$, está entre las raíces α_{\pm} de las rectas $d_{\pm}(\lambda)$, donde, $d_{\pm}(\lambda)$ son rectas tangentes a la curva $f(\lambda)$ y paralelas a $d(\lambda)$, respectivamente. Un esquema gráfico de la demostración se puede ver en la Figura 2.1.

De manera explícita, las ecuaciones de las rectas $d_{\pm}(\lambda)$ son

$$d_{\pm}(\lambda) = f(\lambda_{\pm}) + gh\rho\delta(\lambda - \lambda_{\pm}), \quad (2.49)$$

donde

$$\lambda_{\pm} = \frac{2u \pm \sqrt{u^2 + 3gh(1 + \rho\delta)}}{3}. \quad (2.50)$$

Por lo tanto, las raíces de $d_{\pm}(\lambda)$ son

$$\alpha_{\pm} = \lambda_{\pm} - \frac{f(\lambda_{\pm})}{gh\rho\delta}. \quad (2.51)$$

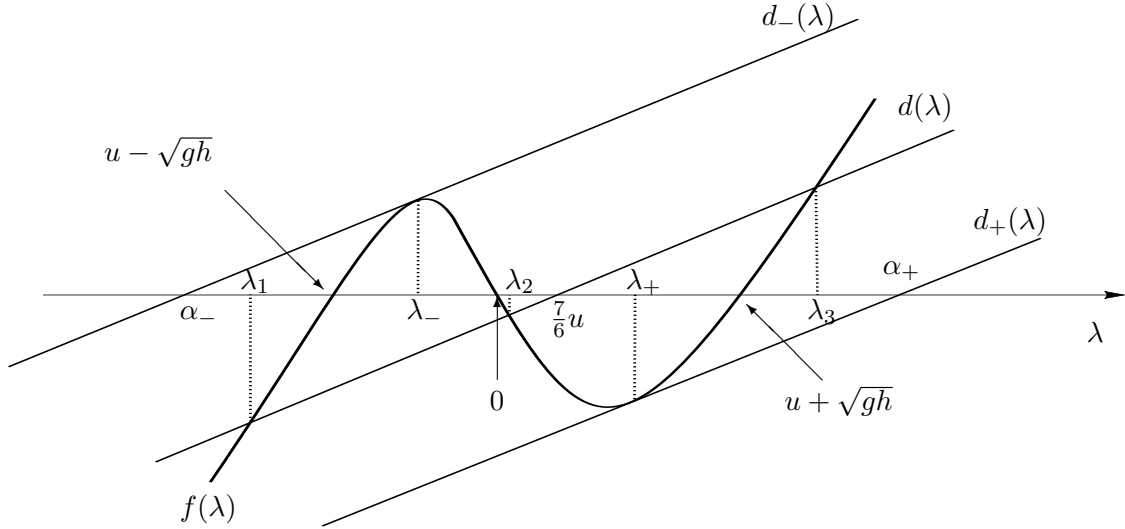


Figura 2.1: Esquema gráfico de la demostración de la hiperbolicidad

De aquí se obtiene que el sistema (2.40) será hiperbólico siempre que se verifique la relación

$$\alpha_- < \frac{7}{6}u < \alpha_+. \quad (2.52)$$

Se puede comprobar fácilmente que siempre se tiene la relación

$$\alpha_- < u - \sqrt{gh} < u + \sqrt{gh} < \alpha_+. \quad (2.53)$$

Por otra parte, si $|u| < 6\sqrt{gh}$, entonces se tiene que

$$u - \sqrt{gh} < \frac{7}{6}u < u + \sqrt{gh}. \quad (2.54)$$

De las desigualdades (2.53) y (2.54) se puede concluir la desigualdad (2.52). Entonces, siempre que se cumpla la relación $|u| < 6\sqrt{gh}$ el sistema (2.40) será hiperbólico. En otras palabras, la desigualdad $|u| < 6\sqrt{gh}$, establece una condición suficiente pero no necesaria que deben satisfacer los regímenes para que el sistema (2.40) sea hiperbólico. En cualquier caso, los regímenes habituales que vamos a considerar corresponden a fluidos que satisfacen dicha relación.

2.1.4. Aproximación de las velocidades características

Una forma de conocer las expresiones algebraicas de los valores propios de \mathcal{A} es emplear las ecuaciones de Cardano-Vieta, el problema es que las expresiones que se obtienen no son sencillas lo que aumenta el coste computacional. Nosotros hemos optado aquí por usar las aproximaciones que resultan al dar una iteración del método de aproximación como el método Newton-Raphson tomando como valor inicial los valores propios del polinomio característico, $f(\lambda)$, de las aguas someras. Dicho procedimiento se puede ver en la Figura 2.2.

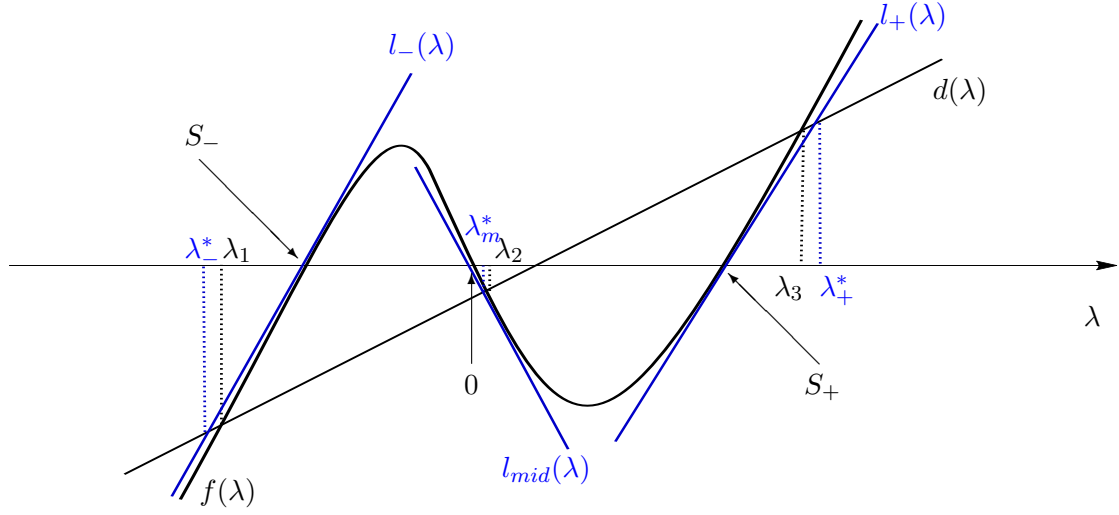


Figura 2.2: Esquema gráfico del procedimiento para aproximar las velocidades características

- Consideremos

$$S_- = u - \sqrt{gh}, \quad S_{mid} = 0, \quad y \quad S_+ = u + \sqrt{gh}, \quad (2.55)$$

las raíces de (2.47).

- Se calcula la recta tangente $l_{\pm}(\lambda)$ a la curva $f(\lambda)$ en el punto $(S_{\pm}, 0)$

$$l_{\pm}(\lambda) = f'(S_{\pm})(\lambda - S_{\pm}). \quad (2.56)$$

- Se resuelve la ecuación $l_{\pm}(\lambda) = d(\lambda)$, cuya solución es

$$\lambda_{\pm}^* = \frac{f'(S_{\pm})S_{\pm} - \frac{7}{6}gh\rho u\delta}{f'(S_{\pm}) - gh\rho\delta}. \quad (2.57)$$

- Se calcula la recta tangente l_{mid} a la curva $f(\lambda)$ en el punto $(0, 0)$ y se soluciona la ecuación $l_{mid}(\lambda) = d(\lambda)$, con lo cual se obtiene

$$\lambda_m^* = -\frac{7}{6} \frac{gh\rho u\delta}{u^2 - gh(1 + \rho\delta)}. \quad (2.58)$$

Sean $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ las raíces del polinomio (2.46), las cuales serán aproximadas por $\lambda_-^* < \lambda_m^* < \lambda_+^*$, respectivamente.

Nótese que la aproximación λ_+^* es una cota superior de λ_3 , mientras que λ_- es una cota inferior de λ_1 .

2.2. Hiperbolicidad y estructura espectral del modelo con hipótesis de Boussinesq

En esta sección se hará el estudio de hiperbolicidad del modelo (1.46)-(1.49). Primero se escribe el modelo matemático de forma compacta, para ello se introduce la siguiente notación.

Sea $\bar{\mathbf{W}} = (h, hu, hc, b)^T$ el vector de variables conservadas y sea $\bar{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{W}})$ el vector del flujo físico:

$$\bar{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{W}}) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huc \\ \frac{qb}{1-\psi} \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

Sea $\bar{\mathbf{S}}(\bar{\mathbf{W}})$ el término fuente, que engloba la variación del fondo $\bar{\mathbf{S}}_b(\bar{\mathbf{W}})$, el término de fricción $\bar{\mathbf{S}}_f(\bar{\mathbf{W}})$, el término de los procesos de erosión y depósito $\bar{\mathbf{S}}_{e,d}(\bar{\mathbf{W}})$, y la variación de la concentración volúmetrica del sedimento $\bar{\mathbf{S}}_c(\bar{\mathbf{W}})$, es decir,

$$\bar{\mathbf{S}}(\bar{\mathbf{W}}) = \bar{\mathbf{S}}_b(\bar{\mathbf{W}}) + \bar{\mathbf{S}}_f(\bar{\mathbf{W}}) + \bar{\mathbf{S}}_{e,d}(\bar{\mathbf{W}}) + \bar{\mathbf{S}}_c(\bar{\mathbf{W}}),$$

donde

$$\bar{\mathbf{S}}_b(\bar{\mathbf{W}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh \frac{\partial b}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{S}}_f(\bar{\mathbf{W}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -ghS_f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{S}}_{e,d}(\bar{\mathbf{W}}) = \begin{pmatrix} \frac{\phi_b}{1-\psi} \\ -\frac{\rho_b - \rho}{\rho} \frac{\phi_b}{1-\psi} u \\ \phi_b \\ -\frac{\phi_b}{1-\psi} \end{pmatrix},$$

y

$$\bar{\mathbf{S}}_c(\bar{\mathbf{W}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{(\rho_s - \rho_0)gh^2}{2\rho} \frac{\partial c}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Con esta notación el sistema (1.46) - (1.49) se puede escribir en forma vectorial como:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{W}}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{W}})}{\partial x} = \bar{\mathbf{S}}(\bar{\mathbf{W}}). \quad (2.60)$$

2.2.1. Hiperbolicidad del modelo

Para llevar a cabo el estudio de hiperbolicidad del sistema (2.60) los términos fuentes $\bar{\mathbf{S}}_f$ y $\bar{\mathbf{S}}_{e,d}$ no son tomados en cuenta dado que no intervienen en las velocidades de las propagación de ondas.

A continuación reescribimos el término $\bar{\mathbf{S}}_c(\bar{\mathbf{W}})$ como sigue

$$\bar{\mathbf{S}}_c(\bar{\mathbf{W}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-gh}{2\rho}(\rho_s - \rho_0) \left(\frac{\partial hc}{\partial x} - c \frac{\partial h}{\partial x} \right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.61)$$

De aquí podemos ver que en $\bar{\mathbf{S}}_c(\bar{\mathbf{W}})$ hay la presencia de derivadas de variables conservadas. También el término fuente $\bar{\mathbf{S}}_b(\bar{\mathbf{W}})$ contiene la derivada de una de las variables conservadas. Lo que quiere decir que estos términos son en realidad productos no conservativos que se pueden escribir como

$$\bar{\mathbf{S}}_b(\bar{\mathbf{W}}) + \bar{\mathbf{S}}_c(\bar{\mathbf{W}}) = \bar{\mathbf{B}}(\bar{\mathbf{W}}) \frac{\partial \bar{\mathbf{W}}}{\partial x}, \quad (2.62)$$

donde

$$\bar{\mathbf{B}}(\bar{\mathbf{W}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ gh \frac{c(\rho_s - \rho_0)}{2\rho} & 0 & -gh \frac{\rho_s - \rho_0}{2\rho} & -gh \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

El sistema (2.60) puede ser escrito como:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{W}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{W}}) \frac{\partial \bar{\mathbf{W}}}{\partial x} - \bar{\mathbf{B}}(\bar{\mathbf{W}}) \frac{\partial \bar{\mathbf{W}}}{\partial x} = 0, \quad (2.64)$$

tal que

$$\overline{\mathbf{A}}(\overline{\mathbf{W}}) - \overline{\mathbf{B}}(\overline{\mathbf{W}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ gh - u^2 - gh \frac{c(\rho_s - \rho_0)}{2\rho} & 2u & gh \frac{\rho_s - \rho_0}{2\rho} & gh \\ -uc & c & u & 0 \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.65)$$

donde

$$\alpha = \frac{\partial q_b}{\partial h} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\partial q_b}{\partial(hu)}.$$

El polinomio característico de (2.65) está dado como

$$P(\lambda) = (u - \lambda) \left(-\lambda \left((u - \lambda)^2 - gh \right) + gh(\lambda\beta + \alpha) \right). \quad (2.66)$$

Para probar la hiperbolicidad del sistema es necesario mostrar que $P(\lambda)$ tiene cuatro raíces reales. Es claro que una de ellas es $\lambda = u$. Para probar que el polinomio cúbico que aparece en (2.66) tiene tres raíces reales procedemos como en la sección 2.1.3.

Sean

$$f(\lambda) = \lambda \left((u - \lambda)^2 - gh \right) \quad \text{y} \quad d(\lambda) = gh(\lambda\beta + \alpha).$$

Para garantizar que el polinomio de grado tres tiene tres raíces reales debemos probar que la recta $d(\lambda)$ interseca a la curva $f(\lambda)$ en tres puntos diferentes. Esto ocurre si la raíz de $d(\lambda)$, denotada por α_d , está entre las raíces de las rectas $d_{\pm}(\lambda)$, denotadas por α_{\pm} . Las rectas $d_{\pm}(\lambda)$ son tangentes a $f(\lambda)$ y paralelas a $d(\lambda)$, como se puede ver en la Figura 2.1.

Siguiendo el procedimiento descrito en [32], primero se analiza la relación entre α y β tanto para el modelo de transporte solido de Grass y el de Meyer-Peter & Müller.

- Grass: $q_b = A_g u |u|^{m-1}$

Notemos que $u = \frac{hu}{h}$ entonces $\frac{\partial u}{\partial(hu)} = \frac{1}{h}$ y $\frac{\partial u}{\partial h} = -\frac{hu}{h^2}$. Luego

$$\alpha = \frac{\partial q_b}{\partial h} = \frac{\partial q_b}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial h} = -\frac{\partial q_b}{\partial u} \frac{u}{h} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\partial q_b}{\partial(hu)} = \frac{\partial q_b}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial(hu)} = \frac{\partial q_b}{\partial u} \frac{1}{h}$$

Es fácil ver que

$$\alpha = -u\beta. \quad (2.67)$$

- Meyer-Peter & Müller: En este caso $q_b \equiv q_b(\theta)$. Considerando la formulación de Manning para el cálculo del parámetro de Shields, se tiene que

$$\alpha = \frac{\partial q_b}{\partial h} = \frac{\partial q_b}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial h} = -\frac{7}{3} \frac{\theta}{h} \frac{\partial q_b}{\partial \theta},$$

$$\beta = \frac{\partial q_b}{\partial(hu)} = \frac{\partial q_b}{\partial\theta} \frac{\partial\theta}{\partial(hu)} = \frac{2\theta}{hu} \frac{\partial q_b}{\partial\theta}.$$

De estas dos ultimas relaciones se puede ver que

$$\alpha = -\frac{7}{6}u\beta. \quad (2.68)$$

Teniendo en cuenta (2.67) y (2.68) se puede ver que la raíz la recta $d(\lambda)$ toma la forma

$$\alpha_d = -\frac{\alpha}{\beta} \implies \alpha_d = \gamma u, \quad (2.69)$$

donde $\gamma = 1$ para el modelo de Grass y $\gamma = \frac{7}{6}$ para el modelo de Meyer-Peter & Müller. Por lo tanto el sistema (2.64) será hiperbólico siempre que se cumpla la relación

$$\alpha_- < \gamma u < \alpha_+, \quad (2.70)$$

donde α_{\pm} son las raíces de las rectas $d_{\pm}(\lambda)$, respectivamente. Es fácil comprobar que siempre se tiene la relación

$$\alpha_- < u - \sqrt{gh} < u < u + \sqrt{gh} < \alpha_+, \quad (2.71)$$

lo cual dice que el sistema será siempre hiperbólico cuando se emplea la formulación de Grass para el transporte de fondo. Por otra parte, si $|u| < 6\sqrt{gh}$ entonces

$$u - \sqrt{gh} < \frac{7}{6}u < u + \sqrt{gh}. \quad (2.72)$$

Si $\gamma = \frac{7}{6}$, combinando (2.71) y (2.72) se verifica la desigualdad (2.70). Esto dice que el modelo será hiperbólico si se verifica la relación $|u| < 6\sqrt{gh}$. Al igual que antes, la desigualdad $|u| < 6\sqrt{gh}$ es una condición suficiente pero no necesaria para que el modelo sea hiperbólico.

2.2.2. Estructura espectral

En la sección 3.5 vamos a describir una discretización desacoplada del sistema (1.46)-(1.48). Para ello será necesario estudiar la estructura espectral de dicho sistema desacoplando la ecuación de Exner de las ecuaciones que rigen la evolución del fluido. De esta forma el sistema (1.46) - (1.49) puede escribirse como

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{W})}{\partial x} = \mathcal{S}(\mathcal{W}), \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{1}{1-\psi} \frac{\partial q_b}{\partial x} = -\frac{\phi_b}{1-\psi}. \quad (2.74)$$

donde $\mathcal{W} = (h, hu, hc)^T$ y

$$\mathcal{F}(\mathcal{W}) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huc \end{pmatrix}, \quad (2.75)$$

$$\mathcal{S}(\mathcal{W}) = \mathcal{S}_b(\mathcal{W}) + \mathcal{S}_f(\mathcal{W}) + \mathcal{S}_{e,d}(\mathcal{W}) + \mathcal{S}_c(\mathcal{W}),$$

tal que

$$\mathcal{S}_b(\mathcal{W}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh \frac{\partial b}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S}_f(\mathcal{W}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -ghS_f \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{S}_{e,d}(\mathcal{W}) = \begin{pmatrix} \frac{\phi_b}{1-\psi} \\ -\frac{\rho_b - \rho}{\rho} \frac{\phi_b}{1-\psi} u \\ \phi_b \end{pmatrix},$$

y

$$\mathcal{S}_c(\mathcal{W}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{(\rho_s - \rho_0)gh^2}{2\rho} \frac{\partial c}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz Jacobiana del flujo toma la forma

$$\mathcal{A}(\mathcal{W}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ gh - u^2 & 2u & 0 \\ -uc & c & u \end{pmatrix}. \quad (2.76)$$

Es fácil comprobar que los valores propios de $\mathcal{A}(\mathcal{W})$ están dados por

$$\lambda_1 = u - \sqrt{gh}; \quad \lambda_2 = u; \quad \lambda_3 = u + \sqrt{gh}, \quad (2.77)$$

y los correspondientes vectores propios

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_3 \\ c \end{pmatrix}. \quad (2.78)$$

Reesritura del sistema

Tal como se ha hecho en la sección 2.2.1, el término fuente de la derivada de la concentración volumétrica, $\mathcal{S}_c(\mathcal{W})$ en este caso, se puede reescribir como

$$\mathcal{S}_c(\mathcal{W}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-gh}{2\rho}(\rho_s - \rho_0) \left(\frac{\partial hc}{\partial x} - c \frac{\partial h}{\partial x} \right) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.79)$$

Dada la presencia de la derivada de variables conservadas en (2.79), este término se puede considerar como un termino de acople, es decir,

$$\mathcal{S}_c(\mathcal{W}) = \mathcal{B}(\mathcal{W}) \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x}, \quad (2.80)$$

donde

$$\mathcal{B}(\mathcal{W}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ gh \frac{c(\rho_s - \rho_0)}{2\rho} & 0 & -gh \frac{\rho_s - \rho_0}{2\rho} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.81)$$

Por lo tanto el sistema (2.73) toma la forma

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} + \mathcal{A}(\mathcal{W}) \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x} - \mathcal{B}(\mathcal{W}) \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x} = \tilde{\mathcal{S}}(\mathcal{W}), \quad (2.82)$$

donde $\mathcal{A}(\mathcal{W})$ es la matriz dada por la ecuación (2.76) y el término fuente $\tilde{\mathcal{S}}(\mathcal{W})$ viene dado por la relación

$$\tilde{\mathcal{S}}(\mathcal{W}) = \mathcal{S}_b(\mathcal{W}) + \mathcal{S}_f(\mathcal{W}) + \mathcal{S}_{e,d}(\mathcal{W}). \quad (2.83)$$

Analizaremos ahora la estructura espectral del sistema (2.82).

$$\mathcal{A}(\mathcal{W}) - \mathcal{B}(\mathcal{W}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ gh - u^2 - gh \frac{c(\rho_s - \rho_0)}{2\rho} & 2u & gh \frac{\rho_s - \rho_0}{2\rho} \\ -uc & c & u \end{pmatrix}. \quad (2.84)$$

Cálculos sencillos permiten mostrar que los valores propios de la matriz (2.84) coinciden con los valores propios de la matriz (2.76). Los vectores propios de (2.84) están dados por la expresiones

$$\tilde{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ c \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \\ \frac{\rho_0 + \rho}{\rho_0 - \rho_s} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{v}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_3 \\ c \end{pmatrix}. \quad (2.85)$$

2.3. Soluciones estacionarias

Una de las dificultades de este tipo de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales está relacionada con el cálculo de las soluciones estacionarias. Los métodos numéricos usuales que se usan para aproximar las soluciones de leyes de conservación pueden resultar poco precisos cuando se usan para aproximar las soluciones de leyes de equilibrio, en particular cuando se usan para aproximar soluciones estacionarias no triviales o la evolución de pequeñas perturbaciones alrededor de éstas. En el contexto de las aguas someras o *shallow water* Bermúdez y Vazquez-Cendón (1994) [5] introdujeron la condición llamada *propiedad C* o *C-property*: un esquema se dice que satisface dicha condición si resuelve exactamente la solución estacionaria correspondiente al agua en reposo o *water at rest* en inglés. Esta idea de desarrollar esquemas numéricos que preserven las soluciones estacionarias o un subconjunto de ellas, también llamados esquemas bien equilibrados o *well balanced*, ha sido estudiada ampliamente, como por ejemplo en [3, 6, 26, 17, 28, 56, 94, 95] entre otros. En esta sección describiremos las soluciones estacionarias de los sistemas hiperbólicos presentados en las secciones previas.

En primer lugar vamos a considerar la situación en la que se desprecian los términos de erosión y depósito y fricción. En tal caso las soluciones estacionarias para el sistema (2.40) se caracterizan como

$$\frac{\partial hu}{\partial x} = 0, \quad (2.86)$$

$$\frac{\partial h\rho u}{\partial x} = 0, \quad (2.87)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2} + \frac{gh}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (2.88)$$

$$\frac{\partial q_b}{\partial x} = 0, \quad (2.89)$$

donde $\eta = h + b$ es la superficie libre del fluido.

Teniendo en cuenta a (2.86) y (2.87) podemos concluir que o bien $u = 0$ o ρ es una función constante.

Si consideramos que la densidad ρ es constante, entonces la solución estacionaria está caracterizada por las siguientes condiciones

$$hu = \text{cte}; \quad \rho = \text{cte}; \quad \frac{u^2}{2} + g\eta = \text{cte}; \quad q_b = \text{cte}. \quad (2.90)$$

Notemos que esta sería la solución estacionaria para el sistema (2.60).

Como un caso particular, se pueden obtener las soluciones estacionarias de agua en reposo (*lake at rest*):

$$u = 0; \quad \rho = \text{cte}; \quad \eta = \text{cte}. \quad (2.91)$$

Consideremos ahora que la densidad no es una función constante y también suponemos que la velocidad es nula, entonces tenemos como caso particular las soluciones estacionarias

$$u = 0; \quad \frac{gh^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial x} + gh\rho \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (2.92)$$

que también puede escribirse como

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{2}{h} \frac{\partial \eta}{\partial x} \rho.$$

Mas aún, si consideramos que el fondo es plano, obtenemos la solución estacionaria dada por las condiciones

$$u = 0; \quad \frac{\rho h^2}{2} = \text{cte}; \quad b = \text{cte}, \quad (2.93)$$

que se suele llamar el estado estacionario de presión constante.

2.3.1. Estado del agua en calma con erosión y depósito

Cuando se trabaja con transporte de sedimentos la caracterización de soluciones estacionarias es más sofisticada, incluso en muchas situaciones no se puede hablar de la existencia de las mismas. Un caso simple, pero a su vez interesante a considerar es lo que ocurre cuando $u = 0$ y se consideran los términos fuentes que modelan la erosión y depósito en el sistema (2.40).

Bajo la suposición del agua en calma ($u = 0$), el modelo (2.40) se reduce a

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\phi_b}{1 - \psi}, \quad (2.94)$$

$$\frac{\partial h\rho}{\partial t} = \frac{\phi_b \rho_b}{1 - \psi}, \quad (2.95)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} gh^2 \rho \right) = -gh\rho \frac{\partial b}{\partial x}, \quad (2.96)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -\frac{\phi_b}{1 - \psi}. \quad (2.97)$$

Combinando las ecuaciones (2.94) y (2.97) se obtiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} (h + b) = \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0, \quad (2.98)$$

lo cual significa que la superficie libre del agua no varía a través del tiempo.

Desarrollando la ecuación (2.96), la ecuación de conservación de momentos toma la forma

$$\frac{\partial}{\partial x} (h + b) = -\frac{h}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (2.99)$$

Nótese que si la densidad ρ es una función constante entonces la superficie libre del agua no varía a través del espacio.

Teniendo en cuenta las ecuaciones (2.95) y (2.94) se obtiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\phi_b}{h(1-\psi)}(\rho_b - \rho). \quad (2.100)$$

Teniendo en cuenta las definiciones de ρ_b y ρ , la ecuación (2.100) se transforma en

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\phi_b}{h(1-\psi)}((\rho_s - \rho_0)(1 - \psi - c)). \quad (2.101)$$

Bajo el agua en calma se espera que el sedimento suspendido sea depositado progresivamente. Como resultado inmediato de dicho depósito el espesor del fondo sedimentado incrementa y la altura del agua disminuye. Otro efecto inmediato dado por el depósito es la progresiva disminución de la cantidad de sedimentos en la mezcla, lo cual da como resultado que al final no se tenga una mezcla sino solo agua limpia, por lo que la densidad de la mezcla tenderá a ser la densidad del agua. La variación temporal de la mezcla se caracteriza de la siguiente manera

- La densidad de la mezcla es una función decreciente a través del tiempo si $c < 1 - \psi$.
- La densidad de la mezcla es una función creciente a través del tiempo si $c > 1 - \psi$.
- La densidad de la mezcla es una función constante si $c = 1 - \psi$.

Capítulo 3

Método de volúmenes finitos

3.1. Introducción

En este capítulo describiremos el procedimiento para desarrollar esquemas numéricos bien equilibrados para los sistemas hiperbólicos de ecuaciones en derivadas parciales que hemos descrito en los capítulos anteriores, como por ejemplo los sistemas dados por (2.60) y (2.40). Como hemos visto, para el caso de dominios unidimensionales, estos sistemas pueden ser escritos de la forma

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{W})}{\partial x} + \mathbf{B}(\mathbf{W}) \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = \mathbf{G}(\mathbf{W}) \frac{\partial \sigma}{\partial x}. \quad (3.1)$$

La variable $\mathbf{W}(x, t)$ está definida en $I \times [0, T]$, tal que $I \in \mathbb{R}$ y toma valores en un subconjunto abierto y convexo $\Omega \in \mathbb{R}^N$, es decir, $\mathbf{W}(x, t) : I \times [0, T] \rightarrow \Omega$. Por su parte $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ y $\mathbf{G} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ son funciones regulares; \mathbf{B} es una función matricial regular $\mathbf{B} : \Omega \rightarrow \mathcal{M}_{N \times N}$; y $\sigma(x)$, por lo general, es una función conocida $\sigma(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Para el caso de dominios bidimensionales, el sistema hiperbólico de ecuaciones en derivadas parciales con productos no conservativos y/o término fuente se escribe como

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{W})) + \mathbf{B}(\mathbf{W}) \cdot \nabla(\mathbf{W}) = \mathbf{G}(\mathbf{W}) \cdot \nabla(\sigma). \quad (3.2)$$

En este caso la variable $\mathbf{W}(\mathbf{x}, t)$ se define para $(\mathbf{x}, t) \in D \times [0, T]$, tal que $D \subset \mathbb{R}^2$ y toma valores en un subconjunto abierto y convexo $\Omega \in \mathbb{R}^N$. La función $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$ es regular de Ω a $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$; $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ es una función matricial regular de Ω a $\mathcal{M}_{N \times N} \times \mathcal{M}_{N \times N}$, del mismo modo $\mathbf{G} = (\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2)$ es una función regular de Ω a \mathbb{R}^{2N} y $\sigma(\mathbf{x})$, por lo general, una función conocida de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R} .

Sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de la forma (3.1) y (3.2) aparecen en muchos modelos de fluidos en diferentes contextos, por ejemplo, ecuaciones de la aguas someras, modelos de flujo multifase, dinámica de gases, o como para el caso que nos ocupa, transporte de sedimentos.



No obstante para el transporte de sedimentos, como en los modelos (2.60) o (2.40), aparecen términos fuentes $\mathbf{S}(\mathbf{W})$ que serán tratados en un segundo paso mediante un *splitting*, por lo que en (3.1) y (3.2), no se tendrán en cuenta los términos que contienen los procesos de erosión y depósito y el término de fricción. Más aún, estos términos fuentes son stiff. A pesar de que los esquemas numéricos de volúmenes finitos que se estudiarán pueden ser extendidos para considerar dicho términos fuentes, en este trabajo los discretizaremos de forma semi-implícita.

La principal dificultad de los sistemas de la forma (3.1), tanto desde el punto de vista teórico como numérico, viene del hecho que la presencia de productos no conservativos: cuando $\mathbf{B} \neq 0$ o $\mathbf{G} \neq 0$ y \mathbf{W} o σ son discontinuos, los productos $\mathbf{B}(\mathbf{W})\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x}$ y $\mathbf{G}(\mathbf{W})\frac{\partial \sigma}{\partial x}$ no tienen sentido en la teoría de las distribuciones.

Se han desarrollado diversas teorías matemáticas que permiten formalizar la noción de solución débil para un sistema no conservativo: Volpert [123]; Colombeau [29]; Dal Maso, LeFloch y Murat [35]. La teoría desarrollada en [35] permite definir las soluciones débiles de los sistemas no conservativos, y ha sido utilizada para establecer la noción de los esquemas numéricos camino-conservativo [94, 95]. El marco de los esquemas numéricos camino-conservativos permite extender al caso no conservativo la mayoría de esquemas numéricos que comúnmente son empleados para aproximar los sistemas de leyes de conservación.

Una característica que los esquemas numéricos utilizados para resolver sistemas de ecuaciones de la forma (3.1) deben tener es poder resolver de manera correcta las soluciones cercanas a un equilibrio, es decir, se les pide que sean bien equilibrados o que verifiquen la propiedad de conservación según la nomenclatura introducida en [5]. El desarrollo de esquemas numéricos bien equilibrados para la aproximación de leyes de equilibrio y de sistemas no conservativos es uno de los campos de investigación más activos, ver por ejemplo [3, 73, 6, 7, 17, 30, 31, 38, 56, 55, 57, 60, 61, 74, 81, 97, 98, 99, 111, 118, 117] entre otros.

En este capítulo presentaremos brevemente el marco de los esquemas camino-conservativos que usaremos para la aproximación del sistema introducido en el capítulo anterior y, en general, sistemas que pueden escribirse como (3.1) o (3.2). Veremos que el marco de los esquemas camino-conservativos hace posible extender de manera natural al caso no conservativo los esquemas numéricos que funcionan para los casos de leyes de conservación. Nosotros nos centraremos principalmente en la descripción de los esquemas denominados *métodos de viscosidad polinomial*, [19, 85].

3.2. Preliminares de volúmenes finitos

Consideremos primero el sistema de leyes de conservación unidimensional

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{W})}{\partial x} = 0. \quad (3.3)$$

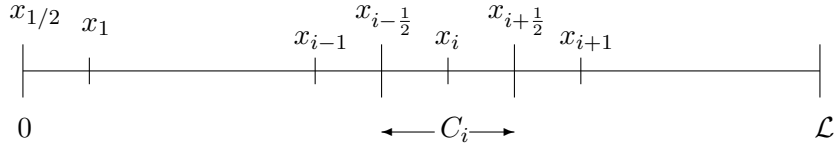


Figura 3.1: Representación gráfica de una malla de volúmenes finitos

La variable $\mathbf{W}(x, t)$ está definida en $I \times [0, T]$, siendo $I = [0, \mathcal{L}]$ y toma valores en un subconjunto abierto y convexo $\Omega \in \mathbb{R}^N$, es decir, $\mathbf{W}(x, t) : I \times [0, T] \rightarrow \Omega$ y $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ es una función regular.

Consideremos una discretización del dominio espacial $[0, \mathcal{L}]$ usando celdas de volúmenes finitos $C_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$, $i = 1, \dots, N$. Por simplicidad supondremos que el tamaño de las celdas Δx es constante, denotaremos por $x_{i+1/2} = i \Delta x$ la intercelda y por $x_i = (i + \frac{1}{2}) \Delta x$ el centro de la celda. Una representación gráfica de una malla de volúmenes finitos se puede ver en la Figura 3.1. Denotemos por Δt el paso del tiempo y por $t^n = n\Delta t$.

Para obtener un esquema de volúmenes finitos, se integra la ecuación (3.3) sobre un rectángulo arbitrario espacio-tiempo $C_i \times [t^n, t^{n+1}]$:

$$\int_{C_i} \mathbf{W}(x, t^{n+1}) dx = \int_{C_i} \mathbf{W}(x, t^n) dx - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{C_i} \mathbf{F}(\mathbf{W}(x, t)) dx dt \quad (3.4)$$

Denotaremos por \mathbf{W}_i^n la aproximación del promedio de la solución débil, sobre la celda C_i al tiempo t^n , es decir

$$\mathbf{W}_i^n \cong \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{W}(x, t^n) dx. \quad (3.5)$$

A partir de (3.4), el promedio sobre la celda de volumen finito de la solución débil satisface la igualdad

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} \mathbf{W}(x, t^{n+1}) dx &= \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} \mathbf{W}(x, t^n) dx \\ &\quad - \frac{1}{\Delta x} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\mathbf{F}(\mathbf{W}(x_{i+1/2}, t)) - \mathbf{F}(\mathbf{W}(x_{i-1/2}, t))) dt. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Esta última expresión nos dice cómo deber ser actualizado el promedio de la solución débil en la celda C_i . Dado que la solución $\mathbf{W}(x, t^n)$ está definida por una función constante a trozos \mathbf{W}_i^n , $i = 1, \dots, N$, los valores de la solución no están bien definidos en los puntos $x_{i\pm 1/2}$. Por lo tanto, no se puede llevar a cabo la evaluación del flujo físico en dichos puntos y en consecuencia, el cálculo de la integral del lado derecho de (3.21) no se puede hacer. Entonces, es necesario definir una función $\mathcal{F}_{i\pm 1/2}$, llamada flujo numérico, tal que

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}(\mathbf{W}(x_{i+1/2}, t)) dt, \approx \mathcal{F}_{i+1/2}^n := \mathcal{F}_{i+1/2}(\mathbf{W}(x_i, t^n), \mathbf{W}(x_{i+1}, t^n)). \quad (3.7)$$

Entonces el esquema de volúmenes finitos para la ley de conservación (3.3) queda como

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{F}_{i+1/2}^n - \mathcal{F}_{i-1/2}^n). \quad (3.8)$$

El método específico obtenido dependerá de la forma del flujo numérico. En la literatura se pueden encontrar diversas formulaciones para calcular el flujo numérico, por ejemplo el flujo de Godunov [54], el flujo HLL introducido por Harten, Lax y van Leer [63], el flujo HLLC introducido por Toro [115], entre otros. Los esquemas que se pueden escribir en la forma (3.8) se denominan esquemas conservativos.

Para que un esquema de volúmenes finitos calcule bien las aproximaciones para la ley de conservación debe ser convergente, es decir, la solución numérica obtenida debe converger a la solución exacta de la ecuación diferencial cuando $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$. Para que un esquema de la forma (3.8) sea convergente debe verificar las siguientes condiciones:

- Consistencia: el esquema numérico aproxima bien localmente, es decir, si $\mathbf{W}(x_i, t) = \mathbf{W}(x_{i+1}, t) = \overline{\mathbf{W}}$ entonces

$$\mathcal{F}_{i+1/2}(\overline{\mathbf{W}}, \overline{\mathbf{W}}) = \mathbf{F}(\overline{\mathbf{W}}).$$

Lo que dice que el flujo numérico deber coincidir con el flujo físico si el estado a la derecha y la izquierda es el mismo.

- Estabilidad: el esquema numérico debe cumplir con la condición CFL [33],

$$\lambda \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1,$$

donde λ es el máximo de las velocidades del sistema.

Para obtener unicidad de la solución, se debe añadir una condición de entropía a la solución débil: supongamos que (3.3) está equipada con el par entrópico $(\mathcal{H}, \mathcal{Q})$, es decir, una función convexa $\mathcal{H} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y una función $\mathcal{Q} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla \mathcal{Q}(\mathbf{W})^\top = \mathbf{V}^\top \mathbf{A}(\mathbf{W})$, donde $V := \nabla \mathcal{H}(\mathbf{W})$ son llamadas variables entrópicas y $\mathbf{A}(\mathbf{W}) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}}$ es la matriz Jacobiana del flujo. Entonces, una solución entrópica de (3.3) satisface la desigualdad de entropía

$$\mathcal{H}(\mathbf{W})_t + \mathcal{Q}(\mathbf{W})_x \leq 0,$$

en el sentido de las distribuciones.

En este trabajo para tomar en cuenta el término fuente que contiene la pendiente del fondo y más aún, para tomar en cuenta que dicho fondo varía a través del tiempo,

se han estudiado dos técnicas para la solución del sistema (3.1), ambas técnicas basadas en esquemas de volúmenes finitos para la resolución de la parte hiperbólica del sistema. En un primer momento expondremos una técnica desacoplada para el arrastre de fondo y posteriormente introduciremos una técnica acoplada.

3.3. Método de volúmenes finitos camino-conservativos

En esta sección se describirá brevemente el marco de los esquemas numéricos camino-conservativos para la resolución de sistemas hiperbólicos no-conservativos. En particular nosotros haremos uso de este marco para proponer un esquema numérico que resuelva de forma completa el sistema (2.40) y (2.60). En esta sección se considera una resolución acoplada del sistema, es decir, consideraremos como una variable conservada a la altura del fondo sedimentado y como una componente del flujo físico al flujo de la carga de fondo. La ventaja de trabajar de esta forma es que se tienen en cuenta las velocidades físicas de todo el fenómeno, pero dependiendo de la formulación que se elija para el transporte de fondo la expresión algebraica para dichas velocidades puede o no ser conocida explícitamente.

Consideremos el sistema de ecuaciones en derivadas parciales cuasi-lineal de primer orden

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathcal{A}(\mathbf{W}) \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad x \in I \subset \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (3.9)$$

con condición inicial

$$\mathbf{W}(x, 0) = \mathbf{W}_0(x); \quad x \in I \subset \mathbb{R} \quad (3.10)$$

tal que $\mathbf{W}(x, t)$ está definido en $I \times [0, T]$ y toma valores en un subconjunto abierto y convexo Ω de \mathbb{R}^N y

$$\mathbf{W} \in \Omega \mapsto \mathcal{A}(\mathbf{W}) \in \mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{R})$$

es una transformación suave localmente acotada. Supondremos que el sistema es estrictamente hiperbólico, es decir, para todo $\mathbf{W} \in \Omega$ la matriz $\mathcal{A}(\mathbf{W})$ tiene N valores propios reales y distintos

$$\lambda_1(\mathbf{W}) < \dots < \lambda_N(\mathbf{W}),$$

y $\mathcal{A}(\mathbf{W})$ es por lo tanto una matriz diagonalizable.

Cualquier sistema de la forma

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} + \mathbf{B}(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{w}) \frac{d\sigma}{dx} \quad (3.11)$$

puede ser escrito en la forma (3.9) considerando σ como una variable y agregando la ecuación $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$, entonces

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \sigma \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

y $\mathcal{A}(\mathbf{W})$ es la matriz cuya estructura de bloques es la siguiente

$$\mathcal{A}(\mathbf{W}) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{J}(\mathbf{w}) + \mathbf{B}(\mathbf{w}) & -\mathbf{S}(\mathbf{w}) \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right], \quad (3.13)$$

donde $\mathbf{J}(\mathbf{w})$ es la matriz Jacobiana de la función flujo \mathbf{F} , \mathbf{w} está en un conjunto abierto convexo en \mathbb{R}^{N-1} .

Para diseñar un método de volúmenes finitos para sistemas de la forma (3.9), se procede como se hace para los sistemas de leyes de conservación, integrando la ecuación en un rectángulo arbitrario espacio tiempo $[a, b] \times [t_0, t_1]$:

$$\int_a^b \mathbf{W}(x, t_1) dx = \int_a^b \mathbf{W}(x, t_0) dx - \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b \mathcal{A}(\mathbf{W}(x, t)) \mathbf{W}_x(x, t) dx dt. \quad (3.14)$$

La dificultad viene del hecho de que el último integrando deja de tener sentido cuando \mathbf{W} es discontinuo. Bajo ciertas hipótesis de regularidad sobre \mathcal{A} , la teoría introducida por Dal maso, LeFloch and Murat [35], permite definir el producto $\mathcal{A}(\mathbf{W})\mathbf{W}_x$ como una medida de Borel usando para ello una familia de caminos Lipschitz continuos $\Phi : [0, 1] \times \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ que deben satisfacer ciertas condiciones de regularidad y compatibilidad. En particular

$$\Phi(0; \mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) = \mathbf{W}_L, \quad \Phi(1; \mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) = \mathbf{W}_R, \quad \Phi(s; \mathbf{W}, \mathbf{W}) = \mathbf{W}. \quad (3.15)$$

De acuerdo con esta teoría, dada una función $\mathbf{W}(x)$ de variación acotada, el producto $\mathcal{A}(\mathbf{W})\mathbf{W}_x$ se define como una medida localmente acotada. Esta medida coincide con la derivada de una función de flujo en el sentido de las distribuciones, en el caso especial de que $\mathcal{A}(\mathbf{W})$, sea el Jacobiano de una función de dicha función de flujo (véase [35] para más detalles).

En la práctica, la familia de caminos puede ser interpretada como una herramienta para dar sentido a la última integral en el lado derecho de la igualdad (3.14), para funciones suaves trozos \mathbf{W} . De manera más precisa dada una función con variación acotada $\mathbf{W} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$, se define

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathcal{A}(\mathbf{W}(x, t)) \mathbf{W}_x(x, t) dx &= \int_a^b \mathcal{A}(\mathbf{W}(x, t)) \mathbf{W}_x(x, t) dx \\ &+ \sum_l \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; \mathbf{W}_l^-, \mathbf{W}_l^+)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; \mathbf{W}_l^-, \mathbf{W}_l^+) ds, \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde \mathbf{W}_l^- y \mathbf{W}_l^+ representan, respectivamente, los límites de \mathbf{W} a la derecha y a la izquierda de la l -ésima discontinuidad¹. Obsérvese que en (3.16), la familia de caminos ha sido usada para determinar los pesos de las medidas de Dirac ubicadas en las discontinuidades de \mathbf{W} .

¹El conjunto de discontinuidades de una función de variación acotada es contable

De acuerdo a esta definición de integral, una solución débil puede ser definida como una función que satisface

$$\int_a^b \mathbf{W}(x, t_1) dx = \int_a^b \mathbf{W}(x, t_0) dx - \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b \mathcal{A}(\mathbf{W}(x, t)) \mathbf{W}_x(x, t) dx dt, \quad (3.17)$$

para todo rectángulo espacio-tiempo $[a, b] \times [t_0, t_1]$.

Una vez que la noción de la integral de producto no conservativo ha sido fijada y procediendo como en el caso conservativo, es fácil ver que, a través de una discontinuidad, la solución débil debe satisfacer la condición generalizada de Rankine-Hugoniot:

$$\xi(\mathbf{W}^+ - \mathbf{W}^-) = \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; \mathbf{W}^-, \mathbf{W}^+)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; \mathbf{W}^-, \mathbf{W}^+) ds, \quad (3.18)$$

donde ξ es la velocidad de propagación de la discontinuidad y \mathbf{W}^- y \mathbf{W}^+ son los límites a la izquierda y derecha de la solución en la discontinuidad, respectivamente. Si $\mathcal{A}(\mathbf{W})$ es la matriz Jacobiana de alguna función $\mathbf{F}(\mathbf{W})$, (3.18) se reduce a la condición clásica de Rankine-Hugoniot:

$$\xi(\mathbf{W}^+ - \mathbf{W}^-) = \mathbf{F}(\mathbf{W}^+) - \mathbf{F}(\mathbf{W}^-), \quad (3.19)$$

independientemente de Φ .

Como se espera para los sistemas de leyes de conservación, para tener unicidad de la solución, hay que añadir una condición de entropía a la noción de solución débil: supongamos que (3.9) está equipado con el par entrópico $(\mathcal{H}, \mathcal{Q})$, es decir, una función convexa $\mathcal{H} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y una función $\mathcal{Q} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla \mathcal{Q}(\mathbf{W}) = \nabla \mathcal{H}(\mathbf{W}) \cdot \mathcal{A}(\mathbf{W})$. Entonces, una solución débil es llamada una *solución entrópica* si satisface la desigualdad

$$\mathcal{H}(\mathbf{W})_t + \mathcal{Q}(\mathbf{W})_x \leq 0 \quad (3.20)$$

en el sentido de las distribuciones.

Es claro entonces que el concepto de solución débil depende de la familia de caminos elegida, la cual es a priori arbitraria. La pregunta importante aquí es cómo elegir la “buena” familia de caminos, para más detalles sobre como elegir la familia de caminos se puede consultar [24, 95]. En esta tesis hemos usado la elección canónica, que corresponde con la elección de segmentos.

3.3.1. Esquemas numéricos camino-conservativos

A partir de (3.14), el promedio sobre la celda de la solución débil satisface la igualdad

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} \mathbf{W}(x, t^{n+1}) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} \mathbf{W}(x, t^n) dx - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{\Delta x} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{C_i} \mathcal{A}(\mathbf{W}(x, t)) \mathbf{W}_x(x, t) dx dt. \quad (3.21)$$

En lo que sigue relajaremos la notación denotando por $\mathbf{W}(x_i, t^n) = \mathbf{W}_i^n$. De acuerdo a [94], consideraremos esquemas numéricos de la forma:



Definición 3.3.1 Dada una familia de caminos Φ , un esquema numérico es llamado Φ -conservativo si puede ser escrito de la forma

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbf{D}_{i-1/2}^+ + \mathbf{D}_{i+1/2}^- \right), \quad (3.22)$$

donde

$$\mathbf{D}_{i+1/2}^\pm = \mathbf{D}^\pm(\mathbf{W}_i^n, \mathbf{W}_{i+1}^n),$$

\mathbf{D}^- y \mathbf{D}^+ son dos funciones continuas de Ω^2 a Ω que satisfacen

$$\mathbf{D}^\pm(\mathbf{W}, \mathbf{W}) = 0 \quad \forall \mathbf{W} \in \Omega, \quad (3.23)$$

y para cada \mathbf{W}_L y \mathbf{W}_R en Ω se verifica la relación

$$\mathbf{D}^-(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) + \mathbf{D}^+(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) = \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; \mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; \mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) ds. \quad (3.24)$$

Tal como se establece en [94], la noción de esquema camino-conservativo es una generalización de los métodos conservativos para un sistema de leyes de conservación en el siguiente sentido: si $\mathcal{A}(\mathbf{W})$ es la matriz Jacobiana de una función flujo \mathbf{F} , entonces (3.24) se reduce a

$$\mathbf{D}^-(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) + \mathbf{D}^+(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) = \mathbf{F}(\mathbf{W}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{W}_L). \quad (3.25)$$

De esta última relación podemos definir

$$\mathcal{F}(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) = \mathbf{D}^-(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) + \mathbf{F}(\mathbf{W}_L), \quad (3.26)$$

o equivalentemente

$$\mathcal{F}(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) = \mathbf{F}(\mathbf{W}_R) - \mathbf{D}^+(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R). \quad (3.27)$$

Tomando en cuenta (3.23), podemos ver que

$$\mathcal{F}(\mathbf{W}, \mathbf{W}) = \mathbf{F}(\mathbf{W}), \quad (3.28)$$

lo cual dice que \mathcal{F} es un flujo numérico consistente con \mathbf{F} . Utilizando (3.26) y (3.27) el esquema numérico (3.22) toma la forma

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{F}_{i+1/2} - \mathcal{F}_{i-1/2}), \quad (3.29)$$

con

$$\mathcal{F}_{i+1/2} = \mathcal{F}(\mathbf{W}_i^n, \mathbf{W}_{i+1}^n).$$

Debido a esto, si el sistema (3.9) involucra alguna ley de conservación (como es nuestro caso) un método camino-conservativo será conservativo para esa ley. Lo mismo pasa si una combinación lineal de algunas leyes de conservación da una ley de conservación.

Cabe hacer mención que los esquemas camino-conservativos han sido aplicados con éxito a diferentes problemas. Por ejemplo, Saint Venant-Exner, [20], corrientes turbidíticas, [84], modelo Ripa, y similares [110], sistemas shallow water bicapa y similares, [95, 18], Baer-Nunziato, [40], modelo Pitman-Le, [97], modelo Savage-Hutter, [47], Sistema Bingham shallow water, [48], flujo sanguíneo, [88], flujos dos fases, [86], entre otros.

3.3.2. Algunos esquemas numéricos camino-conservativos

En esta sección se presentan algunos ejemplos de esquemas numéricos camino conservativos para la resolución numérica del sistema (3.9), que serán la base para la construcción del esquema numérico para nuestro problema.

Método de Roe

El método de Roe está basado en la siguiente extensión de una linearización de Roe para el caso no conservativo introducido en [118].

Definición 3.3.2 *Dada una familia de caminos Φ , una función \mathcal{A}_Φ es una linearización de Roe si verifica las siguientes propiedades:*

- Para cualesquiera $\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R \in \Omega$, $\mathcal{A}_\Phi(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R)$ tiene N valores propios reales,
- Para cualquiera $\mathbf{W} \in \Omega$, $\mathcal{A}_\Phi(\mathbf{W}, \mathbf{W}) = \mathcal{A}(\mathbf{W})$,
- Para cualesquiera $\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R \in \Omega$

$$\mathcal{A}_\Phi(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) \cdot (\mathbf{W}_R - \mathbf{W}_L) = \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; \mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; \mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) ds. \quad (3.30)$$

Una vez elegida la linearización de Roe, el esquema numérico puede ser escrito en la forma (3.22) con

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R)^- &= \mathcal{A}_\Phi^-(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) \cdot (\mathbf{W}_R - \mathbf{W}_L) \\ \mathbf{D}(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R)^+ &= \mathcal{A}_\Phi^+(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) \cdot (\mathbf{W}_R - \mathbf{W}_L) \end{aligned}$$

donde, como es usual

$$\mathcal{A}_\Phi^\pm(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) = \mathbf{K}_\Phi(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) \cdot \Lambda_\Phi^\pm(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) \cdot \mathbf{K}_\Phi(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R)^{-1} \quad (3.31)$$

siendo $\Lambda_\Phi^\pm(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R)$ la matriz diagonal cuyos coeficientes son la parte positiva/negativa de los valores propios $\lambda_i(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R)$, $i = 1, \dots, N$ de la matriz de Roe, y $\mathbf{K}_\Phi(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R)$ una matriz de $N \times N$ cuyas columnas son los vectores propios asociados.

Se tiene la siguiente identidad

$$\mathcal{A}_\Phi^\pm(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) = \frac{1}{2} (\mathcal{A}_\Phi(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) \pm |\mathcal{A}_\Phi(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R)|) \quad (3.32)$$

donde el valor absoluto de linearización de Roe se calcula como

$$|\mathcal{A}_\Phi(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R)| = \mathbf{K}_\Phi(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) \cdot |\Lambda_\Phi(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R)| \cdot \mathbf{K}_\Phi(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R)^{-1}, \quad (3.33)$$

donde $|\Lambda_\Phi(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R)|$ es la matriz diagonal cuyos elementos son los valores absolutos de los valores propios de $\mathcal{A}_\Phi(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R)$.

Usando (3.32) el esquema numérico (3.22) puede ser reescrito como sigue

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} & (\mathcal{A}_\Phi(\mathbf{W}_{i-1}^n, \mathbf{W}_i^n) (\mathbf{W}_i^n - \mathbf{W}_{i-1}^n) + \mathcal{A}_\Phi(\mathbf{W}_i^n, \mathbf{W}_{i+1}^n) (\mathbf{W}_{i+1}^n - \mathbf{W}_i^n)) \\ & - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (|\mathcal{A}_\Phi(\mathbf{W}_{i-1}^n, \mathbf{W}_i^n)| (\mathbf{W}_i^n - \mathbf{W}_{i-1}^n) - |\mathcal{A}_\Phi(\mathbf{W}_i^n, \mathbf{W}_{i+1}^n)| (\mathbf{W}_{i+1}^n - \mathbf{W}_i^n)). \end{aligned} \quad (3.34)$$

De esta última expresión se puede ver que el segundo término en el lado derecho de la igualdad es una aproximación centrada de $\mathcal{A}(\mathbf{W})\mathbf{W}_x$ y que el tercer término es la viscosidad numérica.

Consideremos la aplicación del método de Roe a sistemas de la forma (3.11). Denotemos el camino como

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_w \\ \Phi_\sigma \end{pmatrix}.$$

Siguiendo el trabajo descrito en [95], consideraremos una linearización de la forma

$$\mathcal{A}_\Phi(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_\Phi(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) & -\mathbf{S}_\Phi(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right),$$

donde

$$\mathbf{A}_\Phi(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) = \mathbf{J}_\mathbf{F}(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R) + \mathbf{B}_\Phi(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R), \quad (3.35)$$

siendo $\mathbf{J}_\mathbf{F}(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R)$ una matriz de Roe del Jacobiano del flujo \mathbf{F} en el sentido usual

$$\mathbf{J}_\mathbf{F}(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R)(\mathbf{w}_R - \mathbf{w}_L) = \mathbf{F}(\mathbf{w}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{w}_L); \quad (3.36)$$

la matriz \mathbf{B}_Φ satisface

$$\mathbf{B}_\Phi(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) \cdot (\mathbf{w}_R - \mathbf{w}_L) = \int_0^1 \mathbf{B}(\Phi(s; \mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R)) \frac{\partial \Phi_w}{\partial s}(s; \mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) ds. \quad (3.37)$$

y el vector $\mathbf{S}_\Phi(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R)$ satisface

$$\mathbf{S}_\Phi(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) \cdot (\sigma_R - \sigma_L) = \int_0^1 \mathbf{S}(\Phi(s; \mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R)) \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial s}(s; \mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) ds. \quad (3.38)$$

Un cálculo simple muestra que si se satisfacen las relaciones (3.36)-(3.38) entonces (3.35) es una linearización de Roe siempre que $\mathbf{A}_\Phi(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R)$ tenga $N - 1$ valores propios reales y distintos

$$\lambda_1(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) < \dots < \lambda_{N-1}(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R)$$

Finalmente, tomando en cuenta la estructura de las matrices \mathcal{A}_Φ y $|\mathcal{A}_\Phi|$, así como también la propiedad de Roe (3.36), el esquema numérico (3.22) puede ser escrito en términos de la variable \mathbf{w} como sigue

$$\mathbf{w}_i^{n+1} = \mathbf{w}_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbf{D}_{i-1/2}^+ - \mathbf{D}_{i+1/2}^- \right), \quad (3.39)$$

donde, omitiendo la notación en tiempo:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{i+1/2}^\pm &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{F}(\mathbf{w}_{i+1}) - \mathbf{F}(\mathbf{w}_i) + \mathbf{B}_{i+1/2}(\mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{w}_i) - \mathbf{S}_{i+1/2}(\sigma_{i+1} - \sigma_i) \right) \\ &\pm \frac{1}{2} |\mathbf{A}_{i+1/2}| \left(\mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{w}_i - \mathbf{A}_{i+1/2}^{-1} \mathbf{S}_{i+1/2}(\sigma_{i+1} - \sigma_i) \right), \end{aligned} \quad (3.40)$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{i+1/2}^\pm &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{F}(\mathbf{w}_{i+1}) - \mathbf{F}(\mathbf{w}_i) + \mathbf{B}_{i+1/2}(\mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{w}_i) - \mathbf{S}_{i+1/2}(\sigma_{i+1} - \sigma_i) \right) \\ &\pm \frac{1}{2} |\mathbf{A}_{i+1/2}| \mathbf{A}_{i+1/2}^{-1} \left(\mathbf{F}(\mathbf{w}_{i+1}) - \mathbf{F}(\mathbf{w}_i) + \mathbf{B}_{i+1/2}(\mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{w}_i) - \mathbf{S}_{i+1/2}(\sigma_{i+1} - \sigma_i) \right), \end{aligned} \quad (3.41)$$

sacando factor común tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{i+1/2}^\pm &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{I} \pm |\mathbf{A}_{i+1/2}| \mathbf{A}_{i+1/2}^{-1} \right) \left(\mathbf{F}(\mathbf{w}_{i+1}) - \mathbf{F}(\mathbf{w}_i) \right) \\ &+ \mathbf{B}_{i+1/2}(\mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{w}_i) - \mathbf{S}_{i+1/2}(\sigma_{i+1} - \sigma_i) \end{aligned} \quad (3.42)$$

donde

$$\mathbf{A}_{i+1/2} = \mathbf{A}_\Phi(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_{i+1}), \quad \mathbf{B}_{i+1/2} = \mathbf{B}_\Phi(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_{i+1}), \quad \mathbf{S}_{i+1/2} = \mathbf{S}_\Phi(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_{i+1}).$$

Métodos de viscosidad polinomial

Además del método de Roe, podemos construir otros esquemas numéricos camino-conservativos. El cálculo de la descomposición de Roe, descrito en la sección anterior, requiere del conocimiento explícito de los valores propios y vectores propios de la matriz intermedia. El problema viene cuando no se tiene una expresión analítica conocida o sencilla de dichos autovalores y autovectores, como ocurre con los sistema multicapa de aguas someras o modelos geofísicos más complejos. En estos casos, los valores propios y los vectores propios tienen que aproximarse numéricamente en cada inter-celda en cada paso de tiempo, lo cual implica un costo computacional muy elevado.

En esta sección presentamos algunas ideas introducidas en los trabajos [26, 19, 22] para obtener métodos numéricos basados en una descomposición (3.32) de matrices de Roe que no requieran un conocimiento completo de la estructura espectral de la matriz de Roe. La idea es reemplazar (3.32) por

$$\tilde{\mathcal{A}}_\Phi^\pm(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{A}_\Phi(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) \pm \mathcal{Q}_\Phi(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) \right), \quad (3.43)$$

donde $\mathcal{Q}_\Phi(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R)$ es una aproximación del valor absoluto de la matriz de Roe en la inter-celda tal que

$$\mathcal{Q}_\Phi(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) = \left(\frac{\mathcal{Q}_\Phi(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R)}{0} \middle| \frac{-\mathcal{Q}_\Phi(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R)\mathbf{A}_\Phi^{-1}(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R)\mathbf{S}_\Phi(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R)}{0} \right).$$

La expresión para el esquema numérico correspondiente es como en (3.34) reemplazando el valor absoluto de la matriz intermedia por la matriz de viscosidad \mathcal{Q}_Φ .

Aquí vamos a considerar matrices de viscosidad de la forma

$$\mathbf{Q}_\Phi(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) = f(\mathbf{A}_\Phi(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R)), \quad (3.44)$$

tal que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaga las siguientes propiedades

- $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$,
- $f(x)$ es fácil de evaluar,
- la gráfica de $f(x)$ es *cercana o próxima* a la gráfica de $|x|$.

Más aún, si $f(0) > 0$, no sería necesario aplicar técnicas de corrección de entropía, como ocurre con el método de Roe, para evitar la aparición de discontinuidades no entrópicas en la solución numérica.

La estabilidad del esquema numérico está fuertemente relacionada con la definición de la función $f(x)$. En particular, si $\lambda_1(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_{i+1}) < \dots < \lambda_N(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_{i+1})$ son los valores propios de $\mathcal{A}_\Phi(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_{i+1})$ y asumiendo la condición CFL:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{i,j} |\lambda_j(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_{i+1})| \leq 1 \quad (3.45)$$

en el trabajo realizado por Castro-Díaz y Fernández-Nieto, 2012 [19], se muestra que el esquema numérico resultante es L^∞ -estable si verifica la siguiente condición:

$$f(x) \geq |x|, \forall x \in [\lambda_1(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_{i+1}), \lambda_N(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_{i+1})], \forall i \in \mathbb{Z}, \quad (3.46)$$

es decir, el esquema de viscosidad polinomial será L^∞ -estable si la gráfica de $f(x)$ está por encima de la gráfica del valor absoluto en el intervalo que contiene a los valores propios de \mathcal{A}_Φ .

A principio de los ochenta en el trabajo de Harten, et al, 1983 [63], para el caso conservativo, se propone elegir f como un polinomio lineal $p(x)$ que interpole $|x|$ en el menor de los valores propios y el mayor de ellos. Esta idea, que dio lugar al método HLL, ha sido mejorada por diversos autores después (ver [113] para más detalles).

En el trabajo de Degond, et al 1999 [39], se construye una aproximación de $|A|$ mediante un polinomio que aproxima $|x|$ usando para ello una cota del mayor y menor valor propio y una condición de tangencia entre el polinomio y la gráfica de $|x|$ en el mayor valor, en valor absoluto, de estas cotas. Este enfoque ha sido extendido a un marco general en [19], donde se han propuesto los denominados métodos PVM (*polynomial*

viscosity matrix). En este trabajo se propone el uso de matrices de viscosidad que resulten de una evaluación polinómica de una matriz de Roe. La idea es considerar matrices de viscosidad de la forma:

$$\mathcal{Q}_{\Phi}(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_{i+1}) = P_r^{i+1/2}(\mathcal{A}_{\Phi}(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_{i+1})), \quad (3.47)$$

donde $P_r^{i+1/2}$ es un polinomio de grado r que aproxima, en algún sentido, a la función $|x|$.

Algunos de los esquemas usuales pueden ser interpretados como un método PVM: este es el caso para Roe, Lax-Friedrichs, Rusanov, HLL [63], FORCE [114], MUSTA [112], etc. El esquema numérico introducido en [39] y el reciente Krylov-Riemann solver introducido en [116] también pueden ser vistos como un caso particular de los esquemas PVM. Como ejemplo, en la Tabla 3.1 se muestra el polinomio correspondiente a los esquemas Lax-Friedrichs, HLL y FORCE.

Tabla 3.1: Esquemas clásicos de volúmenes finitos escritos como métodos PVM		
Esquema	Polinomio	Coefficientes
Lax-Friedrichs	$P_0(x) = a_0$	$a_0 = \frac{\Delta x}{\Delta t}$
HLL	$P_1(x) = a_0 + a_1 x$	$a_0 = \frac{\lambda_N^{i+1/2} \lambda_1^{i+1/2} - \lambda_1^{i+1/2} \lambda_N^{i+1/2} }{\lambda_N^{i+1/2} - \lambda_1^{i+1/2}}$ $a_1 = \frac{ \lambda_N^{i+1/2} - \lambda_1^{i+1/2} }{\lambda_N^{i+1/2} - \lambda_1^{i+1/2}}$
FORCE	$P_2(x) = a_0 + a_2 x^2$	$a_0 = \frac{\Delta x}{2\Delta t}, \quad a_2 = \frac{\Delta t}{2\Delta x}$

Un esquema numérico de tipo PVM puede escribirse como (3.39) para las variables \mathbf{w}_i de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{i+1/2}^{\pm}(\mathbf{w}_i, \sigma_i, \mathbf{w}_{i+1}, \sigma_{i+1}) &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}(\mathbf{w}_{i+1}) - \mathbf{F}(\mathbf{w}_i) + \mathbf{B}_{i+1/2}(\mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{w}_i) - \mathbf{S}_{i+1/2}(\sigma_{i+1} - \sigma_i)) \\ &\quad \pm \frac{1}{2} \mathbf{Q}_{i+1/2} \left(\mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{w}_i - \mathbf{A}_{i+1/2}^{-1} \mathbf{S}_{i+1/2}(\sigma_{i+1} - \sigma_i) \right), \end{aligned} \quad (3.48)$$

donde $\mathbf{Q}_{i+1/2} = P_r^{i+1/2}(\mathbf{A}_{i+1/2})$.

Además de la interpretación de esquemas numéricos conocidos como un método PVM, este marco permite desarrollar nuevos esquemas numéricos, por ejemplo en [46] se propone un esquema numérico basado en un polinomio que interpola tres valores propios (el más grande, el más pequeño y el máximo de los intermedios). Este esquema numérico da excelentes resultados para los modelos bi-capa de aguas someras (véase



[46]). Otra interesante familia de esquemas tipo PVM son los basados en los *polinomios de Chebyshev*, que proporcionan aproximaciones óptimas a la función valor absoluto (véase [22]).

Como se ha mencionado previamente, cuando se trabaja con sistemas de la forma (3.9) se debe prestar especial atención a las soluciones que están próximas al equilibrio o estado estacionario. Para poder capturar este tipo de soluciones, es de vital importancia que los esquemas verifiquen la propiedad de ser bien equilibrados. Para un estudio detallado para la construcción de esquemas bien equilibrados camino-conservativos puede consultarse [24].

3.4. Extensión a segundo orden en espacio

Van Leer [119, 120, 121] introdujo la idea de modificar los estados constantes en cada celda de volumen finito, en el método de Godunov de primer orden, como un primer paso para obtener un método de alto orden de precisión en espacio, este enfoque se conoce como métodos tipo MUSCL (*Monotone Upstream-centred Scheme for Conservation Laws*) o métodos de extrapolación variable. Los métodos tipo MUSCL implican: (i) segundo orden de precisión obtenido por la reconstrucción de los estados en las celdas C_i y (ii) la reconstrucción usa limitadores para evitar oscilaciones espurias para que el esquema resultante sea monótono. Para obtener alto orden en tiempo se suelen usar métodos TVD Runge-Kutta, como por ejemplo los introducidos en [103]. También se suele emplear métodos tipo *splitting* como los que se mencionan en [66].

3.4.1. Esquemas de segundo orden basados en reconstrucción de estados

Denotemos por $\overline{\mathbf{W}}_i(t)$ al promedio de la solución \mathbf{W} de (3.9), sobre la celda C_i al tiempo t ,

$$\overline{\mathbf{W}}_i(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{W}(x, t) dx, \quad (3.49)$$

La siguiente ecuación se puede obtener de manera sencilla a partir de (3.9):

$$\overline{\mathbf{W}}_i' = -\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathcal{A}(\mathbf{W}(x, t)) \mathbf{W}_x(x, t) dx. \quad (3.50)$$

Consideremos un esquema numérico camino conservativo de primer orden (3.22) y un operador de reconstrucción de orden s , es decir, un operador que asociado a una sucesión dada $\{\mathbf{W}_i\}$, nos permita obtener dos nuevas sucesiones $\{\mathbf{W}_{i+1/2}^-\}$, $\{\mathbf{W}_{i+1/2}^+\}$, construidas de tal manera que, siempre que

$$\mathbf{W}_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} \mathbf{W}(x, t) dx, \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

para alguna función suave $\mathbf{W}(x, t)$, entonces

$$\mathbf{W}_{i+1/2}^{\pm} = \mathbf{W}(x_{i+1/2}) + \mathcal{O}(\Delta x^s), \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \quad (3.51)$$

En la práctica, los estados reconstruidos $\mathbf{W}_{i+1/2}^{\pm}$ se calculan de la siguiente manera: dada una sucesión de $\{\mathbf{W}_i\}$ de valores promediados en las celdas, se define una función de aproximación $P_i(x)$ en cada celda C_i , usando los valores \mathbf{W}_i de un *stencil*, es decir,

$$P_i(x) = P_i(x, \mathbf{W}_{i-l}, \dots, \mathbf{W}_{i+r}), \quad (3.52)$$

con l y r dos números naturales. Las reconstrucciones $\mathbf{W}_{i+1/2}^{\pm}$ se calculan tomando el límite de las funciones en la intercelda:

$$\lim_{x \rightarrow x_{i-1/2}^+} P_i(x) = \mathbf{W}_{i-1/2}^+, \quad \lim_{x \rightarrow x_{i+1/2}^-} P_i(x) = \mathbf{W}_{i+1/2}^-. \quad (3.53)$$

Las funciones P_i se definen usualmente usando interpolación o técnicas de aproximación [24].

Siguiendo lo hecho en [94], consideraremos el método semi-discreto:

$$\mathbf{W}'_i = -\frac{1}{\Delta x} \left(\mathbf{D}_{i-1/2}^+ + \mathbf{D}_{i+1/2}^- + \int_{C_i} \mathcal{A}(P_i(x)) \frac{\partial}{\partial x} P_i(x) dx \right), \quad (3.54)$$

donde $\mathbf{D}_{i+1/2}^{\pm}$ se evalúan en los estados $\mathbf{W}_{i+1/2}^{\pm}$

$$\mathbf{D}_{i+1/2}^{\pm} = \mathbf{D}_{i+1/2}^{\pm} \left(\mathbf{W}_{i+1/2}^-, \mathbf{W}_{i+1/2}^+ \right), \quad (3.55)$$

siendo \mathbf{D}^{\pm} un flujo numérico de primer orden como los descritos en las secciones anteriores. La sucesión $\{\mathbf{W}_{i+1/2}^{\pm}\}$ representa los estados reconstruidos asociados a $\{\mathbf{W}_i^n\}$ y a

$$P_i(x) \equiv P_i(x; \mathbf{W}_{i-l}^n, \dots, \mathbf{W}_{i+r}^n). \quad (3.56)$$

3.4.2. Reconstrucción tipo MUSCL

La forma más simple de reconstruir los estados constantes $\{\mathbf{W}_i^n\}$ es reemplazar dichos estados \mathbf{W}_i^n por funciones lineales a trozos $P_i(x)$, [113].

Una reconstrucción local lineal a trozos de \mathbf{W}_i^n , la solución promedio de (3.9) en la celda C_i al tiempo t_n , viene dada como:

$$P_i(x) = \mathbf{W}_i^n + (x - x_i) \Delta \mathbf{W}_i, \quad x \in [0, \Delta x], \quad (3.57)$$

donde $\Delta \mathbf{W}_i$ es una aproximación de la pendiente de $\mathbf{W}(x)$ en el centro de la celda x_i . Nótese que (3.57) al igual que $\Delta \mathbf{W}_i$ se definen componente a componente. Una vez definida la pendiente $\Delta \mathbf{W}_i$, la función lineal $P_i(x)$ está definida localmente en la celda C_i . En la Figura 3.2 se puede ver la extrapolación MUSCL en la frontera de una celda

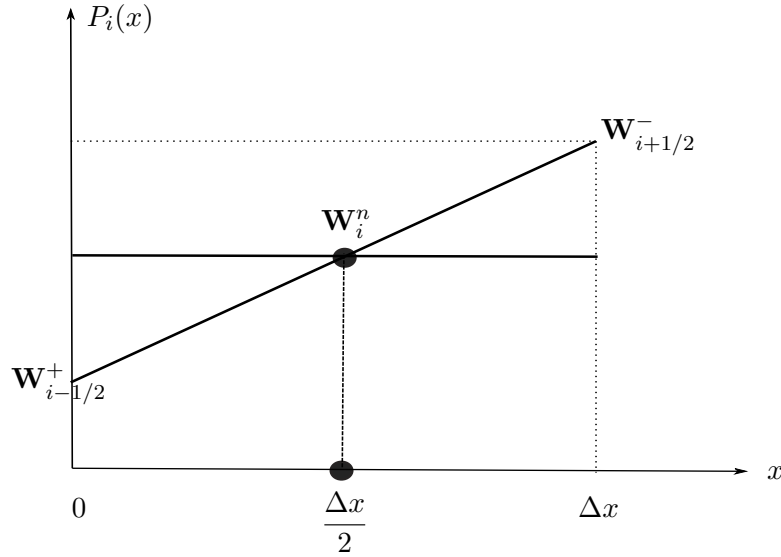


Figura 3.2: Reconstrucción MUSCL sobre una celda de volumen finito en coordenadas locales. Los valores extrapolados en la frontera son $\mathbf{W}_{i-1/2}^+$ y $\mathbf{W}_{i+1/2}^-$

C_i . Los valores de $P_i(x)$ en la frontera de la celda están definidos por la ecuación (3.53), y toman la forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{i-1/2}^+ &= \lim_{x \rightarrow x_{i-1/2}^+} P_i(x) = \mathbf{W}_i^n - \frac{1}{2} \Delta x \Delta \mathbf{W}_i, \\ \mathbf{W}_{i+1/2}^- &= \lim_{x \rightarrow x_{i+1/2}^-} P_i(x) = \mathbf{W}_i^n + \frac{1}{2} \Delta x \Delta \mathbf{W}_i.\end{aligned}\tag{3.58}$$

Los valores $\mathbf{W}_{i-1/2}^+$ y $\mathbf{W}_{i+1/2}^-$ suelen denominarse como *valores frontera extrapolados*, por ello, un nombre alternativo que se le suele dar a este método es, *Método de extrapolación de variables*, ver [113]. Notemos que la integral de $P_i(x)$, ecuación (3.57), sobre la celda C_i coincide con \mathbf{W}_i^n , lo que garantiza que el proceso de reconstrucción es conservativo. En la Figura 3.3 se pueden ver la reconstrucción lineal a trozos en tres celdas consecutivas.

3.4.3. Elección de la pendiente

Si en la ecuación (3.57) seleccionamos $\Delta \mathbf{W}_i = 0$ daría como resultado un esquema de primer orden. Para obtener un esquema de segundo orden de precisión debemos elegir una pendiente no nula de tal forma que $\Delta \mathbf{W}_i$ sea al menos una aproximación de primer orden de la derivada en x_i . Existen tres posibilidades obvias:

- Pendiente centrada:

$$\Delta \mathbf{W}_i = \frac{\mathbf{W}_{i+1} - \mathbf{W}_{i-1}}{2\Delta x}.$$

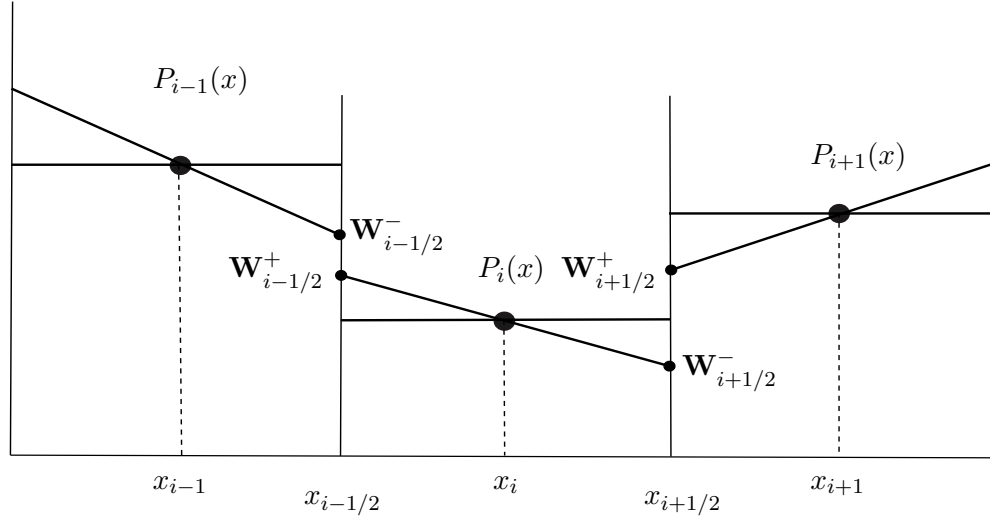


Figura 3.3: Reconstrucción MUSCL sobre tres celdas consecutivas de volumen finito

- Descentrada hacia adelante:

$$\Delta \mathbf{W}_i = \frac{\mathbf{W}_i - \mathbf{W}_{i-1}}{\Delta x}.$$

- Descentrada hacia atrás:

$$\Delta \mathbf{W}_i = \frac{\mathbf{W}_{i+1} - \mathbf{W}_i}{\Delta x}.$$

La elección a priori de cualquiera de las tres elecciones anteriores conduce a un esquema no necesariamente monótono. Para garantizar la monotonía del operador de reconstrucción requiere del uso de limitadores de pendiente (véase por ejemplo [75]). Uno de los limitadores de pendiente más utilizados es el denominado *minmod*

$$\Delta \mathbf{W}_i = \text{minmod} \left(\frac{\mathbf{W}_i - \mathbf{W}_{i-1}}{\Delta x}, \frac{\mathbf{W}_{i+1} - \mathbf{W}_i}{\Delta x} \right), \quad (3.59)$$

donde la función *minmod* (módulo mínimo) de dos argumentos se define como

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} a, & \text{si } |a| < |b| \text{ y } ab > 0, \\ b, & \text{si } |b| < |a| \text{ y } ab > 0, \\ 0, & \text{si } ab \leq 0. \end{cases} \quad (3.60)$$

Si a y b tienen el mismo signo, la función *minmod* selecciona aquel valor que es menor en modulo. Si hay un cambio de signos, entonces la función da como resultado cero.

Otra opción de limitador pendiente es el denominado *superbee*, donde

$$\Delta \mathbf{W}_i = \text{maxmod} \left(\Delta \mathbf{W}_i^{(1)}, \Delta \mathbf{W}_i^{(2)} \right). \quad (3.61)$$

La función *maxmod* (módulo máximo) de dos argumentos se define como

$$\max\text{mod}(a, b) = \begin{cases} a, & \text{si } |a| > |b| \text{ y } ab > 0, \\ b, & \text{si } |b| > |a| \text{ y } ab > 0, \\ 0, & \text{si } ab \leq 0. \end{cases} \quad (3.62)$$

Los valores de las pendientes $\Delta \mathbf{W}_i^{(1)}$ y $\Delta \mathbf{W}_i^{(2)}$, en la ecuación (3.61), son calculados de la siguiente forma

$$\Delta \mathbf{W}_i^{(1)} = \min\text{mod} \left(\frac{\mathbf{W}_{i+1} - \mathbf{W}_i}{\Delta x}, 2 \frac{\mathbf{W}_i - \mathbf{W}_{i-1}}{\Delta x} \right),$$

$$\Delta \mathbf{W}_i^{(2)} = \min\text{mod} \left(2 \frac{\mathbf{W}_{i+1} - \mathbf{W}_i}{\Delta x}, \frac{\mathbf{W}_i - \mathbf{W}_{i-1}}{\Delta x} \right).$$

Cada pendiente unilateral se compara con el doble de la pendiente unilateral opuesta.

Otra elección muy popular es el limitador en diferencias centrales (*monotonized central-difference limiter*), MC limiter, propuesto por van Leer [120],

$$\Delta \mathbf{W}_i = \min\text{mod} \left(\frac{\mathbf{W}_{i+1} - \mathbf{W}_{i-1}}{2\Delta x}, 2 \frac{\mathbf{W}_i - \mathbf{W}_{i-1}}{\Delta x}, 2 \frac{\mathbf{W}_{i+1} - \mathbf{W}_i}{\Delta x} \right). \quad (3.63)$$

Otro limitador de pendiente que proporciona buenos resultados es el siguiente:

$$\Delta \mathbf{W}_i = \text{avg} \left(\frac{\mathbf{W}_i - \mathbf{W}_{i-1}}{\Delta x}, \frac{\mathbf{W}_{i+1} - \mathbf{W}_i}{\Delta x} \right), \quad (3.64)$$

donde

$$\text{avg}(a, b) = \frac{b|a| + a|b|}{|a| + |b|}. \quad (3.65)$$

3.5. Esquema desacoplado de primer orden para el transporte de sedimentos

En esta sección se presentan dos esquemas numéricos para la resolución numérica del sistema (2.60). Vamos a considerar aquí un esquema desacoplado, que suelen ser muy populares para la resolución de este tipo de problemas, supuesta una interacción débil entre el fluido y el sedimento. Para ello primero resolveremos la parte hidrodinámica del modelo (conservación de masa, conservación de momentos y conservación de la carga en suspensión), sin tener en cuenta la ecuación de Exner. Como hemos visto, si hacemos caso omiso de la ecuación de Exner, es posible obtener una expresión sencilla de los autovalores y autovectores del sistema hidrodinámico (véase (2.77), (2.78) y (2.85)), lo que facilita la construcción de un esquema de Roe para la componente hidrodinámica. A continuación se procede a la discretización de la ecuación de Exner mediante un esquema descentrado, estimando para ello la velocidad de propagación de la componente sedimentaria. El principal inconveniente con el que nos podemos encontrar es que los

esquemas así contruidos pueden ser inestables (véase por ejemplo [14]). La principal razón de dichas inestabilidades se debe a que no se están considerando los valores propios del sistema completo [32].

En lo que sigue vamos a proponer un esquema numérico para la componente hidrodinámica del sistema (2.60) siguiendo el procedimiento propuesto por Bermúdez y Vázquez-Cendón en [5]. En dicho trabajo se introdujo la propiedad de conservación y se propuso una discretización descentrada de los términos fuentes para el sistema de aguas someras. El esquema de volúmenes finitos en este caso podemos escribirlo como:

$$\mathcal{W}_i^{n+1} = \mathcal{W}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{F}_{i+1/2}^n - \mathcal{F}_{i-1/2}^n) + \Delta t \mathcal{S}(\mathcal{W}_i^n, b_i^n), \quad (3.66)$$

donde

$$\mathcal{S}(\mathcal{W}_i^n, b_i^n) \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} \mathcal{S}(\mathcal{W}_i^n, b_i^n) dx.$$

3.5.1. Flujo numérico

El esquema de volúmenes finitos quedará determinado cuando se fije la expresión del flujo numérico. En esta sección se considera el Q-esquema de van Leer, donde

$$\mathcal{F}_{i\pm 1/2}^n(\mathcal{W}_l, \mathcal{W}_r) = \frac{1}{2} (\mathcal{F}(\mathcal{W}_l) + \mathcal{F}(\mathcal{W}_r)) - \frac{1}{2} |\mathcal{Q}(\mathcal{W}_l, \mathcal{W}_r)| (\mathcal{W}_r - \mathcal{W}_l), \quad (3.67)$$

donde \mathcal{W}_l y \mathcal{W}_r son los estados a la izquierda y derecha de la intercelda $x_{i\pm 1/2}$, respectivamente, el vector del flujo físico está definido por (2.75) y

$$\mathcal{Q}(\mathcal{W}_l, \mathcal{W}_r) = \mathcal{A}(\mathcal{W}_l, \mathcal{W}_r) = \mathcal{A} \left(\frac{1}{2} (\mathcal{W}_l + \mathcal{W}_r) \right),$$

donde \mathcal{A} está definida por (2.76).

Recordemos que el valor absoluto de una matriz diagonalizable \mathcal{A} se define como sigue: sea $\mathcal{A} = \mathcal{K}\Lambda\mathcal{K}^{-1}$ donde Λ es la matriz diagonal de los valores propios de \mathcal{A} y \mathcal{K} es la matriz formada por los correspondientes vectores propios. Entonces $|\mathcal{A}| = \mathcal{K}|\Lambda|\mathcal{K}^{-1}$, donde $|\Lambda|$ es la matriz diagonal de los valores absolutos de los valores propios de \mathcal{A} , por lo tanto

$$|\mathcal{A}(\mathcal{W}_l, \mathcal{W}_r)| = \mathcal{K}(\mathcal{W}_l, \mathcal{W}_r) |\Lambda(\mathcal{W}_l, \mathcal{W}_r)| \mathcal{K}^{-1}(\mathcal{W}_l, \mathcal{W}_r).$$

El segundo término en el lado derecho de (3.67), llamado matriz de viscosidad numérica, da estabilidad al esquema numérico. En caso de que alguno de los valores propios se anule, el término de viscosidad numérica correspondiente a la ecuación desacoplada se anula, esto puede producir soluciones no entrópicas, (véase Harten, [62]). Para evitar este tipo de problemas, en el esquema numérico, se redefine el valor absoluto de los valores propios mediante la regularización parabólica de Harten.



$$|\lambda|_{\varepsilon_{RH}} = |\lambda| + \frac{1}{2}(1 + \text{sig}(\varepsilon_{RH} - |\lambda|)) \left(\frac{\lambda^2 + \varepsilon_{RH}^2}{2\varepsilon} - |\lambda| \right), \quad (3.68)$$

donde ε_{RH} es el parámetro de regularización de Harten.

3.5.2. Discretización del término fuente

En lo que sigue vamos a describir la discretización de los diferentes términos fuentes que componen a $\mathcal{S}(\mathcal{W}, b)$. Comencemos con la discretización de las fuentes que contienen la pendiente del fondo y la variación de la concentración.

Pendiente del fondo y variación de la concentración

En esta sección se describe brevemente la discretización de estos términos siguiendo el procedimiento descrito en [5] para descentrar el término fuente de la pendiente del fondo y de la variación de concentración volumétrica. Por simplicidad se detallará el proceso para la pendiente del fondo, pero se hace de manera similar para el término fuente que contiene la derivada de la concentración volumétrica.

En concreto, siguiendo [5], podemos discretizar el término fuente como sigue:

$$\mathcal{S}_{b,i}^n := \Psi_b(\mathcal{W}_{i-1}^n, \mathcal{W}_i^n, \mathcal{W}_{i+1}^n, b_{i-1}^n, b_i^n, b_{i+1}^n), \quad (3.69)$$

donde

$$\begin{aligned} \Psi_b(\mathcal{W}_{i-1}^n, \mathcal{W}_i^n, \mathcal{W}_{i+1}^n, b_{i-1}^n, b_i^n, b_{i+1}^n) &:= \Psi_{b,L}(\mathcal{W}_{i-1}^n, \mathcal{W}_i^n, b_{i-1}^n, b_i^n) \\ &+ \Psi_{b,R}(\mathcal{W}_i^n, \mathcal{W}_{i+1}^n, b_i^n, b_{i+1}^n), \end{aligned} \quad (3.70)$$

siendo

$$\Psi_{b,L}(\mathcal{W}_{i-1}, \mathcal{W}_i, b_{i-1}, b_i) = \frac{1}{2}[\mathbf{I} + |\mathcal{A}(\mathcal{W}_{i-1}, \mathcal{W}_i)|\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{W}_{i-1}, \mathcal{W}_i)]\widehat{\mathcal{S}}(\mathcal{W}_{i-1}, \mathcal{W}_i, b_{i-1}, b_i), \quad (3.71)$$

y

$$\Psi_{b,R}(\mathcal{W}_i, \mathcal{W}_{i+1}, b_i, b_{i+1}) = \frac{1}{2}[\mathbf{I} - |\mathcal{A}(\mathcal{W}_i, \mathcal{W}_{i+1})|\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{W}_i, \mathcal{W}_{i+1})]\widehat{\mathcal{S}}(\mathcal{W}_i, \mathcal{W}_{i+1}, b_i, b_{i+1}). \quad (3.72)$$

donde el término $\widehat{\mathcal{S}}(\mathcal{W}_l, \mathcal{W}_r, b_l, b_r)$ es una aproximación consistente de la fuente \mathcal{S}_b en cada intercelda, dado por:

$$\widehat{\mathcal{S}}(\mathcal{W}_l, \mathcal{W}_r, b_l, b_r) := \begin{pmatrix} 0 \\ -g \frac{h_l + h_r}{2} \frac{b_r - b_l}{\Delta x} \\ 0 \end{pmatrix},$$

siendo \mathcal{W}_l , b_l , \mathcal{W}_r y b_r , los estados a izquierda y derecha de cada intercelda, respectivamente, y Δx es el tamaño de las celdas, que hemos supuesto constante.

De manera análoga se calcula

$$\mathcal{S}_{c,i}^n := \Psi_c(\mathcal{W}_{i-1}^n, \mathcal{W}_i^n, \mathcal{W}_{i+1}^n, c_{i-1}^n, c_i^n, c_{i+1}^n), \quad (3.73)$$

donde $\widehat{\mathcal{S}}(\mathcal{W}_l, \mathcal{W}_r, c_l, c_r)$ se define como

$$\widehat{\mathcal{S}}(\mathcal{W}_l, \mathcal{W}_r, c_l, c_r) := \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\rho_s - \rho_0}{\rho_l + \rho_r} g \left(\frac{h_l + h_r}{2} \right)^2 \frac{c_r - c_l}{\Delta x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.74)$$

donde al igual que antes, \mathcal{W}_l , c_l , \mathcal{W}_r y c_r son los estados a izquierda y derecha de cada intercelda, respectivamente.

Término de fricción y término de erosión/depósito

Proponemos aquí dos formas diferentes de discretizar el término de fricción. La primera de ellas mediante un esquema explícito en tiempo, en la que el término $\mathcal{S}_{f,i}^n$ se escribe como

$$\mathcal{S}_{f,i}^n = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \frac{\mu_f^2 u_i^n |u_i^n|}{(h^n)^{1/3}} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.75)$$

La segunda de ellas, que es la más utilizada en la práctica, corresponde a una discretización semi-implícita en tiempo

$$\mathcal{S}_{f,i}^n = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \frac{\mu_f^2 u^{n+1} |u^n|}{(h_n)^{1/3}} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.76)$$

En este caso, para calcular la velocidad en el tiempo t^{n+1} habrá que resolver la ecuación algebraica que resulta al considerar este término. La ecuación resultante es lineal y no introduce ningún coste computacional adicional.

Finalmente, la aproximación para el término fuente que contiene los procesos de

erosión y depósito es explícita en tiempo

$$\mathcal{S}_{ed,i}^n = \begin{pmatrix} \frac{F_{e,i}^n - F_{d,i}^n}{1 - \psi} \\ -\frac{\rho_b - \rho}{\rho} \frac{F_{e,i}^n - F_{d,i}^n}{1 - \psi} u_i^n \\ F_{e,i}^n - F_{d,i}^n \end{pmatrix}, \quad (3.77)$$

donde $F_{e,i}^n := F_e(\mathcal{W}_i^n)$ y $F_{d,i}^n := F_d(\mathcal{W}_i^n)$. La expresión para el flujo de erosión, F_e , está definida por (1.24), y el flujo de depósito, F_d , viene dado por (1.31).

Finalmente el esquema numérico está dado por la ecuación (3.66), tal que el flujo numérico está dado por (3.67) y la discretización del término fuente puede ser escrita como:

$$\mathcal{S}(\mathcal{W}_i^n) = \mathcal{S}_{b,i}^n + \mathcal{S}_{c,i}^n + \mathcal{S}_{f,i}^n + \mathcal{S}_{ed,i}^n.$$

Observación 3.5.1 Como veremos en 3.6.5, es más interesante considerar una discretización semi-implícita de los términos de erosión y depósito, ya que en tal caso es posible demostrar que el esquema resultante es positivo.

3.5.3. Discretización del término \mathcal{S}_c como producto no conservativo

En la sección anterior hemos discretizado el término $\mathcal{S}_c(\mathcal{W})$ como si fuera un término fuente, pero realmente, este término es un producto no-conservativo que involucra derivadas de las variables conservadas h y hc . Como hemos visto, dicho término se puede escribir como

$$\mathcal{S}_c(\mathcal{W}) = \mathcal{B}(\mathcal{W}) \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x}$$

donde $\mathcal{B}(\mathcal{W})$ viene dado por (2.81)

Por tanto, en esta sección presentaremos brevemente la expresión de un esquema numérico donde se tiene en cuenta que este término es realmente un producto no conservativo. Para ello seguiremos el procedimiento descrito en [94, 20]: en cada intercelda del mallado de volúmenes finitos se considera un problema de Riemann asociado sistema hiperbólico no conservativo definido por la matriz (2.84) y a los estados constantes $\mathcal{W}_i^n, \mathcal{W}_{i+1}^n$. La aproximación \mathcal{W}_i^{n+1} se obtiene como

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_i^{n+1} = & \mathcal{W}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathcal{A}_{\mathcal{D},i-\frac{1}{2}}^+ (\mathcal{W}_i^n - \mathcal{W}_{i-1}^n) + \mathcal{A}_{\mathcal{D},i+\frac{1}{2}}^- (\mathcal{W}_{i+1}^n - \mathcal{W}_i^n) \right) \\ & + \Delta t (\mathcal{S}_{b,i}^n + \mathcal{S}_{f,i}^n + \mathcal{S}_{ed,i}^n), \end{aligned} \quad (3.78)$$

donde

$$\mathcal{A}_{\mathcal{D},i+\frac{1}{2}}^{\pm} = \frac{\mathcal{A}_{Rg,i+\frac{1}{2}} \pm |\mathcal{A}_{Rg,i+\frac{1}{2}}|}{2},$$

siendo $\mathcal{A}_{Rg,i+\frac{1}{2}}$ una matriz de Roe generalizada (véase [118]) de (2.84) asociada a los estados \mathcal{W}_i y \mathcal{W}_{i+1} (véase epígrafe de la sección 2.2.2).

En particular, se define:

$$\mathcal{A}_{Rg,i+\frac{1}{2}} = \mathcal{J}_{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{B}_{i+\frac{1}{2}},$$

donde

$$\mathcal{J}_{i+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ gh_{i+\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2}}^2 & 2u_{i+\frac{1}{2}} & 0 \\ -u_{i+\frac{1}{2}}c_{i+\frac{1}{2}} & c_{i+\frac{1}{2}} & u_{i+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad (3.79)$$

$$\mathcal{B}_{i+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ gh_{i+\frac{1}{2}} \frac{c_{i+\frac{1}{2}}(\rho_s - \rho_0)}{2\rho_{i+\frac{1}{2}}} & 0 & -gh_{i+\frac{1}{2}} \frac{\rho_s - \rho_0}{2\rho_{i+\frac{1}{2}}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.80)$$

tal que

$$h_{i+\frac{1}{2}} = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}, \quad u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{u_i + u_{i+1}}{2}, \quad c_{i+\frac{1}{2}} = \frac{c_i + c_{i+1}}{2}, \quad \rho_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\rho_i + \rho_{i+1}}{2},$$

lo que verifica la propiedad de Roe

$$\mathcal{A}_{Rg,i+\frac{1}{2}} \cdot (\mathcal{W}_{i+1} - \mathcal{W}_i) = \mathcal{F}(\mathcal{W}_{i+1}) - \mathcal{F}(\mathcal{W}_i) - \mathcal{B}_{i+\frac{1}{2}} \cdot (\mathcal{W}_{i+1} - \mathcal{W}_i).$$

El esquema numérico toma entonces la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_i^{n+1} &= \mathcal{W}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathcal{G}_{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{G}_{i-\frac{1}{2}} \right) \\ &+ \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\mathcal{B}_{i+\frac{1}{2}}^n (\mathcal{W}_{i+1}^n - \mathcal{W}_i^n) + \mathcal{B}_{i-\frac{1}{2}}^n (\mathcal{W}_i^n - \mathcal{W}_{i-1}^n) \right) \\ &+ \Delta t (\mathcal{S}_{b,i}^n + \mathcal{S}_{f,i}^n + \mathcal{S}_{ed,i}^n), \end{aligned} \quad (3.81)$$

donde

$$\mathcal{G}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\mathcal{F}(\mathcal{W}_{i+1}) + \mathcal{F}(\mathcal{W}_i)) - \frac{1}{2} |\mathcal{A}_{Rg,i+\frac{1}{2}}| (\mathcal{W}_{i+1}^n - \mathcal{W}_i^n),$$

El flujo físico $\mathcal{F}(\mathcal{W})$ está definido en (2.75), la matriz \mathcal{A}_{Rg} es la matriz definida por (2.84). La matriz $|\mathcal{A}_{Rg,i+\frac{1}{2}}|$ se calcula utilizando los autovalores dados en (2.77) y los autovectores dados en (2.85). La aproximación para el término fuente que contiene la pendiente del fondo, $\mathcal{S}_{b,i}^n$, es similar a la descrita en la sección (3.5.2), con la diferencia que en este caso se descentra con respecto de los autovalores (2.77) y los autovectores (2.85). La discretización del término fuente de erosión y depósito es la dada por (3.77) y el término de fricción se puede discretizar utilizando (3.75) o (3.76).

3.5.4. Evolución morfológica

Una vez que hemos calculado la evolución temporal de las variables hidrodinámicas, el siguiente paso es calcular la evolución temporal del fondo. Para ello es necesario aproximar la ecuación de Exner. Para ello vamos a usar el esquema numérico descrito en [67]. En dicho trabajo se presenta una discretización upwind para la ecuación de Exner, estimando numéricamente la velocidad de propagación de los sedimentos. Concretamente el esquema numérico queda como sigue:

$$b_i^{n+1} = b_i^n + \frac{\Delta t}{1 - \psi} \left(F_{d,i}^n - F_{e,i}^n - \frac{1}{\Delta x} \left(q_{b,i+\frac{1}{2}}^n - q_{b,i-\frac{1}{2}}^n \right) \right). \quad (3.82)$$

donde

$$q_{b,i+\frac{1}{2}}^n := \begin{cases} q_b(x_i, t^n) & \text{si } \tilde{\lambda}_{b,i+\frac{1}{2}} > 0, \\ q_b(x_{i+1}, t^n) & \text{si } \tilde{\lambda}_{b,i+\frac{1}{2}} < 0, \end{cases} \quad (3.83)$$

siendo

$$\tilde{\lambda}_{b,i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{1 - \psi} \frac{q_b(x_{i+1}, t^n) - q_b(x_i, t^n)}{b_{i+1}^n - b_i^n}. \quad (3.84)$$

3.5.5. Escritura del esquema desacoplado como un esquema camino conservativo

En esta sección mostraremos que el esquema descrito en la sección 3.5, para la resolución del sistemas de leyes de balance (2.73), puede ser escrito como un esquema camino conservativo.

Recordemos que el primer esquema numérico (3.66), despreciando las aproximaciones para los términos fuentes de erosión/depósito y el término de fricción toma la forma:

$$\mathcal{W}_i^{n+1} = \mathcal{W}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{F}_{i+1/2}^n - \mathcal{F}_{i-1/2}^n) + \Delta t (\mathcal{S}_{b,i}^n + \mathcal{S}_{c,i}^n). \quad (3.85)$$

De las definiciones de $\mathcal{F}_{i\pm 1/2}^n$, $\mathcal{S}_{b,i}^n$ y $\mathcal{S}_{c,i}^n$ dadas por las relaciones (3.67) y (3.70), respectivamente, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_i^{n+1} = & \mathcal{W}_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[\mathcal{F}(\mathcal{W}_{i+1}^n) - \mathcal{F}(\mathcal{W}_i^n) - |\mathcal{A}_{i+1/2}|(\mathcal{W}_{i+1}^n - \mathcal{W}_i^n) \right. \\ & + \mathcal{F}(\mathcal{W}_i^n) - \mathcal{F}(\mathcal{W}_{i-1}^n) + |\mathcal{A}_{i-1/2}|(\mathcal{W}_i^n - \mathcal{W}_{i-1}^n) \\ & - (\mathbf{I} + |\mathcal{A}_{i-1/2}| \mathcal{A}_{i-1/2}^{-1}) (\mathcal{S}_{b,i-1/2}(\sigma_{1,i} - \sigma_{b,i-1}) + \mathcal{S}_{c,i-1/2}(\sigma_{2,i} - \sigma_{2,i-1})) \\ & \left. - (\mathbf{I} - |\mathcal{A}_{i+1/2}| \mathcal{A}_{i+1/2}^{-1}) (\mathcal{S}_{b,i+1/2}(\sigma_{1,i+1} - \sigma_{1,i}) + \mathcal{S}_{c,i+1/2}(\sigma_{2,i+1} - \sigma_{2,i})) \right], \end{aligned} \quad (3.86)$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_i^{n+1} = & \mathcal{W}_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [(\mathcal{A}_{i+1/2} - |\mathcal{A}_{i+1/2}|) (\mathcal{W}_{i+1}^n - \mathcal{W}_i^n) \\
& + (\mathcal{A}_{i-1/2} + |\mathcal{A}_{i-1/2}|) (\mathcal{W}_i^n - \mathcal{W}_{i-1}^n) \\
& - (\mathbf{I} + |\mathcal{A}_{i-1/2}| \mathcal{A}_{i-1/2}^{-1}) (\mathcal{S}_{b,i-1/2}(\sigma_{1,i} - \sigma_{1,i-1}) + \mathcal{S}_{c,i-1/2}(\sigma_{2,i} - \sigma_{2,i-1})) \\
& - (\mathbf{I} - |\mathcal{A}_{i+1/2}| \mathcal{A}_{i+1/2}^{-1}) (\mathcal{S}_{b,i+1/2}(\sigma_{1,i+1} - \sigma_{1,i}) + \mathcal{S}_{c,i+1/2}(\sigma_{2,i+1} - \sigma_{2,i}))],
\end{aligned} \tag{3.87}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_i^{n+1} = & \mathcal{W}_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[(\mathbf{I} - |\mathcal{A}_{i+1/2}| \mathcal{A}_{i+1/2}^{-1}) (\mathcal{A}_{i+1/2} (\mathcal{W}_{i+1}^n - \mathcal{W}_i^n) \right. \\
& \left. - (\mathcal{S}_{b,i+1/2}(\sigma_{1,i+1} - \sigma_{1,i}) + \mathcal{S}_{c,i+1/2}(\sigma_{2,i+1} - \sigma_{2,i}))) \right. \\
& \left. + (\mathbf{I} + |\mathcal{A}_{i-1/2}| \mathcal{A}_{i-1/2}^{-1}) (\mathcal{A}_{i-1/2} (\mathcal{W}_i^n - \mathcal{W}_{i-1}^n) - (\mathcal{S}_{b,i-1/2}(\sigma_{1,i} - \sigma_{1,i-1}) \right. \\
& \left. + \mathcal{S}_{c,i-1/2}(\sigma_{2,i} - \sigma_{2,i-1}))) \right]
\end{aligned} \tag{3.88}$$

Por lo tanto, el esquema numérico (3.66) puede ser escrito en la forma (3.22) con

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{i+1/2}^{\pm} = & \frac{1}{2} \left(\mathbf{I} \pm |\mathcal{A}_{i+1/2}| \mathcal{A}_{i+1/2}^{-1} \right) (\mathcal{A}_{i+1/2} (\mathcal{W}_{i+1}^n - \mathcal{W}_i^n) \\
& - (\mathcal{S}_{b,i+1/2}(\sigma_{1,i+1} - \sigma_{1,i}) + \mathcal{S}_{c,i+1/2}(\sigma_{2,i+1} - \sigma_{2,i}))).
\end{aligned} \tag{3.89}$$

Nótese que esta expresión coincide con (3.42).

El esquema numérico (3.81) puede escribirse en la forma (3.22) donde $\mathbf{D}_{i+1/2}^{\pm}$ viene dado por (3.89). En esta caso hay que tener en cuenta que la matriz intermedia viene dada por la relación $\mathcal{A}_{Rg}(\mathcal{W}) = \mathcal{A}(\mathcal{W}) - \mathcal{B}(\mathcal{W})$. En tal caso, el último término de (3.89) en lado derecho de la igualdad se reemplaza por $\mathcal{B}_{i+1/2}(\mathcal{W}_{i+1} - \mathcal{W}_i)$.

3.6. Esquema de volúmenes finitos acoplado camino conservativo para el transporte de sedimentos

En esta sección describiremos el esquema numérico camino conservativo utilizado para aproximar el sistema de ecuaciones en derivadas parciales (2.40). Para obtener la solución numérica de dicho sistema se utiliza un algoritmo de dos pasos, en el primero se aproxima el sistema morfo-dinámico, despreciando los términos de erosión y depósito, utilizando un esquema numérico camino conservativo bien equilibrado para el agua en reposo. En el segundo paso se tienen en cuenta los efectos de la erosión y depósito y el término de fricción que se discretizan de forma semi-implícita. Esta técnica ha sido empleada en diversos trabajos, como por ejemplo Nord y Esteves 2005 [92], Kubatko et al. 2006 [70], Morales de Luna et al. 2009 [84], Castro et al. 2013 [21].

3.6.1. Esquema numérico PVM para el sistema morfo-dinámico

Como hemos dicho vamos a utilizar un esquema de la forma (3.22) para aproximar el sistema morfo-dinámico (2.40). En lo que sigue vamos a describir la expresión de los términos $\mathbf{D}_{i+1/2}^\pm$ dados en (3.48), que en el caso de los esquemas PVM se reduce básicamente a describir la matriz de viscosidad $\mathcal{Q}_{i+1/2}$. En particular la matriz de viscosidad es la correspondiente al esquema IFCP (véase [46]). Recordemos, que la matriz de viscosidad $\mathcal{Q}_{i+1/2}$ correspondiente al esquema IFCP se define como

$$\mathcal{Q}_{i+1/2} = P_2^{i+1/2} (\mathcal{A}_{i+1/2}) = \alpha_0^{i+1/2} \text{Id} + \alpha_1^{i+1/2} \mathcal{A}_{i+1/2} + \alpha_2^{i+1/2} \mathcal{A}_{i+1/2}^2, \quad (3.90)$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ se calculan en términos de cotas de la menor y mayor velocidad de propagación de ondas y una cota de las velocidades intermedias. En este caso utilizaremos las aproximaciones de las velocidades de onda calculadas en la Sección 2.1.4.

Dado que $P_2^{i+1/2}$ es un polinomio cuadrático que interpola la función valor absoluto en tres valores, correspondientes a una cota de la menor y mayor velocidad de propagación de ondas y un valor intermedio que mayor a los demás de las velocidades intermedias, el sistema a resolver, para determinar los coeficientes del polinomio, toma la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \\ 1 & \lambda_{int} & \lambda_{int}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\lambda_1| \\ |\lambda_3| \\ |\lambda_{int}| \end{pmatrix}. \quad (3.91)$$

donde

$$\lambda_1 = \min(\lambda_{-,i\pm 1/2}^*, \lambda_{-,L}^*), \quad \lambda_3 = \max(\lambda_{+,i\pm 1/2}^*, \lambda_{+,R}^*),$$

y

$$\lambda_{int} = S_{ext} \max(|\lambda_{m,L}^*|, |\lambda_{m,i\pm 1/2}^*|, |\lambda_{m,R}^*|),$$

siendo

$$S_{ext} = \begin{cases} \text{sgn}(\lambda_1 + \lambda_3) & \text{si } \lambda_1 + \lambda_3 \neq 0, \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Los valores $\lambda_{\pm,i+1/2}^*$ y $\lambda_{m,i+1/2}^*$ son calculados como

$$\lambda_{\pm,i+1/2}^* = \frac{f'_{i+1/2}(S_{\pm,i+1/2}) S_{\pm,i+1/2} - \frac{7}{6} g(h\rho)_{i+1/2} \delta_{i+1/2}}{f'_{i+1/2}(S_{\pm,i+1/2}) - g(h\rho)_{i+1/2} \delta_{i+1/2}}, \quad (3.92)$$

$$\lambda_{m,i+1/2}^* = -\frac{7}{6} \frac{g(h\rho)_{i+1/2} \delta_{i+1/2}}{u_{i+1/2}^2 - gh_{i+1/2}(1 + \rho_{i+1/2} \delta_{i+1/2})}, \quad (3.93)$$

donde

$$f'_{i+1/2}(\lambda) = 3\lambda^2 - 4u_{i+1/2}\lambda + u_{i+1/2}^2 - gh_{i+1/2}, \quad (3.94)$$

$$S_{\pm,i+1/2} = u_{i+1/2} \pm \sqrt{gh_{i+1/2}}, \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned}
h_{i+1/2} &= \frac{h_i + h_{i+1}}{2}, \quad (h\rho)_{i+1/2} = \frac{(h\rho)_i + (h\rho)_{i+1}}{2}, \quad b_{i+1/2} = \max\{b_i, b_{i+1}\}, \\
u_{i+1/2} &= \frac{\sqrt{(h\rho)_i}u_i + \sqrt{(h\rho)_{i+1}}u_{i+1}}{(h\rho)_i + (h\rho)_{i+1}}, \quad (h\rho u)_{i+1/2} = (h\rho)_{i+1/2}u_{i+1/2}.
\end{aligned} \tag{3.96}$$

El valor $\delta_{i+1/2}$ es la evaluación de la derivada del transporte de fondo con respecto a la variable $h\rho u$, evaluada en la interfaz $i + 1/2$. Por su parte los valores $\lambda_{-,L}^*$, $\lambda_{m,L,R}^*$ y $\lambda_{+,R}^*$ son las evaluaciones de (3.92) y (3.93) pero en el estado de la izquierda (L) o el estado de la derecha (R) de la interfaz $i \pm 1/2$.

Considerando las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= -(|\lambda_3|(\lambda_1\lambda_{int}^2 - \lambda_1^2\lambda_{int}) + |\lambda_{int}|(\lambda_3\lambda_1^2 - \lambda_3^2\lambda_1) + |\lambda_1|(\lambda_{int}\lambda_3^2 - \lambda_{int}^2\lambda_3)), \\
\gamma_2 &= |\lambda_{int}|(\lambda_1^2 - \lambda_3^2) + |\lambda_1|(\lambda_3^2 - \lambda_{int}^2) + |\lambda_3|(\lambda_{int}^2 - \lambda_1^2), \\
\gamma_3 &= -(|\lambda_{int}|(\lambda_1 - \lambda_3) + |\lambda_1|(\lambda_3 - \lambda_{int}) + |\lambda_3|(\lambda_{int} - \lambda_1)), \\
\gamma_4 &= (\lambda_1 - \lambda_{int})(\lambda_3(\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_{int}) + \lambda_1\lambda_{int}),
\end{aligned}$$

entonces la solución del sistema lineal (3.91) está dada por

$$\alpha_0 = \frac{\gamma_1}{\gamma_4}, \quad \alpha_1 = \frac{\gamma_2}{\gamma_4}, \quad \alpha_2 = \frac{\gamma_3}{\gamma_4}. \tag{3.97}$$

Finalmente el esquema numérico puede ser escrito en la forma (3.22), donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{i+1/2}^\pm &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}(\mathbf{W}_{i+1}^n) - \mathbf{F}(\mathbf{W}_i^n) + \mathbf{B}_{i+1/2}(\mathbf{W}_{i+1}^n - \mathbf{W}_i^n)) \\
&\pm \frac{1}{2} (\alpha_0^{i+1/2}(\mathbf{W}_{i+1}^n - \mathbf{W}_i^n) \\
&+ \alpha_1^{i+1/2} (\mathbf{F}(\mathbf{W}_{i+1}^n) - \mathbf{F}(\mathbf{W}_i^n) + \mathbf{B}_{i+\frac{1}{2}}(\mathbf{W}_{i+1}^n - \mathbf{W}_i^n)) \\
&+ \alpha_2^{i+1/2} \mathcal{A}_{i+1/2} (\mathbf{F}(\mathbf{W}_{i+1}^n) - \mathbf{F}(\mathbf{W}_i^n) + \mathbf{B}_{i+1/2}(\mathbf{W}_{i+1}^n - \mathbf{W}_i^n))),
\end{aligned} \tag{3.98}$$

donde $\mathbf{F}(\mathbf{W})$ es el vector del flujo físico definido en (2.37), $\mathbf{B}_{i+1/2}$ está definida como

$$\mathbf{B}_{i+1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{g}{2}(h\rho)_{i+1/2} & \frac{g}{2}h_{i+1/2} & 0 & g(h\rho)_{i+1/2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.99}$$

la matriz $\mathcal{A}_{i+1/2}$ toma la forma

$$\mathcal{A}_{i+1/2} = \begin{pmatrix} u_{i+1/2} & -\frac{u_{i+1/2}}{\rho_{i+1/2}} & \frac{1}{\rho_{i+1/2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{g}{2}(h\rho)_{i+1/2} & \frac{g}{2}h_{i+1/2} - u_{i+1/2}^2 & 2u_{i+1/2} & g(h\rho)_{i+1/2} \\ \alpha_{i+1/2} & \beta_{i+1/2} & \delta_{i+1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.100)$$

los valores intermedios de las variables están definidos en (3.96),

$$\alpha_{i+1/2} = \left. \frac{\partial q_b}{\partial h} \right|_{x=x_{i+1/2}}, \quad \beta_{i+1/2} = \left. \frac{\partial q_b}{\partial(h\rho)} \right|_{x=x_{i+1/2}}, \quad \delta_{i+1/2} = \left. \frac{\partial q_b}{\partial(h\rho u)} \right|_{x=x_{i+1/2}},$$

y los coeficientes α_0 , α_1 y α_2 están definidos en la ecuación (3.97).

Este esquema permite calcular la solución del sistema morfodinámico (2.40). Debemos notar que las ecuaciones (2.32) y (2.33), en el lado derecha de la igualdad, difieren por muy poco en su estructura algebraica. Tomando en cuenta la similitud entre dichas ecuaciones, en la siguiente sección presentaremos un esquema numérico, basado en el esquema numérico introducido en esta sección, que pueda reducir el coste computacional.

3.6.2. Esquema de volúmenes finitos para el transporte de sedimentos basado en un esquema PVM

Aunque el esquema anterior proporciona buenos resultados, es posible diseñar un esquema numérico que necesite un menor esfuerzo computacional. Para ello vamos a considerar en primer lugar las ecuaciones (2.33)-(2.35) y la solución para (2.32) se hará de modo descentrada a partir de la solución que se obtenga para (2.33). El esquema numérico que proponemos en esta sección para resolver el sistema (2.40) se escribirá de la forma

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathcal{D}_{i-1/2}^+ + \mathcal{D}_{i+1/2}^- \right). \quad (3.101)$$

Para construir el flujo numérico, tal como se hizo en la sección anterior, se utilizará un esquema tipo polinomio de viscosidad numérica de grado dos. La construcción del flujo numérico se hace como sigue:

- Definimos

$$\mathcal{W}_i = ((h\rho)_i, (h\rho u)_i, b_i)^t.$$

- Sea $\Phi_{i\pm 1/2}^\pm$ el flujo numérico asociado al sistema definido por las ecuaciones (2.33)-(2.35), tal que:

$$\Phi_{i+1/2}^+ = \widehat{\mathbf{D}}_{i+1/2}^+ - \widehat{\mathbf{F}}_c(\mathcal{W}_{i+1}) \quad \text{y} \quad \Phi_{i+1/2}^- = \widehat{\mathbf{D}}_{i+1/2}^- + \widehat{\mathbf{F}}_c(\mathcal{W}_i), \quad (3.102)$$

donde $\widehat{\mathbf{D}}_{i+1/2}^{\pm}$ está definido por

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{D}}_{i+1/2}^{\pm} &= \frac{1}{2} \left(\widehat{\mathbf{F}}_c(\mathcal{W}_{i+1}^n) - \widehat{\mathbf{F}}_c(\mathcal{W}_i^n) + \widehat{\mathbf{B}}_{i+1/2}(\mathcal{W}_{i+1}^n - \mathcal{W}_i^n) \right) \\ &\quad \pm \frac{1}{2} \left(\alpha_0^{i+1/2} (\mathcal{W}_{i+1}^n - \mathcal{W}_i^n) \right) \\ &\quad + \alpha_1^{i+1/2} \left(\widehat{\mathbf{F}}_c(\mathcal{W}_{i+1}^n) - \widehat{\mathbf{F}}_c(\mathcal{W}_i^n) + \widehat{\mathbf{B}}_{i+1/2}(\mathcal{W}_{i+1}^n - \mathcal{W}_i^n) \right) \\ &\quad + \alpha_2^{i+1/2} \widehat{\mathcal{A}}_{i+1/2} \left(\widehat{\mathbf{F}}_c(\mathcal{W}_{i+1}^n) - \widehat{\mathbf{F}}_c(\mathcal{W}_i^n) + \widehat{\mathbf{B}}_{i+1/2}(\mathcal{W}_{i+1}^n - \mathcal{W}_i^n) \right), \end{aligned} \quad (3.103)$$

tal que el flujo se escribe de la siguiente forma

$$\widehat{\mathbf{F}}_c(\mathcal{W}) = \begin{pmatrix} h\rho u \\ h\rho u^2 \\ \frac{q_b}{1-\psi} \end{pmatrix},$$

la matriz $\widehat{\mathbf{B}}_{i+1/2}$ es

$$\widehat{\mathbf{B}}_{i+1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{g}{2}h_{i+1/2} & 0 & g(h\rho)_{i+1/2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y la matriz $\widehat{\mathcal{A}}_{i+1/2}$ se escribe como

$$\widehat{\mathcal{A}}_{i+1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{g}{2}h_{i+1/2} - u_{i+1/2}^2 & 2u_{i+1/2} & g(h\rho)_{i+1/2} \\ \beta_{i+1/2} & \delta_{i+1/2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.104)$$

Los coeficientes, α_0 , α_1 , α_2 , del polinomio de viscosidad numérica vienen dados por la relación (3.97). Para definir el flujo numérico asociado a la ecuación (2.32), se procede como sigue.

- Definimos

$$\widehat{\Phi}_{i\pm 1/2}^- = \left[\Phi_{i\pm 1/2}^- \right]_{[1]} \rho^{-1} \quad \text{y} \quad \widehat{\Phi}_{i\pm 1/2}^+ = -\widehat{\Phi}_{i\pm 1/2}^-,$$

donde

$$\rho^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{\rho_i} & \text{si } \left[\Phi_{i\pm 1/2}^- \right]_{[1]} > 0, \\ \frac{1}{\rho_{i+1}} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Finalmente, el flujo numérico $\mathcal{D}_{i\pm 1/2}^\pm$, para el sistema (2.40), en las interfaces, se define como:

$$\mathcal{D}_{i\pm 1/2}^\pm = \left[\widehat{\Phi}_{i\pm 1/2}^\pm, \left[\Phi_{i\pm 1/2}^\pm \right]_{[1]}, \left[\Phi_{i\pm 1/2}^\pm \right]_{[2]}, \left[\Phi_{i\pm 1/2}^\pm \right]_{[3]} \right]^t. \quad (3.105)$$

Con lo cual, el esquema numérico de la forma (3.101), estaría completamente definido. La ventaja al construir el esquema numérico de esta forma es la reducción en el costo computacional al calcular la solución numérica del sistema (2.40). Por ejemplo, al realizar simulaciones de roturas de presa, como las que se presentan en la sección 5.1, el tiempo de ejecución (o *runtime*) del esquema numérico presentado en la sección 3.6.1 es de 0.898 s mientras que para el código desarrollado en la sección 3.6.2, el tiempo de ejecución es de 0.482 s. Los resultados numéricos obtenidos por ambos esquemas numéricos son esencialmente los mismos.

3.6.3. Tratamiento seco-mojado

Una de las características que deseamos para el esquema numérico es que preserve la positividad de la columna de agua. Para garantizar la positividad del esquema numérico procedemos como sigue: Si $h_{i+1/2} < \varepsilon_{wd}$, donde ε_{wd} es un umbral que mide si se está o no cerca de un frente de seco mojado, cambiamos la aproximación de la matriz de viscosidad por

$$P_1^{i+1/2}(\mathcal{A}_{i+1/2}) = \alpha_0^{i+1/2} \text{Id} + \alpha_1^{i+1/2} \mathcal{A}_{i+1/2}, \quad (3.106)$$

donde

$$\alpha_0 = \frac{\lambda_3 |\lambda_1| - \lambda_1 |\lambda_3|}{\lambda_3 - \lambda_1}; \quad \text{y} \quad \alpha_1 = \frac{|\lambda_3| - |\lambda_1|}{\lambda_3 - \lambda_1}. \quad (3.107)$$

Esto significa que en las interceldas próximas a los frente seco-mojado, modificamos el esquema numérico de forma que el esquema usado coincida con el esquema HLL. Como es bien sabido, el esquema HLL mantiene la positividad de la columna de agua h , supuesto que la función que define el fondo sea positiva, bajo una restricción de tipo $CFL = 0.5$. Dado que la ecuación para la carga en suspensión $h\rho$ es similar a la que predice la evolución de la altura del agua el esquema numérico HLL preserva la positividad de la carga en suspensión con lo cual se puede concluir que el esquema numérico preservará la positividad para la densidad ρ (véase por ejemplo [21, 25]).

Debemos señalar que cuando se emplee el esquema numérico presentado en la sección 3.6.1, la matriz $\mathcal{A}_{i+1/2}$ se calcula usando (3.100). Mientras que si se usa el esquema numérico construido en la sección (3.6.2), la matriz $\mathcal{A}_{i+1/2}$ viene definida por (3.104).

3.6.4. Esquema numérico bien equilibrado

Nos centraremos en preservar las familias de soluciones estacionarias para el agua en reposo y la presión constantes, definidas en (2.91) y (2.93), respectivamente, debido

a que son aquellas que nos interesan desde el punto de vista práctico. Para obtener esquemas numéricos que preserven todas las familias de soluciones estacionarias, es decir, es esquema numérico completamente bien equilibrado, uno puede aplicar las técnicas descritas en [28].

Para obtener un esquema numérico que preserve las familias de soluciones estacionarias (2.91) y (2.93) el término $\alpha_0^{i+1/2}(\mathbf{W}_{i+1}^n - \mathbf{W}_i^n)$, en la ecuación (3.98), tiene que modificarse, de forma que éste sea nulo cuando \mathbf{W}_i^n y \mathbf{W}_{i+1}^n sean estados que pertenezcan a una misma solución estacionaria que se quiera preservar (véase [24]). De modo similar, si es empleado el esquema numérico descrito en la sección 3.6.2, el término $\alpha_0^{i+1/2}(\mathcal{W}_{i+1}^n - \mathcal{W}_i^n)$ en la ecuación (3.103), debe ser nulo cuando \mathcal{W}_i^n y \mathcal{W}_{i+1}^n pertenezcan a una misma solución estacionaria que se quiera preservar.

En el caso del esquema numérico descrito en la sección 3.6.1, esto se puede conseguir, sustituyendo el término $\alpha_0^{i+1/2}(\mathbf{W}_{i+1}^n - \mathbf{W}_i^n)$, en la ecuación (3.98), por

$$\alpha_0^{i+1/2} \mathbf{Id}_{m, i+1/2}(\mathbf{W}_{i+1}^n - \mathbf{W}_i^n), \quad (3.108)$$

donde

$$\mathbf{Id}_{m, i+1/2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2\rho_{i+1/2}} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2}\rho_{i+1/2} & \frac{1}{2} & 0 & \rho_{i+1/2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_\theta \end{pmatrix}, \quad (3.109)$$

tal que

$$\delta_\theta = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \geq \theta_c, \\ 0, & \text{si } \theta < \theta_c, \end{cases} \quad (3.110)$$

donde θ y θ_c son el parámetro de Shields y el valor crítico de Shields, respectivamente. Para anular el término $\alpha_0^{i+1/2}(\mathcal{W}_{i+1}^n - \mathcal{W}_i^n)$, en la ecuación (3.103), éste se sustituye por el término

$$\alpha_0^{i+1/2} \mathcal{I}d_{m, i+1/2}(\mathcal{W}_{i+1}^n - \mathcal{W}_i^n), \quad (3.111)$$

donde

$$\mathcal{I}d_{m, i+1/2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \rho_{i+1/2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_\theta \end{pmatrix}, \quad (3.112)$$

el valor δ_θ está dado por (3.110).

Estas modificaciones nos permiten preservar las soluciones estacionarias para el agua en reposo y la presión constante, definidas por (2.91) y (2.93), respectivamente. También nos permitirá verificar la solución del agua en reposo cuando están presentes los efectos del erosión y depósito, dicha solución ha sido descrita en la sección 2.3.1. Supongamos que \mathbf{W}_{i+1} y \mathbf{W}_i satisfacen (2.91) o (2.93). En particular, con esta elección,

tenemos garantizado que $\mathbf{Id}_{\mathbf{m}_{i+1/2}}(\mathbf{W}_{i+1} - \mathbf{W}_i)$ se cancela si \mathbf{W}_i^n y \mathbf{W}_{i+1}^n pertenecen a una misma solución estacionaria. Además es trivial comprobar que en esta situación

$$\mathcal{A}_{i+\frac{1}{2}}(\mathbf{W}_{i+1} - \mathbf{W}_i) = \mathbf{F}(\mathbf{W}_{i+1}) - \mathbf{F}(\mathbf{W}_i) + \mathbf{B}_{i+\frac{1}{2}}(\mathbf{W}_{i+1} - \mathbf{W}_i) = 0. \quad (3.113)$$

Por tanto, el esquema numérico definido en términos de (3.98) es bien equilibrado para las soluciones estacionarias (2.91) y (2.93). Para verificar la propiedad de bien equilibrado del esquema numérico definido en términos de (3.103), se sigue un razonamiento análogo. Notemos que aquí se verificaría la propiedad de bien equilibrado para las soluciones del sistema (2.33)-(2.35), dicha propiedad se verifica de manera inmediata para la ecuación (2.32) ya que la velocidad es nula.

3.6.5. Resolución de los términos de erosión depósito y fricción

El segundo paso del método empleado se lleva a cabo de la siguiente manera. Sea \mathbf{W}_i^* la aproximación calculada por el esquema numérico para el sistema morfo-dinámico. Calcularemos \mathbf{W}_i^{n+1} de manera semi-implícita, incorporando primero los procesos de erosión y depósito a la solución como sigue.

Se calcula el flujo de sedimento como

$$\phi_{b,i}^* = F_{e,i}^* - F_{d,i}^*, \quad (3.114)$$

donde los términos de erosión y depósito se pueden escribir de la siguiente forma

$$F_{e,i}^* = K_{er,i}^*(1 - \psi), \quad y \quad F_{d,i}^* = K_{dep,i}^*\rho_i^*, \quad (3.115)$$

tal que

$$K_{er,i}^* = \omega_0 E_{s,i}^*, \quad y \quad K_{dcp,i}^* = \frac{\omega_0}{\rho_i^*} c_i^* \left(0.4 \left(\frac{d}{Dsg} \right)^{1.64} + 1.64 \right). \quad (3.116)$$

Para la definición de $K_{er,i}^*$ y $K_{dcp,i}^*$ se han utilizado las fórmulas (1.26) y (1.32), respectivamente, pero también se podrían utilizar las definiciones del flujo de erosión y depósito definidos por (1.24) y (1.31), respectivamente.

Se calculan los valores de $(h\rho)_i^{n+1}$ y $(1 - \psi)b_i^{n+1}$ a partir de la forma discreta de las segunda y cuarta ecuación de (2.40)

$$(h\rho)_i^{n+1} = (h\rho)_i^* + \frac{\Delta t}{1 - \psi} (\rho_b \phi_{b,i}^*), \quad (3.117)$$

$$(1 - \psi)b_i^{n+1} = (1 - \psi)b_i^* - \Delta t \phi_{b,i}^*. \quad (3.118)$$

Estas dos últimas ecuaciones escritas de manera semi-implícita y utilizando (3.114) toman la forma

$$(h\rho)_i^{n+1} = (h\rho)_i^* + \frac{\Delta t}{1 - \psi} \rho_b \left(K_{er,i}^*(1 - \psi) \frac{b_i^{n+1}}{b_i^*} - \frac{(h\rho)_i^{n+1}}{h_i^*} K_{dep,i}^* \right), \quad (3.119)$$

$$(1 - \psi)b_i^{n+1} = (1 - \psi)b_i^* - \Delta t \left(K_{er,i}^*(1 - \psi) \frac{b_i^{n+1}}{b_i^*} - \frac{(h\rho)_i^{n+1}}{h_i^*} K_{dep,i}^* \right). \quad (3.120)$$

Por simplicidad, introduciendo la siguiente notación:

$$a = \frac{\Delta t \rho_b}{1 - \psi} \frac{K_{er,i}^*}{b_i^*}, \quad e = \frac{\Delta t \rho_b}{1 - \psi} \frac{K_{dep,i}^*}{h_i^*}, \quad c = \frac{\Delta t K_{er,i}^*}{b_i^*}, \quad d = \frac{\Delta t K_{dep,i}^*}{h_i^*},$$

$$x = (h\rho)_i^{n+1} \quad y = (1 - \psi)b_i^{n+1},$$

y

$$x_0 = (h\rho)_i^* \quad y_0 = (1 - \psi)b_i^*,$$

el sistema de ecuaciones (3.119)-(3.119) se reduce a

$$\begin{pmatrix} 1 + e & -a \\ -d & 1 + c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \quad (3.121)$$

cuya solución viene dada por

$$x = \frac{(1 + c)x_0 + a y_0}{1 + c + e}, \quad (3.122)$$

$$y = \frac{d x_0 + (1 + e)y_0}{1 + c + e}. \quad (3.123)$$

Notemos que por las formas de los coeficientes a, c, d, e , si $(h\rho)_i^*$ y $(1 - \psi)b_i^*$ son positivos entonces $(h\rho)_i^{n+1}$ y $(1 - \psi)b_i^{n+1}$ también serán positivas. Esto es, esta discretización semi-implícita garantiza la positividad de las variables afectadas por estos términos. Esto es una mejora con respecto a las aproximaciones explícitas que no garantizan la positividad de estas magnitudes. De la ecuación (3.119) se obtiene que

$$\frac{\Delta t}{1 - \psi} \phi_b^{n+1} = \frac{1}{\rho_b} ((h\rho)_i^{n+1} - (h\rho)_i^*). \quad (3.124)$$

El valor de h_i^{n+1} viene dado por la relación

$$h_i^{n+1} = h_i^* + \frac{\Delta t}{1 - \psi} \phi_b^{n+1}. \quad (3.125)$$

Finalmente, tomando en cuenta los efectos de erosión y depósito y el término de fricción en la ecuación de la conservación de los momentos, $(h\rho u)_i^{n+1}$ viene dada por

$$(h\rho u)_i^{n+1} = \frac{(h\rho u)_i^*}{1 - \Delta t \varpi}, \quad (3.126)$$

donde

$$\varpi = \frac{\phi_{b,i}^{n+1}}{2(h\rho)_i^{n+1}} + g(1 + r_w)\mu_f^2 \frac{|(h\rho u)_i^*|}{(h_i^{n+1})^{4/3}(h\rho)_i^{n+1}}. \quad (3.127)$$

Observación 3.6.1 Para garantizar la positividad global del esquema numérico, basta considerar la modificación propuesta en la sección 3.6.3 con la condición $CFL \leq \frac{1}{2}$ y el tratamiento semi-implícito descrito anteriormente.



3.7. Método tipo *splitting* de segundo orden en tiempo

Para obtener el segundo orden de precisión espacial y temporal cuando hay la presencia de los términos fuentes de erosión y depósito utilizaremos los operadores tipo *splitting*. Los operadores tipo *splitting* son un procedimiento ampliamente usado en la solución numérica de problemas de valor inicial y condiciones de frontera de ecuaciones diferenciales parciales. En esta sección nos centraremos en la solución de la ecuación

$$\begin{aligned}\mathbf{W}'_i &= \mathcal{L}(\mathbf{W}) + \mathcal{H}(\mathbf{W}), \\ \mathbf{W}(x, 0) &= \mathbf{W}_0(x).\end{aligned}\tag{3.128}$$

donde $\mathcal{L}(\mathbf{W})$ es la parte morfo-hidrodinámica del transporte de sedimentos, y está definido por el lado derecho de (3.54). Por su parte, $\mathcal{H}(\mathbf{W})$ está definido como la suma de los términos de erosión-depósito y el término de fricción, los cuales están definidos en (2.39).

Teniendo en cuenta [66] la solución exacta de (3.128) para un un paso de tiempo pequeño Δt se puede expresar como:

$$\mathbf{W}(x, t_{n+1}) = e^{\Delta t(\mathcal{L}+\mathcal{H})}(\mathbf{I})\mathbf{W}(x, t_n).\tag{3.129}$$

3.7.1. *Splitting* de Strang

La función exponencial en (3.129) puede aproximarse por la expresión

$$\mathbf{W}(x, t_{n+1}) \approx e^{\frac{1}{2}\Delta t\mathcal{L}}e^{\Delta t\mathcal{H}}e^{\frac{1}{2}\Delta t\mathcal{L}} \quad \text{o} \quad \mathbf{W}(x, t_{n+1}) \approx e^{\frac{1}{2}\Delta t\mathcal{H}}e^{\Delta t\mathcal{L}}e^{\frac{1}{2}\Delta t\mathcal{H}}.\tag{3.130}$$

De esta forma el algoritmo puede formularse como sigue:

- Primer paso: resolver el problema de valor inicial

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{W}_1(x, t)}{\partial t} &= \mathcal{L}(\mathbf{W}_1(x, t)), \quad t_n < t < t_{n+1/2}, \\ \mathbf{W}_1(x, t_n) &= \widehat{\mathbf{W}}_3(x, t_n).\end{aligned}\tag{3.131}$$

- Segundo paso: resolver el problema de valor inicial

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{W}_2(x, t)}{\partial t} &= \mathcal{H}(\mathbf{W}_2(x, t)), \quad t_{n+1/2} < t < t_{n+1}, \\ \mathbf{W}_2(x, t_{n+1/2}) &= \mathbf{W}_1(x, t_{n+1/2}).\end{aligned}\tag{3.132}$$

- Tercer paso: resolver el problema de valor inicial

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{W}_3(x, t)}{\partial t} &= \mathcal{L}(\mathbf{W}_3(x, t)), \quad t_{n+1/2} < t < t_{n+1}, \\ \mathbf{W}_3(x, t_{n+1/2}) &= \mathbf{W}_2(x, t_{n+1/2}).\end{aligned}\tag{3.133}$$

La solución de (3.128) vendrá dada entonces como $\widehat{\mathbf{W}}_3(x, t_{n+1}) = \mathbf{W}_3(x, t_{n+1})$, donde $n = 1, 2, \dots, N$ y $\widehat{\mathbf{W}}_3(x, 0) = \mathbf{W}(x, 0)$.

El *splitting* de Strang aplicado a nuestro problema quedará formulado como sigue, dados el estado \mathbf{W}_i^n y el paso de tiempo Δt , el estado \mathbf{W}_i^{n+1} se calcula como sigue:

- Primer paso:

$$\mathbf{W}_i^{n+1/2} = \mathbf{W}_i^n + \frac{\Delta t}{2} \mathcal{L}(\mathbf{W}_i^n). \quad (3.134)$$

- Segundo paso:

$$\mathbf{W}_i^{n+1,*} = \mathbf{W}_i^{n+1/2} + \Delta t \mathcal{H}(\mathbf{W}_i^{n+1/2}). \quad (3.135)$$

- Tercer paso:

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^{n+1,*} + \frac{\Delta t}{2} \mathcal{L}(\mathbf{W}_i^{n+1,*}). \quad (3.136)$$

Este procedimiento proporciona un método de segundo orden en presencia de los términos fuente de erosión y depósito y fricción con el fondo. Notemos que si el operador $\mathcal{H} = 0$ entonces el método *splitting* de Strang coincide con el método TVD Runge-Kutta de segundo orden presentado por Shu y Osher [103].

Capítulo 4

Extensión al caso bidimensional

En este capítulo se presentará la extensión bidimensional del modelo matemático deducido sin hacer uso de hipótesis tipo Boussinesq. Se ha optado por hacer la extensión bidimensional del modelo matemático (2.40) ya que es el más general de los modelos presentados en este trabajo, y puede modelar fenómenos en los cuales la distribución de la densidad presente una mayor varianza, respecto de su valor medio.

El esquema numérico que se empleará para la resolución del modelo matemático bidimensional será una extensión bidimensional del esquema numérico presentado en la sección 3.6.2, debido que como se verá en el capítulo 5 es el que mejores resultados da en el caso unidimensional.

4.1. Modelo matemático bidimensional

El modelo matemático (2.40) puede ser fácilmente extendido al caso bidimensional. Para ello, se hace el mismo procedimiento que el llevado a cabo en la sección 2.1, pero esta vez teniendo en cuenta los efectos en la dirección y , obteniéndose

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} = \frac{\phi_b}{1 - \psi}, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial h\rho}{\partial t} + \frac{\partial h\rho u}{\partial x} + \frac{\partial h\rho v}{\partial y} = \frac{\phi_b\rho_b}{1 - \psi}, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial h\rho u}{\partial t} + \frac{\partial h\rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{h^2}{2} \rho \right) + \frac{\partial h\rho uv}{\partial y} = -gh\rho \left(\frac{\partial b}{\partial x} + S_{f,x} \right) + \rho \frac{u}{2} \phi_b, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial h\rho v}{\partial t} + \frac{\partial h\rho uv}{\partial x} + \frac{\partial h\rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(g \frac{h^2}{2} \rho \right) = -gh\rho \left(\frac{\partial b}{\partial y} + S_{f,y} \right) + \rho \frac{v}{2} \phi_b, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{1}{1 - \psi} \left(\frac{\partial q_b}{\partial x} + \frac{\partial q_b}{\partial y} \right) = -\frac{1}{1 - \psi} \phi_b, \quad (4.5)$$



donde h representa la profundidad del agua, $\mathbf{u} = (u, v)$ es la velocidad promedio en la vertical, ρ es la densidad de la mezcla de agua y sedimento, b representa el fondo, y $S_f = (S_{f,x}, S_{f,y})$ el término de fricción.

El cálculo del flujo de sedimentos $\phi_b = F_e - F_d$, se hace empleando las fórmulas (1.26) y (1.32), para el flujo de erosión F_e y el flujo de depósito F_d , respectivamente. En esta parte, el valor absoluto de la velocidad es reemplazado por el modulo del vector velocidad $|\mathbf{u}|$.

Trabajaremos con la formulación de Meyer-Peter & Müller para el transporte de solido, que en su forma bidimensional, se escribe como

$$\mathbf{q}_b = (q_{b,x}, q_{b,y}) = 8Q \text{sgn}(\mathbf{u}) (\theta - \theta_c)_+^{3/2}, \quad (4.6)$$

donde $\text{sgn}(\mathbf{u})$ se define como $\mathbf{u}/|\mathbf{u}|$. En este caso, el parámetro de Shields se define como

$$\theta = \frac{\mu_f^2}{d(\rho_s - \rho_0) h^{1/3}} |\mathbf{u}|. \quad (4.7)$$

4.1.1. Forma vectorial

El sistema de ecuaciones en derivadas parciales (4.1)-(4.5) puede reescribirse en la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_1(\mathbf{W})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_2(\mathbf{W})}{\partial y} = & \mathbf{B}_1(\mathbf{W}) \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} + \mathbf{B}_2(\mathbf{W}) \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial y} \\ & + \mathbf{G}(\mathbf{W}) + \mathbf{S}_f(\mathbf{W}), \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde $\mathbf{W} = (h, h\rho, h\rho u, h\rho v, b)^t$, es el vector de variables conservativas, $\mathbf{F}_1(\mathbf{W})$ y $\mathbf{F}_2(\mathbf{W})$ son los flujos físicos en la dirección x y y , respectivamente. Las matrices $\mathbf{B}_1(\mathbf{W})$ y $\mathbf{B}_2(\mathbf{W})$ son las matrices asociadas a los productos no-conservativos y contiene los términos que acomplan la ecuación morfológica con la componente hidrodinámica, $\mathbf{G}(\mathbf{W})$ es el término fuente que tiene en cuenta los efectos de erosión y depósito, $\mathbf{S}_f(\mathbf{W})$ es el vector que tiene entre sus componentes al término de fricción. Todos estos elementos vienen dados por las siguientes relaciones:

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} hu \\ h\rho u \\ h\rho u^2 + \frac{1}{2}gh^2\rho \\ h\rho uv \\ \frac{1}{1-\psi}q_{bx} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F}_2(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} hv \\ h\rho v \\ h\rho uv \\ h\rho v^2 + \frac{1}{2}gh^2\rho \\ \frac{1}{1-\psi}q_{by} \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{W}) = -(g h \rho) e_{3,5}, \quad \mathbf{B}_2(\mathbf{W}) = -(g h \rho) e_{4,5}, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} \frac{\phi_b}{1-\psi} \\ \frac{\rho_b \phi_b}{1-\psi} \\ \frac{u}{\rho} \frac{\phi_b}{2} \\ \frac{v}{\rho} \frac{\phi_b}{2} \\ -\frac{\phi_b}{1-\psi} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{S}_f(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -gh\rho S_{f,x} \\ -gh\rho S_{f,y} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

donde $e_{r,s}$ es la base canónica para las matrices cuadradas de orden cinco.

4.1.2. Invarianza bajo rotaciones

Para hablar de la invarianza bajo rotaciones del sistema (4.8) se despreciarán los términos fuentes que contienen los procesos de erosión y depósito, así como al término de fricción. Con lo cual el sistema toma la forma

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_1(\mathbf{W})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_2(\mathbf{W})}{\partial y} = \mathbf{B}_1(\mathbf{W}) \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} + \mathbf{B}_2(\mathbf{W}) \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial y} \quad (4.12)$$

Algunos sencillos cálculos permiten demostrar que el sistema definido por (4.12) es invariante bajo rotaciones (ver por ejemplo [45]), es decir, dada una matriz de rotación

$$\mathbf{T}_{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_x & n_y & 0 \\ 0 & 0 & -n_y & n_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

donde $\mathbf{n} = (n_x, n_y)^t$ es un vector unitario, y considerando

$$\mathbf{F}_{\mathbf{n}}(\mathbf{W}) = \mathbf{F}_1(\mathbf{W})n_x + \mathbf{F}_2(\mathbf{W})n_y, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{W}) = (\mathbf{B}_1(\mathbf{W}), \mathbf{B}_2(\mathbf{W})), \quad (4.15)$$

entonces se cumplen las siguientes relaciones

$$\mathbf{F}_{\mathbf{n}}(\mathbf{W}) = \mathbf{T}_{\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{F}_1(\mathbf{T}_{\mathbf{n}} \mathbf{W}), \quad (4.16)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}_{\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{B}_1(\mathbf{T}_{\mathbf{n}} \mathbf{W}). \quad (4.17)$$

Siguiendo lo descrito en [45], se puede ver que, dado un vector unitario \mathbf{n} el sistema (4.12) se puede reescribir como sigue

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_{\mathbf{n}}(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial \mathbf{F}_{\mathbf{n}^\perp}(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{n}^\perp} = (\mathbf{B}(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{n}) \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{n}} + (\mathbf{B}(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{n}^\perp) \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{n}^\perp}, \quad (4.18)$$

donde \mathbf{n}^\perp es un vector ortogonal unitario a \mathbf{n} . Multiplicando este último sistema por la matriz de rotación $\mathbf{T}_\mathbf{n}$ y teniendo en cuenta las relaciones (4.16) y (4.17), se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{T}_\mathbf{n}\mathbf{W}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\mathbf{F}_1(\mathbf{T}_\mathbf{n}\mathbf{W}) = \mathbf{B}_1(\mathbf{T}_\mathbf{n}\mathbf{W})\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\mathbf{W} + \mathbf{Q}_{\mathbf{n}^\perp}, \quad (4.19)$$

donde

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{n}^\perp} = \mathbf{T}_\mathbf{n} \left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}^\perp}\mathbf{F}_{\mathbf{n}^\perp}(\mathbf{W}) + (\mathbf{B}(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{n}^\perp)\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{n}^\perp} \right)$$

es el término tangencial. La ecuación (4.19) nos dice que el sistema bidimensional puede ser visto como un sistema unidimensional en la dirección de la componente normal. Este hecho nos permitirá extender fácilmente el esquema numérico unidimensional al caso bidimensional.

4.2. Esquema numérico bidimensional

Para construir un esquema numérico de primer orden para el caso bidimensional se aproximará el sistema (4.19) en cada una de las aristas de una malla de volúmenes finitos.

4.2.1. Discretización del dominio

Para resolver el sistema (4.8), el dominio de computo se divide en volúmenes finitos $V \subset \mathbb{R}^2$. En este trabajo se usará una malla estructurada conformada por celdas rectangulares cuyos lados son paralelos a los ejes cartesianos. Dado un volumen finito V_i , se define \mathcal{N}_i como el conjunto de índices j tal que V_j es un vecino de V_i ; E_{ij} denota la arista común entre dos celdas vecinas V_i y V_j y $|E_{ij}|$ representa la longitud de la arista E_{ij} ; \mathbf{n}_{ij} es el vector normal unitario a la arista E_{ij} que apunta hacia V_j y $|V_i|$ es el área del volumen finito V_i , una representación gráfica de este tipo de malla se puede ver en la Figura 4.1.

4.2.2. Esquema numérico

El esquema numérico de volúmenes finitos bidimensionales toma la forma (véase por ejemplo [45, 36, 27])

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \frac{\Delta t}{|V_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} |E_{ij}| \mathcal{D}_{ij}^-(\mathbf{W}_i^n, \mathbf{W}_j^n), \quad (4.20)$$

donde $\mathcal{D}_{ij}^-(\mathbf{W}_i^n, \mathbf{W}_j^n)$ es una aproximación del flujo normal asociado a la arista E_{ij} .

Usando la propiedad de invariancia bajo de rotaciones (4.16) podemos definir

$$\mathcal{D}_{ij}^-(\mathbf{W}_i^n, \mathbf{W}_j^n) = \mathbf{T}_{\mathbf{n}_{ij}}^{-1} D^-(\mathbf{T}_{\mathbf{n}_{ij}} \mathbf{W}_i, \mathbf{T}_{\mathbf{n}_{ij}} \mathbf{W}_j), \quad (4.21)$$

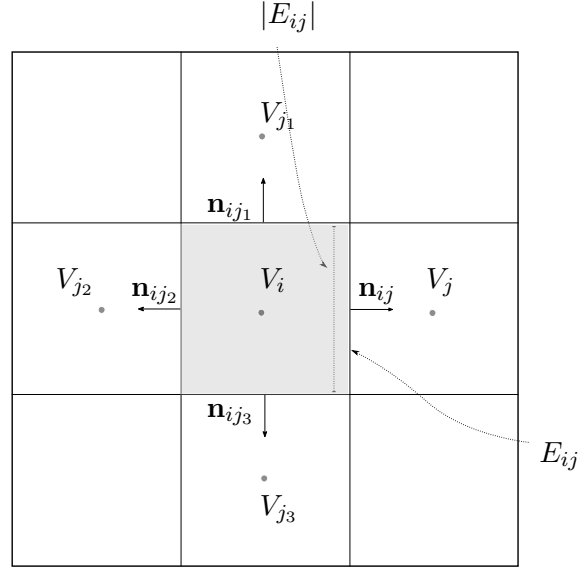


Figura 4.1: Malla de volúmenes finitos bidimensional

donde $D^-(\mathbf{T}_{\mathbf{n}_{ij}} \mathbf{W}_i, \mathbf{T}_{\mathbf{n}_{ij}} \mathbf{W}_j)$, la función flujo numérico unidimensional, se calculará en cada arista E_{ij} del volumen V_i , de la siguiente manera: sea

$$\mathbf{T}_{\mathbf{n}} \mathbf{W} = (h, h\rho, q_{\mathbf{n}}, q_{\mathbf{n}^\perp}, b)^t,$$

donde $q_{\mathbf{n}} = h\rho v n_x + h\rho v n_y$ y $q_{\mathbf{n}^\perp} = h\rho v n_x - h\rho v n_y$. La forma de construir el flujo numérico se puede resumir como sigue (véase [45]):

- Definimos

$$\mathcal{W}_{\mathbf{n}_{ij}} = [\mathbf{T}_{\mathbf{n}} \mathbf{W}]_{[2,3,5]} \quad \text{y} \quad \mathcal{W}_{\mathbf{n}_{ij}^\perp} = [\mathbf{T}_{\mathbf{n}} \mathbf{W}]_{[4]}.$$

- Sea $\Phi_{\mathbf{n}_{ij}}^\pm$ el flujo numérico unidimensional asociado al sistema definido por las segunda, tercera y quinta ecuación del sistema (4.19) (despreciando el término tangencial),

$$\Phi_{\mathbf{n}_{ij}}^\pm = \mathbf{D}_{ij}^\pm(\mathcal{W}_{\mathbf{n}_{ij},i}, \mathcal{W}_{\mathbf{n}_{ij},j}) \mp \mathbf{F}_c(\mathcal{W}_{\mathbf{n}_{ij},i})$$

donde

$$\mathbf{F}_c(\mathcal{W}_{\mathbf{n}_{ij},i}) = \left(q_{\mathbf{n}_{ij},i}, \frac{q_{\mathbf{n}_{ij},i}^2}{h\rho_i}, \frac{1}{1-\psi} q_{b,\mathbf{n}_{ij},i} \right)^t$$

y $\mathbf{D}_{ij}^\pm(\mathcal{W}_{\mathbf{n}_{ij},i}, \mathcal{W}_{\mathbf{n}_{ij},i})$ viene dado por (3.98).

- Definimos

$$\Phi_{\mathbf{n}_{ij}^\perp}^- = \left[\Phi_{\mathbf{n}_{ij}}^- \right]_{[1]} \mathcal{W}_{\mathbf{n}_{ij}^\perp}^{ij} \quad \text{y} \quad \Phi_{\mathbf{n}_{ij}^\perp}^+ = -\Phi_{\mathbf{n}_{ij}^\perp}^-.$$

y

$$\widehat{\Phi}_{\mathbf{n}_{ij}}^- = \left[\Phi_{\mathbf{n}_{ij}}^- \right]_{[1]} \rho_{ij}^{-1} \quad \text{y} \quad \widehat{\Phi}_{\mathbf{n}_{ij}}^+ = -\widehat{\Phi}_{\mathbf{n}_{ij}}^-,$$

donde

$$\mathcal{W}_{\mathbf{n}_{ij}}^{ij} = \begin{cases} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ij}^\perp & \text{si } \left[\Phi_{\mathbf{n}_{ij}}^- \right]_{[1]} > 0, \\ \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ij}^\perp & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y

$$\rho_{ij}^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{\rho_i} & \text{si } \left[\Phi_{\mathbf{n}_{ij}}^- \right]_{[1]} > 0, \\ \frac{1}{\rho_j} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Finalmente $\mathcal{D}_{ij}^- (\mathbf{W}_i^n, \mathbf{W}_j^n)$ se define usando (4.21), donde

$$D_{ij}^\pm = \left[\widehat{\Phi}_{\mathbf{n}_{ij}}^\pm, \left[\Phi_{\mathbf{n}_{ij}}^\pm \right]_{[1]}, \left[\Phi_{\mathbf{n}_{ij}}^\pm \right]_{[2]}, \Phi_{\mathbf{n}_{ij}}^\pm, \left[\Phi_{\mathbf{n}_{ij}}^\pm \right]_{[3]} \right].$$

La aproximación numérica del término fuente de erosión y depósito se lleva a cabo del mismo modo que se detalló en la sección 3.6.5, al igual que la aproximación del término de fricción.

Capítulo 5

Experimentos numéricos

En este capítulo presentaremos algunos experimentos numéricos llevados a cabo con los modelos matemáticos descritos anteriormente y los esquemas numéricos desarrollados en este trabajo. Primero se presentarán los resultados numéricos para el caso unidimensional, para luego presentar algunos resultados numéricos bidimensionales.

5.1. Experimentos unidimensionales

En esta sección simularemos numéricamente algunos flujos de rotura de presa a escala sobre fondo movable y con transporte de sedimentos. Para conocer la fiabilidad de los modelos matemáticos y de los esquemas numéricos, los resultados obtenidos serán comparados con datos experimentales recavados para cada experimento. En la descripción de los resultados numéricos se empleará la siguiente nomenclatura: 1^{er} ModeloNCP para referirse al modelo matemático (2.82)-(2.74) y aproximado por el esquema numérico (3.81)-(3.82), 1^{er} ModeloUpwind S_1 y S_4 para el modelo matemático (2.73)-(2.74) aproximado con el esquema numérico (3.66)-(3.82) y 2^{do} ModeloPVM, para el modelo matemático (2.40) aproximado con el esquema numérico descrito en la sección 3.6.2.

5.1.1. Experimento numérico 1

En esta sección recreamos el flujo a escala de una rotura de presa. Dicho experimento fue realizado en laboratorio de hidráulica de la Université catholique de Louvain y fue reportado en [50].

El sedimento considerado estaba compuesto por partículas cilíndricas de PVC con un diámetro de 3.2 mm y altura de 2.8 mm lo cual es equivalente a partículas esféricas de diámetro $d = 3.5\text{ mm}$, ver [50]. La densidad del sedimento en este caso es $\rho_s = 1.540\text{ g/cm}^3$, la porosidad es $\psi = 0.4$, el coeficiente de rugosidad de Manning toma el valor $\mu_f = 0.03$ y el parámetro crítico de Shields considerado es $\theta_c = 0.045$. Fueron simulados un total de $T = 10t_0\text{ s}$, donde $t_0 = \sqrt{\frac{h_0}{g}}$ es el tiempo en la escala hidrodinámica y h_0 el valor inicial de la altura del agua, aguas arriba. El dominio de

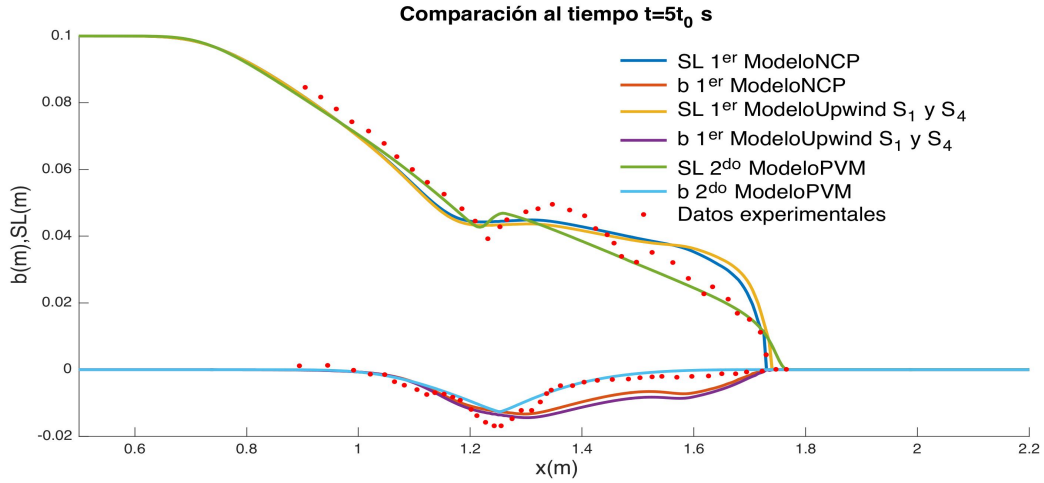


Figura 5.1: Comparación de los resultados numéricos obtenidos por parte de los diversos esquemas y los resultados experimentales al tiempo $5t_0$. SL representa la superficie libre del agua y b la superficie del fondo

cómputo $I = [0, 2.5]$ se discretiza utilizando 500 celdas. La condición inicial para este experimento está dada por las funciones

$$\begin{aligned}
 h(x, 0) &= \begin{cases} 0.1 & \text{si } x < 1.25, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} & u(x, 0) &= 0, \\
 c(x, 0) &= 0, & \rho(x, t) &= 1 \quad \text{y} \quad b(x, 0) = 0.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Para este experimento se han considerado condiciones de frontera libre, cuyo tratamiento numérico se lleva a cabo con la técnica de celdas fantasma (véase [75]).

En las Figuras 5.1, 5.2 y 5.3 podemos ver un comparación entre los resultados obtenidos. En general, podemos ver que los resultados de ambos modelos matemáticos recrean de manera satisfactoria la física del problema. Ambos modelos matemáticos con sus respectivos esquemas numéricos proporcionan una solución muy semejante en la zona aguas arriba de donde estaba situada la presa, para los tiempos $5t_0$ y $7.5t_0$. Mientras que para el tiempo $10t_0$, podemos observar una sobreestimación de la tasa erosión por parte de ambos modelos. Las mayores diferencias entre los resultados se pueden observar en la zona aguas abajo.

Notemos que los resultados numéricos 1^{er} ModeloNCP y 1^{er} ModeloUpwind S_1 y S_4 proporcionan una solución muy similar en todo el dominio. Se puede observar que cerca del frente de avance del agua se está sobreestimando la superficie libre así como la tasa de erosión del fondo. Notemos que la posición del frente de la onda se aproxima de forma precisa. En la parte de aguas arriba de donde se situaba la rotura de presa, podemos ver una subestimación de la superficie libre del agua, para los tiempos de cálculo mostrados, y el resalto hidráulico que se produce donde se situaba la rotura de

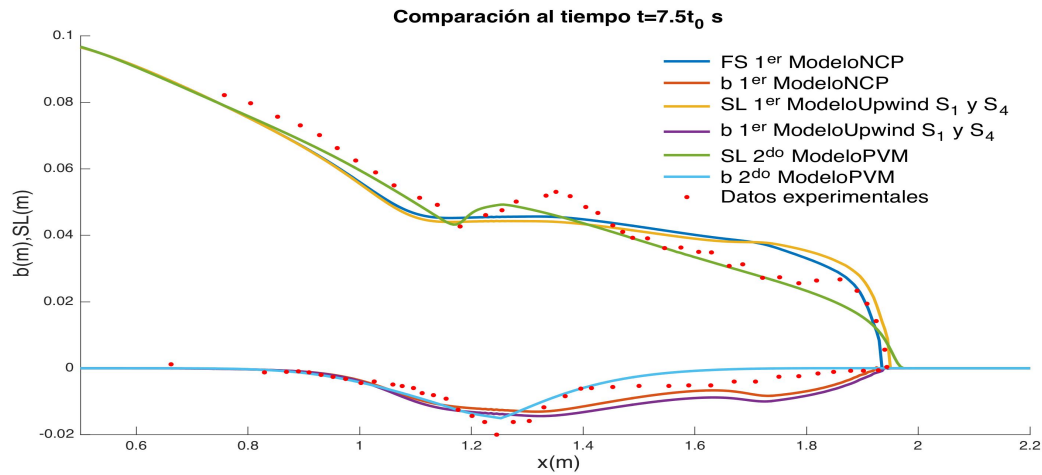


Figura 5.2: Comparación de los resultados numéricos obtenidos por parte de los diversos esquemas y los resultados experimentales al tiempo $7.5t_0$. SL representa la superficie libre del agua y b la superficie del fondo

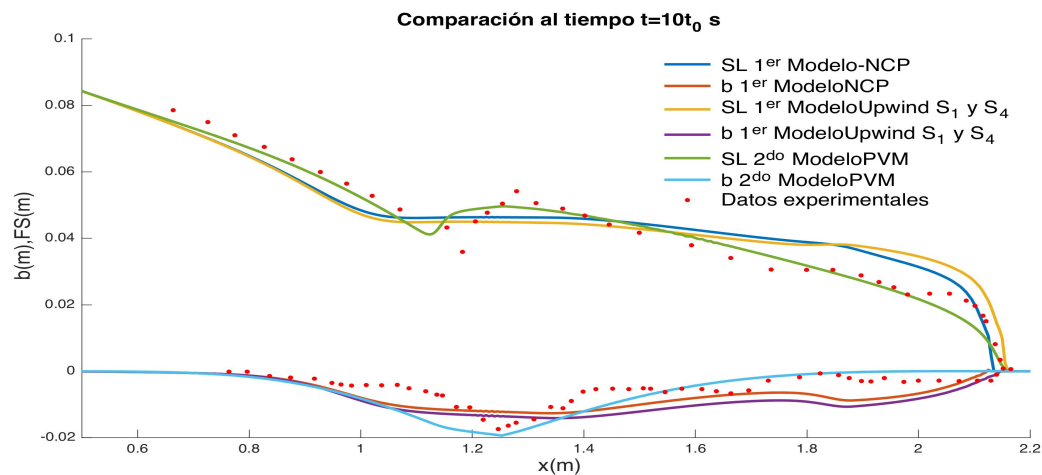


Figura 5.3: Comparación de los resultados numéricos obtenidos por parte de los diversos esquemas y los resultados experimentales al tiempo $10t_0$. SL representa la superficie libre del agua y b la superficie del fondo

presa no se alcanza a recrear por dichos resultados numéricos. Por su parte la evolución del fondo en esta área ajusta de muy buena manera a los datos experimentales para los tiempos $5 t_0$ y $7.5 t_0$. Mientras que para el tiempo $10 t_0$ se puede ver una sobreestimación de la tasa de erosión.

Los resultados numéricos 2^{do} ModeloPVM muestran un gran ajuste a los datos experimentales. Podemos ver que la superficie libre del agua calculada tanto aguas arriba como aguas abajo recrea de forma precisa la tendencia de los resultados experimentales, la posición del frente del avance del agua se aproxima fielmente. Podemos observar que hay una pequeña diferencia en la posición del resalto hidráulico. Estas diferencias puede ser resultado de los efectos no hidrostáticos presentes en el fenómeno y que no se tienen en cuenta en el modelo matemático. En cuanto a la evolución del fondo, podemos ver que para el tiempo $5 t_0$ ésta se calcula de manera exitosa, se recrean de muy buena forma la tendencia de los datos experimentales tanto aguas arriba como aguas abajo, aunque se debe señalar que donde se situaba la rotura de presa se está subestimando la tasa de erosión tal como se puede ver en la Figura 5.1. De la Figura 5.2 se puede ver que la evolución del fondo se recrea de manera aceptable, nuevamente no se alcanza la tasa de erosión en el punto donde se situaba la rotura de presa, pero la tendencia de los resultados recrea de forma satisfactoria la forma de los datos experimentales. Podemos ver que aguas arriba se está sobreestimando ligeramente la tasa de erosión, mientras que aguas abajo se subestima ligeramente. Para el tiempo $10 t_0$, se ve que la tasa de erosión aguas abajo está sobreestimada. En el punto donde se situaba la rotura de presa, la tasa de erosión calculada se corresponde con la reportada por los datos experimentales, mientras que dicha tasa se ajusta de manera satisfactoria a la reportada aguas abajo, como se puede ver en la Figura 5.3.

Los resultados numéricos obtenidos por el esquema numérico 2^{do} ModeloPVM presentan una mejora con respecto a los resultados numéricos presentados en [124] y [78] con respecto a la evolución morfológica para los tiempos $5 t_0$ y $7.5 t_0$, mientras que para el tiempo $10 t_0$ los resultados presenta un grado de exactitud similar a los presentados por [124] y [78]. Los resultados referentes a la superficie libre del agua presenta la misma calidad al ser comparados con los datos experimentales. Por su parte, los resultados numéricos obtenidos con los otros dos esquemas numéricos presentan un comportamiento similar al de los trabajos [124, 78], con respecto a la evolución del fondo, mientras que para la superficie libre se nota una ligera diferencia.

5.1.2. Experimento numérico 2

En esta sección se reproducen numéricamente las condiciones del experimento de rotura de presa a escala pequeña, descrito en [107]. En este experimento el sedimento considerado tiene las siguientes características: diámetro de la partícula $d = 3.9 \text{ mm}$, densidad del sedimento $\rho_s = 1.580 \text{ g/cm}^3$, porosidad $\psi = 0.47$, coeficiente de rugosidad de Manning $\mu_f = 0.0165$, parámetro crítico de Shields $\theta_c = 0.047$. El tiempo total simulación fueron $T = 1.5 \text{ s}$ y el dominio $I = [-3.0, 3.0]$ ha sido dividido en 500 celdas. Las condiciones iniciales consideradas son

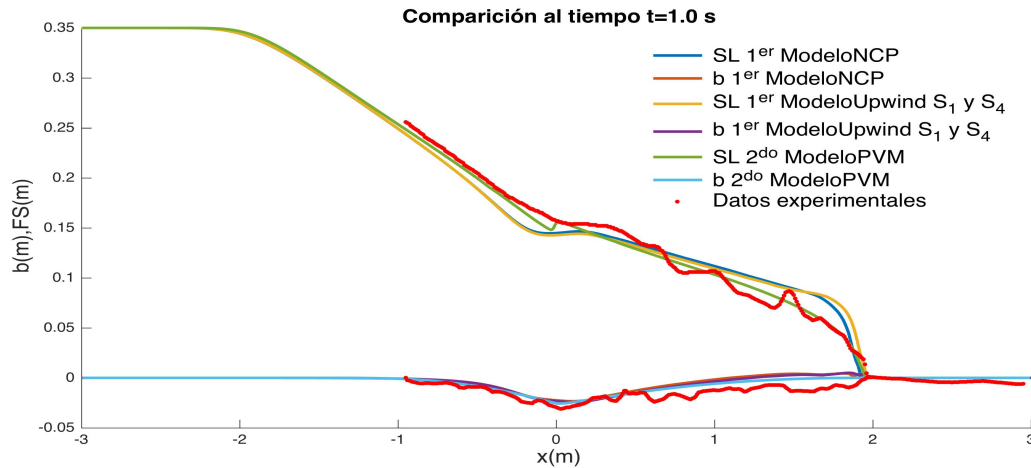


Figura 5.4: Comparación de los resultados numéricos obtenidos por parte de los diversos esquemas y los resultados experimentales al tiempo $t = 1.0 s$. SL representa la superficie libre del agua y b la superficie del fondo

$$\begin{aligned}
 h(x, 0) &= \begin{cases} 0.35 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} & u(x, 0) &= 0, \\
 c(x, 0) &= 0, & \rho(x, t) &= 1 \quad \text{y} \quad b(x, 0) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

En este experimento se consideran condiciones de contorno libre tanto aguas arriba como aguas abajo.

Los resultados numéricos se puede ver en las Figuras 5.4, 5.5 y 5.6. De modo general podemos ver que todos los resultados numéricos aproximan de manera satisfactoria la tendencia descrita por los datos experimentales. Para el tiempo $t = 1.0 s$ podemos ver que la superficie libre calculada por los métodos 1^{er} ModeloNCP y 1^{er} ModeloUpwind S₁ y S₄ es similar en todo el dominio de cálculo, las mayores diferencias se pueden observar en el frente de avance del agua. Observamos que aguas arriba, la superficie libre del agua calculada está subestimando a la obtenida en el experimento de laboratorio, mientras que cerca del frente de avance se está sobreestimando. Con respecto a la evolución morfológica, podemos ver que ambos resultados numéricos ajustan de manera muy precisa a la tendencia de los datos aguas arriba de la posición inicial de la rotura de presa, mientras que aguas abajo, se pueden ver que se está subestimando la tasa de erosión, pero las diferencias son mínimas. Los resultados numéricos 2^{do} ModeloPVM presentan una mejora en la superficie libre del agua, tanto aguas arriba como aguas



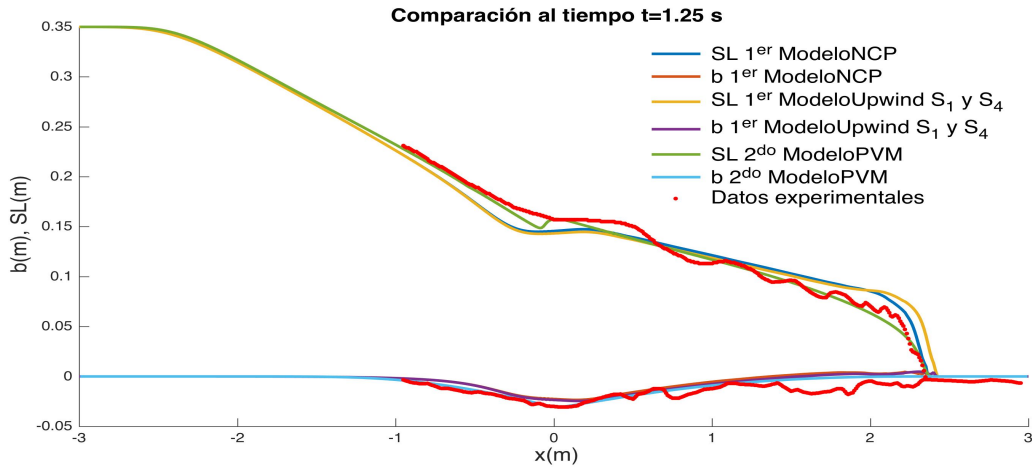


Figura 5.5: Comparación de los resultados numéricos obtenidos por parte de los diversos esquemas y los resultados experimentales al tiempo $t = 1.25$ s. SL representa la superficie libre del agua y b la superficie del fondo

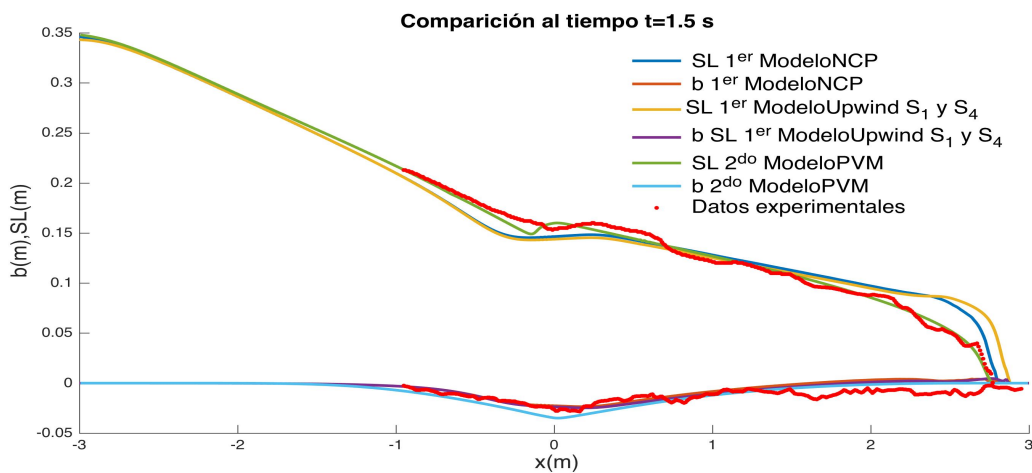


Figura 5.6: Comparación de los resultados numéricos obtenidos por parte de los diversos esquemas y los resultados experimentales al tiempo $t = 1.5$ s. SL representa la superficie libre del agua y b la superficie del fondo

abajo. Podemos ver que la superficie libre del agua, en el área donde se presenta el frente de avance del agua, se captura de forma precisa. Respecto a la evolución del fondo, se puede ver que ésta coincide bastante bien con los datos experimentales.

Afirmaciones similares, con respecto a los resultados numéricos 1^{er} ModeloNCP y 1^{er} ModeloUpwind S₁ y S₄ y 2^{do} ModeloPVM, se tienen para los tiempos $t = 1.25 s$ y $t = 1.5 s$, ver Figuras 5.5 y 5.6.

Los resultados numéricos obtenidos son muy similares a los descritos en [76], con la diferencia de que el modelo matemático considerado es un modelo bicapa para el transporte de sedimentos, que en principio supondría un mayor coste computacional.

A partir de estos experimentos numéricos, podemos concluir que el sistema (2.40) discretizado con el esquema numérico descrito en la sección 3.6.2 proporciona mejores resultados. Por esta razón, los experimentos de orden dos y los experimentos bidimensionales se llevarán a cabo con dicha formulación matemática y dicho esquema numérico. La extensión a orden dos se ha descrito en el Capítulo 4.

5.1.3. Precisión numérica para un caso test

Se ha decidido hacer la extensión a segundo orden del esquema numérico que implementa el método PVM porque como se ha visto en las secciones 5.1.1 y 5.1.2 es el que mejores resultados ha dado.

Para medir el orden de precisión de forma experimental, hemos medido el error en cada instante de tiempo, en norma uno

$$\varepsilon_{\Delta x}^1 = \Delta x \sum_{C_i} \|\widehat{\mathbf{W}}(x, t) - \mathbf{W}(x, t)\|, \quad i = 1 \dots N, \quad (5.3)$$

donde $\widehat{\mathbf{W}}(x, t)$ es la solución aproximada por el método numérico de orden superior y $\mathbf{W}(x, t)$ es la solución exacta o una solución de referencia.

A continuación procedemos a corroborar numéricamente la precisión del esquema numérico de orden dos. Para llevar a cabo dichas pruebas numéricas, el sedimento está caracterizado por $\rho_s = 1.58 g/cm^3$, $d = 3.9 mm$ y la porosidad es $\psi = 0.47$. El dominio de cómputo es $\Omega = [-1.0, 1.0]$ y las condiciones iniciales vienen dadas por

$$h(x, 0) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-7x^2} & \text{si } -0.5 \leq x \leq 0.5, \\ 0.287 - b(x, 0) & \text{de otra manera,} \end{cases} \quad (5.4)$$

$$b(x, 0) = 0.2, \quad \rho(x, 0) = 1.0 \quad u(x, 0) = 0.0.$$

Se han impuesto condiciones de frontera libre y se ha simulado hasta el tiempo $t = 0.2 s$. La solución de referencia fue calculada usando 12800 celdas de volumen finito.

De las Figuras (5.7)-(5.9) se puede observar que las soluciones calculadas por el esquema de segundo orden están convergiendo a la solución de referencia. Por otra parte en la Tablas 5.1, 5.2 y 5.3 se comprueba numéricamente el segundo orden del esquema numérico.

Tabla 5.1: Cálculo de los errores y el orden para h . El error espacial en la norma uno, para la k -ésima malla, se denota por $\varepsilon_{\Delta x_k}$

N. Volúmenes	$\varepsilon_{\Delta x_k}$	$\frac{\varepsilon_{\Delta x_{k+1}}}{\varepsilon_{\Delta x_k}}$	Orden
100	1.0088187e+00		
200	2.5278530e-01	3.9908122e+00	1.9966824e+00
400	6.3408503e-02	3.9866152e+00	1.9951644e+00
800	1.5037084e-02	4.2168084e+00	2.0761515e+00
1600	3.8303528e-03	3.9257701e+00	1.9729757e+00

Tabla 5.2: Cálculo de los errores y el orden para b . El error espacial en la norma uno, para la k -ésima malla, se denota por $\varepsilon_{\Delta x_k}$

N. Volúmenes	$\varepsilon_{\Delta x_k}$	$\frac{\varepsilon_{\Delta x_{k+1}}}{\varepsilon_{\Delta x_k}}$	Orden
100	7.4775334e-02		
200	1.8541659e-02	4.0328287e+00	2.0117921e+00
400	4.5797685e-03	4.0486018e+00	2.0174238e+00
800	1.0988292e-03	4.1678618e+00	2.0593075e+00
1600	2.5866787e-04	4.2480314e+00	2.0867944e+00

Tabla 5.3: Cálculo de los errores y el orden para g . El error espacial en la norma uno, para la k -ésima malla, se denota por $\varepsilon_{\Delta x_k}$

N. Volúmenes	$\varepsilon_{\Delta x_k}$	$\frac{\varepsilon_{\Delta x_{k+1}}}{\varepsilon_{\Delta x_k}}$	Orden
100	3.2256415e+00		
200	8.0019082e-01	4.0310904e+00	2.0111701e+00
400	1.9656227e-01	4.0709278e+00	2.0253576e+00
800	4.7663763e-02	4.1239353e+00	2.0440217e+00
1600	1.1339640e-02	4.2032869e+00	2.0715179e+00

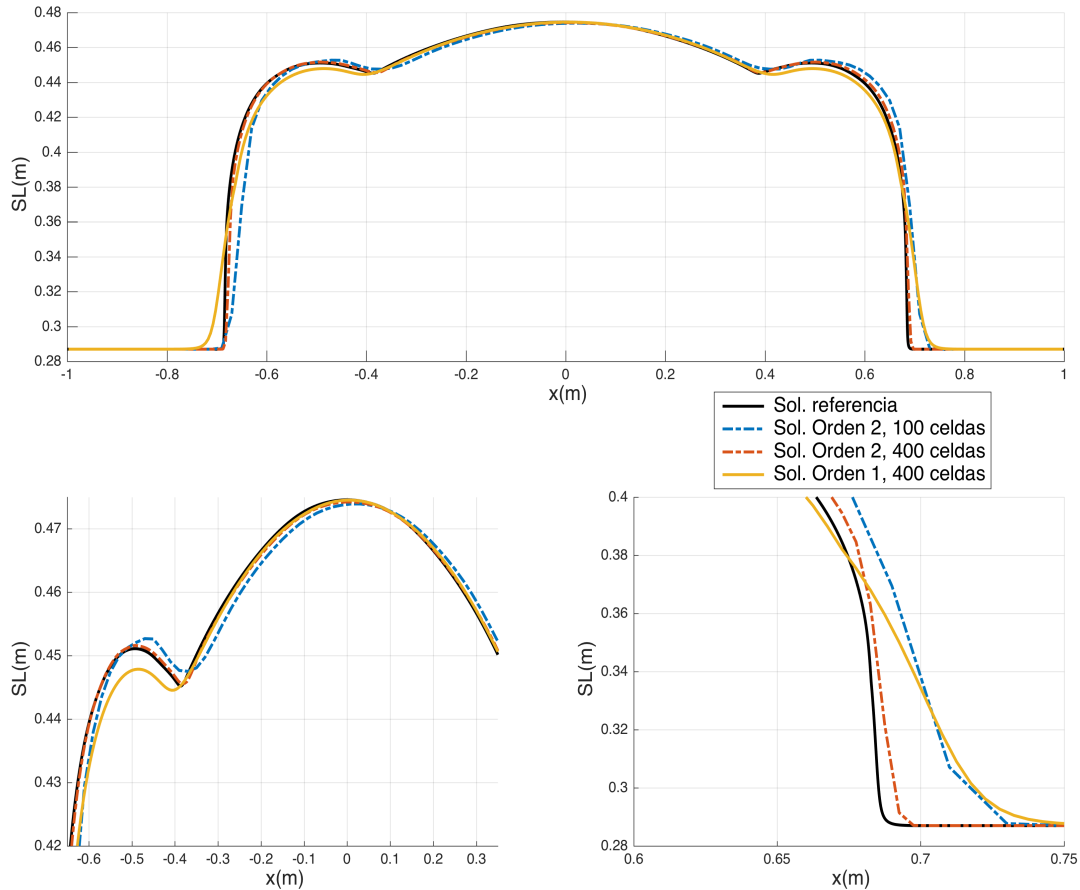


Figura 5.7: Superficie libre del agua para $t = 0.2 s$

Comparación con datos experimentales

En esta sección se repetirá el experimento numérico descrito en la sección 5.1.2, con la diferencia que el esquema numérico que hemos empleado es la extensión a segundo orden del esquema numérico 2^{do} ModeloPVM.

Los valores para los diferentes parámetros y condiciones iniciales son los descritos en la sección 5.1.2. El esquema numérico de segundo orden se ha ejecutado con mallas de 125 y 250 celdas. Los resultados numéricos obtenidos se muestran en las Figuras 5.10, 5.11 y 5.12.

En dichas figuras se puede observar una comparación entre los resultados numéricos y los datos experimentales. Tanto para el esquema de primer orden como el esquema de segundo orden se puede observar un buen nivel de precisión al ajustar los datos experimentales. Del mismo modo, se puede observar como las soluciones del esquema de segundo orden convergen a la solución referencia, la cual fue calculada con el esquema de primer orden y una malla de 500 volúmenes. La convergencia se puede apreciar de

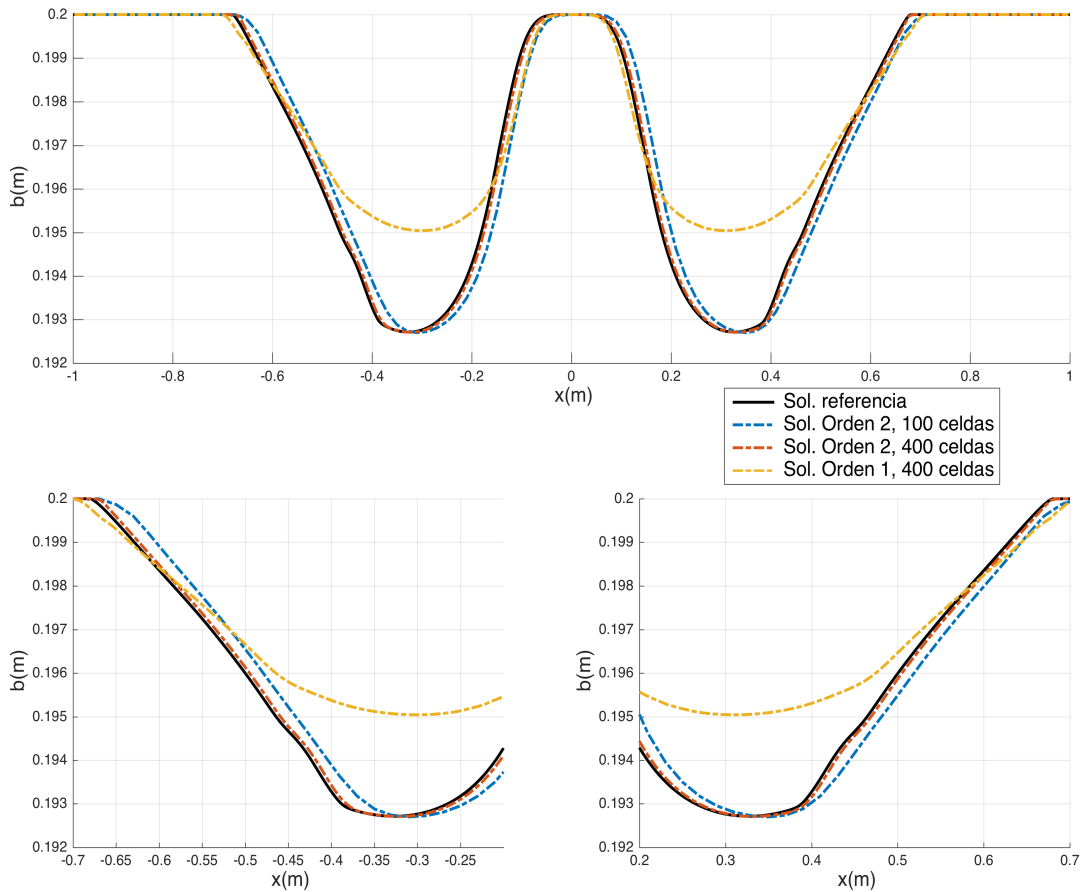


Figura 5.8: Fondo para $t = 0.2 s$.

mejor manera en los puntos donde se da el resalto hidráulico (parte inferior de la derecha en las imágenes 5.10, 5.11 y 5.12) y el punto donde se da el frente del avance del agua (parte inferior de la izquierda en las imágenes 5.10, 5.11 y 5.12).

5.2. Experimentos bidimensionales

Para validar la extensión bidimensional del modelo matemático y del esquema numérico, presentada en el Capítulo 4, se han llevado a cabo una serie de experimentos numéricos, tanto académicos como experimentales.

5.2.1. Estado del agua en reposo

En este experimento numérico reproduciremos numéricamente las características del estado de agua en reposo *lake at rest*, descrito en la sección 2.3.1, para el sistema (2.40).

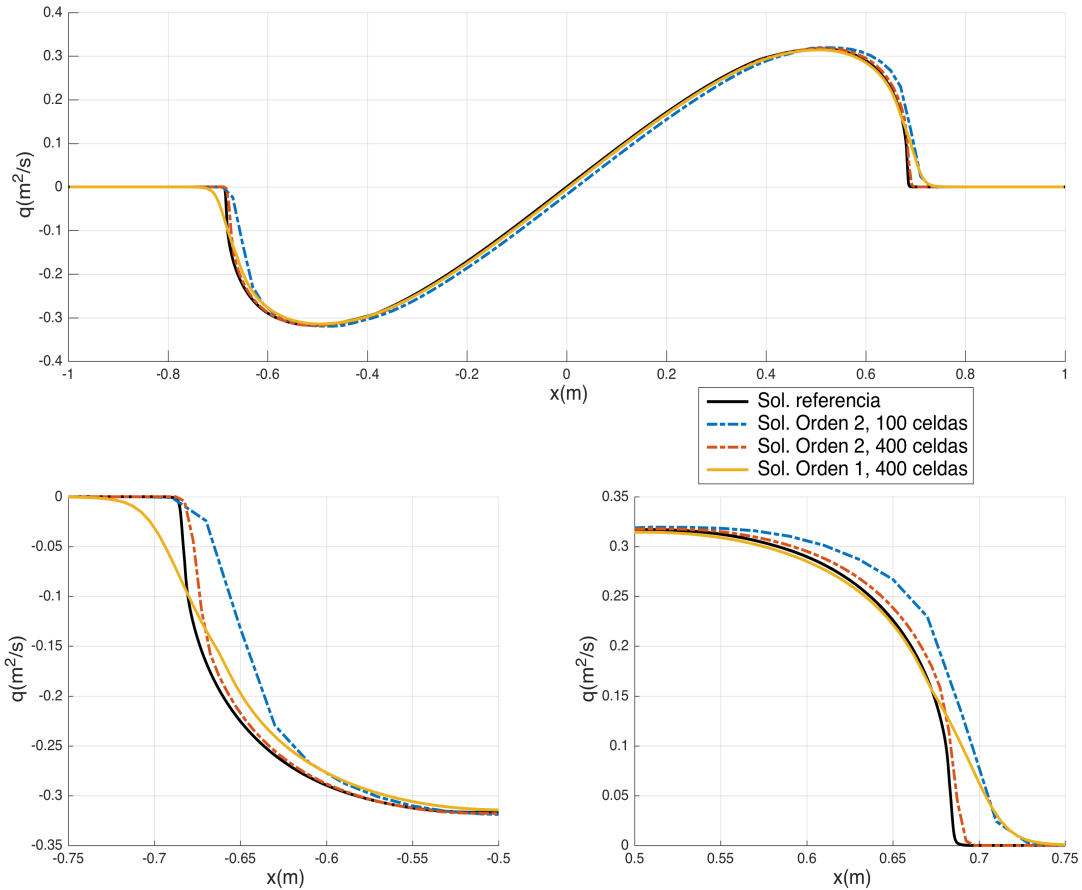


Figura 5.9: Descarga unitaria para $t = 0.2 \text{ s}$.

Consideremos un canal cerrado con fondo plano, y consideremos que está inicialmente lleno con un fluido resultado de la mezcla de agua y partículas sedimentarias. La densidad del sedimento considerado es $\rho = 1.580 \text{ g/cm}^3$, con diámetro $d = 3.9 \text{ mm}$ y porosidad $\psi = 0.47$. La concentración inicial del sedimento considerada es $c = 0.2$. La altura del fondo es $b = 1.05 \text{ m}$ y la superficie libre del agua inicial es 3.0 m . El tiempo total simulado fueron $T = 30 \text{ s}$. El dominio espacial $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$ se discretiza usando 100 celdas tanto en la dirección x y en la dirección y . Las condiciones de contorno para este caso son: condiciones de frontera libre en cada una de las fronteras del dominio.

La Figura 5.13 muestra, como era esperado, que el sedimento que originalmente estaba en suspensión se deposita en el fondo, por lo tanto la altura del fondo crece y la densidad de la mezcla de agua y sedimento decrece. Notemos que la superficie libre del agua permanece constante a través del tiempo. Observemos que los modelos presentados en [9, 68] no verifican esta propiedad, porque en dichos modelos, bajo la hipótesis del estado del agua en calma, la masa del agua limpia aumenta por la falta de un término fuente en la conservación del volumen, lo cual hace que la superficie libre del

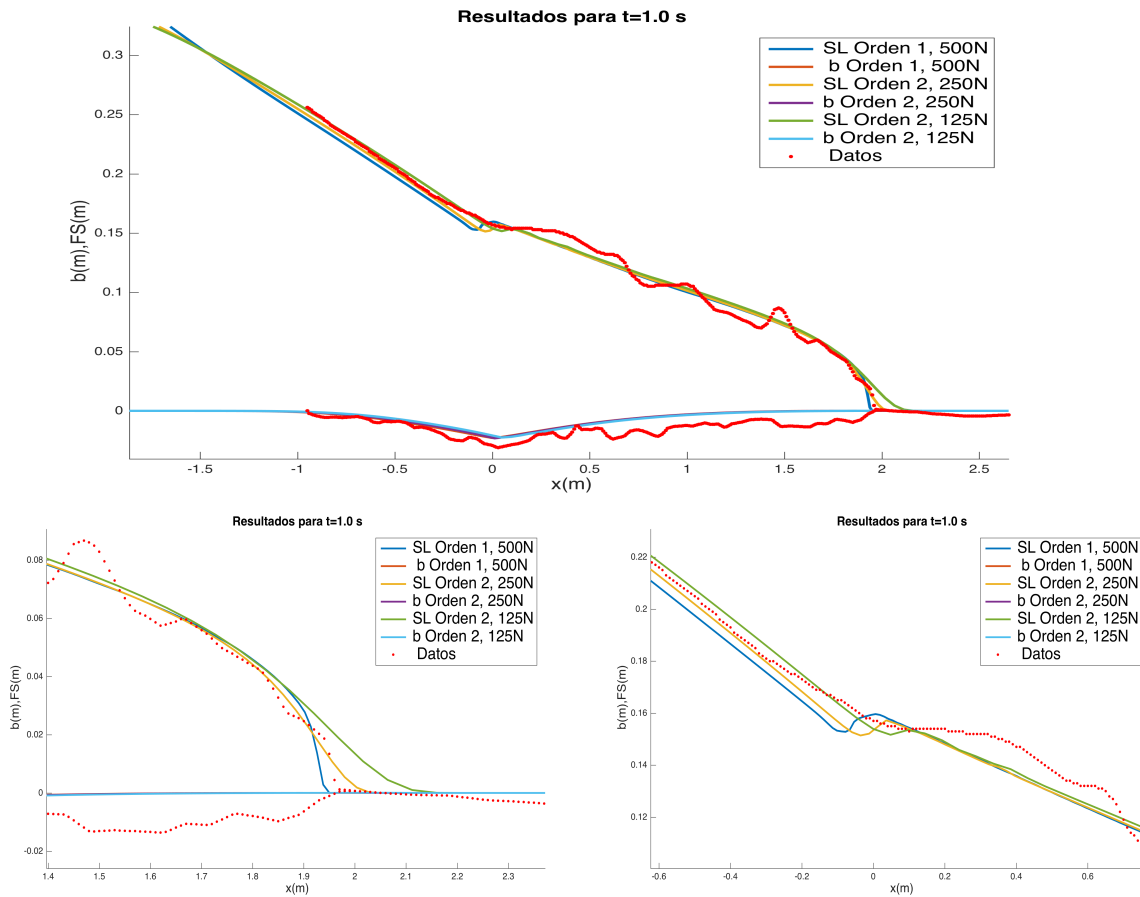


Figura 5.10: Comparación entre los resultados numéricos del esquema de primer orden, el esquema de segundo orden y los datos experimentales al tiempo $t = 1$ s

agua no permanezca constante a través del tiempo. En la Figura 5.14 se muestra que la densidad de la mezcla de agua y sedimentos decrece, dado que hemos seleccionado un valor inicial de concentración volumétrica c tal que la relación $c < 1 - \psi$ se satisface. Por lo tanto podemos concluir que el esquema numérico reproduce correctamente las condiciones del estado del agua en calma.

En la Figura 5.15 se puede observar la evolución temporal de la altura del agua, de la carga en suspensión, de la densidad de la mezcla y del fondo sedimentado. En estas figuras se dibujan las series temporales obtenidas de los resultados numéricos en los puntos $P_1 = (0, 0)$ y $P_2 = (-0.8, 0.5)$. En la misma gráfica se muestra la solución aproximada del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (2.94), (2.95) y (2.96) que hemos calculado con el método Runge-Kutta de orden 4 y 5 de Dormand-Prince. Dado que la solución no depende de la posición espacial, ésta debe ser la misma para todo los puntos del dominio, como se puede ver en la figura 5.15.

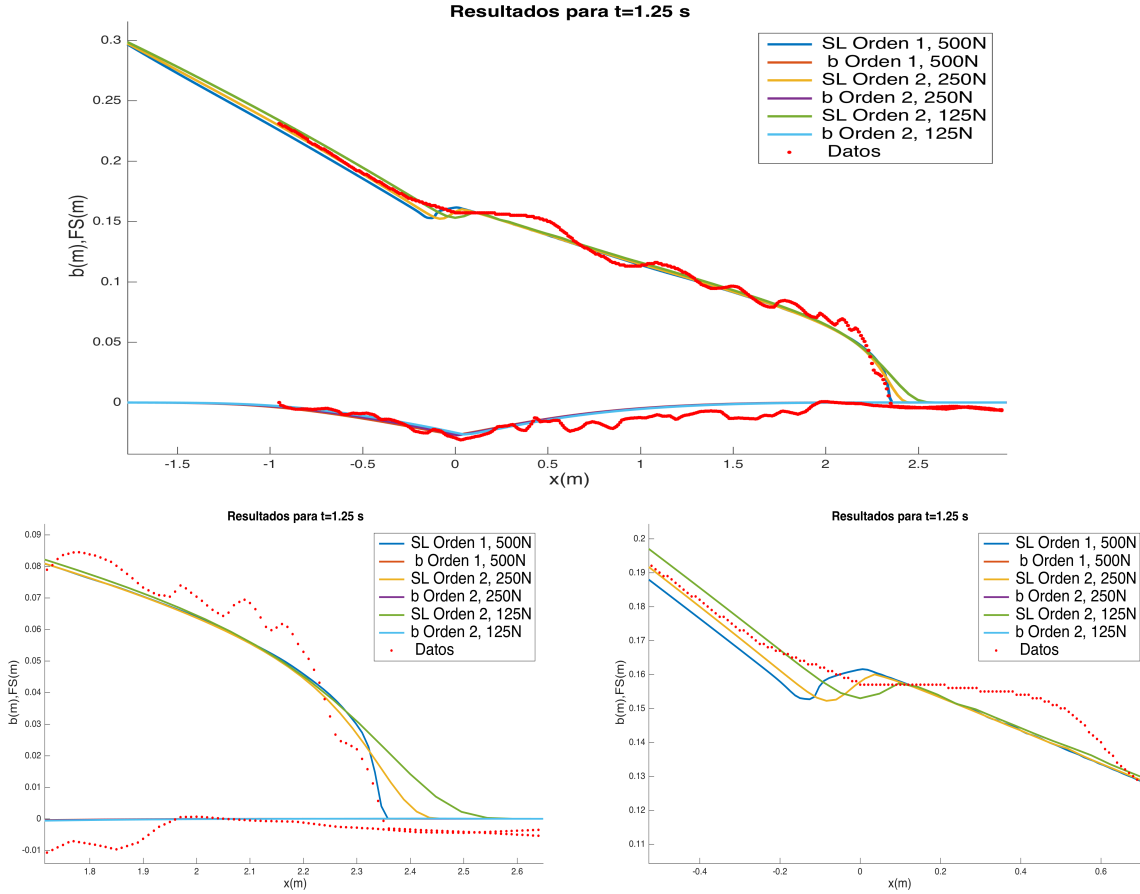


Figura 5.11: Comparación entre los resultados numéricos del esquema de primer orden, el esquema de segundo orden y los datos experimentales al tiempo $t = 1.25$ s

5.2.2. Evolución de una duna

En este experimento numérico, consideramos el transporte por carga de fondo para la evolución morfológica de una duna. Consideraremos agua limpia en el instante inicial e impondremos una entrada de sedimento en suspensión en la frontera izquierda, para ver los efectos que puedan haber en la evolución tanto de la superficie libre del agua así como del fondo. En este experimento se desprecian los términos de erosión y depósito. Consideramos partículas sedimentarias con las mismas características descritas en la sección 5.2.1 y el mismo dominio con la misma discretización. Las condiciones iniciales están dadas por:

$$b(\mathbf{x}, 0) = \begin{cases} 1.1 + 0.05 \cos(10|\mathbf{x}|), & \text{si } |\mathbf{x}| < \frac{\pi}{10}, \\ 1.05, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}, 0) + b(\mathbf{x}, 0) &= 2.0, & h(\mathbf{x}, 0) u(\mathbf{x}, 0) &= 1, \\ h(\mathbf{x}, 0) v(\mathbf{x}, 0) &= 0, & \rho(\mathbf{x}, 0) &= \rho_0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

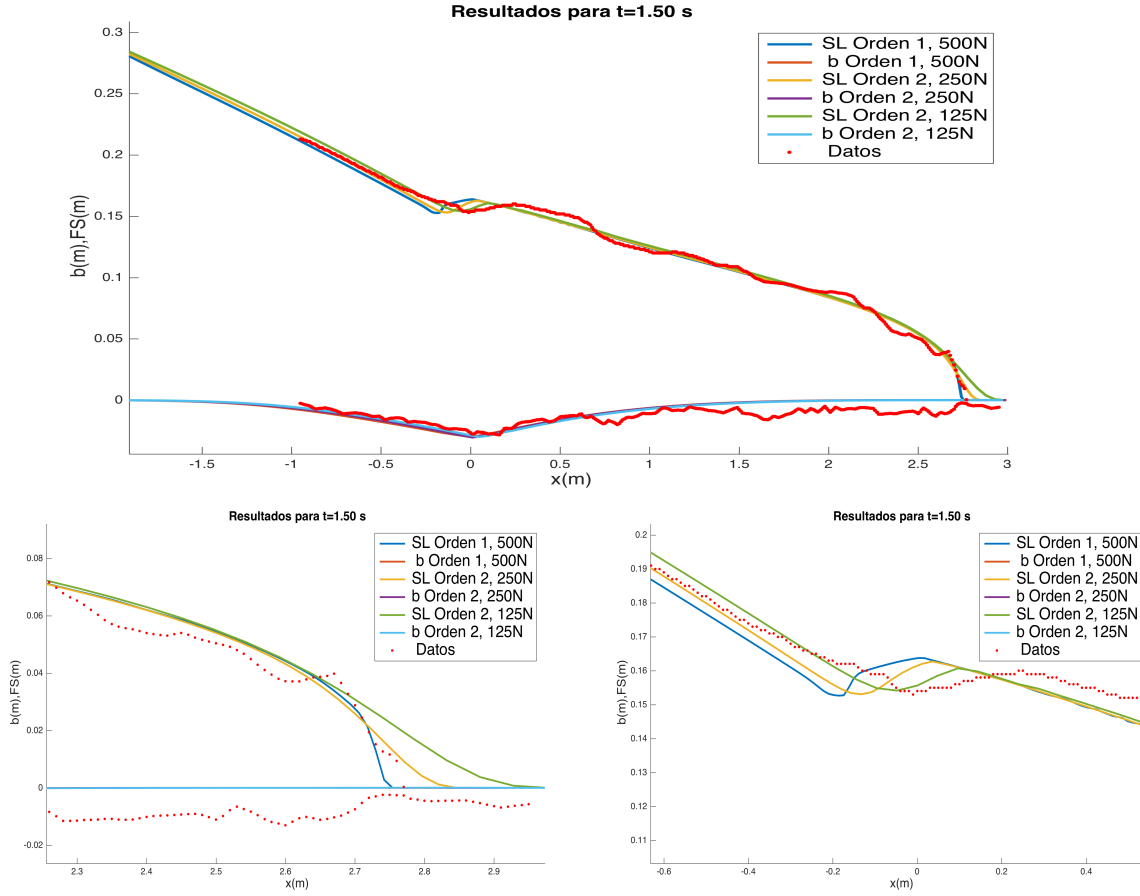


Figura 5.12: Comparación entre los resultados numéricos del esquema de primer orden, el esquema de segundo orden y los datos experimentales al tiempo $t = 1.5$ s

Hemos empleado la formulación de Meyer-Peter & Müller para calcular el flujo de la descarga de fondo (4.6), pero en este caso hemos usado

$$Q = 2d\sqrt{g\frac{\rho_s - \rho_0}{\rho_0}d}$$

para observar movimientos en el fondo a pequeños tiempos de simulación. Hemos impuesto las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}, t) u(\mathbf{x}, t) &= 1, \quad \text{for } \mathbf{x} \in [-1, 1] \times \{-1, 1\}, \quad t > 0, \\ h(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}, t) &= 0, \quad \text{for } \mathbf{x} \in \{-1\} \times [-1, 1], \quad t > 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

La condición de frontera para la densidad está dada como

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0 + \frac{0.019(\rho_s - \rho_0)}{h(\mathbf{x}, t)}, \quad \text{for } \mathbf{x} \in \{-1\} \times [-1, 1], t > 0, \quad (5.8)$$

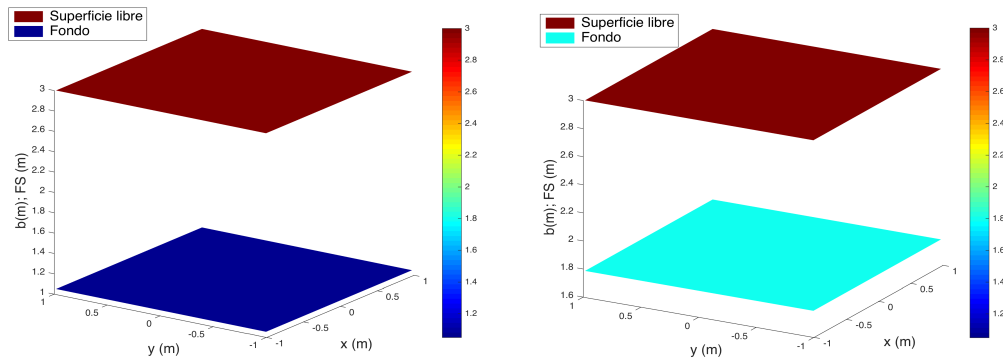


Figura 5.13: Superficie libre del agua y fondo al tiempo $t = 0 s$ (izquierda). Superficie libre del agua y fondo al tiempo $t = 30 s$ (derecha).

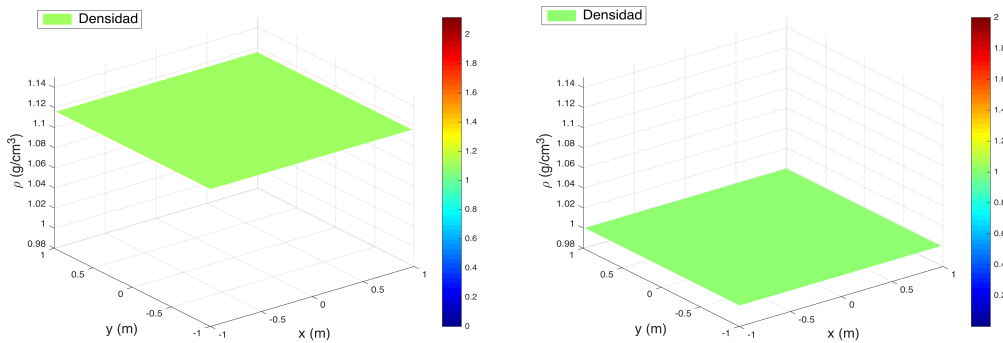


Figura 5.14: Densidad al tiempo $t = 0 s$ (izquierda) y densidad al tiempo $t = 30 s$ (derecha).

lo cual es equivalente a imponer una condición de frontera homogénea sobre la carga suspendida, la cual estaría dada por la expresión $h(\mathbf{x}, t)c(\mathbf{x}, t) = 0.019$, tal como se hace en [21]. La fronteras restantes serán consideradas con una condición de frontera libre. El tiempo final es $t = 40 s$.

Los resultados numéricos en el instante de tiempo final $t = 40 s$ se muestran en la Figura 5.16. Podemos ver que el esquema numérico preserva la simetría, con respecto del eje x , de la superficie libre del agua, del fondo, y del flujo en la dirección x . Observemos que la solución obtenida no presenta oscilaciones numéricas, es decir, obtenemos una solución suave. Podemos ver que el fondo en el tiempo final de computo presenta una

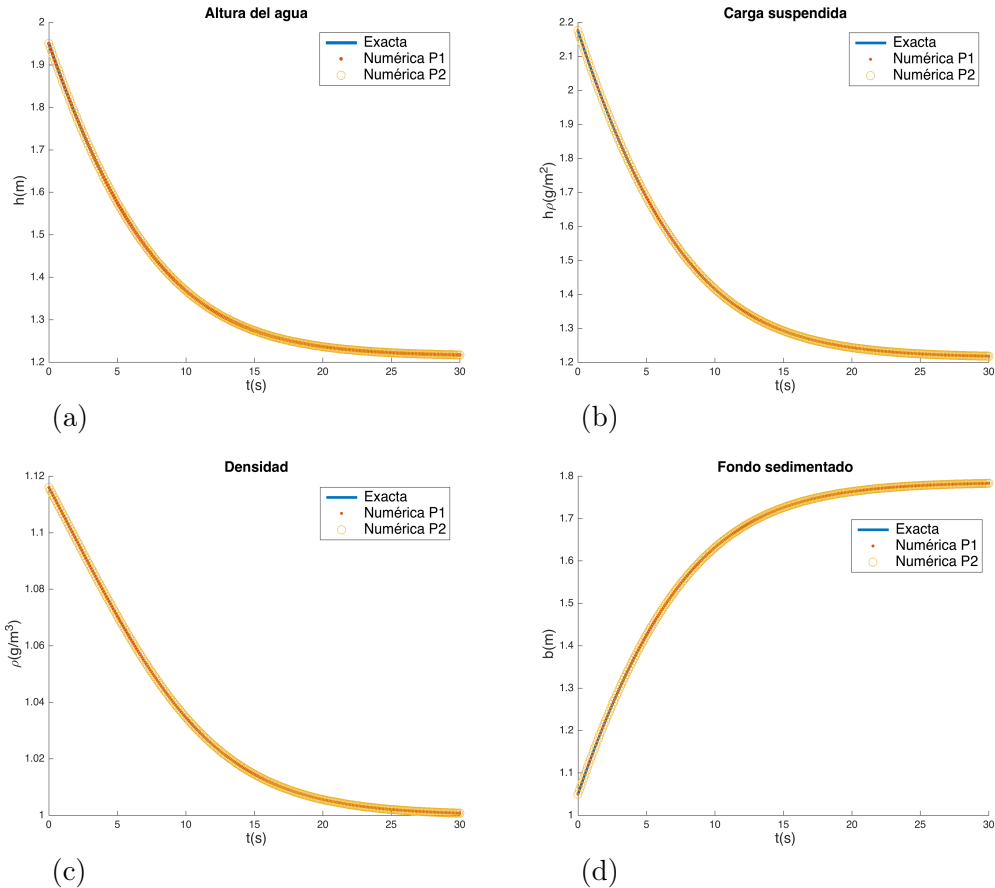


Figura 5.15: Evolución temporal de la altura del agua (a), la carga en suspensión (b), la densidad de la mezcla (c) y el fondo sedimenta (b), en los puntos $P_1 = (0, 0)$ y $P_2 = (-0.8, 0.5)$.

forma de estrella, lo cual está de acuerdo con lo que se esperaba, para más detalles se puede consultar [37, 21].

5.2.3. Rotura de presa en canal con apertura abrupta

Este experimento se llevó a cabo en el laboratorio de hidráulica de la Université Catholique de Louvain y los datos experimentales se describen en el trabajo [58]. Las partículas sedimentarias utilizadas fueron de arena uniforme con un diámetro medio de 1.72 mm , densidad $\rho_s = 2.63\text{ g/cm}^3$ y con porosidad del 39 %, el coeficiente de rugosidad empleado fue $\mu_f = 0.025$. Se consideró una capa de arena saturada y compacta de grosor 0.10 m sobre todo el canal como condición inicial para el fondo. La condición inicial aguas arriba para el grosor de la capa de agua limpia es de 0.25 m y de 0 m como condición inicial para el grosor de la capa de agua limpia aguas abajo. En la Figura 5.17 se puede ver una representación de la forma del dominio y sus dimensiones, así

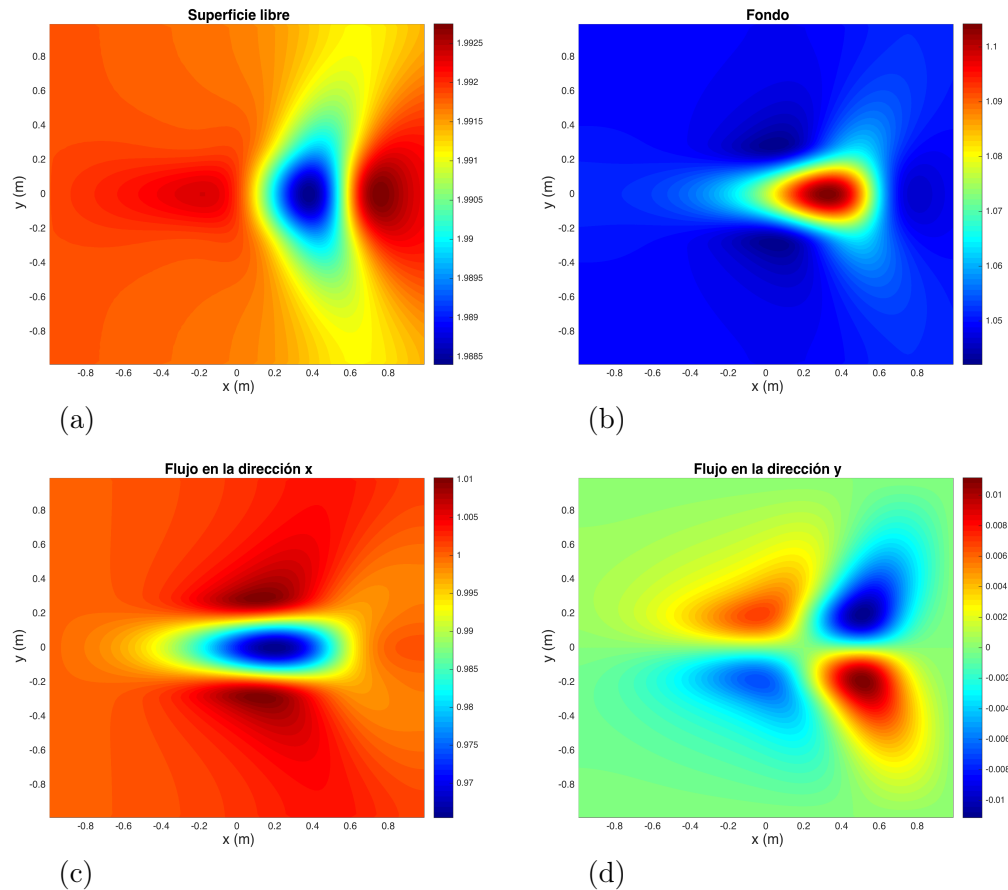


Figura 5.16: Resultados numéricos al tiempo $t = 40$ s; (a) Superficie libre, (b) Fondo, (c) Flujo en la dirección x y (d) flujo en la dirección y .

como también de la condición inicial considerada.

Se considera una condición de frontera libre en la frontera de la derecha del canal mientras que en el resto de las fronteras se impone una condición de contorno tipo pared.

La Figura 5.18 muestra la superficie libre del agua y la profundidad del fondo en instante final de la simulación $t = 12$ s. En las Figuras 5.19, 5.20 y 5.21 podemos ver la comparación entre los resultados numéricos y los datos experimentales para la profundidad del fondo en diferentes secciones transversales. De la Figura 5.19 podemos ver que los resultados numéricos capturan la tendencia y forma de los datos experimentales pero con una diferencia de alrededor de 0.01 m. La Figura 5.20 muestra que los resultados numéricos sub-estiman a los datos experimentales hasta antes de $y = 0.25$ m, después de este punto los resultados numéricos recrean de manera correcta la tendencia de los datos experimentales. La comparación en la sección transversal $x = 1.6$ m se muestra en la Figura 5.21, podemos ver que los resultados numéricos ajustan de manera exitosa a los datos experimentales. Por lo tanto podemos concluir el modelo desarrollado es

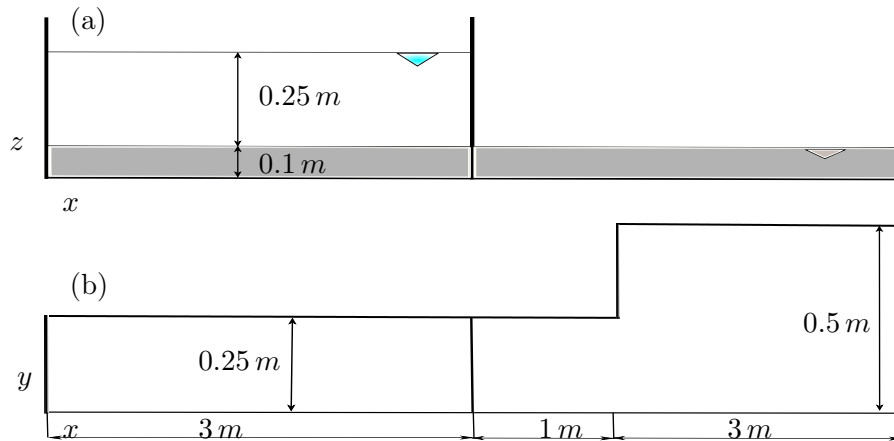


Figura 5.17: Diseño del canal y condiciones iniciales: (a) Perfil longitudinal y (b) vista en planta.

capaz de simular correctamente este experimento.

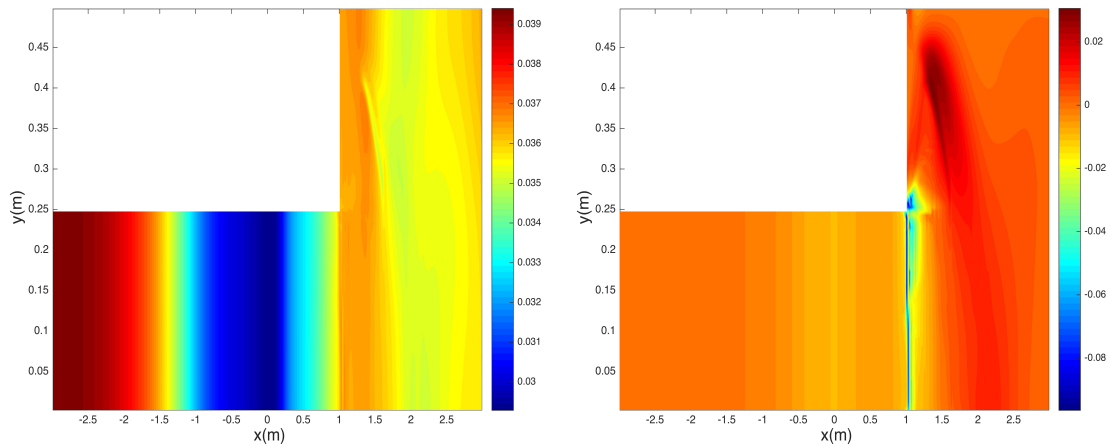


Figura 5.18: Superficie libre al tiempo $t = 12\text{ s}$ (izquierda) y fondo al tiempo $t = 12\text{ s}$ (derecha).

La Figura 5.22 muestra la comparación de la evolución temporal de la superficie libre del agua en el punto $(x, y) = (4.2, 0.125)$. Podemos ver que la evolución temporal calculada tiene la forma de la evolución temporal dada por los datos experimentales, una pequeña diferencia se puede observar después de los primeros ocho segundos de simulación. En la Figura 5.23, podemos notar que antes del tiempo $t = 3\text{ s}$ los resultados numéricos recrean correctamente la evolución temporal dada por los datos experimentales, en el intervalo $3 < t < 5$, los resultados numéricos sub-estiman los valores reportados por los datos. Después del tiempo $t = 6\text{ s}$ podemos ver una sobre-estimación dada por los resultados numéricos. Se puede observar que la aproximación

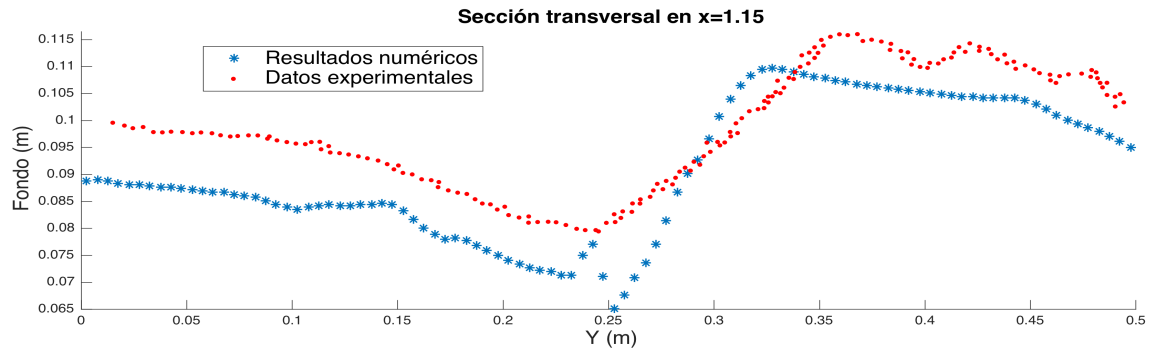


Figura 5.19: Sección transversal en $x = 1.15$ m al tiempo $t = 12$ s.

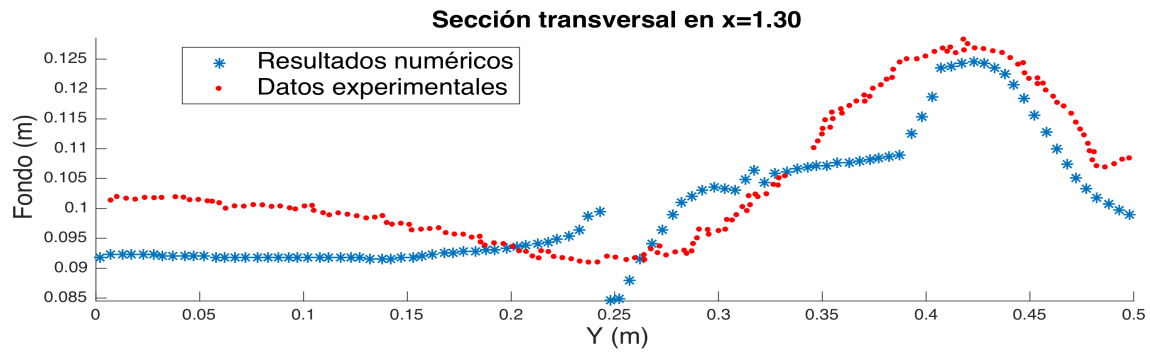


Figura 5.20: Sección transversal en $x = 1.3$ m al tiempo $t = 12$ s.

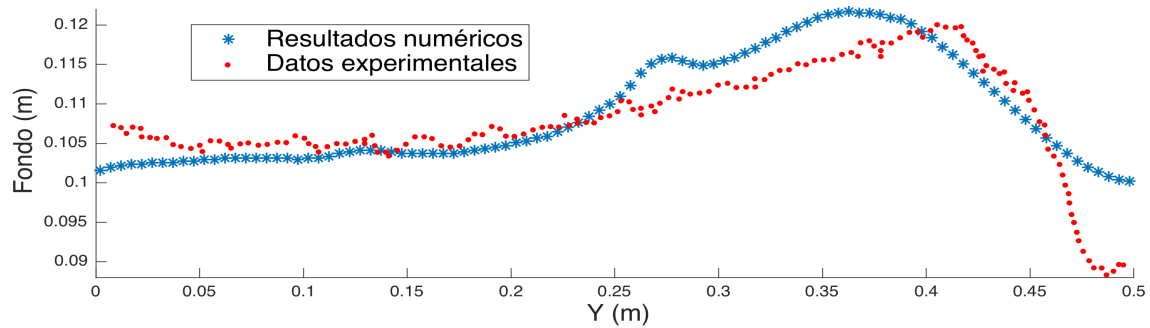


Figura 5.21: Sección transversal en $x = 1.6$ m al tiempo $t = 12$ s.

presentada aquí mejora los resultados numéricos obtenidos por [109] para la evolución del fondo. Los resultados numéricos son comparables a los obtenidos en [78].

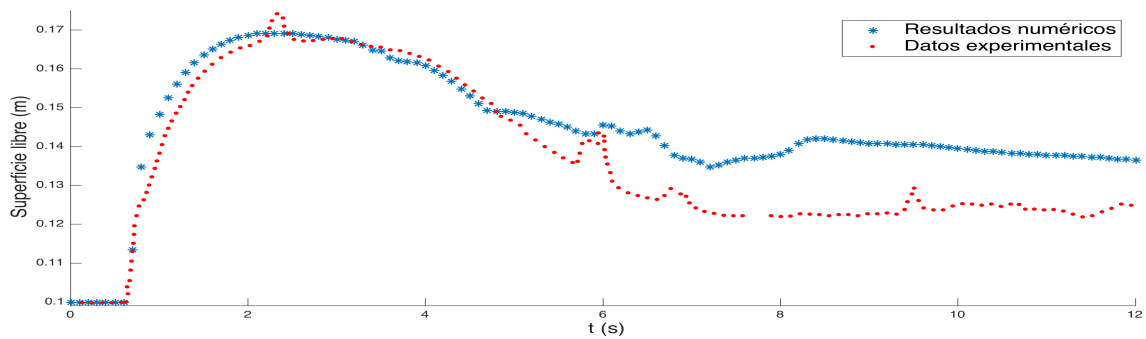


Figura 5.22: Evolución temporal de la superficie libre del agua en el punto (4.2, 0.125).

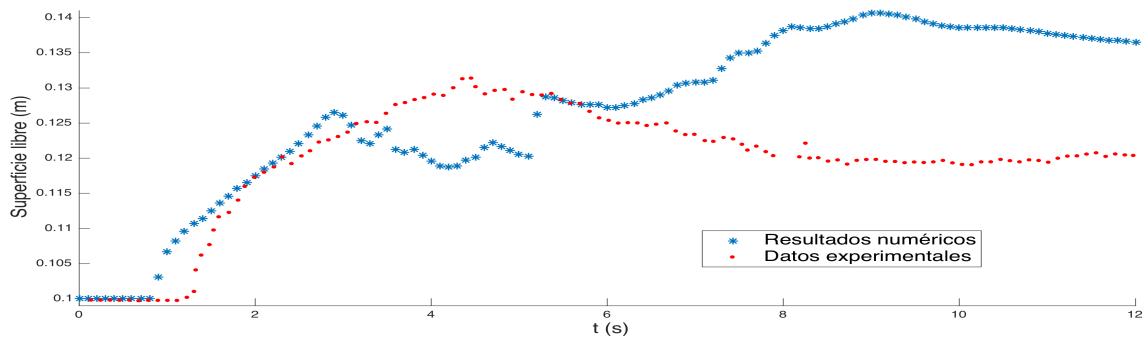


Figura 5.23: Evolución temporal de la superficie libre del agua en el punto (4.2, 0.375).

5.2.4. Rotura de presa en canal con apertura simétrica

Este experimento también fue realizado en laboratorio de mecánica e ingeniería civil unidad de hidráulica de la Université Catholique de Louvain. La configuración del canal y sus dimensiones se muestran en la Figura 5.24. Este experimento se describe con detalle en [105]. El sedimento usado fue arena gruesa caracterizada por un diámetro $d = 1.61 \text{ mm}$ con densidad $\rho_s = 2.63 \text{ g/cm}^3$ y porosidad $\psi = 0.42$. El coeficiente de rugosidad de Manning considerado es de $\mu_f = 0.0165 \text{ s/m}^{1/3}$ para el fondo móvil y $\mu_f = 0.010 \text{ s/m}^{1/3}$ para el fondo fijo. Se imponen condiciones de contorno de tipo pared, en todas las paredes del canal, salvo para al frontera artificial correspondiente al extremo derecho del canal, donde se impone una condición de frontera libre.

El nivel inicial del agua aguas arriba de la posición inicial de la rotura de presa se denota por η_0 , mientras que el nivel inicial del agua en el intervalo $0 < x < 9$ se define por η_1 y el nivel inicial del agua en el intervalo $x > 9$ se denota por η_2 . El grosor inicial de la capa de arena es $h_s = 0.085 \text{ m}$, las condiciones iniciales para los niveles del agua se pueden ver en las Tabla 5.4.

En la Figura 5.25 se muestra el estado final de la superficie libre del agua y de la profundidad del fondo después de 20 s de simulación.

En las Figuras 5.26, 5.27 y 5.28 podemos ver la comparación entre los resultados

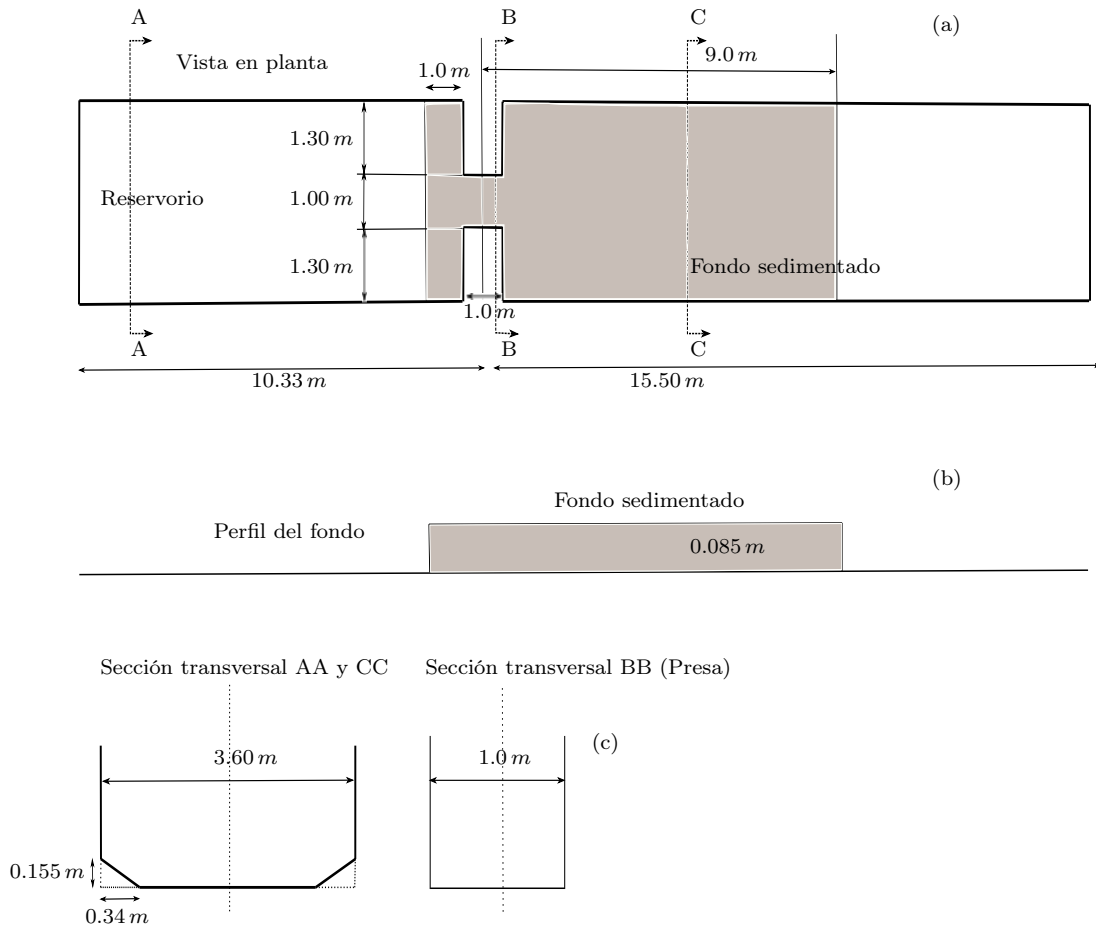


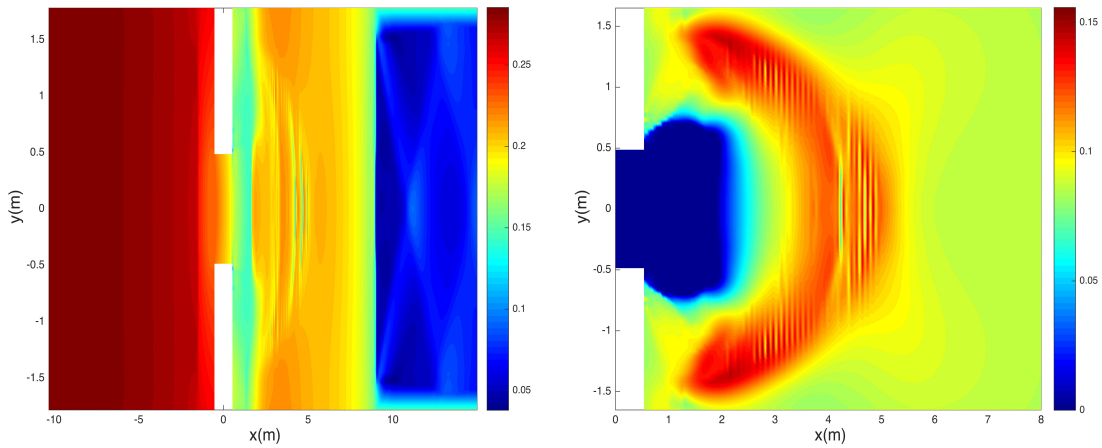
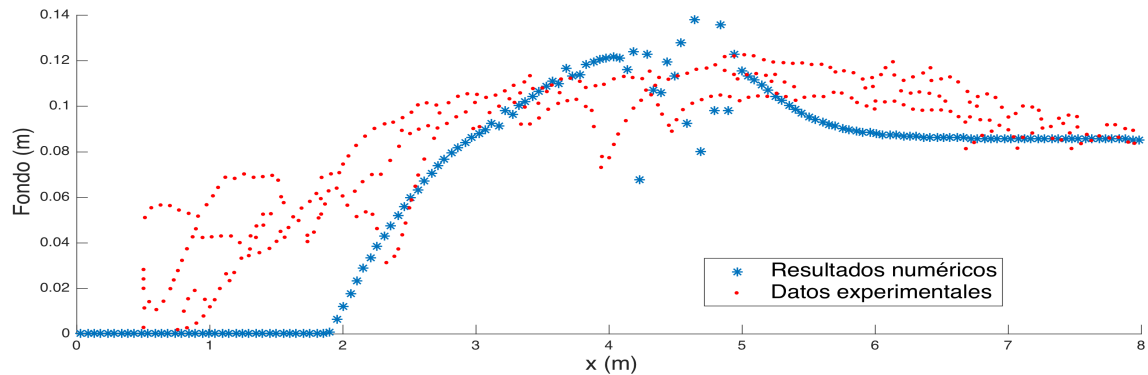
Figura 5.24: Configuración del experimento, dimensiones del canal: (a) Vista en planta, (b) Elevación y (c) secciones transversales.

numéricos y los datos experimentales para el estado final del fondo en diferentes secciones longitudinales. En la Figura 5.26 podemos ver que la evolución morfológica se recrea de manera correcta. Notemos que en el intervalo $0 < x < 2$ la tasa de erosión en los resultados numéricos es mayor que la observada en los datos experimentales, pero en el resto de la sección, los resultados numéricos capturan de manera exitosa la forma de los datos experimentales. Como se muestra en la Figura 5.27 el modelo es capaz de reproducir la forma general de los datos experimentales, aunque se pueden observar pequeñas diferencias en el intervalo $1 < x < 2$. En la Figura 5.28 podemos observar que los resultados numéricos recrean de manera exitosa los datos experimentales. Como puede observarse, La tasa de depósito es correcta en la sección $0 < x < 2$, y fuera de esta región la tasa de depósito se subestima o, la tasa de erosión está sobreestimada.

Durante el experimento, la evolución temporal de la superficie libre del agua fue

Tabla 5.4: Condiciones iniciales para el nivel del agua.

η_0 (m)	η_1 (m)	η_2 (m)	h_s (m)
0.4710	0.085	0.0	0.085

Figura 5.25: Superficie libre del agua al tiempo $t = 20$ s (izquierda) y fondo al tiempo $t = 20$ s (derecha).Figura 5.26: Nivel del fondo en la sección $y = 0.2$ al tiempo $t = 20$ s. La diversas líneas en los datos experimentales son los resultados de las pruebas de reproducibilidad llevadas a cabo durante el experimento físico

medida. La posición de los puntos de medición se detalla en la Tabla 5.5.

En las Figuras 5.29, 5.30, 5.31 y 5.32 podemos ver la comparación entre los datos experimentales y los resultados numéricos para la evolución temporal del nivel del agua. Podemos ver en las Figuras 5.29 y 5.30 que en los puntos de medida US1 y US3 los resultados numéricos recrean de manera exitosa la evolución temporal del nivel del agua proporcionada por los datos experimentales. Por otra parte, de las Figuras 5.31 y 5.32 podemos notar que los resultados numéricos aproximan de buena manera los resultados

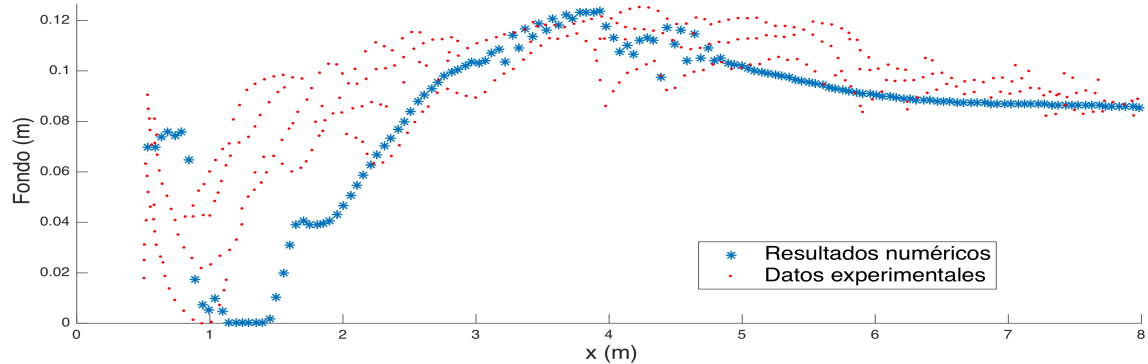


Figura 5.27: Nivel del fondo en la sección $y = 0.6$ al tiempo $t = 20$ s. La diversas líneas en los datos experimentales son los resultados de las pruebas de reproducibilidad llevadas a cabo durante el experimento físico

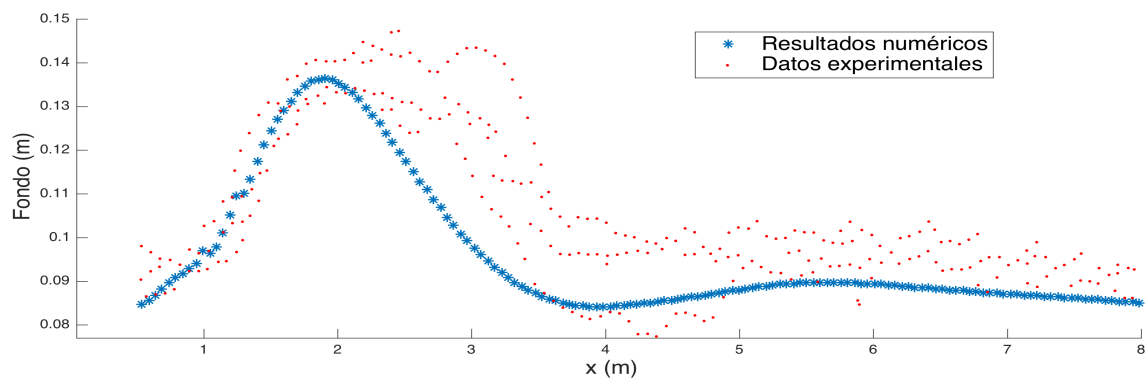


Figura 5.28: Nivel del fondo en la sección $y = 1.45$ al tiempo $t = 20$ s. La diversas líneas en los datos experimentales son los resultados de las pruebas de reproducibilidad llevadas a cabo durante el experimento físico

experimentales durante los primeros 5 segundos, después de este tiempo los resultados numéricos sobreestiman los datos experimentales.

En [105] se comparan los resultados numéricos proporcionados por diversos modelos con los datos experimentales. Comparando los resultados obtenidos en este trabajo con los obtenidos en dichos trabajos podemos decir que se han obtenido mejoras en los resultados para las secciones $y = 0.6$ y $y = 1.45$ para la evolución del fondo. Los resultados para el nivel del agua son similares a los que proporcionan otros modelos existentes en la literatura (véase [105]).

Tabla 5.5: Coordenadas de los puntos de medición.

Punto	$x(m)$	$y(m)$
US1	0.640	-0.500
US3	0.640	0.165
US5	1.940	-0.990
US6	1.940	-0.330

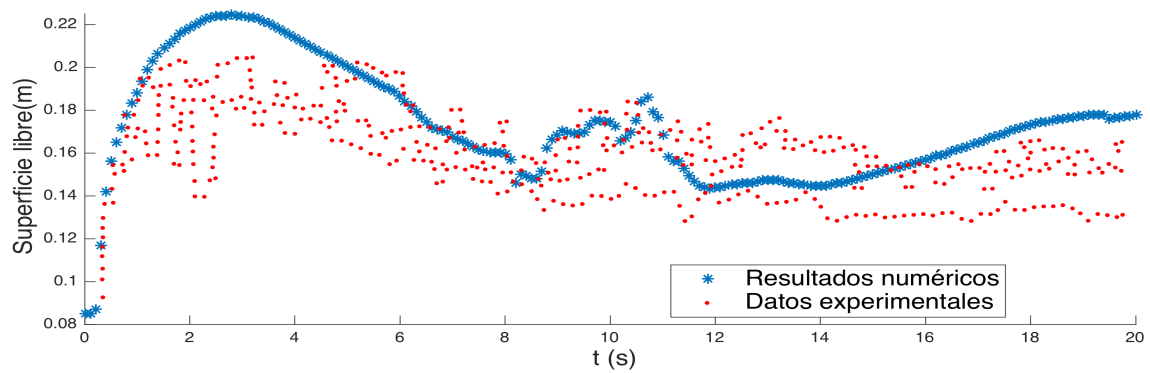


Figura 5.29: Evolución temporal de la superficie libre del agua en el punto US1 (ver Tabla 5.5). La diversas líneas en los datos experimentales son los resultados de las pruebas de reproducibilidad llevadas a cabo durante el experimento físico

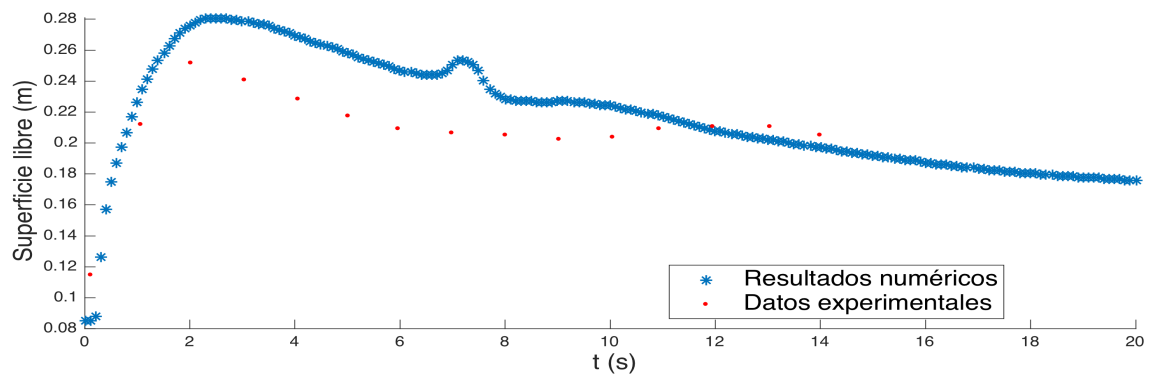


Figura 5.30: Evolución temporal de la superficie libre del agua en el punto US3 (ver Tabla 5.5).

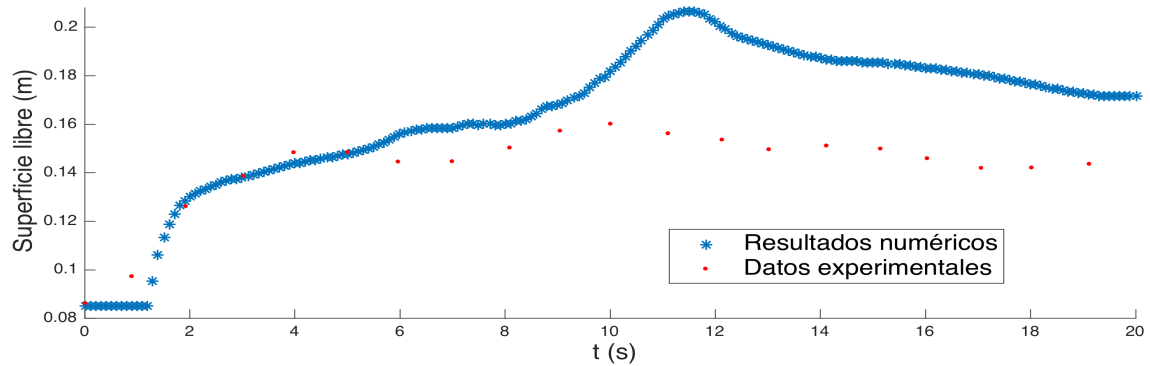


Figura 5.31: Evolución temporal de la superficie libre del agua en el punto US5 (ver Tabla 5.5).

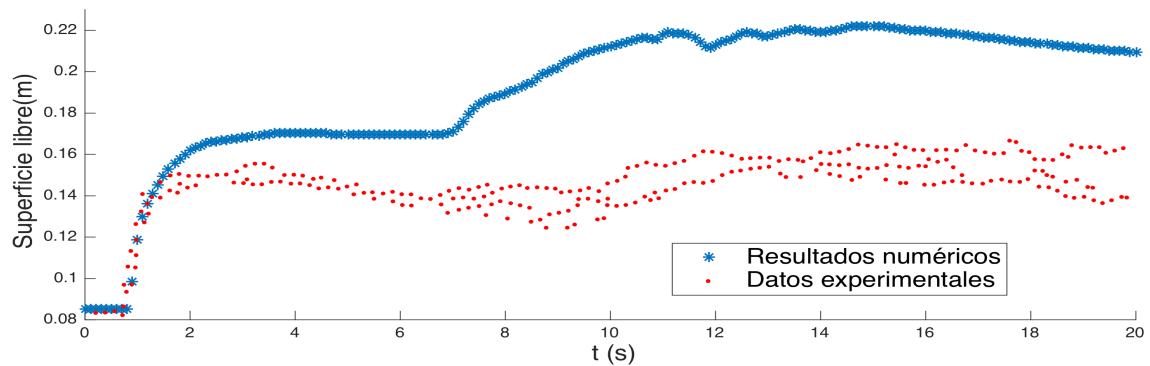


Figura 5.32: Evolución temporal de la superficie libre del agua en el punto US6, (ver Tabla 5.5). La diversas líneas en los datos experimentales son los resultados de las pruebas de reproducibilidad llevadas a cabo durante el experimento físico

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se ha llevado a cabo el estudio del transporte de sedimentos mediante el uso de dos modelos matemáticos, el primero de ellos tomado de la literatura y el segundo es una aportación original de esta tesis y se ha obtenido a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes sin hacer uso de la hipótesis de Boussinesq. Los modelos matemáticos se han aproximado numéricamente usando esquemas de volúmenes finitos camino conservativos que son bien equilibrados para el agua en reposo.

El primer modelo matemático fue resuelto de manera desacoplada, es decir, primero se ha resuelto el sistema sistema hidrodinámico, sin tener en cuenta la ecuación de Exner, utilizando el Q-esquema de van Leer y descentrando los términos fuentes de la pendiente del fondo y la variación de la concentración volumétrica. En este caso los términos de erosión y depósito se discretizan de manera explícita. A continuación se aproxima la ecuación de Exner para la evolución del fondo construyendo un flujo numérico para el flujo del transporte de fondo. Finalmente abordamos la discretización del sistema hidrodinámico teniendo en cuenta que el término correspondiente a la variación de la concentración no es un término fuente, si no un producto no conservativo, ya que introduce una modificación en la estructura espectral del problema, desarrollando un esquema camino-conservativo para el problema hidrodinámico.

Para el segundo de los modelos que hemos descrito en esta memoria, y teniendo en cuenta que la discretización desacoplada en los sistemas de tipo Exner pueden llegar a ser inestable, hemos desarrollado dos esquemas numéricos que resuelven de forma acoplada el sistema morfo-hidrodinámico. Los esquemas propuestos son de tipo splitting. En el primer paso sólo se tiene en cuenta el sistema morfo-hidrodinámico y en un segundo paso se discretizan los términos de erosión, depósito y fricción, que se discretizan de forma semi-implícita. Los esquemas numéricos desarrollados para el sistema morfo-hidrodinámico son camino-conservativos de tipo PVM de primer y segundo orden. El esquema resultante es positivo y bien equilibrado para el agua en reposo. La positividad del esquema se fundamenta en que el esquema PVM coincide con el esquema HLL en las proximidades de los frentes seco/mojado y la discretización semi-implícita de los términos de erosión y depósito. También se ha propuesto la extensión a problemas bidimensionales del esquema de primer orden en espacio y tiempo.



De la comparación entre los resultados numéricos, para ambos modelos matemáticos, y los datos experimentales en problemas unidimensionales, podemos concluir que ambos modelos numéricos proporcionan resultados aceptables. Los modelos capturan correctamente el avance del frente de onda y la forma de la superficie libre del fluido. Con respecto a la evolución morfológica, se puede observar un buen nivel de precisión. Las diferencias que se observan entre los resultados numéricos y los datos experimentales pueden ser explicadas por la presencia de efectos no hidrostáticos que se han despreciado en el proceso de derivación de ambos modelos. Otra fuente de error son las fórmulas y parámetros que definen los términos de erosión y depósito, ya que estas fórmulas resultan de un proceso de ajuste experimental de datos de laboratorio. Debemos destacar que los resultados obtenidos por el modelo propuesto en esta tesis doctoral proporciona mejores resultados que el modelo propuesto en el primer capítulo.

En el caso de los experimentos bidimensionales, podemos concluir que el cálculo de la evolución morfológica se hace de manera exitosa, la tasa de erosión y depósito están en concordancia con las observadas en los datos experimentales, pero se subestima su amplitud. La superficie libre del agua también presenta algunas zonas donde se sobrestima su valor.

Dentro de las aportaciones a destacar en este trabajo es la deducción de un modelo matemático para el transporte de sedimentos sin hacer uso de la hipótesis de Boussinesq, así como un esquema numérico robusto de primer y segundo orden para su discretización, que entre otras cosas es positivo, y bien equilibrado para el agua en reposo. También se ha realizado un proceso de validación exhaustivo con datos experimentales.

De los diversos experimentos numéricos llevados a cabo, se ha visto que la calibración de los parámetros involucrados en el cálculo de la erosión y del depósito juegan un papel muy importante ya que los resultados numéricos son sensibles a la elección de estos parámetros. Por esta razón una línea de trabajo futuro es realizar un análisis de sensibilidad de los parámetros y cuantificación de la incertidumbre mediante el método de Montecarlo o alguna de sus variantes, así como el diseño de un algoritmo automático para el ajuste de dichos parámetros para obtener resultados más precisos.

Posibles líneas de investigación futuras y de continuidad en este campo son el desarrollo de un modelo matemático multi-capa para el transporte de sedimentos sin hacer uso de hipótesis del tipo Boussinesq, así como la incorporación de efectos no hidrostáticos. Será necesario desarrollar esquemas numéricos robustos para los nuevos modelos desarrollados.

Bibliografía

- [1] M. S. Altinakar, W. H. Graf, and E. J. Hopfinger. Flow structure in turbidity currents. *Journal of Hydraulic Research*, 34(5):713–718, 1996.
- [2] D. D. Apsley and P. K. Stansby. Bed-load sediment transport on large slopes: model formulation and implementation within a RANS solver. *Journal of Hydraulic Engineering*, 134(10):1440–1451, 2008.
- [3] E. Audusse, F. Bouchut, M. Bristeau, R. Klein, and B. Perthame. A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 25:2050–2065, 2004.
- [4] F. Benkhaldoun, S. Sari, and M. Seaid. A flux-limiter method for dam-break flows over erodible sediment beds. *Applied Mathematical Modelling*, 36(10):4847 – 4861, 2012.
- [5] A. Bermúdez and M. E. Vázquez-Cendón. Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source term. *Computers & Fluids*, 23(8):1049–1071, 1994.
- [6] C. Berthon and F. Coquel. Nonlinear projection methods for multi-entropies Navier–Stokes systems. *Mathematics of Computation*, 76(259):1163–1194, 2007.
- [7] F. Bouchut. *Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws and well-balanced schemes for sources*. Frontiers in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2004.
- [8] F. Bouchut, E. D. Fernández-Nieto, A. Mangeney, and P. Y. Lagrée. On new erosion models of Savage–Hutter type for avalanches. *Acta Mechanica*, 199(1):181–208, 2008.
- [9] S. F. Bradford and N. D. Katopodes. Hydrodynamics of turbid underflows. I: formulation and numerical analysis. *Journal of Hydraulic Engineering*, 125(10):1006–1015, 1999.
- [10] V. Caleffi, A. Valiani, and A. Bernini. High-order balanced CWENO scheme for movable bed shallow water equations. *Advances in Water Resources*, 30(4):730 – 741, 2007.

- [11] R. Canelas, J. Murillo, and R. M. L. Ferreira. Two-dimensional depth-averaged modelling of dam-break flows over mobile beds. *Journal of Hydraulic Research*, 51(4):392–407, 2013.
- [12] A. Canestrelli, A. Siviglia, M. Dumbser, and E. F. Toro. Well-balanced high-order centred schemes for non-conservative hyperbolic systems. Applications to shallow water equations with fixed and mobile bed. *Advances in Water Resources*, 32(6):834 – 844, 2009.
- [13] F. N. Cantero-Chinchilla, O. Castro-Orgaz, S. Dey, and J. L. Ayuso-Muñoz. Nonhydrostatic dam break flows. II: one-dimensional depth-averaged modeling for movable bed flows. *Journal of Hydraulic Engineering*, 142(12):04016069, 2016.
- [14] Z. Cao, R. Day, and S. Egashira. Coupled and decoupled numerical modeling of flow and morphological evolution in alluvial rivers. *Journal of Hydraulic Engineering*, 128(3):306–321, 2002.
- [15] Z. Cao, G. Pender, S. Wallis, and P. Carlling. Computational dam-break hydraulics over erodible sediment bed. *Journal of Hydraulic Engineering*, 130(7):689–703, 2004.
- [16] H. Capart and D. Young. Formation a jump by the dam-break wave over a granular bed. *Journal of Fluid Mechanics*, 372:165–187, 1998.
- [17] M. J. Castro Díaz, T. Chacón Rebollo, E. D. Fernández-Nieto, and C. Parés. On well balanced finite volume methods for nonconservative nonhomogeneous hyperbolic systems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 29(3):1093–1126, 2007.
- [18] M. J. Castro Díaz, Y. Cheng, A. Chertock, and A. Kurganov. Solving two-mode shallow water equations using finite volume methods. *Communications in Computational Physics*, 16(5):1323–1354, 2014.
- [19] M. J. Castro Díaz and E. D. Fernández-Nieto. A class of computationally fast first order finite volume solvers: PVM methods. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 34(4):A2173–A2196, 2012.
- [20] M. J. Castro Díaz, E. D. Fernández-Nieto, and A. M. Ferreiro. Sediment transport models in shallow water equations and numerical approach by high order finite volume methods. *Computers & Fluids*, 37(3):299 – 316, 2008.
- [21] M. J. Castro Díaz, E. D. Fernández-Nieto, T. Morales de Luna, G. Narbona-Reina, and C. Parés. A HLLC scheme for nonconservative hyperbolic problems. Application to turbidity currents with sediment transport. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 47(1):1–32, 2013.



- [22] M. J. Castro Díaz, J. M. Gallardo, and A. Marquina. A class of incomplete riemann solvers based on uniform rational approximations to the absolute value function. *Journal of Scientific Computing*, 60(2):363–389, 2014.
- [23] M. J. Castro Díaz and J. Macías Sánchez. *Modelo matemático de las corrientes forzadas por el viento en el mar de Alborán*. Grupo de Análisis Matemático de la Universidad de Málaga, 1994.
- [24] M. J. Castro Díaz, T. Morales de Luna, and C. Parés. Chapter 6 - well-balanced schemes and path-conservative numerical methods. In Rémi Abgrall and Chi-Wang Shu, editors, *Handbook of Numerical Methods for Hyperbolic Problems*, volume 18 of *Handbook of Numerical Analysis*, pages 131 – 175. Elsevier, 2017.
- [25] M. J. Castro Díaz, A. Pardo, C. Parés, and E. F. Toro. On some fast well-balanced first order solvers for nonconservative systems. *Mathematics of computation*, 79(2010):1427–1472, 2009.
- [26] M. J. Castro Díaz, A. Pardo, C. Parés, and E. F. Toro. On some fast well-balanced first order solvers for nonconservative systems. *Mathematics of Computation*, 79(271):1427–1472, 2010.
- [27] M. J. Castro Díaz, E. D. Fernández-Nieto, A. M. Ferreiro, and C. Parés. Two-dimensional sediment transport models in shallow water equations. A second order finite volume approach on unstructured meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(33):2520 – 2538, 2009.
- [28] M. J. Castro Díaz, J. A. López-García, and C. Parés. High order exactly well-balanced numerical methods for shallow water systems. *Journal of Computational Physics*, 246:242 – 264, 2013.
- [29] J. J. Cauret, J. F. Colombeau, and A. Y. Le Roux. Discontinuous generalized solutions of nonlinear nonconservative hyperbolic equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 139(2):552 – 573, 1989.
- [30] T. Chacón Rebollo, A. Domínguez Delgado, and E. D. Fernández-Nieto. A family of stable numerical solvers for the shallow water equations with source terms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(1–2):203–225, 2003.
- [31] T. Chacón Rebollo, A. Domínguez Delgado, and E. D. Fernández-Nieto. Asymptotically balanced schemes for non-homogeneous hyperbolic systems. Application to the shallow water equations. *Comptes Rendus Mathématique*, 338(1):85–90, 2004.
- [32] S. Cordier, M. H. Le, and T. Morales de Luna. Bedload transport in shallow water models: Why splitting (may) fail, how hyperbolicity (can) help. *Advances in Water Resources*, 34(8):980 – 989, 2011.



- [33] R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy. Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen*, 100:32–74, 1928.
- [34] L. Cozzolino, L. Cimorelli, C. Covelli, R. D. Morte, and D. Pianese. Novel numerical approach for 1D variable density shallow flows over uneven rigid and erodible beds. *Journal of Hydraulic Engineering*, 140(3):254–268, 2014.
- [35] G. Dal Maso, P. G. LeFloch, and F. Murat. Definition and weak stability of non-conservative products. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 74:483–548, 1995.
- [36] M. de la Asunción, M. J. Castro Díaz, E. D. Fernández-Nieto, J. M. Mantas, S. Ortega Acosta, and J. M. González-Vida. Efficient GPU implementation of a two waves TVD-WAF method for the two-dimensional one layer shallow water system on structured meshes. *Computers & Fluids*, 80:441 – 452, 2013.
- [37] de Vriend H. J. 2DH mathematical modelling of morphological evolutions in shallow water. *Coastal Engineering*, 11(1):1 – 27, 1987.
- [38] F. De Vuyst. *Schémas nonconservatifs et schémas cinétiques pour la simulation numérique d'écoulements hypersoniques non visqueux en déséquilibre thermo-chimique*. PhD thesis, Paris VI, 1994.
- [39] P. Degond, P. F. Peyrard, G. Russo, and P. Villedieu. Polynomial upwind schemes for hyperbolic systems. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 328(6):479 – 483, 1999.
- [40] M. Dumbser, A. Hidalgo, M. J. Castro Díaz, C. Parés, and E. F. Toro. FORCE schemes on unstructured meshes II: non-conservative hyperbolic systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(9):625 – 647, 2010.
- [41] H. A. Einstein. The bed load function for sediment transportation in open channel flows. Bulletin 1026, Department of Agriculture, Soil Conservation Service, Washington, D.C., 1950.
- [42] F. M. Exner. Zur Physik der Dünen. *Akad. Wiss. Wien Math. Naturwiss, Klasse*, 129:929–952, 1920.
- [43] F. M. Exner. Über die wechselwirkung zwischen wasser und geschiebe in flüsen. *Akad. Wiss. Wien Math. Naturwiss, Klasse*, 134:165–2014, 1925.
- [44] R. Fernandez Luque and R. Van Beek. Erosion and transport of bed-load sediment. *Journal of Hydraulic Research*, 14:127–144, April 1976.
- [45] E. D. Fernández-Nieto. Modelling and numerical simulation of submarine sediment shallow flows: transport and avalanches. *SeMA Journal: Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada*, (49):83–103, 2009.



- [46] E. D. Fernández-Nieto, M. J. Castro Díaz, and C. Parés. On an intermediate field capturing riemann solver based on a parabolic viscosity matrix for the two-layer shallow water system. *Journal of Scientific Computing*, 48(1):117–140, 2011.
- [47] E. D. Fernández-Nieto, F. Bouchut, D. Bresch, M. J. Castro Díaz, and A. Mangeney. A new Savage–Hutter type model for submarine avalanches and generated tsunami. *Journal of Computational Physics*, 227(16):7720 – 7754, 2008.
- [48] E. D. Fernández-Nieto, J. M. Gallardo, and P. Vigneaux. Efficient numerical schemes for viscoplastic avalanches. Part 1: The 1D case. *Journal of Computational Physics*, 264:55 – 90, 2014.
- [49] E. D. Fernández-Nieto, E. H. Koné, T. Morales de Luna, and R. Bürger. A multilayer shallow water system for polydisperse sedimentation. *Journal of Computational Physics*, 238:281 – 314, 2013.
- [50] L. Fraccarollo and H. Capart. Riemann wave description of erosional dam-break flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 461:183–238, 2002.
- [51] L. Fu and Y. C. Jin. Improved multiphase Lagrangian method for simulating sediment transport in dam-break flows. *Journal of Hydraulic Engineering*, 142(6):04016005, 2016.
- [52] M. H. Garcia and G. Parker. Experiments on the entrainment of sediment into suspension by a dense bottom current. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 98(C3):4793–4807, 1993.
- [53] C. Goñi, D. Celi, and F. Concha. Determination of the volumetric solids fraction of saturated polydisperse ore tailing sediments. *Powder Technology*, 305:528 – 537, 2017.
- [54] S. K Godunov. A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics. *Matematicheskii Sbornik*, 47(89)(3):271–306, 1959.
- [55] L. Gosse. A well-balanced flux-vector splitting scheme designed for hyperbolic systems of conservation laws with source terms. *Computers & Mathematics with Applications*, 39(9–10):135–159, 2000.
- [56] L. Gosse. A well-balanced scheme using non-conservative products designed for hyperbolic systems of conservation laws with source terms. *Mathematical Models & Methods in Applied Sciences*, 11(2):339–365, 2001.
- [57] L. Gosse. Localization effects and measure source terms in numerical schemes for balance laws. *Mathematics of Computation*, 71(238):553–582, 2002.



- [58] L. Goutiere, S. Soares-Frazão, and Y. Zech. Dam-break flow on mobile bed in abruptly widening channel: experimental data. *Journal of Hydraulic Research*, 49(3):367–371, 2011.
- [59] A. J. Grass. Sediment transport by waves and currents. Technical Report FL29, SERC. London Cent. Mar, 1981.
- [60] J. M. Greenberg and A. Y. Leroux. A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 33(1):1–16, 1996.
- [61] J. M. Greenberg, A. Y. LeRoux, R. Baraille, and A. Noussair. Analysis and approximation of conservation laws with source terms. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 34(5):1980–2007, 1997.
- [62] A. Harten. On Class of High Resolution Total-Variation-Stable Finite-Difference Schemes. *Journal on numerical analysis*, 21(1):1–23, 1984.
- [63] A. Harten, P. D. Lax, and B. van Leer. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *Society for Industrial and Applied Mathematics Review*, 25(1):35–61, 1983.
- [64] P. Hu and Z. Cao. Fully coupled mathematical modeling of turbidity currents over erodible bed. *Advances in Water Resources*, 32(1):1 – 15, 2009.
- [65] S. K. Jha and F. A. Bombardelli. Theoretical/numerical model for the transport of non-uniform suspended sediment in open channels. *Advances in Water Resources*, 34(5):577–591, 2011.
- [66] H. Ji and K. Li. A third accurate operator splitting method. *Mathematical and Computer Modelling*, 53(1):387 – 396, 2011.
- [67] C. Juez, J. Murillo, and P. García-Navarro. A 2D weakly-coupled and efficient numerical model for transient shallow flow and movable bed. *Advances in Water Resources*, 71:93 – 109, 2014.
- [68] S. M. Khan, J. Imran, S. Bradford, and J. Syvitski. Numerical modeling of hyperpycnal plume. *Marine Geology*, 222-223:193 – 211, 2005.
- [69] A. Khosronejad, S. Kang, I. Borazjani, and F. Sotiropoulos. Curvilinear immersed boundary method for simulating coupled flow and bed morphodynamic interactions due to sediment transport phenomena. *Advances in Water Resources*, 34(7):829–843, 2011.
- [70] E. Kubatko, J. Westerink, and C. Dawson. An unstructured grid morphodynamic model with a discontinuous Galerkin method for bed evolution. *Ocean Modelling*, 15(1):71 – 89, 2006.



- [71] Y. Kubo. Experimental and numerical study of topographic effects on deposition from two-dimensional, particle-driven density currents. *Sedimentary Geology*, 164(3):311 – 326, 2004.
- [72] Y. Kubo and T. Nakajima. Laboratory experiments and numerical simulation of sediment-wave formation by turbidity currents. *Marine Geology*, 192(1):105 – 121, 2002.
- [73] P. G. LeFloch and M. Mohammadian. Why many theories of shock waves are necessary: Kinetic functions, equivalent equations, and fourth-order models. *Journal of Computational Physics*, 227(8):4162–4189, 2008.
- [74] R. J. LeVeque. Balancing source term and flux gradients in high-resolution Godunov methods. The quasy-steady wave-propagation. *Journal of computational physics*, 146:346–365, 1998.
- [75] R. J. LeVeque. *Finite-volume methods for hyperbolic problems*. Cambridge University Press., 2002.
- [76] J. Li, Z. Cao, G. Pender, and L. Qingquan. A double layer-averaged model for dam-break flows over mobile bed. *Journal of Hydraulic Research*, 51(5):518–534, 2013.
- [77] S. Li and C. J. Duffy. Fully coupled approach to modeling shallow water flow, sediment transport, and bed evolution in rivers. *Water Resources Research*, 47(3):W03508, 2011.
- [78] X. Liu, J. A. Infante Sedano, and A. Mohammadian. A robust coupled 2D model for rapidly varying flows over erodible bed using central-upwind method with wetting and drying. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 42(8):530–543, 2015.
- [79] X. Liu, B. J. Landry, and M. H. García. Two-dimensional scour simulations based on coupled model of shallow water equations and sediment transport on unstructured meshes. *Coastal Engineering*, 55(10):800 – 810, 2008.
- [80] X. Liu, A. Mohammadian, A. Kurganov, and J. A. Infante Sedano. Well-balanced central-upwind scheme for a fully coupled shallow water system modeling flows over erodible bed. *Journal of Computational Physics*, 300:202 – 218, 2015.
- [81] M. Lukáčová-Medvid'ová, S. Noelle, and M. Kraft. Well-balanced finite volume evolution Galerkin methods for the shallow water equations. *Journal of Computational Physics*, 221(1):122–147, 2007.
- [82] M. S. Majd and B. F. Sanders. The LHLLC scheme for two-layer and two-phase transcritical flows over a mobile bed with avalanching, wetting and drying. *Advances in Water Resources*, 67:16–31, 2014.



- [83] E. Meyer-Peter and R. Müller. Formulas for bed-load transport. 1948. 39-64.
- [84] T. Morales de Luna, M. J. Castro Díaz, C. Parés, and E. D. Fernández-Nieto. On a shallow water model for the simulation of turbidity currents. *Communications in computational physics*, 6(4):848–882, 2009.
- [85] T. Morales de Luna, M. J. Castro Díaz, and C. Parés. Relation between PVM schemes and Simple Riemann Solvers. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 30(4):1315–1341, 2014.
- [86] S. T. Munkejord, S. Evje, and T. Flatten. A MUSTA scheme for a nonconservative two-fluid model. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 31(4), 2009.
- [87] J. Murillo and P. García-Navarro. An Exner-based coupled model for two-dimensional transient flow over erodible bed. *Journal of Computational Physics*, 229(23):8704 – 8732, 2010.
- [88] L. O. Müller, C. Parés, and E. F. Toro. Well-balanced high-order numerical schemes for one-dimensional blood flow in vessels with varying mechanical properties. *Journal of Computational Physics*, 242:53 – 85, 2013.
- [89] M. A. Nabian and L. Farhadi. Multiphase mesh-free particle method for simulating granular flows and sediment transport. *Journal of Hydraulic Engineering*, 143(4):04016102, 2017.
- [90] D. H. Nguyen, F. Levy, D. P. Van Bang, S. Guillou, K. D. Nguyen, and J. Chauchat. Simulation of dredged sediment releases into homogeneous water using a two-phase model. *Advances in Water Resources*, 48:102–112, 2012.
- [91] P. Nielsen. *Coastal bottom boundary layers and sediment transport*. World Scientific, 1992.
- [92] G. Nord and M. Esteves. PSEM_2D: A physically based model of erosion processes at the plot scale. *Water Resources Research*, 41(8), 2005.
- [93] H. M. Pantin. Interaction between velocity and effective density in turbidity flow: Phase-plane analysis, with criteria for autosuspension. *Marine Geology*, 31(1):59 – 99, 1979.
- [94] C. Parés. Numerical methods for nonconservative hyperbolic systems: a theoretical framework. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 44(1):300–321, 2006.
- [95] C. Parés and M. J. Castro Díaz. On the well-balance property of Roe’s method for nonconservative hyperbolic systems. Applications to shallow-water systems. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 38(5):821–852, 2004.

- [96] G. Parker, Y. Fukushima, and H. M. Pantin. Self-accelerating turbidity currents. *Journal of Fluid Mechanics*, 171:145–181, 1986.
- [97] M. Pelanti, F. Bouchut, and A. Mangeney. A Roe-type scheme for two-phase shallow granular flows over variable topography. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 42(5):851–885, 2008.
- [98] B. Perthame and C. Simeoni. A kinetic scheme for the Saint–Venant system with a source term. *CALCOLO*, 38(4):201–231, 2001.
- [99] B. Perthame and C. Simeoni. Convergence of the Upwind Interface Source Method for Hyperbolic Conservation Laws. In Thomas Y. Hou and Eitan Tadmor, editors, *Hyperbolic problems: Theory, numerics, applications*, pages 61–78. Springer Berlin Heidelberg, 2003.
- [100] J. S. Ribberink. *Mathematical modelling of one-dimensional morphological changes in rivers with non-uniform sediment*. PhD thesis, Delft University of Technology, 1987. Report No. 87-2.
- [101] A. J. C Saint-Venant. Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues de rivières et à l’introduction des marées dans leur Lit. *Comptes Rendus des séances de l’Académie des Sciences de Paris*, 73(4):237–240, 1871.
- [102] A. Shields. *Anwendung der Aehnlichkeitsmechanik und der Turbulenzforschung auf die Geschiebebewegung*. PhD thesis, University Berlin, 1936.
- [103] C. W. Shu and S. Osher. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. *Journal of Computational Physics*, 77(2):439 – 471, 1988.
- [104] G. Simpson and S. Castelltort. Coupled model of surface water flow, sediment transport and morphological evolution. *Computers & Geosciences*, 32(10):1600 – 1614, 2006.
- [105] S. Soares-Frazão, R. Canelas, Cao Z., L. Cea, H. M. Chaudhry, A. Die Moran, K. El Kadi, R. Ferreira, I. Fraga Cadorniga, N. Gonzalez-Ramirez, M. Greco, W. Huang, J. Imran, J. Le Coz, R. Marsooli, A. Paquier, G. Pender, M. Pontillo, J. Puertas, B. Spinewine, C. Swartenbroekx, R. Tsubaki, C. Villaret, W. Wu, Z. Yue, and Y. Zech. Dam-break flows over mobile beds: experiments and benchmark tests for numerical models. *Journal of Hydraulic Research*, 50(4):364–375, 2012.
- [106] S. Soares-Frazão and Y. Zech. HLLC scheme with novel wave-speed estimators appropriate for two-dimensional shallow-water flow on erodible bed. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 66(8):1019–1036, 2011.



- [107] B. Spinewine and Y. Zech. Small-scale laboratory dam-break waves on movable beds. *Journal of Hydraulic Research*, 45(sup1):73–86, 2007.
- [108] D. Subhasish. *Fluvial hydrodynamics, hydrodynamic and sediment transport phenomena*. GeoPlanet: Earth and Planetary Sciences. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014.
- [109] C. Swartenbroekx, Y. Zech, and S. Soares-Frazão. Two-dimensional two-layer shallow water model for dam break flows with significant bed load transport. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 73(5):477–508, 2013.
- [110] C. Sánchez-Linares, T. Morales de Luna, and M. J. Castro Díaz. A HLLC scheme for Ripa model. *Applied Mathematics and Computation*, 272:369 – 384, 2016.
- [111] H. Tang, T. Tang, and K. Xu. A gas-kinetic scheme for shallow-water equations with source terms. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 55(3):365–382, 2004.
- [112] E. F. Toro. MUSTA: A multi-stage numerical flux. *Applied Numerical Mathematics*, 56(10):1464 – 1479, 2006. Selected Papers from the First Chilean Workshop on Numerical Analysis of Partial Differential Equations (WONAPDE 2004).
- [113] E. F. Toro. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction*. Springer Science & Business Media, 3 edition, 2013.
- [114] E. F. Toro and S. J. Billett. Centred TVD schemes for hyperbolic conservation laws. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 20(1):47–79, 01 2000.
- [115] E. F. Toro, M. Spruce, and W. Speares. Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver. *Shock Waves*, 4(1):25–34, 1994.
- [116] M. Torrilhon. Krylov-Riemann solver for large hyperbolic systems of conservation laws. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 34(4):A2072–A2091, 2012.
- [117] R. Touma, U. Koley, and C. Kingenber. Well-balanced unstaggered central schemes for the Euler equations with gravitation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 38(5):B773–B807, 2016.
- [118] I. Toumi. A weak formulation of Roe’s approximate Riemann solver. *Journal of Computational Physics*, 102(2):360 – 373, 1992.
- [119] B. van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme III. Upstream-centered finite-difference schemes for ideal compressible flow. *Journal of Computational Physics*, 23:263–275, 03 1977.
- [120] B. van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme. IV. A new approach to numerical convection. *Journal of Computational Physics*, 23(3):276 – 299, 1977.



- [121] B. van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme V. A second-order sequel to Godunov's method. *Journal of Computational Physics*, 32:101–136, 07 1979.
- [122] L. C Van Rijn. Sediment transport, part I: bed load transport. *Journal of Hydraulic Engineering*, 110(10):1431–1456, 1984.
- [123] A. I. Vol'pert. The spaces BV and quasilinear equations. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 2(2):225–267, 1967.
- [124] W. Wu and S. S. Wang. One-dimensional modeling of dam-break flow over movable beds. *Journal of Hydraulic Engineering*, 133(1):48–58, 2007.
- [125] Y. Xing, C. W. Shu, and S. Noelle. On the advantage of well-balanced schemes for moving-water equilibria of the shallow water equations. *Journal of Scientific Computing*, 48(1):339–349, 2011.
- [126] R. Zhang and J. Xie. *Sedimentation research in China: systematic selection*. China and Water and Power Press, Beijing, 1993.
- [127] S. Zhiyao, W. Tingting, X. Fumin, and L. Ruijie. A simple formule for predicting settling velocity of sediment. *Journal of Water Science and Engineering*, 1(1):37–43, 2008.