



UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

Programa de Doctorado
Tecnologías Informáticas
Departamento de Lenguajes y Ciencias de la Computación

Tesis Doctoral:
**Estrategias Algorítmicas de Hibridación en Técnicas Metaheurísticas
para la Resolución del Problema de Selección de Carteras de Inversión
utilizando Restricciones de Cardinalidad**

Autor: Colomine Durán, Feijoo Eduardo.

Director: Dr. Carlos Cotta Porras
Co-Director: Dr. Antonio J. Fernández Leiva

Málaga, Septiembre 2025






UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA



UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

AUTOR: Feijoo Eduardo Colomine Durán

 <https://orcid.org/0000-0002-2034-9205>

EDITA: Publicaciones y Divulgación Científica. Universidad de Málaga



Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 4.0 Internacional:

Cualquier parte de esta obra se puede reproducir sin autorización pero con el reconocimiento y atribución de los autores.

No se puede hacer uso comercial de la obra y no se puede alterar, transformar o hacer obras derivadas.

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode>

Esta Tesis Doctoral está depositada en el Repositorio Institucional de la Universidad de Málaga (RIUMA): riuma.uma.es



DECLARACIÓN DE AUTORÍA Y ORIGINALIDAD DE LA TESIS PRESENTADA PARA OBTENER EL TÍTULO DE DOCTOR:

D. Feijoo Eduardo Colomine Durán

Estudiante del programa de doctorado **Tecnologías Informáticas** de la Universidad de Málaga, autor de la tesis, presentada para la obtención del título de doctor por la Universidad de Málaga, titulada:

Estrategias Algorítmicas de Hibridación en Técnicas Metaheurísticas para la Resolución del Problema de Selección de Carteras de Inversión utilizando Restricciones de Cardinalidad

Realizada bajo la tutorización del Dr. Carlos Cotta y dirección del Dr. Antonio J. Fernández Leiva.

DECLARO QUE:

La tesis presentada es una obra original que no infringe los derechos de propiedad intelectual ni los derechos de propiedad industrial u otros, conforme al ordenamiento jurídico vigente (Real Decreto Legislativo 1/1996, de 12 de abril, por el que se aprueba el texto refundido de la Ley de Propiedad Intelectual, regularizando, aclarando y armonizando las disposiciones legales vigentes sobre la materia), modificado por la Ley 2/2019, de 1 de marzo.

Igualmente asumo, ante a la Universidad de Málaga y ante cualquier otra instancia, la responsabilidad que pudiera derivarse en caso de plagio de contenidos en la tesis presentada, conforme al ordenamiento jurídico vigente.

En Málaga, 15 de Septiembre de 2025.

Fdo.: Feijoo Eduardo Colomine Durán



UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

Estrategias Algorítmicas de Hibridación en Técnicas Metaheurísticas para la Resolución del Problema de Selección de Carteras de Inversión utilizando Restricciones de Cardinalidad

Feijoo Eduardo Colomine Durán

Septiembre, 2025

Resumen

La presente investigación se centra en estudiar diferentes variantes de algoritmos de computación memética para abordar problemas de optimización multiobjetivo. A lo largo del trabajo de tesis se proponen diferentes técnicas que presentan multiplicidad de soluciones y que componen entre otras cosas la agregación de los conceptos de memoria élite y búsqueda local, para resolver la selección de carteras de inversión con restricciones de cardinalidad. Este es un problema de optimización inherentemente multiobjetivo, para el cual utilizamos el índice de Sharpe, una conocida medida de rentabilidad/riesgo, para evaluar la eficiencia financiera de las carteras o portafolios de inversión generados, así como para realizar análisis comparativos. El índice de Sharpe se convierte en un elemento fundamental para llevar a cabo estas agregaciones, con el fin de mantener un registro de las soluciones más efectivas encontradas. Este registro se utiliza como un mecanismo de intensificación ajustable para mantener la búsqueda enfocada. Estos algoritmos de optimización multiobjetivo han demostrado, experimentalmente, su eficiencia al abordar un problema de optimización de cartera con restricciones de cardinalidad. En nuestra propuesta, la búsqueda local emplea el conocimiento específico proporcionado por el índice de Sharpe, lo que permite centrar la búsqueda global en las soluciones no dominadas más prometedoras del frente de Pareto. El objetivo subyacente es alinear el algoritmo con el proceso de toma de decisiones posterior, que implica la selección de una solución adecuada del frente de Pareto final por parte de un experto en el dominio, centrando la búsqueda en las regiones que puedan ser más relevantes para el responsable de la toma de decisiones, en lugar de dispersar los esfuerzos hacia el frente no dominado para cubrir regiones que, en última instancia, podrían ser menos relevantes.

A través de este estudio se ha hecho un análisis de sensibilidad con diferentes variantes del algoritmo para determinar una parametrización adecuada (la puesta en escena de una búsqueda local, la implementación de una memoria élite o la actuación sinérgica de ambos tipos de variantes). Posteriormente, se realizó una comparación con cinco algoritmos evolutivos multiobjetivo utilizando indicadores de rendimiento conocidos, como el hipervolumen y la distancia generacional. Esta experimentación toma como referencia el mercado de la Bolsa de Valores de Colombia entre 2010 y 2016, y confirma el gran potencial de nuestra propuesta memética para este problema.

Como herramienta complementaria durante esta investigación, se esboza una propuesta metodológica para hacer un análisis de un corpus bibliográfico para establecer y realizar una clasificación de los ítems de la literatura en conjuntos relacionados mediante algoritmos de agrupamiento (trabajando en este caso sobre una matriz de distancia entre artículos obtenida a partir de la similitud léxica entre sus descriptores bibliográficos). Con este estudio, se analiza la estructura interna de estos grupos y se encuentra un orden de revisión adecuado mediante el empleo de algoritmos evolutivos. El resultado de ello es un análisis sistemático de la literatura relacionada y del estado del arte sobre la aplicación de metaheurísticas y algoritmos bioinspirados a problemas de optimización de carteras de inversión.

Palabras Clave: Metaheurísticas, hibridación, algoritmos meméticos, búsquedas locales, memoria élite, espacio de búsqueda, bibliometría.

Abstract

This research focuses on studying different variants of memetic computing algorithms for addressing multi-objective optimization problems. Throughout the thesis, different techniques are proposed that present multiple solutions and are based on the aggregation of the concepts of elite memory and local search, to solve the selection of investment portfolios with cardinality restrictions. This is an inherently multi-objective optimization problem, for which we use the Sharpe ratio, a well-known risk-return measure, to evaluate the financial efficiency of the generated investment portfolios, as well as to perform comparative analyses. The Sharpe ratio becomes a fundamental token for carrying out these aggregations, in order to keep track of the most effective solutions found. This record is used as an adjustable intensification mechanism to keep the search focused. These multi-objective optimization algorithms have experimentally demonstrated their efficiency in addressing a cardinality-restricted portfolio optimization problem. In our proposal, local search employs the specific knowledge provided by the Sharpe ratio, allowing the global search to focus on the most promising non-dominated solutions from the Pareto front. The underlying goal is to align the algorithm with the subsequent decision-making process, which involves the selection of a suitable solution from the final Pareto front by a domain expert, focusing the search on regions that may be most relevant to the decision-maker, rather than dispersing efforts toward the non-dominated front to cover regions that might ultimately be less relevant.

This study performed a sensitivity analysis with different variants of the algorithm to determine an appropriate parameterization (implementing a local search, implementing an elite memory, or using both variants in synergy). A comparison was then conducted with five multi-objective evolutionary algorithms using well-known performance indicators, such as hypervolume and generational distance. This experiment takes as a reference the Colombian Stock Exchange market between 2010 and 2016, and confirms the great potential of our memetic proposal for this problem.

Additionally, a methodological proposal is outlined for analyzing a bibliographic corpus to establish and classify literature items into related sets using clustering algorithms (in this case, working on a distance matrix between articles obtained from the lexical similarity between their bibliographic descriptors). This study analyzed the internal structure of these groups, and an appropriate review order was determined using evolutionary algorithms. This resulted in a systematic analysis of the related literature and the state of the art on the application of metaheuristics and bio-inspired algorithms to investment portfolio optimization problems.

Keywords: Metaheuristics, hybridization, memetic algorithms, local search, elite memory, search space, bibliometrics



UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

Agradecimientos

A mis padres Feijoo y Reina, fuente ilimitada de sabiduría, además de ser ejemplo permanente y guía.

A mi familia, siempre presentes.

A Carlos Cotta Porras y Antonio Fernández-Leiva, por su incansable colaboración, disposición y apoyo. Sin el concurso de ustedes no hubiera sido posible este logro.

A las siguientes instituciones: Universidad de Málaga (UMA-España), Universidad Nacional Experimental del Táchira (UNET-Venezuela).



UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

Publicaciones

A continuación se mencionan las diferentes publicaciones que han sido producto del trabajo de investigación que avalan esta tesis doctoral.

1. **Colomine Durán, Feijoo E. ; Cotta Porras, Carlos ; Fernández-Leiva, Antonio J.: [57]** **Trabajo Aceptado para publicación. Abril 2025.** publicación titulada:"**A Multiobjective Memetic Algorithm for the Markowitz Model based on Informed Decisions** ", Revista: journal Computing and Informatics. En este trabajo, se aborda la aplicación selectiva de operadores de conocimiento basado en el índice de Sharpe en un algoritmo memético multiobjetivo (MOMA) para el problema de selección de carteras de inversión.
2. **Colomine Durán, Feijoo E. ; Cotta Porras, Carlos ; Fernández-Leiva, Antonio J.: [56]** publicación titulada:"**Epoch Based Application of Problem Aware Operators in a Multiobjective Memetic Algorithm for portfolio Optimization**" de EvoApplications. En este trabajo, se aborda la aplicación selectiva de operadores de conocimiento aumentado a través de búsqueda local y memoria de soluciones de élite en un algoritmo memético multiobjetivo.
3. **Colomine Durán, Feijoo E. ; Cotta Porras, Carlos ; Fernández-Leiva, Antonio J.: [55]**, publicación titulada:"**Mapping the Field of Metaheuristic and Bioinspired Portfolio Optimization**", presenta un estudio del estado del arte para algoritmos Bio-Inspirados en la aplicación para el problema de selección de carteras de inversión.
4. **Colomine Durán, Feijoo E. ; Cotta Porras, Carlos ; Fernández-Leiva, Antonio J.: [54]**, publicación titulada:"**Sensitivity to Partial Lamarckism in a Memetic Algorithm for Constrained Portfolio Optimization**", presenta un estudio de sensibilidad para la parametrización de un algoritmo memético.
5. **Colomine Durán, Feijoo E. ; Cotta Porras, Carlos ; Fernández-Leiva, Antonio J.: [53]** publicación titulada:"**Algoritmos Evolutivos con Memoria Élite para la Selección de Carteras de Inversión**", el desarrollo de un algoritmo memético con memoria elite basada en Sharpe.
6. **Colomine Durán, Feijoo E. ; Cotta Porras, Carlos ; Fernández-Leiva, Antonio J.: [52]** publicación titulada:"**Cartografía de un Subcampo Científico: Un Estudio sobre la Optimización de Carteras de Inversión**", una metodología para hacer una revisión del Estado del Arte.



UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

Índice de Contenidos

Resumen	iii
Publicaciones	viii
Acrónimos	xxi
Prefacio	xxiii
1 Introducción	1
1.1 El problema	1
1.2 Objetivos	3
1.3 Metodología	3
1.4 Contribuciones	4
1.5 Organización de la tesis	4
2 Bases teóricas	7
2.1 Optimización	7
2.2 Optimización monobjetivo	11
2.3 Optimización multiobjetivo	12
2.4 Problema general de optimización multiobjetivo (POM)	12
2.5 Heurísticas	13
2.6 Metaheurísticas	15
2.7 Metaheurísticas basadas en trayectorias	16
2.7.1 Hill Climbing (HC)	16
2.7.2 Tabu Search (TS)	17
2.7.3 Simulated Annealing (SA)	20
2.7.4 Enfoques constructivos multi-inicio (Técnica de razonamiento adaptativo (ART))	22
2.8 Metaheurísticas basadas en población	22
2.8.1 Historia de la teoría evolutiva	22
2.8.2 Computación evolutiva	26
2.8.2.1 Programación evolutiva (PE)	27
2.8.2.2 Estrategias evolutivas (EA)	27
2.8.2.3 Algoritmos evolutivos (o genéticos)	27
2.8.2.4 Programación genética (PG)	30
2.9 Algoritmos evolutivos multiobjetivos (AEMO)	31
2.9.1 Algoritmos evolutivos multiobjetivos basados en dominancia	33
2.9.2 Indicadores de calidad en un algoritmo evolutivo multiobjetivo	38



2.9.3	Otras clasificaciones o enfoques emergentes en algoritmos evolutivos multiobjetivos	43
2.10	Métodos Interactivos	47
2.11	Técnicas híbridas o algoritmos meméticos (MAs)	47
2.12	Conceptos económicos y financieros	50
2.12.1	Carteras de inversión	50
2.12.2	Modelo de Markowitz	51
2.12.2.1	Rentabilidad de una cartera	53
2.12.2.2	Riesgo de una cartera	53
2.12.2.3	Criterios para medir la aversión al riesgo	54
2.12.2.4	El modelo Markowitz multiobjetivo	56
2.12.2.5	El problema de optimización considerado: Markowitz multiobjetivo con restricciones de cardinalidad	56
2.12.3	Índice de Sharpe.	57
2.13	Contribuciones	58
3	Propuesta metodológica para revisión de literatura relacionada	59
3.1	Introducción	59
3.2	Propuesta metodológica	60
3.3	Datos utilizados en el análisis	62
3.4	Experimentación y resultados	67
3.4.1	Grupo 1:Técnicas de optimización multiobjetivo usando indicadores de Sharpe o modelo de Markowitz	69
3.4.2	Grupo 2: Técnicas de optimización multiobjetivo para la propuesta de carteras de inversión.	72
3.4.3	Grupo 3: Técnicas metaheurísticas para carteras de inversión con restricciones de diferentes tipos.	75
3.4.4	Grupo 4:Técnicas híbridas para abordar el problema de optimización de carteras de inversión.	77
3.4.5	Grupo 5: Exploración exhaustiva de la frontera de Pareto a través de AEMOs	78
3.5	Red de tópicos	80
3.6	Contribuciones	81
4	Núcleo evolutivo: aplicación de algoritmos evolutivos multiobjetivos para el problema de optimización de carteras de inversión	83
4.1	Introducción	83
4.2	El problema sujeto de la optimización	84
4.3	Marco metodológico	84
4.3.1	Representación	84
4.3.2	Diseño del cromosoma:	85
4.3.3	Población	85
4.4	Implementación del motor evolutivo	86
4.5	PISA: Software marco utilizado para la optimización multiobjetivo	86
4.6	Experimentación	89
4.7	Base de datos utilizada en el análisis	89
4.8	Análisis de resultados	91
4.8.1	Análisis de la frontera de Pareto	91
4.8.2	Análisis de la frontera de Pareto combinada	92
4.8.3	Análisis a través del índice de Sharpe	95
4.8.4	Interpretación de los resultados: causas y consecuencias	95
4.9	Conclusiones	97



4.10 Contribuciones	97
5 Variantes de hibridación para el problema de optimización multiobjetivo de carteras de inversión con restricciones de cardinalidad	99
5.1 Introducción	100
5.2 Materiales y métodos	100
5.3 La propuesta de hibridación	101
5.4 Datos utilizados en el análisis	105
5.5 Escenario de comparación	106
5.6 Entorno experimental	107
5.7 Resultados Experimentales	108
5.8 Variantes de la hibridación: Análisis de sensibilidad	108
5.8.1 Solo búsqueda local	108
5.8.2 Solo memoria élite	111
5.8.3 Actuación sinérgica entre la búsqueda local y memoria élite	113
5.9 Comparación con otros AEMOs (Análisis de rendimiento)	115
5.9.1 Análisis de Fronteras de Pareto	115
5.9.2 Análisis de soluciones con Indicadores de Calidad	116
5.10 Balance entre intensificación y diversificación: Análisis de sensibilidad basado en épocas	119
5.10.1 Resultados experimentales	119
5.10.2 Análisis de sensibilidad	120
5.10.3 Comparación con otros AEMOs	122
5.11 Análisis comparativo financiero de la cartera proporcionada por la propuesta de hibridación	124
6 Conclusiones y trabajo futuro	129
6.1 Conclusiones	129
6.2 Contribuciones metodológicas y experimentales clave	130
6.3 Impacto y relevancia del trabajo	132
6.4 Trabajo futuro	133
Bibliografía	135
Índice Alfabético	152



UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

Lista de Figuras

2.1	Representación clásica de sistema	9
2.2	Métodos de Optimización	11
2.3	Propósitos de la optimización multiobjetivo (Fuente: [165])	13
2.4	George Louis Leclerc (1707-1788). Fuente: Dominio Público	22
2.5	Jean Baptiste, Chevalier de Lamarck (1744-1829). Fuente: Dominio Público	22
2.6	Erasmus Darwin (1731-1802). Fuente: Dominio Público	23
2.7	Charles Darwin (1809-1882). Fuente: Dominio Público	23
2.8	Fragmento de portada de la primera edición del libro "El origen de las especies". Fuente: Dominio Público	24
2.9	Friedrich Leopold August Weismann (1834-1914). Fuente: Dominio Público	25
2.10	Gregor Mendel (1822-1884). Fuente: Dominio Público	25
2.11	Harry M. Markowitz, (Chicago, 1927 - 2023). Fuente: Dominio Público.	52
2.12	Curvas de utilidad del inversor (Fuente: [1])	55
2.13	Interpretación geométrica índice de Sharpe. Fuente: Elaboración Propia.	58
3.1	Revisión de artículos del estudio bibliométrico	64
3.2	Ley de Bradford aplicada al contexto de metaheurísticas y algoritmos bioinspirados a problemas de optimización de carteras de inversión.	65
3.3	Nube de Palabras Base de Datos en el contexto de metaheurísticas y algoritmos bioinspirados a problemas de optimización de carteras de inversión.	66
3.4	Fuentes Documentales más relevantes en el contexto de metaheurísticas y algoritmos bioinspirados a problemas de optimización de carteras de inversión.	66
3.5	La imagen (a) muestra la nube de palabras representativa de la frecuencia absoluta de todos los términos lematizados en el conjunto total de artículos. Las restantes imágenes (b)–(f) muestran lo mismo para cada uno de los cinco grupos identificados (de izquierda a derecha y de arriba a abajo, grupos 1, 2, 3, 4, y 5).	67
3.6	Red de tópicos obtenida a partir de la muestra bibliográfica. El tamaño de cada nodo o arista es proporcional a su frecuencia, y cada color corresponde con una comunidad. La representación gráfica y en análisis de comunidades se ha realizado con Gephi [15].	80
4.1	Diagrama de Flujo y de componentes de PISA: Platform Independent Interface for Search Algorithms (Fuente: [20])	87
4.2	Frontera de Pareto NSGA-II, SPEA2 e IBEA cardinalidad K=7 (a). Frontera de Pareto NSGA-II, SPEA2 e IBEA cardinalidad K=15 (b).	91
4.3	Frontera de Pareto combinada con cardinalidad K=2 (a). Frontera de Pareto combinada con cardinalidad K=4 (b).	92

4.4	Frontera de Pareto combinada con cardinalidad $K=7$ (a). Frontera de Pareto combinada con cardinalidad $K=15$ (b).	92
4.5	Indicador Hypervolume y R_2 para Cardinalidad $K=2$	93
4.6	Indicador Hypervolume y R_2 para Cardinalidad $K=15$	94
4.7	Índice de Sharpe para Cardinalidad $K=2$ (a). Índice de Sharpe para Cardinalidad $K=4$ (b).	95
4.8	Índice de Sharpe para Cardinalidad $K=7$ (a). Índice de Sharpe para Cardinalidad $K=15$ (b).	96
5.1	Diagrama de Flujo con Memoria Élite y Búsqueda Local, Generación Inicial (IG) y Generación Final (FG)	102
5.2	Distribución de los indicadores de rendimiento alcanzados en 30 ejecuciones del MA con diferente parametrización de búsqueda local y sin memoria de élite para $K = 18$ (a) Índice de Sharpe (b) Hypervolume (c) Distancia Generacional.	109
5.3	Comparación de los frentes de Pareto combinados obtenidos por $MA_{1,0}$ y $MA_{0,0}$ (IBEA) para $K = 18$. (a). Valores del índice de Sharpe para soluciones no dominadas en función del riesgo (b) y la rentabilidad (c).	109
5.4	Distribución de los indicadores de rendimiento alcanzados en 30 ejecuciones del MA con diferente parametrización de la memoria de élite y sin búsqueda local de $K = 18$ (a) Índice de Sharpe (b) Hypervolume (c) Distancia Generacional.	111
5.5	Comparación de los frentes de Pareto combinados obtenidos por $MA_{0,1}$ y $MA_{0,0}$ (IBEA) para $K = 18$. (a). Valores del índice de Sharpe para soluciones no dominadas en función del riesgo (b) y la rentabilidad (c).	113
5.6	Distribución de los indicadores de rendimiento obtenidos en 30 ejecuciones de la MA con diferente parametrización de memoria de élite y búsqueda local para $K = 18$. Cada par de valores en el eje y representa (P_{LS}, P_{EM}) . (a) Índice de Sharpe (b) Hypervolume (c) Distancia Generacional.	113
5.7	Distribución de la contribución al frente de Pareto después de 30 ejecuciones de los algoritmos ($MA_{1,1}$, NSGA-II, SPEA2, IBEA, HYPE y SHV para $K = 18$) (a) Fronteras de Pareto (b) Distribución porcentual para la Referencia	116
5.8	Distribución de los indicadores de rendimiento alcanzados en 30 ejecuciones de los algoritmos (El MA con $P_{LS} = 1,0$ y $P_{EM} = 1,0$, NSGA-II, SPEA2, HYPE and SHV) (a) Índice de Sharpe (b) Hypervolume (c) Distancia Generacional.	118
5.9	Comparación de los frentes de Pareto combinados obtenidos por $MA_{1,1}$ y NSGA-II para $K = 18$. (a) Valores del índice de Sharpe para soluciones no dominadas en función del riesgo (b) y Beneficio (c). Las Sub-Figuras (d)-(f) son análogas para HYPE.	118
5.10	Distribución de la contribución al frente de Pareto después de 30 ejecuciones de los algoritmos ($MA_{0,40}^{1,1}$, NSGA-II, SPEA2, IBEA, HYPE y SHV para $K = 18$) (a) Fronteras de Pareto (b) Distribución porcentual para la Referencia	123
5.11	Representación de los frentes de Pareto combinados de $MA_{0,40}^{1,1}$ e HypE. El gráfico de la izquierda muestra los frentes alcanzados en el espacio bioobjetivo. Los gráficos central y derecho muestran el índice de Sharpe para cada solución del frente en función del riesgo (centro) y el rendimiento (izquierda).	124

Lista de Tablas

2.1	Rentabilidad anual , esperada ($E(R_i)$) y varianza (σ_i^2) de dos Activos	53
2.2	Matriz de Covarianzas	54
3.1	Matriz de Ocurrencias $M(n,n)$	62
3.2	Principales Fuentes Documentales y su Factor de Impacto	65
3.3	Grupos de artículos identificados y términos más distintivos de cada uno de ellos.	67
3.4	Extracto de la ordenación de artículos correspondiente al grupo 2.	69
4.1	Marco Experimental de la Solución Evolutiva	86
4.2	Marco Experimental Fondo Mutual Europa del Modelo de Markowitz Multiobjetivo	90
4.3	Tabla de Rendimiento esperado, Varianza y Desviación estándar Fondo Mutual Europa.	90
4.4	Tabla de Matriz de Covarianzas Fondo Mutual Europa.	91
5.1	Fondos de la BVC incluidos en el conjunto de datos utilizado en la experimentación. Para cada fondo, se muestran la rentabilidad ($E(R_i)$) y el riesgo ($\sigma(R_i)$) en el periodo 2010-2016.	106
5.2	Resultados numéricos mediante búsqueda local. Se muestran los mejores valores (x^*), la mediana (\tilde{x}), la desviación cuartil (QD) y el coeficiente de desviación cuartil (QCD) para cada indicador de rendimiento. La mejor configuración para cada indicador se marca con \star ; las demás configuraciones se marcan con símbolos que indican una diferencia estadísticamente significativa en $\alpha = 0,1(\circ)$, $\alpha = 0,05(\bullet)$, y $\alpha = 0,01(\blacksquare)$. La ausencia de un símbolo indica que no hay diferencia estadísticamente significativa con respecto a la configuración \star	110
5.3	Resultados numéricos mediante el uso de la Memoria Élite. Se muestran los mejores valores (x^*), la mediana (\tilde{x}), la desviación cuartil (QD) y el coeficiente de desviación cuartil (QCD) para cada indicador de rendimiento. La mejor configuración para cada indicador se marca con \star ; las demás configuraciones se marcan con símbolos que indican una diferencia estadísticamente significativa en $\alpha = 0,1(\circ)$, $\alpha = 0,05(\bullet)$, y $\alpha = 0,01(\blacksquare)$. La ausencia de un símbolo indica que no hay diferencia estadísticamente significativa con respecto a la configuración \star	112
5.4	Resultados numéricos utilizando memoria de élite y búsqueda local.	114
5.5	Resultados numéricos para todos los algoritmos considerados (el MA con $P_{LS} = 1,0$ y $P_{EM} = 1,0$, NSGA-II, SPEA2, HYPE y SHV). Cabe destacar que IBEA no se incluye en esta tabla porque es equivalente al MA _{0,0} y esta comparación ya se realizó en el análisis de sensibilidad de la Sección 5.8.	117



5.6	Resultados de MA para diferentes valores de IG y FG . Se muestran los mejores valores (x^*), mediana (\tilde{x}), desviación cuartil (QD) y coeficiente de desviación cuartil (CQD) para cada indicador de rendimiento. La mejor configuración para cada indicador se marca con una estrella; las demás configuraciones se marcan con símbolos que indican una diferencia estadísticamente significativa en $\alpha = 0,1$ (\circ), $\alpha = 0,05$ (\bullet) y $\alpha = 0,01$ (\blacksquare) con este mejor valor.	121
5.7	Resultados para la parametrización MA seleccionada y los MOEA no meméticos. Se muestran los mejores valores (x^*), la mediana (\tilde{x}), la desviación cuartil (QD) y el coeficiente de desviación cuartil (CQD) para cada indicador de rendimiento. La mejor configuración para cada indicador se marca con una estrella; las demás configuraciones se marcan con símbolos que indican una diferencia estadísticamente significativa en $\alpha = 0,1$ (\circ), $\alpha = 0,05$ (\bullet) y $\alpha = 0,01$ (\blacksquare) con este mejor valor.	122
5.8	Cartera Propuesta de títulos acciones de renta variables activas en el año 2017 para la Bolsa de Valores de Colombia con $MA_{1,1}$ y con $MA_{0,40}^{1,1}$	125
5.9	Rendimiento de títulos acciones de renta variables activas en el año 2017 para la Bolsa de Valores de Colombia y el Rendimiento de la cartera propuesta $MA_{1,1}$ en 5.8	126
5.10	Rendimiento de títulos acciones de renta variables activas en el año 2017 para la Bolsa de Valores de Colombia y el Rendimiento de la cartera propuesta $MA_{0,40}^{1,1}$ en 5.8	127
5.11	Rendimiento Año 2017 de Indices del Mercado de Renta Variable de la Bolsa de Valores de Colombia [48] comparados con las Carteras Propuestas.	127

Índice de algoritmos

1	Algoritmo Básico de Hill Climbing (Búsqueda de Mejora Local)	17
2	Algoritmo Básico de Tabu Search	19
3	Pseudocódigo del Algoritmo Simulated Annealing	21
4	Algoritmo Genético General	30
5	Algoritmo Principal de SPEA2 [222]	36
6	Esquema general de funcionamiento del algoritmo NSGA II	37
7	Algoritmo Básico IBEA [218]	41
8	Algoritmo Principal de HypE [11]	44
9	Selección de Apareamiento de HypE [11]	44
10	Selección por Fitness de HypE [11]	45
11	Pseudocódigo de Algoritmo Memético Básico [152]	48
12	Mejora local para Población Inicial	49
13	Nuestra propuesta: Algoritmo Memético (MA) Basado en Sharpe	103
14	Búsqueda local basada en Sharpe LOCALSEARCH (p)	104



UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

Acrónimos

- AI** Inteligencia Artificial (*Artificial Intelligence*).
- ACO** Optimización basada en Colonia de Hormigas (*Ant colony optimization*).
- BF** Cambio de bit (*Bit Flip*).
- BIBD** Diseño de Bloques Incompletos Balanceados (*Balanced Incomplete Block Designs*).
- COP** Problema de Optimización Combinatoria (*Combinatorial Optimization Problem*).
- CP** Programación con Restricciones (*Constraint Programming*).
- CSP** Problemas de satisfacción con restricciones (*Constraint satisfaction problem*).
- CM** Modelo Cooperativo (*Cooperative Model*).
- DM** Modelo Dual (*Dual Model*).
- EA** Algoritmo Evolutivo (*Evolutionary Algorithm*).
- GA** Algoritmo Genético (*Genetic Algorithm*).
- HC** Hill Climbing.
- ILP** Programación Lineal Entera (*Integer Linear Programming*).
- IP** Programación Entera (*Integer Programming*).
- LP** Programación Lineal (*Linear Programming*).
- LS** Búsqueda Local (*Local Search*).
- MA** Algoritmo Memético (*Memetic Algorithm*).
- NFL** No Free Lunch.
- OR** Investigación de Operaciones (*Operations Research*).
- TS** Búsqueda Tabú (*Tabu Search*).
- AEMO** Algoritmo Evolutivo Multiobjetivo.
- PMRM** *Partitioned Multi-objective Risk Method*.
- VEGA** *Vector Evaluated Genetic Algorithm*.
- NSGA** *Nondominated Sorting Genetic Algorithm*.
- NPGA** *Niched-Pareto Genetic Algorithm*.
- MOGA** *Multi-Objective Genetic Algorithm*.
- SPEA** *Strength Pareto Evolutionary Algorithm*.
- SPEA2** *Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2*.
- PAES** *Pareto Archived Evolution Strategy*.
- NSGA-II** *Nondominated Sorting Genetic Algorithm II*.
- PESA** *Pareto Envelope-based Selection Algorithm*.
- NPGA2** *Niched-Pareto Genetic Algorithm 2*.
- micro-GA** *Micro Genetic Algorithm*.
- IBEA** *Indicador-Based Evolutionary Algorithm*.
- SHV** *Sampling-based Hypervolume-oriented Algorithm*.
- PISA** *Platform Independent Interface for Search Algorithms*.
- MOMA** *Multi-Objective Memetic Algorithms*.

HyPE *Hypervolume Estimation Algorithm for Multiobjective Optimization.*
MOEA/D *Multi-objective Evolutionary Algorithm based on Decomposition.*
SMS-EMOA *Multiobjective selection based on dominated hypervolume.*
MOGLS *Multiobjective Genetic Local Search.*
M-PAES *Memetic Pareto Archived Evolution Strategy.*

Prefacio

La gestión financiera, en el contexto de un mundo económico en constante evolución, presenta desafíos complejos y persistentes para administradores e inversores por igual. En un escenario marcado por tasas de interés fijas bajas, la búsqueda de inversiones rentables se intensifica, llevando consigo un aumento intrínseco del riesgo asociado. Para mitigar este riesgo, una estrategia fundamental consiste en la diversificación, es decir, la inversión en una cartera de instrumentos financieros o sectores distintos, con la esperanza de que estén sujetos a ciclos económicos diferentes y así minimizar la probabilidad de pérdidas simultáneas en todas las posiciones. La composición óptima de dicha cartera se convierte entonces en un objetivo crucial, dictado en gran medida por el grado de aversión al riesgo del inversor [1].

El área de la gestión financiera ha dedicado una considerable cantidad de esfuerzo a estudiar la relación entre el riesgo y el rendimiento. Históricamente, la selección de inversiones implicaba la adquisición y el análisis exhaustivo de una amplia gama de datos sobre las empresas, incluyendo balances, estados financieros, informes de reputación, la posición de la empresa en su industria y mercado, la calidad de la gestión y la política de dividendos. Sin embargo, un punto de referencia esencial en este campo es el modelo de Markowitz, propuesto en 1952 [150]. Este modelo simplifica el proceso al centrarse en la selección de inversiones basándose en el supuesto comportamiento racional del inversor, considerando el rendimiento de los activos como un proceso estocástico caracterizado por medidas estadísticas clave: la media, la varianza y la covarianza de las tasas de rendimiento [1].

Fundamentalmente, el inversor busca maximizar el beneficio de su cartera mientras minimiza simultáneamente los riesgos asociados. Sin embargo, estos dos objetivos son inherentemente conflictivos en la práctica. El modelo de Markowitz identifica la noción de una cartera eficiente como aquella que proporciona el mayor rendimiento posible para un riesgo dado, o, equivalentemente, la que exhibe el menor riesgo para un nivel de rentabilidad determinado [150]. La colección de todas estas carteras eficientes forma lo que se conoce como la frontera eficiente. Una vez que se conoce esta colección, los inversores pueden seleccionar la cartera que mejor se adapte a sus preferencias de riesgo. Una métrica que puede utilizarse para guiar esta selección es el índice de Sharpe, propuesto por William F. Sharpe en 1966 [188].

El índice de Sharpe es una medida bien conocida de la relación rendimiento/riesgo que evalúa la eficiencia financiera de las carteras de inversión. Se define como la relación entre el exceso de rentabilidad (la ganancia por encima de un activo libre de riesgo) y la desviación estándar de los rendimientos de la cartera, que representa el riesgo [1]. Un valor de índice de Sharpe más alto indica un mejor rendimiento ajustado al riesgo. Este índice tiene una interpretación geométrica útil; una cartera con un índice de Sharpe más alto domina (en el sentido de Pareto) a una con un índice más bajo si la primera tiene mayor rendimiento y menor riesgo. Esta propiedad sugiere que el índice de Sharpe puede ser empleado dentro de un optimizador multiobjetivo para guiar la búsqueda hacia la frontera de Pareto [56].

Aunque el modelo de Markowitz puede resolverse mediante programación cuadrática para obtener la

solución óptima dado un perfil de rentabilidad/riesgo específico del inversor, esto no siempre es factible si dicho perfil no se conoce a priori, o si se busca una estrategia más amplia. Además, la inclusión de restricciones adicionales, comunes en el mundo real, como las restricciones de cardinalidad (que limitan el número de activos en la cartera) o los lotes mínimos de transacción, transforma la tarea de optimización en un problema mucho más complejo. En este escenario, se requieren enfoques algorítmicos más potentes y flexibles [56].

Las metaheurísticas son técnicas idóneas para abordar este tipo de problemas complejos, ya que, aunque a menudo sacrifican las garantías de optimalidad, pueden ofrecer soluciones óptimas o casi óptimas de manera eficiente en costos. Un tipo particular de metaheurística que ha demostrado ser efectiva son los algoritmos meméticos (MAs). Los MAs son métodos que combinan de manera sinérgica componentes de búsqueda global y búsqueda local. Típicamente, la búsqueda global se logra mediante algoritmos evolutivos (EAs), mientras que la búsqueda local se realiza utilizando una metaheurística basada en trayectorias incrustada en el EA. Los algoritmos meméticos pueden considerarse una estrategia complementaria que se beneficia de la combinación de ideas algorítmicas existentes.

Esta investigación se centra en la implementación de diferentes técnicas para el desarrollo de algoritmos meméticos para la selección de carteras de inversión bajo el modelo de Markowitz Multiobjetivo y con restricciones de cardinalidad. La investigación considera este problema como una tarea de optimización multiobjetivo intrínseca, utilizando el índice de Sharpe no solo para evaluar la eficiencia financiera de las carteras generadas, sino también como un mecanismo central dentro del algoritmo para dar soluciones informadas.

La contribución principal de nuestra propuesta consiste en una **hibridación informada**, donde la combinación sinérgica de la variación poblacional (mediante un algoritmo evolutivo subyacente) se potencia con dos componentes de intensificación y mecanismos de hibridación que actúan tanto individual como colectivamente en un modelo cooperativo:

1. Un mecanismo de búsqueda local que utiliza el índice de Sharpe para enfocar la búsqueda en áreas relevantes del frente no dominado. Esto proporciona un objetivo claro para la búsqueda local, algo a menudo difícil en la optimización multiobjetivo, adaptando así la búsqueda a las especificidades financieras del problema.
2. La incorporación de una memoria de soluciones de élite, también basada en el índice de Sharpe, para proporcionar una intensificación adicional a la búsqueda. Esta memoria mantiene un registro de las soluciones más efectivas encontradas y se utiliza para guiar la búsqueda, por ejemplo, sustituyendo soluciones por debajo del promedio con soluciones de la memoria de élite con cierta probabilidad.

Como puede observarse, estos complementos heurísticos giran en torno al uso del índice de Sharpe, convirtiéndose este en un motor potente de conocimiento. Nuestras propuestas de hibridación utilizan un algoritmo evolutivo basado en indicadores de calidad (IBEA) como motor de búsqueda subyacente, seleccionado por su buen rendimiento en este dominio del problema [51]. La búsqueda local se implementa como un método de ascenso hacia la colina (hill-climbing), que muta las ponderaciones no nulas de una solución y acepta el cambio si mejora el índice de Sharpe [55]. La aplicación de la búsqueda local se realiza con una probabilidad determinada, utilizando un esquema de lamarkismo parcial [54] para equilibrar la exploración, la explotación y evitar esfuerzos computacionales improductivos.

Para validar el enfoque propuesto, se llevó a cabo una extensa experimentación utilizando datos del mercado de valores colombiano (BVC). El conjunto de datos consistió en los precios de cierre mensuales de veinte fondos de renta variable durante el período de 2010 a 2016. Se analizaron diferentes restricciones de cardinalidad (K 14, 16, 18, 20). La experimentación incluyó una fase de análisis de sensibilidad y de estudio de las diferentes variantes de hibridación para determinar la parametrización adecuada del MA final, particularmente en relación con la probabilidad de búsqueda local (PLS) y la probabilidad de uso de la memoria de élite (PEM) [53].

Posteriormente, nuestra propuesta con los parámetros que permiten la intervención de las diferentes variantes de hibridación se comparó con cinco algoritmos evolutivos multiobjetivo bien conocidos: NSGA-II, SPEA2, IBEA, SHV y HYPE. La evaluación del rendimiento se realizó desde una doble perspectiva: la calidad del frente de Pareto obtenido y la calidad de la cartera seleccionada de ese frente. Para evaluar la calidad del frente de Pareto, se utilizaron dos indicadores de rendimiento estándar: el indicador de hipervolumen (que mide la región dominada por el frente, buscando valores más altos) y el indicador de distancia generacional (GD) (que estima la proximidad a un frente de referencia, buscando valores más bajos). Para la calidad de la cartera seleccionada, se utilizó el índice de Sharpe.

Los resultados experimentales mostraron que aumentar la probabilidad de búsqueda local generalmente mejoraba el rendimiento en todos los indicadores, destacando los beneficios de una alta intensificación, especialmente para el índice de Sharpe. De manera similar, el uso de la memoria de élite, especialmente con altas probabilidades de uso de esta memoria, también mejoró significativamente el rendimiento en términos de índice de Sharpe, aunque con efectos contrarios en los indicadores de frente de Pareto como hipervolumen y distancia generacional. El análisis de la interacción entre la búsqueda local y la memoria de élite indicó que ciertas combinaciones de parámetros mostraban el juego sinérgico más efectivo para encontrar carteras eficientes riesgo/rendimiento [56].

En la comparación final con otros algoritmos, la configuración seleccionada del MA demostró ser el claro ganador en términos del índice de Sharpe, superando a los otros algoritmos con significatividad estadística en la mayoría de los casos. Esto valida la hipótesis central del trabajo: que la integración estratégica de mecanismos de intensificación guiados por el índice de Sharpe dentro de un framework memético es altamente efectiva para el problema de optimización de cartera con restricciones de cardinalidad. Los resultados también sugieren que el MA es capaz de encontrar buenas carteras de manera diversificada gracias al equilibrio entre exploración y explotación que proporcionan sus componentes [56].

En conclusión, la optimización de carteras es un escenario natural para los algoritmos evolutivos multiobjetivo, dada su formulación intrínseca y la flexibilidad de estas técnicas. La existencia de un indicador de eficiencia financiera como el índice de Sharpe es una característica particularmente útil, ya que sirve tanto para seleccionar una solución final como para guiar la búsqueda hacia áreas de interés financiero demostrando cómo una métrica del área específica puede ser estratégicamente integrada en el diseño algorítmico para mejorar significativamente la calidad y relevancia financiera de las soluciones encontradas. Nuestra propuesta, al explotar esta característica a través de su memoria de élite y búsqueda local basadas en Sharpe, demuestra ser superior a otras propuestas algorítmicas en el "*benchmark*" considerado. La sinergia efectiva entre estos componentes es clave para enfocar la búsqueda hacia carteras eficientes.

Como parte de esta investigación y para documentar el área de aplicación hemos desarrollado un marco metodológico para hacer una revisión exhaustiva del estado del arte realizando una clasificación de las palabras claves de la literatura en conjuntos relacionados mediante algoritmos de agrupamiento (trabajando en este caso sobre una matriz de distancia entre artículos obtenida a partir de la similitud léxica entre sus descriptores bibliográficos). En este estudio además, se analiza la estructura interna de estos grupos y se intenta encontrar un orden de revisión adecuado mediante el empleo de algoritmos evolutivos.

Esta investigación también señala caminos para investigaciones futuras, incluyendo la confirmación de estos hallazgos en otros conjuntos de datos y la exploración de modelos de algoritmos meméticos con poblaciones descentralizadas (modelos de islas) para añadir una capa adicional de balance entre diversificación e intensificación en este dominio multiobjetivo.



UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

INTRODUCCIÓN

Este capítulo se estructura de la siguiente forma: En la Sección 1.1 se describe la esencia del problema que deseamos abordar en este trabajo; en la Sección 1.2 se presentan los objetivos del trabajo; en la Sección 1.3 se describe la metodología utilizada; en la Sección 1.4 se presentan las contribuciones, y finalmente se presenta la distribución de la tesis.

1.1 El problema

Las Finanzas son una rama de la economía que estudia la obtención y gestión, por parte de una compañía, individuo o del Estado, de los fondos que necesita para sus objetivos y de los criterios con que dispone de sus activos [1] [187]. En otras palabras, estudia lo relativo a la obtención y gestión del dinero y de otros valores como títulos, bonos, etc. La llamada ola globalizadora; la internacionalización de la información ha dotado a la gerencia de herramientas modernas de gestión y organización, lo que permite de alguna manera la optimización de la utilización de un recurso imprescindible pero escaso como es el dinero. La presente investigación se enmarca en el estudio de los componentes que promueven una rentabilidad económica en términos aceptables (por encima de la inflación), incluyendo planteamiento de posibles escenarios de actuación de acuerdo a los probables ambientes de desenvolvimiento del Mercado Financiero, así como también, la necesidad de obtener una mejor diversificación del riesgo que es inherente y viene determinado por el grado de aversión que tiene cada inversionista [127]. Diversificar es usar un mecanismo mediante el cual no se *colocan los huevos en un mismo canasto*, es decir, se debe tratar de invertir en un conjunto de instrumentos financieros, cuya actividad económica redunde en algún beneficio, y en los cuales los ciclos económicos se comportan de manera distinta. En este contexto, la diversificación del riesgo se obtiene cuando se invierte en varios de estos instrumentos financieros a los cuales se les denomina, de forma general, cartera.

Existen en el área de gestión de instrumentos financieros toda una serie de elementos teóricos y estudios relacionados con la relación riesgo-rendimiento [123]. El potencial de rendimiento o pérdida de las inversiones no es estático, sino que depende siempre de la evolución del mercado. Esto quiere decir que no existe un óptimo estático para esta relación y que siempre el óptimo es una propuesta combinada que consiste básicamente en la minimización del riesgo y en la maximización del rendimiento. En la literatura se pueden encontrar diversas propuestas que modelan este escenario; por ejemplo desde su aparición, el modelo de Markowitz [150] se ha convertido en una referencia teórica fundamental para la selección de carteras de inversión. Sin embargo su aplicación en la práctica no ha sido tan extensa, debido, principalmente a la complejidad matemática del método. Por una parte, al ser un

modelo cuadrático paramétrico, el algoritmo de resolución era complejo; por otra parte el número de estimaciones de rentabilidades esperadas, varianzas y covarianzas a realizar es muy elevado.

El tema desarrollado por Markowitz, se refiere a la selección de inversiones, es decir, al problema de cómo asignar los recursos líquidos entre las diversas opciones disponibles para tal efecto. Antes de que se popularizara el enfoque de Markowitz, la selección de inversiones implicaba un costoso proceso de recopilación y procesamiento de información muy diversa acerca de las empresas emisoras de activos, fundamentalmente acciones. Esta información consistía, entre otras cosas, de balances y estados financieros, situación de la empresa dentro de la industria y de ésta dentro de la economía en su conjunto, calidad de la gestión de la empresa, políticas de dividendos, etc. El enfoque de Markowitz simplificó notablemente el problema de selección de inversiones al considerar los rendimientos de los activos como un proceso estocástico y centrarse exclusivamente en la estadística de los resultados de las empresas emisoras y, más específicamente, en tres parámetros básicos de estas estadísticas: media, varianza y covarianzas de las tasas de rendimiento de los activos.

Markowitz desarrolla su modelo sobre la base del comportamiento racional del inversor. Es decir, el inversor desea la rentabilidad y rechaza el riesgo. Por lo tanto, para él una cartera será eficiente si proporciona la máxima rentabilidad posible para un riesgo dado, o de forma equivalente, si presenta el menor riesgo posible para un nivel determinado de rentabilidad. El conjunto de carteras eficientes puede calcularse resolviendo la siguiente ecuación no lineal paramétrica, siendo R_p el conjunto de activos de la cartera p :

$$\min \delta^2(R_p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \delta_{ij} \quad (1.1)$$

Sujeto a:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n w_i E(R_i) = V^* \quad (1.2)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (1.3)$$

$$w_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3..n) \quad (1.4)$$

donde w_i es la proporción del presupuesto del inversor destinado al activo financiero i e incógnita del problema, $\delta^2(R_p)$, la varianza de la cartera p , y δ_{ij} , la covarianza entre los rendimientos de los valores i y j . Si $i = j$ $\delta_{ij}^2 = \delta_i^2$. $E(R_p)$, es la rentabilidad o rendimiento esperado de la cartera p , de tal forma que al variar el parámetro V^* obtendremos en cada caso, al resolver el programa, el conjunto de proporciones que minimizan el riesgo de la cartera, así como su valor correspondiente. El conjunto de pares $[E(R_p), \delta^2(R_p)]$ o combinaciones rentabilidad-riesgo de todas las carteras eficientes es denominado "frontera eficiente". Una vez conocida ésta, el inversor, de acuerdo con sus preferencias, elegirá su cartera óptima [227].

En todo caso, si sólo se consideran estas restricciones, el problema de optimización se resuelve mediante programación cuadrática lo cual no es nada novedoso. Si adicionalmente incluimos restricciones de cardinalidad (e.g., un máximo de K pesos es distinto de cero), el problema se complica enormemente y ya no puede ser abordado mediante técnicas exactas ni mediante técnicas de programación cuadráticas. Es en estos casos donde tiene sentido la aplicación de técnicas estocásticas o metaheurísticas [23] que pueden atacar de forma exitosa problemas combinatorios especialmente difíciles y que, aunque no analizan el espacio de búsqueda completo del problema (es decir, no

son técnicas exactas), sí que ahorran recursos computacionales importantes tales como el tiempo de computación, a la vez que proporcionan resultados óptimos o semi-óptimos.

Particularmente este trabajo de investigación se centra en las técnicas de computación evolutiva multiobjetivo [42], las cuales parecen ideales para *optimizar* la relación combinada riesgo-rendimiento. Más específicamente, resulta de interés el estudio de las distintas aportaciones efectuadas en relación con el análisis de la gestión y optimización de carteras de inversión, la discusión de las mismas y el desarrollo de un modelo para el análisis de este tipo de procesos, que posibilite la aplicación de técnicas para resolución de problemas relacionadas con el uso intensivo de estos algoritmos evolutivos multiobjetivos en sus diferentes expresiones. Algún trabajo previo ya se ha realizado en el área e.g., [140].

1.2 Objetivos

Uno de los principales desafíos de la administración de los recursos financieros es mantener la rentabilidad y la liquidez en épocas en las que el simple hecho de dejar los dineros depositados en un banco hace que ellos pierdan valor.

La presente investigación busca utilizar las herramientas computacionales como complemento de los modelos econométricos para optimizar carteras de inversión. El uso de técnicas de computación emergente y algoritmos evolutivos proporcionan mecanismos de resolución de problemas complejos determinados por el uso del modelo de Markowitz junto con restricciones sobre el número de activos a incluir en la cartera, cotas superiores e inferiores sobre los porcentajes de cada activo incluido en la cartera, además de otra medida de rendimiento que nos permite comparar, el cociente prima-riesgo de Sharpe que se usa para obtener información y de esta manera guiar al algoritmo para propender las mejores soluciones.

A lo largo del desarrollo de este trabajo de investigación se abordaron los siguientes objetivos:

1. Búsqueda bibliográfica de publicaciones y comunicaciones a congresos y revistas que abarquen el análisis de gestión de carteras de inversión, componentes, restricciones y aplicaciones.
2. Revisión y estudio de los métodos analíticos en el área metaheurística empleados por los distintos autores y acotación del rango de utilización de los mismos.
3. Elaboración de un modelo integrado que posibilite el estudio del comportamiento del proceso, utilizando técnicas de búsqueda de soluciones mediante algoritmos Híbridos.
4. Aplicación de las diferentes propuestas al problema y estudio de los diferentes espacios de soluciones generados por el uso de algoritmos de computación evolutiva.

1.3 Metodología

En este trabajo se realizarán estudios de las diferentes técnicas para la resolución de problemas económicos y financieros, específicamente el que plantea Markowitz [150] con su modelo de media-varianza complementado con alguna medida de performance para obtener soluciones informadas [120, 188, 200]. También se propone hacer comparaciones de las diferentes estrategias de resolución a través de algunas métricas conocidas en el área [42, 43, 45, 70, 87, 203, 225].

Se investigaron propuestas de algoritmos híbridos con el objetivo de buscar un posible espacio de soluciones para resolver este tipo de problemas. Estos algoritmos híbridos se compararon utilizando diferentes técnicas, métricas y enfoques estadísticos con otras estrategias de resolución para establecer su grado de eficiencia.

1.4 Contribuciones

En este apartado se listan las contribuciones que abordaremos en la investigación que vamos a realizar. Estas contribuciones se pueden resumir como sigue:

- Aplicación de metaheurísticas básicas a la resolución de los problemas objeto de estudio.
- Desarrollo de un modelo de hibridación basándonos en los algoritmos metaheurísticos abordados.
- Aplicación y validación empírica del rendimiento de los diferentes escenarios abordados en los problemas considerados.
- Estudio del comportamiento de los diferentes parámetros considerados, por medio de un análisis de sensibilidad de los mismos.
- Demostrar la validez de las técnicas metaheurísticas para abordar problemas económicos o financieros.
- Se han diseñado y desarrollado técnicas metaheurísticas que pueden considerarse el estado-del-arte de las metaheurísticas al resolver los problemas objeto de estudio de este trabajo de investigación.

La contribución central es la propuesta de un novedoso algoritmo memético multiobjetivo (MA) diseñado específicamente para abordar la selección de carteras de inversión con restricciones de cardinalidad en el contexto del modelo de Markowitz. Este MA, producto de diferentes estudios previos se distingue por una combinación híbrida innovadora de dos componentes de intensificación: la variación de población, que utiliza una memoria de élite, y la búsqueda local. A diferencia de otros enfoques que, a menudo, carecen de indicadores claros para guiar la búsqueda local o dependen de la dominancia de Pareto, este algoritmo integra el uso del índice de Sharpe como un indicador financiero específico del problema. El índice de Sharpe, que mide la relación rendimiento/riesgo, es utilizado para evaluar la eficiencia de las carteras y, crucialmente, para enfocar el proceso de búsqueda en las áreas más relevantes del frente no dominado, aquellas que ofrecen un mejor exceso de retorno por unidad de riesgo.

El uso del índice de Sharpe impregna ambos componentes heurísticos del MA. La memoria de élite utiliza este índice para mantener un registro de las soluciones más efectivas encontradas, sirviendo como un mecanismo de intensificación ajustable que, en ciertas condiciones, puede reemplazar soluciones de bajo rendimiento con individuos de la memoria de élite, redirigiendo la búsqueda hacia soluciones prometedoras. La búsqueda local, por su parte, emplea el conocimiento específico proporcionado por el índice de Sharpe para centrar la búsqueda global en las soluciones no dominadas más prometedoras del frente de Pareto. Este enfoque tiene el propósito fundamental de alinear el algoritmo con el proceso posterior de toma de decisiones del experto o inversor, al enfocar la búsqueda en las regiones del frente de Pareto que tienen mayor relevancia financiera desde la perspectiva del índice de Sharpe, en lugar de distribuir los esfuerzos de búsqueda de manera uniforme. El potencial del algoritmo propuesto se confirma mediante un análisis de sensibilidad y una comparación experimental con otros algoritmos evolutivos multiobjetivo, utilizando datos del mercado bursátil colombiano entre 2010 y 2016.

Además, se ha planeado un importante proceso de divulgación científica mediante la publicación en revistas y congresos especializados a nivel internacional.

1.5 Organización de la tesis

Este trabajo de tesis está conformado por cinco capítulos adicionales, por medio de los cuales se presenta el marco teórico relacionado con el campo de las metaheurísticas, las técnicas híbridas, la gestión de carteras de inversión, métricas de desempeño y los diferentes conceptos necesarios para introducir al lector en la comprensión del trabajo presentado. A continuación mostramos de forma más detallada el contenido de los capítulos:

- **Cap. 2:** Se centra en algunos conceptos básicos de los diferentes temas abordados en este trabajo, .
- **Cap. 3:** En este capítulo se realiza una propuesta metodológica para una revisión bibliográfica sistematizada, además de consolidar un cuerpo de antecedentes profuso en el tema de la investigación.
- **Cap. 4:** Se presenta un marco experimental y metodológico para la consolidación del núcleo evolutivo del presente trabajo de investigación: La implementación de varios mecanismos de hibridación de un Algoritmo Evolutivo Multiobjetivo (MOMA) como base para la Resolución del Problema de Selección de Carteras de Inversión utilizando Restricciones de Cardinalidad.
- **Cap. 5:** En este Capítulo se proporcionan los resultados de la experimentación con diferentes variantes de hibridación, detallando un conjunto fases de comparación con diferentes estados del arte para abordar el problema de selección de carteras de inversión con restricciones de cardinalidad.
- **Cap. 6:** Finalmente presentamos las conclusiones sobre todo el trabajo expuesto en el resto del documento, dando especial prioridad a las principales contribuciones que hemos conseguido en esta investigación, además de indicar posibles líneas de trabajo futuro a ser desarrollado.

BASES TEÓRICAS

Este capítulo presenta las bases teóricas que describen y fundamentan la investigación, a través del recorrido del presente capítulo se revisa la literatura científica existente en el área de interés. Inicialmente, se define la Optimización (2.1) como la ciencia dedicada a encontrar las mejores soluciones a problemas modelados de situaciones reales. Se introduce la Teoría General de Sistemas (TGS) como un enfoque para el modelamiento, y se exploran la Optimización Monobjetivo (2.2) y la Multiobjetivo (2.3), enfatizando la búsqueda de un conjunto de soluciones Pareto-óptimas cuando existen múltiples objetivos en conflicto. El texto profundiza en la Computación Evolutiva (CE) (2.8.2), inspirada en la evolución natural, que da origen a diversas Heurísticas (2.5) y Metaheurísticas (2.6) diseñadas para abordar problemas complejos donde los métodos exactos son inviables. Se describen métodos relevantes como Búsqueda Tabú (Tabu Search), Recocido Simulado (Simulated Annealing) y Algoritmos Genéticos. Un enfoque significativo recae en los Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo (AEMOs), discutiendo sus generaciones, el uso de elitismo y los indicadores de calidad para evaluar soluciones. Adicionalmente, este capítulo se centra en las Técnicas Híbridas (2.11), conocidas como Algoritmos Meméticos, que combinan enfoques evolutivos con búsqueda local y otros mecanismos algorítmicos. Finalmente, se introducen conceptos económicos y financieros fundamentales (2.12) como carteras de inversión, rentabilidad, riesgo (incluyendo el modelo de Markowitz) y el índice de Sharpe, que son relevantes para la aplicación de estas técnicas.

2.1 Optimización

La optimización es aquella ciencia que estudia las formas más expeditas de llegar a las mejores soluciones de un problema planteado por el modelado de una situación real. El problema de modelar empieza por el estudio de los elementos que interactúan en el sistema objeto de estudio. Existen ciertas teorías que definen de manera explícita la forma de abordar el modelamiento, se pueden mencionar:

Teoría General De Sistemas

La teoría general de sistemas (TGS) [14] no busca solucionar problemas o intentar soluciones prácticas, pero sí producir teorías y formulaciones conceptuales que pueden crear condiciones de aplicación en la realidad empírica. Los supuestos básicos de la TGS son:

1. Existe una nítida tendencia hacia la integración de diversas ciencias naturales y sociales.
2. Esa integración parece orientarse rumbo a una teoría de sistemas (TS).

3. Dicha teoría de sistemas puede ser una manera más amplia de estudiar los campos no-físicos del conocimiento científico, especialmente en ciencias sociales.
4. Con esa teoría de los sistemas, al desarrollar principios unificadores que atraviesan verticalmente los universos particulares de las diversas ciencias involucradas, nos aproximamos al objetivo de la unidad de la ciencia.
5. Esto puede generar una integración muy necesaria en la educación científica. La TGS afirma que las propiedades de los sistemas, no pueden ser descritos en términos de sus elementos separados; su comprensión se presenta cuando se estudian globalmente.

La TGS se fundamenta en tres premisas básicas:

1. Los sistemas por lo general están inmersos dentro de sistemas: cada sistema existe dentro de otro más grande.
2. Los sistemas son abiertos: es consecuencia del anterior. Cada sistema que se examine, excepto el menor o mayor, recibe y descarga algo en los otros sistemas, generalmente en los contiguos. Los sistemas abiertos se caracterizan por un proceso de cambio infinito con su entorno, que son los otros sistemas. Cuando el intercambio cesa, el sistema se desintegra, esto es, pierde sus fuentes de energía.
3. Las funciones de un sistema dependen de su estructura: para los sistemas biológicos y mecánicos esta afirmación es intuitiva. Los tejidos musculares por ejemplo, se contraen porque están constituidos por una estructura celular que permite contracciones. El interés de la TGS, son las características y parámetros que establece para todos los sistemas.

Aplicada a los problemas financieros y económicos la TS, se ve como una estructura que se reproduce y se visualiza a través de un sistema de toma de decisiones, tanto individual como colectivamente.

Desde un punto de vista histórico, se verifica que después de la segunda guerra mundial, a través de la teoría matemática se aplicó la investigación operacional, para la resolución de problemas grandes y complejos con muchas variables. La TS permite reconceptuar los fenómenos dentro de un enfoque global, para integrar asuntos que son, en la mayoría de las veces de naturaleza completamente diferente.

Según Bertalanffy [14], sistema es un conjunto de unidades recíprocamente relacionadas. De ahí se deducen dos conceptos:

- Propósito u objetivo: todo sistema tiene uno o algunos propósitos. Los elementos (u objetos), como también las relaciones, definen una distribución que trata siempre de alcanzar un objetivo.
- Globalismo o totalidad: un cambio en una de las unidades del sistema, con probabilidad producirá cambios en las otras. El efecto total se presenta como un ajuste a todo el sistema. Hay una relación de causa / efecto.

Una organización podrá ser entendida como un sistema o subsistema o un supersistema, dependiendo del enfoque. El sistema total es aquel representado por todos los componentes y relaciones necesarios para la realización de un objetivo, dado un cierto número de restricciones [14].

Esta visión de sistemas permite entender los mecanismos que se pueden usar para lograr los objetivos. Optimizar sus respuestas es parte integrante del conjunto que se pretende estudiar. Optimizar es buscar alguna solución que se distingue del espacio de soluciones posibles. Los problemas que se buscan resolver son entre otros según su función objetivo[14]:

1. Minimizar gastos.
2. Maximizar ganancias.
3. Minimizar riesgos.
4. Maximizar ocupación.
5. Minimizar energías.
6. Minimizar recursos.

Una representación clásica de sistema y las formas de abordar un estudio para optimizar son:

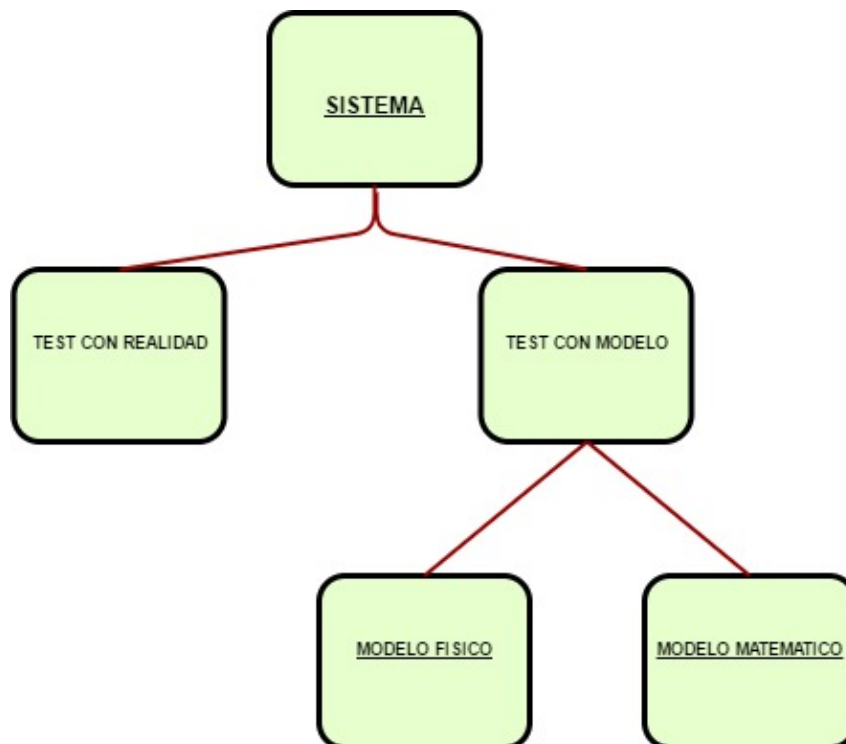


Figura 2.1: Representación clásica de sistema

Un modelo matemático proviene de un proceso de abstracción que permite una representación más simplificada de la realidad.

Los componentes básicos de cualquier modelo son [14]:

- Conjunto de variables.
- Interacciones o relaciones causa efecto.
- Restricciones.
- Función Objetivo o conjunto de Funciones Objetivo.

La forma de abordar el proceso de resolución planteado por el modelo matemático depende de una serie de características que lo definen:

1. Espacio de búsqueda (puede ser discreto o continuo)

2. Función Objetivo
 - (a) Ser discreta o continua.

 - (b) Total o parcial.

 - (c) Simple o compleja, sobre todo respecto a su evaluación explícita, implícita, experimental, derivable o no-derivable, estática o dinámica.

 - (d) Tiene que ser acotada:
 - i. Minimización
 - ii. Maximización.
 - iii. Restricciones.
 - iv. Solución factible.

La búsqueda de un espacio de soluciones óptimo se realiza de acuerdo a las siguientes premisas considerando el esfuerzo computacional:

- **Solución óptima local:** donde se parte de una solución inicial y se conforma con buscar algún mínimo local (cercano).

- **Solución óptima global:** donde se intenta encontrar la mejor solución entre todas las posibles soluciones . Problema principal de la optimización global: quedarse atrapado en un mínimo local (convergencia prematura). También se puede intentar mejorar soluciones ya encontradas o construir nuevas soluciones.

De acuerdo a la función objetivo y al conjunto de restricciones se pueden aplicar algunos métodos de optimización. Un intento de clasificación de los métodos de resolución [14]:

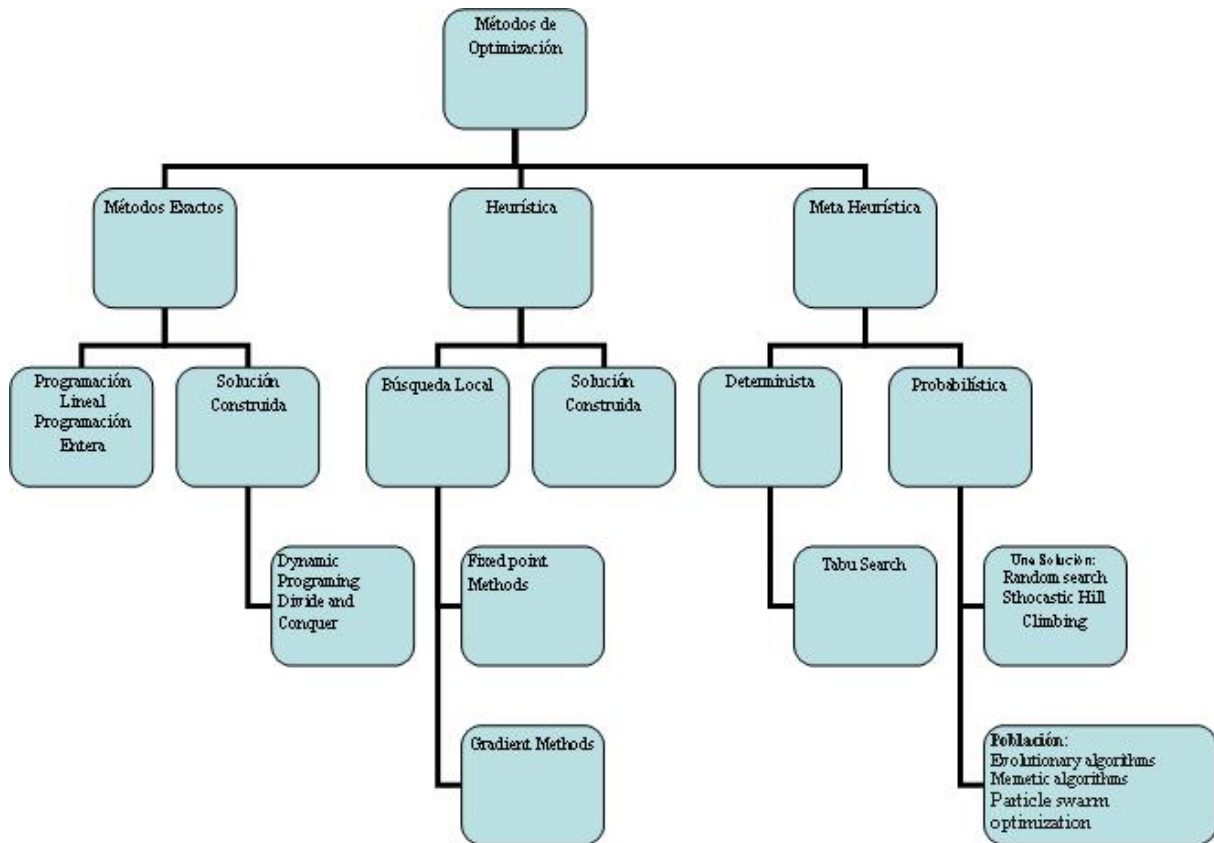


Figura 2.2: Métodos de Optimización

En la **Figura 2.2** se muestra una clasificación detallada de los métodos de optimización más utilizados. Los métodos exactos se completan con los denominados de solución construida [86] [162] además de los de búsqueda local, que básicamente trabajan sobre soluciones parciales del problema y que de alguna forma aíslan partes del espacio de búsqueda sin examinarlas.

Como alternativa a estos, una parte importante de los métodos Metaheurísticos han adquirido durante la última década una notable aceptación en diferentes campos de la ingeniería, economía, administración y salud. Esta investigación se basa en la aplicación de alguno de ellos.

Los métodos heurísticos probabilísticos son de interés principal en esta investigación, sobre todo los que corresponden a aquellos que utilizan una población como punto de partida para la búsqueda de una solución óptima.

2.2 Optimización monobjetivo

Un problema de optimización monobjetivo intenta dar respuesta a un tipo general de problemas de la forma:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.t. } x \in X \end{aligned} \quad (2.1)$$

Donde $x \in \mathbb{R}^n$ representa variables de decisión, $f(x)$ se denomina la *función objetivo* y es la encargada de medir la calidad de un conjunto de variables de decisión (normalmente números enteros o reales) y

$X \subset \mathbb{R}^n$ es el conjunto de restricciones de la región factible. En particular, si el subconjunto $X = \mathbb{R}^n$, tendremos un *problema de optimización sin restricciones*:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad (2.2)$$

Un *problema de optimización con restricciones* [168], puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ \text{s.t } c_i(x) &= 0, i \in E, \\ c_i(x) &\geq 0, i \in I \end{aligned} \quad (2.3)$$

Donde E, I representan, respectivamente, el conjunto de índices de las restricciones de igualdad y desigualdades, $c_i(x)$, ($i = 1, \dots, m \in E \cup I$) son las funciones que describen las restricciones. Si la función objetivo y las funciones de restricciones son lineales, este tipo de problemas es llamado *problema de programación lineal* [196].

Lo descrito anteriormente también aplica para los casos de maximización. Para la determinación de soluciones factibles debe cumplirse:

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (2.4)$$

A esta solución candidata se le denomina un *mínimo global*. Si esta propiedad solo se cumple para el conjunto de soluciones $\mathcal{N}_\epsilon(\bar{x})$ formado por aquellas soluciones x situadas a una distancia $\|x - \bar{x}\| < \epsilon$ de \bar{x} , se le llama *mínimo local*. Claramente un *mínimo global* es también un *mínimo local* [16]. Si consideramos maximizar la función, debemos invertir el símbolo de la desigualdad de la ecuación 2.4, definiendo de manera análoga un *máximo global* y un *máximo local*.

2.3 Optimización multiobjetivo

La mayoría de los problemas del mundo real tienen varias funciones objetivo [221]. Se trabaja sobre una solución a un solo objetivo de minimización o maximización, lo cual permite aplicar métodos de resolución de técnicas exactas. Esta opción simplificadora muchas veces puede afectar la validez de la solución. Cuando se requiere establecer más de una función objetivo estamos en presencia de un problema de optimización multiobjetivo .

Cuando se trata de cumplir con varias funciones objetivos cuyas características pudieran ser contradictorias entre si, al aplicar un algoritmo de optimización multiobjetivo se obtiene un conjunto de soluciones a las cuales se les denomina conjunto de pareto-óptimo [169].

2.4 Problema general de optimización multiobjetivo (POM)

Formalmente se define como: encontrar el vector $\vec{x}^* = [x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_n^*]^T$ que satisfaga las m restricciones de desigualdad:

$$g_i(\vec{x}) \leq 0; \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (2.5)$$

que satisfaga las p restricciones de igualdad:

$$h_i(\vec{x}) = 0; \quad i = 1, 2, 3, \dots, p \quad (2.6)$$

y que optimice la función vectorial:

$$\vec{f}(\vec{x}) = [f_1(\vec{x}_1), f_2(\vec{x}_2), \dots, f_k(\vec{x}_k)]^T \quad (2.7)$$

Es decir, se busca dentro de un conjunto F de valores que satisfacen a 2.5 y 2.6 al conjunto $x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_k^*$ que produzca los valores óptimos para todas las funciones objetivo.

Cada punto en \vec{x} representa una posible solución, y establece un punto en $\vec{f}(\vec{x})$ que evalúa la aptitud o calidad de la solución en términos de los valores de las funciones objetivo 2.7 [221].

Hay tres posibles POM:

- Minimizar todas las funciones objetivo.
- Maximizar todas las funciones objetivo.
- Minimizar algunas funciones objetivo y maximizar otras.

Por simplicidad normalmente todas las funciones son convertidas a una misma forma, a fin de minimizar o maximizar todas las funciones objetivo del problema.

Los vectores correspondientes a las soluciones incluidas en el conjunto de óptimos de Pareto se denominan *no dominados*. La gráfica de las funciones objetivo cuyos vectores están en el conjunto de óptimos de Pareto se denomina frente de Pareto.

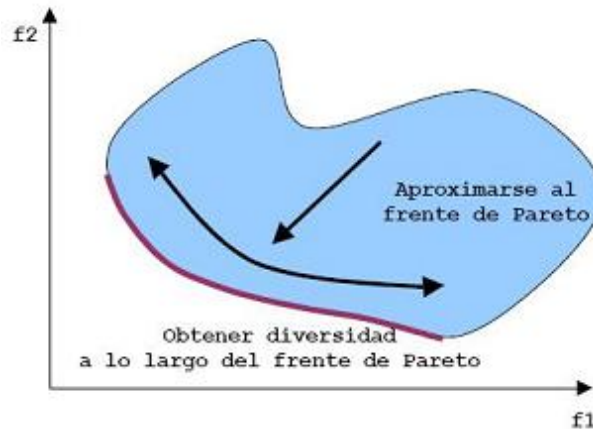


Figura 2.3: Propósitos de la optimización multiobjetivo (Fuente: [165])

En la **Figura 2.3** se tienen dos funciones objetivo que a partir del espacio de soluciones F establecen un conjunto de óptimos de Pareto cuyo frente de Pareto correspondiente se muestra como una línea gruesa.

2.5 Heurísticas

Una heurística es una técnica que busca soluciones buenas (idealmente, óptimas o cercanas al óptimo) a un costo computacional razonable, aunque sin garantizar factibilidad u optimalidad de las mismas. En

algunos casos, ni siquiera puede determinar qué tan cerca del óptimo se encuentra una solución factible en particular [177].

Los métodos heurísticos de búsqueda inspirados en el proceso de la evolución natural se proponen entonces como una alternativa a aquellos problemas donde existe dificultad para utilizar los procedimientos matemáticos tradicionales. Una ventaja de las soluciones computacionales, y en especial de la computación evolutiva, consiste en la flexibilidad de implementación a la solución de diversos problemas, sin requerir de modificaciones sustanciales al modelo general; su ventaja consiste en que requiere de un conocimiento mínimo de información acerca del problema a resolver, en contraposición a la necesidad de los métodos tradicionales, de un modelo matemático constituido por una función claramente definida y de la observancia de ciertas características para su uso.

El término *heurística*, proviene del vocablo griego *heuriskein*, que podría describirse como *encontrar, descubrir o hallar*. Según los registros históricos, este término fue utilizado por primera vez por el matemático George Polya en su libro *How to solve it* [172]. El autor quería expresar las reglas con las cuales las personas gestionan el *conocimiento común*, que pueden simplificarse como:

- (i) Buscar un problema parecido que ya haya sido resuelto.
- (ii) Determinar la técnica empleada para su resolución, así como las soluciones obtenidas.
- (iii) Si es posible, utilizar la técnica y solución descrita en el punto (ii) para resolver el nuevo problema planteado.

La razón principal para el uso de una heurísticas es que a menudo es difícil, si no imposible, obtener la solución óptima para un modelo matemático complejo que represente fielmente un problema del mundo real. Esto puede deberse a factores como una explosión combinatoria de variables de decisión, la dificultad para evaluar la función objetivo debido a variables estocásticas o aleatorias, o la necesidad de soluciones que cambian con el tiempo. Muchos problemas combinatorios importantes son NP-completos, y los algoritmos exactos para resolverlos requieren un número de pasos computacionales que crece exponencialmente con el tamaño del problema, haciéndolos poco abordables en la práctica [189].

Además, las heurísticas permiten el uso de modelos que son más representativos de la realidad, ya que no exigen las suposiciones restrictivas que a menudo requieren las rutinas de optimización exactas para encontrarles solución. Otras razones prácticas incluyen la facilidad de implementación y comprensión por parte de los tomadores de decisiones, que prefieren una solución entendible a una óptima incomprensible. También permiten obtener resultados rápidos cuando son necesarios y ofrecen robustez, siendo menos sensibles a las variaciones en las características del problema y la calidad de los datos que las soluciones óptimas, que pueden ser frágiles.

A continuación se describen varios enfoques fundamentales para desarrollar procedimientos heurísticos. Es importante notar que estas categorías no son mutuamente excluyentes y a menudo se combinan [189], [39].

- **Soluciones Generadas Aleatoriamente:** Consiste en generar soluciones factibles al azar, evaluarlas y elegir la mejor. Se puede determinar el número de ensayos para alcanzar una probabilidad deseada de que la mejor solución obtenida sea mejor que un porcentaje prescrito de todas las soluciones [189].
- **Descomposición / Partición del Problema:** Implica dividir un problema complejo en varios subproblemas, presumiblemente más fáciles de resolver. La partición puede ser por jerarquía de decisiones, por recursos principales o por tiempo cronológico. Los subproblemas pueden resolverse de forma independiente (coalesciendo las soluciones), secuencial (usando los resultados de una fase como entrada para la siguiente), o iterativa (resolviendo subproblemas repetidamente, a menudo con enfoques dinámicos) [189].

- **Métodos Inductivos:** Se basan en la generalización a partir de versiones más pequeñas o simples del mismo problema o de uno relacionado. Esto incluye el uso de la analogía y la derivación de información analizando casos con parámetros extremos [189].
- **Métodos que Reducen el Espacio de Soluciones:** Buscan disminuir drásticamente el número de soluciones consideradas con la esperanza de no afectar seriamente la calidad de la solución obtenida. Esto se puede lograr ajustando o introduciendo restricciones adicionales. Ejemplos incluyen el desarrollo de relaciones de regresión (como redes neuronales) a partir de soluciones óptimas de instancias pequeñas o la extracción de características comunes de soluciones óptimas observadas para especificar parcialmente la solución (extracción de características) [189].
- **Métodos de Aproximación:** Consisten en manipular el modelo matemático o utilizar la solución de un modelo más simple relacionado. Las posibilidades incluyen la **agregación de parámetros o variables** (reemplazando varios por uno agregado, o escalando unidades), la **modificación de la función objetivo** (aproximando funciones no lineales o usando una función de evaluación más simple), la **aproximación de distribuciones de probabilidad o procesos estocásticos** (usando valores medios, distribuciones analíticamente convenientes, aproximaciones discretas o escenarios representativos), y el **cambio o relajación de restricciones** (aproximando restricciones no lineales, ignorando o debilitando restricciones, o usando relajación Lagrangiana) [189].
- **Métodos Constructivos:** Construyen una solución paso a paso utilizando los datos del problema; la solución completa no se obtiene hasta el final del procedimiento. El método "**voraz**" (*greedy method*), que elige el elemento con el mejor beneficio inmediato en cada paso, es un ejemplo. Algunos métodos constructivos pueden incluir una característica de "**mirar hacia adelante**" (*look-ahead*) para estimar las consecuencias futuras de una elección actual [189].
- **Métodos de Mejora Local (Búsqueda en el Entorno):** Parten de una solución factible y evalúan soluciones en su "entorno". Si se encuentra una solución mejor, se convierte en la nueva solución actual y se repite el proceso hasta que no se puede encontrar mejora, alcanzando un óptimo local. El entorno $N(x,t)$ se define mediante transformaciones simples t . Un inconveniente fundamental es que solo garantizan un óptimo local, no el global [189].

2.6 Metaheurísticas

Las metaheurísticas son procedimientos heurísticos de nivel superior diseñados para guiar otros métodos y evitar quedarse atrapados en óptimos locales, además de reducir juiciosamente el espacio de búsqueda. Cada metaheurística tiene uno o más parámetros ajustables que requieren calibración. Pueden ser adecuados para procesamiento paralelo [189].

Se pueden encontrar revisiones de metaheurísticas en [4, 23, 94]. De las diferentes descripciones de metaheurísticas encontradas en la literatura se han mencionado ciertas propiedades fundamentales que permiten caracterizar a este tipo de métodos [39]:

- Las metaheurísticas son estrategias o plantillas generales que *guían* el proceso de búsqueda.
- El objetivo es una exploración del espacio de búsqueda eficiente para encontrar soluciones (casi) óptimas.
- Las metaheurísticas son algoritmos no exactos y generalmente son no deterministas.
- Pueden incorporar mecanismos para evitar las áreas del espacio de búsqueda no óptimas.
- El esquema básico de cualquier metaheurística es general y no depende del problema a resolver.
- Las metaheurísticas hacen uso del conocimiento del problema que se trata de resolver en forma de heurísticos específicos que son controlados por una estrategia de más alto nivel.

En la literatura existen diversas propuestas de clasificación de las metaheurísticas [39], según la perspectiva desde donde se les vea, por ejemplo, a través de criterios tales como, inspirados en la naturaleza o no, empleo de memoria, estructuras de vecindad, si se basan o no en poblaciones (conjunto de candidatos), en base a la naturaleza de la función objetivo, y otros criterios. Blum y Roli [23], propusieron una clasificación basada en las técnicas utilizadas por las metaheurísticas para encontrar posibles soluciones candidatas, en general, se establecen dos grandes grupos: *basadas en trayectoria* y *basadas en población*. Una visión general de algunas de las metaheurísticas existentes según los dos grandes grupos señalados se puede ver a continuación:

2.7 Metaheurísticas basadas en trayectorias

Son procedimientos heurísticos iterativos que generan y evalúan una sucesión de soluciones candidatas a lo largo del espacio de búsqueda, moviéndose generalmente de una solución actual a una mejor (o, en algunos casos, temporalmente peor) en su entorno, con el objetivo de encontrar soluciones de alta calidad [189].

Estos métodos se caracterizan por [189]:

- **Ser Iterativos:** Parten de una solución inicial y modifican esa solución paso a paso.
- **Explorar un Entorno (o Vecindario):** En cada iteración, consideran soluciones que están "cerca" de la solución actual en el espacio de búsqueda. La definición de este entorno es un aspecto clave.
- **Generar una Secuencia/Trayectoria:** El proceso de moverse de una solución actual a una nueva solución crea una secuencia o "trayectoria" de soluciones a través del espacio de búsqueda.
- **Orientación a la Mejora:** El objetivo principal es encontrar soluciones progresivamente mejores, aunque puedan permitirse movimientos a soluciones peores temporalmente para escapar de óptimos locales.

Los métodos que mejor ejemplifican este concepto de seguir una trayectoria de soluciones son:

2.7.1 Hill Climbing (HC)

Hill Climbing es el ejemplo más básico de un método que busca encontrar una solución de alta calidad mejorando iterativamente una solución actual dentro de su vecindario. El pseudocódigo correspondiente para la técnica HC se puede ver en el Algoritmo 1. Este método de búsqueda ha sido empleado con éxito en diferentes áreas como: Sistemas Biométricos [99], Mapas Topográficos [201] y Cifrado [26].

A continuación se muestra una descripción y características principales [189]:

- **Punto de Partida:** El proceso comienza con una **solución inicial factible**.
- **Exploración del Entorno:** En cada iteración, se **evalúan las soluciones factibles que se encuentran en el "entorno" o "vecindario" (*neighbourhood*) de la solución actual**. La definición de este "vecindario" mediante transformaciones simples es crucial.
- **Movimiento Hacia la Mejora:** Si se encuentra una solución en el entorno que sea **mejor** que la solución actual (en el caso de maximización, una que dé un valor más alto de la función objetivo), esa **solución mejor se convierte en la nueva solución actual**. El proceso se repite investigando el vecindario de esta nueva solución. Esto es conceptualmente como **subir una "colina" (hill) en el paisaje de soluciones** para alcanzar un pico local.
- **Criterio de Parada:** El proceso continúa **hasta que no se puede encontrar ninguna solución mejor en el entorno** de la solución actual.

- **Óptimo Local:** Cuando el proceso se detiene porque no hay soluciones mejores en el vecindario, la solución actual es un **óptimo local**.
- **Debilidad Fundamental:** La debilidad principal del Hill Climbing (y la búsqueda local en general) es que **solo garantiza encontrar un óptimo local**, el cual puede ser significativamente inferior al óptimo global. La solución alcanzada depende mucho de la solución inicial desde la que se comenzó la búsqueda.
- **Explotación/Intensificación:** Esta búsqueda focalizada en mejorar la solución actual dentro de su vecindario se denomina "**explotación**" (**exploitation**) o "**intensificación**" (**intensification**).
- **Necesidad de Exploración:** La limitación de quedarse atascado en óptimos locales es lo que motiva la necesidad de "**exploración**" (**exploration**) o "**diversificación**" (**diversification**) y, por lo tanto, el desarrollo de **metaheurísticas** como Tabu Search o Simulated Annealing, que añaden mecanismos para escapar de estos óptimos locales.

Algoritmo 1: Algoritmo Básico de Hill Climbing (Búsqueda de Mejora Local)

```

Entrada: Una solución inicial factible  $x_{inicial}$ 
Salida: Un óptimo local  $x_{local}$ 
// Inicialización
1  $xc \leftarrow x_{inicial}$  // Solución actual
2 mejora_encontrada  $\leftarrow$  Verdadero // Bandera para controlar el ciclo
// Ciclo principal de búsqueda
3 while mejora_encontrada do
4   mejora_encontrada  $\leftarrow$  Falso // Asumir que no hay mejora en esta iteración
5   mejor_vecino  $\leftarrow$  Null valor_mejor_vecino  $\leftarrow$   $-\infty$  // Para problemas de maximización;  $+\infty$ 
// para minimización
6    $\mathcal{N}(xc) \leftarrow$  Generar Vecindario de  $xc$  // Generar soluciones vecinas
// Evaluar vecinos para encontrar el mejor
7   foreach vecino in  $\mathcal{N}(xc)$  do
8     if Evaluar(vecino) > valor_mejor_vecino then
9       // Evaluar la función objetivo
10      valor_mejor_vecino  $\leftarrow$  Evaluar(vecino) mejor_vecino  $\leftarrow$  vecino
11    end
12  // Mover a la mejor solución si es una mejora estricta
13  if mejor_vecino  $\neq$  Null and valor_mejor_vecino > Evaluar( $xc$ ) then
14     $xc \leftarrow$  mejor_vecino // Mover solo si es una mejora
15    mejora_encontrada  $\leftarrow$  Verdadero // Se encontró una mejora, continuar el ciclo
16  end
// Si no se encontró un mejor vecino (o no fue estrictamente mejor), el ciclo terminará
17 return  $xc$  // La solución actual es un óptimo local

```

2.7.2 Tabu Search (TS)

El término Búsqueda Tabú (**Tabu Search**, TS) fue introducido en 1986 por Fred Glover en el mismo artículo que introdujo el término metaheurística [93]. Los principios fundamentales de la búsqueda fueron elaborados en una serie de trabajos a finales de los 80's y principios de los años 90, que fueron luego unificados en el libro "Tabu Search" en 1998 [96]. El destacado éxito de la búsqueda tabú para resolver problemas de optimización difíciles, principalmente aquellos que han surgido en aplicaciones reales, ha permitido una explosión de nuevos usos durante los últimos años, que aparecen resumidas en [95].

Comienza con una solución factible y explora vecindarios, permitiendo movimientos hacia soluciones peores para escapar de óptimos locales. Utiliza una "**lista tabú**" para evitar regresar a soluciones visitadas recientemente por un cierto número de iteraciones (el tamaño de la lista). Puede incluir **criterios de aspiración** para anular el estado tabú si se encuentra una solución mejor que la mejor hasta la fecha. Aunque en su forma básica es determinista, existen variantes probabilísticas y mejoras

para manejar funciones objetivo difíciles de evaluar (incluyendo la presencia de ruido) y restricciones (usando funciones de penalización). También puede usar memoria basada en frecuencia para intensificar o diversificar la búsqueda.

El método TS ha sido empleado en diferentes áreas, como por ejemplo, la alineación de múltiples secuencias [178], generación de mapas [207], simulaciones [73], planificación de transporte [212], juegos [198], entre otras.

A continuación se muestra una descripción y características principales [189]:

- **Punto de Partida:** El método comienza con una **solución inicial completa y factible**, que a menudo puede obtenerse a través de una heurística constructiva.
- **Búsqueda Iterativa en el Entorno:** De manera similar a los métodos de mejora local (Búsqueda en el Entorno), **Tabu Search genera iterativamente soluciones adicionales a partir de una secuencia de vecindarios**.
- **Permisos de Movimientos Inferiores:** A diferencia de la búsqueda local simple (como Hill Climbing), Tabu Search **permite movimientos a vecinos con soluciones inferiores** para escapar de un óptimo local.
- **Mecanismo Tabú (Lista Tabú):** Utiliza un mecanismo que **impide el regreso a soluciones visitadas recientemente**. Esto se logra manteniendo las soluciones recientes (o atributos de soluciones) en una **lista tabú**. Esta lista **impide que ciertas soluciones se repitan durante un cierto número de iteraciones**. El tamaño (o longitud) de esta lista es un **parámetro controlable clave** de la metaheurística.
- **Criterio de Aspiración:** El estado tabú de un movimiento **puede anularse (override)** mediante el uso de un **criterio de aspiración**. La versión más simple (para un problema de maximización) es: si el movimiento conduce a una solución x con $f(x) > f(x^*)$, donde x^* es la mejor solución encontrada hasta la fecha, entonces el movimiento es permitido. Existen versiones más sofisticadas de criterios de aspiración.
- **Registro de la Mejor Solución:** Se mantiene un registro de la **mejor solución encontrada hasta la fecha**, x^* , y el valor de su función objetivo $f(x^*)$.
- **Criterio de Parada:** Típicamente, el procedimiento se termina después de un **número total prescrito de iteraciones** o si **no se logra mejora en un número especificado de iteraciones consecutivas**.
- **Determinismo Básico:** En su forma básica, Tabu Search, a diferencia de Simulated Annealing o los algoritmos evolutivos, **no incluye elementos aleatorios**, una vez dada la solución inicial. Sin embargo, existen mejoras que incluyen selección probabilística de candidatos.
- **Parámetros Controlables:** El método tiene varios parámetros ajustables, incluyendo el tamaño de la lista tabú (y cómo ajustarlo dinámicamente), cuándo diversificar, pesos para las funciones de penalización de restricciones, etc.
- **Mejoras:** Existen una amplia variedad de mejoras, como la gestión de funciones objetivo difíciles de evaluar (ej. con elementos aleatorios), el manejo de restricciones (mediante funciones de penalización), variaciones en el mecanismo tabú, memoria a largo plazo basada en frecuencia para intensificación y diversificación, y aplicaciones a variables continuas.

El pseudocódigo para el método de Búsqueda Tabú se puede ver en el Algoritmo 2.

Algoritmo 2: Algoritmo Básico de Tabu Search

Entrada: Solución inicial factible $x_{inicial}$
Parámetros: Tamaño de la lista tabú L_{tabu} , Máximo número de iteraciones $MaxIter$
Salida: La mejor solución encontrada x^*

```

// Inicialización
1  $xc \leftarrow x_{inicial}$  // Solución actual
2  $x^* \leftarrow xc$  // Mejor solución encontrada hasta ahora
3  $TabuList \leftarrow \emptyset$  // Lista para almacenar atributos de movimientos tabú
4  $iter \leftarrow 0$  // Contador de iteraciones
// Ciclo principal de búsqueda
5 while  $iter < MaxIter$  do
6    $\mathcal{N}(xc) \leftarrow$  Generar Vecindario de  $xc$  // Generar soluciones vecinas
7    $mejor\_vecino\_admisible \leftarrow$  Null  $valor\_mejor\_vecino \leftarrow -\infty$  // Para problemas de
      maximización;  $+\infty$  para minimización
8    $movimiento\_elegido \leftarrow$  Null // Evaluar vecinos y seleccionar el mejor admisible
9   foreach  $vecino$  in  $\mathcal{N}(xc)$  do
10     $mov \leftarrow$  Atributos del movimiento de  $xc$  a  $vecino$   $es\_tabu \leftarrow (mov \in TabuList)$ 
       $cumple\_aspiracion \leftarrow (Evaluar(vecino) > Evaluar(x^*))$  // Criterio de aspiración
11    if  $\neg es\_tabu$  or  $cumple\_aspiracion$  then
12      // Movimiento es admisible
13      if  $Evaluar(vecino) > valor\_mejor\_vecino$  then
14        // Mejor vecino admisible encontrado hasta ahora
15         $valor\_mejor\_vecino \leftarrow Evaluar(vecino)$   $mejor\_vecino\_admisible \leftarrow vecino$ 
16         $movimiento\_elegido \leftarrow mov$ 
17      end
18    end
19  end
// Mover a la mejor solución admisible y actualizar
20 if  $mejor\_vecino\_admisible \neq$  Null then
21   // Se encontró al menos un movimiento admisible
22    $xc \leftarrow mejor\_vecino\_admisible$  // Mover a la nueva solución actual
23   Añadir  $movimiento\_elegido$  a  $TabuList$  if  $|TabuList| > L_{tabu}$  then
24     Eliminar el movimiento más antiguo de  $TabuList$ 
25   end
26   if  $Evaluar(xc) > Evaluar(x^*)$  then
27     // Actualizar la mejor solución global
28      $x^* \leftarrow xc$ 
29   end
30 end
31 else
32   // No se encontraron movimientos admisibles en el vecindario
33   // Puede indicar estancamiento o necesidad de diversificación avanzada
34   // En este pseudocódigo básico, simplemente continuamos
35 end
36  $iter \leftarrow iter + 1$  // Incrementar contador de iteraciones
37 end
38 return  $x^*$  // Retornar la mejor solución encontrada

```

2.7.3 Simulated Annealing (SA)

El Simulated Annealing es una metaheurística ampliamente utilizada, cuyo objetivo principal es permitir al algoritmo escapar de los óptimos locales. Se basa en una analogía con el proceso físico del recocido, donde un material se calienta a un estado líquido y luego se enfría lentamente hasta cristalizar en una estructura de baja energía. Existen varios parámetros controlables, como la secuencia de temperaturas y el criterio de parada [189].

Algunas de las áreas donde ha sido aplicado el algoritmo SA involucra la estructuración de rutas en circuitos impresos (VLSI Acrónimo en inglés de *Very Large Scale Integration*) [36], en software (para la predicción de la calidad) [27], problemas de planificación [2], entre otros.

Este método comparte ciertas similitudes con otras metaheurísticas como la Búsqueda Tabú:

- Ambos inician con una solución inicial factible y completa.
- Ambos generan iterativamente soluciones a partir de vecindarios.
- Ambos pueden evaluar soluciones candidatas de forma exacta o aproximada.
- Ambos mantienen un registro de la mejor solución encontrada hasta el momento.
- Ambos requieren un mecanismo de terminación (por ejemplo, un número máximo de iteraciones).

Sin embargo, la diferencia clave reside en el mecanismo para abandonar los óptimos locales. A diferencia de los enfoques más deterministas, el Simulated Annealing emplea un dispositivo probabilístico. Permite la aceptación de movimientos a soluciones vecinas que son inferiores (es decir, con peor valor de función objetivo, por ejemplo, menor en maximización).

Para un problema de maximización, la probabilidad de aceptar una solución vecina x que es inferior a la solución actual xc ($f(x) < f(xc)$) está dada por la fórmula:

$$P_{aceptacion} = \exp\left(\frac{f(x) - f(xc)}{KT}\right)$$

Donde $f(xc)$ es el valor de la función objetivo de la solución actual, $f(x)$ es el valor de la función objetivo de la solución vecina, y KT es un parámetro crucial conocido como temperatura [189]. Esta fórmula implica que la probabilidad de aceptar una solución inferior disminuye a medida que la diferencia de rendimiento $f(xc) - f(x)$ (que es positiva para una solución peor en maximización) aumenta, o a medida que la temperatura KT disminuye.

La temperatura se reduce gradualmente a lo largo del tiempo, siguiendo un "programa de enfriamiento" (*annealing schedule*). Una técnica común es mantener la temperatura T fija durante un número determinado de iteraciones, y luego multiplicarla por un factor de enfriamiento ϕ ($0 < \phi < 1$) para el siguiente bloque de iteraciones, y repetir el proceso ($T, T\phi, T\phi^2, \dots$) [64].

Temperaturas más altas al inicio del proceso facilitan la diversificación (una mayor disposición a aceptar movimientos que empeoran la solución actual), lo que ayuda a explorar ampliamente el espacio de búsqueda y escapar de óptimos locales tempranos. A medida que la temperatura disminuye en etapas posteriores, la probabilidad de aceptar soluciones inferiores se reduce significativamente, haciendo que el método se comporte de manera similar a una búsqueda de mejora local, enfocándose en la intensificación alrededor de las mejores áreas encontradas.

Es posible implementar un control dinámico de la temperatura, incluso aumentándola temporalmente si el procedimiento parece estancarse en una región. Una vez que el algoritmo termina, se recomienda a

menudo aplicar una búsqueda local adicional sobre la mejor solución encontrada para asegurar que esta es al menos un óptimo local [64].

Los parámetros controlables clave en *Simulated Annealing* incluyen la definición del programa de enfriamiento (como la temperatura inicial y el factor de decaimiento ϕ) y el criterio de parada.

El pseudocódigo para este tipo de técnica se puede ver en el algoritmo 3. Una forma de determinar la temperatura inicial es muestrear el espacio de búsqueda con una ruta aleatoria y evaluar de forma genérica el promedio y la varianza de la función objetivo, pero existen diversos esquemas más sofisticados como los mostrados en [114].

Algoritmo 3: Pseudocódigo del Algoritmo Simulated Annealing

Entrada: Problema de optimización (función objetivo f), Espacio de búsqueda de soluciones, Función para generar vecinos $N(x)$, Temperatura inicial $T_{inicial}$, Programa de enfriamiento (ej., factor de decaimiento $\phi \in (0, 1)$), Criterio de parada (ej., número máximo de iteraciones o temperatura mínima).

Salida: La mejor solución encontrada x_{mejor} .

```

// Inicialización Seleccionar una solución inicial factible  $x_c$ ;
 $x_{mejor} \leftarrow x_c$ ;
 $KT \leftarrow T_{inicial}$ ;
Establecer el programa de enfriamiento y el criterio de parada;

1 while No se cumpla el criterio de terminación do
    // Bucle de temperatura (puede ser por iteraciones fijas o dinámico)
2   for cada iteración a la temperatura actual  $KT$  do
3     Generar una solución vecina  $x_v$  de  $x_c$  usando  $N(x_c)$ ;
4     Calcular la diferencia de rendimiento  $\Delta f \leftarrow f(x_v) - f(x_c)$ ;
    // Para maximización
5     if  $\Delta f \geq 0$  then
6        $x_c \leftarrow x_v$ ;
        // Aceptar solución mejor o igual
7     end
8     else
        // Solución vecina es peor ( $\Delta f < 0$ )
9       Calcular probabilidad de aceptación  $P_{aceptacion} \leftarrow \exp\left(\frac{\Delta f}{KT}\right)$ ;
10      Generar un número aleatorio  $r \in [0, 1)$ ;
11      if  $r < P_{aceptacion}$  then
12         $x_c \leftarrow x_v$ ;
        // Aceptar solución peor con probabilidad
13      end
14    end
15    if  $f(x_c) > f(x_{mejor})$  then
        // Asumiendo maximización
16       $x_{mejor} \leftarrow x_c$ ;
        // Actualizar la mejor solución encontrada
17    end
18  end
19  Reducir la temperatura  $KT$  según el programa de enfriamiento .
20 end
21 return  $x_{mejor}$  // Retornar la mejor solución encontrada
// Post-procesamiento opcional: Aplicar búsqueda local a  $x_{mejor}$ 

```

2.7.4 Enfoques constructivos multi-inicio (Técnica de razonamiento adaptativo (ART))

Repiten procedimientos constructivos varias veces, a menudo desde diferentes puntos de partida o introduciendo elementos de elección aleatoria. El **greedy randomized adaptive search procedure** (GRASP) es un ejemplo, donde se elige aleatoriamente entre los elementos más voraces. La **Técnica de Razonamiento Adaptativo (ART)** utiliza memoria para aprender de soluciones anteriores y modificar el mecanismo de elección, imponiendo restricciones para evitar malas decisiones observadas. [149]

2.8 Metaheurísticas basadas en población

También se les puede llamar búsqueda basadas en grupos, en la cual se sustituye la solución actual que recorre el espacio de soluciones, por un grupo de soluciones que realizan intercambio de características entre ellas al momento de la realización del recorrido. Además de los diferentes movimientos que pueden ser aplicados a las soluciones candidatas que integran este conjunto, al cual podemos llamarlo grupo (también, población de búsqueda), se requiere considerar otros operadores para obtener nuevas soluciones a partir de las generadas previamente. Las estrategias de búsquedas poblacionales en el que el conjunto está definido por características generales afines y estas se van amoldando a un ambiente que las rodea, lo que las dota de capacidades únicas de supervivencia a través de mecanismos evolutivos.

2.8.1 Historia de la teoría evolutiva

A finales del siglo XVIII y principios del XIX la ciencia había acumulado suficiente evidencia que explicaba el tipo de conexión que las especies guardaban entre sí, por lo cual se hizo innegable que las especies no siempre habían subsistido de la misma forma y con idénticas características. Se sabía que ciertas especies que habían existido en el pasado ahora estaban extintas; también se planteó la posibilidad de que otras especies que existen en el presente antes no existían.

Algunos de los investigadores de esa época que aseveraron que las formas de vida cambiaban con el tiempo fueron: George Louis Leclerc (1707-1788) (**Figura: 2.4**); Erasmus Darwin (1731-1802); Jean Baptiste, Chevalier de Lamarck (1744-1829) (**Figura: 2.5**) y George Cuvier (1769-1832).

Georges Louis Leclerc (Conde de Buffon) fue tal vez el primero en especular (100 años antes que Darwin) en su *Histoire Naturelle*, que las especies se originaron entre sí. Leclerc no solo notó las similitudes entre el hombre y los simios, sino que incluso habla sobre un posible ancestro común entre estas dos especies [43]. Leclerc creía en los cambios orgánicos, pero no describió un mecanismo coherente que fuera responsable de efectuarlos.



Figura 2.4: George Louis Leclerc (1707-1788).

Fuente: Dominio Público



Figura 2.5: Jean Baptiste, Chevalier de Lamarck (1744-1829). Fuente: Dominio Público

A diferencia de Leclerc, Jean Baptiste, Chevalier de Lamarck sí explicó un mecanismo responsable de los cambios en las especies, un cambio en el ambiente produce cambios en las necesidades de los organismos, lo que hace que, en consecuencia, estos cambien su comportamiento.

Estos cambios de comportamiento conducen al mayor uso (o al desuso) de ciertos órganos o estructuras corporales de un individuo, los cuales harían que dichos órganos o estructuras crezcan (ante un mayor uso) o se reduzcan (ante el menor uso) con el paso de las generaciones. Además, Lamarck creía que estos cambios eran hereditarios, lo que implicaba que los organismos se van adaptando gradualmente a su ambiente [43].



Figura 2.6: Erasmus Darwin (1731-1802). Fuente: Dominio Público

Sin embargo, las ideas de Lamarck no fueron muy populares en su época, y sólo sirvieron para desacreditarlo con sus contemporáneos, incluyendo a su mentor Leclerc. Curiosamente, varias de las ideas de Lamarck fueron re-descubiertas (de forma independiente) por Erasmus Darwin (**Figura: 2.6**) (el abuelo de Charles Darwin) en su libro Zoonomia, que data de 1794. Tal vez a ello se deba que Charles Darwin haya sido uno de los pocos naturalistas en defender las ideas de Lamarck, a pesar de que estas se oponían a su propia teoría evolutiva.

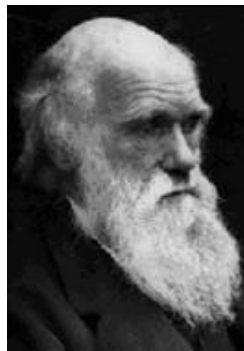


Figura 2.7: Charles Darwin (1809-1882). Fuente: Dominio Público

El salto conceptual más importante en la vida de Charles Darwin (1809-1882) (**Figura: 2.7**) fue comprender que toda población consiste de individuos ligeramente distintos unos de otros, lo que supone aceptar que las especies cambian con el tiempo y que proceden unas de otras. Las variaciones que existen entre los individuos hacen que cada uno tenga distintas capacidades para adaptarse al medio natural, reproducirse exitosamente y transmitir sus rasgos a su descendencia.

Al paso de las generaciones, los rasgos de los individuos que mejor se adaptaron a las condiciones naturales se vuelven más comunes y la población evoluciona (descendencia con modificación). Y especialmente, Darwin encontró una explicación verosímil de la causa de este cambio con su teoría de que el medio ambiente selecciona estadísticamente como reproductores a los individuos de cada especie que son más aptos para vivir en él [112].

Darwin se percató de que una especie que no sufriera cambios se volvería incompatible con su ambiente, ya que este tiende a cambiar con el tiempo. Asimismo, las similitudes entre hijos y padres observada en la naturaleza, le sugirieron a Darwin que ciertas características de las especies eran hereditarias, y que de generación a generación ocurrían cambios cuya principal motivación era hacer a los nuevos individuos más aptos para sobrevivir [43].

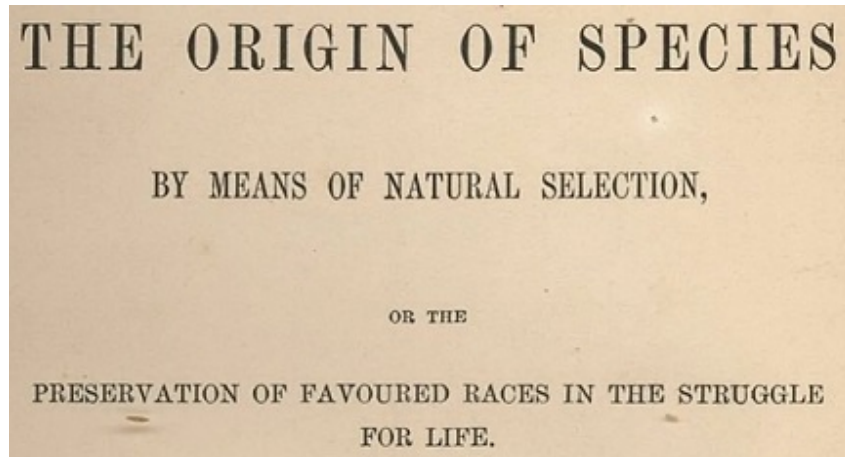


Figura 2.8: Fragmento de portada de la primera edición del libro "El origen de las especies". Fuente: Dominio Público

Los principales argumentos de *El Origen de las Especies por la Selección Natural* (Figura: 2.8), que se publicó en 1859 [170] son:

1. Los tipos biológicos o especies no tienen una existencia fija ni estática sino que se encuentran en cambio constante.
2. La vida se manifiesta como una lucha constante por la existencia y la supervivencia.
3. La lucha por la supervivencia provoca que los organismos que menos se adaptan a un medio natural específico desaparezcan y permite que los mejores adaptados se reproduzcan. A este proceso se le llama *selección natural*.
4. La selección natural, el desarrollo y la evolución requieren de un enorme período de tiempo, tan largo que en una vida humana no se pueden apreciar estos fenómenos.
5. Las variaciones genéticas que producen el incremento de probabilidades de supervivencia son azarosas y no son provocadas ni por Dios (como pensaban los religiosos) ni por la tendencia de los organismos a buscar la perfección (como proponía Lamarck)

Otros aportes importantes a la teoría evolutiva fueron los de Friedrich Leopold August Weismann (1834-1914) (Figura: 2.9) y Gregor Mendel (1822-1884) (Figura: 2.10). Weismann formuló en el siglo XIX una teoría denominada del *germoplasma*, según la cual el cuerpo se divide en células germinales (o germoplasma) que pueden transmitir información hereditaria y en células somáticas (o somatoplasma), que no pueden hacerlo. La selección natural (Seleccionismo) es el único mecanismo que puede cambiar al germoplasma (hoy denominado *genotipo*) y que este junto con el ambiente pueden hacer variar al somatoplasma (hoy conocido como *fenotipo*) [43].

Mendel, por su parte, descubrió sus famosas leyes de la distribución estadística de caracteres hereditarios, como resultado del cruce de plantas durante sucesivas generaciones de individuos que

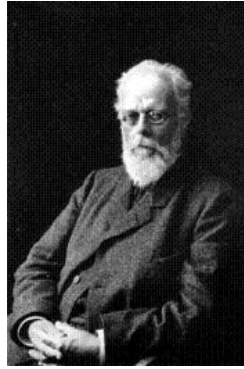


Figura 2.9: Friedrich Leopold August Weismann (1834-1914). Fuente: Dominio Público



Figura 2.10: Gregor Mendel (1822-1884). Fuente: Dominio Público

portaban inicialmente en estado puro dichos caracteres (genes y cromosomas), explicando con ello la variabilidad de los individuos. Concluyó que no existen mezclas de genes como se creía hasta entonces, sino que sólo se combinan en la reproducción conservando su individualidad a través de las generaciones.

La teoría evolutiva propuesta originalmente por Charles Darwin en combinación con el seleccionismo de August Weismann y la genética de Gregor Mendel, se conoce como el paradigma Neo-Darwiniano [88].

El neo-darwinismo establece que la historia de la vasta mayoría de la vida en nuestro planeta puede ser explicada a través de unos cuantos procesos estadísticos que actúan en y dentro de las poblaciones y especies: la reproducción, la mutación, la competencia y la selección [88].

Esencialmente, la síntesis moderna (Neo-Darwinismo) introdujo la conexión entre dos descubrimientos importantes: la unidad de la evolución (los genes) con el mecanismo de la evolución (la selección).

De acuerdo con la síntesis moderna establecida en los años 30 y 40, la variación genética de las poblaciones surge por azar mediante la mutación (ahora se sabe que está causada por errores en la replicación del ADN) y la recombinación (la mezcla de los cromosomas homólogos durante la meiosis). La evolución consiste básicamente en los cambios en la frecuencia de los alelos entre las generaciones, como resultado de la deriva genética, el flujo genético y la selección natural. La especiación ocurre gradualmente cuando las poblaciones están aisladas reproductivamente, por ejemplo por barreras geográficas [88].

La Síntesis moderna estableció la selección natural como el mecanismo principal del cambio evolutivo. Todos los seres vivos están compuestos de células formadas por cromosomas, que son los responsables de la transmisión genética. Un cromosoma es una larga molécula de ADN (*ácido*

desoxirribonucleico), constituida por cuatro distintos compuestos más simples llamados *nucleótidos*. Cada subcadena de tres nucleótidos codifica un aminoácido diferente, los que al unirse forman una proteína; al conjunto de nucleótidos que codifican una proteína completa se le llama *gene* [88]. El gen codifica una función específica y sólo puede ocupar un cierto lugar dentro del cromosoma. El valor que posee un gen determinado se le llama *alelo*.

El conjunto de todos los cromosomas, es decir, toda la información genética de un individuo se llama *genoma* y el conjunto de genes contenidos en el genoma *genotipo*, siendo éste el que determina, en buena medida, el *fenotipo* del individuo.

El *individuo* es el elemento básico de una población, de forma tal que una población es un conjunto de individuos capaces de relacionarse e interactuar juntos. Un *individuo* se desarrolla dentro de un cierto ambiente y este último a su vez actúa sobre el individuo, alterando su capacidad de adaptación y por ende de sobrevivencia al medio, que se conoce como aptitud. Con base en la aptitud de cada individuo, el proceso de selección determinará cuales son los individuos que se reproducirán para dar lugar a nuevas generaciones [88].

2.8.2 Computación evolutiva

Desde los años 1930s [47], algunos investigadores comenzaron a ver el proceso de evolución de las especies como un proceso de aprendizaje, mediante el cual la naturaleza dota a las especies de diferentes mecanismos, buscando hacerlas más aptas para sobrevivir. Partiendo de estos preceptos no resulta entonces difícil percatarse de que pueden desarrollarse algoritmos que traten de resolver problemas de búsqueda y optimización guiados por el principio de la "supervivencia del más apto" que postulara Charles Darwin en su famosa (y controversial) teoría de la evolución de las especies. El término *computación evolutiva* o *algoritmos evolutivos* engloba una serie de técnicas inspiradas en los principios de la teoría Neo-Darwiniana de la evolución natural.

A este conjunto de algoritmos inspirados biológicamente [43] se les engloba dentro del término computación evolutiva o algoritmos evolutivos y contienen una serie de elementos que se describen a continuación:

1. **Codificar las estructuras que se replicarán** (o sea, una estructura de datos que se utilice para almacenar a un "individuo").
2. **Operaciones que afecten a los "individuos"** (típicamente, se usa cruce y mutación).
3. **Una función de aptitud** que nos indique qué tan buena es una solución con respecto a las demás.
4. **Un mecanismo de selección** que implemente el principio de "supervivencia del más apto" de la teoría de Darwin.
5. **Un procedimiento de reemplazo.**

Aunque hoy en día es cada vez más difícil distinguir las diferencias entre los distintos tipos de algoritmos evolutivos existentes [47], por razones sobre todo históricas, suele hablarse de cuatro áreas principales:

- Programación Evolutiva
- Estrategias Evolutivas
- Algoritmos Genéticos
- Programación Genética.

2.8.2.1 Programación evolutiva (PE)

Lawrence J. Fogel y otros concibieron el uso de la evolución simulada en la solución de problemas (sobre todo de predicción) [184]. Su técnica, denominada *Programación Evolutiva* consistía básicamente en hacer evolucionar autómatas de estados finitos, los cuales eran expuestos a una serie de símbolos de entrada (el ambiente), y se esperaba que, eventualmente, serían capaces de predecir las secuencias futuras de símbolos que recibirían. Fogel utilizó una función de "pago" que indicaba qué tan bueno era un cierto autómata para predecir un símbolo, y usó un operador modelado en la mutación para efectuar cambios en las transiciones y en los estados de los autómatas que tenderían a hacerlos más aptos para predecir secuencias de símbolos [43].

Posiblemente esta técnica evolutiva fue la primera en aplicarse a problemas de predicción. Al mismo tiempo, con la PE se utilizó por vez primera una representación con codificación de longitud variable, ya que el número de estados de los autómatas variaba como resultado de la mutación.

2.8.2.2 Estrategias evolutivas (EA)

Como estudiantes de postgrado en la Universidad Técnica de Berlín, en Alemania, Peter Bienert, Ingo Rechenberg y Hans-Paul Schwefel estudiaban la mecánica de los fluidos en 1963 con un particular énfasis en la experimentación en un túnel de viento. Los problemas que les interesaban eran de carácter hidrodinámico, y consistían en la optimización de la forma de un tubo curvo, la minimización del arrastre de una placa de unión y la optimización estructural de una boquilla intermitente de dos fases. Debido a la imposibilidad de describir y resolver estos problemas de optimización analíticamente o usando métodos tradicionales como el del gradiente, Ingo Rechenberg decidió desarrollar un método de ajustes discretos aleatorios inspirado en el mecanismo de mutación que ocurre en la naturaleza. Los resultados iniciales de esta técnica, a la que denominaron "estrategia evolutiva", fueron presentados al Instituto de Hidrodinámica de su universidad el 12 de junio de 1964 [43].

2.8.2.3 Algoritmos evolutivos (o genéticos)

Los Algoritmos Genéticos (AG) fueron introducidos por John Holland en 1970 [109] inspirándose en el proceso observado en la evolución natural de los seres vivos.

Son algoritmos de búsqueda basados en la mecánica de la selección natural y de la genética natural. Estos combinan la supervivencia de los individuos más aptos entre las cadenas de estructuras con un intercambio de información aleatorio para formar un algoritmo de búsqueda.

Estos algoritmos trabajan con una **población** de soluciones que evolucionan a lo largo de iteraciones. La "**aptitud**" (*fitness*) de cada solución se evalúa, se **seleccionan** soluciones para la siguiente generación (a menudo basado en la aptitud), y se crean nuevas soluciones mediante "**variaciones**" como **mutación** (cambios individuales en los "genes") y **cruce** (*crossover*) (combinación de partes de dos soluciones "padres") [97], [195]. Otros aspectos incluyen la representación de la solución (ej. vector de 0-1, ordenamiento), la población inicial, y el criterio de parada. Existen numerosos parámetros controlables (tamaño de la población, probabilidades de mutación/cruce, etc.) y mejoras para manejar restricciones y variables continuas [98].

Principales Operadores Genéticos:

1. Procedimiento de Selección (P')

- **Propósito:** Elegir individuos de la población existente para reproducirse y generar más copias (descendencia) [97], [195].

- **Base:** La probabilidad de supervivencia depende del valor de la función objetivo (aptitud) del individuo. En problemas de minimización, los individuos con baja aptitud tienen más probabilidades de sobrevivir y reproducirse, mientras que los individuos con alta aptitud son fácilmente eliminados. En problemas de maximización, se prefieren los individuos con mayor aptitud [67].
- **Principal Objetivo:** Guiar el algoritmo hacia áreas prometedoras donde la probabilidad de encontrar la mejor solución es mayor, manteniendo al mismo tiempo la diversidad de la población para evitar la convergencia prematura a óptimos locales [67].
- **Proceso:** Los individuos se clasifican según su aptitud, y se selecciona un porcentaje (N_{keep}) para formar un subconjunto de posibles padres [67].
- **Métodos Principales:**
 - **Selección de Ruleta:** (*Roulette Wheel Selection*) [13]. Un cromosoma con mayor aptitud será seleccionado más veces [13]. La selección se basa en la idoneidad relativa de los individuos para el problema de optimización. Se visualiza como una ruleta donde cada individuo ocupa un sector proporcional a su aptitud.
 - **Selección por Torneo** (*Tournament Selection*): Realiza una competición por torneo entre individuos (posiblemente seleccionados al azar). El ganador es el individuo con la menor aptitud para problemas de minimización o la mayor para problemas de maximización. El ganador se copia a la nueva población y el proceso se repite hasta alcanzar el tamaño deseado de la población. Existe la selección por torneo determinista que selecciona al mejor individuo en cada torneo [191].
 - **Selección Elitista** (*Elitism Selection*): Los mejores individuos se copian a la nueva población. Un enfoque es reemplazar el individuo más débil de la población actual por el más apto de la población precedente inmediata [191].

2. Procedimiento de Cruce (P'')

- **Propósito:** Crear nuevos individuos (descendencia) a partir de dos individuos existentes (padres) [191].
- **Principal Objetivo:** Recombinar las características de los padres durante la reproducción, permitiendo que la siguiente generación herede características. La recombinación de buenas características puede producir descendencia "mejor adaptada", aunque no siempre [191].
- **Métodos Principales (similares para representación binaria o continua):**
 - **Cruce de un Punto** (*One-point Crossover*): El AG tradicional utiliza este método. Se elige aleatoriamente un punto de cruce. Todo antes de este punto se copia del primer padre y todo después del punto se copia del segundo padre para crear la descendencia 1. Se invierte el proceso para la descendencia 2 [191].
 - **Cruce de Dos Puntos** (*Two-point Crossover*): Se eligen dos puntos de cruce aleatorios [191], [67].
 - **Cruce Uniforme** (*Uniform Crossover*): Sigue una máscara binaria generada aleatoriamente del mismo tamaño que los individuos. Cada gen en la descendencia se crea copiando el gen correspondiente de uno u otro padre según lo determine la máscara. Para la descendencia 2, se invierten las posiciones de los padres [191].

3. Procedimiento de Mutación (P''')

- **Propósito:** Diversificar la población existente, permitir la búsqueda en áreas prometedoras y evitar la convergencia prematura en óptimos locales [191].

- **Principal Objetivo:** En el AG básico, se fija una tasa de probabilidad de mutación para todas las generaciones. Esta tasa es un porcentaje de los individuos que serán mutados. La tasa de mutación debe ser pequeña, de lo contrario, el AG se convertiría en una búsqueda aleatoria [191].
- **Métodos Principales (dependiendo de la representación (Binaria o Real)):**
 - **Mutación por Volteo para Individuos Discretos (*Flipping Mutation*):** Se selecciona un individuo y se cambia un bit (de 0 a 1 o de 1 a 0) según una mutación individual generada aleatoriamente [191].
 - **Mutación por Intercambio para Individuos Discretos (*Interchanging Mutation*):** Se eligen dos posiciones aleatorias en la cadena y se intercambian los bits correspondientes a esas posiciones [191].
 - **Mutación para Individuos Continuos (*Mutation for Continuous Individuals*):** Se elige una tasa de mutación para determinar cuántos individuos serán mutados [191].

4. Otros Conceptos Relevantes

- **Criterios de Parada:** Son cruciales para saber cuándo detener el algoritmo. Algunos criterios comunes incluyen: la distancia entre soluciones óptimas sucesivas, un número máximo definido de generaciones, un límite de tiempo o un número máximo de evaluaciones de la función. Una nueva propuesta de criterio de parada se basa en el análisis de la evolución de la población en una fase tardía del proceso, considerando la desviación estándar y la amplitud de la población [191].

Secuencia Operativa Clásica de los Algoritmos Genéticos General:

1. Generar la población inicial
2. Repetir
 - (a) Aplicar un operador de selección a los individuos de la población
 - (b) Aplicar el operador genético de recombinación a los individuos de la población
 - (c) Aplicar el operador genético de mutación a los individuos de la población
3. Hasta que se cumpla una condición de parada.

Sus características clave incluyen [98],[21] :

- **Población de Individuos:** Operan sobre un conjunto de soluciones potenciales, referidas como individuos, en lugar de una única solución.
- **Proceso Iterativo (Generaciones):** La evolución se lleva a cabo a través de generaciones sucesivas, donde la población se modifica en cada paso temporal.
- **Función de Aptitud (*Fitness*):** La calidad o "aptitud" de cada individuo es evaluada por una función, que guía el proceso de selección.
- **Selección:** Este operador favorece a los individuos con mayor aptitud, dándoles una mayor probabilidad de ser elegidos para "reproducirse" y pasar a la siguiente generación. Esto impulsa la "explotación" de las mejores soluciones encontradas.

- **Recombinación (Cruce y Mutación):** Estos operadores modifican el "material genético" (representación de la solución) de los individuos seleccionados para crear nuevas soluciones. El cruce combina partes de dos o más individuos, mientras que la mutación introduce cambios aleatorios. Estos operadores facilitan la "exploración" del espacio de búsqueda.
- **Equilibrio Exploración-Explotación:** El éxito del algoritmo depende del balance adecuado entre la tendencia de la selección a converger hacia las mejores soluciones actuales (explotación) y la capacidad de la recombinación para descubrir nuevas áreas del espacio de búsqueda (exploración).
- **Modelo de Nacimiento, Vida y Muerte:** El proceso general simula el ciclo vital de los individuos dentro de la población a lo largo del tiempo.

El pseudocódigo para un algoritmo genético básico [98] se muestra en el Algoritmo 4.

Este tipo de algoritmos ha sido empleado en un variado número de problemas, entre los cuales podemos mencionar: Damage detection in structural elements [183], Substitution box (S-box), [206] y The minimizing potential energy function [199].

Algoritmo 4: Algoritmo Genético General

Entrada: Definición del problema a optimizar.

Parámetros: Tamaño de la población (N), Probabilidades de operadores (ej. cruce p_c , mutación p_m), Criterio de parada (ej. número máximo de generaciones, aptitud objetivo), Función de Aptitud f .

Salida: Una o más soluciones (individuos) candidatas al problema encontrado(s).

```

1 begin
2   Inicializar Población  $P(0)$  aleatoriamente ; // Opera sobre una población de individuos.
3   Evaluar Aptitud de cada individuo en  $P(0)$  utilizando la función  $f$  ; // La función de
   aptitud mide la calidad de cada solución.
4    $t \leftarrow 0$  ; // Generación inicial.
5   while CriterioDeTerminacion NO satisfecho do
   ; // Proceso iterativo por generaciones.
6   Seleccionar individuos de  $P(t)$  para formar la población intermedia  $P'(t)$  (típicamente
   tamaño  $N$ ) ; // La selección prepara individuos para la reproducción. Favorece a
   los individuos más aptos (mayor  $f$ ). Ejemplos: Torneo, Ranking, Proporcional.
7   Crear Nueva Generación  $P(t + 1)$  mediante Recombinación de individuos de  $P'(t)$ 
   /* La recombinación (Cruce y Mutación) crea nuevos individuos para la siguiente
   generación. Cruce: combina material genético; Mutación: introduce cambios
   aleatorios. */
8   Evaluar Aptitud de cada individuo en  $P(t + 1)$ 
9    $t \leftarrow t + 1$  ; // Avanzar a la siguiente generación.
10  end
11  return Mejor(es) individuo(s) encontrado(s) en todas las generaciones
12 end

```

2.8.2.4 Programación genética (PG)

Esta técnica fue creada por John Koza a finales de los años ochenta, culminando con la publicación de su libro titulado *Genetic Programming: On the Programming of Computers by Means of Natural Selection* [131].

Koza propuso, por medio de esta extensión de lo que originalmente es un algoritmo genético, un método para la evolución de estructuras más complejas como son estructuras de programas de

computadoras, es decir, los cromosomas (estructuras de datos) que sufren la adaptación, son en sí mismos programas de computador. Se usan operadores genéticos especializados que generalizan la recombinación sexual y la mutación, para los programas de computador estructurados en árbol que están bajo adaptación.

El espacio de búsqueda en la PG es el espacio de todos los posibles programas de computador compuestos de funciones y terminales apropiados al dominio del problema. Las funciones pueden ser operaciones aritméticas, operaciones de programación, funciones matemáticas, funciones lógicas, o funciones específicas del dominio.

Algoritmo General:

1. Crear al azar una población de P programas compuestos por los símbolos de los conjuntos de funciones y terminales.
2. Repetir
 - (a) Ejecutar cada programa de la población y obtener su aptitud.
 - (b) Seleccionar los individuos de la población de forma proporcional a su aptitud.
 - (c) Crear nuevos individuos (programas) mediante la aplicación de los siguientes operadores genéticos con probabilidades específicas.
 - i. Reproducción: copiar el individuo seleccionado en la nueva población.
 - ii. Cruce: crear nuevos individuos a partir de los progenitores seleccionados.
 - iii. Mutación: crear un nuevo individuo mediante la modificación al azar de una parte del programa.
 - (d) Reemplazar Individuos de acuerdo a el criterio escogido (Elitismo, Mejor Fitness, etc.).
3. Hasta que se cumpla una condición de parada.

2.9 Algoritmos evolutivos multiobjetivos (AEMO)

La mayoría de los problemas de optimización en el mundo real tienen naturalmente **varios objetivos que deben alcanzarse**, y estos objetivos suelen estar en conflicto entre sí [42]. Aunque a veces se simplifican tratando los objetivos adicionales como restricciones, la naturaleza multiobjetivo es inherente de la condición de nuestra existencia [42]. Un Problema de Optimización Multiobjetivo (POM) (Ver 2.4) general busca optimizar un vector de funciones objetivo sujeto a restricciones de desigualdad e igualdad [186]. En MOPs, se buscan **múltiples soluciones** en lugar de una única solución óptima global [186]. La noción de óptimo más común es el **Óptimo de Pareto** [169], generalizado por Vilfredo Pareto [169]. Una solución es **Pareto óptima** si no existe otra solución factible que mejore un objetivo sin empeorar al menos otro [217]. Esto usualmente resulta en un **conjunto de soluciones**, el **conjunto óptimo de Pareto**, cuyas imágenes en el espacio de objetivos forman el **frente de Pareto** [186], [169].

Los problemas financieros se basan en eventos y hechos sucedidos en el mundo real. Por ello su modelación y administración definen una gran cantidad de variables, de las cuales es imposible manejar todas ellas; además, aún manipulando todas ellas, el modelo no representará completamente a la realidad, debido a aspectos de capacidad para registrar toda la secuencia histórica de las variables y su relación entre las mismas.

Tradicionalmente, la optimización multiobjetivo se ha abordado con **técnicas de programación matemática** [42]. Existen más de 30 de estas técnicas [42]. Sin embargo, tienden a generar los elementos del conjunto óptimo de Pareto **uno a la vez**, lo que requiere múltiples ejecuciones para aproximar el frente

de Pareto [42], [217]. Además, muchas de ellas son muy **sensibles a la forma del frente de Pareto** (por ejemplo, no funcionan bien cuando el frente es cóncavo) [42].

Los Algoritmos Evolutivos parecen particularmente adecuados para resolver problemas de optimización multiobjetivo [42]. Su principal ventaja es que, al trabajar con una población, pueden **encontrar simultáneamente varios miembros del conjunto de Pareto óptimo en una sola ejecución** [42], [186]. Esto es una diferencia clave con las técnicas tradicionales que requieren series de ejecuciones separadas [87]. Además, los AEs son **menos susceptibles a la forma o continuidad del frente de Pareto**, pudiendo manejar fácilmente frentes discontinuos o cóncavos [42].

El potencial de los AEs en optimización multiobjetivo fue sugerido en la década de 1960 por Rosenberg en su tesis doctoral, aunque no implementó un algoritmo multiobjetivo como tal [42]. La **primera implementación real** fue producida a mediados de la década de 1980 por Schaffer con el **Vector Evaluated Genetic Algorithm (VEGA)** [186]. El campo experimentó un crecimiento significativo a partir de mediados de la década de 1990 [42].

El diseño de AEMOs implica dos objetivos fundamentales: guiar la búsqueda hacia el **Frente de Pareto** y mantener una **diversidad** de soluciones no dominadas encontradas [217], [42]. Los aspectos clave en el diseño de AEMOs incluyen la **asignación de aptitud** (fitness), la **preservación de la diversidad** y el **elitismo** [217].

A continuación, se presenta un esquema general [217] de un Algoritmo Evolutivo Multiobjetivo (AEMO) típico:

Algoritmo General AEMO:

1. Inicialización de la Población:

- Generar una población inicial P_0 de N individuos (soluciones candidatas) de forma aleatoria o mediante alguna heurística.
- Cada individuo $i \in P_0$ está representado por un vector de variables de decisión \mathbf{x}_i y tiene asociado un vector de objetivos $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) = (f_1(\mathbf{x}_i), f_2(\mathbf{x}_i), \dots, f_m(\mathbf{x}_i))$, donde m es el número de objetivos.

2. Evaluación de la Población:

- Para cada individuo \mathbf{x}_i en la población actual P_t , evaluar los valores de cada función objetivo $f_j(\mathbf{x}_i)$ para $j = 1, 2, \dots, m$.

3. Asignación de Aptitud y Preservación de la Diversidad:

- Asignar una aptitud a cada individuo basada en los conceptos de dominancia de Pareto [169]. Las soluciones no dominadas generalmente reciben una mejor aptitud.
- Implementar mecanismos para mantener la diversidad en la población y promover la exploración del espacio de búsqueda. Esto puede incluir técnicas como el *niching*, el *crowding distance* o el uso de un archivo externo para almacenar soluciones no dominadas encontradas hasta el momento.

4. Selección:

- En la generación t seleccionar individuos de la población actual P_t (y posiblemente del archivo externo, si se utiliza) para formar una población de padres P'_t basada en su aptitud y/o su contribución a la diversidad.

5. Operadores de Variación:

- Aplicar operadores de variación genética (como cruce o recombinación y mutación) a la población de padres P'_t para generar una nueva población de descendientes Q_t .

6. Selección (o Reemplazo):

- Combinar la población actual P_t con la población de descendientes Q_t (y posiblemente el archivo externo).
- Seleccionar los N mejores individuos de esta combinación para formar la nueva población P_{t+1} para la siguiente generación. Esta selección se basa en la dominancia de Pareto y los criterios de diversidad. El archivo externo se actualiza con las soluciones no dominadas encontradas.

7. Criterio de Parada:

- Verificar si se cumple alguna condición de Parada (por ejemplo, un número máximo de generaciones, un cierto nivel de convergencia o un número máximo de evaluaciones de la función objetivo).
- Si la condición de parada se cumple, el algoritmo finaliza y el conjunto de soluciones no dominadas encontradas en la última población (y/o en el archivo externo) se considera la aproximación del frente de Pareto.
- Si la condición de parada no se cumple, regresar al paso 2 para la siguiente generación ($t = t + 1$).

Este esquema general proporciona una visión de alto nivel de cómo funciona un AEMO. Los detalles específicos de cada paso (especialmente la asignación de aptitud y la preservación de la diversidad, la selección y la selección ambiental) son los que diferencian a los distintos algoritmos evolutivos multiobjetivo [186], [42].

2.9.1 Algoritmos evolutivos multiobjetivos basados en dominancia

La asignación de aptitud en los AEMOs a menudo se basa en el concepto de **dominancia de Pareto** [217], [42], a diferencia de los métodos de agregación [42]. Se pueden usar diferentes enfoques como el **rango de dominancia** (cuántos individuos dominan a uno), la **profundidad de dominancia** (a qué frente no dominado pertenece) o el **conteo de dominancia** (a cuántos individuos domina uno) [42]. Algoritmos como MOGA, NSGA y SPEA/SPEA2 utilizan estos conceptos [217], [137], [113], [69].

Mantener la **diversidad** es necesario para evitar que el algoritmo converja a una única solución debido al ruido estocástico [42]. Técnicas como el **fitness sharing** (compartición de aptitud) [217] han sido propuestas para esto, basándose en la similitud entre individuos en el espacio de parámetros (fenotípico) o de genes (genotípico) [217]. Requiere una métrica de distancia (comúnmente en el espacio de objetivos) [217] y un parámetro σ_{share} [42].

El **Elitismo** aborda el problema de perder buenas soluciones por efectos aleatorios [69]. Consiste en **retener las mejores soluciones** (no dominadas) encontradas hasta el momento [69]. Se puede implementar combinando la población actual y la descendencia para la selección [42], [69], o manteniendo un **archivo externo** (o población secundaria) donde se copian las soluciones prometedoras [217], [42], [69]. El uso del elitismo se considera **necesario para garantizar la convergencia** de un AEMO al verdadero frente de Pareto [42].

Las técnicas de AEMO pueden clasificarse en varias categorías [217], [42]:

- **Técnicas No Basadas en Pareto:** No incorporan directamente la dominancia de Pareto [42]. Incluyen Combinación Lineal de Pesos, VEGA, Ordenamiento Lexicográfico, Método ϵ -constraint

y Satisfacción de Metas [186], [217], [42]. Suelen ser eficientes pero limitadas a pocos objetivos y pueden tener dificultades con frentes cóncavos [217], [42].

- **Técnicas Basadas en Pareto y No Elitistas:** Usan jerarquización o selección basada en no dominancia. Ejemplos son la Jerarquización de Pareto, MOGA, NSGA, NPGA [34], [69]. Requieren mecanismos para mantener la diversidad [42], [69].
- **Métodos Basados en Pareto y Elitistas:** Incorporan el elitismo [42], [217]. Ejemplos notables son SPEA, SPEA2, NSGA-II, PAES [222], [217], [69].
- **Métodos Basados en Indicadores de Calidad:** Estos algoritmos optimizan directamente un indicador de desempeño de conjunto o de calidad, como el hipervolumen [219] o una métrica basada en distancia [105], [224], para evaluar y comparar las soluciones. Buscan maximizar el valor de un indicador específico IBEA (Indicator-Based Evolutionary Algorithm) [218], el algoritmo orientado a hipervolumen basado en muestreo (SHV) y el algoritmo de estimación de hipervolumen para optimización multiobjetivo (HYPE) propuestos por Bader y Zitzler [11]. .

Como se mencionó anteriormente, la primera implementación de un algoritmo evolutivo multiobjetivo (AEMO) fue hecha por Schaffer [186] en los ochenta con el *Vector Evaluated Genetic Algorithm* (VEGA) que no incorporaba directamente la dominancia de Pareto. A partir de ahí se inicia la primera generación de AEMO que se caracterizan por el uso de mecanismos de selección basados en el concepto de optimalidad a través de la dominancia de Pareto. Los algoritmos más representativos de esta primera generación fueron: el *Nondominated Sorting Genetic Algorithm* (NSGA) de 1994 [194], que usa una división de la población en *capas* dependiendo de su dominancia, y *sharing*² para mantener la diversidad; cada capa recibe un *fitness* que es proporcional al tamaño a la población. El *Niched-Pareto Genetic Algorithm* (NPGA) [119], que usa un sistema de selección mediante torneo basado en la dominancia Pareto, pero en vez de tener sólo dos individuos para comparar, usa hasta el 10% de la población en cada comparación. Cuando hay un empate, se usa *sharing* para resolverlo y el *Multi-Objective Genetic Algorithm* (MOGA) de 1993 [87], que considera como *fitness* de un individuo la inversa del número de individuos en la población por los cuales es dominado; el *fitness* obtenido se linealiza por interpolación, de forma que todos los individuos con un rango determinado tengan el mismo *fitness*. Para que se produzca un reparto uniforme en el frente de Pareto, se usa la técnica denominada *sharing*, aplicada sobre los valores reales de la función de evaluación.

La segunda generación de los algoritmos evolutivos multiobjetivo se desarrolló bajo la implementación del mecanismo denominado *elitismo* que es un proceso por el cual determinados elementos con una adaptación especialmente buena tienen determinados privilegios (nunca mueren), o se utilizan para reproducirlos con individuos al azar.

Los principales algoritmos de esta segunda generación son:

1. El *Strength Pareto Evolutionary Algorithm* (SPEA) de 1999 [220], trata de integrar diferentes técnicas: usa un archivo de soluciones no dominadas, y para cada uno de ellos, se calcula una fuerza, que es similar al ranking en MOGA, porque es proporcional al número de soluciones que domina; usa una técnica de clustering para mantener la diversidad.
2. El *Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2* (SPEA2) de 2001 [222], una versión revisada de SPEA y con la cual tiene varias diferencias [44]: SPEA2 fue diseñado para eliminar las debilidades potenciales de su predecesor SPEA e incorporar resultados recientes para crear un AEMO potente [222]. Las principales diferencias radican en la **asignación de aptitud** mejorada y un nuevo método de **truncamiento del archivo** [222].

²Indica que tan similar es un cromosoma al resto de la población. La puntuación de cada individuo se dividirá por esta función que comparte características, de forma que se facilita la diversidad genética y la aparición de individuos diferentes.

Para evitar que individuos dominados por los mismos miembros del archivo A_t tengan valores de aptitud idénticos (una debilidad de SPEA [44]), SPEA2 considera tanto las soluciones que dominan a un individuo como las que son dominadas por él [222]. La aptitud se basa en una combinación del **valor de fortaleza**, la **aptitud cruda** y una **estimación de densidad** [44], [222]:

- El **valor de fortaleza** $S(i)$ de un individuo i es el número de soluciones que domina en la unión de la población y el archivo ($P_t + A_t$). (P_t : (Tamaño: M); A_t : (Tamaño: N)) [222].
- La **aptitud** $R(i)$ de un individuo i se calcula sumando los valores de fortaleza de todos los individuos (en $P_t + A_t$) que dominan a i [222]. Una aptitud de 0 corresponde a un individuo no dominado. A diferencia de SPEA, que solo consideraba los miembros del archivo para esta aptitud, SPEA2 considera dominadores tanto del archivo como de la población [222].
- Se incorpora **información de densidad** para discriminar entre individuos con la misma aptitud. SPEA2 utiliza una adaptación de la técnica del k -ésimo vecino más cercano, tomando el inverso de la distancia al k -ésimo vecino más cercano como estimación de densidad [222].
- La **aptitud final** $F(i)$ se obtiene sumando la aptitud señalada anteriormente y la estimación de densidad del individuo. La aptitud debe ser minimizada; un valor bajo indica mejor aptitud. El cálculo de los valores S y R es $O(L^2)$, mientras que la estimación de densidad domina el tiempo de ejecución del procedimiento de asignación de aptitud con $O(L^2 \log L)$, donde $L = M + N$ [222].

El proceso de selección en SPEA2 se diferencia de SPEA en que el tamaño del archivo A_t (N) es **constante** [222] y el método de truncamiento del Archivo en SPEA2 garantiza la **preservación de soluciones de frontera** [222], [44]. A diferencia de SPEA, donde el tamaño del archivo podía variar y la técnica de *clustering* podía perder soluciones externas, SPEA2 mantiene un tamaño de archivo fijo y utiliza un método de truncamiento que preserva los puntos frontera. En SPEA2, solo los miembros del archivo participan en el proceso de selección para cruzamiento [222].

El uso de un archivo externo (elitismo), los mecanismos refinados de aptitud, la selección y truncamiento contribuyen a que SPEA2 muestre un buen rendimiento en términos de convergencia y diversidad, superando a SPEA en estudios comparativos [44], [222].

El algoritmo se presenta en 5.

Algoritmo 5: Algoritmo Principal de SPEA2 [222]

Entrada: M (tamaño de la población de descendencia), N (tamaño del archivo), T (número máximo de generaciones)

Salida: A^* (Conjunto de soluciones no dominadas)

1 Paso 1: Inicialización

2 Generar una población inicial P_0 .

3 Crear un archivo vacío (conjunto externo) $A_0 = \emptyset$.

4 Establecer el contador de generación $t = 0$.

5 Paso 2: Asignación de Aptitud

6 Calcular los valores de aptitud de los individuos en P_t y A_t .

7 Paso 3: Selección

8 Copiar todos los individuos no dominados en P_t y A_t a A_{t+1} .

9 **if** tamaño de A_{t+1} excede N **then**

10 | Reducir A_{t+1} mediante el operador de truncamiento.

11 **end**

12 **else if** tamaño de A_{t+1} es menor que N **then**

13 | Llenar A_{t+1} con individuos dominados de P_t y A_t .

14 **end**

15 Paso 4: Parada

16 **if** $t \geq T$ o se satisface otro criterio de parada **then**

17 | Establecer A^* como el conjunto de vectores de decisión representados por los individuos no dominados en A_{t+1} .

18 | Detener el algoritmo.

19 **end**

20 Paso 5: Selección para Cruzamiento

21 Realizar selección binaria por torneo con reemplazo sobre A_{t+1} para el espacio de apareamiento.

22 Paso 6: Variación

23 Aplicar los operadores de cruce (recombinación) y mutación al espacio de apareamiento y establecer P_{t+1} como la población resultante.

24 Incrementar el contador de generación ($t = t + 1$).

25 Ir al Paso 2.

3. El *Pareto Archived Evolution Strategy* (PAES) de 2000 [130], Almacena las soluciones del mejor frente buscado en una población auxiliar externa (elitismo). El dominio de la función objetivo es subdividido en hipercubos por una malla que determina la densidad de individuos; las zonas con menor densidad son favorecidas en detrimento de las de mayor densidad de puntos. Esta técnica depende sólo del parámetro número de divisiones y es menor que la compartición de aptitud (*fitness sharing*). Utiliza un archivo externo para almacenar soluciones no dominadas basadas en una malla de regiones.
4. El *Nondominated Sorting Genetic Algorithm II* (NSGA-II) de 2000, Propuesto por Deb et al. [69], con el fin de incorporar elitismo y reducir la complejidad del procedimiento de ordenamiento rápido por no dominancia de su antecesor. Realiza una clasificación de la población por frentes. Los individuos que pertenecen al primer frente son los no dominados; los que pertenecen al segundo frente son los no dominados en ausencia de los del frente anterior, y así sucesivamente. A cada individuo se le asigna un rango equivalente a su nivel de no dominancia. Los mejores individuos son aquellos que tienen rangos menores.

Este método de ordenación asegura que las mejores soluciones formarán parte de la población en la siguiente iteración por lo que este algoritmo no necesita de la incorporación de un mecanismo de elitismo externo.

El algoritmo 6 muestra el esquema general de funcionamiento de NSGA-II [66].

Algoritmo 6: Esquema general de funcionamiento del algoritmo NSGA II

Entrada: Tamaño de la población N , criterios de parada

Salida: Población final P

```

1 begin
  // Paso 1: Inicialización
2    $t \leftarrow 0$ ;
3    $P(t) \leftarrow$  Inicializar población con  $N$  soluciones;
  // Paso 2: Evaluación inicial
4   Evaluar soluciones en  $P(t)$ ;
  // Paso 3: Ciclo principal
5   while no se cumple condición de parada do
    // Paso 3.a: Selección de apareamiento
6      $T' \leftarrow$  Selección de  $N$  soluciones sobre  $P(t)$ ;
    // La selección de apareamiento generalmente se basa en alguna forma de aptitud, que
    // en AEMOs basados en Pareto implica la jerarquización por no dominancia.
    // Paso 3.b y 3.c: Variación (Cruce y Mutación)
7      $H \leftarrow$  Aplicar operador de cruce a soluciones en  $T'$ ;
8      $H' \leftarrow$  Aplicar operador de mutación a soluciones en  $H$ ;
    // Paso 3.d: Evaluación de la descendencia
9     Evaluar soluciones en  $H'$ ;
    // Paso 3.e: Combinar población actual y descendencia (Esquema Elitista +)
10     $T \leftarrow \{H'\} \cup \{P(t)\}$ ;
    // Unión de multiconjuntos
    // Este paso es característico del elitismo, donde se juntan padres e hijos.
    // Paso 3.f y 3.g: Selección Elitista
11    Ordenar  $T$  usando criterio multiobjetivo elitista;
    // Ej: Ordenación no dominada + diversidad
    // La ordenación o jerarquización basada en no dominancia mueve la población hacia
    // el frente de Pareto.
    // Se necesitan mecanismos adicionales, como diversidad o densidad (ej.
    // compartición de aptitud, densidad del k-ésimo vecino), para evitar la
    // convergencia a una sola solución.
12     $P(t+1) \leftarrow$  Seleccionar los  $N$  mejores individuos de  $T$  para formar la nueva población;
13     $t \leftarrow t+1$ ;
    // Los  $N$  mejores se seleccionan del conjunto combinado para formar la nueva
    // población.
14  end
  // Paso 4: Devolver resultado
15  return  $P(t)$ ;
16 end

```

5. El *Pareto Envelope-based Selection Algorithm* (PESA) de 2000 [58], Es uno de los algoritmos más simples de la optimización evolutiva multiobjetivo. Consiste en utilizar una estrategia evolutiva que establece que un único padre genera un único hijo, usa un archivo externo para almacenar las posibles soluciones no dominadas encontradas junto con un gran archivo externo en donde se encuentra el resto de la población. Con el objetivo de mantener la diversidad, PESA usa la estrategia de almacenamiento de malla adaptativa que utiliza PAES [130], en combinación con el usado en el procedimiento de *crowding* para establecer la selección de individuos, persiguiendo que las soluciones se distribuyan uniformemente en la malla [161].

6. El *Niched-Pareto Genetic Algorithm 2* (NPGA2) de 2001 [78], usa jerarquización de Pareto pero mantiene la selección mediante torneo del NPGA original. Se usa una nueva forma de compartir de aptitud en la que se calculan los conteos de nichos usando individuos de la siguiente generación (parcialmente formada) en vez de usar los de la generación actual [44].
7. El *Micro Genetic Algorithm* (micro-GA) de 2001 [173], El término micro algoritmo genético (micro-GA) se refiere a un algoritmo genético con una población muy pequeña y un proceso de especialización. Es un algoritmo que incorpora en su proceso de selección las técnicas de elitismo y jerarquización. Usa una malla adaptativa igual a la del PAES [130], para mantener la diversidad.

2.9.2 Indicadores de calidad en un algoritmo evolutivo multiobjetivo

El concepto de rendimiento incluye la calidad de los resultados y el costo en recursos computacionales para conseguir dicho resultado. Existen en la literatura asociada a la optimización multiobjetivo multiplicidad de indicadores de calidad, pero, cuando se trata de dominancias de Pareto y están involucradas más de una función objetivo existen cuando se comparan soluciones dificultades para sopesar la calidad cuando una solución no domina a la otra en todo el frente [225].

Surgen en estos temas de la comparativa de algoritmos multiobjetivos dos preguntas claves:

- Si no se puede decir que un algoritmo es mejor que otro, ¿hay algunos aspectos que se pueden considerar como ventajas para alguno?
- Si un algoritmo es mejor que otro ¿se puede expresar cuánto es mejor?

Las medidas de calidad más populares son aquellas que cuantifican algún aspecto que puede ser parte de lo que el investigador quiera calificar como un componente para medir que tan bueno es un algoritmo sobre otro en un problema específico. Algunas medidas son por ejemplo la distancia generacional medida desde la distancia media de los vectores objetivos o el grado de dominancia de un conjunto solución sobre otro, también está la distancia al frente de Pareto real. A estas medidas de la calidad se les llama de calidad binarias.

Zitler et al. [224] establece una serie de limitaciones de las medidas de calidad binarias y propone unas nuevas formas de comparar algoritmos multiobjetivos con unas medidas de calidad unarias. *The hypervolume indicator* [219] es compatible cuando los vectores solución son incomparables debido a que ninguno domina totalmente al otro.

El indicador *Hypervolume* es una métrica de calidad clave utilizada en la optimización multiobjetivo para evaluar el rendimiento de los algoritmos. Se refiere al volumen del espacio objetivo que está cubierto por el conjunto de soluciones no dominadas encontradas por un algoritmo [224].

$$C_{IH}(A, B) \equiv E(I_H(A) > I_H(B)) \quad (2.8)$$

Este indicador necesita de un punto de referencia para establecer un área que es dominada por un punto específico de cada vector solución que es generado por los optimizadores objetos de estudio.

En la expresión 2.8, $I_H(A)$ e $I_H(B)$: Representan los valores del indicador Hypervolume para los conjuntos de aproximación A y B , respectivamente. $E(\cdot)$: Es la función de interpretación [224]. Esta función toma los valores de los indicadores (en este caso, $I_H(A)$ e $I_H(B)$) y produce un resultado booleano (verdadero/falso). La función de interpretación es simple: devuelve verdadero si el Hypervolume de A es mayor que el de B .

$C_{IH}(A, B)$: El conjunto completo de la función indicadora (I_H) y la función de interpretación (E) forma un método de comparación [224]. Este método de comparación establecerá que el conjunto A es "mejor" que el conjunto B si el valor de Hypervolume de A supera al de B .

El indicador Epsilon [224] (ϵ) permite hallar cual es la cantidad mas pequeña ϵ para que dados dos vectores solución A y B , A domine completamente a B .

$$I_\epsilon(A, B) = \min\{\epsilon \in \mathfrak{R} \mid b \in B \exists a \in A : a \succ_\epsilon b\} \quad (2.9)$$

Este indicador es computacionalmente rápido de calcular, también necesita un punto de referencia. El indicador Épsilon (I_ϵ) es una métrica de calidad clave utilizada en la optimización multiobjetivo para cuantificar qué tan "peor" es un conjunto de soluciones de aproximación (B) en relación con otro (A). Es un indicador binario, lo que significa que compara directamente un par de conjuntos de aproximación, a diferencia de los indicadores unarios que asignan un único valor de calidad a un solo conjunto.

Para entender la expresión 2.9, primero se debe definir el concepto de ϵ -dominancia:

ϵ -dominancia ($a \succ_\epsilon b$): Para un problema de minimización con objetivos positivos, se dice que un vector objetivo a ϵ -domina a otro vector objetivo b si y solo si, para cada componente (objetivo) i , el valor de a_i multiplicado por ϵ es menor o igual que el valor de b_i ($a_i \cdot \epsilon \leq b_i$). En términos más sencillos, significa que si se multiplica cada valor objetivo en a por un factor de ϵ , el vector resultante todavía domina débilmente a b .

El valor de $I_\epsilon(A, B)$ es el factor ϵ mínimo tal que cualquier vector objetivo en el conjunto B es ϵ -dominado por al menos un vector objetivo en el conjunto A . En otras palabras, $I_\epsilon(A, B)$ indica la cantidad más pequeña por la cual el conjunto A podría "expandirse" (multiplicando sus objetivos por ϵ) para que pueda "cubrir" o ϵ -dominar todas las soluciones de B .

Si $I_\epsilon(A, B) \leq 1$, significa que el conjunto A es, en cierto sentido, "mejor o igual" que B . Si $I_\epsilon(A, B) = 1$, esto puede implicar que A y B son iguales o incomparables.

Otro indicador usado para efectos de establecer alguna comparativa es el llamado R_2 [105], que estudia que tan cerca está una solución generada por un algoritmo sobre el frente real o alguna referencia (por lo tanto, cuanto más pequeño es el indicador mejor es el algoritmo).

Basado en 2.9.2, podemos mencionar una tercera generación que son los algoritmos evolutivos multiobjetivos basados de indicadores de calidad que tratan de lograr una **formalización de las preferencias del usuario y personalizar la optimización**. En la optimización multiobjetivo, el objetivo es a menudo encontrar una buena aproximación del conjunto de soluciones de Pareto-óptimas [44]. Sin embargo, no hay una definición general de lo que constituye una buena aproximación del conjunto de Pareto, ya que depende de la información de preferencia específica del usuario [218]. Los indicadores de calidad, especialmente los indicadores binarios de calidad, permiten formalizar las preferencias del responsable de la toma de decisiones y, por lo tanto, **definir explícitamente el objetivo del proceso de optimización** [218]. Por ejemplo, maximizar el hipervolumen del espacio objetivo dominado por la aproximación resultante es una forma de formalizar el objetivo utilizando un indicador [218]. Dada una función objetivo y un indicador de calidad binario I , el objetivo se puede definir formalmente como minimizar $I(A, S)$ para $A \in \Omega$, donde A es la aproximación generada y S es el conjunto de Pareto [218].

Entre las principales características y ventajas que podemos mencionar:

1. **Existe una Guía Directa en el Proceso de Selección:** La idea principal detrás de algoritmos basados en Indicadores de Calidad es **utilizar directamente la medida de rendimiento (indicador) en el proceso de selección** [218]. En lugar de basarse en supuestos implícitos o estructuras fijas como el ranking basado en Pareto refinado por información de densidad, los indicadores permiten que el algoritmo sea guiado por la medida de calidad definida por el usuario

[12]. Esto se implementa, por ejemplo, asignando valores de aptitud (*fitness*) a los individuos de la población basándose en los valores del indicador [218], [12].

2. **Flexibilidad y Adaptación a Preferencias Arbitrarias:** La mayoría de los AEMOs populares implementan un tipo particular de información de preferencia, que a menudo no se define explícitamente [218]. Esto limita su flexibilidad [218]. El uso de indicadores de calidad permite diseñar AEMOs, que pueden **adaptarse a información de preferencia arbitraria** [218], [12]. Esto significa que el mismo marco algorítmico puede ajustarse a diferentes objetivos de optimización simplemente cambiando el indicador utilizado [218].

3. **Cumplimiento con la Relación de Dominancia de Pareto:** Un requisito importante para los indicadores binarios de calidad utilizados en estos enfoques es que preserven la dominancia [218]. Un indicador binario I preserva la dominancia si cumple dos criterios: (i) si x_1 domina a x_2 , entonces $I(\{x_1\}, \{x_2\}) < I(\{x_2\}, \{x_1\})$ y (ii) si x_1 domina a x_2 , entonces $I(\{x_3\}, \{x_1\}) \geq I(\{x_3\}, \{x_2\})$ para todos x_1, x_2, x_3 en el espacio de decisión. Si un indicador I preserva la dominancia, se puede demostrar que el esquema de asignación de aptitud basado en él también es **compatible con la relación de dominancia de Pareto** [218]; es decir, si un vector de decisión x_1 domina a x_2 , entonces la aptitud de x_1 será mayor que la de x_2 ($F(x_1) > F(x_2)$) [218].

Se pueden mencionar algunos algoritmos desarrollados en este contexto:

1. El **Indicador-Based Evolutionary Algorithm** (IBEA) propuesto por Zitzler et al. [218] constituyen un intento de utilizar la toma de decisiones práctica para la optimización de Pareto. A diferencia de los dos enfoques anteriores, basados en la noción de dominancia de Pareto, estos AEMO utilizan un indicador de rendimiento para concentrar la búsqueda en regiones específicas de interés en el frente de Pareto. En este trabajo, hemos considerado un IBEA basado en el indicador ϵ de Zitzler et al. [224]. El algoritmo (7) básico de IBEA se presenta a continuación:

Algoritmo 7: Algoritmo Básico IBEA [218]

Parámetros: α (tamaño de la población);
 N (número máximo de generaciones);
 κ (factor de escala de fitness)
Salida: A (aproximación del conjunto de Pareto)

```

1 begin
  // Paso 1: Inicialización;

2  Generar una población inicial  $P$  de tamaño  $\alpha$ ;
3  Establecer el contador de generación  $m$  a 0 ;
4  while  $m < N$  y no se satisface otro criterio de parada do
  // Paso 2: Asignación de Fitness;

5  Para todo  $x_1 \in P$ , calcular los valores de fitness;
6   $F(x_1) = \sum_{x_2 \in P \setminus \{x_1\}} -e^{-I(\{x_2\}, \{x_1\})/\kappa}$ ;
  // Paso 3: Selección;

7  while tamaño de  $P > \alpha$  do
8  | Elegir un individuo  $x^* \in P$  con el menor valor de fitness;
9  |  $F(x^*) \leq F(x)$  para todo  $x \in P$ ;
10 | Eliminar  $x^*$  de la población  $P$ ;
11 | Actualizar los valores de fitness de los individuos restantes;
12 | for todo  $x \in P$  do
13 | |  $F(x) = F(x) + e^{-I(\{x^*\}, \{x\})/\kappa}$ ;
14 | end
15 end
  // Paso 4: Selección de Cruza;

16 Realizar selección por torneo binario con reemplazo en  $P$  para llenar el pool de cruce
  temporal  $P'$ ;
  // Paso 5: Variación;

17 Aplicar operadores de recombinación y mutación al conjunto de apareamiento  $P'$  ;
18 Añadir los descendientes resultantes a  $P$  ;
19 Incrementar el contador de generación ( $m = m + 1$ );
20 end
  // Paso 6: Parada;

21 Establecer  $A$  al conjunto de vectores de decisión representados por los individuos no
  dominados en  $P$  ;
22 end

```

IBEA se diferencia de muchos algoritmos evolutivos multiobjetivo (AEMOs) existentes en varios aspectos [44], [218]:

- **Adaptación a preferencias:** Permite adaptar la búsqueda según medidas de rendimiento arbitrarias, a diferencia de enfoques que implementan directamente un tipo particular de preferencia predefinida [218].
- **No requiere mecanismo de diversidad adicional:** Contrariamente a algoritmos como NSGA-II [69] o SPEA2 [222], no requiere un mecanismo adicional para preservar la diversidad en la aproximación del frente de Pareto, como el *fitness sharing* [218], [44], [224].

La base de muchos AEMOs asume dos objetivos conflictivos (minimizar distancia al frente de Pareto y maximizar diversidad), una suposición que puede suponer un desafío [218] y es uno de los objetivos del presente trabajo de investigación. IBEA utiliza indicadores que son extensiones naturales de la relación de dominancia de Pareto [218].

Un indicador binario $I(A, B)$ compara la calidad de dos aproximaciones A y B relativamente entre sí. Para que sea útil en IBEA, el indicador debe ser *dominance preserving* [218]. Un indicador es *dominance preserving* si $x_1 \preceq x_2 \Rightarrow I(\{x_1\}, \{x_2\}) < I(\{x_2\}, \{x_1\})$ y $x_1 \preceq x_2 \Rightarrow I(\{x_3\}, \{x_1\}) \geq I(\{x_3\}, \{x_2\})$ para cualquier x_1, x_2, x_3 en el espacio de soluciones, donde \preceq denota dominancia (o dominancia débil) [218]. El indicador $I_{\varepsilon+}$ es *dominance preserving* [218]. La minimización de $I(A, S)$, donde S es el conjunto de soluciones Pareto, es el objetivo principal cuando I es *dominance preserving* [218], [224] (Ver: 2.9.2).

Los pasos [218] clave del algoritmo básico 7 son:

- (a) **Inicialización:** Se genera una población inicial P de tamaño α . El contador de generación m se inicia a 0.
- (b) **Asignación de Fitness:** Para cada individuo x_1 en la población P , se calcula un valor de *fitness* $F(x_1)$. Este valor se basa en la suma de contribuciones exponenciales del indicador $I(\{x_2\}, \{x_1\})$ para cada otro individuo $x_2 \in P \setminus \{x_1\}$. La fórmula utilizada es $F(x_1) = \sum_{x_2 \in P \setminus \{x_1\}} e^{-I(\{x_2\}, \{x_1\})/\kappa}$ [218]. Este *fitness* $F(x_1)$ debe ser **maximizado**. Representa una medida de la pérdida de calidad si x_1 fuera eliminado de la población [218], [224]. La propiedad *dominance preserving* del indicador asegura que individuos dominantes contribuyan más al *fitness*. Donde $\kappa > 0$ es un factor de escala.
- (c) **Selección:** Este paso reduce el tamaño de la población P hasta que no excede α [218]. Se itera eligiendo un individuo x^* en P con el menor valor de *fitness* ($F(x^*) \leq F(x)$ para todo $x \in P$) y eliminándolo de la población. Después de eliminar x^* , los valores de *fitness* de los individuos restantes en P se actualizan sumando $e^{-I(\{x^*\}, \{x\})/\kappa}$ a sus *fitness* actuales [218], [224].
- (d) **Parada:** El algoritmo se detiene si el contador de generación m alcanza el número máximo de generaciones N o si se satisface otro criterio de parada [218], [224]. La aproximación del conjunto de Pareto A se define como el conjunto de individuos no dominados en la población final P [218].
- (e) **Selección de Cruce:** Se realiza selección por torneo binario con reemplazo en P para llenar un conjunto de apareamiento temporal P' [218].
- (f) **Variación:** Se aplican operadores genéticos (recombinación y mutación) al conjunto de apareamiento P' para generar descendencia [218]. Estos descendientes se añaden a la población P . Se incrementa el contador de generación ($m = m + 1$) y se regresa al Paso 2 [218].

En [218] los autores probaron el IBEA utilizando dos indicadores: $I_{\varepsilon+}$ e I_{HD} [218]. I_{HD} se basa en el concepto de hipervolumen y mide el volumen del espacio dominado por B pero no por A con respecto a un punto de referencia Z [218]. Compararon IBEA con NSGA-II [69] y SPEA2 [222] en varios problemas de *benchmark* [218]. En dicha comparativa, IBEA (con $I_{\varepsilon+}$ e I_{HD}) mostró un rendimiento significativamente mejor que SPEA2 y NSGA-II en la mayoría de los problemas probados, bajo indicadores de rendimiento adecuados y con una elección apropiada del parámetro κ [218]. La elección de κ puede influir en el rendimiento y varía según el problema y el indicador. Para I_{HD} , el rendimiento también depende de la elección del punto de referencia [218].

2. El algoritmo orientado a hipervolumen basado en muestreo el *sampling-based hypervolume-oriented algorithm* (SHV) y el algoritmo de estimación de hipervolumen para

optimización multiobjetivo *Hypervolume Estimation Algorithm for Multiobjective Optimization* (HypE) propuestos por Bader y Zitzler [11] son AEMOs basados en la métrica de hipervolumen. Los algoritmos presentan un enfoque de Monte Carlo para la estimación rápida de esta métrica cuando el número de dimensiones es grande, y su uso para selección y reemplazo (en el último caso, se utiliza una clasificación no dominada para clasificar la unión de padres e hijos; luego, los frentes se copian sucesivamente a la siguiente población del mejor al peor hasta que no haya más espacio disponible; se utiliza hipervolumen para reducir el tamaño del último frente que no encaja en su totalidad en la siguiente población).

Esta propiedad es muy importante para problemas con un gran número de funciones objetivo [11]. Sin embargo, el cálculo exacto del hipervolumen es computacionalmente costoso, lo que limita su uso a problemas con pocos objetivos. HypE aborda esto utilizando la estimación por Monte Carlo [11].

La estructura principal de HypE seguida de los detalles de sus procedimientos de selección se presenta en el algoritmo 8. El procedimiento $VARIATION(P', N)$ aplica operadores de mutación y recombinación a la población P' para generar un conjunto P'' de N descendientes. La selección de apareamiento utiliza valores de *fitness* basados en el indicador I_k^h , donde para la selección de apareamiento, k es el tamaño de la población P . Este *fitness* se calcula exactamente si el número de objetivos n es pequeño (≤ 3) o se estima si n es grande (> 3) (ver algoritmo 9).

La selección por *fitness* (ver algoritmo 10) combina el ordenamiento no dominado (similar a NSGA-II o SPEA2) con la eliminación de soluciones basada en *fitness* dentro del último frente que no cabe completamente en la nueva población [11]. El *fitness* utilizado para esta eliminación es $I_k^h(a, Q', R)$, donde Q' es el frente actual considerado y k es el número de soluciones que aún deben ser eliminadas de Q' en esa iteración del bucle de truncamiento. Al igual que en la selección de apareamiento, el cálculo de I_k^h es exacto para $n \leq 3$ y estimado para $n > 3$ [11].

Es importante mencionar que el procedimiento COMPUTEHYPERVOLUME, así como también ESTIMATEHYPERVOLUME (Algoritmo 9) son funciones más complejas que se encargan del cálculo exacto o la estimación por muestreo de las contribuciones de hipervolumen necesarias para calcular I_k^h . Estos no se detallan en este pseudocódigo principal.

Bader et al [11] mencionan el algoritmo precursor llamado SHV, que también utiliza simulación Monte Carlo para la búsqueda basada en hipervolumen. HypE también se presenta como un método avanzado basado en la misma idea que SHV pero con estrategias de asignación de *fitness* y muestreo más efectivas. En los experimentos, SHV se incluye como uno de los algoritmos de comparación para evaluar el rendimiento de HypE [11].

2.9.3 Otras clasificaciones o enfoques emergentes en algoritmos evolutivos multiobjetivos

Los enfoques más utilizados actualmente y que representan líneas activas de investigación incluyen [46]:

- **AEMOs Basados en Descomposición:** Transforman el problema multiobjetivo en varios subproblemas de un solo objetivo, optimizándolos simultáneamente [46]. El ejemplo principal es **MOEA/D (Multi-objective Evolutionary Algorithm based on Decomposition)** [213], propuesto alrededor de 2007, y cuenta con numerosas variantes [46]. **NSGA-III** [68] es una extensión de NSGA-II diseñada para muchos objetivos que utiliza **puntos de referencia** y descomposición para guiar la selección [46], [32].
- **AEMOs Basados en Indicadores:** Como se especificó en la Sección 2.9.2 Optimizan directamente un **indicador de desempeño** de conjunto, como el hipervolumen, para evaluar y comparar las soluciones [225], [46]. Buscan maximizar el valor de un indicador específico. Ejemplos incluyen *Indicador-Based Evolutionary Algorithm* **IBEA** [218], *Multiobjective*

Algoritmo 8: Algoritmo Principal de HypE [11]**Entrada:****Salida:** Población final P **Parámetros:** Conjunto de referencia $R \subseteq Z$; Tamaño de la población $N \in \mathbb{N}$; Número de generaciones g_{\max} ; Número de puntos de muestreo $M \in \mathbb{N}$ (usado para la estimación).

```

1 INICIO( $R, N, g_{\max}, M$ ) // inicializar población  $P$  seleccionando  $N$  soluciones de  $X$ 
  uniformemente al azar
2  $g \leftarrow 0$ , // Inicializar  $g$ 
3 while  $g \leq g_{\max}$  do
4    $P' \leftarrow$  SELECTION( $P, R, N, M$ ), // Selección de apareamiento basada en fitness de
     hipervolumen
5    $P'' \leftarrow$  VARIATION( $P', N$ ), // Aplicar operadores de variación (mutación, recombinación)
     para generar  $N$  descendientes
6    $P \leftarrow$  ENVIRONMENTALSELECTION( $P \cup P'', R, N, M$ ), // Selección ambiental elitista
     basada en dominancia y fitness de hipervolumen
7    $g \leftarrow g + 1$ ,
8 end
9 return  $P$ ,

```

Algoritmo 9: Selección de Apareamiento de HypE [11]**Entrada:** Población actual $P \in \Psi$; Conjunto de referencia $R \subseteq Z$; Número de descendientes a generar $N \in \mathbb{N}$; Número de puntos de muestreo $M \in \mathbb{N}$ (usado para la estimación).**Salida:** Población de apareamiento Q de tamaño N **Parámetros:**

```

1 MATINGSELECTION( $P, R, N, M$ )  $n \leftarrow$  número de objetivos;
2 if  $n \leq 3$  then
3    $F \leftarrow$  COMPUTEHYPERVOLUME( $P, R, N$ );
   // Calcular fitness exacto ( $I_{|P|}^h$ )
4 end
5 else
6    $F \leftarrow$  ESTIMATEHYPERVOLUME( $P, R, N, M$ );
   // Estimar fitness ( $I_{|P|}^h$ ) por Monte Carlo
7 end
8  $Q \leftarrow \emptyset$ ;
   // Población de apareamiento
9 while  $|Q| < N$  do
10  elegir dos pares  $(a, v_a), (b, v_b)$  de  $F$  uniformemente al azar;
   // Selección por torneo binario
11  if  $v_a > v_b$  then
   // Seleccionar el individuo con mayor fitness
12  |  $Q \leftarrow Q \cup \{a\}$ ;
13  end
14  else
15  |  $Q \leftarrow Q \cup \{b\}$ ;
16  end
17 end
18 return  $Q$ ;

```

Algoritmo 10: Selección por Fitness de HypE [11]

Entrada: Población combinada (padres e hijos) $P \in \Psi$; Conjunto de referencia $R \subseteq Z$; Tamaño deseado de la población para la siguiente generación $N \in \mathbb{N}$; Número de puntos de muestreo $M \in \mathbb{N}$ (usado para la estimación).

Salida: Nueva población Q de tamaño N

Parámetros:

```

1 ENVIRONMENTALSELECTION( $P, R, N, M$ )  $P' \leftarrow P$ , // Copia de la población inicial para procesamiento
2  $Q \leftarrow \emptyset$ , // Nueva población para la siguiente generación
3  $Q' \leftarrow \emptyset$ , // Conjunto de soluciones no dominadas actualmente consideradas
4 repeat
5    $Q \leftarrow Q \cup Q'$ , // Añadir el frente completo a la nueva población
6    $Q', P'' \leftarrow \emptyset$ ;
   // Inicializar para encontrar el siguiente frente no dominado
7   for all  $a \in P'$  do
8     // Identificar soluciones no dominadas en  $P'$ 
9     if  $\forall b \in P' : b \preceq a \implies a \preceq b$  then
10    |  $Q' \leftarrow Q' \cup \{a\}$ , //  $a$  es no dominado en  $P'$ 
11    end
12    else
13    |  $P'' \leftarrow P'' \cup \{a\}$ , //  $a$  es dominado en  $P'$ 
14    end
15  end
16   $P' \leftarrow P''$ , //  $P'$  ahora contiene solo las soluciones dominadas del paso anterior
17 until  $|Q| + |Q'| \geq N$  OR  $P' = \emptyset$ ;
   // Copiar frentes no dominados a  $Q$  hasta que el tamaño exceda o iguale  $N$  o no queden
   // soluciones
18 ;
19  $k \leftarrow |Q| + |Q'| - N$ , // Número de soluciones a eliminar del último frente ( $Q'$ )
20 while  $k > 0$  do
21    $n \leftarrow$  número de objetivos, // Truncar el último frente ( $Q'$ ) eliminando  $k$  soluciones
22   if  $n \leq 3$  then
23     |  $F \leftarrow$  COMPUTEHYPERVOLUME( $Q', R, k$ ), // Calcular fitness exacto ( $I_k^h$ ) para truncamiento
24   end
25   else
26     |  $F \leftarrow$  ESTIMATEHYPERVOLUME( $Q', R, k, M$ ), // Estimar fitness ( $I_k^h$ ) por Monte Carlo para
27     | truncamiento
28   end
29    $Q'_{\text{next}} \leftarrow \emptyset$ ;
30    $\text{removed} \leftarrow \text{falso}$ ;
31    $v_{\text{min}} \leftarrow \min_{(a,v) \in F} \{v\}$ , // Encontrar el fitness mínimo (peor) en el frente actual
32   for all  $(a, v) \in F$  do
33     // Iterar para eliminar una solución con el peor fitness
34     if  $\text{removed} \vee v \neq v_{\text{min}}$  then
35     | // Si ya hemos removido uno o el fitness no es el mínimo, conservar
36     |  $Q'_{\text{next}} \leftarrow Q'_{\text{next}} \cup \{a\}$ ;
37     end
38     else
39     |  $\text{removed} \leftarrow \text{verdadero}$ , // Esta es la primera solución con el fitness mínimo;
40     | removerla
41     end
42   end
43    $Q' \leftarrow Q'_{\text{next}}$ , // Actualizar el frente con la solución eliminada
44    $k \leftarrow k - 1$ , // Decrementar el contador de soluciones a eliminar
45 end
46  $Q \leftarrow Q \cup Q'$ , // Añadir las soluciones restantes del último frente a la nueva población
47 return  $Q$ ;

```

selection based on dominated hypervolume **SMS-EMOA** [18] (que utiliza el hipervolumen [225]), *Hypervolume-based Estimation of Distribution Algorithm* **HyPE** [11], *Reference Vector Guided Evolutionary Algorithm* **RVEA** [37]. Existe una revisión extensa sobre AEMOs basados en indicadores que puede consultar en [156].

- **AEMOs Basados en Preferencias:** Incorporan información preferencial del decisor en el proceso evolutivo para guiar la búsqueda hacia la **región de interés** del frente de Pareto [46]. A menudo utilizan **puntos de referencia** [46]. Ejemplos incluyen **WASF-GA** [182] (que utiliza una función escalarizada de logro y vectores de peso/puntos de referencia para clasificar soluciones) [46] y **R-NSGA-II** [133].

Otras Categorías y Tendencias Importantes:

- **Algoritmos *Many-Objective* (MaOEA):** Aunque conceptualmente son AEMOs, se distinguen por estar diseñados específicamente para problemas con un **número elevado de objetivos** (generalmente ≥ 4) [46]. Abordan los desafíos particulares de convergencia y diversidad en altas dimensiones del espacio objetivo [46]. Algunos AEMOs generales, como NSGA-III [68] y RVEA [37], se consideran MaOEA [46]. Las técnicas para MaOEA incluyen dominancia relajada, estrategias de diversidad específicas, agregación e indicadores, o reducción de dimensionalidad [46].
- **Algoritmos Escalables (Scalable AEMOs):** Se centran en problemas con un **gran número de variables de decisión** [46]. Se clasifican según el mecanismo que usan para mejorar la escalabilidad, como divide y venceras (*divide-and-conquer*), reducción de dimensión o búsqueda mejorada [46]. Se han propuesto AEMOs para problemas large-scale basados en coevolución cooperativa [110].
- **Algoritmos Híbridos:** Combinan dos o más enfoques o algoritmos para mejorar el rendimiento o abordar problemas específicos [46]. Por ejemplo, MOEA/DD (*Multi-Objective Evolutionary Algorithm based on Dominance and Decomposition*) combina dominancia y descomposición [226].
- **Algoritmos Colaborativos:** Proponen la combinación de varios AEMOs trabajando juntos para construir un conjunto global y mejorado de soluciones de Pareto. Un ejemplo se aplica a sistemas de trading [46]. En la Sección 2.11 se hace una descripción con mas detalle de las características de estos algoritmos.
- **Hyper-heuristics:** Utilizan una estrategia de alto nivel que aprende a seleccionar o generar heurísticas de bajo nivel (operadores genéticos o algoritmos completos) durante la optimización [46]. Se han propuesto para problemas discretos y continuos [46], [156], y pueden controlar y combinar algoritmos bien conocidos como NSGA-II [69], SPEA2 [222], MOGA [87] o enfoques basados en descomposición como MOEA/D [213]. También pueden combinar diferentes indicadores de desempeño (ver Sección 2.9.2).
- **Paralelismo:** El desarrollo de AEMOs que aprovechan arquitecturas paralelas para acelerar el proceso de búsqueda, incluyendo versiones para GPUs [46] y enfoques asíncronos con micro-poblaciones [46].
- **Algoritmos Específicos por Aplicación:** En áreas como el Clustering Evolutivo Multiobjetivo (EMOC) [156], existen clasificaciones y algoritmos especializados adaptados al dominio del problema [46].

2.10 Métodos Interactivos

Estos métodos involucran la interacción entre humanos y la computadora. Son útiles tanto en el desarrollo de modelos (ej. modelado visual interactivo) como en la aplicación de procedimientos heurísticos. La representación gráfica del problema o de los resultados permite al analista o tomador de decisiones sugerir soluciones prometedoras o ajustar parámetros [189].

2.11 Técnicas híbridas o algoritmos meméticos (MAs)

Las técnicas híbridas para la resolución de problemas de optimización, a menudo denominadas **Algoritmos Meméticos (MAs)**, constituyen una **clase amplia y genérica de metaheurísticas** que se basan en una población de agentes [158]. También son conocidos como **Algoritmos Evolutivos Híbridos** y, en el contexto de la optimización con múltiples objetivos, como Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo Meméticos (EMO meméticos) [164]. La naturaleza distintiva de estas técnicas radica en su carácter **híbrido**, que se manifiesta en la **combinación de diferentes estrategias de búsqueda** [164].

La particularidad más **importante y distintiva** de los MAs, es su propiedad intrínseca de **explorar todo el conocimiento disponible sobre el problema** que se está estudiando [158]. La incorporación de conocimiento del dominio del problema no es un mecanismo opcional, sino una **característica fundamental** que define a estos algoritmos [158]. Esta filosofía se relaciona con el término "memético", acuñado por R. Dawkins, en analogía con la evolución cultural [152], [158]. La importancia de incluir conocimiento específico del problema está respaldada por resultados teóricos, como el teorema *No-Free-Lunch* (NFL), popularizado por Wolpert y Macready [209], que demuestra que no existe un algoritmo de optimización "universal" que funcione mejor que cualquier otro (incluida la búsqueda aleatoria) en promedio sobre todos los problemas posibles [158]. El teorema afirma que todos los algoritmos de optimización de "caja negra" (aquellos que no utilizan información específica sobre la estructura del problema) tienen el mismo rendimiento promedio cuando se evalúan en el conjunto de todos los problemas posibles [158]. Esto implica que si un algoritmo es efectivo en promedio para una clase particular de problemas, necesariamente tendrá un rendimiento peor en el resto de los problemas; esto además sugiere que el rendimiento de un algoritmo de búsqueda se relaciona directamente con la cantidad y calidad del conocimiento del problema que incorpora [129], [158], [132].

Para lograr un alto rendimiento en un problema específico, es crucial adaptar el algoritmo explotando el conocimiento particular de ese problema. Esto impulsó los esfuerzos para desarrollar metaheurísticas híbridas [30]. Por lo tanto, el NFLT justifica la filosofía de diseño de los MAs de personalizar el algoritmo para el problema en cuestión mediante la integración de conocimiento del dominio, lo cual es necesario para obtener un rendimiento superior en problemas específicos, en contraste con los algoritmos puramente de caja negra que no pueden garantizar esto [30].

Los MAs logran su capacidad de búsqueda aprovechando los **efectos simbióticos y sinérgicos** de las estrategias que combinan [115]. Consecuentemente, integran algoritmos evolutivos (como los algoritmos genéticos) con métodos de **búsqueda local** u otras heurísticas [158]. Los algoritmos evolutivos son efectivos para la **diversificación**, explorando el espacio de búsqueda y localizando regiones con propiedades especiales para la resolución del problema [158]. Por otro lado, la búsqueda local es eficaz para la **intensificación**, realizando una exploración intensiva dentro de un área específica del espacio de búsqueda para encontrar óptimos locales [164]. La combinación de ambas estrategias permite alcanzar una alta capacidad de búsqueda. De hecho, la búsqueda local a menudo se aplica a las soluciones generadas por los operadores de variación evolutiva (cruce y mutación) [164], [158], [115]. En términos generales, un MA puede ser visto como uno (o varios) procesos de búsqueda local actuando sobre un conjunto de soluciones candidatas que se acoplan en episodios periódicos de cooperación por medio de procesos de recombinación. Los operadores evolutivos a menudo se diseñan para ser "conscientes" de la

estructura del problema o del paisaje de fitness [152]. El pseudocódigo Memético básico se puede ver en el algoritmo 11 [152].

Algoritmo 11: Pseudocódigo de Algoritmo Memético Básico [152]

Entrada: Definición del problema de optimización (función objetivo, restricciones)

Salida: Óptimo local o conjunto de óptimos locales encontrados

Parámetros: Tamaño de la población ($|P|$), Número de recombinaciones por generación (N_R), Número de mutaciones por generación (N_M), Criterio de terminación, Parámetros de la búsqueda local

Data: Población de soluciones P

Result: Mejor solución o conjunto de soluciones no dominadas (para multiobjetivo)

```

1 Procedimiento AlgoritmoMemeticoBasico
2    $P \leftarrow \emptyset$ 
   // Inicializar población vacía
3   for  $j \leftarrow 1$  to  $|P|$  do
4      $i \leftarrow$  GenerarSolucion()
     // Generar una solución inicial (aleatoria o heurística)
5      $i \leftarrow$  BuscarLocalmente( $i$ )
     // Aplicar búsqueda local para encontrar un óptimo local
6     Añadir  $i$  a  $P$ 
     // Aplicar algún criterio de reemplazo
7   end
8   repeat
9     for  $k \leftarrow 1$  to  $N_R$  do
10      Seleccionar dos padres  $i_a, i_b$  de  $P$  (ej. aleatoriamente)
11       $i_c \leftarrow$  Recombinar( $i_a, i_b$ )
      // Aplicar operador de cruce
12       $i_c \leftarrow$  BuscarLocalmente( $i_c$ )
      // Aplicar búsqueda local al descendiente
13      Añadir  $i_c$  a  $P$ 
      // Aplicar algún criterio de reemplazo
14    end
15    for  $k \leftarrow 1$  to  $N_M$  do
16      Seleccionar un individuo  $i$  de  $P$  (ej. aleatoriamente)
17       $i_m \leftarrow$  Mutar( $i$ )
      // Aplicar operador de mutación
18       $i_m \leftarrow$  BuscarLocalmente( $i_m$ )
      // Aplicar búsqueda local al mutado
19      Añadir  $i_m$  a  $P$ 
      // Aplicar algún criterio de reemplazo
20    end
21     $P \leftarrow$  Seleccionar( $P$ )
     // Seleccionar la próxima generación de la población  $P$ 
22    if PoblacionHaConverge ( $P$ ) then
23       $P \leftarrow$  MutarYBuscarLocalmente( $P$ )
      // Aplicar mecanismo de diversificación/reinicio
24    end
25  until CriterioParada ()
26  return Mejor solución encontrada en  $P$ 
   // Para multiobjetivo, devolver el conjunto no dominado

```

A continuación se explican las diferentes etapas de un algoritmo memético básico presentado en 11:

- **Inicialización:** La población P se llena inicialmente generando soluciones y aplicando búsqueda local a cada una. Esto garantiza que la población inicial esté compuesta por óptimos locales [152]. Las soluciones iniciales pueden ser generadas aleatoriamente o mediante heurísticas constructivas [164], [158].
- **Ciclo Principal:** El algoritmo se repite hasta que se cumple un criterio de parada predefinido [152].
- **Variación:** Se generan nuevos individuos aplicando operadores evolutivos clásicos como la recombinación (cruce) y la mutación [152]. A diferencia de un algoritmo genético simple, la búsqueda local se aplica inmediatamente a los descendientes generados por estos operadores. Esto combina la exploración de los operadores evolutivos con la explotación intensiva de la búsqueda local en las regiones prometedoras identificadas [62, 89].
- **Selección:** Se selecciona la próxima generación de la población a partir de la combinación de la población actual y los nuevos individuos generados. Este paso puede incorporar estrategias elitistas [158].
- **Diversificación:** Si la población converge (es decir, si la mayoría de los individuos son muy similares, lo que puede indicar que el algoritmo está atascado en un óptimo local global), se aplica un mecanismo de diversificación. Un método es mutar todos los individuos excepto el mejor y luego aplicar búsqueda local a los mutados, actuando como un reinicio o "meta-mutación" a nivel de población [152]. Esto es necesario ya que, debido a que la búsqueda local consume tiempo, las poblaciones suelen ser más pequeñas y pueden converger rápidamente [158].
- **Parada:** Para el caso del criterio de finalización o parada, se chequea el número total de iteraciones, al llegar a un número máximo de iteraciones sin mejora, o haber alcanzado cierto número de re-inicializaciones.

El proceso de inicialización de la población es el responsable de la creación del conjunto inicial de soluciones candidatas; en contraposición con los algoritmos genéticos, los MAs, suelen utilizar procedimientos sistemáticos para obtener posibles soluciones de alto grado de calidad como punto de partida, esto se puede lograr por medio de la utilización de heurísticas constructivas [62], [89] o por medio de búsquedas locales.

Algoritmo 12: Mejora local para Población Inicial

```

1 Función Inicializar (In par : Parameter, In P : Problem)
2   begin
3      $pop \leftarrow 0$ ;
4     for  $j \leftarrow 1$  to  $par.TamañoPob$  do
5        $i \leftarrow SolucionAleatoria(P)$ ;
6        $i \leftarrow BLocal(i, par, P)$ ;
7        $pop \leftarrow pop \cup \{i\}$ ;
8     end
9   end
10 return  $pop$ ;

```

El procedimiento de cooperación y mejora constituyen el centro de un MA. El proceso de mejora comprende una serie de etapas cada una de las cuales corresponde a la aplicación iterativa de un determinado operador particular que toma soluciones de la etapa anterior, generando nuevas soluciones

[158]. En cuanto al procedimiento de mejora, que se aplica por medio de un procedimiento de búsqueda local [158], [164] sobre las soluciones de la población para lograr obtener individuos de mayor calidad [152]. Este proceso juega un papel importante en el diseño de un MA.

En el contexto de la optimización multiobjetivo (EMO) (2.3), se combinan Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo (Ver 2.9) (AEMO, como NSGA-II o SPEA2) con algún método de búsqueda basado en trayectoria (Ver 2.7), dando lugar a algoritmos conocidos como MOGLS (*Multiobjective Genetic Local Search*) o Algoritmos Meméticos Multiobjetivos (MEMO) [115]. El M-PAES (*Memetic Pareto Archived Evolution Strategy*) [128] es otro ejemplo bien conocido de algoritmo memético MEMO [115].

2.12 Conceptos económicos y financieros

2.12.1 Carteras de inversión

La *Administración Financiera* (AF) cuida de uno de los más costosos y escasos recursos de la empresa, los recursos financieros que son los que dan a la empresa la posibilidad de contratar empleados, adquirir instalaciones, máquinas y equipos, comprar materias primas e invertir en la producción de bienes o servicios. Según Chiavenato [38, pp.32]:

"Los recursos financieros son los que llevan a la empresa a poseer y a disponer de los demás recursos empresariales, La AF debe proporcionar las condiciones que garanticen la mayor rentabilidad y liquidez a los recursos financieros".

Una de las tareas de la AF es la de Aplicar recursos financieros excedentes (aplicaciones en el mercado de capitales o en el mercado monetario, adquisición de inmuebles o terrenos, etcétera). Es en este sentido que la inversión financiera se convierte en un instrumento atractivo para la colocación de fondos.

Una clasificación fundamental de las diferentes posibilidades de inversión se deriva de la distinción del posible objeto de la inversión. En este caso, se pueden analizar:

a) *Inversiones reales*: materializadas en activos productivos que se incorporan en un proceso industrial.

b) *Inversiones financieras*: materializadas en títulos negociados en los mercados financieros y que no generan riqueza por sí mismos.

En este trabajo, se analizarán únicamente la inversiones financieras que, como las reales, vienen condicionadas por cuatro parámetros fundamentales:

1. **La rentabilidad.** Es decir, el rendimiento de la inversión medido mediante las correspondientes ecuaciones de equivalencia financiera. La **rentabilidad** r de una inversión puede obtenerse mediante la siguiente ecuación con ley financiera de capitalización-descuento compuesto donde la incógnita es el tanto de valoración:

$$P_0 = \sum_{s=1}^n F_s (1+r)^{-s} \quad (2.10)$$

para valores de s desde 1 hasta n , siendo n el número de años de vida de la inversión, P_0 es el desembolso inicial y F_s los flujos de caja generados por la inversión. La naturaleza de los flujos de caja dependerá de las características del activo.

De este modo, diferenciando entre los denominados *activos de renta fija* y de *renta variable*, los flujos de caja que se relacionarían con los primeros son los intereses periódicos y el precio de

amortización o de venta, mientras que los flujos a considerar en los activos de renta variable son los dividendos, los derechos preferentes de suscripción y el precio de venta.

Naturalmente, la rentabilidad es un elemento positivo para el inversor. De esta manera, cuanto mayor sea la rentabilidad de una inversión más preferida será por el inversor racional. La rentabilidad de un activo en un periodo determinado se define como:

$$\Delta = Ln \left(\frac{\text{ValorUnidadInversionPeriodoActual}}{\text{ValorUnidadInversionPeriodoAnterior}} \right) \quad (2.11)$$

2. **El riesgo.** Es un elemento negativo para el inversor racional que siempre elegirá alternativas con el menor riesgo posible, siempre realizando un estudio conjunto con la cuantía de la rentabilidad. También, en su momento, se utilizará la volatilidad como elemento de riesgo, determinando como tal, la evolución de la rentabilidad del activo analizado en función de las variaciones en un determinado índice de referencia. (ejemplo: Índice de la bolsa de valores de Colombia).

Según Martínez Abascal [1, pp.148]:

"El riesgo total de una acción (variabilidad en su precio) puede dividirse en sistemático y no sistemático. El riesgo sistemático es el que se debe a la bolsa: una acción sube porque sube toda la bolsa. Las causas de este riesgo son de tipo macroeconómico y afectan a todo el mercado bursátil".

Es decir, es el riesgo que no se puede evitar. Aunque algunas acciones tienen más riesgo sistemático que otras. El riesgo no sistemático según Martínez Abascal [1, pp.148]:

"...es la variación en el precio de la acción debido a causas exclusivas de la propia empresa. Sabemos que este riesgo se puede eliminar diversificando la cartera.."

Mediante el análisis simple de estas dos variables ya se observa la dualidad básica que va a ser relevante para el inversor: **rentabilidad-riesgo**. La cuestión, en este sentido, es elegir la alternativa que mejor combine o relacione ambas variables según el sujeto que decide.

3. **La liquidez.** Se define como la capacidad que tiene un activo de convertirse en dinero efectivo sin perder valor [103].
4. **El control.** Este puede ser uno de los objetivos perseguidos al comprar ciertos activos. De esta manera, en muchos casos, no se busca analizar ninguna de las tres características anteriores sino que se busca el dominio de una entidad para decidir sus acciones futuras.

Debe destacarse que, si bien se han incorporado la liquidez y el control como elementos importantes a la hora de considerar las alternativas de inversiones financieras, en este trabajo se contemplarán la rentabilidad y el riesgo como los elementos básicos de análisis.

Una vez delimitados como parámetros fundamentales de gestión la rentabilidad obtenida por un activo financiero o por una cartera formada por títulos financieros y el riesgo asociado a dicha inversión, se procede, a continuación, a analizar la consideración que de estos elementos se hace en el modelo pionero de selección de activos formulado por Markowitz [150].

2.12.2 Modelo de Markowitz

El modelo de Markowitz [150] parte de la premisa de que, a partir de la observación y de la experiencia, se pueden establecer expectativas relevantes acerca de los rendimientos futuros que puede ofrecer una determinada inversión. Por esto, el análisis de la rentabilidad de una cartera comienza con el estudio



Figura 2.11: Harry M. Markowitz, (Chicago, 1927 - 2023). Fuente: Dominio Público.

de las inversiones individuales que la conforman para, posteriormente y a partir de los convenientes desarrollos, terminar con la formación de una determinada cartera que el inversor pueda considerar como óptima [150].

De este modo, la cuestión se centra en demostrar cómo, a partir de las expectativas que se crean sobre las rentabilidades esperadas de los activos financieros individuales, se puede realizar una correcta elección de la cartera. Este es el objetivo último, se trata de conseguir un modelo óptimo de selección de carteras [150].

Por un lado, y tal como se ha comentado anteriormente, la rentabilidad es una variable deseada por el inversor financiero que, por tanto, querrá maximizar. Esto implica que el inversor intentará que el valor actual de los rendimientos futuros esperados tenga el mayor valor posible. Sin embargo, y como contraposición, las variaciones de estas rentabilidades supone un componente de riesgo que, por tanto, no será deseado por el inversor.

Todas estas premisas nos llevan a la conclusión que de lo que se trata es de resolver el problema de selección de los activos que conforman una cartera tomando en cuenta que se deben contemplar dos cuestiones divergentes: **rentabilidad y variación de esta rentabilidad**. Un componente de todo el proceso que se debe tomar en cuenta es que un inversor racional está dispuesto a asumir cierto grado de riesgo para obtener algún rendimiento, una vez establecida la aversión por parte de los inversores hacia el riesgo, éstos desearán conocer el nivel de riesgo que soportan [127].

Los inversores estarán interesados por conocer la rentabilidad media de su título, pero también el nivel de variabilidad de sus resultados alrededor de esa media. Esta variabilidad quedará definida por la varianza (o su raíz cuadrada, la desviación típica) [1].

Por eso el modelo de Markowitz es un modelo media-varianza, donde la varianza queda definida de la siguiente forma:

$$\delta_i^2 = \sum_{t=1}^n \frac{(R_{i,t} - E_i)^2}{n} \quad (2.12)$$

δ_i^2 Es la varianza de la variable rentabilidad del título i . E_i es la rentabilidad media del título i en el período de tiempo determinado. $R_{i,t}$ es la rentabilidad del activo i en el período t . n : número de períodos existentes en el horizonte temporal determinado.

2.12.2.1 Rentabilidad de una cartera

Ya definida la rentabilidad de un valor ahora compete definir la rentabilidad de una cartera, la cual será igual a la media ponderada de las rentabilidades de los activos que la componen. Se ponderarán las rentabilidades por el peso específico que cada activo tiene en la cartera [1].

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n w_i E(R_i) \quad (2.13)$$

$E(R_p)$ es la Rentabilidad esperada de la cartera. w_i es el porcentaje de la cartera (en tanto por uno, es decir, si se ha invertido un 50%, entonces $w_i = 0.5$) invertido en la acción i . $E(R_i)$ es la rentabilidad esperada de la acción i .

Si queremos calcular la rentabilidad de una cartera a posteriori, basta con sustituir en la expresión anterior la rentabilidad esperada de cada acción por la que realmente obtuvo en el pasado [1].

Supongamos que existen un conjunto de valores históricos de rentabilidad (ver Cuadro 2.1).

	Activo 1	Activo 2
Año 1	0,18	0,90
Año 2	0,20	0,30
Año 3	0,30	0,40
Año 4	0,12	0,10
$E(R_i)$	0,200	0,425
σ_i^2	0,30	0,40

Tabla 2.1: Rentabilidad anual , esperada ($E(R_i)$) y varianza (σ_i^2) de dos Activos

Se desea invertir :

	Rentabilidad Esperada($E(R_i)$)	Porcentaje que Invertir (w_i)
Activo 1	0,200	40 %
Activo 2	0,425	60 %

la rentabilidad esperada de esta cartera será:

$$E(R_p) = 0,200 * 0,4 + 0,425 * 0,6 = 0,335$$

Esta es la ganancia que un inversor espera obtener de una cartera en un período de tiempo. La rentabilidad real puede ser mayor, menor o igual.

2.12.2.2 Riesgo de una cartera

El riesgo de una cartera formada por dos valores viene dado por la expresión [1], [127]:

$$\sigma_p^2 = w_a^2 \sigma_a^2 + w_b^2 \sigma_b^2 + 2w_a w_b Cov_{ab} \quad (2.14)$$

La covarianza nos indica cuál será el comportamiento de un activo al producirse una variación en el valor del otro, su fórmula es:

$$Cov_{ab} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_a R_b - E(R_a)E(R_b) \quad (2.15)$$

La covarianza dice en qué medida dos acciones se mueven en el mismo sentido; si la covarianza es positiva, quiere decir que cuando una acción sube la otra también sube; si la covarianza es negativa, quiere decir que cuando a sube b baja [1]. La **Tabla 2.2** representa la matriz de covarianzas del ejemplo expresado en la **Tabla 2.1**.

	Activo 1	Activo 2
Activo 1	1,000	0,0035
Activo 2	0,0035	1,000

Tabla 2.2: Matriz de Covarianzas

Un parámetro estadístico que nos indica la relación entre dos acciones, y que es más fácil de interpretar, es el *coeficiente de correlación* [1] ρ_{ab} . Este coeficiente viene dado por la fórmula:

$$\rho_{ab} = \frac{Cov_{ab}}{\sigma_a \sigma_b} \quad (2.16)$$

Donde siempre se da que:

$$-1,00 \leq \rho_{ab} \leq 1,00$$

La interpretación de es la siguiente: si a sube un 20% y b baja un 20%, el coeficiente de correlación valdrá -1; si b sube también un 20%, el coeficiente de correlación valdrá 1. Si a y b no tienen ninguna relación entre sí, el coeficiente de correlación valdrá cero.

2.12.2.3 Criterios para medir la aversión al riesgo

- **Criterio de Varianza Mínima:** Hasta ahora se ha analizado cuál es la rentabilidad y el riesgo de un valor en concreto y posteriormente lo hemos generalizado a una cartera de valores, pero no hemos tenido en cuenta la actitud del inversor ante dichas variables. Se supone que los inversores buscan inhibir el riesgo, es decir, ante dos activos con iguales rentabilidades y diferentes riesgos, el inversor siempre preferirá el activo con menor riesgo. Es lo que se conoce como el *criterio de varianza mínima*. Entre dos activos con igual rentabilidad esperada, se prefiere aquel que tiene menor riesgo. Por lo mismo, a igualdad de riesgo, se preferirá aquel activo con mayor rentabilidad esperada [1].
- **Prima de Riesgo:** Es igual a la diferencia entre la rentabilidad de un activo con riesgo y un activo sin riesgo. La rentabilidad libre de riesgo es la de una inversión en renta fija [1], [74].
- **Función de utilidad del inversor:** El inversor requerirá ciertos niveles de rentabilidad de acuerdo con el riesgo. Por ejemplo, invertirá en fondos de renta fija al 10% con riesgo cero, o en acciones al 15% con riesgo 20%, etc. Estas dos combinaciones de riesgo/rentabilidad pueden ser indiferentes para él [1]. Si se supone en una figura todas las combinaciones de riesgo/rentabilidad que le son indiferentes (o igualmente deseables), obtenemos una curva de indiferencia o curva de utilidad similar a la descrita en la Figura 2.12.

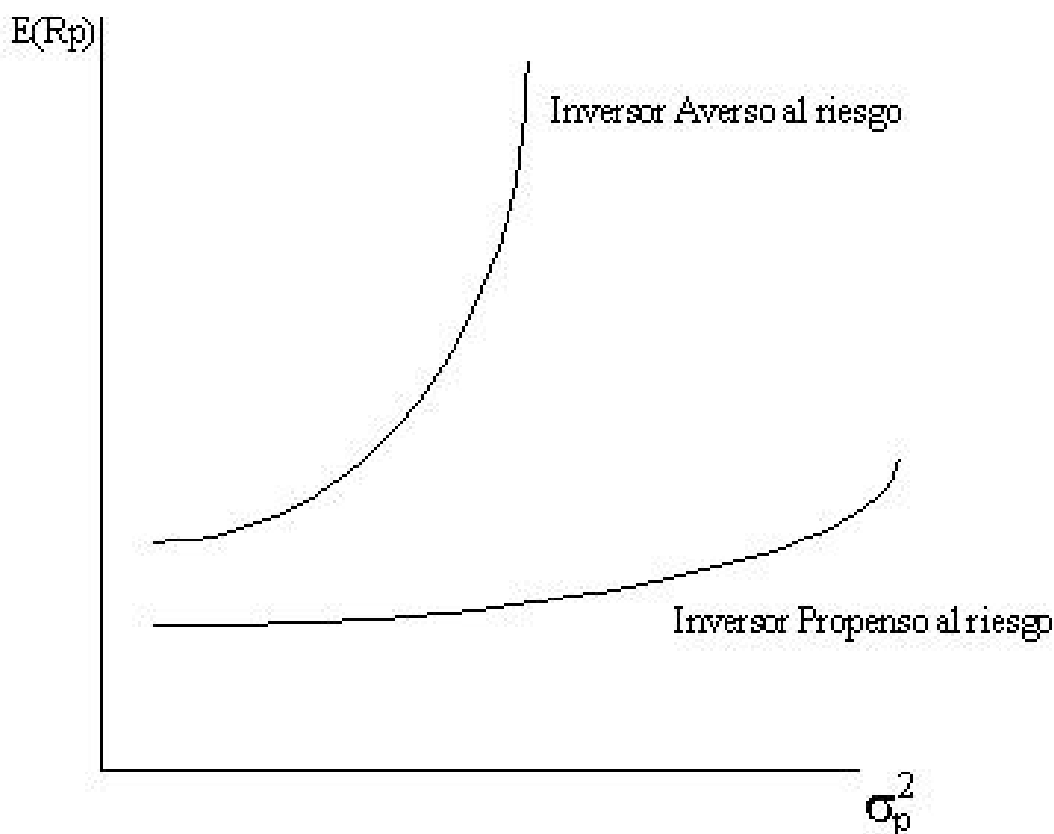


Figura 2.12: Curvas de utilidad del inversor (Fuente: [1])

A medida que el riesgo aumenta, también lo hará la rentabilidad esperada. La rentabilidad aumenta mucho más cuando el riesgo es más alto. Cada una de estas curvas representa la función de utilidad de diversos inversores, con diferente aceptación al riesgo.

Una ecuación que podemos usar como expresión de la función de utilidad es:

$$U = E(R) - \frac{A\sigma^2}{2} \quad (2.17)$$

Donde U es la utilidad y A es un índice que representa la aversión de cada inversor en concreto. El valor de A vendrá definido por cada inversor en función de su aversión al riesgo, y nos indicará la pendiente de la curva de utilidad. Un inversor con una A elevada (superior a 4) indica una fuerte aversión al riesgo, por lo que exigirá incrementos elevados en rentabilidad para un incremento unitario en el riesgo, lo cual implica que la curva de utilidad tendrá una pendiente elevada. Si, por el contrario, el valor de A tiende a cero, la curva tenderá a ser horizontal [1].

Las curvas representan las denominadas curvas de indiferencia (ver 2.12), es decir, la combinación ganancia - riesgo que reporta al inversor igual satisfacción. Las curvas más bajas, es decir, las que parten con una ordenada en origen menor, tienen un índice de satisfacción o utilidad menor, ya que para un mismo riesgo la rentabilidad esperada es menor. La forma cóncava de las curvas de indiferencia, con relación al eje de ordenadas, se corresponde con la conducta bastante usual entre los inversores de mostrar una aversión creciente a los mayores riesgos; es decir, para que la satisfacción se mantenga constante, la relación incremental entre ganancia y riesgo tiene que ser creciente.

El inversor preferirá, entre todas las posibles curvas de utilidad definidas por su aversión al riesgo A , aquella que le dé $E(R) = \text{infinito}$ y riesgo = 0, pero se encuentra limitado por los activos existentes en el mercado, que en ningún caso tienen dichas características. Por ello, se moverá por las curvas de utilidad próximas a los activos existentes.

Es útil observar que para los activos sin riesgo (varianza = 0) la utilidad será igual a la rentabilidad esperada, ya que no existe penalización por riesgo [1].

2.12.2.4 El modelo Markowitz multiobjetivo

El inversionista típico de Markowitz [150] busca la más alta expectativa de rendimiento y el riesgo más bajo posible y está dispuesto a intercambiar riesgo por rendimiento. En los términos actuales, es la descripción de una persona con *aversión* al riesgo. Es fácil cuantificar el rendimiento esperado de una inversión si se conocen los valores iniciales y finales esperados de la misma.

En cuanto al riesgo financiero, desde Markowitz se acepta que una medida de ella es la varianza (o desviación estándar) de los rendimientos [135].

El planteamiento singular de Markowitz tuvo como pilares estos tres conceptos claves [1]:

- El resultado (rendimiento) de una inversión debe ser tratado como un fenómeno estocástico.
- El inversionista típico actúa con aversión al riesgo.
- El riesgo y el rendimiento esperados de los activos de inversión tienen medidas estadísticas en la media y la varianza de una distribución.

La simple observación de la literatura actual y de la práctica de la inversión financiera nos permite comprobar el profundo y duradero impacto de la innovación producida por el trabajo de Markowitz. Sin embargo, su contribución específica más notoria consistió en el desarrollo de un método de selección de inversiones estrictamente para un período, en un contexto de incertidumbre y para inversionistas con aversión al riesgo: el enfoque ahora conocido como media - varianza [1].

Esta supuesta dicotomía establece que cualquier posibilidad que tiene un inversionista de escoger un activo debe estar representada en el mayor rendimiento al menor riesgo. Confluyen en esta decisión dos objetivos:

- Maximización del beneficio o rendimiento.
- Minimización del riesgo.

2.12.2.5 El problema de optimización considerado: Markowitz multiobjetivo con restricciones de cardinalidad

En secciones anteriores definimos el beneficio como la esperanza matemática del conjunto de rendimientos de un activo para un período determinado (**Ecuación: 2.11**). El riesgo es a su vez, la variabilidad del rendimiento esperado, es decir la varianza de éste (**Ecuación: 2.12**). Para dos activos o más entra en juego el cálculo de la covarianza que se interpreta como aquello que mide la influencia del entorno, es decir, la volatilidad o variabilidad de una con respecto a la otra (**Ecuación: 2.15**).

El modelo desarrollado por Markowitz [150] tiene como objetivo obtener un conjunto de n activos que conformen una cartera para lograr el mayor rendimiento posible con el menor riesgo. Para esto se estiman las rentabilidades promedio y su respectiva variabilidad. Además de esto se calculan las diferentes correlaciones o covarianzas entre los activos sujetos de estudio.

El modelo de Markowitz expresado con múltiples objetivos quedaría así:

$$\begin{aligned} \min \sigma^2(R_p) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} \quad \text{si } i = j \quad \sigma_{ij}^2 = \sigma_i^2 \\ \max E(R_p) &= \sum_{i=1}^n w_i E(R_i) \end{aligned} \quad (2.18)$$

o

$$\max E(R_p) = \min(-E(R_p)) \quad (2.19)$$

sujeto a:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

donde $w_i \geq 0$ es la proporción del presupuesto del inversor destinado al activo financiero i e incógnita del problema, $\sigma^2(R_p)$ es la varianza de la cartera p , y σ_{ij} es la covarianza entre los rendimientos de los valores i y j , y $E(R_p)$ es la rentabilidad o rendimiento esperado de la cartera p .

A este modelo se le pueden agregar algunas otras restricciones, como por ejemplo:

1. Cardinalidad: Un máximo de K pesos es diferente de cero.
2. Limite en el porcentaje de asignación para un activo.

En este trabajo se desarrollaron los métodos basados en las restricciones del primer tipo, esto es, al modelo presentado en la ecuación (2.18) se le agrega una restricción más que tiene que ver con la cardinalidad, es decir, un máximo de K pesos $sign(w_i)$ es diferente de cero.

$$\sum_{i=1}^n sign(w_i) = K \quad (2.20)$$

El conjunto de pares $[E(R_p), \sigma^2(R_p)]$ o combinaciones rentabilidad-riesgo de todas las carteras eficientes (esto es, de aquellas carteras en las que no puede aumentarse la rentabilidad sin aumentar el riesgo ni disminuir el riesgo sin que la rentabilidad también disminuya) es denominado frontera eficiente (ver 2.3). Una vez conocida ésta, el inversor, de acuerdo con sus preferencias y el nivel de riesgo que está dispuesto a asumir, elegirá su cartera óptima [227]. Al margen de este criterio de índole más subjetivo para cada inversor, existe en la literatura financiera una medida de desempeño que los expertos en finanzas utilizan para cuantificar y comparar que tan buen resultado da una cartera conformada por un conjunto de activos sobre otra. Esta medida es el índice de Sharpe [188].

2.12.3 Índice de Sharpe.

La medición del *performance*, o del resultado o rendimiento, nos permite obtener una medida de la calidad de gestión de las carteras formadas por títulos financieros en base a la rentabilidad y al riesgo. Además, nos facilita la comparación entre ellas mediante medidas homogéneas [188].

La medida de *performance* que nos hemos planteado inicialmente es el índice de Sharpe [188], cuya expresión es la siguiente:

$$S_p = \frac{E(r_p) - r_f}{\sigma_p} \quad (2.21)$$

Este índice es un cociente prima-riesgo. El numerador es el exceso de rendimiento definido por la diferencia entre el rendimiento de la cartera ($E(r_p)$) y el tipo de rendimiento sin riesgo (r_f) en el mismo período de valoración. El riesgo de la cartera se mide por la desviación estándar de ésta (σ_p). Es decir, indica la prima de rentabilidad que ofrece una cartera de valores por unidad de riesgo total de la misma. Se deduce que cuanto mayor sea el cociente prima-riesgo, es mayor el éxito de la gestión del fondo [1], [188], [127].

El índice de Sharpe puede además tener una interesante interpretación geométrica. La ecuación descrita en 2.21 es una línea recta que es tangente a la curva determinada por el conjunto óptimo de carteras (frontera de Pareto eficiente) en el plano de (X =riesgo, Y =rendimiento) como resultado de la solución del modelo de Markowitz (ver Figura 2.13). Dicha línea además corta al eje Y en la tasa libre de riesgo r_f .

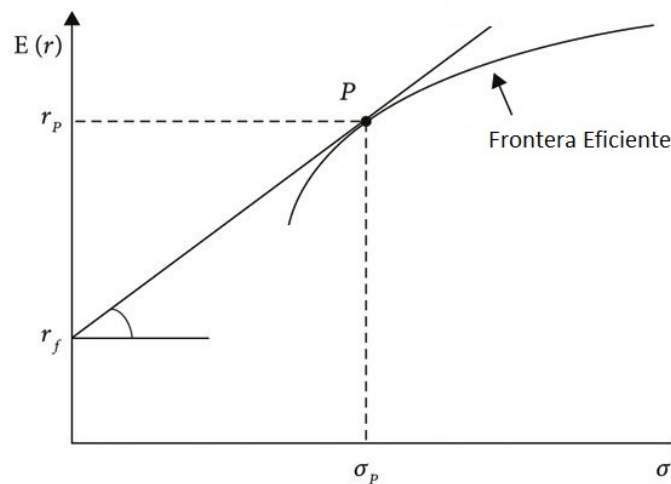


Figura 2.13: Interpretación geométrica índice de Sharpe. Fuente: Elaboración Propia.

Además, dadas dos carteras \mathbf{w}_1 y \mathbf{w}_2 , si la última domina (en sentido de Pareto) a la primera –es decir, $E[R(\mathbf{w}_1)] \leq E[R(\mathbf{w}_2)]$ y $\sigma^2(\mathbf{w}_1) \geq \sigma^2(\mathbf{w}_2)$, con al menos una de las desigualdades siendo estricta– entonces debe tener un valor de índice de Sharpe más alto (porque \mathbf{w}_2 tendría un numerador mayor y un denominador menor en la ecuación (2.21)). Esto sugiere que el ratio de Sharpe se puede utilizar dentro de un optimizador multiobjetivo para moverse hacia el frente de Pareto.

2.13 Contribuciones

En este capítulo fueron presentados los conceptos básicos relacionados con las técnicas metaheurísticas en general, enfocándonos en los elementos que las caracterizan, así como una descripción básica de los pseudocódigos más relevantes. En particular se abordan los métodos basados en trayectorias y en poblaciones que son las principales técnicas utilizadas en los siguientes capítulos del presente trabajo de investigación, especialmente el uso de algoritmos evolutivos multiobjetivo. Además, se han presentado aspectos importantes sobre temas financieros de gestión de carteras de inversión, sobre el modelo de Markowitz y como puede ser abordado a través de las técnicas híbridas. La idea es introducir al lector en este tema de tal forma que le facilite la lectura y comprensión de las ideas que deseamos expresar en el presente trabajo. Se trata de una contribución a nivel de esta memoria de tesis, más que a nivel del estado del arte que se presentará en el siguiente capítulo.

PROPUESTA METODOLÓGICA PARA REVISIÓN DE LITERATURA RELACIONADA

En este Capítulo se esboza una propuesta metodológica (Sección 3.2) para hacer un análisis de un corpus bibliográfico sobre una temática específica. El objetivo fundamental es cartografiar la literatura existente (Sección 3.3) sobre dicha temática, de manera que un usuario interesado en la misma pueda disponer de una cierta estructura a la hora de realizar un estudio de la misma. Partiendo de la información que una consulta bibliográfica en una base de datos de referencia pueda disponer, se considera un análisis para establecer un marco metodológico, centrado en los ítems bibliográficos como elementos de interés. En dicho análisis se intenta realizar una clasificación de los ítems de la literatura en conjuntos relacionados mediante algoritmos de agrupamiento (trabajando en este caso sobre una matriz de distancia entre artículos obtenida a partir de la similitud léxica entre sus descriptores bibliográficos). En este estudio además, se analiza la estructura interna de estos grupos y se intenta encontrar un orden de revisión adecuado mediante el empleo de algoritmos evolutivos. Posteriormente, se realiza un análisis de redes sobre los datos de co-ocurrencia de términos, con el objeto de determinar términos relevantes y asociaciones de interés entre los mismos (Sección 3.4). Esta metodología se ilustra en este trabajo con un caso de estudio sobre la aplicación de metaheurísticas y algoritmos bioinspirados a problemas de optimización de carteras de inversión.

3.1 Introducción

La capacidad de revisar e informar sobre literatura relevante es una habilidad académica clave. Una revisión de la literatura, puede:

1. Situar el enfoque de investigación dentro del contexto de la comunidad académica más amplia en su campo;
2. Generar un criterio acerca de la literatura que puede parecer relevante;
3. Identificar una brecha dentro de esa literatura que la investigación intentará abordar.

Hasta cierto punto, la revisión de la literatura puede convertirse en un proyecto en sí mismo. Es una muestra importante de los talentos inherentes a la comprensión, interpretación, análisis, claridad de pensamiento, síntesis y desarrollo de argumentos.

El proceso de realizar y reportar una revisión de literatura puede ayudar a aclarar los pensamientos sobre su estudio específico. También puede establecer un marco dentro del cual presentar y analizar los resultados.

La revisión del estado del arte en un tema específico supone hoy en día para los investigadores un esfuerzo muy grande, en un desgaste de recursos y de tiempo. Dicha exploración es importante para comprender los avances que se han dado sobre un problema, las posibles soluciones y en un esquema colaborativo lograr la no repetición de investigaciones para avanzar mucho más rápido.

Uno de los problemas más comunes en la revisión de la literatura resulta en que no se puede discriminar entre los materiales disponibles en las bibliotecas digitales aquellos que pueden ser relevantes a una investigación. Esto puede pasar por el número muy alto de publicaciones que puede tener un tema específico. La clasificación automatizada de la sintáctica a través de los títulos, resúmenes o abstract y palabras claves pueden ayudar a no pasar por alto este problema.

La adopción de los viejos modelos para hacer revisión bibliográfica de un tema específico supone contextualizar y estar en una constante actualización, para poder brindar al investigador de unas bases que le permitan establecer un claro diferenciador de sus nuevos resultados producto de su propia investigación. La admisión de una perspectiva focalizada en su propio nicho de investigación también trae consigo un problema por cuanto no da una visión más amplia del tratamiento que se le da a una investigación en diferentes países.

La clasificación de la relevancia o no de un texto en particular también resulta en un problema al hacer una revisión de un tema específico. El usar herramientas que automáticamente definan relaciones y sistematicen la visión del campo de trabajo en un área determinada ya de por sí implica hacer un valioso aporte en el área de investigación que se piense abordar. Este estudio abarca una propuesta metodológica para ordenar la búsqueda de información dado un tema específico haciendo un desglose y clasificación jerarquizado y permitiendo comprender mejor en qué situación real está alguna temática sujeta de estudio.

3.2 Propuesta metodológica

Se propone el desarrollo de un marco metodológico reproducible y que puede ser capaz de aportar una guía para obtener un mecanismo claro y camino para desarrollar un buen análisis documental. Se ha desarrollado un estudio comparativo y análisis de artículos afines a un temario específico, logrando establecer su grado de correlación y diferenciación. Aunado a esto se ha completado un estudio de la conformación de una red de tópicos que se están abordando en un área de interés específica (existen trabajos en este campo, se sugiere revisar [41]).

Para el marco metodológico, Se parte de un conjunto de datos $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$, donde cada A_i es un ítem bibliográfico descrito mediante una cadena de texto (su título y/o abstract, palabras claves, etc.). Este conjunto de datos se obtiene de una consulta sobre una base de datos bibliográfica relevante (véase la Sección 3.3) y ha de ser preprocesado antes de proceder al análisis. Posteriormente, se realiza un proceso de lematización (*stemming*)³ y filtrado que tiene por objetivo (1) eliminar de los descriptores aquellos términos que no aportan nada (por tratarse de palabras conectoras o desprovistas de información semántica relevante para los propósitos del análisis) y (2) eliminar cualquier tipo de flexión gramatical (identificando de esta forma la raíz de cada término con independencia de su morfología concreta, e.g.,

³En este trabajo se empleó la biblioteca de lematización disponible en el *Text Analytics Toolbox*TM de Matlab®.

singular/plural, formas verbales, sufijos, etc.). El resultado es que cada ítem bibliográfico A_i pasa ahora a estar definido por una colección $L_i = \{l_{i,1}, \dots, l_{i,n_i}\}$ de lexemas.

La dinámica de la primera fase (en un sentido puramente enunciativo, ya que ambas son independientes y podrían realizarse en cualquier orden) es ahora como sigue:

1. En primer lugar, se realiza una partición de los ítems bibliográficos en conjuntos relacionados. Esto puede realizarse de diferentes formas dependiendo del método de agrupamiento que se considere. Para este caso, una solución efectiva puede ser el empleo de un algoritmo clásico como el de las k -medias [106, 143, 147]. Este algoritmo recibe una matriz M de tamaño $m \times p$ donde cada fila (una por ítem bibliográfico) es un vector p -dimensional (para este estudio estos son los vectores de incidencia de la colección de términos del ítem correspondiente sobre el conjunto total de términos; esto es, p es la cardinalidad del conjunto $\cup_i L_i$, y $M_{i,j} = 1$ si L_i contiene el término j -ésimo y $M_{i,j} = 0$ en otro caso), y trata de agrupar iterativamente los elementos en k grupos, determinando en cada paso el centroide del mismo y asignando cada elemento en el siguiente paso al grupo cuyo centroide es más cercano. En este trabajo la distancia a los centroides (la media de los vectores de los elementos del grupo) se determina mediante el complemento de la similitud coseno [190], y el número de grupos se determina a posteriori mediante el método Silhouette [181].

Una vez disponemos de los grupos, se procede a determinar un orden de los ítems del mismo. Dicho orden tiene por objeto proporcionar al usuario una guía mediante la cual revisar secuencialmente el grupo de tal forma que ítems en posiciones adyacentes sean lo más similares posibles (y por lo tanto se facilite el análisis de estos elementos bibliográficos). Para ello, se necesita calcular una matriz de distancias $D = \{d_{i,j}\}_{i,j=1..m}$ entre artículos. Dicha matriz puede calcularse de numerosas formas. En este trabajo se optó por simplicidad por una medida sencilla basada en la proporción de términos comunes entre artículos. De manera más precisa, consideramos

$$d_{i,j} = 1 - \frac{|L_i \cap L_j|}{|L_i \cup L_j|}$$

donde L_i , y L_j son las colecciones de lexemas asociadas a los ítems bibliográficos concretos, tal como se indicaba anteriormente. Así, la distancia queda definida como el complemento del grado de similitud de conjuntos de Jaccard [40]. El problema al que nos enfrentamos es por lo tanto el de encontrar un camino hamiltoniano de peso mínimo sobre la base de esta matriz de distancia (obviamente considerando en cada caso únicamente los ítems incluidos en cada grupo). Este es un problema NP-duro para el que pueden emplearse diferentes heurísticas. En este trabajo se ha empleado un método reminiscente desarrollado en análisis filogenético [160]. Concretamente, determinamos una clasificación arbórea de los elementos del grupo y –explotando intercambios izquierda-derecha dentro del árbol– se busca una disposición de las hojas de manera que un recorrido de izquierda a derecha minimize la suma de distancias entre elementos adyacentes. El cálculo de la clasificación en árbol se realiza mediante un algoritmo de agrupamiento aglomerativo mediante *average-linkage*, y la determinación de los intercambios izquierda-derecha que minimizan la distancia resultante mediante un algoritmo evolutivo⁴

2. Procesamiento: Esta fase comprende la creación de una matriz de ocurrencia de la forma:

$$\begin{pmatrix} & \text{keyword}_1 & \text{keyword}_2 & \dots & \text{keyword}_n \\ \text{Titulo}_1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \text{Titulo}_2 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Titulo}_n & 0 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

⁴Nótese que en un árbol binario completo con n hojas hay $n - 1$ nodos internos, en cada uno de los cuales se puede aplicar un intercambio izquierda/derecha. Por lo tanto, dentro del algoritmo evolutivo las soluciones son vectores binarios de longitud $n - 1$, pudiendo emplearse operadores estándares para recombinación y mutación.

$Titulo_{keyword}$	$keyword_1$	$keyword_2$	\dots	$keyword_n$
$Titulo_1$	1	0	\dots	1
$Titulo_2$	1	0	\dots	1
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
$Titulo_n$	0	1	\dots	1

Tabla 3.1: Matriz de Ocurrencias $M(n, n)$

A continuación se debe calcular la matriz de distancias que se construye a través de la utilización de una métrica que mide el complemento del grado de similitud de conjuntos de Jaccard [40] de la forma $D(X, Y) = 1 - J(X, Y)$ donde, $J(X, Y) = |X \cap Y| / |X \cup Y|$.

3. Segmentación: Se aplica a la matriz de distancia un método de segmentación basado en k-medias [106] para definir el número de cluster jerárquicos.
4. Cluster Jerárquico: Cada grupo segmentado en la etapa anterior se le aplica un agrupamiento jerárquico usando el método de la distancia promedio (Leaking mean) [175]. Esto da como resultado un árbol o dendograma al cual se le aplica un algoritmo genético para determinar el orden de los artículos que nos da una ruta para la revisión.

En cuanto al análisis de términos se parte del conjunto $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_m\}$ descrito anteriormente siguiendo en parte lo presentado en [41]. A partir de este conjunto se considera la colección global de términos usados $U = \cup_{i=1}^m L_i$, de donde se eliminan aquellos términos que solo aparecen una sola vez para que queden sólo términos significativos a nivel de la muestra bibliográfica⁵. Hecho esto, se construye un grafo con pesos $G(V, E, W)$ en el que

- V es el conjunto de términos seleccionados.
- $E = \{(u, v) \mid \exists i : (u \in L_i) \wedge (v \in L_i)\}$, esto es, una arista entre términos que aparecen en un mismo ítem.
- $W((u, v)) = \sum_{i=1}^m [\{u, v\} \subseteq L_i]$, donde $[\cdot]$ representan los paréntesis de Iverson. Esto es, el peso de cada arista es el número de veces que dos términos aparecen en el mismo ítem.

Una vez determinado este grafo se aplican algoritmos de detección de comunidades para identificar subconjuntos de términos frecuentemente emparejados. Estos subconjuntos representan subdominios temáticos dentro de la muestra bibliográfica considerada, cuya consistencia con los conjuntos anteriormente identificados vamos a estudiar. En este trabajo hemos considerado el empleo del algoritmo de modularidad de Blondel et al. [22] para esta fase.

3.3 Datos utilizados en el análisis

Para realizar un caso de estudio de la metodología anterior se escogió DBLP⁶ como fuente de datos. Esta base de datos, mantenida por el equipo de DBLP en la Universidad de Trier, proporciona información

⁵De hecho, sería posible fijar un umbral de relevancia más alto. Para esto se pueden tener en cuenta de alguna manera la amplitud de la muestra bibliográfica considerada. Este es un aspecto que no se ha considerado en este trabajo.

⁶<https://dblp.uni-trier.de/>

bibliográfica sobre las principales revistas y actas de conferencias de informática, enumerando más de 3 millones de publicaciones. Constituye por lo tanto un recurso muy comúnmente empleado para realizar búsquedas bibliográficas en el área que interesa.

En este trabajo se eligió como caso de estudio la aplicación de técnicas metaheurísticas a la optimización de carteras de inversión. Para ello, hemos realizado una búsqueda sobre DBLP para recuperar artículos que contienen al menos un término relacionado con las metaheurísticas y al menos un término relacionado con las carteras de inversión. Con respecto a lo primero, los términos considerados son:

- Evolutionary
- Genetic
- Swarm
- Aco
- Metaheuristic
- Tabu

En cuanto a lo segundo, se consideraron:

- Portfolio
- Investment
- Markowitz
- Sharpe

Obviamente, tanto en un caso como en otro podrían haberse considerado términos adicionales, pero la muestra bibliográfica obtenida es en cualquier caso lo suficientemente amplia como para realizar un primer estudio. La búsqueda conjunta en la base de datos arrojó una muestra total de 4038 referencias (ver Figura 3.1), de los cuales:

1. 103 fueron removidos por ser duplicados.
2. 978 se excluyeron por filtración de palabras clave, títulos, resúmenes y lenguaje.
3. De 2957 documentos elegibles, que se evaluaron con base a la Ley de Bradford [29], se excluyeron 2583 por no encontrarse en el núcleo.

La Ley de Bradford [29] permite identificar y clasificar las distintas fuentes más relevantes y actualizadas de revistas, artículos y congresos con mayor impacto en los temas de interés del investigador. Esta Ley consiste en decantar la información dispersa en tres zonas: la primera denominada zona núcleo agrupa el mayor número de citas con el menor número de revistas, la segunda denominada zona central requiere el mismo número de citas, pero con mayor cantidad de revistas y la tercera zona, la zona menor requiere mayor cantidad de revistas con el mismo número de citas, lo cual contribuye a categorizar las principales revistas en los temas de interés [7], [144]. En la Figura 3.2 se puede observar como la aplicación de la Ley de Bradford permite visualizar que fuentes documentales destacan en el núcleo y que cantidad de artículos proporcionan.

Además, Locatelli et al. [144] destacan que el impacto de estas fuentes es determinado por tres índices para contrastar la producción académica y que se tomaron en cuenta para la realización de este estudio:

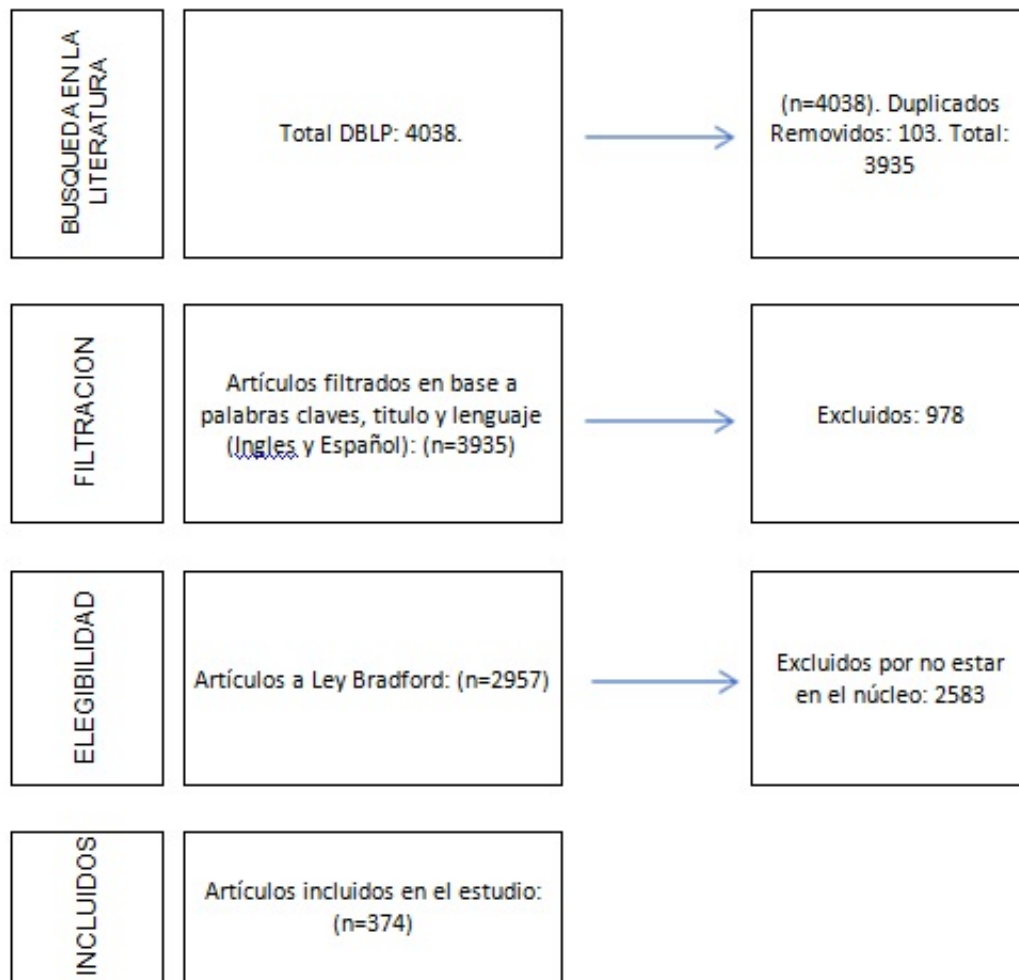


Figura 3.1: Revisión de artículos del estudio bibliométrico

1. El índice H es el índice de Hirsch, que comprende el número de artículos citados por un autor el cual evalúa la calidad profesional de los investigadores, entonces a mayor índice H, mayor impacto tiene el autor en esa temática, es decir; si $H=7$ quiere decir que hay 7 publicaciones que han recibido al menos 7 citas cada una [90].
2. El índice G, similar al índice H, se refiere a la citación global de la cantidad de artículos de los investigadores, pero es más grande y con mayor variabilidad lo que permite diferenciar entre investigadores con parecido índice H. Este índice se calcula tomando como referencia la citación de sus autores en orden descendente, especificando su posición de la publicación creando luego dos columnas para cuantificar el número de citaciones acumuladas y su posición al cuadrado, es decir; si el índice es G es 15, entonces las citas acumuladas de estas 15 publicaciones son mayor a 15 elevado al cuadrado [76].
3. El índice M es medido por el índice H/n , donde n es el número de años desde que se realizó la primera publicación del investigador, con el objeto de capturar el número y calidad de las publicaciones [91].

La consulta anterior devolvió 374 artículos (ver Figura 3.1). Puede notarse que cada uno de estos artículos está caracterizado únicamente por su título (otras bases de datos bibliográficas pueden

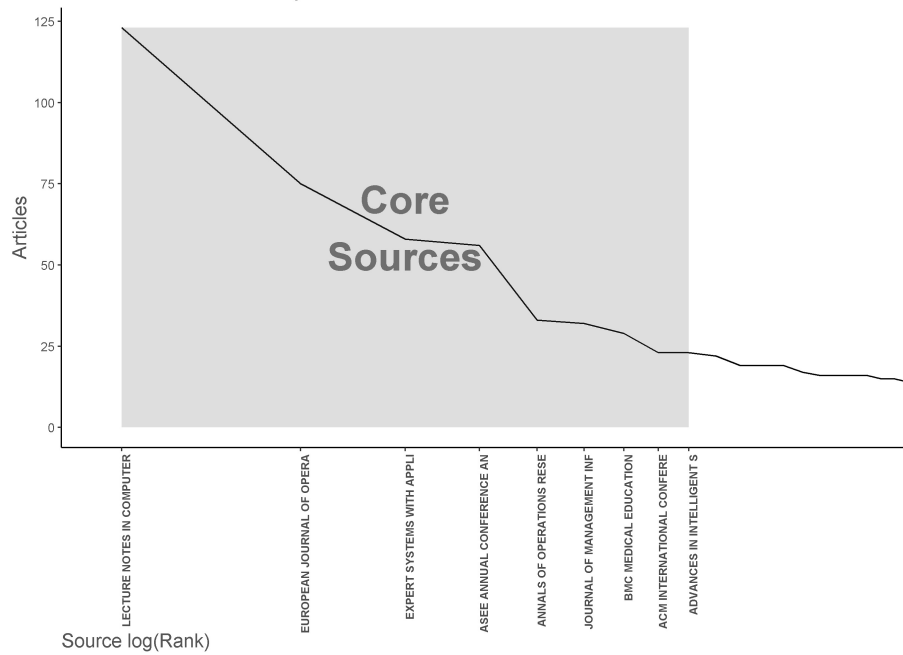


Figura 3.2: Ley de Bradford aplicada al contexto de metaheurísticas y algoritmos bioinspirados a problemas de optimización de carteras de inversión.

proporcionar además el resumen de los artículos, pero no es este el caso).

En la Figura 3.3 se puede visualizar nube de palabras que presenta el estudio general de la base de datos compuesta por los 374 documentos.

En la Figura 3.4 se pueden visualizar las fuentes documentales más relevantes para el área objeto de estudio. *Lecture Notes In Computer Science* (incluye las *Subseries Lecture Notes In Artificial Intelligence And Lecture Notes In Bioinformatics*) es la fuente documental que más artículos proporciona.

En la Tabla 3.2 se puede visualizar que fuentes documentales tienen mayor factor de impacto:

Documentary Source	h_index	g_index	m_index
EUROPEAN JOURNAL OF OPERATIONAL RESEARCH	31	56	1,069
EXPERT SYSTEMS WITH APPLICATIONS	29	58	1,526
JOURNAL OF MANAGEMENT INFORMATION SYSTEMS	26	32	0,765
ANNALS OF OPERATIONS RESEARCH	20	33	0,571
APPLIED SOFT COMPUTING JOURNAL	15	22	1,154
BMC MEDICAL EDUCATION	14	26	0,778
LECTURE NOTES IN COMPUTER SCIENCE	14	22	0,519
OPERATIONS RESEARCH	14	19	0,35
INTERNATIONAL JOURNAL OF PROJECT MANAGEMENT	13	14	0,394
JOURNAL OF BANKING AND FINANCE	13	17	0,289
MEDICAL EDUCATION	12	13	0,5
COMPUTERS AND OPERATIONS RESEARCH	10	14	0,238
MANAGEMENT SCIENCE	10	12	0,244

Tabla 3.2: Principales Fuentes Documentales y su Factor de Impacto



Figura 3.3: Nube de Palabras Base de Datos en el contexto de metaheurísticas y algoritmos bioinspirados a problemas de optimización de carteras de inversión.

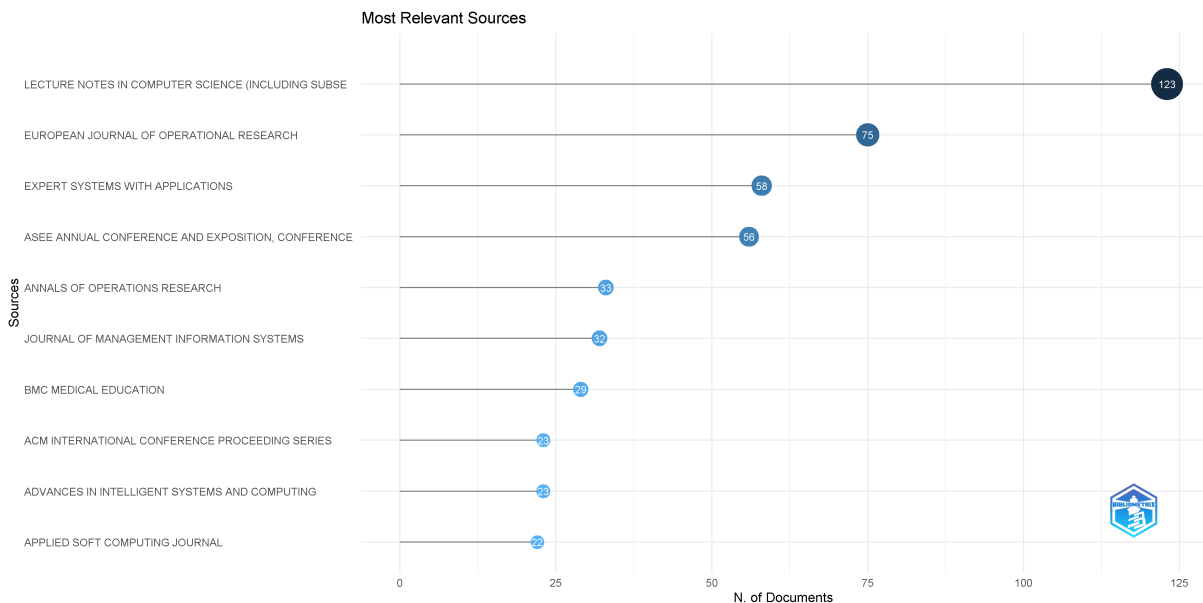


Figura 3.4: Fuentes Documentales más relevantes en el contexto de metaheurísticas y algoritmos bioinspirados a problemas de optimización de carteras de inversión.

Para obtener una visión más precisa y una mejor caracterización de estos grupos, la Tabla 3.3 muestra el tamaño y los términos más comunes en estos grupos. Para obtener información más clara acerca de los términos que resultan más distintivos en cada uno de los grupos, se asocia a cada término un peso que corresponde a su frecuencia absoluta ponderada por cuánto más frecuentemente se usa ese término en el grupo en cuestión frente al conjunto global. De manera más precisa, sean G_1, \dots, G_k los k grupos identificados. Ahora, sea $c_{i,j}$ definido como

$$c_{i,j} = \sum_{s \in G_i} M_{s,j}$$

esto es, la frecuencia absoluta de utilización del término j -ésimo en el grupo i -ésimo. Si definimos la frecuencia global c_j como

$$c_j = \sum_{i=1}^k c_{i,j}$$

entonces podemos definir las frecuencias relativas $f_{i,j}$ y f_j como:

$$f_{i,j} = \frac{c_{i,j}}{\sum_{r=1}^p c_{i,r}}$$

$$f_j = \frac{c_j}{\sum_{r=1}^p c_r}$$

y el peso $w_{i,j}$ de cada término en un grupo como

$$w_{i,j} = c_{i,j} \cdot \frac{f_{i,j}}{f_j}$$

Si se observan los 5 términos con más peso dentro de cada uno de los grupos, podemos apreciar que los grupos más grandes (el grupo 1 y el grupo 5) gravitan en torno a programación genética y en torno a algoritmos evolutivos multiobjetivo (AEMO) respectivamente. Es interesante esto último ya que la búsqueda bibliográfica no incluía directamente términos relativos a la optimización multiobjetivo, pero el análisis automatizado ha sido capaz de identificar esta importante vertiente en relación con la selección de carteras de inversión. Los otros tres grupos son de tamaño algo menor y también se organizan en torno a diferentes técnicas. Así, en el grupo 4 resalta sobremanera la optimización mediante enjambres de partículas. Por su parte en el grupo 3 resalta el empleo del término *metaheuristic*. De hecho, en este grupo también se incluyen otros términos como *ant* entre los 10 más utilizados (peso = 16,21). El grupo 2 parece tener un componente importante de algoritmos genéticos, pero no es el término más empleado ni más distintivo. Cabe de hecho reseñar que en este grupo aparece el término *neural* en el puesto 10 (peso = 13,17), lo que hace atisbar la mayor heterogeneidad metodológica de este grupo de trabajos. En este sentido, parece que este grupo está más orientado hacia aspectos más financieros que algorítmicos. Así, resaltan los términos *investment*, *resource* y *scheduling*, relativos a la planificación de inversiones y a tipos de estas. El término *mutual*, correspondiente a un tipo de fondos de inversión también es uno de los que se pueden encontrar en este grupo (puesto 19, peso = 12,65).

El siguiente paso es realizar una ordenación de los trabajos incluidos en cada grupo con objeto de proporcionar al investigador una guía de lectura/revisión de los mismos. Para ello se ha empleado un algoritmo evolutivo operando sobre un agrupamiento jerárquico de estos trabajos, tal como se describió en la Sección 3.2. En este trabajo hemos considerado un algoritmo evolutivo generacional con elitismo, con una población de 50 individuos, un número máximo de evaluaciones de 25000, cruce de un punto ($p_x = 0,9$) y mutación binaria bit-flip ($p_m = 1/\ell$, donde ℓ es la longitud del genoma; en este caso $\ell = |G_i| - 1$, como se apuntó anteriormente). La Tabla 3.4 muestra un extracto de esta ordenación para uno de los grupos considerados. Nótese como hay la secuencia de trabajos guarda cierta consistencia, lo que puede facilitar la revisión de los mismos al permitir considerar temáticas relacionadas de manera sucesiva. Obviamente, la ordenación se ha realizado mediante un procedimiento heurístico, por lo que no

Tabla 3.4: Extracto de la ordenación de artículos correspondiente al grupo 2.

Data Transformation Methods for Genetic-Algorithm-Based Investment Decisions.
A Decision Investment Model to Design Manufacturing Systems based on a genetic algorithm and Monte-Carlo simulation.
A Sustainable Energy Investment Planning Model Based on the Micro-Grid Concept Using Recent Metaheuristic Optimization Algorithms.
Maximisation of investment profits - An approach to MACD based on genetic algorithms and fuzzy logic.
Extraction of investment strategies based on moving averages – A genetic algorithm approach.
Optimizing investment strategies based on companies earnings using genetic algorithms.
Genetic Algorithm-based Optimal Investment Scheduling for Public Rental Housing Projects in South Korea.
Multi-objective Optimal Public Investment - An Extended Model and Genetic Algorithm-Based Case Study.
A Genetic Algorithm-Based Double-Objective Multi-constraint Optimal Cross-Region Cross-Sector Public Investment Model.
Multi-layered security investment optimization using a simulation embedded within a genetic algorithm.
Combining Support Vector Machine with Genetic Algorithms to optimize investments in Forex markets with high leverage.
Genetic algorithms to optimise the time to make stock market investment.
A novel methodology for stock investment using high utility episode mining and genetic algorithm.
The Random Neural Network with a Genetic Algorithm and Deep Learning Clusters in Fintech – Smart Investment.
Fintech Bitcoin Smart Investment Based on the Random Neural Network with a Genetic Algorithm.
Application of BP Neural Network Based on Genetic Algorithm Optimization in Evaluation of Power Grid Investment Risk.
The Modeling of Genetic and Tabu Search Algorithm Based BP Neural Network in the Risk Analysis of Investment.
Kohonen's neural network and evolutionary algorithms in searching for financial investment strategy.

hay garantía de optimalidad y ciertamente puede ser posible encontrar mejores ordenaciones ajustando los parámetros del algoritmo o incluso empleando otro enfoque de optimización. Nótese también un aspecto tangencial a lo anterior pero también relevante: en toda búsqueda bibliográfica van a aparecer con gran probabilidad falsos positivos que –aunque satisfagan los criterios de búsqueda– no se correspondan con la temática. Si hay un factor común en estos falsos positivos, la metodología mostrada los va a identificar y agrupar, lo que facilitará su posterior cribado.

La herramienta da como resultados cinco grandes nichos de investigación en el área objeto de estudio:

1. Técnicas de optimización multiobjetivo usando indicadores de Sharpe o Modelo de Markowitz.
2. Técnicas de optimización multiobjetivo para la propuesta de carteras de inversión.
3. Técnicas metaheurísticas para carteras de inversión con restricciones de diferentes tipo.
4. Técnicas híbridas para abordar el problema de optimización de carteras de inversión.
5. Exploración exhaustiva de la frontera de Pareto a través de AEMOs

3.4.1 Grupo 1: Técnicas de optimización multiobjetivo usando indicadores de Sharpe o modelo de Markowitz

Santos, J.R. et al. [185] presentan en este artículo la necesidad de una métrica de riesgo más robusta. Al invocar los principios del método de análisis de riesgo extremo a través del método de riesgo multiobjetivo particionado (PMRM por sus siglas en ingles), los autores consideran que este artículo contribuye a la modelación de riesgos extremos en el desempeño de la cartera. Una medida de un riesgo de cartera extremo, denotado por f_4 , se define como la expectativa condicional para una región de cola inferior de la distribución de los posibles rendimientos de la cartera. Este artículo presenta una formulación de problemas multiobjetivos que consiste en optimizar el retorno esperado y f_4 , cuya solución se determina utilizando el software *Evolver*⁷ que implementa un algoritmo genético. En los escenarios de mercado habituales, los resultados del modelo de selección de cartera PMRM propuesto son compatibles con los del modelo basado en la volatilidad. Sin embargo, bajo condiciones de mercado extremadamente desfavorables, los autores revelan que los resultados indican que f_4 puede ser una medida de riesgo más válida que la volatilidad.

⁷<https://lumivero.com/products/decision-tools/evolver/>

Lwin, K.T. [146] consideran un modelo de media-varianza de Markowitz alternativo en el que la varianza se reemplaza por una medida de riesgo estándar de la industria, el Valor en Riesgo (VaR), para evaluar mejor la exposición al riesgo de mercado asociada con las fluctuaciones de precios de activos financieros. Proponen un algoritmo evolutivo multiobjetivo híbrido guiado por aprendizaje eficiente para resolver los problemas de optimización de la cartera de VaR medio con limitaciones del mundo real como la cardinalidad. Una estrategia de generación de soluciones guiadas por el aprendizaje se incorpora al proceso de optimización de objetivos múltiples para promover una convergencia eficiente guiando la búsqueda evolutiva hacia regiones prometedoras del espacio de búsqueda. El algoritmo propuesto se compara con el algoritmo genético de clasificación no dominado (NSGA-II) y el algoritmo evolutivo (SPEA2). Los resultados muestran que la propuesta híbrida presenta un mejor desempeño.

Jalota, H. et al. [117] proponen automatizar el proceso de ajuste de los parámetros inciertos de un problema de selección de cartera de objetivos múltiples mediante la generación de números difusos L-R. También se proponen cuatro nuevos modelos de selección de cartera en un marco Credibilístico de criterios múltiples. Además, se propone y diseña un subalgoritmo denominado "Algoritmo de Entropía-Entropía Cruzada (ECE)" que se integra dentro de un algoritmo genético "MIBEX-SM" y se utiliza para resolver la optimización de la cartera propuesta. Se considera como fuente de datos los valores históricos de los activos, y dicha propuesta da como resultado un sistema automatizado que es lo suficientemente inteligente como para extraer la información requerida para ajustar el número difuso L-R sin necesitar ninguna intervención humana para establecer los parámetros del problema. Se introduce una estrategia de sistema de apoyo a la toma de decisiones para comparar el rendimiento de los modelos al proponer una versión modificada del índice de Sharpe en un contexto difuso, denominada "Relación de Sharpe Credibilística".

Nguyen, T.T. et al. [166] presentan una nueva medida de riesgo de cartera que es la incertidumbre del rendimiento difuso de la cartera, para calcular al índice de Sharpe que en este nuevo contexto lo llaman relación de Sharpe difusa. Se establece un modelo multiobjetivo en el que se minimiza la incertidumbre de los rendimientos difusos de la cartera, mientras que la relación de Sharpe difusa se maximiza. Dicho modelo se resuelve mediante el uso de un enfoque difuso o con la implementación de un algoritmo genético (GA). Como resultado, los autores señalan que el enfoque difuso presenta mejores soluciones que la estrategia GA.

Farzi, S. et al. [80] han propuesto un enfoque basado en la Optimización de enjambre de partículas de comportamiento cuántico (QPSO) para el problema de selección de cartera. La optimización de enjambre de partículas (PSO) es un conocido algoritmo de inteligencia de enjambres basado en la población. QPSO también se propone combinando la filosofía clásica de PSO y la mecánica cuántica para mejorar el rendimiento de PSO. Este modelo híbrido se comparó con un algoritmo genético utilizando a Markowitz y su relación de media-varianza dando mejores resultados. El contexto del mercado de acciones utilizado es la Bolsa de Valores de Teheran.

Jin, Y. et al. [122] proponen un algoritmo híbrido que utiliza métodos exactos y heurísticos para optimizar la selección de activos y la asignación de capital en la optimización de la cartera. Se basa en el modelo estándar de Markowitz con restricciones adicionales, como la cardinalidad en el número de activos y la cantidad de capital asignado.

Somasundaram, P. et al. [193] proponen una metodología de solución basada en un nuevo algoritmo de optimización de enjambre de partículas meméticas mutadas de Cauchy (CMMPSO). Se utiliza como modelo base a Markowitz y como marco de referencia los precios diarios de algunos mercados de energía eléctrica. La efectividad del algoritmo CMMPSO propuesto se demuestra con dos casos de prueba y se discuten los resultados numéricos.

Briza, A.C. et al. [28] proponen la optimización de enjambres de partículas multiobjetivo (MOPSO) de los indicadores técnicos financieros. Su implementación se desarrolló sobre un modelo multiobjetivo de dos funciones objetivos, a saber, el porcentaje de ganancia y el índice de Sharpe. Se comparó con

el rendimiento de los indicadores técnicos, el rendimiento del mercado y el rendimiento de otro sistema de negociación de acciones que se optimizó con el algoritmo NSGA-II demostrando según los autores mejores resultados.

Khalidji, M. et al. [125] proponen una adaptación de Ant Colony for Continuous Domains (ACOR) a problemas de optimización bi-objetivo para resolver el problema de selección de cartera óptima en el marco de riesgo-retorno de Markowitz. Se utiliza una agregación de valores objetivos ponderada dinámicamente por una norma Tchebychev normalizada para obtener un conjunto de soluciones óptimas de Pareto, finalmente, se comprara dicha propuesta con el NSGA II, obteniendo unos resultados bastante prometedores.

Yin, X. et al. [211] proponen para resolver un modelo de selección de carteras de media varianza de Markowitz generalizado cuatro algoritmos mejorados de optimización de enjambres de partículas llamados RTWPSO-AD, RTWPSO-D, DRWTPSO-AD, DRWTPSO-D basados en las estrategias de Topología de población aleatoria. Los cuatro algoritmos propuestos para resolver el modelo se compararon con el rendimiento de la variante clásica de PSO. En particular, el DRTWPSO-D propuesto muestra un rendimiento extraordinario en la mayoría de los datos de prueba, proporcionando una solución eficaz para el problema de optimización de la cartera.

Deng, S. et al. [72], proponen un modelo híbrido que combina el aprendizaje de varios núcleos (MKL) y el algoritmo genético (GA). MKL se adoptó para optimizar los modelos de predicción de la tasa de cambio del precio de las acciones que se expresan en una función lineal de varios núcleos de diferentes tipos de características extraídas de diferentes fuentes (servicio de redes sociales e indicadores técnicos que mediante una función de solo actividades del mercado de valores). El rendimiento acumulado y el índice de Sharpe se utilizaron para probar la bondad del rendimiento de la negociación simulada. De acuerdo con los autores, los resultados experimentales muestran que el modelo propuesto funciona mejor que otros modelos usados en el área de inversión en carteras.

Deng, G.-F. et al. [71], en este trabajo implementan la optimización de enjambre partículas (PSO), para resolver el problema de la Optimización de la Cartera de Markowitz con Restricciones de Cardinalidad (problema CCMPO). El PSO mejorado que se propone aumenta la exploración en los pasos de búsqueda iniciales y mejora la velocidad de convergencia en los pasos de búsqueda finales. De acuerdo a los autores, las pruebas indican que el PSO propuesto es mucho más robusto y efectivo que los algoritmos de PSO existentes, especialmente para carteras de inversión de bajo riesgo. En la mayoría de los casos, el PSO implementado superó el algoritmo genético (GA), el recocido simulado (SA) y la búsqueda tabú (TS).

Kang, L. et al. [124], proponen para la coordinación de los horarios del último tren en el metro de Beijing donde hay varias direcciones de transferencia involucradas y consideran el modelo de media-varianza de Markowitz para tratar este problema. Al ajustar el tiempo de funcionamiento y el tiempo de residencia, el modelo crea un horario de alta calidad que mejora en gran medida la eficiencia de la transferencia de pasajeros. Además, se desarrolló un algoritmo de recocido simulado genético (GSA) para resolver este problema, obteniendo resultados considerados exitosos.

Como complemento a este grupo podemos mencionar que: Chen et al. [35] propusieron un modelo evolutivo para la selección de parámetros en la asignación de activos y lo compararon con el modelo de Markowitz para la selección de carteras de inversión. Arriaga y Valenzuela [8] presentaron otro enfoque, donde propusieron un algoritmo de ascenso de colinas (HC) para resolver el problema. Además, Rolland [179] utilizó un algoritmo de búsqueda tabú (TS) para encontrar una solución. En relación con el TS, Aldaihani y Aldeehan [6] desarrollaron dos modelos matemáticos para resolver los problemas de maximización del rendimiento y minimización del riesgo, y utilizaron el TS para comprobar cuál era el mejor. A su vez, Crama y Schyns [65] propusieron utilizar una técnica de recocido simulado en el modelo de Markowitz con restricciones, lo que resultó en soluciones que empíricamente se consideraron bastante buenas.

Además de las metaheurísticas basadas en trayectorias (ver 2.7), como las mencionadas anteriormente, también se han aplicado al Problema de Optimización Multiobjetivo basado en Markowitz (Ver 2.12.2.5) metaheurísticas centradas en poblaciones (ver 2.8) o comportamientos cooperativos. Centrándose primero en la inteligencia de enjambre [77], Fernandez et al. [81] propusieron un algoritmo de optimización de colonias de hormigas que incorpora una preferencia difusa de clasificación superior para optimizar problemas de carteras de inversión con características de soporte parcial. Por otro lado, Bacanin et al. [10] presentaron un algoritmo de colonias de abejas artificiales para resolver problemas de optimización de carteras con restricciones y lo compararon con otras dos técnicas basadas en poblaciones, como los algoritmos genéticos y los algoritmos de enjambre de luciérnagas.

A su vez, Hamdi et al. [104] propusieron un modelo PSO para resolver el modelo Mean-CVaR, comparándolo con la implementación del Algoritmo Competitivo Imperial en el mercado de precios de la industria automotriz iraní. El PSO mostró mejores resultados.

En resumen, la optimización de cartera, particularmente bajo el modelo de Markowitz, se abordan como un problema multiobjetivo, incorporando restricciones reales como cardinalidad y costos. Se buscan métricas de riesgo más robustas que la volatilidad, como la expectativa condicional en la cola inferior o el Valor en Riesgo (VaR). También se explora la incertidumbre del rendimiento difuso y un marco credibilístico.

Las soluciones se basan ampliamente en metaheurísticas, incluyendo Algoritmos Genéticos (GA), Optimización por Enjambre de Partículas (PSO), Recocido Simulado (SA) y Búsqueda Tabú (TS). Los Algoritmos Evolutivos Multiobjetivos (AEMO) como NSGA-II y SPEA-2 son comunmente utilizados. La hibridación (ej. QPSO, Algoritmos Meméticos, MKL+GA) se utiliza en algunas investigaciones para acelerar la convergencia y mejorar el rendimiento, a menudo superando métodos clásicos. El desempeño se evalúa mediante frentes de Pareto e indicadores como el hipervolumen y la relación de Sharpe.

3.4.2 Grupo 2: Técnicas de optimización multiobjetivo para la propuesta de carteras de inversión.

Chen, S.-S. et al. [34], proponen un modelo de algoritmo genético multiobjetivo (MOGA, por sus siglas en inglés) utilizando el conocimiento financiero para ayudar a la selección de carteras optimas. Especialmente, refinamos los criterios de evaluación con la ayuda del dominio del conocimiento relevante de la inversión.

Jewan, D. et al. [121], implementan el algoritmo genético de clasificación no dominante (NSGA-II), que pone énfasis en avanzar hacia la verdadera región de pareto optima. El algoritmo demuestra además características atractivas de manejo de restricciones, entre otras, lo que es adecuado para resolver con éxito el problema. El análisis numérico se lleva a cabo en una cartera colateral de construcción de estructuras a medidas óptimas, a partir de los constituyentes del índice *iTraxx Europe IG S5 CDS*⁸. Para fines comparativos, la estructura de dependencia predeterminada se modela a través de los supuestos de la cópula de Gauss y Clayton. Esta investigación concluye que los retornos de tramo de CDO en todos los niveles de riesgo bajo el supuesto de la cópula de Clayton se comportaron mejor que el supuesto gaussiano subóptimo.

Pai, G.A.V. [167], analiza un problema hasta ahora inexplorado de la optimización de cartera difusa con sus etapas tripartitas de optimización de cartera, previsión de escenarios de mercado y reequilibrio de cartera. La fase de optimización de la cartera, que determina la cartera original en la que se invertirá, se ocupa de los objetivos múltiples de maximizar su índice de diversificación y el rendimiento esperado de su cartera, sujeto a las restricciones no lineales de la presupuestación de riesgos y otras restricciones preferenciales de los inversores. El complejo modelo de problemas depende necesariamente de las metaheurísticas para llegar a la cartera óptima. La fase de pronóstico del escenario de mercado, donde

⁸<https://www.spglobal.com/spdji/en/index-family/fixed-income/tradables/itraxx-europe/>

el inversor desea generar futuros escenarios para manejar la incertidumbre en los mercados mientras intenta reequilibrar la cartera, adopta una simulación de Monte Carlo estratégicamente refinada para generar escenarios de mercado futuros cercanos a la realidad. La última etapa del reequilibrio de la cartera, que es crucial para el inversor, emplea metaheurísticas basadas en la teoría de decisiones difusas que utilizan conjuntos difusos de Interval Type-2, para explotar la incertidumbre modelada por los escenarios de mercado generados, y así llegar a la cartera de equilibrio optimizada óptima. Se utilizan dos estrategias metaheurísticas de dos géneros diferentes de algoritmos evolutivos, a saber, evolución diferencial multiobjetivo y estrategia de evolución multiobjetiva, que evolucionan estratégicamente para resolver el problema de múltiples etapas. Para la comparación de resultados. Los estudios experimentales se realizaron sobre una cartera de alto riesgo del índice BSE 200 (marzo de 1999-marzo de 2009, Bombay Stock Exchange, India). Se han llevado a cabo simulaciones para analizar el rendimiento y la solidez de las estrategias de solución.

Mittal, G. et al. [155], proponen un modelo multiobjetivo de problema de reequilibrio de cartera considerando el retorno, el riesgo y la liquidez como criterios financieros clave. Además, se considera una situación más realista del mercado financiero donde la cartera, al final de un período de tiempo típico, se modificará mediante la compra y/o venta de activos en respuesta a las condiciones cambiantes. Suponen que los costos de transacción se pagan sobre la base de descuentos incrementales y se ajustan en el rendimiento neto de la cartera. Se desarrolla un algoritmo genético codificado real (RCGA) para resolver el problema de reequilibrio de la cartera y construir una cartera óptima. Se incluye un estudio empírico para ilustrar el comportamiento del modelo propuesto utilizando datos de algunos activos seleccionados al azar que figuran en la Bolsa Nacional de Valores (NSE), Mumbai, India.

Mehlawat, M.K. et al. [151], abordan el problema de la selección de cartera con parámetros difusos desde una perspectiva de programación multiobjetivo con limitaciones de oportunidad. Los criterios financieros clave utilizados aquí son convencionales, a saber, rendimiento, riesgo y liquidez; sin embargo, se utilizan variantes de retorno a corto y largo plazo en lugar de una medida única de las expectativas de un inversionista con respecto al mismo. Además, para captar el comportamiento incierto de los mercados financieros de manera más realista, los parámetros difusos utilizados aquí son los que se caracterizan por las formas funcionales generales. Para resolver el problema, se implementa un algoritmo especialmente desarrollado que hibrida la simulación difusa y el algoritmo genético de codificación real. Se incluyen experimentos numéricos para mostrar la aplicabilidad y eficiencia del modelo en un entorno de inversión real.

Geng, J.-B. et al. [92], utilizando una nueva perspectiva de la cadena de suministro, determinan las estrategias de cartera óptimas para la importación de gas natural licuado (GNL) basadas en modelos de optimización de objetivos múltiples. Primero se construye un indicador de riesgo de transporte marítimo cuantitativo considerando las distancias de transporte marítimo y el riesgo de ataques piratas. A continuación, considera de manera integral los riesgos económicos de la importación, los riesgos políticos de los países exportadores y los riesgos del transporte marítimo asociados con el desarrollo de estrategias óptimas de importación de GNL. El algoritmo genético de clasificación no dominado-II (NSGA-II) se emplea para obtener los conjuntos de soluciones de Pareto de los modelos de optimización de objetivos múltiples. Según los autores, al considerar varios riesgos significativos, el nuevo marco analítico propuesto en este estudio ofrece una herramienta eficaz para tomar decisiones sobre la cartera óptima para la importación de GNL.

Drenovak, M. et al. [75], proponen un método de optimización de cartera de Mean-Capital Requirement. La optimización se realiza utilizando un marco paralelo para la optimización basada en el algoritmo genético de clasificación no dominado NSGA II. Los requisitos de capital para el riesgo de mercado incluyen un componente de estrés adicional introducido por la reciente regulación Basilea 2.5. Según los autores, la optimización con la fórmula de Basilea 2.5⁹ en la función objetivo produce

⁹<https://www.bis.org/bcbs/>

resultados superiores a los de la fórmula anterior (Basilea II) en escenarios de estrés en los que las correlaciones de los retornos de activos cambian considerablemente. Estas mejoras se logran a expensas de la reducción de la cardinalidad de las carteras de Pareto-óptimo. Esta reducción de la cardinalidad (y, por tanto, la diversificación de la cartera) en períodos de volatilidad relativamente baja del mercado puede tener consecuencias no deseadas para la exposición al riesgo de los bancos.

Filipiak, P. et al. [85], tratan el problema de la optimización de la cartera en el contexto de un entorno con cambios dinámicos y frecuentes en las estadísticas de los activos financieros. Su objetivo es proporcionar un frente de Pareto de portafolios óptimos y actualizarlos cuando cambien las tasas de retorno estimadas o los riesgos de los activos financieros. El problema se define en términos de optimización dinámica y se resuelve en línea con un algoritmo evolutivo propuesto. Los experimentos se refieren a series de tiempo provenientes de la base de datos de la Lista de pedidos reconstruida de la Bolsa de Londres y el índice FTSE100¹⁰.

Guerreiro, A.P. et al. [102], han propuesto una nueva clase de indicador de calidad, basado en la relación de Sharpe, que combina la selección de soluciones con la asignación de aptitud. Esta clase se basa en una formulación de la asignación de aptitud física como un Problema de selección de cartera que considera las soluciones como activos cuyos rendimientos son variables aleatorias, y la aptitud como la inversión en dichos activos / soluciones. Una instancia de esta clase basada en el indicador de hipervolumen ha mostrado resultados prometedores cuando se integra en un AEMO llamado POSEA. Los autores demuestran algunas de las propiedades de esa instancia particular del Indicador de relación de Sharpe en relación con la monotonicidad, la sensibilidad al escalado y la independencia de los parámetros.

Quintana, D. et al. [174], sugieren que una combinación de un mecanismo de filtrado basado en la teoría de matrices aleatorias con algoritmos de optimización multiobjetivo evolutivo remuestreados en tiempo realza la robustez de las fronteras eficientes pronosticadas.

Además, Deng et al. [71] describieron un algoritmo de optimización por enjambre de partículas (PSO) que demostró ser más robusto y eficaz que otros PSO propuestos previamente, especialmente para carteras de inversión de bajo riesgo.

En resumen, la selección de carteras se modela como un problema multiobjetivo, buscando optimizar simultáneamente criterios como el rendimiento, el riesgo y la liquidez. Se consideran restricciones prácticas como la cardinalidad, los costos de transacción con descuentos incrementales, y otras preferencias del inversor. Algunos modelos abordan la incertidumbre de los mercados financieros utilizando parámetros difusos y simulaciones.

Entre las metaheurísticas empleadas se pueden ver implementaciones de algoritmos genéticos (GA), se utilizan variantes como el MOGA (Algoritmo Genético Multiobjetivo) para la selección de carteras óptimas y el RCGA (Algoritmo Genético Codificado Real) para el reequilibrio dinámico de carteras y la construcción de carteras óptimas bajo costos de transacción incrementales. NSGA-II es ampliamente implementado por su capacidad para avanzar hacia la verdadera región de Pareto óptima y su manejo de restricciones se aplica en la construcción de carteras colaterales óptimas, la determinación de estrategias de importación de GNL considerando riesgos económicos, políticos y de transporte marítimo, en conjunto con la optimización de carteras bajo la regulación de Basilea 2.5 para requisitos de capital de riesgo de mercado.

Se mencionan también la optimización por enjambre de partículas (PSO), que ha demostrado ser robusta para carteras de bajo riesgo, y la evolución diferencial multiobjetivo junto con la estrategia de evolución multiobjetivo para problemas de optimización de cartera difusa y reequilibrio.

Las aplicaciones abarcan desde el reequilibrio dinámico de carteras en entornos cambiantes hasta la gestión de carteras bajo regulaciones financieras como Basilea 2.5. La evaluación del rendimiento de los

¹⁰<https://www.londonstockexchange.com/indices/ftse-100>

algoritmos se realiza mediante el análisis del frente de Pareto y el uso de indicadores de calidad basados en la relación de Sharpe y el indicador de hipervolumen. La optimización con Basilea 2.5 puede producir resultados superiores en escenarios de estrés, aunque esto puede llevar a una reducción de la cardinalidad (diversificación).

3.4.3 Grupo 3: Técnicas metaheurísticas para carteras de inversión con restricciones de diferentes tipos.

Antes de avanzar en la discusión de los enfoques metaheurísticos, recordemos en este punto que el Problema de Optimización basado en Markowitz (ver 2.12.2.5) es un problema inherentemente multiobjetivo cuando también se agregan algunas nuevas restricciones como la cardinalidad, los costos de transacción, las comisiones y los impuestos, por lo tanto, ha habido diferentes intentos de abordar el problema mediante el uso de técnicas de optimización evolutiva multiobjetivo (MOEA).

Mishra, S.K. et al. [154], se aborda el problema de selección de activos de cartera como una optimización multiobjetivo, considerando el presupuesto, el piso, el techo y la cardinalidad como restricciones. Un novedoso algoritmo de optimización multiobjetivo, a saber, la optimización de enjambre de partículas multiobjetivo de clasificación no dominada (NS-MOPSO), se ha propuesto y empleado de manera eficiente para resolver este importante problema. El rendimiento del algoritmo propuesto se compara con cuatro algoritmos de evolución multiobjetivo (MOEA), basados en la clasificación no dominada, y un algoritmo MOEA basado en la descomposición (MOEA / D). Al examinar las métricas de rendimiento, se observa que el enfoque propuesto por NS-MOPSO es capaz de identificar buenas soluciones de Pareto, manteniendo una diversidad adecuada. El algoritmo propuesto también se aplica a diferentes condiciones de restricción de cardinalidad, para seis índices de mercado diferentes, como el Hang-Seng en Hong Kong, el DAX 100 en Alemania, el FTSE 100 en el Reino Unido, el SP 100 en los EE. UU., El Nikkei 225 en Japón y la EEB. -500 en la India.

Mishra, S.K. et al. [153], el problema de optimización de carteras de inversión basado en Markowitz se formula en un marco multiobjetivo y se resuelve utilizando el algoritmo de optimización de búsqueda de bacterias multiobjective (MOBFO). El rendimiento del enfoque propuesto se compara con un conjunto de algoritmos evolutivos multiobjetivos competitivos que utilizan seis métricas de rendimiento, el frente de Pareto y el tiempo computacional. Al examinar las métricas de rendimiento, se concluye que el algoritmo MOBFO propuesto es capaz de identificar una buena solución de Pareto, manteniendo una diversidad adecuada. El algoritmo propuesto también se aplica con éxito a diferentes condiciones de restricción de cardinalidad, para seis índices de mercado diferentes.

Grishina, N. et al. [101], desarrollan enfoques heurísticos para el modelo de teoría prospectiva propuestos por Kahneman y Tversky en 1979, así como un análisis empírico comparativo de este modelo. El supuesto crucial es que las características de comportamiento del modelo de la teoría de la perspectiva proporcionan una mejor protección contra las desventajas que los enfoques tradicionales para el problema de selección de cartera. En esta investigación, los resultados computacionales a gran escala para el modelo de teoría prospectiva se obtuvieron para datos reales del mercado financiero con hasta 225 activos. Con el fin de investigar empíricamente el rendimiento del modelo basado en el comportamiento, se han desarrollado un algoritmo de evolución diferencial y un algoritmo genético.

Vercher, E. et al. [205], presentan un problema de optimización multiobjetivo con restricción de cardinalidad para generar carteras eficientes dentro de un marco difuso de desviación media absoluta. Suponen que el rendimiento de una cartera determinada se basa en variables difusas de tipo LR, cuyas distribuciones de credibilidad recopilan las relaciones contemporáneas entre los rendimientos de los activos individuales. Presentan además un estudio computacional con un enfoque evolutivo multi-objetivo y el rendimiento del modelo de credibilidad se presentan utilizando un conjunto de datos recopilados en el mercado bursátil español.

Adebiyi Ayodele, A. et al. [3], resuelven el modelo de selección de cartera de varianza media de Markowitz extendido con un método eficiente de metaheurística de Evolución diferencial generalizada 3 (GDE3). El modelo ampliado de selección de cartera de Markowitz de media-varianza implementado en el presente trabajo consta de cuatro restricciones: límites de tenencias, cardinalidad, lotes de transacciones mínimas y opinión de expertos. Los resultados computacionales obtenidos en este estudio de investigación muestran un rendimiento mejorado en comparación con otros métodos de metaheurística del algoritmo genético (GA), recocido simulado (SA), búsqueda de tabú (TS) y optimización de enjambre de partículas (PSO).

Liu, Y.-J. et al. [142], consideran un problema de optimización de cartera difusa de varios períodos con lotes de transacciones mínimas. Sobre la base de la teoría de la posibilidad, se formula un modelo de selección de cartera de media semivarianza con los objetivos de maximizar el rendimiento y minimizar el riesgo acumulado en todo el horizonte de inversión. En el modelo propuesto, tomamos en consideración el retorno, el riesgo, los costos de transacción, el grado de diversificación, la restricción de cardinalidad y los lotes de transacción mínimos. Para reflejar los niveles de aspiración de los inversionistas para los dos objetivos, se emplea una técnica de decisión difusa para transformar el modelo propuesto en un único problema de programación no lineal. Además, se diseña un algoritmo genético para solución.

Lwin, K. et al. [145], presentan un algoritmo evolutivo híbrido de objetivos múltiples basado en la búsqueda de dispersión con un archivo externo para resolver el problema de selección de cartera con restricciones. Consideran el modelo de cartera de media-varianza extendida con tres restricciones prácticas que limitan el número de activos en una cartera, restringen la proporción de activos mantenidos en la cartera y asignan previamente activos específicos en la cartera. El algoritmo metaheurístico híbrido propuesto sigue la estructura básica de la búsqueda de dispersión. El rendimiento del algoritmo de búsqueda de dispersión multi-objetivo propuesto se compara con el algoritmo genético de clasificación no dominado (NSGA-II), el algoritmo evolutivo de Pareto de fuerza (SPEA-2) y el algoritmo de selección basado en envoltorio de Pareto (PESA-II). Los resultados experimentales indican que el algoritmo propuesto es un enfoque prometedor para resolver el problema de selección de cartera con restricciones. Las mediciones de las métricas de rendimiento indican que supera a NSGA-II, SPEA2 y PESA-II en la calidad de la solución en un tiempo de cómputo más corto.

Liagkouras, K. et al. [138], retoman el operador de la mutación polinomial clásica (PLM) y proponen una nueva versión guiada por sonda del operador de PLM diseñada para ser utilizada junto con los algoritmos evolutivos multiobjetivos (AEMO). El operador de Probe Guided Mutation (PGM) se valida utilizando conjuntos de datos de seis mercados bursátiles diferentes. El rendimiento del operador de PGM propuesto se evalúa en comparación con el PLM clásico con la ayuda del Algoritmo Genético de Clasificación No Dominado II (NSGAI) y el Algoritmo Evolutivo Evolutivo de Pareto de Fuerza (SPEA2). La evaluación del rendimiento se basa en tres métricas de rendimiento, a saber, el indicador de hipervolumen, propagación y épsilon. Los resultados experimentales revelan que el operador PGM propuesto supera con confianza el desempeño del operador PLM clásico para todas las métricas de rendimiento cuando se aplica a la solución del problema de optimización de cartera con restricciones de cardinalidad (CCPOP).

Liagkouras, K. et al. [139], proponen un nuevo algoritmo evolutivo multiobjetivo (MOEA) para la solución del problema de optimización de la cartera con restricciones de cardinalidad (CCPOP). El algoritmo propuesto incorpora un nuevo operador de mutación y recombinación hecho a medida para que funcione bien con el nuevo esquema de codificación. Los conjuntos de datos de siete mercados bursátiles diferentes se utilizan para probar la eficiencia del enfoque propuesto. En particular, el desempeño del solucionador de optimización de cartera multiobjetivo codificado de manera eficiente (EEMPOS) se evalúa en comparación con dos AEMO conocidos, a saber, NSGAI y MOEA / D. Los resultados experimentales indican que el EEMPOS propuesto supera a los otros dos AEMO para todas las métricas de rendimiento examinadas cuando se aplica a la solución del CCPOP durante una fracción del tiempo requerido por las otras técnicas.

Bacanin, N. et al. [10], presentan una metaheurística de inteligencia de enjambres de colonia de abejas artificiales (ABC) para resolver problemas de optimización de cartera con restricciones. Para probar la robustez y la eficiencia del algoritmo para esta aplicación, se realizaron una serie de pruebas sobre los datos de la cartera de referencia estándar utilizados en la literatura. El algoritmo se comparó con el método de algoritmo genético (GA) y el algoritmo de enjambre de luciérnaga (FA), que se probaron en el mismo conjunto de datos. Los resultados de la optimización mostraron que el algoritmo ABC obtiene resultados satisfactorios.

Bacanin, N. et al. [9], presentan la implementación del algoritmo de Fireworks para problemas de optimización de cartera con restricciones. El algoritmo de Fireworks es una meta-heurística inspirada en la naturaleza relativamente nueva que emula el proceso de explosión de los fuegos artificiales. Los autores adaptaron el algoritmo de fuegos artificiales para resolver el problema de selección de cartera restringida que extiende el modelo clásico de cartera de media-varianza agregando restricciones adicionales. El análisis comparativo se realizó con otros tres algoritmos de inteligencia de enjambre y tres variantes de algoritmo genético propuesto en la literatura, utilizando la misma formulación de problemas y los mismos datos de prueba. Los resultados muestran que el algoritmo de Fireworks tiene un gran potencial para abordar el problema de optimización de la cartera.

En resumen, algoritmos como la optimización de enjambre de partículas multiobjetivo de clasificación no dominada (NS-MOPSO) y la optimización de búsqueda de bacterias multiobjetivo (MOBFO) han demostrado ser eficientes para identificar soluciones de Pareto con adecuada diversidad en distintos mercados. Otros enfoques incluyen la evolución diferencial generalizada 3 (GDE3), algoritmos genéticos (GA) para problemas con lotes mínimos de transacción o parámetros difusos, y el modelado bajo la teoría de la perspectiva. Las comparaciones revelan que algoritmos como NSGA-II y SPEA-2 a menudo son superados por enfoques híbridos, nuevos operadores de mutación como PGM o AEMOs eficientemente codificados (EEMPOS). Metaheurísticas de inteligencia de enjambres como la Colonia de Abejas Artificiales (ABC) y el Algoritmo de Fireworks también muestran un gran potencial para problemas de optimización de cartera con restricciones.

3.4.4 Grupo 4: Técnicas híbridas para abordar el problema de optimización de carteras de inversión.

Aunque las metaheurísticas son herramientas generales de optimización que pueden implementarse de forma más o menos directa en problemas específicos, existe amplia evidencia, tanto empírica como teórica, de que abordar un problema sin conocimiento previo del mismo y, por lo tanto, sin una alineación explícita entre el problema y el solucionador, presenta limitaciones intrínsecas [208]. Esto justifica la necesidad de aprovechar el conocimiento del problema para optimizar el rendimiento del optimizador. Dado que es habitual que esta adaptación se materialice incorporando componentes específicos del problema en el solucionador o combinando ideas de diferentes enfoques de búsqueda, el término *metaheurística híbrida* [24, 25] se utiliza a menudo en este contexto.

Obviamente, las metaheurísticas híbridas también se han aplicado al Problema de Optimización Multiobjetivo basado en Markowitz (Ver 2.12.2.5), por lo que queremos resumir estos enfoques y las técnicas empleadas. Por ejemplo, Chen y Chen [33] propusieron aplicar una combinación entre la técnica de Optimización por Enjambre de Partículas (PSO) y un método llamado Optimización Extrema. En el contexto de un conjunto de datos emergentes del mercado bursátil chino, se demostró que la propuesta tuvo un mejor rendimiento que un algoritmo genético y también que un PSO simple.

Además, He y Lu [107] estudiaron diferentes combinaciones algorítmicas basadas en el uso de PSO en un modelo de cartera difusa con restricciones. Como resultado, se propusieron un algoritmo de optimización de enjambre de partículas con comportamiento cuántico y un algoritmo mejorado basado en PSO, denominado algoritmo de optimización de enjambre de partículas con comportamiento cuántico

mejorado. A su vez, Khan et al. [126] propusieron una variante del método de Búsqueda de Antenas de Escarabajo (BAS), conocida como Búsqueda Distribuida de Antenas de Escarabajo (DBAS), para optimizar problemas de selección de carteras múltiples. DBAS es un marco híbrido que hereda la naturaleza de enjambre de PSO con los criterios de actualización de BAS.

Los algoritmos meméticos (MA) pueden considerarse un excelente ejemplo de una estrategia híbrida de resolución de problemas. Introducidos inicialmente por Moscato et al. [157] como un marco donde los agentes de búsqueda individuales alternaban entre fases de aprendizaje y períodos de colaboración y competencia, el MA más típico puede describirse como un método poblacional (que proporciona capacidades de búsqueda global y actúa como un motor de búsqueda principal con capacidad de diversificación) dotado de un método de búsqueda local (que proporciona explotación e intensificación); Véase la referencia [63, 159] para una caracterización más detallada. Extendiendo la idea de los algoritmos meméticos al universo multiobjetivo, las técnicas de búsqueda local se han integrado en los algoritmos evolutivos multiobjetivo (MOEA). El resultado da lugar a los denominados algoritmos meméticos multiobjetivo (MOMA) [118]. La principal ventaja de adoptar este tipo de hibridación es acelerar la convergencia al frente de Pareto. Sin embargo, el uso de MOMA presenta nuevos problemas. Uno de ellos es decidir cómo seleccionar las soluciones a las que se aplicará la búsqueda local. También es problemático determinar la duración de la ejecución del motor de búsqueda local, ya que su uso implica un coste computacional adicional.

En relación con los MOMA, Zhou et al. [216] utilizaron NSGA-II junto con el algoritmo t-SNE, introducido para reducir el problema de redundancia objetiva en problemas de alta dimensión para el mercado industrial chino. A su vez, Ferreira et al. [84] propusieron un modelo de optimización multiobjetivo con reequilibrio y restricción de cardinalidad para obtener carteras consistentes con los aspectos prácticos del proceso de inversión financiera. Para realizar esta optimización, se desarrollaron versiones paralelas de los algoritmos evolutivos PDEA, SPEA2 y NSGA-II, buscando un tiempo de ejecución bajo acorde con las rápidas oscilaciones del mercado bursátil. Zhang et al. [214] describieron un mecanismo de hibridación basado en la búsqueda tabú híbrida y la evolución diferencial, que se combinó con la teoría de clasificación de Pareto y demostró empíricamente que supera a NSGA-II.

En resumen, la optimización de carteras, concebida como un problema multiobjetivo, se aborda eficazmente mediante metaheurísticas híbridas. Estas combinan conocimiento del problema y enfoques de búsqueda para mejorar el rendimiento. Ejemplos incluyen la fusión de Optimización por Enjambre de Partículas (PSO) con Optimización Extrema, y variantes de PSO para modelos de cartera difusa.

Los Algoritmos Meméticos (MAs) son una estrategia híbrida clave, utilizándose frecuentemente para acelerar la convergencia al frente de Pareto. Su uso, no obstante, conlleva desafíos computacionales para mantener diversidad. Otras hibridaciones incluyen NSGA-II con t-SNE para reducir redundancia, y una combinación de búsqueda tabú híbrida con evolución diferencial que supera a NSGA-II. Versiones paralelas de PDEA, SPEA2 y NSGA-II también se han desarrollado para optimización con reequilibrio y cardinalidad.

3.4.5 Grupo 5: Exploración exhaustiva de la frontera de Pareto a través de AEMOs

Para mejorar el proceso de optimización, se usan algoritmos evolutivos multiobjetivos (AEMOs), considerando además, el uso de conocimiento previo o de las preferencias del inversor para la toma de decisiones por cuanto es un tema que interesa para el desarrollo del presente trabajo de investigación, a veces como parte del proceso de búsqueda y a veces como un posproceso. Por ejemplo, en el contexto de la optimización multiobjetivo, uno de los pasos fundamentales consiste en decidir cuáles son las mejores soluciones dentro del conjunto de soluciones no dominadas Pareto. En la literatura científica se proponen varios mecanismos de toma de decisiones en este sentido; por ejemplo, véase la referencia [92, 108].

Así, Zheng y Zheng [215] propusieron un NSGA-II multipoblacional basado en la estrategia de

dispersión para obtener múltiples soluciones óptimas de Pareto. En segundo lugar, en la etapa de toma de decisiones multiatributo, el conjunto óptimo de Pareto obtenido se agrupa mediante C-medias difusas para reflejar las diferentes preferencias de inversión.

Ramedani et al. [176] consideraron el peso de cada criterio de decisión, sus impactos y la incertidumbre en la toma de decisiones para resolver el problema de optimización de proyectos de inversión. Desarrollaron la implementación de un método híbrido basado en la programación por objetivos de opción múltiple con función de utilidad y el algoritmo PSO. Los resultados mostraron una mejora en el tiempo de solución y la calidad de las respuestas del método propuesto. En comparación con esta línea de trabajo, nuestra propuesta presenta la particularidad de utilizar un ranking de carteras como el de Sharpe, lo que permite consolidar un proceso de búsqueda guiada.

Otro mecanismo utilizado para optimizar el problema de la relación riesgo-rendimiento en una cartera de inversión consiste en el uso de procesos para generar cierta orientación en la búsqueda de la frontera de Pareto. Por ejemplo, Fernandez et al. [82] propusieron agregar múltiples criterios con base en el sistema particular de preferencias de un inversor, lo que genera una presión selectiva en el frente de Pareto hacia la cartera más cercana a sus preferencias. En la misma línea, Estalayo et al. [79] informaron hallazgos iniciales sobre la combinación de modelos de aprendizaje profundo y MOEA para la asignación de carteras de criptomonedas. Asimismo, Fernandez et al. [83] presentaron un novedoso método elitista guiado por un algoritmo genético para abordar el conocimiento imperfecto en las preferencias de un inversor.

A su vez, Sun et al. [197] describieron el uso de un algoritmo NSGA-II con características de elitismo basadas en dominancia para el problema de asignación de carteras de inversión en la industria petrolera. También añadieron métodos híbridos de predicción por descomposición de intervalos e introdujeron parámetros de optimización y factores de preferencia de riesgo para la mejor selección y toma de decisiones de cartera.

Cesarone et al. [31], en este trabajo proponen además del uso de los enfoques clásicos para la selección óptima de la cartera encontrar una cartera factible que optimice una medida de riesgo, o una medida de ganancia, o una combinación de las mismas mediante una función de utilidad o una medida de desempeño. Dentro de este contexto establecen un modelo de paridad de riesgo. Un enfoque que garantiza el uso de un índice de desempeño tal que se pueda obtener una cartera óptima que maximice la relación de Sharpe. Los resultados experimentales demuestran la factibilidad del uso de algunos elementos teóricos adicionales al modelo clásico de Markowitz.

Ruiz et al. [182], en primer lugar, proponen un nuevo modelo de optimización de objetivos múltiples para la selección de carteras. En segundo lugar, analizan un subconjunto de carteras no dominadas que se ajustan directamente a las expectativas del inversor. Debido a la naturaleza del modelo propuesto (no lineal, no convexo y NP-duro) y basado en el éxito de las técnicas basadas en puntos de referencia en la optimización multiobjetivo, consideran el uso de tres algoritmos evolutivos multiobjetivos basados en el uso de preferencias (WASF-GA, g-NSGA-II y P-MOGA), en los que se han utilizado operadores de reparación, mutación y reparación ad hoc para adaptar el Tres algoritmos para resolver el modelo. Es importante mencionar el énfasis en tratar un segmento de la frontera eficiente de Pareto generada por la resolución del problema de selección de carteras de inversión.

En resumen, se emplean diversas variantes de NSGA-II, como la multipoblacional que usa C-medias difusas para agrupar preferencias, o la basada en elitismo para asignación en la industria petrolera. Otros AEMOs como WASF-GA, g-NSGA-II y P-MOGA se centran en segmentos específicos del frente de Pareto, guiados por expectativas del inversor. La hibridación de métodos es fundamental; por ejemplo, la combinación de programación por objetivos con PSO.

Nuestro trabajo, presentado aquí [53, 54, 55, 56], con algunos mecanismos de hibridación, también se caracteriza por la integración de una memoria elitista o de una búsqueda local basada en información proporcionada por el Índice de Sharpe usando como núcleo un algoritmo evolutivo multiobjetivo como

Se ha cumplimentado este estudio agregando un análisis con la red compleja obtenida a partir de la co-ocurrencia de términos en los ítems bibliográficos. Dicha red se muestra en la Figura 3.6. Hay diferentes tipos de análisis que pueden realizarse sobre esta red (Ver [41]). De entrada, puede aplicarse un algoritmo de detección de comunidades cuya finalidad sería la de identificar subgrupos temáticos de interés, definidos por una especial interacción entre ciertos términos. Un análisis siguiendo el criterio de modularidad de Blondel et al. arroja 7 comunidades (diferentes colores en la Figura 3.6). No obstante, cuatro de ellas son muy pequeñas (entre 6 y 12 términos). En algún caso corresponden a términos que sólo se usan en un conjunto muy reducido de ítems bibliográficos (por ejemplo, *bee* y *colony*, correspondientes a una técnica de optimización, o *transaction* y *costs*, correspondientes a una especificidad del problema). Las comunidades más extensas son a grandes rasgos consistentes con la partición de los trabajos. Así, hay una comunidad de 107 términos que es consistente con los grupos 1 y 2 anteriores (algoritmos genéticos, programación genética, planificación de inversiones), y otra gran comunidad de 127 términos que se alinea con los grupos 3 y 5 (metaheurísticas y algoritmos evolutivos multiobjetivo). De manera interesante, una pequeña comunidad de 20 términos coincide con la caracterización del grupo 4 relativa a optimización mediante enjambres de partículas.

3.6 Contribuciones

En este capítulo hemos presentado un esbozo de una metodología para automatizar el cartografiado de un tema de interés a partir de la literatura existente sobre el mismo que se inserta sobre la línea general de nuestra propuesta principal en la consecución de un estudio de estado de arte amplio y que permite contextualizar el trabajo actual y el desarrollo futuro de la presente investigación. El uso de esta técnica metodológica permite identificar las comunidades de autores y de investigación que sobresalen en el área de estudio, además de que facilita determinar cuáles son las áreas de abordaje en la solución de un problema determinado que más frecuentemente se emplean en la literatura. Adicionalmente, la identificación de subtemas permite hacer una clasificación bibliográfica en mejor condición. El hecho de hacer un análisis exhaustivo del conjunto de artículos publicados en un tema específico, además de establecer un mecanismo de clasificación automatizado permite una simplificación bastante importante del esfuerzo en la revisión del estado del arte.

Para ello, la propuesta presentada establece un análisis de similitud de conjuntos de artículos a través de una métrica de distanciamiento que permite agrupar o segmentar estos a través de diferentes técnicas algorítmicas y que posteriormente permite ordenar secuencialmente estos ítems, lo que nos da una ruta para desarrollar una revisión bibliográfica exploratoria que se supone de mayor relevancia para una investigación documental dada. Si bien se han presentado opciones concretas para llevar a cabo cada una de estas fases del análisis, es evidente que existe la posibilidad de emplear otras herramientas algorítmicas de propósito equivalente. Esto se puede extender del mismo modo al análisis de la red compleja de términos empleados en la literatura seleccionada. En este sentido, una de las líneas de trabajo que pretendemos desarrollar está orientada a la realización de un análisis temporal de esta red de términos en la línea de lo realizado en [134], con objeto de identificar patrones temáticos emergentes.

Todo este trabajo nos ha permitido describir aportaciones publicadas en la literatura científica, y que además han sido incorporadas en este capítulo, especialmente la publicada en el XIV Congreso Español de Metaheurística de 2021 [52].:

- Feijoo Colomine Duran, Carlos Cotta y Fernández-Leiva Antonio J. [52, 53, 54, 55, 56].

NÚCLEO EVOLUTIVO: APLICACIÓN DE ALGORITMOS EVOLUTIVOS MULTIOBJETIVOS PARA EL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS DE INVERSIÓN

El presente capítulo refleja el resultado de la implementación de diferentes técnicas algorítmicas para la resolución del problema multiobjetivo definido en la sección 2.12.2.5 como paso preliminar para escoger el motor evolutivo que se utilizara en el proceso de hibridación que se desarrollara en las etapas siguientes. Para este fin se ha previsto comparar diferentes estados del arte que se describieron en la sección 2.9. Se escogieron para este propósito el (NSGA-II) [69], el (SPEA2) [222] y el (IBEA) [218]. El contexto metodológico y experimental están descrito en la secciones 4.3 y 4.6 respectivamente.

4.1 Introducción

Esta parte del estudio comprendió la comparativa de técnicas evolutivas multiobjetivo para aproximar soluciones al problema de optimización de carteras de inversión agregando restricciones de cardinalidad, tomando como marco experimental el mercado de fondos mutuales de Europa hasta Julio de 2010. Esta comparativa permitirá la escogencia de lo que llamaremos el motor evolutivo que servirá como núcleo y en el que se sostendrá el estudio de las diferentes técnicas de hibridación. Se realizaron comparaciones de tres algoritmos evolutivos multiobjetivo, a saber, el (NSGA-II) [69], el (SPEA2) [222] y el (IBEA) [218] abordados en la sección 2.9.

Para analizar la comparación de las diferentes técnicas evolutivas se aplicaron dos medidas de rendimiento bien conocidas: El indicador Hypervolume [219] y el indicador R_2 [105], explicados en la sección 2.9.2 además se hizo un análisis estadístico no paramétrico como la prueba Wilcoxon Ranksum (Nivel de significancia de 0.05) [136]. El análisis comparativo también incluye una evaluación de la eficiencia financiera de la cartera de inversión escogida por la ejecución de los distintos algoritmos a través del índice de Sharpe [188], que es una medida de prima-riesgo y fue explicada con detenimiento

en 2.12.3.

4.2 El problema sujeto de la optimización

El modelo desarrollado por **Markowitz** tiene como objetivo obtener un conjunto de activos que conformen una cartera para lograr el **mayor rendimiento posible con el menor riesgo** (ver 2.12.2.5). El beneficio se define como la esperanza matemática del conjunto de rendimientos de un activo, mientras que el riesgo es la **variabilidad del rendimiento esperado**, es decir, la varianza de este. Para dos o más activos, entra en juego la **covarianza**, que mide la influencia del entorno o la volatilidad de un activo respecto a otro.

El modelo de Markowitz busca minimizar la varianza de la cartera ($\sigma^2(R_p)$) y maximizar el rendimiento esperado ($E(R_p)$), sujeto a que la suma de las proporciones invertidas (w_i) sea igual a 1. A este modelo se le pueden añadir otras restricciones, como la de **cardinalidad**, que limita el número de activos con peso diferente de cero en la cartera.

El conjunto de combinaciones rentabilidad-riesgo de las carteras eficientes se denomina **frontera eficiente**. Una vez conocida, el inversor elige su cartera óptima según sus preferencias y nivel de riesgo. Para medir el rendimiento de una cartera y compararla con otras, se utiliza el **índice de Sharpe** (ver 2.12.3). Este índice es un cociente prima-riesgo, calculado como la diferencia entre el rendimiento de la cartera y el rendimiento sin riesgo, dividido por la desviación estándar de la cartera (δ_p). Un mayor índice de Sharpe indica un mayor éxito en la gestión.

4.3 Marco metodológico

Se trabaja con la implementación de los Algoritmos evolutivos Multiobjetivos (AEMO) que ya han sido utilizados en algunas aplicaciones financieras y del mundo de la ingeniería en general, además de establecer el modelo de Markowitz con las condiciones necesarias para ser resuelto usando esta técnica siendo descrito en 4.2.

Para este estudio hemos utilizado los precios de cotización mensual de cierre correspondientes a los años 1996 hasta 2010, de 15 fondos mutuales que han formado parte del mercado Europeo durante esos años [210].

4.3.1 Representación

Se pensó en la **representación binaria** de los datos con una aproximación de tres dígitos decimales, por valor de w_i .

es decir:

$$0,000 \leq w_i \leq 0,999$$

para esta representación binaria, la longitud de la cadena depende de la precisión deseada, si el dominio de w_i es $[0,000;0,999]$, y la precisión requerida es de $n = 3$ dígitos decimales, entonces los bits requeridos m_j serán:

$$2^{m_j-1} < (0,999 - 0,000)10^3 \leq 2^{m_j} - 1$$

$$2^{m_j-1} < 999 \leq 2^{m_j} - 1$$

$$2^9 < 999 \leq 2^{10} - 1$$

$$512 < 999 \leq 1023$$

$$m_j = 10$$

el número de bits necesarios para hacer esta representación es de 10.

Para la decodificación de la cadena binaria al número decimal se utiliza:

$$w_i = a_j + decimal(substring) \frac{b_j - a_j}{2^{m_j} - 1}$$

$$w_i = 0,000 + decimal(substring) \frac{0,999 - 0,000}{2^{10} - 1}$$

$$w_i = decimal(substring) \frac{0,999}{1023}$$

4.3.2 Diseño del cromosoma:

Por cada tipo de Fondo se diseña un cromosoma, con las siguientes características:

Fondo 1	Fondo 2	Fondo 3	Fondo n
w_1	w_2	w_3	w_n
Gen_1	Gen_2	Gen_3	Gen_n

4.3.3 Población

Este parámetro es usualmente definido de manera empírica, sin embargo existen algunos estudios que reflejan el tamaño óptimo que debe tener una población de cromosomas como los definidos en la representación.

Coello [43] refleja en sus estudios acerca del parámetro de población que incluyéndolo con el porcentaje de cruce y el porcentaje de mutación son parámetros que interactúan entre sí de manera no lineal por lo que no pueden optimizarse de manera individual. Sin embargo, hace alusión a una serie de trabajos que consideran el estudio del tamaño óptimo de una población.

Coello [43] cita a Goldberg haciendo un estudio en el cual establece que un tamaño ideal de población está relacionado con la longitud en bits de la cadena predefinida en la representación. Usando probabilidad uniforme para generar población aleatoriamente deriva la siguiente expresión:

$$Tam_poblacion = 1.65^{2^{0,21L}}$$

donde L es la longitud de la cadena binaria.

Refiere Coello [43] que existen ciertas inconsistencias en el cálculo de esta expresión, además de que para tamaños muy grandes de la cadena la población inicial tiende a ser muy elevada.

Coello [43] sugiere que la regla empírica más común es usar tamaño de una población igual 2 veces L .

$$Tam_poblacion = 2L \quad (4.1)$$

4.4 Implementación del motor evolutivo

Para nuestro estudio hemos propuesto de forma general una representación binaria, con población cromosómica y con operadores genéticos de cruce y mutación. En la Tabla 4.1 describimos los distintos parámetros característicos que permitirán implementar los diferentes algoritmos evolutivos multiobjetivo siguiendo lo dispuesto en las secciones 4.3.3, 4.3.2, 4.3.1.

Parámetros	Configuración
Representación	Binaria
Número de Genes	15
Tamaño del Gen	10 Bits
Tamaño del cromosoma	150
Tamaño de Población	300
Generaciones	100
Tipo de selección	Torneo Binario/Elitista
Tipo de Cruce	2 Puntos
Probabilidad de Cruce	0,8
Tipo de Mutación	bit a bit
Probabilidad de Mutación	0,0666
Funciones Objetivo	2
Numero de Ejecuciones	30
Cardinalidad (K)	2, 4, 7, 15

Tabla 4.1: Marco Experimental de la Solución Evolutiva

4.5 PISA: Software marco utilizado para la optimización multiobjetivo

Platform Independent Interface for Search Algorithms (PISA) [20]

La implementación de nuestra solución se hizo utilizando las bondades de un marco de software experimental llamado PISA (por sus siglas en inglés: Platform Independent Interface for Search Algorithms [20]). Dicha plataforma permite disgregar los diferentes métodos de selección con los de variación en un entorno evolutivo.

Entre los aspectos claves de la arquitectura podemos destacar [20]:

1. Separación mediante procesos distintos: El Variador (permite generar nuevos individuos) y el Selector son implementados como dos procesos separados.

2. Sincronización: Utilizan una variable de estado común (un número entero) almacenada en un archivo de texto para coordinar sus acciones.
3. Intercambio de Datos: La transferencia de datos también se realiza a través de archivos de texto. Para minimizar el la saturación de memoria, solo se transmite la información esencial: un índice para identificar al individuo en ambos módulos y su vector de objetivos. La representación específica del individuo se mantiene en el Variador y no se transmite al Selector. Existen archivos específicos para diferentes tipos de datos, como la población inicial, el archivo del selector, la muestra de padres y los hijos [20].
4. Control de Flujo: El Selector elige padres y los pasa al Variador; el Variador genera hijos, calcula sus objetivos y los pasa de vuelta al Selector.
5. Parámetros: Los parámetros necesarios pueden ser comunes a ambos módulos (como el número de objetivos y los tamaños de las poblaciones de padres y de hijos) o locales de cada módulo.

La arquitectura de PISA se basa en el uso de mecanismos modulares que induce al separar el núcleo de selección de la población (independiente del problema) del manejo de soluciones y operadores de variación (específico del problema). Esta separación se implementa a través de dos procesos que se comunican mediante un protocolo definido que utiliza archivos de texto para sincronización e intercambio de datos, lo que le confiere una gran portabilidad y flexibilidad para combinar diferentes algoritmos de selección con diversas aplicaciones [20].

La Figura 4.1 muestra la interacción entre el Variador (la parte específica de la aplicación implementada por el usuario) y el Selector (la parte independiente del problema implementada por el usuario), mediados por la lógica proporcionada por PISALib. La comunicación entre los dos módulos se realiza a través de archivos de texto.

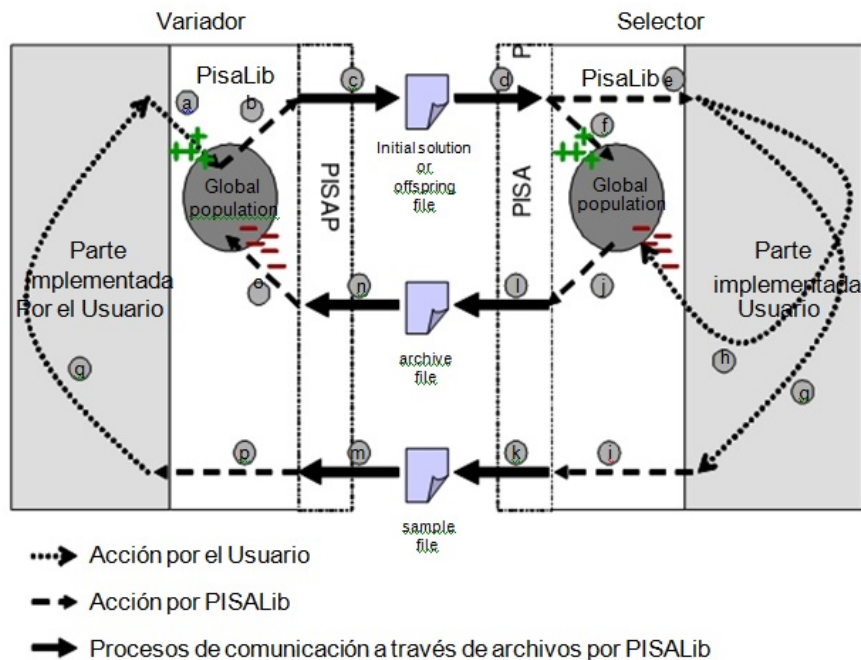


Figura 4.1: Diagrama de Flujo y de componentes de PISA: Platform Independent Interface for Search Algorithms (Fuente: [20])

Entre los componentes que presenta la Figura 4.1 y que se pueden mencionar están [20]:

1. **Parte del Variador Implementada por el Usuario:** La sección de código que el usuario escribe para manejar la representación del problema, generar nuevas soluciones (variación) y evaluar sus valores objetivo.
2. **Parte del Selector Implementada por el usuario:** La sección de código que el usuario escribe para implementar la lógica de selección basada en los valores objetivo
3. **PisaLib:** El marco proporcionado que gestiona las tareas comunes como la comunicación por archivos y la máquina de estados. Se muestra dentro de las áreas del Variador y Selector porque sus funciones son utilizadas por el código del usuario en ambos lados.
4. **Global Population:** Una característica proporcionada por PISALib para gestionar un pool de individuos en cada lado (Variador y Selector). Esto ayuda a mantener la consistencia y reduce errores de implementación.
5. **Archivos de Comunicación:** Los archivos de texto utilizados para intercambiar datos entre el Variador y el Selector

La Figura 4.1 además, ilustra el ciclo iterativo del proceso de optimización, indicando quién realiza cada acción y el flujo de datos a través de los archivos. Los pasos son etiquetados con las letras (a, b, c, etc. en la Figura 4.1) y describen cómo se mueven los individuos y la información, gestionados por PISALib junto con la lógica del usuario [20].

Inicialización (Estados PISA 0 y 1)

- En el lado del **Variador**, el usuario crea una población inicial.
- **PISALib** añade estos nuevos individuos a la "Global Population" del Variador (paso "a" en la figura) [20].
- **PISALib** escribe la información de estos individuos (índices y valores de las funciones objetivo) al archivo correspondiente (Initial solution) (pasos "b", "c"), y establece el estado PISA a 1 [20].
- En el lado del **Selector**, **PISALib** lee el archivo Initial solution (paso "d").
- **PISALib** añade automáticamente los nuevos individuos a la "Global Population" del Selector (paso "e") y notifica al usuario sobre los individuos nuevos (paso "f") [20].
- El usuario en el **Selector** realiza la selección de padres y decide qué individuos mantener en el archivo (pasos "g" y "h") [20].
- **PISALib** escribe los individuos seleccionados al archivo 'sample' (pasos "i", "k") y los individuos a mantener al archivo *archive* (pasos "j", "l"), y establece el estado PISA a 2 [20].

Ciclo Principal (Estados PISA 2 y 3), este ciclo se repite iterativamente hasta que se cumple alguna condición de parada:

- En el lado del **Variador**, **PISALib** lee el archivo *archive* (paso "n")[20].
- **PISALib** reemplaza la *Global Population* del Variador basándose en el archivo "archive" (paso "o") [20].
- **PISALib** lee el archivo *sample* (paso "m") y notifica al usuario qué individuos fueron seleccionados como padres (paso "p") [20].

- El usuario en el **Variador** toma los padres seleccionados, realiza operaciones de variación (recombinación, mutación), crea nuevos individuos (descendencia) y calcula sus valores objetivo (paso "q") [20].
- **PISALib** añade estos nuevos individuos a la *Global Population* del Variador (paso "a").
- **PISALib** escribe la información de la descendencia al archivo *offspring* (pasos "b", "c"), y establece el estado PISA a 3 [20].
- En el lado del **Selector**, **PISALib** lee el archivo *offspring* (paso "d").
- **PISALib** añade automáticamente los nuevos individuos a la *Global Population* del Selector (paso "e") y notifica al usuario sobre los individuos nuevos (paso "f") [20].
- El usuario en el **Selector** realiza la selección para la siguiente generación y decide qué individuos mantener en el archivo (pasos "g" y "h").
- **PISALib** escribe los individuos seleccionados al archivo *sample* (pasos "i", "k") y los individuos a mantener en el archivo *archive* (pasos "j", "l"), y establece el estado PISA de nuevo a 2.

Este ciclo continúa hasta que uno de los módulos decide que se ha alcanzado un criterio de parada y cambia el estado a uno de terminación (Estados 4, 5, 6, 7) [20].

4.6 Experimentación

A continuación se presenta la base de datos utilizada para hacer la comparación de las diferentes técnicas y de esta manera escoger cual será nuestro núcleo o motor evolutivo para proseguir con la propuesta e implementación de las diferentes variantes de hibridación.

4.7 Base de datos utilizada en el análisis

Habitualmente se utilizan datos mensuales del valor de la acción de cinco años (60 datos). No conviene utilizar pocos años, pues los resultados pueden ser pocos representativos. Lo ideal sería recoger un ciclo completo de mercado, con subida y bajada de él. Tampoco conviene tomar muchos años (por ejemplo más de 10), pues la realidad de cada una de las acciones que representan a los fondos que analizamos puede haber variado mucho en los últimos años, y una información tan antigua no es relevante para de alguna manera prever el futuro [1].

Con estos criterios, se optó por utilizar los datos de 15 fondos mutuos europeos cuyos precios de cierre mensuales abarcan el período enero de 2005 a diciembre de 2010. Esta muestra proviene de la base de datos descrita en [210]. El rango temporal seleccionado no es arbitrario. El período 2005–2010 incluye un ciclo completo del mercado financiero europeo, caracterizado por una fase alcista previa a la crisis financiera global (2005–2007), el colapso sistémico de 2008 y la subsiguiente recuperación parcial en 2009–2010. Esta diversidad de regímenes —estabilidad, volatilidad extrema y corrección— ofrece un entorno de prueba exigente y realista para evaluar la robustez de los algoritmos evolutivos multiobjetivo (AEMOs), ya que obliga a los métodos a adaptarse a cambios drásticos en la covarianza y el comportamiento conjunto de los activos.

Además, el horizonte de 5 años (60 observaciones mensuales) cumple con la recomendación estándar en finanzas cuantitativas de usar al menos 5 años de datos históricos para estimar parámetros de media y varianza con cierta fiabilidad. Un período más corto introduciría ruido estadístico excesivo, mientras

que uno más largo (por ejemplo, décadas) podría incorporar información obsoleta, debido a cambios estructurales en los fondos (fusiones, cambios en la política de inversión, o incluso desaparición). El conjunto elegido, por tanto, representa un equilibrio entre suficiencia estadística y relevancia temporal, evitando tanto la sobreajuste como la pérdida de vigencia.

Finalmente, la elección de fondos mutuos europeos —en lugar de acciones individuales— responde a una consideración de coherencia con el objetivo de la tesis: optimizar carteras reales bajo restricciones de cardinalidad. Los fondos mutuos son vehículos de inversión institucional diversificados por naturaleza, lo que los convierte en activos más estables y representativos del comportamiento de sectores o clases de activos completas. Esto refuerza la aplicabilidad de los resultados a un contexto de gestión profesional.

Basándonos en ese análisis tomamos la muestra¹¹ bajo el criterio de escoger aquellos fondos que tienen una antigüedad no mayor de cinco años y que aun están disponibles en el mercado. En el cuadro 4.2 se muestran los diferentes fondos utilizados entre los años 2005 a 2010. [210].

Fondo Mutual Europa	
1	DFA United Kingdom Small Compan
2	Eastern European Equity A (VEEE)
3	Eastern European Equity C (VEEC)
4	Henderson European Focus A (HFE)
5	Henderson European Focus B (HFE)
6	ING Russia A (LETRX)
7	JPMorgan Russia A (JRUAX)
8	JPMorgan Russia Select (JRUSX)
9	Metzler Payden European Emergin
10	Mutual European A (TEMIX)
11	Mutual European B (TEUBX)
12	Mutual European C (TEURX)
13	Mutual European Z (MEURX)
14	Royce European Smaller Companie
15	Third Millennium Russia I (TMRI)

Tabla 4.2: Marco Experimental Fondo Mutual Europa del Modelo de Markowitz Multiobjetivo

A continuación se presenta un cuadro resumen de los elementos que constituyen el desarrollo de nuestro modelo para implementar nuestra solución (**Tablas:** 4.3, 4.4):

	DFA United Kingdom Small Company	Eastern European Equity A	Third Millennium Russia I
Variable	w_1	w_2	w_{15}
$E(R_i)$	0,00786	0,00734	0,23155
δ_i^2	0,00268	0,00649	0,0153
δ_i	0,0517	0,0805	0,124

Tabla 4.3: Tabla de Rendimiento esperado, Varianza y Desviación estándar Fondo Mutual Europa.

¹¹3500 cotizaciones mensuales de los diferentes Fondos Mutuales de Europa

Matriz de Covarianzas	DFA United Kingdom Small Company	Eastern European Equity A	Third Millennium Russia I
DFA United Kingdom Small Compan	1,0000	0,002569249	0,005741673
Eastern European Equity A	0,002569249	1,0000	0,006875973
.....
Third Millennium Russia I	0,005741673	0,006875973	1,0000

Tabla 4.4: Tabla de Matriz de Covarianzas Fondo Mutual Europa.

4.8 Análisis de resultados

La experimentación se ha hecho con los tres algoritmos antes descritos para de esta manera escoger cual de ellos será el encargado de actuar como núcleo evolutivo en nuestra propuesta de hibridación, a saber, NSGA-II, el SPEA2 y el IBEA, empleando los parámetros descritos en la Tabla 4.1 con los fondos mutuales presentados en la Tabla 4.2. Se han utilizado las facilidades que provee la librería PISA descrita anteriormente (ver 4.5) [20].

4.8.1 Análisis de la frontera de Pareto

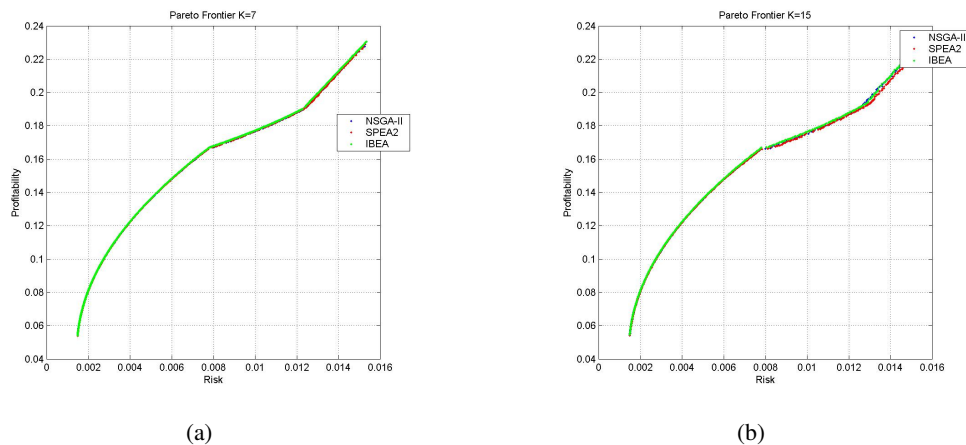


Figura 4.2: Frontera de Pareto NSGA-II, SPEA2 e IBEA cardinalidad K=7 (a). Frontera de Pareto NSGA-II, SPEA2 e IBEA cardinalidad K=15 (b).

La primera parte de la experimentación consistió en el análisis de las fronteras de Pareto obtenidas. El resultado se muestra en la Figura 4.2, como puede observarse, los frentes generados por los tres algoritmos de acuerdo al tipo de fondo parecen comportarse de manera muy similar, aunque el IBEA parece estar mejor propagado para K=7 y K=15.

4.8.2 Análisis de la frontera de Pareto combinada

Combinando todas las fronteras para ver como contribuye cada uno de los algoritmos con los puntos que forman la frontera eficiente se puede observar que el IBEA aparece mejor propagado para $K=4$, $K=7$ y $K=15$. El resultado se muestra en las Figuras 4.3, 4.4.

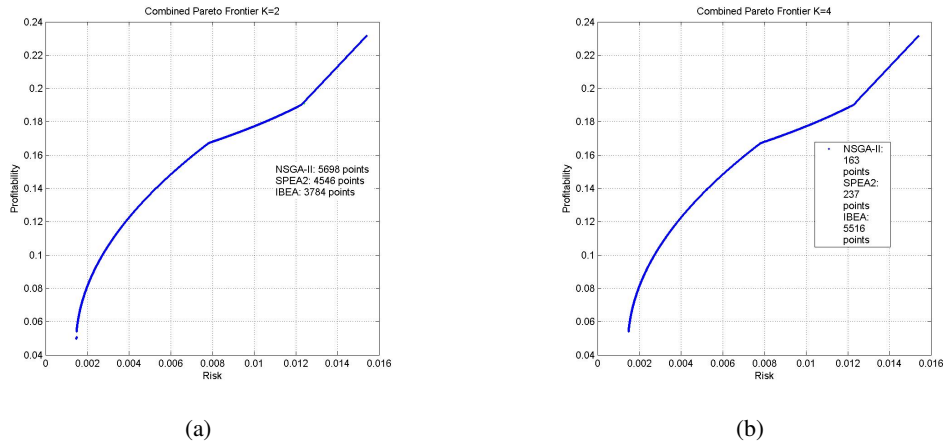


Figura 4.3: Frontera de Pareto combinada con cardinalidad $K=2$ (a). Frontera de Pareto combinada con cardinalidad $K=4$ (b).

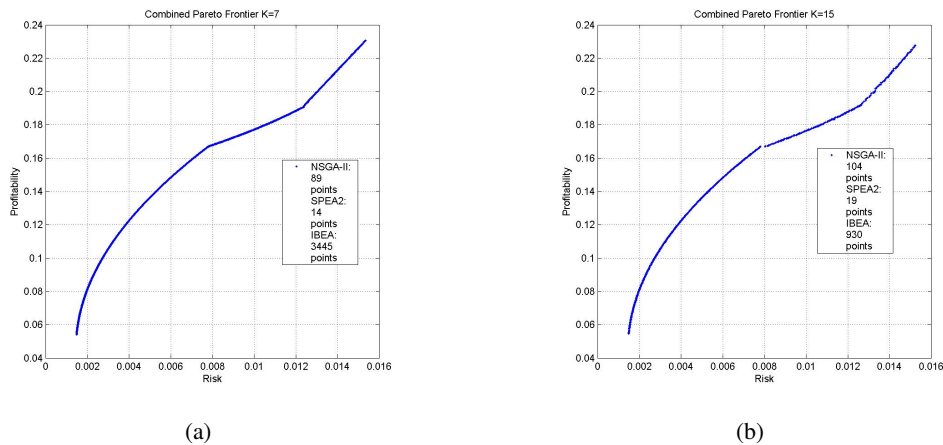


Figura 4.4: Frontera de Pareto combinada con cardinalidad $K=7$ (a). Frontera de Pareto combinada con cardinalidad $K=15$ (b).

Para analizar con más detenimiento hemos aplicado dos medidas de rendimiento bien conocidas: El indicador hipervolumen [219] y el indicador R_2 [105]. (ver 2.9.2) El primer indicador necesita de un punto de referencia para establecer una área que es dominada por un punto específico de cada vector solución que es generado por los optimizadores objetos de estudio (en nuestro caso hemos considerado un punto de mínimo beneficio y máximo riesgo), **cuando se comparan dos frentes, aquel con el mayor valor de Hypervolume será el mejor**. El segundo indicador estima que tan cerca está la solución generada por un algoritmo sobre el frente real o alguna referencia (por lo tanto, **cuanto más pequeño es el indicador R_2 mejor es el algoritmo**).

Las Figuras 4.5 muestran la distribución de los algoritmos aplicados bajo los dos indicadores antes descritos y con criterios de cardinalidad, y la Figura 4.6 muestra la distribución de los algoritmos aplicados bajo los dos indicadores antes descritos incluyendo a todos los activos.

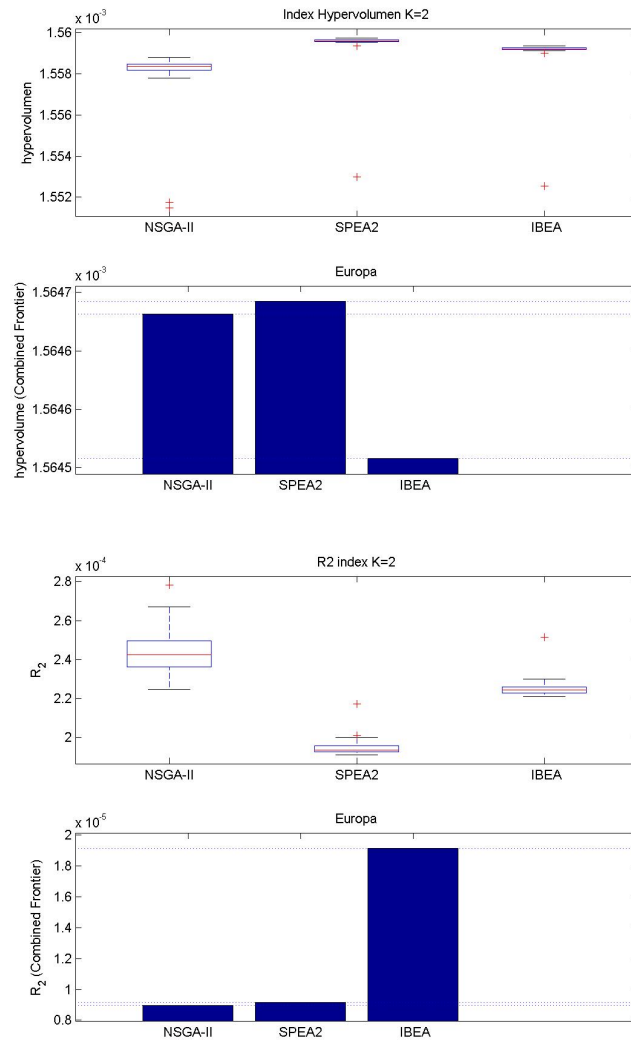


Figura 4.5: Indicador Hypervolume y R_2 para Cardinalidad $K=2$

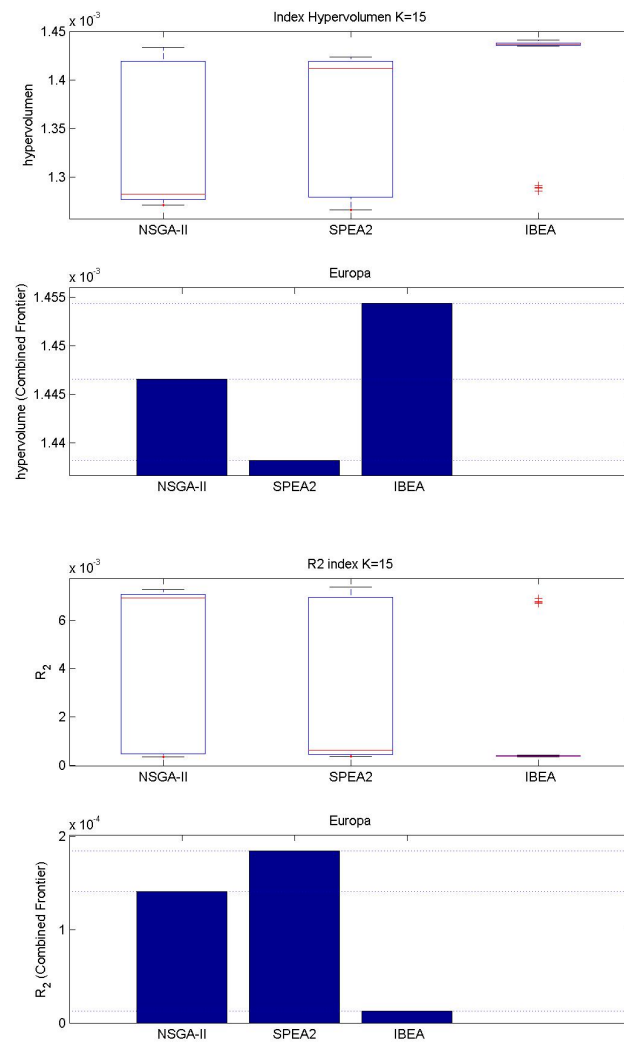


Figura 4.6: Indicador Hypervolumen y R_2 para Cardinalidad K=15

Para las Figuras 4.5–4.6 cuando se aplican restricciones de cardinalidad una observación empírica nos permite inferir que el SPEA2 parece comportarse mejor para el $K=2$. Para $K=4$, 7 y 15 el IBEA tiende hacia una diferenciación bien clara en términos de la eficiencia para obtener una mejor Frontera de Pareto.

El análisis estadístico de los algoritmos con restricciones de cardinalidad presentan una diferencia significativa a favor de SPEA2 para $K=2$, por el contrario el IBEA presenta estadísticamente un mejor comportamiento a medida que la cardinalidad va aumentando. Se muestran diferencias significativas a favor del IBEA para $K=4$, $K=7$ y $K=15$.

Cuando se incluyen todos los activos y se hace un análisis estadístico no paramétrico como la prueba Wilcoxon Ranksum (Nivel de significancia de 0.05) [136], se establecen diferencias significativas a favor del IBEA sobre los otros dos algoritmos, a saber, el NSGA II y el SPEA2 en los Fondos Mutuales de Europa.

4.8.3 Análisis a través del índice de Sharpe

El análisis a través del índice de Sharpe [188] se establece para ver que tan eficientes son los algoritmos evolutivos en termino del conjunto de soluciones óptimas propuestas. A mayor valor en el índice mejor es la solución propuesta por el algoritmo evolutivo. (ver 2.12.3)

En la Figura 4.7 se pueden apreciar los distintos valores del índice de Sharpe con diferentes valores de cardinalidad aportados por la ejecución de los algoritmos NSGAI, SPEA2 e IBEA.

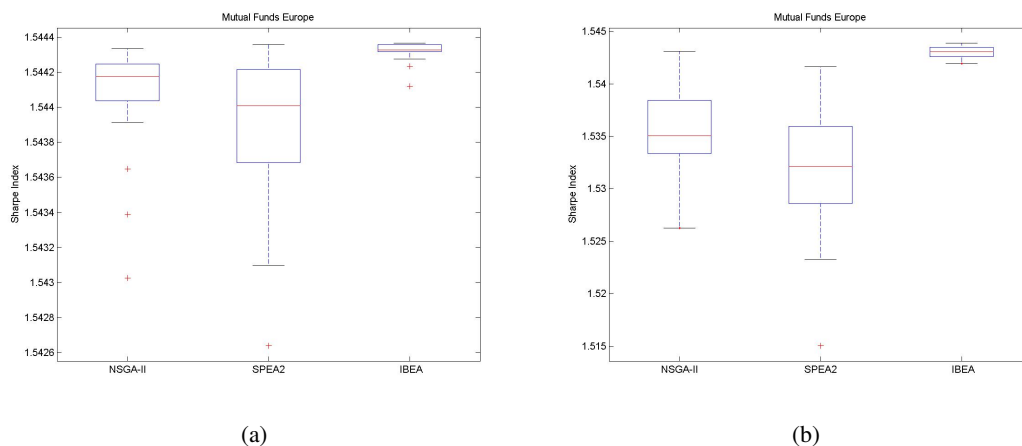


Figura 4.7: Índice de Sharpe para Cardinalidad $K=2$ (a). Índice de Sharpe para Cardinalidad $K=4$ (b).

La observación empírica de la Figura 4.7 establece una diferencia significativa a favor del IBEA. Esta diferencia es confirmada cuando se hace un análisis estadístico no paramétrico como el de Wilcoxon Ranksum (Nivel de significancia de 0.05)

Podemos también hacer un análisis de como se comportan los diferentes algoritmos cuando se varía el componente de rendimiento sin riesgo (R_0), en la Figura 4.8, se observa que a medida que va subiendo la cardinalidad va notándose la diferencia en cuanto a los resultados de la Prima de rendimiento - riesgo.

4.8.4 Interpretación de los resultados: causas y consecuencias

Los resultados empíricos del presente estudio no solo evidencian diferencias de desempeño entre NSGA-II, SPEA2 e IBEA, sino que también revelan aspectos estructurales del problema de optimización

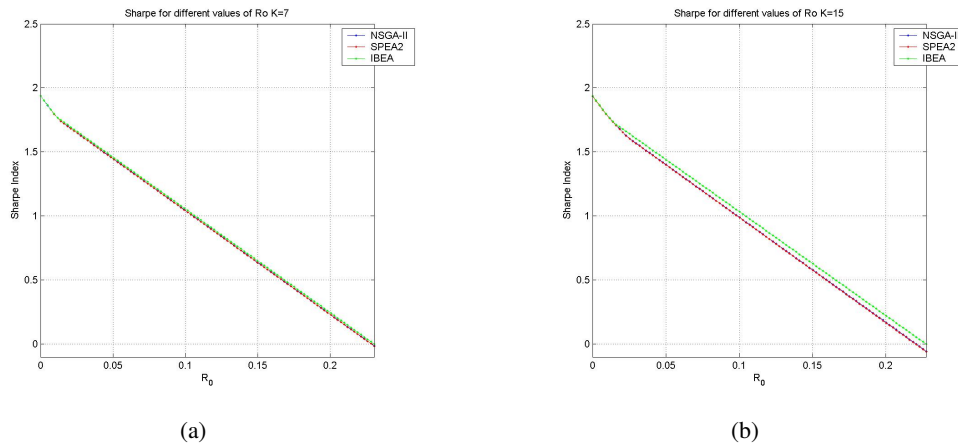


Figura 4.8: Índice de Sharpe para Cardinalidad $K=7$ (a). Índice de Sharpe para Cardinalidad $K=15$ (b).

de carteras con restricciones de cardinalidad que justifican dichas diferencias y condicionan el diseño posterior del algoritmo memético.

La superioridad de IBEA en términos del índice de Sharpe, en particular para cardinalidades moderadas y altas ($K \geq 4$), puede atribuirse a su mecanismo de selección basado en indicadores de calidad. A diferencia de NSGA-II y SPEA2, que priorizan la diversidad en todo el frente de Pareto mediante densidad o compartición de aptitud, IBEA orienta explícitamente la búsqueda hacia regiones del espacio objetivo que maximizan un indicador escalar de calidad (en este caso, el indicador ϵ). Esta orientación resulta especialmente ventajosa en nuestro dominio, donde existe una métrica financiera natural —el índice de Sharpe— que resume la eficiencia retorno/riesgo. En esencia, IBEA actúa como un algoritmo parcialmente informado, lo que le permite concentrar esfuerzos en zonas del frente que son más relevantes para el decisor, aunque a costa de una menor cobertura global en los extremos del frente. Este comportamiento explica por qué, si bien IBEA obtiene menores valores de hipervolumen para $K = 2$ (donde la diversidad es más crítica por la escasez de activos), su ventaja se consolida a medida que el espacio de búsqueda se enriquece con más combinaciones viables ($K \geq 4$).

Esta comprensión causal tiene una consecuencia metodológica inmediata: el motor evolutivo debe ser capaz no solo de aproximar el frente de Pareto, sino de priorizar regiones del mismo con base en conocimiento del dominio. Si el objetivo final no es simplemente obtener un conjunto diverso de carteras, sino identificar aquellas con la mejor relación retorno/riesgo, entonces un algoritmo puramente neutral frente a las preferencias del inversor (como NSGA-II) resulta subóptimo para la fase de toma de decisiones.

Es precisamente esta conclusión la que fundamenta, la elección de IBEA como núcleo evolutivo en la propuesta de hibridación presentada en el capítulo 5. La hibridación propuesta —con búsqueda local y memoria élite guiadas por el índice de Sharpe— no constituye una modificación arbitraria ni externa al modelo, sino una extensión natural del sesgo ya presente en IBEA. Al transformar este sesgo implícito en un mecanismo explícito de intensificación, se logra una sinergia entre la exploración global del algoritmo evolutivo y la explotación informada del dominio financiero. En este sentido, la carencia percibida en el análisis precedente se resuelve en el capítulo 5, no como una corrección a posteriori, sino como la culminación lógica de una hipótesis de trabajo que se deriva directamente de los resultados observados aquí.

4.9 Conclusiones

El problema de optimización de carteras es un escenario natural para el uso de algoritmos evolutivos multiobjetivo, sobre todo por la capacidad y flexibilidad que presentan estos tipos de algoritmos. En este sentido en este capítulo se ha analizado tres diferentes estados del arte en esta área específica, es decir, NSGA II, SPEA2 e IBEA utilizando como marco experimental diferentes Fondos Mutuales de Europa tomando una muestra hasta Julio de 2010. Se puede afirmar también que los tres algoritmos presentan una variedad de perfiles de solución que se pueden considerar óptimos, existe una clara diferenciación en la soluciones aportadas por el IBEA para los fondos mutuales de Europa, según las pruebas estadísticas con un nivel de significancia de 0.05 cuando se trata de la inclusión de todos los activos a la cartera.

Cuando se trata de agregar restricciones de cardinalidad, para $K=2$ el SPEA2 tiene unos mejores resultados a través de los indicadores de Hypervolume y R_2 . El IBEA por el contrario demuestra mejores resultados para $K=4$, $K=7$ y $K=15$. El NSGA II no aporta mejores soluciones para el tipo de problemas de optimización de carteras de inversión.

El hecho de que para la evaluación de un algoritmo evolutivo multiobjetivo se tome en cuenta entre otras cosas la mayor diversidad en las soluciones o la mayor diseminación sobre el frente de Pareto para la toma de decisiones nos permite afirmar que en algunas especificidades hace falta también tener algunos otros mecanismos de comparación, el índice de Sharpe [188] para el problema de optimización de carteras a través del modelo de Markowitz es uno de ellos.

Cuando se analiza la comparativa en el contexto del índice de Sharpe el IBEA se comporta mucho mejor que los otros dos, a saber el NSGA II y el SPEA2. Esto además comprueba los resultados presentados en [49] con otro rango de datos y otro contexto financiero.

De esta manera, podemos establecer que el IBEA será nuestro motor evolutivo para la implementación de las variantes de hibridación que se presentan en el capítulo 5.

4.10 Contribuciones

Estos resultados y la contribución de esta experimentación se concretó mediante la diseminación en trabajos de publicación que pueden ser revisados en [49], [50], [51].

VARIANTES DE HIBRIDACIÓN PARA EL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN MULTIOBJETIVO DE CARTERAS DE INVERSIÓN CON RESTRICCIONES DE CARDINALIDAD

El presente capítulo considera la implementación de varios mecanismos de hibridación para el diseño de Algoritmo Memético Evolutivo Multiobjetivo (MOMA) suficientemente discutido en las Secciones 2.11 y 2.9 con variación poblacional que contiene técnicas de memoria élite (ME) y búsqueda local (LS) (Sección 2.6) para resolver la selección de carteras de inversión con restricciones de cardinalidad (Sección 2.12.2.5). Se trata de un problema de optimización intrínsecamente multiobjetivo para el que utilizamos como base de conocimiento el índice de Sharpe [188], una conocida medida de rentabilidad-riesgo, para evaluar la eficiencia financiera de las carteras de inversión generadas como mecanismo de solución, así como para realizar análisis comparativos y guiar la respuesta a través de unos mecanismos de información. El índice de Sharpe está en el núcleo de la memoria de élite utilizada por el EA, para mantener un registro de las soluciones más efectivas encontradas. Este registro se utiliza en conjunto con la búsqueda local como un mecanismo de intensificación sintonizable para mantener la búsqueda enfocada en regiones de interés. Se ha realizado un estudio de las diferentes variantes del algoritmo para determinar en que fase del desarrollo evolutivo puede generar mejores resultados logrando con esto un salto generacional. Se ha llevado a cabo además una comparación con cinco algoritmos evolutivos multiobjetivo utilizando indicadores de desempeño bien conocidos como el hipervolumen y la distancia generacional para determinar si el mecanismo de hibridación propuesto mejora en estas métricas. Esta experimentación toma como referencia el mercado financiero accionario de la Bolsa de Valores de Colombia entre 2010-2016, y confirma el gran potencial del uso de la hibridación generacional controlada para este problema.

La experimentación y los resultados que se presentan en este capítulo fueron avalados por publicaciones en diferentes instancias de las cuales se pueden mencionar: [56], [55], [54], [53].

5.1 Introducción

Existen en el área de gestión de instrumentos financieros toda una serie de elementos teóricos y estudios relacionados con la relación rendimiento-riesgo [123]. El potencial de rendimiento o pérdida de las inversiones no es estático, sino que depende siempre de la evolución del mercado. En la literatura se pueden encontrar diversas propuestas que modelan este escenario; por ejemplo, desde su aparición el modelo de Markowitz [150] se ha convertido en una referencia teórica fundamental para la selección de carteras de inversión. Sin embargo su aplicación en la práctica no ha sido tan extensa, debido, principalmente a la complejidad matemática del método. Cuando a este modelo se le agregan algunas otras restricciones como por ejemplo las de cardinalidad se convierte en un modelo cuya complejidad debe ser abordada con técnicas de búsqueda de soluciones cuasi óptimas [204]. La mayor contribución del presente trabajo es la demostración de que se pueden establecer algunas técnicas de explotación de conocimiento que permite el enfoque en algunas regiones de la frontera de Pareto que se va dando a lo largo del desarrollo evolutivo que se ajustan mejor a lo que se busca para obtener un mejor provecho: maximizar el rendimiento de la cartera de inversión con un bajo riesgo con una técnica basada en el uso de una memoria élite que trabaja sinérgicamente con una búsqueda local que mantiene un conjunto de soluciones seleccionadas en el contexto de la búsqueda de los mejores individuos en un mecanismo evolutivo.

Esta investigación considera la implementación de un mecanismo de hibridación con cualidades de elitismo e implantación de un método de variación de la población basado en explotación de conocimiento del problema a medida que un algoritmo evolutivo multiobjetivo base se va ejecutando. Para esto se ha considerado utilizar una base de conocimiento del problema, esto es, el índice de Sharpe [188]. Este índice es una medida de la relación entre el rendimiento y el riesgo en una cartera de inversión determinada.

El uso de mecanismos de hibridación para fomentar una aceleración de la búsqueda de óptimos en problemas multiobjetivo (algoritmos meméticos multiobjetivo (MOMA) [118]) supone la resolución de una gran cantidad de desafíos: El coste computacional de intensificar la búsqueda de una convergencia prematura así como también lograr suficiente diversidad en el conjunto de soluciones del frente de Pareto.

Este estudio comprende un análisis de sensibilidad de la mejor parametrización para la entrada en escena de el desarrollo evolutivo basado en generaciones del mecanismo de hibridación y un estudio comparativo con diferentes técnicas algorítmicas para abordar un problema multiobjetivo usando computación evolutiva.

Más específicamente el estudio comparativo considera cinco algoritmos base que son referencia en esta materia: el (NSGA-II) [69], el (SPEA2) [222] y el (IBEA) [218], el (SHV) y el (HYPE) propuestos por [11].

5.2 Materiales y métodos

De acuerdo a lo mencionado en la Sección 4.1, se ha considerado el uso de diferentes técnicas metaheurísticas para optimización de carteras de inversión con restricciones de cardinalidad en el contexto del referente financiero basado en el modelo de Markowitz (Ver 4.2). En las siguientes secciones se describirá con mayor detalle qué técnicas se utilizaron para la comparación con esta propuesta que desarrolla su mecanismo de actuación con una medida de rendimiento soportada en el índice de Sharpe (Ver 2.12.3) y su actuación en diferentes etapas del desarrollo evolutivo. Finalmente, se describirán en detalle la base de datos usada en la experimentación y el entorno de la implementación siguiendo los elementos reproducidos en la Sección 4.3.

5.3 La propuesta de hibridación

Como se anticipó en la Sección 2.11, una de las cuestiones clave para aplicar con éxito metaheurísticas a una determinada tarea de optimización es adaptar la primera a la última tarea específica [208].

Este es precisamente uno de los principios centrales de los algoritmos con características meméticas [159]. Desde un punto de vista muy específico, estas técnicas surgen de la combinación de algoritmos de optimización basados en la población (a menudo responsables de proporcionar capacidades de exploración / diversificación) y alguna forma de búsqueda local (a su vez, responsable de la explotación/intensificación de la búsqueda en regiones prometedoras del espacio de búsqueda). Si bien esto no agota las posibilidades dentro del marco de los algoritmos meméticos (ver [163], [164]), constituye un esqueleto básico sobre el cual se puede construir un método de optimización altamente efectivo. Lo que es más importante, estos métodos pueden considerarse como una estrategia complementaria de resolución de problemas, destinada a beneficiarse de las ideas algorítmicas existentes, combinándolas de forma sinérgica (ver 2.11).

El enfoque considerado llamado **MA** por las siglas en inglés de *Memetic Algorithm* utiliza el método IBEA [218] como motor de búsqueda evolutivo, debido a su buen desempeño en este dominio del problema [51] y de acuerdo a los resultados evidenciados en el capítulo 4. En cuanto al componente intensificador, su funcionamiento y propósito se explica a continuación (ver 2.11).

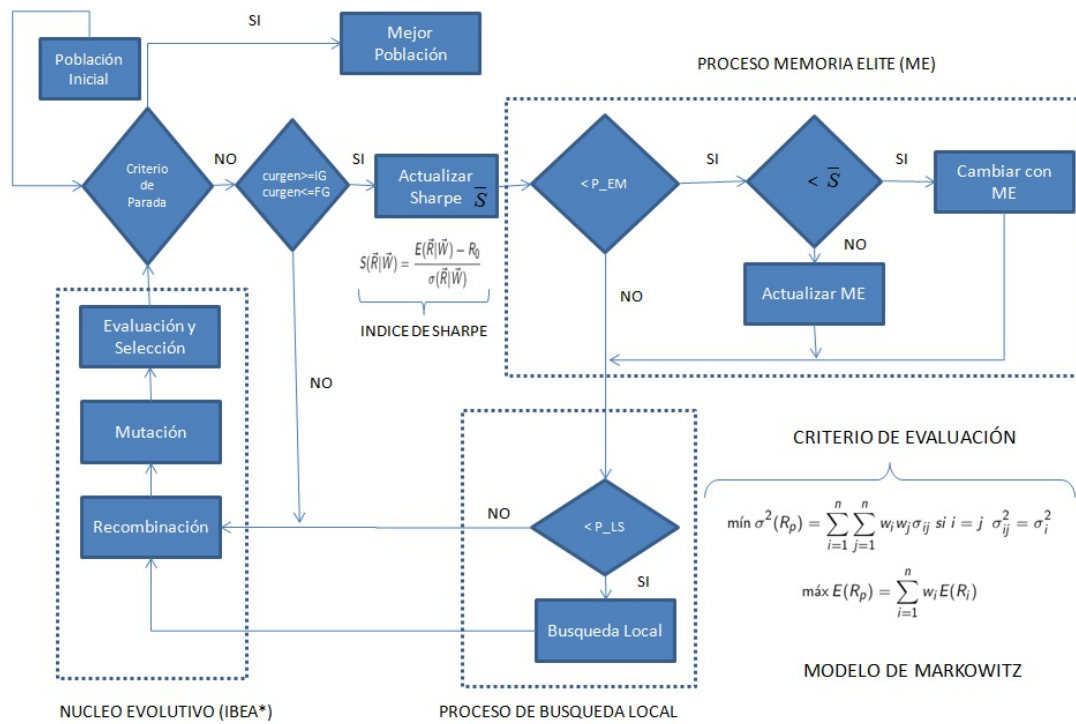
En esta investigación se busca reconocer cual es el mejor ámbito de actuación del mecanismo de hibridación en el contexto del desarrollo evolutivo generacional. Por lo tanto se hace un estudio de las diferentes variantes de hibridación para ver en que generaciones puede resultar en una mejor condición evolutiva sin afectar la forma de seleccionar las soluciones a las que se aplicará la hibridación y durante cuánto tiempo ejecutar el motor de búsqueda local (el uso de dicho motor de hibridación se supone tiene un costo computacional adicional).

Obtener una buena convergencia y un frente de Pareto óptimo bien disperso sigue siendo un gran desafío para la mayoría de los métodos de optimización metaheurística multiobjetivo (MOO). Hemos considerado el rango de actuación de la solución de hibridación propuesta con dos parámetros: La Generación de Inicio (IG) que se maneja a través de una variable N_i y la Generación Final (FG) que también se maneja con una variable N_f . (ver Figura: 5.1).

Primera Variante: Si se cumple la condición de activación del mecanismo de hibridación (por la Generación Inicial (IG)), se configura la memoria de soluciones élite que es una lista ordenada de los mejores individuos (según el índice de Sharpe) que genera el algoritmo en un momento dado. Esta lista está inicialmente vacía y tiene un cierto tamaño máximo fijo Θ . Cada vez que se genera una nueva solución, se genera su índice de Sharpe. Si es positivo, entonces se prueba con esta memoria de élite: si hay espacio en él, se inserta; de lo contrario, sustituye a la peor solución (según el índice de Sharpe) de la colección, siempre que la primera sea mejor que la segunda.

El propósito de esta lista es proporcionar una intensificación adicional de la búsqueda. Para ello, el algoritmo utiliza en cada iteración el índice de Sharpe promedio de esta memoria \bar{S} : para cada nuevo individuo creado en esa generación se activa un procedimiento de corrección con una probabilidad P_{EM} : si el nuevo individuo y su valor de índice Sharpe está por debajo de \bar{S} se sustituye por un individuo aleatorio de la memoria de las soluciones de élite. Al hacerlo, se descartan las soluciones por debajo del promedio y la búsqueda se reorienta en torno a soluciones de élite anteriores. Cabe señalar que este procedimiento está destinado a funcionar en conjunto con el procedimiento de mutación, recombinación y de búsqueda local que también tiene una probabilidad de actuación.

Segunda Variante: El componente de búsqueda local, se aplica a través de la implementación de un método de escalada de colinas de primer ascenso (ver 2.7.1). El funcionamiento de esta búsqueda local se describe en Diagrama de flujo 5.1 y en el algoritmo 14. El método recibe una solución a mejorar



(*) IBEA: Indicator-based selection in multiobjective search. (E. Zitzler and S. Kunzli)

Figura 5.1: Diagrama de Flujo con Memoria Élite y Búsqueda Local, Generación Inicial (IG) y Generación Final (FG)

Algoritmo 13: Nuestra propuesta: Algoritmo Memético (MA) Basado en Sharpe**Entrada:** Definición del problema de optimización (función objetivo, restricciones)**Salida:** Óptimo local o conjunto de óptimos locales encontrados**Parámetros:** Tamaño de la población (μ), λ : number of offspring; p_{LS} : local-search probability; p_{EM} : elite-memory probability

```

1 elite ← ⟨⟩
2 for i ← 1 to μ do
3   | popi ← GENERATESOLUTION() UPDATEELITE(elite, popi)
4 end
5  $\bar{\xi}$  ← COMPUTEAVGSHARPE(elite)
6 while ¬ TERMINATION() do
7   | offspring ← SELECTANDREPRODUCE(pop) for i ← 1 to λ do
8     | s ← SHARPE(offspringi);
9     | if rand < pEM and s <  $\bar{\xi}$  then
10    | | offspringi ← CORRECTSOLUTION(offspringi, elite);
11    | end
12    | if rand < pLS and s >  $\bar{\xi}$  then
13    | | offspringi ← LOCALSEARCH(offspringi)
14    | end
15    | UPDATEELITE(elite, offspringi)
16  | end
17  |  $\bar{\xi}$  ← COMPUTEAVGSHARPE(elite) pop ← REPLACE(pop, offspring)
18 end

```

si la condición de aleatoriedad se cumple con una probabilidad P_{LS} e itera un procedimiento que consiste en generar un vecino (mutar un peso distinto de cero) y aceptar como la solución actual si tiene un mejor índice de Sharpe (y este índice de Sharpe también es mejor que el promedio de la población \bar{S}). Esto se hace hasta que un cierto presupuesto computacional fijo asignado a este componente está agotado.

Tercera Variante: En consonancia con esto, se considera un enfoque memético basado en un EA multiobjetivo subyacente, añadiendo dos componentes intensificadores:

1. Una memoria de soluciones de élite.
2. Un método de búsqueda local.

Véase el Algoritmo 13. En este caso, se ha elegido el método IBEA descrito en la Sección 2.9 y el Algoritmo 7 como motor de búsqueda evolutivo subyacente debido a su buen rendimiento en este dominio problemático (ver 4) [51]. En cuanto a los componentes intensificadores, su función y propósito se describen a continuación.

Para empezar, **la primera variante**, la memoria de soluciones de élite es una lista ordenada de las mejores soluciones (con respecto a su índice de Sharpe) que se han generado en un momento determinado. La lista comienza vacía, con una capacidad máxima fija de Θ . Cada vez que se genera una nueva solución, se genera su índice de Sharpe. Si es positivo, se compara con esta memoria de élite: si hay espacio en ella, se inserta; de lo contrario, sustituye la peor solución (según el índice de Sharpe) de la colección, siempre que la primera sea mejor que la segunda. El propósito de esta lista es proporcionar una intensificación de búsqueda adicional. Para ello, el algoritmo utiliza en cada iteración el índice de Sharpe medio de la memoria de élite $\bar{\xi}$: por cada nuevo individuo creado en esa generación, se activa un procedimiento de corrección con cierta probabilidad p_{EM} : si el índice de Sharpe del nuevo

Algoritmo 14: Búsqueda local basada en Sharpe LOCALSEARCH (p)**Entrada:** Definición del problema de optimización (función objetivo, restricciones)**Salida:** Óptimo local o conjunto de óptimos locales encontrados**Parámetros:** p : the starting solution

```

1 begin
2    $\xi \leftarrow \text{SHARPE}(p)$ ;
3    $i \leftarrow \max_{\mathcal{N}}$ ;
4   while  $i > 0$  do
5      $p' \leftarrow \text{GENERATENEIGHBOR}(p)$   $\xi' \leftarrow \text{SHARPE}(p')$ ;
6     if  $(\xi' > \xi)$  then
7        $p \leftarrow p'$ ;  $\xi \leftarrow \xi'$   $i \leftarrow i - 1$ 
8     end
9     else
10      if  $\frac{\xi - \xi'}{\xi} > \theta_{\xi}$  then
11         $i \leftarrow i - \eta_1$ 
12      end
13      else
14         $i \leftarrow i - \eta_2$ 
15      end
16    end
17  end
18  return  $p$ ;
19 end

```

individuo es inferior a $\bar{\xi}$, se sustituye por un individuo aleatorio de la memoria de soluciones de élite. De esta manera, se descartan las soluciones por debajo del promedio y la búsqueda se centra en soluciones de élite previas. Cabe destacar que este procedimiento está diseñado para funcionar en conjunto con el procedimiento de búsqueda local estocástica y, por lo tanto, en lugar de simplemente explotar material genético de calidad, proporciona un punto de partida prometedor para realizar ajustes locales.

Se debe prestar atención en **la segunda variante**, concretamente el componente de búsqueda local, que se materializa en una variante de un método de escalada de primer ascenso. La aplicación de este método de búsqueda local se muestra en la Línea 13 de el Algoritmo 13 y se detalla en el Algoritmo 14. El método recibe una solución para mejorar si la prueba aleatoria se satisface con una probabilidad P_{LS} y la solución tiene un índice de Sharpe superior a $\bar{\xi}$ (para centrar la búsqueda únicamente en soluciones prometedoras) e itera un procedimiento que consiste en generar un vecino (mutar un peso) y aceptarlo como solución actual si tiene un mejor índice de Sharpe. Esto se hace hasta que se agota un cierto presupuesto computacional fijo asignado a este componente (la rutina de búsqueda local tiene un mecanismo de aceleración como se muestra en las Líneas 11-14 en el Algoritmo 14, por el cual si el vecino es peor que la solución actual, el presupuesto computacional se reduce para evitar cálculos infructuosos; se consideran dos penalizaciones diferentes dependiendo de si el vecino es peor por más de un cierto umbral θ_{ξ} o no).

Se puede observar cómo el algoritmo de optimización (MA) utiliza un esquema de lamarckismo parcial [111] al activar una búsqueda local con cierta probabilidad (lo que busca reducir el esfuerzo computacional improductivo resultante de la aplicación indiscriminada de la búsqueda local a cada solución). El código fuente del algoritmo está disponible en nuestro repositorio de código fuente¹².

¹²<https://github.com/fcolomine/MAsharpe>

5.4 Datos utilizados en el análisis

Este trabajo ha considerado los precios de cierre mensuales en la Bolsa de Valores de Colombia (BVC) de veinte fondos de capital durante los años 2010 a 2016. Por lo general, es conveniente elegir un intervalo de al menos 5 años, para –en un escenario ideal– capturar un ciclo de mercado completo con la correspondiente fluctuación en los precios de las acciones. Por otro lado, no es recomendable elegir un intervalo muy grande (por ejemplo, 10 años o más), dado que la extensión indiscriminada del horizonte temporal en estudios empíricos puede introducir ruido sustancial derivado de cambios institucionales, regulatorios o tecnológicos que alteran radicalmente las condiciones subyacentes del fenómeno bajo estudio [1], ya que el estado real del fondo puede no estar bien representado por información de mercado muy antigua. En este sentido, el conjunto de datos considerado se ajusta cómodamente dentro de estos límites.

El periodo comprendido entre 2010 y 2016 fue seleccionado también debido a que corresponde a una etapa de estabilidad económica relativa en Colombia, marcada por un contexto de crecimiento sostenido del producto interno bruto (PIB) [48], una política monetaria prudente y una mayor apertura e integración de los mercados financieros locales a nivel internacional. Durante estos años, la Bolsa de Valores de Colombia experimentó una dinámica representativa de tendencias tanto alcistas como correctivas, lo que permite un análisis equilibrado de su comportamiento en distintas condiciones macroeconómicas [48].

La no estacionariedad de las series financieras a largo plazo puede inducir correlaciones espurias y enmascarar dinámicas locales relevantes [100], [1]. Este riesgo es especialmente crítico en economías emergentes como la colombiana, donde choques externos (como fluctuaciones en los precios de las materias primas o decisiones de política monetaria global) han tenido efectos asimétricos a lo largo del tiempo. En el caso del mercado accionario colombiano, un periodo que se extendiera, por ejemplo, desde los años 1990 hasta la actualidad, abarcaría fases históricas muy heterogéneas: desde etapas de baja liquidez y desarrollo limitado del mercado de capitales, hasta la modernización regulatoria impulsada por la Ley 964 de 2005 y la posterior integración con los mercados de valores de la Alianza del Pacífico [59].

Los datos se recopilaron del sitio web público de la bolsa de valores de Colombia [48]. La Tabla 5.1 describe los fondos considerados.¹³ Estos datos son representativos del comportamiento de estos fondos de renta variable. Además, cabe destacar que este conjunto de datos incorpora activos de diferentes sectores (infraestructura, financiación, energía, etc.) y con diferente comportamiento comercial, lo que lo convierte en una muestra representativa del mercado que permite la diversificación de la inversión.

¹³Estos datos están disponibles en nuestro repositorio de datos en <https://osf.io/wg7mn/>

	ECOPETROL	PREC	PFBCOLOM	GRUPOSURA	GRUPOAVAL
Profitability	-0,00429493	-0,02689857	0,00827647	0,00794438	0,011147021
Risk	0,00671900	0,01193778	0,00170523	0,00161020	0,00243122
	CORFICOLCF	EXITO	ISAGEN	ISA	PFCORFICOL
Profitability	0,014101804	0,010228074	0,005079423	-0,001401204	0,013321116
Risk	0,00152303	0,00222107	0,00089910	0,00205940	0,00138877
	BCOLOMBIA	CEMARGOS	EEB	BOGOTA	BVC
Profitability	0,00750252	-0,003115673	-1,782468658	0,013590999	-0,001949743
Risk	0,00179756	0,00269953	0,15645018	0,00148398	0,00277334
	VALOREM	PROTECCION	FABRICATO	COLTEJER	ETB
Profitability	0,000381456	0,008730646	-0,033799508	-0,031747288	-0,007452069
Risk	0,00032588	0,00010042	0,00509110	0,00187508	0,00055756

Tabla 5.1: Fondos de la BVC incluidos en el conjunto de datos utilizado en la experimentación. Para cada fondo, se muestran la rentabilidad ($E(R_i)$) y el riesgo ($\sigma(R_i)$) en el periodo 2010-2016.

Nuestro problema mantiene como incógnita para solucionar a aquellos valores de las ponderaciones w_i que representan la proporción que se debe invertir en cada uno de los activos. Es necesario acotar que los valores válidos de estas ponderaciones para cualquier w_i deben estar entre 0 y 1.

$$0 \leq w_i \leq 1$$

5.5 Escenario de comparación

En vista del escenario descrito en la Sección 4.2, la tarea de optimización puede ser abordada por un optimizador multiobjetivo (ver 2.9, 4) que explorará el espacio de soluciones (carteras potenciales) con el objetivo de encontrar o aproximar el conjunto de soluciones eficientes, seguido de una etapa de selección en la que se utiliza el índice de Sharpe para extraer una solución de este conjunto. Este es el enfoque base con el que posteriormente se comparará nuestra propuesta memética (ver 5.3). Por lo tanto, se describirá brevemente cinco AEMOs conocidos, que se utilizarán posteriormente en el trabajo comparativo descrito en la Sección 5.6.

- El SPEA2 propuesto por Zitzler et al. [223] es un AE que incluye un archivo externo de soluciones no dominadas y una estrategia detallada para determinar la fortaleza de cada solución s (el número de soluciones dominadas o iguales a s , dividido entre el tamaño de la población más uno), que se utilizará para la selección (para minimizar la fortaleza de las soluciones que no están dominadas por padres tentativos). El algoritmo utiliza una técnica de estimación de densidad de vecinos más cercanos para expandir el frente y una estrategia específica de actualización del archivo. Este algoritmo fue explicado con detenimiento en la Sección 2.
- El NSGA-II propuesto por Deb et al. (Deb2000) clasifica la población en frentes sucesivos no dominados. El nivel de no dominación en el que se ubica cada individuo se utiliza como rango individual para fines de selección (mediante un torneo binario en dichos rangos). El algoritmo también utiliza una técnica de estimación de densidad de vecinos más cercanos para realizar el reemplazo y expandir el frente de Pareto. Este algoritmo fue explicado con detenimiento en el apartado 4.

- El IBEA propuesto por Zitzler et al. [218] constituye un intento de utilizar la toma de decisiones práctica para la optimización de Pareto. A diferencia de los dos enfoques anteriores, basados en la noción de dominancia de Pareto, estos EA utilizan un indicador de rendimiento para concentrar la búsqueda en regiones específicas de interés en el frente de Pareto. En este trabajo, hemos considerado un IBEA basado en el indicador ϵ de Zitzler et al. [224]. Este algoritmo fue explicado con detenimiento en la Sección 1.
- El SHV y el HYPE Los algoritmos propuestos por Bader y Zitzler [11] son EA multiobjetivo basados en la métrica de hipervolumen. Estos algoritmos fueron explicados con detenimiento en el apartado 2.

Como se puede observar, los enfoques anteriores difieren en cómo se realizan la selección y el reemplazo para lograr una buena cobertura y convergencia hacia el frente óptimo de Pareto. Sin embargo, otros detalles de su aplicación al problema en cuestión son idénticos en todos los casos. Por lo tanto, las soluciones \vec{W} se representan mediante una secuencia de enteros $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n$, cada uno codificado en forma binaria. Los pesos reales de cada activo en la cartera están en el rango $[0, 1]$ y se pueden obtener normalizando estos valores brutos $w_i = \bar{w}_i / \sum_j \bar{w}_j$. La evaluación se realiza calculando el riesgo y la rentabilidad de la cartera como se describe en la Sección 4.2. En términos de reproducción, consideramos operadores estándar como el cruce de dos puntos y la mutación por inversión de bits. Dado que se aplica una restricción de cardinalidad, es decir,

$$\#\{w_i \mid w_i > 0, 1 \leq i \leq n\} = K, \text{ (ver la Sección 2.12.2.5)}$$

Donde $\#S$ indica la cardinalidad del conjunto S (en otras palabras, hay exactamente K pesos distintos de cero). Siempre que se genera una solución inviable, esta se descarta.

5.6 Entorno experimental

Se han realizado experimentos con los cinco algoritmos descritos en las secciones 5.5 y 2.9 —NSGA-II (ver 4), SPEA2 (ver 2), IBEA (ver 1), HyPE y SHV (ver 2)— y nuestro algoritmo memético (MA) descrito en la Sección 5.3, siguiendo lo dispuesto en las secciones 4.3.3, 4.3.2, 4.3.1. Se ha utilizado la biblioteca PISA (ver 4.5) (una interfaz independiente de la plataforma y el lenguaje de programación para algoritmos de búsqueda) propuesta por Bleuler et al. [20] para los algoritmos de búsqueda (EA) multiobjetivo básicos, así como para el motor evolutivo y selector de nuestro algoritmo memético. En todos los casos, los pesos w_i de los individuos se codifican con 10 bits (ver 4.3.1) (lo que resulta en una cadena de bits con una longitud de $\ell = 200$, ya que hay 20 fondos, como se indica en la Sección 5.4), la tasa de cruce es $P_c = 0,8$, la tasa de mutación es $P_m = 1/\ell$ y el tamaño de la población es 2ℓ (ver Sección 4.3.3). En cuanto al algoritmo memético (MA) (ver Sección: 5.3), la memoria de las soluciones de élite tiene un tamaño máximo $\Theta = 30$, la probabilidad de corrección es P_{EM} , la probabilidad de búsqueda local es P_{LS} y el número máximo de vecinos explorados es $\max_{\mathcal{N}} = 10$. Otros parámetros de búsqueda local son $\theta_\xi = 0,02$, $\eta_1 = 4$, $\eta_2 = 2$.

Los algoritmos se han ejecutado para un máximo de 20000 evaluaciones de aptitud (excepto la MA, que se reduce a 18500 para tener en cuenta la sobrecarga de la búsqueda local), y se realizan 30 ejecuciones para cada una de ellas y cada valor de K (en estos experimentos se ha considerado $K \in \{14, 16, 18, 20\}$). Estos valores se eligieron para mayor claridad en la presentación de los resultados y, además, son en gran medida consistentes con las teorías financieras.

Para evaluar los resultados de cada método, consideramos una doble perspectiva: la calidad del frente de Pareto obtenido y la calidad de la cartera seleccionada en este frente. Para este último aspecto, consideramos el índice de Sharpe mencionado en las Secciones 4.2 y 2.12.3.

En cuanto a la evaluación de los frentes de Pareto, consideramos dos indicadores de rendimiento bien conocidos: el indicador de hipervolumen [219] y el indicador de distancia generacional GD [203]. El primero indica la región en el espacio de aptitud dominada por el frente (y, por lo tanto, cuanto mayor sea, mejor). Para medir esto, se requiere un punto de referencia que delimite el espacio de aptitud, que en este caso se obtiene asumiendo el máximo riesgo y el mínimo beneficio obtenido en soluciones del frente de Pareto más conocido (el frente de Pareto combinado para el valor particular de K considerado, considerando los frentes de todos los algoritmos incluidos en cualquier comparación específica).

En cuanto al segundo indicador, estima la proximidad de un frente a otro (el frente óptimo de Pareto real si se conoce, o un frente de referencia en caso contrario). Hemos considerado la versión unaria de este indicador, tomando nuevamente el frente de Pareto combinado de los algoritmos considerados en la comparación como conjunto de referencia. Dado que esta es una medida de la distancia al conjunto de referencia, es mejor obtener valores más bajos de GD . En ambos casos, los valores absolutos de los indicadores están normalizados. Para ello, se determina un punto de contrarreferencia como el punto ideal hipotético (máximo rendimiento observado y mínimo riesgo observado en el frente de Pareto combinado). Cabe destacar que este punto de contrarreferencia y el punto de referencia del hipervolumen determinan conjuntamente el rectángulo mínimo que contiene el frente de Pareto combinado. Los valores de hipervolumen se expresan entonces como una fracción del volumen de este rectángulo y los valores de GD como un porcentaje de la diagonal de este rectángulo.

5.7 Resultados Experimentales

La experimentación se ha estructurado en dos fases.¹⁴ En la primera, realizamos un análisis de sensibilidad para identificar el rango de valores en el que la MA ofrece un mejor rendimiento (véase la Sección 5.8). Tras esto, pasamos a la segunda fase (véase la Sección 5.9), en la que comparamos la MA con diferentes optimizadores multiobjetivo evolutivos (véase la Sección 5.5) utilizando los indicadores sugeridos en la Sección 5.6.

5.8 Variantes de la hibridación: Análisis de sensibilidad

Para encontrar la mejor parametrización, se consideran tres etapas diferentes en las que el MA presenta diferentes subconjuntos de componentes: (1) solo búsqueda local, (2) solo memoria de élite y (3) búsqueda local con memoria de élite. En cada caso, se analizan estadísticamente los resultados numéricos y se realiza un análisis comparativo para identificar las regiones de interés de los parámetros. Se utilizará la notación $MA_{x,y}$ para denotar un MA con $P_{LS} = x$ y $P_{EM} = y$ (nótese que $MA_{0,0}$ se reduciría al uso del algoritmo IBEA por lo descrito en la Sección 5.3).

5.8.1 Solo búsqueda local

En este estudio, se considera que el Algoritmo Memético (MA) (véase la Sección 5.3) solo utiliza el componente de búsqueda local (ver el Algoritmo 14). Por lo tanto, el tamaño de la memoria de élite es $\Theta = 0$ y $P_{EM} = 0$. Se analiza el impacto de la probabilidad de aplicación de la búsqueda local P_{LS} , y para ello se consideran valores $P_{LS} \in \{0; 0,05; 0,10; 0,20; 0,50; 0,80; 1,00\}$ para este parámetro. Los resultados numéricos para los dos indicadores de rendimiento multiobjetivo (hipervolumen y distancia generacional (GD)) y la eficiencia de la cartera (medida mediante el índice de Sharpe) se muestran en la Tabla 5.2 junto con un análisis de significancia estadística. Para ser precisos, en este experimento y en todos los posteriores hemos tomado como referencia la configuración de parámetros con los

¹⁴Todos los datos experimentales generados están disponibles en nuestro repositorio de datos en <https://osf.io/uekt6/>

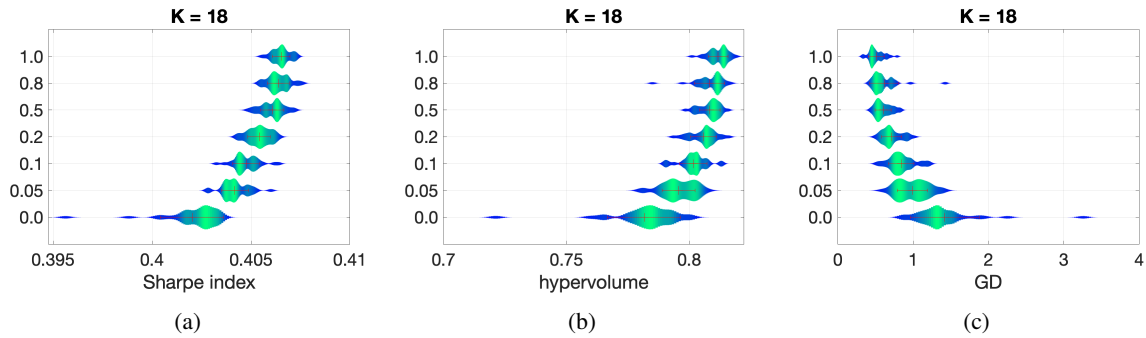


Figura 5.2: Distribución de los indicadores de rendimiento alcanzados en 30 ejecuciones del MA con diferente parametrización de búsqueda local y sin memoria de élite para $K = 18$ (a) Índice de Sharpe (b) Hypervolume (c) Distancia Generacional.

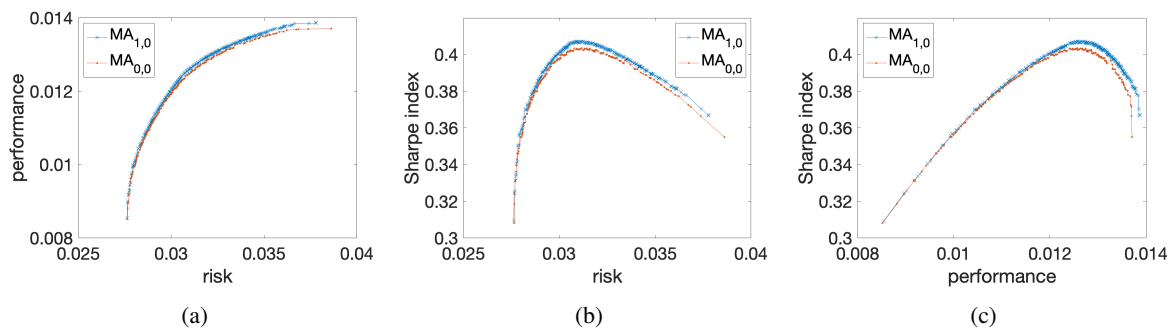


Figura 5.3: Comparación de los frentes de Pareto combinados obtenidos por $MA_{1,0}$ y $MA_{0,0}$ (IBEA) para $K = 18$. (a). Valores del índice de Sharpe para soluciones no dominadas en función del riesgo (b) y la rentabilidad (c).

mejores resultados para cada uno de los indicadores de rendimiento y hemos realizado una prueba de Wilcoxon Ranksum [136], informando los valores de significancia así obtenidos en tres niveles, a saber, $\alpha \in \{0,01; 0,05; 0,1\}$.

Como se puede observar, los resultados tienden a mejorar para cada indicador de rendimiento al aumentar la probabilidad de búsqueda local. Aunque la tendencia general pueda parecer intuitivamente esperada, es interesante observar que el lamarckianismo parcial a menudo se pasa por alto, a pesar de que puede ser una estrategia adecuada en algunos dominios [60]. Por lo tanto, conviene obtener evidencia empírica de los beneficios de las altas tasas de búsqueda local y el correspondiente aumento en la intensificación de la búsqueda en este dominio en particular. Esto se debe resaltar si se considera la naturaleza multiobjetivo del problema, por lo que la búsqueda local podría tener diferentes efectos en distintos indicadores de rendimiento (se debe recordar que el componente de búsqueda local se basa en la maximización del índice de Sharpe). En este sentido, se puede observar en la Tabla 5.2 cómo la tasa más alta de búsqueda local produce el mejor rendimiento en términos del índice de Sharpe, pero no necesariamente en los otros indicadores de rendimiento en el caso del escenario más restringido ($K = 14$), donde valores altos pero no máximos del parámetro de búsqueda local (alrededor de $P_{LS} = 0,8$) parecen proporcionar los mejores resultados. Dicho esto, las mayores tasas de búsqueda local generalmente se correlacionan con un mejor rendimiento en los escenarios restantes (véase, por ejemplo, la Figura 5.2). Esto también puede verse en la Figura 5.3, donde puede observarse fácilmente una mayor intensificación de la búsqueda en la región de Pareto asociada a un mayor riesgo de cartera.

Tabla 5.2: Resultados numéricos mediante búsqueda local. Se muestran los mejores valores (x^*), la mediana (\tilde{x}), la desviación cuartil (QD) y el coeficiente de desviación cuartil (CQD) para cada indicador de rendimiento. La mejor configuración para cada indicador se marca con \star ; las demás configuraciones se marcan con símbolos que indican una diferencia estadísticamente significativa en $\alpha = 0,1(\circ)$, $\alpha = 0,05(\bullet)$, y $\alpha = 0,01(\blacksquare)$. La ausencia de un símbolo indica que no hay diferencia estadísticamente significativa con respecto a la configuración \star .

K = 14															
P_{LS}	Sharpe index				hypervolume				GD						
	x^*	\tilde{x}	QD	CQD	x^*	\tilde{x}	QD	CQD	x^*	\tilde{x}	QD	CQD			
0,00	0,408	0,407	0,000	0,073%	■	0,810	0,802	0,002	0,269%	■	0,487	0,636	0,112	17,119%	■
0,05	0,408	0,406	0,000	0,094%	■	0,811	0,802	0,003	0,431%	■	0,422	0,632	0,075	11,624%	■
0,10	0,408	0,407	0,000	0,084%	■	0,815	0,808	0,003	0,384%	■	0,344	0,520	0,094	17,893%	■
0,20	0,408	0,408	0,000	0,077%	■	0,816	0,810	0,001	0,176%	■	0,319	0,445	0,050	11,657%	■
0,50	0,408	0,407	0,000	0,085%	■	0,817	0,812	0,002	0,246%	●	0,258	0,394	0,046	11,202%	●
0,80	0,408	0,408	0,000	0,073%	●	0,819	0,813	0,002	0,229%	★	0,238	0,349	0,057	15,850%	★
1,00	0,409	0,408	0,000	0,051%	★	0,818	0,811	0,002	0,197%	●	0,244	0,395	0,047	11,805%	●
K = 16															
P_{LS}	Sharpe index				hypervolume				GD						
	x^*	\tilde{x}	QD	CQD	x^*	\tilde{x}	QD	CQD	x^*	\tilde{x}	QD	CQD			
0,00	0,406	0,405	0,001	0,163%	■	0,812	0,804	0,005	0,679%	■	0,791	1,092	0,157	14,382%	■
0,05	0,407	0,405	0,001	0,143%	■	0,820	0,810	0,003	0,412%	■	0,556	0,888	0,158	17,214%	■
0,10	0,407	0,406	0,000	0,112%	■	0,824	0,815	0,002	0,269%	■	0,453	0,696	0,081	11,197%	■
0,20	0,407	0,406	0,000	0,104%	■	0,825	0,816	0,003	0,365%	■	0,456	0,680	0,098	13,770%	■
0,50	0,408	0,407	0,000	0,105%	●	0,829	0,820	0,003	0,308%	●	0,304	0,555	0,086	15,730%	●
0,80	0,408	0,407	0,000	0,081%	■	0,826	0,819	0,003	0,351%	○	0,393	0,554	0,059	10,362%	○
1,00	0,408	0,407	0,000	0,059%	★	0,827	0,822	0,002	0,261%	★	0,380	0,515	0,060	11,721%	★
K = 18															
P_{LS}	Sharpe index				hypervolume				GD						
	x^*	\tilde{x}	QD	CQD	x^*	\tilde{x}	QD	CQD	x^*	\tilde{x}	QD	CQD			
0,00	0,404	0,402	0,001	0,150%	■	0,800	0,784	0,006	0,758%	■	0,862	1,333	0,160	11,844%	■
0,05	0,406	0,404	0,000	0,120%	■	0,807	0,795	0,005	0,588%	■	0,604	1,014	0,143	14,423%	■
0,10	0,406	0,405	0,000	0,102%	■	0,813	0,802	0,002	0,277%	■	0,520	0,829	0,100	11,915%	■
0,20	0,406	0,405	0,000	0,098%	■	0,816	0,807	0,003	0,410%	■	0,495	0,691	0,087	12,353%	■
0,50	0,407	0,406	0,000	0,081%	■	0,816	0,809	0,003	0,377%	■	0,437	0,580	0,082	13,539%	■
0,80	0,408	0,406	0,000	0,095%	●	0,817	0,811	0,003	0,362%	●	0,422	0,578	0,094	15,536%	■
1,00	0,407	0,407	0,000	0,066%	★	0,819	0,813	0,003	0,314%	★	0,331	0,492	0,066	12,811%	★
K = 20															
P_{LS}	Sharpe index				hypervolume				GD						
	x^*	\tilde{x}	QD	CQD	x^*	\tilde{x}	QD	CQD	x^*	\tilde{x}	QD	CQD			
0,00	0,398	0,389	0,007	1,714%	■	0,808	0,760	0,032	4,256%	■	2,142	3,577	1,229	28,962%	■
0,05	0,403	0,395	0,008	2,008%	■	0,835	0,790	0,040	5,120%	■	1,299	2,684	1,354	41,879%	■
0,10	0,402	0,400	0,002	0,482%	■	0,845	0,816	0,016	1,922%	■	0,938	1,653	0,528	27,191%	■
0,20	0,404	0,401	0,002	0,377%	■	0,848	0,824	0,012	1,509%	■	0,917	1,524	0,371	22,919%	■
0,50	0,406	0,403	0,001	0,242%	■	0,860	0,837	0,007	0,872%	■	0,586	1,096	0,247	21,710%	■
0,80	0,407	0,405	0,000	0,108%	●	0,859	0,845	0,007	0,888%	●	0,521	0,878	0,200	21,589%	○
1,00	0,406	0,405	0,001	0,156%	★	0,863	0,849	0,008	0,892%	★	0,490	0,748	0,177	22,204%	★

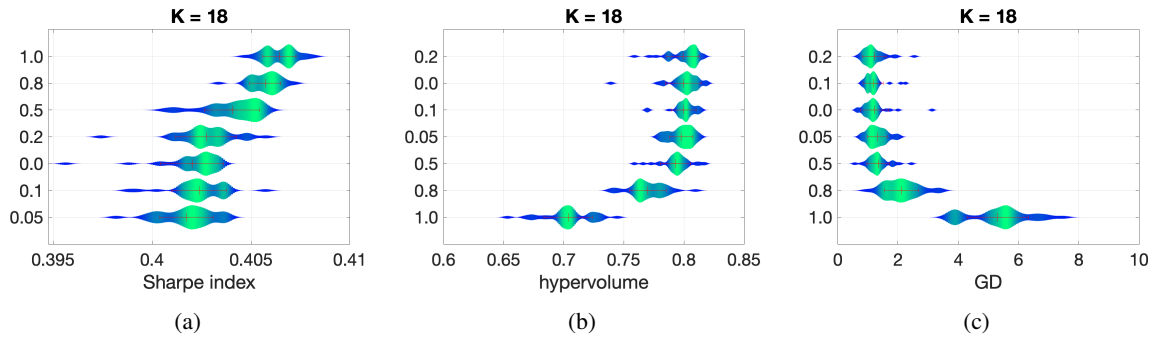


Figura 5.4: Distribución de los indicadores de rendimiento alcanzados en 30 ejecuciones del MA con diferente parametrización de la memoria de élite y sin búsqueda local de $K = 18$ (a) Índice de Sharpe (b) Hypervolume (c) Distancia Generacional.

5.8.2 Solo memoria élite

Tras estudiar la búsqueda local, se considera que el Algoritmo Memético (MA) (ver Sección 5.3) solo utiliza el componente de la memoria de élite. De forma similar a la Subsección anterior (ver 5.8.1), esto es, sin búsqueda local ($P_{LS} = 0$) y diferentes configuraciones para la probabilidad de aplicación de la memoria de élite P_{EM} , concretamente $P_{EM} \in \{0; 0,05; 0,10; 0,20; 0,50; 0,80; 1,00\}$. En todos los casos, el tamaño de la memoria de élite es $\Theta = 30$. La Tabla 5.3 muestra los resultados numéricos obtenidos y la Figura 5.4 proporciona una representación comparativa del rendimiento, como se indicó anteriormente.

Los resultados obtenidos siguen un patrón análogo al observado para la búsqueda local e incluso muestran una diferencia más marcada entre los efectos en cada indicador de rendimiento. Intuitivamente, la probabilidad de aplicación de la memoria de élite ofrece un equilibrio entre la diversificación y la intensificación. Si bien valores altos de P_{EM} ejercen una presión elevada en una región muy localizada del espacio de búsqueda, valores bajos de P_{EM} resultan en una presión más leve que se extiende a un conjunto más diverso de soluciones. En cualquier caso, es importante recordar que esta presión se ejerce en el ámbito del índice de Sharpe. Por lo tanto, se puede observar cómo los valores altos de P_{EM} (no necesariamente los valores máximos considerados en todos los casos) resultan en un mejor rendimiento con respecto a este indicador con alta significancia estadística con respecto a los valores más bajos. Sin embargo, también se puede observar el efecto opuesto en el hipervolumen y la distancia generacional (GD).

Se atribuyen estos resultados a la fijación del algoritmo en soluciones subóptimas con respecto al índice de Sharpe, que por lo tanto puede extenderse a regiones más grandes del frente de Pareto. De hecho, podemos observar en la Figura 5.5 cómo la protuberancia en la región donde se confinan los valores más altos del índice de Sharpe es mucho más pronunciada e indica cómo el enfoque de búsqueda se centra principalmente en esa región en oposición a los extremos del frente de Pareto, lo que afecta los valores de los indicadores de rendimiento multiobjetivo puros. Por supuesto, este es un comportamiento buscado, ya que las regiones del frente de Pareto alejadas de esta protuberancia son cada vez peores en términos del índice de Sharpe y, por lo tanto, menos útiles para el proceso de toma de decisiones posterior. De este modo, los valores aparentemente mejores de estos indicadores multiobjetivos puros son en cierta medida un artefacto de su dispersión en regiones de utilidad limitada.

Tabla 5.3: Resultados numéricos mediante el uso de la Memoria Élite. Se muestran los mejores valores (x^*), la mediana (\tilde{x}), la desviación cuartil (QD) y el coeficiente de desviación cuartil (CQD) para cada indicador de rendimiento. La mejor configuración para cada indicador se marca con \star ; las demás configuraciones se marcan con símbolos que indican una diferencia estadísticamente significativa en $\alpha = 0,1(\circ)$, $\alpha = 0,05(\bullet)$, y $\alpha = 0,01(\blacksquare)$. La ausencia de un símbolo indica que no hay diferencia estadísticamente significativa con respecto a la configuración \star .

K = 14															
P_{EM}	Sharpe index				hypervolume				GD						
	x^*	\tilde{x}	QD	CQD	x^*	\tilde{x}	QD	CQD	x^*	\tilde{x}	QD	CQD			
0,00	0,408	0,407	0,000	0,073%	■	0,815	0,808	0,002	0,261%	●	0,512	0,722	0,107	14,779%	
0,05	0,408	0,407	0,000	0,082%	■	0,816	0,809	0,002	0,244%	○	0,492	0,733	0,111	15,114%	
0,10	0,407	0,406	0,000	0,083%	■	0,813	0,802	0,004	0,541%	■	0,713	0,926	0,161	16,870%	■
0,20	0,407	0,406	0,000	0,115%	■	0,812	0,803	0,004	0,447%	■	0,615	0,884	0,122	14,297%	●
0,50	0,408	0,407	0,000	0,060%	■	0,812	0,802	0,004	0,472%	■	0,470	0,929	0,152	16,654%	●
0,80	0,409	0,408	0,000	0,095%	■	0,822	0,810	0,004	0,436%	★	0,330	0,660	0,112	17,120%	
1,00	0,409	0,408	0,000	0,060%	★	0,817	0,808	0,009	1,088%	○	0,457	0,659	0,277	33,827%	★

K = 16															
P_{EM}	Sharpe index				hypervolume				GD						
	x^*	\tilde{x}	QD	CQD	x^*	\tilde{x}	QD	CQD	x^*	\tilde{x}	QD	CQD			
0,00	0,406	0,405	0,001	0,163%	■	0,826	0,817	0,006	0,698%	★	0,449	0,690	0,104	14,927%	
0,05	0,406	0,405	0,001	0,176%	■	0,828	0,817	0,006	0,762%		0,402	0,687	0,159	21,543%	★
0,10	0,407	0,405	0,001	0,159%	■	0,827	0,816	0,005	0,558%		0,491	0,721	0,139	19,852%	
0,20	0,408	0,405	0,001	0,134%	■	0,826	0,816	0,004	0,545%		0,430	0,693	0,097	13,832%	
0,50	0,408	0,406	0,001	0,159%	■	0,823	0,814	0,007	0,819%		0,449	0,707	0,157	19,944%	
0,80	0,408	0,407	0,001	0,133%	■	0,804	0,787	0,006	0,783%	■	0,804	1,400	0,264	18,547%	■
1,00	0,408	0,407	0,000	0,069%	★	0,757	0,727	0,010	1,436%	■	2,716	3,955	0,609	15,549%	■

K = 18															
P_{EM}	Sharpe index				hypervolume				GD						
	x^*	\tilde{x}	QD	CQD	x^*	\tilde{x}	QD	CQD	x^*	\tilde{x}	QD	CQD			
0,00	0,404	0,402	0,001	0,150%	■	0,819	0,802	0,006	0,694%		0,616	1,149	0,161	13,912%	
0,05	0,404	0,402	0,001	0,235%	■	0,813	0,800	0,007	0,927%		0,757	1,268	0,224	17,349%	
0,10	0,406	0,402	0,001	0,222%	■	0,815	0,801	0,004	0,550%		0,783	1,139	0,130	11,611%	
0,20	0,406	0,403	0,001	0,181%	■	0,816	0,804	0,010	1,211%	★	0,672	1,114	0,215	17,980%	★
0,50	0,406	0,404	0,001	0,235%	■	0,817	0,794	0,005	0,609%	●	0,569	1,298	0,187	14,047%	○
0,80	0,407	0,406	0,001	0,137%	■	0,810	0,769	0,009	1,220%	■	0,978	2,059	0,434	21,101%	■
1,00	0,408	0,407	0,001	0,146%	★	0,744	0,704	0,012	1,755%	■	3,627	5,483	0,695	13,401%	■

K = 20															
P_{EM}	Sharpe index				hypervolume				GD						
	x^*	\tilde{x}	QD	CQD	x^*	\tilde{x}	QD	CQD	x^*	\tilde{x}	QD	CQD			
0,00	0,398	0,389	0,007	1,714%	■	0,865	0,820	0,025	3,024%	■	2,466	3,719	1,138	26,389%	■
0,05	0,402	0,388	0,011	2,837%	■	0,866	0,822	0,033	4,020%	■	1,730	3,953	1,559	39,962%	■
0,10	0,402	0,392	0,009	2,308%	■	0,886	0,823	0,033	4,004%	■	1,268	3,214	1,333	37,176%	■
0,20	0,404	0,395	0,008	2,051%	■	0,902	0,840	0,023	2,793%	○	0,968	2,708	1,084	36,466%	■
0,50	0,408	0,405	0,005	1,358%	■	0,910	0,879	0,033	3,872%	★	0,575	1,053	0,547	41,557%	
0,80	0,409	0,408	0,001	0,300%	★	0,910	0,852	0,031	3,667%		0,382	0,906	0,607	46,891%	★
1,00	0,409	0,408	0,117	39,895%		0,904	0,810	0,355	68,767%	■	0,249	1,919	19,898	96,707%	●



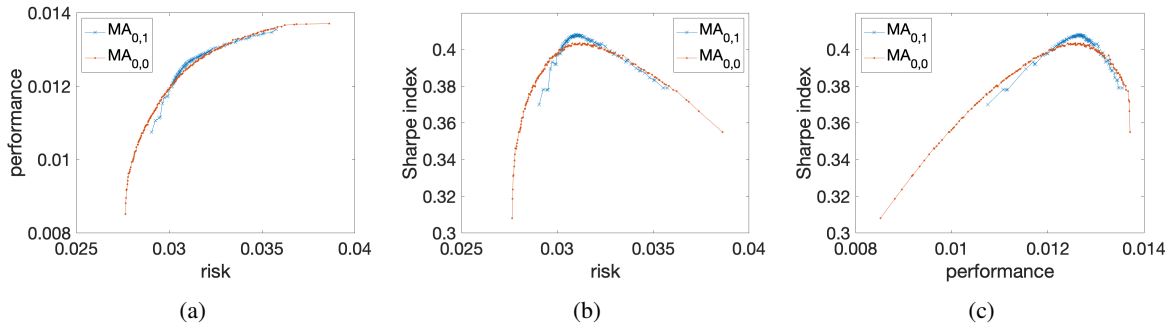


Figura 5.5: Comparación de los frentes de Pareto combinados obtenidos por MA_{0,1} y MA_{0,0} (IBEA) para $K = 18$. (a). Valores del índice de Sharpe para soluciones no dominadas en función del riesgo (b) y la rentabilidad (c).

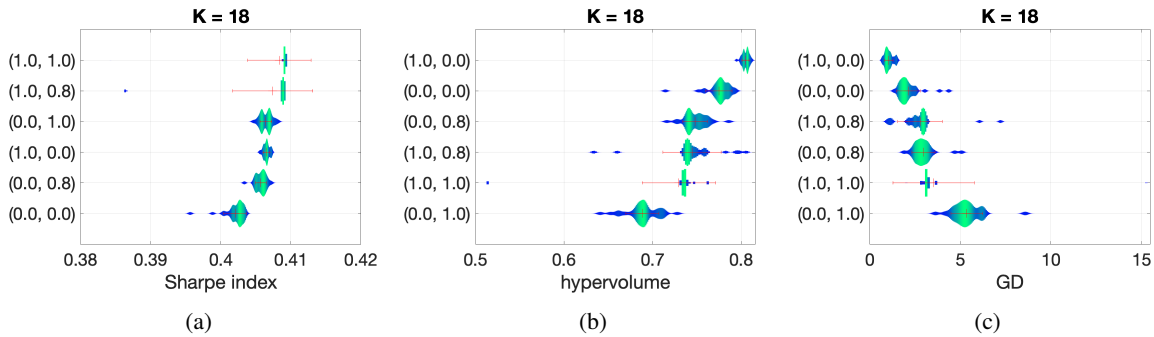


Figura 5.6: Distribución de los indicadores de rendimiento obtenidos en 30 ejecuciones de la MA con diferente parametrización de memoria de élite y búsqueda local para $K = 18$. Cada par de valores en el eje y representa (P_{LS}, P_{EM}) . (a) Índice de Sharpe (b) Hypervolume (c) Distancia Generacional.

5.8.3 Actuación sinérgica entre la búsqueda local y memoria élite

Después de evaluar la sensibilidad de cada uno de los dos componentes (Búsqueda Local (véase la Sección 5.8.1) o Memoria Élite (véase la Sección 5.8.2), se centrará el estudio en la interacción de ambos. Estos experimentos previos sirven para identificar las regiones de interés para los parámetros correspondientes y así evitar una experimentación factorial muy costosa. Más precisamente, se concentrará el estudio en los valores $P_{EM} \in \{0, 0; 0, 8; 1, 0\}$ y se ha considerado $P_{LS} \in \{0, 0; 1, 0\}$. Cabe recordar que esta selección se realizó considerando el índice de Sharpe como medida principal de interés, y que entre las diferentes combinaciones de parámetros disponibles, se tienen desde un AEMO simple (es decir, IBEA (véase el Algoritmo 1), así como nuestro MA que incluye todas sus posibles combinaciones. Los datos numéricos se proporcionan en la Tabla 5.4, y una ilustración de la distribución de resultados para $K = 18$ se proporciona en la Figura 5.6.

Estos resultados demuestran claramente que el algoritmo memético (MA) propuesto en la Sección 5.3 a plena capacidad, es decir, con $(P_{EM} = 1, 0, P_{LS} = 1, 0)$ ofrece los mejores resultados desde el punto de vista del índice de Sharpe. Si bien esta no es necesariamente la mejor combinación con respecto a los indicadores de rendimiento puramente multiobjetivos, parece generar la interacción más sinérgica de estos dos componentes a la hora de encontrar carteras con eficiencia en cuanto a riesgo/rendimiento. Este hallazgo es estadísticamente robusto, como lo indica la prueba de suma de rangos de Wilcoxon [136], y se comparará con otros algoritmos de optimización en la siguiente Subsección.

Tabla 5.4: Resultados numéricos utilizando memoria de élite y búsqueda local.

K = 14																
Sharpe index						hypervolume				GD						
P_{EM}	P_{LS}	x^*	\bar{x}	QD	CQD	x^*	\bar{x}	QD	CQD	x^*	\bar{x}	QD	CQD			
0,00	0,00	0,408	0,407	0,000	0,073%	■	0,801	0,794	0,002	0,280%	■	0,771	1,200	0,167	13,924%	■
0,00	1,00	0,409	0,408	0,000	0,051%	■	0,809	0,803	0,002	0,201%	★	0,458	0,916	0,163	17,379%	★
0,80	0,00	0,409	0,408	0,000	0,095%	■	0,809	0,797	0,004	0,449%	■	0,545	1,095	0,165	14,300%	■
0,80	1,00	0,409	0,409	0,000	0,028%	■	0,807	0,772	0,031	4,036%	■	0,551	1,355	1,082	53,699%	■
1,00	0,00	0,409	0,408	0,000	0,060%	■	0,804	0,795	0,008	1,037%	■	0,662	1,046	0,281	25,079%	●
1,00	1,00	0,410	0,409	0,000	0,025%	★	0,750	0,724	0,003	0,453%	■	2,265	3,288	0,131	4,033%	■
K = 16																
Sharpe index						hypervolume				GD						
P_{EM}	P_{LS}	x^*	\bar{x}	QD	CQD	x^*	\bar{x}	QD	CQD	x^*	\bar{x}	QD	CQD			
0,00	0,00	0,406	0,405	0,001	0,163%	■	0,806	0,798	0,005	0,657%	■	1,168	1,717	0,186	10,722%	■
0,00	1,00	0,408	0,407	0,000	0,059%	■	0,821	0,816	0,002	0,263%	★	0,686	0,957	0,154	15,887%	★
0,80	0,00	0,408	0,407	0,001	0,133%	■	0,785	0,770	0,006	0,768%	■	1,549	2,705	0,339	13,219%	■
0,80	1,00	0,409	0,409	0,000	0,055%	■	0,825	0,744	0,027	3,485%	■	0,557	2,392	0,872	47,270%	■
1,00	0,00	0,408	0,407	0,000	0,069%	■	0,741	0,717	0,009	1,299%	■	3,176	4,241	0,568	13,007%	■
1,00	1,00	0,410	0,409	0,000	0,018%	★	0,750	0,735	0,003	0,341%	■	2,359	2,785	0,169	5,809%	■
K = 18																
Sharpe index						hypervolume				GD						
P_{EM}	P_{LS}	x^*	\bar{x}	QD	CQD	x^*	\bar{x}	QD	CQD	x^*	\bar{x}	QD	CQD			
0,00	0,00	0,404	0,402	0,001	0,150%	■	0,793	0,777	0,006	0,814%	■	1,345	1,986	0,273	13,275%	■
0,00	1,00	0,407	0,407	0,000	0,066%	■	0,812	0,806	0,002	0,310%	★	0,680	1,003	0,150	14,564%	★
0,80	0,00	0,407	0,406	0,001	0,137%	■	0,786	0,746	0,008	1,051%	■	1,896	2,898	0,314	10,905%	■
0,80	1,00	0,409	0,409	0,000	0,037%	■	0,806	0,742	0,009	1,201%	■	0,967	2,859	0,340	12,696%	■
1,00	0,00	0,408	0,407	0,001	0,146%	■	0,728	0,690	0,009	1,234%	■	3,631	5,282	0,402	7,685%	■
1,00	1,00	0,409	0,409	0,000	0,022%	★	0,763	0,735	0,001	0,178%	■	1,970	3,155	0,069	2,170%	■
K = 20																
Sharpe index						hypervolume				GD						
P_{EM}	P_{LS}	x^*	\bar{x}	QD	CQD	x^*	\bar{x}	QD	CQD	x^*	\bar{x}	QD	CQD			
0,00	0,00	0,398	0,389	0,007	1,714%	■	0,876	0,832	0,025	3,001%	■	2,596	3,787	1,041	24,091%	■
0,00	1,00	0,406	0,405	0,001	0,156%	■	0,903	0,889	0,012	1,331%	★	0,772	1,186	0,114	9,894%	●
0,80	0,00	0,409	0,408	0,001	0,300%	■	0,921	0,865	0,031	3,540%	■	0,454	0,924	0,441	38,104%	★
0,80	1,00	0,409	0,409	0,000	0,038%	■	0,910	0,818	0,006	0,674%	■	0,555	1,644	0,146	9,081%	●
1,00	0,00	0,409	0,408	0,117	39,895%	■	0,916	0,824	0,358	68,208%	■	0,258	1,515	19,594	96,556%	●
1,00	1,00	0,409	0,409	0,090	28,212%	★	0,856	0,811	0,282	52,761%	■	0,920	1,951	16,353	89,935%	■

5.9 Comparación con otros AEMOs (Análisis de rendimiento)

La experimentación se llevó a cabo con los cinco algoritmos descritos previamente en la Sección 5.5, a saber, NSGA-II, SPEA2, HYPE y SHV (cabe destacar que la comparación con IBEA –MA_{0,0}– ya se realizó en el análisis de sensibilidad (ver 5.8)), y nuestro algoritmo memético MA descrito en la Sección 5.3, en este caso utilizando $P_{EM} = 1,0$ y $P_{LS} = 1,0$. Se hace en primer lugar, una comparación entre los algoritmos evolutivos multiobjetivo (AEMOs) mediante la construcción de una frontera de Pareto de referencia (ver 5.9.1), compuesta por la unión de soluciones no dominadas generadas por todos los algoritmos evaluados. Además de esto, la Tabla 5.5 muestra los resultados numéricos, y la Fig. 5.8 contiene la comparación relativa de los valores obtenidos con respecto al índice de Sharpe, el hipervolumen y la distancia generacional (GD) para $K = 18$, como en los casos anteriores.

5.9.1 Análisis de Fronteras de Pareto

La evaluación comparativa de algoritmos evolutivos multiobjetivo (AEMOs) requiere una base sólida y objetiva que permita medir su desempeño en términos de convergencia, diversidad y cobertura del frente de Pareto real. Dado que, en la mayoría de los problemas prácticos, el frente óptimo de Pareto no se conoce analíticamente, es fundamental construir una *frontera de Pareto de referencia* que actúe como sustituto de alta calidad del frente verdadero. Esta frontera sirve como punto de comparación para métricas ampliamente utilizadas como la distancia generacional (GD), la distancia generacional invertida (IGD) o el hipervolumen (HV) (véase Sección 2.9.2).

Cuando el problema bajo estudio pertenece a una familia de *benchmarks* con frente conocido (por ejemplo, ZDT, DTLZ o WFG), la frontera de referencia puede generarse directamente a partir de la expresión analítica del frente óptimo, muestreando el espacio de soluciones objetivos para obtener un conjunto uniforme de puntos no dominados [202], [61], [18]. Sin embargo, en problemas reales o complejos donde el frente óptimo es desconocido, la construcción de la frontera de referencia debe seguir algún enfoque empírico que permita aproximar al frente real.

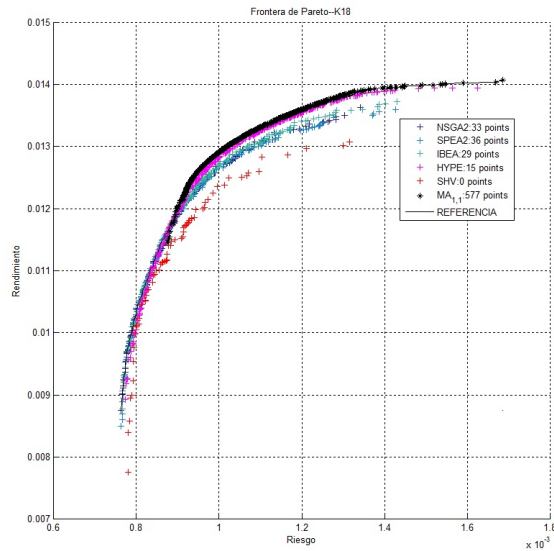
El método más aceptado consiste en ejecutar múltiples algoritmos evolutivos (como NSGA-II, SPEA2, MOEA/D, entre otros) con distintas configuraciones, semillas aleatorias y un número elevado de evaluaciones. De todas las ejecuciones, se recopilan las soluciones no dominadas y se combinan en un único conjunto. Posteriormente, se aplica un proceso de reducción no dominada para eliminar cualquier solución dominada dentro de dicho conjunto. El resultado es una aproximación de alta calidad del frente real, que idealmente cubre sus regiones convexas, no convexas, discontinuas o con alta curvatura. A este frente lo hemos llamado de **referencia**.

Recientes investigaciones han demostrado que la colaboración entre algoritmos puede conducir a frentes de Pareto más completos y robustos que los obtenidos por cualquier algoritmo aislado. En particular, Soltero et al. [192] proponen un esquema en el que múltiples AEMOs (NSGA-II, SPEA2, PAES, PESA-II y MOCcell) operan en paralelo, y sus soluciones no dominadas se combinan para formar un único conjunto global de soluciones de alta calidad. Este enfoque colaborativo no solo mejora la cobertura del frente de Pareto, sino que también aumenta la rentabilidad de las estrategias derivadas en un contexto financiero.

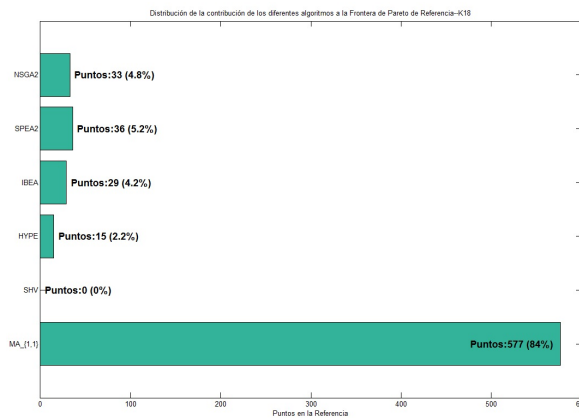
En este sentido, la metodología empleada en la presente tesis —la construcción de una frontera de referencia a partir de la unión de soluciones de múltiples algoritmos— puede interpretarse como un primer paso hacia un paradigma colaborativo. No obstante, para alinearse plenamente con esta perspectiva emergente, en futuras líneas de trabajo se podría implementar un marco de optimización colaborativa explícito, en el que los algoritmos no solo aporten soluciones a un repositorio común, sino que también puedan intercambiar información (por ejemplo, compartiendo su archivo de élite o reutilizando sus operadores de variación más exitosos). Este tipo de cooperación podría permitir una

exploración más eficiente del espacio de soluciones y la generación de carteras aún más eficientes desde el punto de vista del índice de Sharpe y de la diversificación del riesgo.

En la Figura 5.7, se puede observar el Frente de Pareto de **referencia** construido y cual fue la contribución de cada uno de los algoritmos objeto de comparación. se puede observar que el algoritmo $MA_{1,1}$ es el que contribuye con la mayor cantidad de puntos de la referencia, aportando mas soluciones de calidad no dominadas (84%) (ver Figura 5.7 (b)). Esto demuestra una diferencia significativa del $MA_{1,1}$ con respecto a los demás algoritmos sujetos de la comparación. En la siguiente sección se profundizara esta comparativa a través de los indicadores descritos en 5.6.



(a)



(b)

Figura 5.7: Distribución de la contribución al frente de Pareto después de 30 ejecuciones de los algoritmos ($MA_{1,1}$, NSGA-II, SPEA2, IBEA, HYPE y SHV para $K = 18$) (a) Fronteras de Pareto (b) Distribución porcentual para la Referencia

5.9.2 Análisis de soluciones con Indicadores de Calidad

Cuando se analiza desde la perspectiva del índice de Sharpe, nuestro principal indicador financiero específico para cada problema, el $MA_{1,1}$ seleccionado es el claro ganador, superando al resto de

Tabla 5.5: Resultados numéricos para todos los algoritmos considerados (el MA con $P_{LS} = 1,0$ y $P_{EM} = 1,0$, NSGA-II, SPEA2, HYPE y SHV). Cabe destacar que IBEA no se incluye en esta tabla porque es equivalente al MA_{0,0} y esta comparación ya se realizó en el análisis de sensibilidad de la Sección 5.8.

K = 14															
algorithm	Sharpe index				hypervolume				GD						
	x^*	\bar{x}	QD	CQD	x^*	\bar{x}	QD	CQD	x^*	\bar{x}	QD	CQD			
MA _{1,1}	0,410	0,409	0,000	0,025%	*	0,750	0,724	0,003	0,457%	■	2,256	3,271	0,124	3,817%	■
NSGA-II	0,406	0,405	0,001	0,148%	■	0,786	0,776	0,005	0,697%	■	1,613	2,411	0,307	13,570%	■
SPEA2	0,406	0,404	0,001	0,218%	■	0,789	0,777	0,007	0,841%	■	1,430	2,145	0,424	19,834%	■
HYPE	0,408	0,407	0,000	0,057%	■	0,809	0,802	0,003	0,356%	*	0,463	0,647	0,075	11,401%	*
SHV	0,403	0,399	0,001	0,207%	■	0,753	0,728	0,010	1,414%	■	2,579	3,764	0,624	15,373%	■
K = 16															
algorithm	Sharpe index				hypervolume				GD						
	x^*	\bar{x}	QD	CQD	x^*	\bar{x}	QD	CQD	x^*	\bar{x}	QD	CQD			
MA _{1,1}	0,410	0,409	0,000	0,018%	*	0,746	0,732	0,003	0,346%	■	2,663	3,197	0,175	5,286%	■
NSGA-II	0,404	0,402	0,001	0,254%	■	0,790	0,771	0,005	0,677%	■	1,473	2,540	0,238	9,204%	■
SPEA2	0,405	0,402	0,002	0,392%	■	0,789	0,772	0,009	1,171%	■	1,577	2,467	0,367	14,940%	■
HYPE	0,407	0,406	0,000	0,069%	■	0,812	0,804	0,004	0,559%	*	0,614	0,886	0,126	13,478%	*
SHV	0,396	0,392	0,002	0,463%	■	0,731	0,695	0,011	1,551%	■	3,999	5,527	0,813	15,104%	■
K = 18															
algorithm	Sharpe index				hypervolume				GD						
	x^*	\bar{x}	QD	CQD	x^*	\bar{x}	QD	CQD	x^*	\bar{x}	QD	CQD			
MA _{1,1}	0,409	0,409	0,000	0,022%	*	0,769	0,740	0,001	0,171%	■	1,776	2,834	0,073	2,555%	■
NSGA-II	0,402	0,398	0,001	0,282%	■	0,793	0,763	0,007	0,893%	■	2,124	3,202	0,487	14,678%	■
SPEA2	0,401	0,398	0,002	0,407%	■	0,787	0,759	0,009	1,194%	■	2,006	3,157	0,379	11,433%	■
HYPE	0,406	0,405	0,000	0,115%	■	0,818	0,808	0,004	0,440%	*	0,666	1,054	0,150	13,926%	*
SHV	0,392	0,380	0,004	1,115%	■	0,712	0,650	0,025	3,763%	■	4,712	7,439	1,089	14,638%	■
K = 20															
algorithm	Sharpe index				hypervolume				GD						
	x^*	\bar{x}	QD	CQD	x^*	\bar{x}	QD	CQD	x^*	\bar{x}	QD	CQD			
MA _{1,1}	0,409	0,409	0,090	28,212%	*	0,857	0,812	0,287	54,223%	■	0,921	1,828	16,420	90,376%	■
NSGA-II	0,395	0,388	0,006	1,613%	■	0,872	0,824	0,019	2,346%	■	2,472	3,856	0,785	19,122%	■
SPEA2	0,399	0,389	0,009	2,239%	■	0,867	0,828	0,025	2,992%	■	2,147	3,679	0,995	25,632%	■
HYPE	0,406	0,403	0,003	0,766%	■	0,907	0,884	0,016	1,785%	*	0,522	1,088	0,675	44,540%	*
SHV	0,390	0,351	0,010	2,721%	■	0,804	0,694	0,024	3,427%	■	3,536	9,504	1,332	13,845%	■

algoritmos con significancia estadística ($\alpha = 0.01$). Esto también se aprecia claramente al examinar la Figura 5.8 (a). Cabe destacar la forma distintiva del frente de Pareto obtenido (Figura 5.9), y cómo no solo se observa una protuberancia en la región inmediata que rodea los valores más altos del índice de Sharpe, sino que la superioridad también se extiende hacia la región de alto riesgo, en particular en comparación con NSGA-II.

Esta mejora implica sacrificar el rendimiento en la región de bajo riesgo de las carteras, lo que resulta en valores más bajos de los indicadores de rendimiento multiobjetivo puros. Por otra parte, si observamos que la región con mayores valores del índice de Sharpe es el área de interés por contener un mejor exceso de retorno por unidad de riesgo, tiene sentido considerar una mejor cobertura de esta región y que el experto humano seleccione una cartera apropiada de acuerdo al perfil de riesgo buscado dentro de este subconjunto enfocado de carteras altamente eficientes.

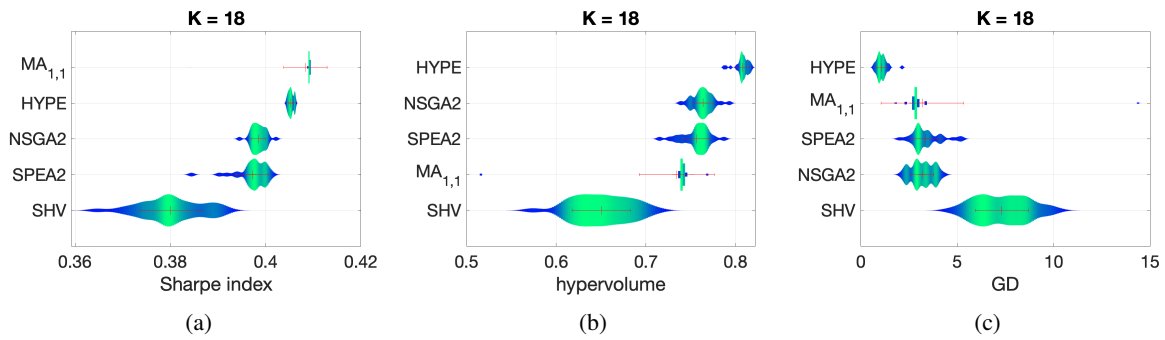


Figura 5.8: Distribución de los indicadores de rendimiento alcanzados en 30 ejecuciones de los algoritmos (El MA con $P_{LS} = 1,0$ y $P_{EM} = 1,0$, NSGA-II, SPEA2, HYPE and SHV) (a) Índice de Sharpe (b) Hypervolume (c) Distancia Generacional.

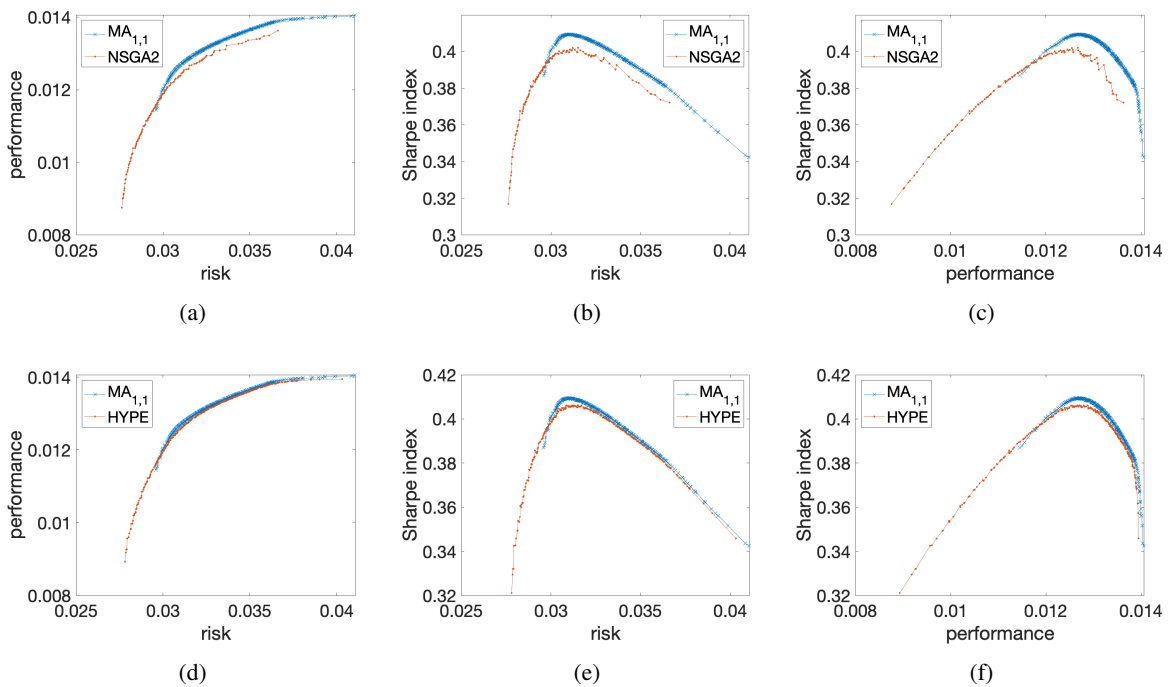


Figura 5.9: Comparación de los frentes de Pareto combinados obtenidos por $MA_{1,1}$ y NSGA-II para $K = 18$. (a) Valores del índice de Sharpe para soluciones no dominadas en función del riesgo (b) y Beneficio (c). Las Sub-Figuras (d)-(f) son análogas para HYPE.

5.10 Balance entre intensificación y diversificación: Análisis de sensibilidad basado en épocas

Uno de los aspectos cruciales para la aplicación exitosa de algoritmos de optimización metaheurística dotados de operadores de búsqueda que tienen en cuenta los problemas es el equilibrio entre la intensificación (el uso de este conocimiento para enfocar la búsqueda en direcciones o regiones específicas) y la diversificación (un comportamiento más exploratorio destinado a encontrar soluciones que no se ajusten perfectamente a las preferencias dictadas por el conocimiento explotado). Esto es particularmente cierto en el caso de escenarios de optimización multiobjetivo, en los que generalmente se busca que el resultado cubra ampliamente el conjunto de soluciones eficientes.

Se aborda la cuestión del equilibrio entre intensificación y diversificación en el contexto de este problema mediante el enfoque memético descrito en la Sección 5.3, esto con el fin de estudiar qué régimen de aplicación produce un mejor rendimiento, ya sea desde la perspectiva del problema (es decir, los valores alcanzados para el indicador específico del problema) o desde el punto de vista de los indicadores estándar de rendimiento multiobjetivo. Para ello, consideramos una estrategia sencilla en la que la intensificación se produce durante un periodo específico de la ejecución del algoritmo. Hemos realizado un análisis de sensibilidad de los parámetros que rigen la aplicación de esta estrategia (Sección 5.10.2), así como una comparación con otros AEMOs no meméticos (Sección 5.10.3).

Nuestros hallazgos indican que, a pesar de su simplicidad, esta estrategia es lo suficientemente flexible como para permitir modular la intensificación de la búsqueda, no solo superando a otros algoritmos en el indicador específico del problema, sino también obteniendo resultados competitivos, o incluso mejores, en términos de calidad del frente de Pareto obtenido. se han considerado las mismas condiciones del entorno experimental descrito en la Sección 5.6.

Si bien la parametrización adecuada de los componentes de búsqueda local y de memoria élite es un tema interesante en sí mismo [54], existe otro factor relevante a considerar a la luz del escenario multiobjetivo subyacente: en qué medida la aplicación de estos operadores podría limitar excesivamente la búsqueda hacia una dirección específica del frente de Pareto óptimo. De hecho, obtener una buena convergencia y una amplia cobertura de este frente de Pareto óptimo sigue siendo un desafío importante para muchos métodos de optimización metaheurística multiobjetivo. Para abordar este problema, hemos considerado la aplicación de estos dos componentes dentro de una ventana de tiempo predeterminada durante la ejecución del algoritmo. Para ser precisos, determinamos la generación inicial IG y la generación final FG en las que se aplican estos operadores (véase la Figura 5.1).

La razón detrás de este mecanismo es posiblemente permitir que el algoritmo expanda su población ampliamente a lo largo de las direcciones hacia las cuales se ubica el frente de Pareto óptimo durante una fase inicial (que se denominará la etapa de *despliegue*), seguida de una etapa de intensificación cuya duración se modula por los valores particulares elegidos para los parámetros IG y FG descritos en 5.3, y en la que la búsqueda prioriza direcciones hacia mejores valores del índice de Sharpe, y una fase final (que llamaremos la etapa de *aseguramiento*) en la que el algoritmo, cuya población estaría idealmente cerca de al menos algunas regiones del frente de Pareto óptimo, avanza de una manera que no tiene en cuenta a Sharpe para extenderse a lo largo de la colección más amplia de soluciones no dominadas. Ciertamente, este es un procedimiento que admite mayores refinamientos y estrategias más elaboradas, pero sirve como una primera línea de base para evaluar el uso potencial de este enfoque.

5.10.1 Resultados experimentales

Tras definir el marco algorítmico y los datos considerados para la experimentación (ver Sección 5.6), procedemos a un análisis experimental del MA en dos fases: primero, realizaremos un análisis de sensibilidad para determinar los marcos temporales adecuados para la etapa de intensificación; luego,

realizaremos un análisis comparativo de las mejores parametrizaciones del MA con respecto a otros AEMOs no meméticos. Esto se realizará respectivamente en las secciones 5.10.2 y 5.10.3. Para este caso específico hemos parametrizado la cardinalidad en $K = 18$.

5.10.2 Análisis de sensibilidad

Para analizar el comportamiento de nuestro MA en respuesta a una parametrización diferente de la intensificación basada en la época, realizamos experimentos en tres escenarios diferentes: utilizando búsqueda local o memoria de élite de forma aislada ($P_{LS} = 1, P_{EM} = 0$ y $P_{LS} = 0, P_{EM} = 1$ respectivamente), y utilizando ambos componentes simultáneamente ($P_{LS} = 1, P_{EM} = 1$). Esto proporciona una visión más detallada de los efectos que estos parámetros tienen sobre estos componentes y cualquier comportamiento sinérgico que pueda surgir.

Los resultados se presentan en la tabla 5.6. Centrándonos primero en los resultados de la configuración basada únicamente en la búsqueda local, podemos observar que la parametrización con mejor rendimiento para todos los indicadores de rendimiento es aquella que comienza con la intensificación desde el principio ($IG = 0$). Sin embargo, existe una diferencia en la duración de la intensificación según el indicador: para hipervolumen y GD (es decir, los indicadores de rendimiento multiobjetivo puros), parece que esta intensificación no debería durar hasta las últimas etapas de la ejecución (hay una ligera degradación en los resultados de estos indicadores para valores mayores de FG , insuficiente en algunos casos para ser estadísticamente significativos¹⁵, aunque la tendencia parece estar presente); sin embargo, para el índice de Sharpe, los mejores valores se obtienen cuando la búsqueda local se aplica al final del algoritmo.

Se puede entender este comportamiento en términos de la presión que la búsqueda local ejerce hacia la región del frente de Pareto con valores altos del índice de Sharpe. Si bien profundizar en esta región también puede proporcionar mejoras en el hipervolumen y la GD, es evidente que esta última también se beneficia de expandir la búsqueda hacia regiones subóptimas de Sharpe durante la etapa de aseguramiento.

Se pueden observar ahora los resultados de la configuración basada únicamente en el uso de memoria de élite. En este escenario, todos los indicadores parecen preferir una breve intensificación explosiva, aunque cabe destacar que el índice de Sharpe parece beneficiarse de una aplicación temprana de la intensificación, mientras que el hipervolumen y la GD también ofrecen buenos resultados (los mejores para esta configuración, o estadísticamente indistinguibles de los mejores) cuando se realiza una fase de despliegue corta antes de la etapa de intensificación. En este caso, hay que tener en cuenta que la memoria de élite es un procedimiento mediante el cual las soluciones prometedoras generadas en pasos previos se recuperan y se reintroducen en la población.

Esto tiene un impacto evidente en la diversidad de la población, que puede ser menos perjudicial durante las etapas iniciales, cuando la diversidad aún es elevada. Esto es coherente con los resultados degradados obtenidos cuando esta intensificación solo tiene lugar al final del ciclo: la población estará mucho más cerca de la convergencia y los beneficios de reintroducir buenas soluciones conocidas se en compensadas por la pérdida de diversidad.

Finalmente, al pasar al uso conjunto de la búsqueda local y la memoria de élite como operadores de intensificación, los resultados son consistentes con los de las configuraciones previas y parecen no solo estar más definidos, sino también indicar que ambos elementos operan sinérgicamente, pero sin interacciones altamente no lineales. Por lo tanto, desde el punto de vista del índice de Sharpe, la mejor configuración parece ser usar un IG muy bajo (como en el caso tanto de la búsqueda local como de

¹⁵La significancia estadística se determina aquí con la prueba U de Mann-Whitney [148] al nivel de significancia α indicado en cada caso.

Tabla 5.6: Resultados de MA para diferentes valores de IG y FG . Se muestran los mejores valores (x^*), mediana (\bar{x}), desviación cuartil (QD) y coeficiente de desviación cuartil (CQD) para cada indicador de rendimiento. La mejor configuración para cada indicador se marca con una estrella; las demás configuraciones se marcan con símbolos que indican una diferencia estadísticamente significativa en $\alpha = 0,1(\circ)$, $\alpha = 0,05(\bullet)$ y $\alpha = 0,01(\blacksquare)$ con este mejor valor.

		$P_{LS} = 1, P_{EM} = 0$														
		Sharpe index						hypervolume				GD				
IG	FG	x^*	\bar{x}	QD	CQD		x^*	\bar{x}	QD	CQD		x^*	\bar{x}	QD	CQD	
0	10	0,408	0,406	0,001	0,139%	■	0,838	0,825	0,005	0,659%	●	0,669	1,156	0,193	15,938%	■
0	20	0,408	0,406	0,000	0,097%	●	0,839	0,830	0,005	0,560%		0,641	0,896	0,084	9,281%	★
0	30	0,408	0,407	0,000	0,118%		0,841	0,832	0,005	0,621%	★	0,644	0,970	0,188	18,709%	
0	40	0,408	0,407	0,000	0,102%		0,839	0,831	0,003	0,362%		0,668	0,907	0,160	16,794%	
0	50	0,408	0,407	0,000	0,071%	★	0,838	0,831	0,005	0,576%		0,746	1,031	0,131	12,658%	○
10	20	0,407	0,405	0,000	0,116%	■	0,834	0,824	0,004	0,480%	■	0,933	1,460	0,201	14,452%	■
10	30	0,407	0,405	0,001	0,145%	■	0,837	0,825	0,002	0,286%	■	0,878	1,315	0,140	10,421%	■
10	40	0,407	0,406	0,001	0,134%	■	0,831	0,825	0,004	0,471%	■	0,870	1,286	0,223	16,750%	■
10	50	0,407	0,406	0,001	0,125%	■	0,837	0,825	0,004	0,446%	●	0,829	1,335	0,212	15,758%	■
20	30	0,405	0,404	0,001	0,168%	■	0,832	0,818	0,004	0,445%	■	1,206	1,742	0,176	10,374%	■
20	40	0,406	0,404	0,001	0,153%	■	0,831	0,817	0,003	0,331%	■	1,003	1,682	0,206	12,107%	■
20	50	0,406	0,404	0,001	0,220%	■	0,827	0,815	0,004	0,510%	■	1,097	1,752	0,274	14,768%	■
30	40	0,405	0,403	0,001	0,164%	■	0,822	0,809	0,005	0,623%	■	1,489	2,093	0,299	14,522%	■
30	50	0,405	0,403	0,001	0,149%	■	0,824	0,809	0,006	0,684%	■	1,474	2,069	0,177	8,285%	■
40	50	0,405	0,402	0,001	0,171%	■	0,822	0,804	0,007	0,847%	■	1,378	2,209	0,314	14,724%	■
		$P_{LS} = 0, P_{EM} = 1$														
		Sharpe index						hypervolume				GD				
IG	FG	x^*	\bar{x}	QD	CQD		x^*	\bar{x}	QD	CQD		x^*	\bar{x}	QD	CQD	
0	10	0,405	0,403	0,002	0,384%	■	0,824	0,806	0,011	1,348%	■	1,178	1,987	0,373	18,412%	■
0	20	0,409	0,408	0,000	0,057%	★	0,839	0,818	0,029	3,673%	○	0,594	1,005	0,493	37,962%	★
0	30	0,409	0,408	0,000	0,089%	●	0,823	0,799	0,032	4,144%	■	0,866	1,620	0,639	32,413%	■
0	40	0,408	0,407	0,000	0,115%	■	0,802	0,762	0,014	1,786%	■	1,986	2,662	0,278	10,570%	■
0	50	0,408	0,407	0,000	0,115%	■	0,742	0,694	0,013	1,817%	■	4,290	6,235	1,073	16,811%	■
10	20	0,409	0,408	0,000	0,084%	■	0,841	0,817	0,024	2,950%	■	0,536	1,273	0,350	30,365%	■
10	30	0,408	0,407	0,000	0,080%	■	0,829	0,811	0,015	1,888%	■	0,973	1,596	0,287	19,102%	●
10	40	0,408	0,407	0,001	0,125%	■	0,799	0,755	0,009	1,232%	■	1,965	2,774	0,243	9,004%	■
10	50	0,408	0,407	0,001	0,147%	■	0,744	0,707	0,015	2,105%	■	3,692	5,745	0,614	10,858%	■
20	30	0,407	0,406	0,000	0,038%	■	0,834	0,826	0,003	0,409%	★	0,769	1,309	0,168	12,737%	■
20	40	0,407	0,406	0,000	0,107%	■	0,816	0,799	0,004	0,542%	■	1,651	2,287	0,260	11,143%	■
20	50	0,408	0,406	0,001	0,167%	■	0,752	0,730	0,010	1,349%	■	3,665	5,217	0,815	15,920%	■
30	40	0,407	0,406	0,001	0,130%	■	0,819	0,804	0,004	0,492%	■	1,507	2,503	0,301	12,340%	■
30	50	0,407	0,406	0,001	0,152%	■	0,765	0,746	0,012	1,658%	■	3,608	5,114	0,610	11,248%	■
40	50	0,407	0,405	0,001	0,184%	■	0,789	0,774	0,009	1,176%	■	2,421	3,321	0,802	21,041%	■
		$P_{LS} = 1, P_{EM} = 1$														
		Sharpe index						hypervolume				GD				
IG	FG	x^*	\bar{x}	QD	CQD		x^*	\bar{x}	QD	CQD		x^*	\bar{x}	QD	CQD	
0	10	0,409	0,409	0,000	0,037%	■	0,823	0,749	0,009	1,253%	■	0,613	2,548	0,372	15,919%	■
0	20	0,409	0,409	0,000	0,026%	■	0,767	0,746	0,003	0,372%	■	2,063	2,679	0,104	3,922%	■
0	30	0,409	0,409	0,000	0,028%	■	0,754	0,741	0,002	0,240%	■	2,375	3,077	0,110	3,611%	■
0	40	0,410	0,409	0,000	0,020%	★	0,721	0,710	0,003	0,431%	■	4,677	5,609	0,279	5,047%	■
0	50	0,409	0,409	0,000	0,022%	■	0,773	0,743	0,001	0,177%	■	1,797	2,810	0,062	2,198%	■
10	20	0,409	0,409	0,000	0,029%	■	0,820	0,749	0,006	0,807%	■	0,673	2,530	0,162	6,395%	■
10	30	0,409	0,409	0,000	0,023%	■	0,805	0,745	0,004	0,540%	■	1,271	2,759	0,242	8,830%	■
10	40	0,409	0,409	0,000	0,021%	■	0,720	0,708	0,005	0,645%	■	4,583	5,538	0,491	8,651%	■
10	50	0,409	0,409	0,000	0,022%	■	0,722	0,709	0,005	0,714%	■	4,813	5,644	0,612	10,497%	■
20	30	0,409	0,408	0,000	0,063%	■	0,840	0,830	0,004	0,490%	★	0,781	1,245	0,302	23,308%	★
20	40	0,409	0,408	0,000	0,047%	■	0,807	0,788	0,005	0,648%	■	1,883	2,715	0,332	12,190%	■
20	50	0,409	0,409	0,000	0,054%	■	0,776	0,745	0,011	1,417%	■	3,076	5,284	1,165	20,992%	■
30	40	0,408	0,407	0,000	0,081%	■	0,824	0,804	0,004	0,522%	■	1,709	2,711	0,302	11,064%	■
30	50	0,409	0,408	0,000	0,071%	■	0,775	0,757	0,005	0,638%	■	4,307	6,009	1,093	17,833%	■
40	50	0,408	0,407	0,001	0,135%	■	0,788	0,776	0,008	1,047%	■	2,417	3,241	0,657	17,950%	■

Tabla 5.7: Resultados para la parametrización MA seleccionada y los MOEA no meméticos. Se muestran los mejores valores (x^*), la mediana (\bar{x}), la desviación cuartil (QD) y el coeficiente de desviación cuartil (CQD) para cada indicador de rendimiento. La mejor configuración para cada indicador se marca con una estrella; las demás configuraciones se marcan con símbolos que indican una diferencia estadísticamente significativa en $\alpha = 0,1(\circ)$, $\alpha = 0,05(\bullet)$ y $\alpha = 0,01(\blacksquare)$ con este mejor valor.

algorithm	Sharpe index					hypervolume				GD					
	x^*	\bar{x}	QD	CQD		x^*	\bar{x}	QD	CQD	x^*	\bar{x}	QD	CQD		
MA _{0,20} ^{1,0}	0,408	0,406	0,000	0,097%	■	0,839	0,830	0,005	0,560%	0,641	0,896	0,084	9,281%	*	
MA _{0,30} ^{1,0}	0,408	0,407	0,000	0,118%	■	0,841	0,832	0,005	0,621%	*	0,644	0,970	0,188	18,709%	
MA _{0,40} ^{1,0}	0,408	0,407	0,000	0,102%	■	0,839	0,831	0,003	0,362%	0,668	0,907	0,160	16,794%		
MA _{0,40} ^{1,1}	0,410	0,409	0,000	0,020%	*	0,721	0,710	0,003	0,431%	■	4,677	5,609	0,279	5,047%	■
MA _{0,50} ^{1,0}	0,408	0,407	0,000	0,071%	■	0,838	0,831	0,005	0,576%	0,746	1,031	0,131	12,658%	○	
MA _{20,30} ^{1,1}	0,409	0,408	0,000	0,063%	■	0,840	0,830	0,004	0,490%	0,781	1,245	0,302	23,308%	■	
NSGA-II	0,402	0,398	0,001	0,282%	■	0,808	0,782	0,006	0,772%	■	2,256	3,408	0,543	15,377%	■
SPEA2	0,401	0,398	0,002	0,407%	■	0,803	0,779	0,008	1,032%	■	2,190	3,339	0,336	9,706%	■
HypE	0,406	0,405	0,000	0,115%	■	0,830	0,820	0,004	0,503%	■	0,771	1,158	0,178	14,996%	■
SHV	0,392	0,380	0,004	1,115%	■	0,733	0,677	0,022	3,203%	■	4,840	7,566	1,064	14,006%	■

la memoria de élite por separado) y un valor de FG ligeramente menor (mayor que cuando se usa la memoria de élite por separado, pero menor que cuando se usa solo la búsqueda local).

En cuanto al hipervolumen y la GD, estos dos indicadores proporcionan mejores resultados en las etapas intermedias de la ejecución (es decir, una etapa de despliegue hasta $IG = 20$, que permite que la población se disperse en todas las direcciones, seguida de una breve intensificación hasta $FG = 30$ que impulsa a la población hacia la región óptima de Sharpe, y una etapa final de consolidación en la que la población se expande de nuevo desde esta cabeza de puente hacia todas las direcciones del frente de Pareto).

Desde el punto de vista del rendimiento absoluto, es evidente que el uso combinado de la búsqueda local y la memoria de élite permite obtener resultados considerablemente mejores en términos del índice de Sharpe, a costa de perder parte de la cobertura de otras regiones del frente de Pareto. Por lo tanto, es relevante comprender cómo se justifica esta compensación y, sin duda, si los resultados pueden compararse favorablemente con los de otros AEMO. Esto se aborda en la siguiente sección.

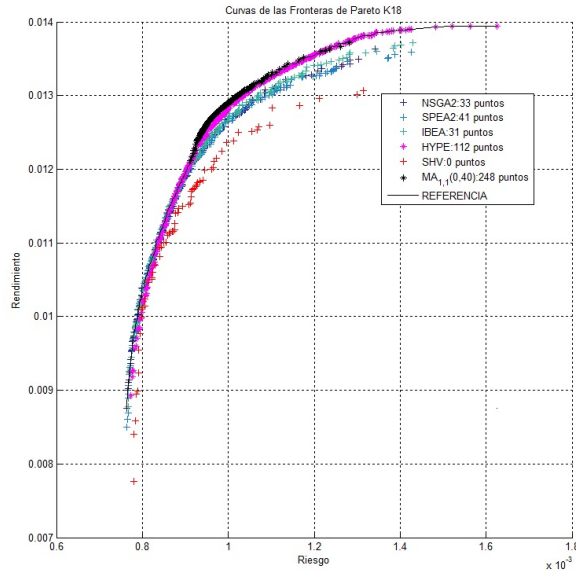
5.10.3 Comparación con otros AEMOs

Para evaluar el rendimiento del MA con AEMOs no meméticos, realizamos un análisis comparativo. Seleccionamos las parametrizaciones que ofrecieron los mejores resultados en cualquiera de los indicadores de rendimiento, así como aquellas para las que no se observó una diferencia estadísticamente significativa (ni siquiera en el nivel $\alpha = 0,1$). La notación MA_{a,b}^{x,y} se utiliza para denotar el MA con $P_{LS} = x$, $P_{EM} = y$, $IG = a$ y $FG = b$. Los resultados se presentan en la Tabla 5.7.

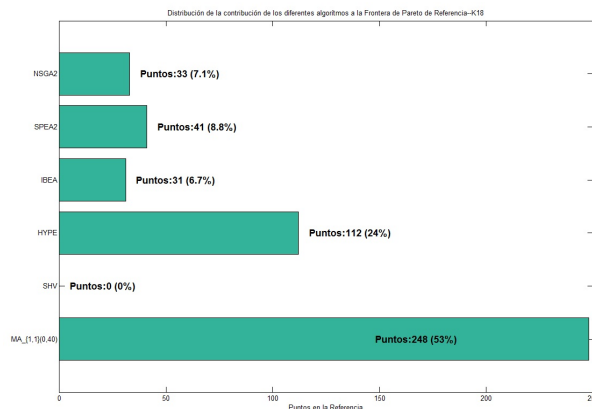
Como se puede observar, la mayoría de las parametrizaciones de MA superan a los AEMOs no meméticos. Esto es particularmente cierto para el indicador de índice de Sharpe, para el cual el MA superan significativamente a los demás algoritmos. Esto no es sorprendente dada la intensificación basada en Sharpe que se produce en el MA, incluso si esta intensificación se realiza de diferentes maneras y con distintas parametrizaciones. Sin embargo, es notable que, en la mayoría de los casos, esta superioridad también se refleja en los indicadores estándar de rendimiento multiobjetivo.

Esto indica que progresar hacia la región óptima de Sharpe del frente de Pareto también ofrece ventajas muy importantes para obtener buenos frentes. Esto se confirma con la contribución que hace el MA_{0,40}^{1,1} al frente de referencia (ver 5.9.1), en la figura 5.10 (a) se pueden observar los diferentes frentes y en la 5.10 (b) la distribución de puntos de dicho frente (el 53% corresponde a nuestro MA_{0,40}^{1,1}). Además,

esto se ilustra en la Fig. 5.11, en la que se representa el frente combinado (es decir, el frente obtenido al combinar los frentes de Pareto producidos por las 30 ejecuciones de cada algoritmo) para $MA_{0,40}^{1,1}$ (la parametrización de MA más orientada a la optimización del índice de Sharpe) e HypE (el MOEA de mejor rendimiento en términos de hipervolumen y GD).



(a)



(b)

Figura 5.10: Distribución de la contribución al frente de Pareto después de 30 ejecuciones de los algoritmos ($MA_{0,40}^{1,1}$, NSGA-II, SPEA2, IBEA, HYPE y SHV para $K = 18$) (a) Fronteras de Pareto (b) Distribución porcentual para la Referencia

Se puede visualizar primero que en la Figura 5.11 (izquierda), HypE parece tener una mejor cobertura de las regiones extremas del frente de Pareto (bajo riesgo/bajo rendimiento y alto riesgo/alto rendimiento), aunque $MA_{0,40}^{1,1}$ también se extiende hacia el extremo de alto riesgo del frente. Sin embargo, la MA tiene una clara ventaja en la región óptima de Sharpe, en la que logra un avance más profundo. Este abultamiento se representa más claramente en la Figura 5.11 (medio)-(derecha), mostrando la clara ganancia alcanzada por la MA en esta región, lo que contribuye notablemente a mejorar el rendimiento multiobjetivo.

Si bien contar con un mejor soporte de la región óptima de Sharpe del frente de Pareto es obviamente interesante desde el punto de vista del responsable de la toma de decisiones, también es interesante

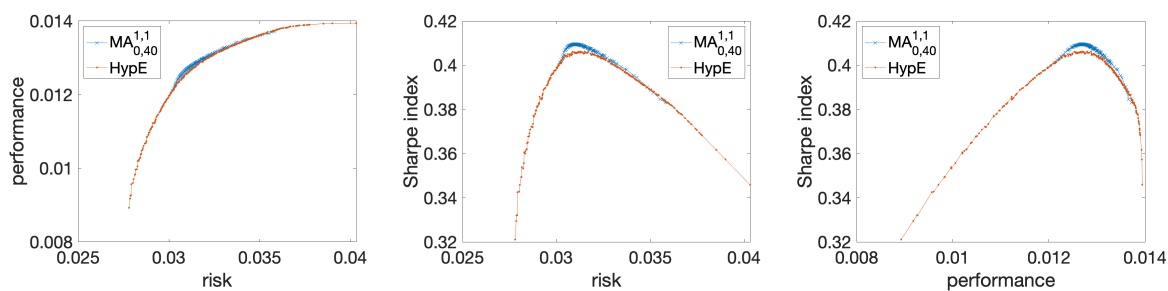


Figura 5.11: Representación de los frentes de Pareto combinados de $MA_{0,40}^{1,1}$ e HypE. El gráfico de la izquierda muestra los frentes alcanzados en el espacio bioobjetivo. Los gráficos central y derecho muestran el índice de Sharpe para cada solución del frente en función del riesgo (centro) y el rendimiento (izquierda).

observar que existen algunas parametrizaciones (por ejemplo, $MA_{0,(30|40|50)}^{1,0}$) que, a pesar de proporcionar resultados ligeramente peores en términos de los valores del índice de Sharpe alcanzados, aún muestran una diferencia estadísticamente casi nula con los algoritmos de mejor rendimiento en términos de hipervolumen y GD. Por lo tanto, es posible ajustar la etapa de intensificación para lograr una cobertura más amplia del frente de Pareto.

Encontrar el equilibrio adecuado entre intensificación y diversificación es fundamental en la optimización heurística general, y resulta especialmente interesante en proyectos multiobjetivo, donde la mera existencia de un conjunto objetivo de soluciones eficientes enriquece considerablemente la cuestión. En este sentido, y centrándonos en este último contexto, es importante tener en cuenta que la determinación del frente de Pareto casi óptimo no es el final del proceso de optimización, sino que debe considerarse en relación con la fase posterior de toma de decisiones, en la que el experto seleccionará la solución adecuada. Esto resulta muy relevante en los problemas de optimización de carteras: no solo constituyen un escenario habitual para el uso de algoritmos evolutivos multiobjetivo, sino que también cuentan con un indicador natural de la eficiencia de la solución (el índice de Sharpe, en este caso).

5.11 Análisis comparativo financiero de la cartera proporcionada por la propuesta de hibridación

Para validar el resultado proporcionado por nuestra propuesta algorítmica, vamos a proceder a estudiar el rendimiento de la cartera de inversión en los años siguientes al periodo de entrenamiento, pero antes de ello, es preciso hacer algunas consideraciones. La presente propuesta de conformación de carteras de inversión **constituye exclusivamente un ejercicio académico**, cuyo propósito es la aplicación y contraste de modelos matemáticos y financieros orientados a la optimización de portafolios y las herramientas algorítmicas para llevar a cabo dicha optimización. Debe señalarse además, que los resultados y conclusiones obtenidos están limitados al ámbito teórico y no representan recomendaciones para la toma de decisiones de inversión en el entorno real.

Es importante destacar también que, en el desarrollo del ejercicio, no se han considerado costos de transacción tales como comisiones, impuestos u otros gastos asociados a la implementación efectiva de las estrategias de inversión. Esta omisión responde a la naturaleza metodológica del trabajo, centrada únicamente en el análisis comparativo de rendimientos y riesgos bajo hipótesis ideales, lo que implica que los resultados aquí presentados pueden diferir respecto a una situación práctica donde tales costos impactan en la rentabilidad real obtenida. Por lo tanto, la metodología como las conclusiones de este estudio deben entenderse exclusivamente en el marco académico y no deben extrapolarse como consejos o guías para inversionistas en mercados reales.

Dicho lo anterior, tras completar las etapas experimentales descritas en las secciones 5.9 y 5.10, se seleccionaron las carteras generadas por nuestro algoritmo híbrido para una cardinalidad fija de $K = 18$ activos. Específicamente, se consideraron dos configuraciones: (i) la variante con actuación sinérgica de la búsqueda local y la memoria élite, con probabilidades $P_{LS} = 1$ y $P_{EM} = 1$, denotada como $MA_{1,1}$; y (ii) la versión que incorpora el componente de intensificación basado en épocas, con una ventana de intensificación global definida por $IG = 0$ y $FG = 40$, denotada como $MA_{0,40}^{1,1}$. Para este análisis, se eligió, en cada escenario, el individuo que alcanzó el mayor índice de Sharpe durante las ejecuciones. La tabla 5.8 presenta las ponderaciones de las carteras resultantes obtenidas por el algoritmo híbrido MA bajo estas configuraciones.

w_i	NOMBRE	$MA_{1,1}$ (%)	$MA_{0,40}^{1,1}$ (%)
1	ECOPETROL	0,00	0,01
2	PREC	0,00	0,00
3	PFBCOLOM	0,03	0,01
4	GRUPOSURA	0,02	0,01
5	GRUPOAVAL	0,00	0,01
6	CORFICOLCF	46,36	46,09
7	EXITO	4,84	4,79
8	ISAGEN	0,01	0,02
9	ISA	0,00	0,00
10	PFCORFICOL	0,93	0,88
11	BCOLOMBIA	0,00	0,01
12	CEMARGOS	0,01	0,00
13	EEB	0,00	0,00
14	BOGOTA	28,32	28,26
15	BVC	0,00	0,00
16	VALOREM	0,01	0,01
17	PROTECCION	19,44	19,88
18	FABRICATO	0,00	0,00
19	COLTEJER	0,00	0,00
20	ETB	0,00	0,00
	TOTAL	100,00	100,00
	SHARPE	0,409	0,410

Tabla 5.8: Cartera Propuesta de títulos acciones de renta variables activas en el año 2017 para la Bolsa de Valores de Colombia con $MA_{1,1}$ y con $MA_{0,40}^{1,1}$

Suponiendo que la inversión se realiza en el año 2017, calculamos el rendimiento promedio anual de las dos carteras seleccionadas según el criterio del mayor índice de Sharpe: $MA_{1,1}$ y $MA_{0,40}^{1,1}$. Los rendimientos históricos de los activos que componen dichas carteras fueron obtenidos de la base de datos de la Bolsa de Valores de Colombia [48]. Los resultados correspondientes al desempeño anual de cada cartera se presentan en las tablas 5.9 y 5.10.

El rendimiento anualizado de las carteras propuestas por nuestro algoritmo híbrido en las versiones $MA_{1,1}$ y $MA_{0,40}^{1,1}$ es de 12,44% y 12,50% respectivamente, es decir, esta estrategia de inversión en nuestro ejercicio académico tiene una ganancia de 12,44% y 12,50% por unidad de cuenta invertida. La comparación de estas estrategias de inversión con los índices de renta variable de la Bolsa de Valores de Colombia [48] y su rendimiento para el año 2017, se presentan en el cuadro 5.11.

Nuestros resultados muestran que las carteras generadas por las variantes híbridas consideradas superan en rendimiento a 7 de los 9 índices bursátiles reportados por la Bolsa de Valores de Colombia (véase la tabla 5.11). En conclusión, los resultados obtenidos en este ejercicio académico demuestran que la propuesta híbrida basada en algoritmos meméticos, combinada con estrategias de memoria élite y búsqueda local, es capaz de generar carteras de inversión que no solo alcanzan un rendimiento competitivo frente a los principales índices de renta variable de la Bolsa de Valores de Colombia en el

w_i	NOMBRE	RENDIMIENTO 2017 (%)	$MA_{1,1}$ (%)	RENDIMIENTO ESPERADO (%)
1	ECOPETROL	1,04	0,00	0,00
2	PREC	-4,42	0,00	0,00
3	PFBCOLOM	10,08	0,03	0,00
4	GRUPOSURA	1,21	0,02	0,00
5	GRUPOAVAL	4,52	0,00	0,00
6	CORFICOLCF	5,10	46,36	2,37
7	EXITO	16,19	4,84	0,78
8	ISAGEN	10,42	0,01	0,00
9	ISA	-0,82	0,00	0,00
10	PFCORFICOL	6,34	0,93	0,06
11	BCOLOMBIA	18,87	0,00	0,00
12	CEMARGOS	0,28	0,01	0,00
13	EEB	0,52	0,00	0,00
14	BOGOTA	16,97	28,32	4,81
15	BVC	-1,12	0,00	0,00
16	VALOREM	1,29	0,01	0,00
17	PROTECCION	22,72	19,44	4,42
18	FABRICATO	1,53	0,00	0,00
19	COLTEJER	-0,50	0,00	0,00
20	ETB	0,00	0,00	0,00
			100,00	12,44

Tabla 5.9: Rendimiento de títulos acciones de renta variables activas en el año 2017 para la Bolsa de Valores de Colombia y el Rendimiento de la cartera propuesta $MA_{1,1}$ en 5.8

año 2017, además de esto, lo hacen optimizando simultáneamente riesgo y rendimiento bajo el enfoque multiobjetivo del índice de Sharpe. La cartera propuesta por $MA_{0,40}^{1,1}$, en particular, logra un rendimiento anualizado del 12,50%, superando a la mayoría de los índices de referencia considerados, lo que refuerza la pertinencia del enfoque metodológico propuesto.

No obstante, es fundamental reiterar que este análisis se enmarca exclusivamente en un contexto teórico y metodológico, sin considerar factores prácticos como costos de transacción, liquidez o impacto de mercado, elementos que en un entorno real podrían afectar significativamente la rentabilidad neta de las estrategias propuestas. Por tanto, los hallazgos aquí presentados no deben interpretarse como recomendaciones de inversión, sino como una validación empírica del potencial de los algoritmos evolutivos híbridos en la resolución de problemas de selección de carteras con restricciones de cardinalidad. Este trabajo contribuye así al corpus de conocimiento en optimización financiera multiobjetivo, abriendo vías para futuras investigaciones que incorporen mayores niveles de realismo y robustez en los modelos de toma de decisiones de inversión.

w_i	NOMBRE	RENDIMIENTO 2017 (%)	$MA_{0,40}^{1,1}$ (%)	RENDIMIENTO ESPERADO (%)
1	ECOPETROL	1,04	0,01	0,00
2	PREC	-4,42	0,00	0,00
3	PFBCOLOM	10,08	0,01	0,00
4	GRUPOSURA	1,21	0,01	0,00
5	GRUPOAVAL	4,52	0,01	0,00
6	CORFICOLCF	5,10	46,09	2,35
7	EXITO	16,19	4,79	0,78
8	ISAGEN	10,42	0,02	0,00
9	ISA	-0,82	0,00	0,00
10	PFCORFICOL	6,34	0,88	0,06
11	BCOLOMBIA	18,87	0,01	0,00
12	CEMARGOS	0,28	0,00	0,00
13	EEB	0,52	0,00	0,00
14	BOGOTA	16,97	28,26	4,80
15	BVC	-1,12	0,00	0,00
16	VALOREM	1,29	0,01	0,00
17	PROTECCION	22,72	19,88	4,52
18	FABRICATO	1,53	0,00	0,00
19	COLTEJER	-0,50	0,00	0,00
20	ETB	0,00	0,00	0,00
			100,00	12,50

Tabla 5.10: Rendimiento de títulos acciones de renta variables activas en el año 2017 para la Bolsa de Valores de Colombia y el Rendimiento de la cartera propuesta $MA_{0,40}^{1,1}$ en 5.8

INDICES	MERCADOS	Rentabilidad 2017	$MA_{1,1}$	$MA_{0,40}^{1,1}$
COLCAP	Renta Variable	11,98%		
COLEQTY	Renta Variable	12,52%		
COLIBR	Renta Variable	6,12%		
COLIR	Renta Variable	13,63%		
COLSC	Renta Variable	-3,50%	12,44%	12,50%
COLTES	Renta Variable	9,92%		
COLTES CP	Renta Variable	8,69%		
COLTES LP	Renta Variable	10,75%		
COLTES UVR	Renta Variable	10,34%		

Tabla 5.11: Rendimiento Año 2017 de Indices del Mercado de Renta Variable de la Bolsa de Valores de Colombia [48] comparados con las Carteras Propuestas.

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

6.1 Conclusiones

El presente trabajo de investigación, ha abordado un problema complejo y de gran relevancia en el ámbito de la gestión financiera: la optimización de carteras de inversión. A lo largo de este estudio, se ha demostrado cómo la aplicación estratégica de algoritmos meméticos (MAs), que combinan eficientemente técnicas de búsqueda global y local, puede ofrecer soluciones robustas y financieramente significativas en un escenario intrínsecamente multiobjetivo y con restricciones reales.

El corazón del problema reside en la búsqueda de un equilibrio óptimo entre la maximización del rendimiento y la minimización del riesgo en la composición de carteras de inversión. El modelo de Markowitz [150] ha sido la referencia teórica fundamental para este fin, al enfocar la selección de inversiones basándose en el comportamiento racional del inversor y en medidas estadísticas clave como la media, la varianza y la covarianza de las tasas de rendimiento. Sin embargo, la inclusión de restricciones adicionales, como las de cardinalidad (que limitan el número de activos en una cartera), transforma este problema en una tarea de optimización NP-dura y mucho más compleja, para la cual los métodos exactos de programación cuadrática no son siempre factibles. Es en este punto donde las metaheurísticas emergen como herramientas idóneas, al ser capaces de ofrecer soluciones óptimas o casi óptimas de manera eficiente, aunque sacrificando las garantías de optimalidad global en todo el espacio de búsqueda.

Nuestra investigación se ha centrado específicamente en el desarrollo de estrategias algorítmicas de hibridación dentro del marco de las metaheurísticas basadas en población, en particular, los algoritmos meméticos multiobjetivo (MOMA). La hipótesis defiende que la incorporación de conocimiento específico del dominio del problema es crucial para lograr un alto rendimiento, una filosofía respaldada por el Teorema No-Free-Lunch (NFL) [209], que sugiere que no existe un algoritmo "universal" superior sin esta adaptación. En este contexto, el índice de Sharpe [188], una reconocida medida de la relación rentabilidad/riesgo, se ha erigido como un pilar fundamental. No solo se utiliza para evaluar la eficiencia financiera de las carteras generadas, sino, crucialmente, como un mecanismo central para guiar y concentrar la búsqueda del algoritmo en las regiones más prometedoras del frente de Pareto, aquellas que ofrecen un mejor exceso de retorno por unidad de riesgo.

6.2 Contribuciones metodológicas y experimentales clave

La investigación presenta una serie de contribuciones significativas que se han articulado a lo largo de sus capítulos:

1. Propuesta metodológica para la revisión bibliográfica sistemática (ver Capítulo 3):

Se ha desarrollado un marco metodológico reproducible para el cartografiado automatizado de un tema de interés a partir de la literatura existente. Esta metodología emplea algoritmos de agrupamiento (k-medias) para clasificar ítems bibliográficos en conjuntos relacionados, basándose en la similitud léxica de sus descriptores (título, abstract, palabras clave). Además, se utiliza un algoritmo evolutivo operando sobre un agrupamiento jerárquico para determinar un orden de revisión adecuado dentro de cada grupo, facilitando así el análisis y la contextualización de los trabajos. La aplicación de esta metodología a un corpus bibliográfico sobre metaheurísticas y algoritmos bioinspirados para la optimización de carteras de inversión permitió identificar cinco nichos de investigación principales:

- Técnicas de optimización multiobjetivo utilizando indicadores de Sharpe o el modelo de Markowitz.
- Técnicas de optimización multiobjetivo para la propuesta de carteras de inversión.
- Técnicas metaheurísticas para carteras de inversión con restricciones de diferentes tipos.
- Técnicas híbridas para abordar el problema de optimización de carteras de inversión.
- Exploración exhaustiva de la frontera de Pareto a través de AEMOs.

Este estudio bibliométrico no solo proporciona un cuerpo de antecedentes profuso para la investigación actual, sino que también señala áreas de abordaje frecuentes y facilita la identificación de falsos positivos en las búsquedas. La contribución de esta sección ha sido diseminada en publicaciones que se pueden verificar en [52], [53], [54], [55], [56].

2. Selección del Núcleo Evolutivo (ver Capítulo 4):

Como paso preliminar fundamental para la hibridación, se realizó una comparación exhaustiva de tres algoritmos evolutivos multiobjetivo de referencia: NSGA-II, SPEA2 e IBEA. La experimentación se llevó a cabo utilizando datos históricos de fondos mutuales europeos de 1996 a 2010 y se evaluó el rendimiento con indicadores conocidos como el hipervolumen y la distancia generacional (R2), complementado con el análisis de la eficiencia financiera mediante el índice de Sharpe.

Los resultados mostraron que, si bien el SPEA2 tuvo un mejor rendimiento para restricciones de cardinalidad muy bajas ($K=2$) en términos de hipervolumen y R2, el IBEA demostró un comportamiento estadísticamente superior para cardinalidades más altas ($K=4, 7, 15$) y, crucialmente, fue mucho más eficiente en la generación de soluciones óptimas en el contexto del índice de Sharpe.

Esta evidencia sólida condujo a la elección del IBEA como el motor evolutivo subyacente para las variantes de hibridación propuestas en el siguiente capítulo (ver 5). Estos hallazgos fueron publicados en trabajos que se pueden verificar en [49], [50], [51].

3. Desarrollo y validación de las variantes de Hibridación (ver Capítulo 5):

El núcleo de este trabajo de investigación se materializa en la propuesta de un novedoso Algoritmo Memético Evolutivo Multiobjetivo (MOMA) diseñado específicamente para la selección de carteras de inversión con restricciones de cardinalidad. La innovación reside en la hibridación informada de un algoritmo evolutivo (IBEA) con dos componentes de intensificación, guiados por el índice de Sharpe:

- Memoria de Soluciones de Élite (ME): Esta lista ordenada almacena las mejores soluciones encontradas (según el índice de Sharpe). Sirve como un mecanismo de intensificación ajustable, donde las soluciones con bajo rendimiento se pueden reemplazar por individuos de la memoria de élite, reorientando la búsqueda hacia soluciones históricamente más efectivas.
- Búsqueda Local (LS): Implementada como un método de escalada de colinas de primer ascenso. Aplica mutaciones a los pesos no nulos de una cartera y acepta los cambios si mejoran el índice de Sharpe, siempre que este sea superior al promedio de la población. El uso de un esquema de lamarckismo parcial permite activar la búsqueda local con una probabilidad determinada (P_{LS}), optimizando el costo computacional.

Se realizó un análisis de sensibilidad exhaustivo para determinar la parametrización óptima y el rango de actuación de estos mecanismos de hibridación, evaluando su impacto individual y sinérgico. Los experimentos demostraron que aumentar la probabilidad de búsqueda local (P_{LS}) generalmente mejoraba el rendimiento en todos los indicadores, especialmente en el índice de Sharpe, destacando el beneficio de una alta intensificación en este dominio.

De manera similar, el uso de la memoria de élite (ME), particularmente con altas probabilidades de aplicación (P_{ME}), mejoró significativamente el rendimiento en términos del índice de Sharpe, aunque con un efecto opuesto en los indicadores de frente de Pareto puros (hipervolumen y distancia generacional). Este aparente "sacrificio" en los indicadores de diversidad se interpretó como una consecuencia deseada, ya que la memoria élite y la búsqueda local enfocan la búsqueda en las regiones del frente de Pareto que son más relevantes financieramente (es decir, aquellas con los valores más altos del índice de Sharpe), en lugar de dispersar el esfuerzo en regiones de utilidad limitada para el experto financiero.

El análisis de la interacción sinérgica entre la búsqueda local y la memoria de élite confirmó que la combinación $MA_{1,1}$ ($P_{LS} = 1$, $P_{ME} = 1$) ofreció los mejores resultados para el índice de Sharpe, validando la eficacia de la interacción entre ambos componentes para encontrar carteras riesgo/rendimiento eficientes. La sección 5.9.1 presenta un análisis comparativo del desempeño de los algoritmos mediante la construcción de una frontera de Pareto de referencia, obtenida a partir de la unión de las soluciones no dominadas generadas por todos los algoritmos evaluados. Los resultados muestran que la variante propuesta $MA_{1,1}$ contribuye de forma predominante a dicha frontera de referencia, aportando el 84% de las soluciones no dominadas para el caso con cardinalidad $K=18$.

Este hallazgo evidencia que el $MA_{1,1}$ no solo produce soluciones de alta calidad en términos del índice de Sharpe, sino que también logra una mejor cobertura y convergencia hacia la región eficiente del frente de Pareto, superando claramente a los algoritmos de comparación (NSGA-II, SPEA2, IBEA, HYPE y SHV). Esta superioridad refuerza la eficacia de la hibridación propuesta, que alinear la búsqueda evolutiva con el criterio financiero del índice de Sharpe permite enfocar los esfuerzos en las zonas del frente que son más relevantes desde la perspectiva del inversor. La integración estratégica de mecanismos de intensificación guiados por el índice de Sharpe dentro de un marco memético es altamente efectiva para el problema de optimización de carteras con restricciones de cardinalidad.

Entre otras cosas, el índice de Sharpe proporciona una medida legítima para indicar las direcciones de búsqueda preferidas en el espacio multiobjetivo. De hecho, explotar este indicador puede proporcionar una heurística de búsqueda razonable. Por lo tanto, surge la pregunta de cómo integrar esta heurística en el proceso de búsqueda y cómo aprovecharla al máximo. Hemos abordado la primera cuestión mediante un MA que incluye búsqueda local y una memoria de soluciones de élite, siempre basándonos en el índice de Sharpe. En cuanto al segundo problema, propusimos inicialmente un esquema simple en el que la intensificación ocurre durante una ventana temporal preestablecida de la ejecución del algoritmo (ver Sección 5.10). No obstante, este

enfoque simple ha demostrado que es posible modular el rendimiento del MA con respecto tanto a las medidas basadas en Sharpe como a los indicadores de rendimiento multiobjetivo. De hecho, no solo es generalmente posible superar a los AEMO no meméticos basándose en la primera medida consciente del problema, sino que el MA puede competir con estos AEMO en términos de rendimiento multiobjetivo puro (hipervolumen y GD en nuestro caso).

La sección 5.11 presenta un ejercicio académico de validación empírica en el que las carteras generadas por las variantes del algoritmo memético propuesto —específicamente $MA_{1,1}$ ($P_{LS} = 1$, $P_{ME} = 1$) y $MA_{0,40}^{1,1}$ — se evalúan en términos del rendimiento real durante el año 2017, utilizando datos históricos de la Bolsa de Valores de Colombia (BVC). Los resultados muestran que ambas carteras alcanzaron rendimientos anualizados superiores al 12.4%, superando a 7 de los 9 índices bursátiles de renta variable del mercado colombiano en ese periodo.

Este desempeño refuerza la eficacia del enfoque híbrido, que alinea la optimización multiobjetivo con el criterio financiero del índice de Sharpe, permitiendo identificar carteras no solo eficientes en términos teóricos (riesgo-rendimiento), sino también competitivas en la práctica. No obstante, se reitera que este análisis se realiza bajo condiciones ideales —sin considerar costos de transacción, impuestos ni restricciones de liquidez— y por tanto, sus resultados deben interpretarse como una validación metodológica y no como una recomendación de inversión real.

6.3 Impacto y relevancia del trabajo

La gestión financiera, en un entorno de constante evolución económica y con la necesidad de diversificar el riesgo ante escenarios de bajas tasas de interés fijas, requiere herramientas de optimización que puedan navegar la complejidad y la incertidumbre del mercado. El presente estudio ofrece una aportación significativa al campo de la computación evolutiva aplicada a las finanzas, al proponer un enfoque que no solo aborda la complejidad inherente de la optimización multiobjetivo con restricciones, sino que lo hace de una manera consciente del dominio financiero.

La demostración de que una métrica específica como el índice de Sharpe puede ser integrada de forma estratégica y exitosa en el diseño algorítmico, guiando la búsqueda de soluciones y mejorando su calidad y relevancia financiera, es un hallazgo de gran valor práctico. Al concentrar la búsqueda en las regiones más prometedoras del frente de Pareto para el decisor humano, el algoritmo propuesto facilita la selección de carteras de inversión que son verdaderamente eficientes en términos de riesgo-rendimiento, alineando la potencia computacional con las necesidades de la toma de decisiones experta. La capacidad del MA para encontrar buenas carteras de manera diversificada, gracias al equilibrio entre exploración y explotación que proporcionan sus componentes, es una característica crucial para su aplicabilidad en el mundo real.

En este sentido, la ausencia de indicaciones del contexto de la información sobre el problema y sus soluciones suele ser una de las dificultades que enfrentan los algoritmos meméticos en este tipo de dominios, lo que suele provocar que la búsqueda local se defina en direcciones elegidas aleatoriamente o se amplíe para realizar un ascenso en el sentido de Pareto (lo que también puede provocar que se desvíe en diferentes direcciones, no necesariamente alineadas con carteras financieramente eficientes en el sentido considerado aquí). La explotación de este indicador puede proporcionar un objetivo razonable para la búsqueda local, adaptando así la búsqueda a las especificidades del problema y alineándose con el proceso de toma de decisiones posterior por parte del experto humano.

Nuestra experimentación con datos de 20 valores de la Bolsa de Valores de Colombia entre 2010 y 2016 ha respaldado experimentalmente esta afirmación. El modelo algorítmico considerado incluye el uso de un mecanismo de memoria de élite basado en este indicador para modular el perfil de intensificación/diversificación de la búsqueda. Como se mostró en la sección anterior (5.7), los

resultados del algoritmo memético (MA) propuesto son notablemente mejores que los de otras propuestas algorítmicas multiobjetivo en el índice de referencia descrito. Esto destaca la sinergia efectiva entre los componentes algorítmicos que lo componen y cómo su interacción ayuda a enfocar la búsqueda hacia portafolios eficientes.

La simplicidad del enfoque también facilita la consideración de estrategias más sofisticadas en el futuro. Creemos que sería de especial interés determinar una estrategia adaptativa, mediante la cual el algoritmo pueda ajustar el uso de estos mecanismos durante la ejecución en función de las métricas de la población y el estado de la búsqueda. Por supuesto, sería conveniente extender estos hallazgos a otros conjuntos de datos o incluso a dominios diferentes.

6.4 Trabajo futuro

A pesar de los sólidos resultados obtenidos, la investigación también señala varios caminos para el trabajo futuro, que podrían expandir y consolidar aún más la propuesta:

Existen muchas vías para futuras investigaciones. Sin duda, confirmar estos hallazgos en otros conjuntos de datos es una de ellas. También nos interesan especialmente los problemas algorítmicos derivados de la descentralización de la población [5], es decir, el uso de un modelo no panmítico en el que múltiples islas MA evolucionan en aislamiento parcial.

Este mecanismo puede ser particularmente útil para añadir un nivel adicional de equilibrio entre diversificación e intensificación en este ámbito multiobjetivo. También visualizamos procedimientos adaptativos para controlar el uso de los componentes de MA; se está trabajando en esta dirección. [56].

Estos enfoques más sofisticados también podrían probarse con otros modelos matemáticos, como el modelo Black y Litterman [19]. Cabe mencionar que, si bien que esta investigación se centró en el uso del índice de Sharpe como indicador basado en el conocimiento que dirigió la búsqueda hacia las regiones de interés para el responsable de la toma de decisiones, existen otras posibilidades que podrían considerarse.

Por ejemplo, los enfoques de aprendizaje automático [171] también han mostrado resultados prometedores y pueden ser útiles como proveedores de conocimiento en lugar del índice de Sharpe. El enfoque metodológico genérico presentado en este trabajo puede adaptarse fácilmente a estas fuentes de conocimiento experto cada vez más sofisticadas. También se pueden considerar alternativas al modelo de Markowitz.

Este último está más orientado hacia mercados estables debido al supuesto de que los datos históricos ofrecen información sobre los rendimientos y riesgos futuros; estudiar los mercados en otros escenarios (es decir, mercados en expansión, mercados volátiles, mercados en retroceso, etc.) puede requerir el uso de otros modelos más orientados a tales condiciones, por ejemplo, el modelo de fijación de precios de activos de capital [141] o la teoría de fijación de precios de arbitraje [180], solo por mencionar dos ejemplos.

Continuar con el desarrollo de la metodología bibliométrica para realizar un análisis temporal de la red de términos en la literatura científica, con el objetivo de identificar patrones temáticos emergentes y nuevas direcciones de investigación en el campo de la optimización de carteras.

Bibliografía

- [1] E. Abascal. *Invertir en bolsa: conceptos y estrategias*. McGraw-Hill de Management. McGraw-Hill, 1999. ISBN 9788448120634. URL https://books.google.co.ve/books?id=_6qHQgAACAAJ.
- [2] D. Abramson, M. Krishnamoorthy, and H. Dang. Simulated annealing cooling schedules for the school timetabling problem. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 16(1):1–22, 1999.
- [3] A. Adebisi Ayodele and K. Ayo Charles. Portfolio selection problem using generalized differential evolution 3. *Applied Mathematical Sciences*, 9(41-44):2069–2082, 2015. ISSN 1312885X. doi: 10.12988/ams.2015.5188. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84929860373&doi=10.12988%2fams.2015.5188&partnerID=40&md5=a734e47bf136824467e0b8b01348b723>.
- [4] E. Alba. *Parallel metaheuristics: a new class of algorithms*, volume 47. John Wiley & Sons, 2005.
- [5] E. Alba and M. Tomassini. Parallelism and evolutionary algorithms. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6(5):443–462, 2002.
- [6] Aldaihani and T. M. Aldeehani. Mathematical models and a tabu search for the portfolio management problem in the kuwait stock exchange. *International Journal of Operational Research*, 7:445–462, 2009.
- [7] M. Aria and C. Cuccurullo. bibliometrix: An r-tool for comprehensive science mapping analysis. *Journal of Informetrics*, 11(4):959–975, 2017. ISSN 1751-1577. doi: 10.1016/j.joi.2017.08.007. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1751157717300500>.
- [8] J. Arriaga and M. Valenzuela-Rendón. Steepest ascent hill climbing for portfolio selection. In *Proceedings of the 2012T European Conference on Applications of Evolutionary Computation, EvoApplications'12*, pages 145–154, Berlin, Heidelberg, 2012. Springer-Verlag. ISBN 978-3-642-29177-7. doi: 10.1007/978-3-642-29178-4_15. URL http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-29178-4_15.
- [9] N. Bacanin and M. Tuba. Fireworks algorithm applied to constrained portfolio optimization problem. In *2015 IEEE Congress on Evolutionary Computation, CEC 2015 - Proceedings*, pages 1242–1249. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2015. ISBN 9781479974924. doi: 10.1109/CEC.2015.7257031. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84963594670&doi=10.1109%2fCEC.2015.7257031&partnerID=40&md5=353faa45037d1533840ab65da2a4eaec>.

- [10] N. Bacanin, M. Tuba, and B. Pelevic. Constrained portfolio selection using artificial bee colony (abc) algorithm. *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 8(1):190–198, 2014. ISSN 19980140. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84902499515&partnerID=40&md5=897950691892bb716a13ac93e29fc356>.
- [11] J. Bader and E. Zitzler. HypE: Fast Hypervolume-Based Multiobjective Search Using Monte Carlo Sampling. TIK Report 286, Institut für Technische Informatik und Kommunikationsnetze, ETH Zürich, Oct. 2006.
- [12] J. Bader, K. Deb, and E. Zitzler. Faster Hypervolume-based Search using Monte Carlo Sampling. In *Conference on Multiple Criteria Decision Making (MCDM 2008)*. Springer, 2008.
- [13] P. BAJPAI and M. Kumar. Genetic algorithm - an approach to solve global optimization problems. *Indian Journal of Computer Science and Engineering*, 1:199–206, 10 2010.
- [14] L. V. Bartalanffy. *General System Theory*. George Braziller, 1969.
- [15] M. Bastian, S. Heymann, and M. Jacomy. Gephi: An Open Source Software for Exploring and Manipulating Networks. In *International AAAI Conference on Weblogs and Social Media*, pages 361–362. AAAI Press, 2009.
- [16] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, and C. M. Shetty. *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. Wiley, 2013.
- [17] H. Belyadi and A. Haghighat. Chapter 4 - unsupervised machine learning: clustering algorithms. In H. Belyadi and A. Haghighat, editors, *Machine Learning Guide for Oil and Gas Using Python*, pages 125–168. Gulf Professional Publishing, 2021. ISBN 978-0-12-821929-4. doi: 10.1016/B978-0-12-821929-4.00002-0. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780128219294000020>.
- [18] N. Beume, B. Naujoks, and M. Emmerich. Sms-emoa: Multiobjective selection based on dominated hypervolume. *European Journal of Operational Research*, 181(3):1653–1669, 2007. ISSN 0377-2217. doi: 10.1016/j.ejor.2006.08.008. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221706005443>.
- [19] F. Black and R. Litterman. Global portfolio optimization. *Financial Analysts Journal*, 48:28–43, 1992. doi: 10.2469/faj.v48.n5.28.
- [20] S. Bleuler, M. Laumanns, L. Thiele, and E. Zitzler. PISA—A Platform and Programming Language Independent Interface for Search Algorithms. In C. M. Fonseca, P. J. Fleming, E. Zitzler, K. Deb, and L. Thiele, editors, *Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization (EMO 2003)*, volume 2632 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 494–508, Berlin, 2003. Springer.
- [21] T. Blickle and L. Thiele. A comparison of selection schemes used in evolutionary algorithms. *Evolutionary Computation*, 4(4):361–394, 1996. doi: 10.1162/evco.1996.4.4.361.
- [22] V. D. Blondel, J.-L. Guillaume, R. Lambiotte, and E. Lefebvre. Fast unfolding of communities in large networks. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2008(10):P10008, Oct 2008. ISSN 1742-5468.
- [23] C. Blum and A. Roli. Metaheuristics in combinatorial optimization: Overview and conceptual comparison. *ACM Comput. Surv.*, 35:268–308, 2003.

- [24] C. Blum, M. J. Blesa Aguilera, A. Roli, and M. Sampels. *Hybrid Metaheuristics: An Emerging Approach to Optimization*, volume 144 of *Studies in Computational Intelligence*. Springer, Berlin Heidelberg, 2008. ISBN 9783540782940.
- [25] C. Blum, J. Puchinger, G. R. Raidl, and A. Roli. Hybrid metaheuristics in combinatorial optimization: A survey. *Applied Soft Computing*, 11(6):4135–4151, 2011. ISSN 1568-4946.
- [26] J. Borghoff, L. R. Knudsen, and K. Matusiewicz. Hill climbing algorithms and trivium. In *Selected Areas in Cryptography*, pages 57–73. Springer, 2011.
- [27] S. Bouktif, H. Sahraoui, and G. Antoniol. Simulated annealing for improving software quality prediction. In *Proceedings of the 8th annual conference on Genetic and evolutionary computation*, pages 1893–1900. ACM, 2006.
- [28] A. Briza and P. Naval Jr. Stock trading system based on the multi-objective particle swarm optimization of technical indicators on end-of-day market data. *Applied Soft Computing Journal*, 11(1):1191–1201, 2011. ISSN 15684946. doi: 10.1016/j.asoc.2010.02.017. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-77957920390&doi=10.1016%2fj.asoc.2010.02.017&partnerID=40&md5=c7c21aa30ccc6cdf400adfb1bc27f263>.
- [29] B. Brookes. Sources of information on specific subjects. *Journal of Information Science*, 10(4):173–175, 1985. doi: 10.1177/016555158501000406. URL <https://doi.org/10.1177/016555158501000406>.
- [30] C. Carlos. Harnessing memetic algorithms: a practical guide. *Transactions in Operations Research*, 33, 2025. doi: 10.1007/s11750-024-00694-8. URL <https://rdcu.be/enMOn>.
- [31] F. Cesarone, A. Scozzari, and F. Tardella. An optimization diversification approach to portfolio selection. *Journal of Global Optimization*, 76(2):245–265, February 2020. doi: 10.1007/s10898-019-00809-. URL https://ideas.repec.org/a/spr/jglopt/v76y2020i2d10.1007_s10898-019-00809-7.html.
- [32] P. Chaudhari, A. K. Thakur, R. Kumar, N. Banerjee, and A. Kumar. Comparison of nsga-iii with nsga-ii for multi objective optimization of adiabatic styrene reactor. *Materials Today: Proceedings*, 57:1509–1514, 2022. ISSN 2214-7853. doi: 10.1016/j.matpr.2021.12.047. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S221478532107718X>. International Chemical Engineering Conference 2021 (100 Glorious Years of Chemical Engineering and Technology).
- [33] C. Chen and B.-Y. Chen. Complex Portfolio Selection Using Improving Particle Swarm Optimization Approach. In *2018 IEEE 20th International Conference on High Performance Computing and Communications; IEEE 16th International Conference on Smart City; IEEE 4th International Conference on Data Science and Systems (HPCC/SmartCity/DSS)*, pages 828–835. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2019. ISBN 9781538666142. doi: 10.1109/HPCC/SmartCity/DSS.2018.00138. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85062490782&doi=10.1109%2fHPCC%2fSmartCity%2fDSS.2018.00138&partnerID=40&md5=1f45f12900b9d3b5345c255b97279c57>.
- [34] S.-S. Chen, C.-F. Huang, and T.-P. Hong. An improved multi-objective genetic model for stock selection with domain knowledge. In S.-M. Cheng and M.-Y. Day, editors, *Technologies and Applications of Artificial Intelligence*, volume 8916 of *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, pages 66–73, Cham, 2014. Springer International Publishing. ISBN 978-3-319-13987-6.

- [35] S.-S. Chen, C.-F. Huang, T.-P. Hong, and B.-R. Chang. Using a genetic model for asset allocation in stock investment. *Frontiers in Artificial Intelligence and Applications*, 274: 167–174, 2015. ISSN 09226389. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84926466998&doi=10.3233%2f978-1-61499-484-8-167&partnerID=40&md5=5f93c8cde3b82ac4d80bbc49be33bb04>.
- [36] T.-C. Chen and Y.-W. Chang. Modern floorplanning based on b*-tree and fast simulated annealing. *Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, 25(4):637–650, 2006.
- [37] R. Cheng, Y. Jin, M. Olhofer, and B. Sendhoff. A reference vector guided evolutionary algorithm for many-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 20, 01 2016. doi: 10.1109/TEVC.2016.2519378.
- [38] I. Chiavenato. *Iniciación a la administración financiera*. Iniciación a la administración de empresas. McGraw-Hill, 1993. ISBN 9789701003206. URL <https://books.google.es/books?id=c4jMAAAACAAJ>.
- [39] B. Chopard and M. Tomassini. *An Introduction to Metaheuristics for Optimization*. Natural Computing Series. Springer International Publishing, 2018.
- [40] N. Chung, B. Miasojedow, M. Startek, and A. Gambin. Jaccard/Tanimoto similarity test and estimation methods for biological presence-absence data. *BMC Bioinformatics*, 20, 12 2019. doi: 10.1186/s12859-019-3118-5.
- [41] M. Cobo, A. López-Herrera, E. Herrera-Viedma, and F. Herrera. An approach for detecting, quantifying, and visualizing the evolution of a research field: A practical application to the Fuzzy Sets Theory field. *J. Informetrics*, 5:146–166, 01 2011. doi: 10.1016/j.joi.2010.10.002.
- [42] C. A. C. Coello. A short tutorial on evolutionary multiobjective optimization. evolutionary multi-criterion optimization. In *First International Conference, EMO*, pages 21–40, 2001.
- [43] C. A. C. Coello. *Introducción a la Computación Evolutiva (Notas de Curso)*. Departamento de Ingeniería Eléctrica Sección de Computación Av. Instituto Politécnico Nacional No. 2508 Col. San Pedro Zacatenco México, 2004.
- [44] C. A. C. Coello. Introducción a la optimización multiobjetivo usando metaheurísticas. Technical report, CINVESTAV-IPN, Av. IPN No. 2508 Col. San Pedro Zacatenco México, D.F. 07300, 2005. URL <http://elavio2005.uniandes.edu.co/MiniCursosTutoriales/Coello1.pdf>.
- [45] C. A. C. Coello. Algoritmos evolutivos multiobjetivo: Resultados recientes y problemas abiertos. In *New Trends on Intelligent Systems and Soft Computing*, 2006.
- [46] C. A. Coello Coello. Recent research topics in a evolutionary multiobjective optimization. In J. Garibaldi, C. Wagner, T. Back, H.-K. Lam, M. Cottrell, K. Madani, and K. Warwick, editors, *Computational Intelligence*, pages 90–120, Cham, 2023. Springer International Publishing.
- [47] C. A. Coello Coello and L. V. Santana Quintero. An introduction to evolutionary computation and some of its applications in economics and finance. *Revista*, 2:3–26, 2006.
- [48] B. Colombian Stock Market. Mercado de renta variable [accessed november 2018]. <https://www.bvc.com.co/pps/tibco/portalbvc>, 2008. URL <https://www.bvc.com.co/pps/tibco/portalbvc/Home/Mercados/enlinea/acciones#>.

- [49] F. E. Colomine Duran, C. Cotta, and A. J. Fernández-Leiva. Algoritmos evolutivos multiobjetivo para selección de carteras de inversión con restricciones de cardinalidad. In *Enrique Alba, Francisco Chicano, Francisco Luna y Gabriel Luque (Eds.). Actas del VI Congreso Espanol sobre Metaheúísticas, Algoritmos Evolutivos y Bioinspirados. MAEB'09.*, pages 223–230, Málaga, Apr. 2009. ISBN 97884-691-6813-4.
- [50] F. E. Colomine Duran, C. Cotta, and A. J. Fernández-Leiva. Evolutionary optimization for multiobjective portfolio selection under markowitz's model with application to the caracas stock exchange. In R. Chiong, editor, *Nature-Inspired Algorithms for Optimisation*, pages 489–509, Berlin, Heidelberg, 2009. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-642-00267-0. doi: 10.1007/978-3-642-00267-0_18.
- [51] F. E. Colomine Duran, C. Cotta, and A. J. Fernández-Leiva. A comparative study of multi-objective evolutionary algorithms to optimize the selection of investment portfolios with cardinality constraints. In C. Di Chio et al., editors, *Applications of Evolutionary Computation: EvoApplications 2012*, volume 7248 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 165–173. Springer, Berlin, Heidelberg, 2012. ISBN 978-3-642-29178-4. doi: 10.1007/978-3-642-29178-4_17.
- [52] F. E. Colomine Duran, C. Cotta, and A. J. Fernández-Leiva. Cartografía de un Subcampo Científico: Un Estudio sobre la Optimización de Carteras de Inversión. In *Enrique Alba, Francisco Chicano, Francisco Luna y Gabriel Luque (Eds.). Actas del Congreso Espanol sobre Metaheúísticas, Algoritmos Evolutivos y Bioinspirados. MAEB'21*, volume MAEB 2020-2021., pages 517–522, Malaga, Spain, 2021. ISBN 978-84-09-30514-8.
- [53] F. E. Colomine Duran, C. Cotta, and A. J. Fernández-Leiva. Algoritmos Evolutivos con Memoria Elite para la Selección de Carteras de Inversión. In *Enrique Alba, Francisco Chicano, Francisco Luna y Gabriel Luque (Eds.). Actas del Congreso Espanol sobre Metaheúísticas, Algoritmos Evolutivos y Bioinspirados. MAEB'21*, volume MAEB 2020-2021., pages 429–433, Malaga, Spain, 2021. ISBN 978-84-09-30514-8.
- [54] F. E. Colomine Duran, C. Cotta, and A. J. Fernández-Leiva. Sensitivity to Partial Lamarckism in a Memetic Algorithm for Constrained Portfolio Optimization. In *Evo* 2021 – Late-Breaking Abstracts Volume: A.M. Mora, A.I. Esparcia-Alcazar(eds.)*, number arXiv:2106.11804 in 1, pages 9–12, Sevilla, Spain, 2021. doi: 10.48550/arXiv.2106.11804.
- [55] F. E. Colomine Duran, C. Cotta, and A. J. Fernández-Leiva. Mapping the Field of Metaheuristic and Bioinspired Portfolio Optimization. In *Evo* 2022 – Late-Breaking Abstracts Volume: A.M. Mora, A.I. Esparcia-Alcazar(eds.)*, number arXiv:2208.00555 in 1, Madrid, Spain, 2022. doi: 10.48550/arXiv.2208.00555.
- [56] F. E. Colomine Duran, C. Cotta, and A. J. Fernández-Leiva. Epoch Based Application of Problem Aware Operators in a Multiobjective Memetic Algorithm for portfolio Optimization. In J. Correia, S. Smith, and R. Qaddoura, editors, *Applications of Evolutionary Computation*, pages 210–222, Cham, 2023. Springer Nature Switzerland. ISBN 978-3-031-30229-9. doi: 10.1007/978-3-031-30229-9_14.
- [57] F. E. Colomine Duran, C. Cotta, and A. J. Fernández-Leiva. A multiobjective memetic algorithm for the markowitz model based on informed decisions. *Computing and Informatics*, 44, 2025. ISSN 1335-9150. Accepted.
- [58] D. Corne, J. Knowles, and M. Oates. The pareto envelope based selection algorithm for multiobjective optimization. *Proceedings of the Parallel Problem Solving from Nature VI Conference*, 2000.

- [59] J. A. Corredor Higuera. Trece años de vigencia de la ley 964 de 2005: análisis de sus efectos en el mercado de valores y puntos para tener en cuenta para futuras modificaciones. *Prolegomenos*, 22(43):2019, feb. 2020. doi: 10.18359/prole.3398. URL <https://revistas.umng.edu.co/index.php/dere/article/view/3398>.
- [60] C. Cotta. Memetic algorithms with partial lamarckism for the shortest common supersequence problem. In J. Mira and J. Álvarez, editors, *Artificial Intelligence and Knowledge Engineering Applications: A Bioinspired Approach*, volume 3562 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 84–91, Berlin, Heidelberg, 2005. Springer-Verlag.
- [61] C. Cotta. Scatter search with path relinking for phylogenetic inference. *European Journal of Operational Research*, 169(2):520 – 532, 2006.
- [62] C. Cotta and J. Troya. A hybrid genetic algorithm for the 0-1 multiple knapsack problem. In G. Smith, N. Steele, and R. Albrecht, editors, *Artificial Neural Nets and Genetic Algorithms 3*, pages 251–255, Wien New York, 1998. Springer-Verlag.
- [63] C. Cotta, L. Mathieson, and P. Moscato. Memetic Algorithms. In R. Martí, P. M. Pardalos, and M. G. C. Resende, editors, *Handbook of Heuristics*, pages 607–638. Springer, 2018.
- [64] T. G. Crainic and M. Toulouse. *Parallel Strategies for Meta-Heuristics*, pages 475–513. Springer US, Boston, MA, 2003.
- [65] Y. Crama and M. Schyns. Simulated annealing for complex portfolio selection problems. *European Journal of Operational Research*, 150(3):546 – 571, 2003. ISSN 0377-2217. doi: 10.1016/S0377-2217(02)00784-1. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221702007841>. Financial Modelling.
- [66] M. P. Cuéllar. *Sistemas Evolutivos para entrenamiento y optimización de modelos neuronales recurrentes dinámicos. Aplicación en modelado y predicción de series de datos*. PhD thesis, Universidad de Granada, 2006.
- [67] K. Deb. Genetic algorithm in search and optimization: the technique and applications. In *International Workshop on Soft Computing and Intelligent Systems*, 1998. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:17676860>.
- [68] K. Deb and H. Jain. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based nondominated sorting approach, part i: Solving problems with box constraints. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 18(4):577–601, 2014. doi: 10.1109/TEVC.2013.2281535.
- [69] K. Deb, S. Agrawal, A. Pratap, and T. Meyarivan. A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: NSGA-II, 2000. KanGAL report 200001, Indian Institute of Technology, Kanpur, India, 2000.
- [70] K. Deb, R. Steuer, R. Tewari, and R. Tewari. Bi-objective portfolio optimization using a customized hybrid nsga-ii procedure. In R. Takahashi, K. Deb, E. Wanner, and S. Greco, editors, *Evolutionary Multi-Criterion Optimization*, volume 6576 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 358–373. Springer Berlin Heidelberg, 2011. ISBN 978-3-642-19892-2. doi: 10.1007/978-3-642-19893-9_25. URL http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-19893-9_25.
- [71] G.-F. Deng, W.-T. Lin, and C.-C. Lo. Markowitz-based portfolio selection with cardinality constraints using improved particle swarm optimization. *Expert Systems with Applications*, 39(4):4558 – 4566, 2012. ISSN 0957-4174. doi: 10.1016/j.eswa.2011.09.129. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417411014527>.

- [72] S. Deng, T. Mitsubuchi, and A. Sakurai. Stock price change rate prediction by utilizing social network activities. *The Scientific World Journal*, 2014, 2014. ISSN 1537744X. doi: 10.1155/2014/861641. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84899426165&doi=10.1155%2f2014%2f861641&partnerID=40&md5=673f63fae3728a433d260f6ea6d44d74>.
- [73] B. Dengiz and C. Alabas. Simulation optimization using tabu search. In *Proceedings of the 32nd conference on Winter simulation*, pages 805–810. Society for Computer Simulation International, 2000.
- [74] J. Doering, R. Kizys, A. A. Juan, A. Fito, and O. Polat. Metaheuristics for rich portfolio optimisation and risk management: Current state and future trends. *Operations Research Perspectives*, 6:100121, 2019. ISSN 2214-7160.
- [75] M. Drenovak, V. Ranković, M. Ivanović, B. Urošević, and R. Jelic. Market risk management in a post-basel II regulatory environment. *European Journal of Operational Research*, 257(3):1030–1044, 2017. ISSN 03772217. doi: 10.1016/j.ejor.2016.08.034. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84995476949&doi=10.1016%2fj.ejor.2016.08.034&partnerID=40&md5=c36a02f2839ca134d98be23c31dec968>.
- [76] L. Egghe. Theory and practice of the g-index. *Scientometrics*, 69, 04 2006. doi: 10.1007/s11192-006-0144-7.
- [77] A. P. Engelbrecht. *Fundamentals of computational swarm intelligence*. Wiley, Hoboken, NJ, 2005. ISBN 978-0-470-09191-3.
- [78] M. Erickson, A. Mayer, and J. Horn. The niched pareto genetic algorithm 2 applied to the design of groundwater remediation systems. In *EMO '01: Proceedings of the First International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*, pages 681–695, London, UK, 2001. Springer-Verlag.
- [79] I. Estalayo, J. D. Ser, E. Osaba, M. N. Bilbao, K. Muhammad, A. Gálvez, and A. Iglesias. Return, Diversification and Risk in Cryptocurrency Portfolios using Deep Recurrent Neural Networks and Multi-Objective Evolutionary Algorithms. In *2019 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, pages 755–761, 2019. doi: 10.1109/CEC.2019.8790121.
- [80] S. Farzi, A. Shavazi, and A. Pandari. Using quantum-behaved particle swarm optimization for portfolio selection problem. *International Arab Journal of Information Technology*, 10(2), 2013. ISSN 16833198. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84862690373&partnerID=40&md5=9f997f7db7fdeed6d062facf25390e45>.
- [81] E. Fernandez, C. Santillán, G. Zarate, and L. Cruz Reyes. Hybrid metaheuristic approach for handling many objectives and decisions on partial support in project portfolio optimisation. *Information Sciences*, 315, 09 2015. doi: 10.1016/j.ins.2015.03.064.
- [82] E. Fernandez, J. Navarro, E. Solares, and C. Coello. A novel approach to select the best portfolio considering the preferences of the decision maker. *Swarm and Evolutionary Computation*, 46, 02 2019. doi: 10.1016/j.swevo.2019.02.002.
- [83] E. Fernandez, J. Navarro, E. Solares, and C. Coello Coello. Using evolutionary computation to infer the decision makers preference model in presence of imperfect knowledge: A case study in portfolio optimization. *Swarm and Evolutionary Computation*, 54:100648, 2020. ISSN 2210-6502. doi: 10.1016/j.swevo.2020.100648. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2210650219307151>.

- [84] F. Ferreira, G. Hanaoka, F. Paiva, and R. Cardoso. Parallel MOEAs for Combinatorial Multiobjective Optimization Model of Financial Portfolio Selection. In *2018 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, pages 1–8, 07 2018. doi: 10.1109/CEC.2018.8477688.
- [85] P. Filipiak and P. Lipinski. Dynamic portfolio optimization in ultra-high frequency environment. *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, 10199 LNCS:34–50, 2017. ISSN 03029743. doi: 10.1007/978-3-319-55849-3_3. URL https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85017535072&doi=10.1007%2f978-3-319-55849-3_3&partnerID=40&md5=8fcb93fc34d15afc2da972fb4e88229e.
- [86] R. Fletcher. *Practical methods of optimization*. Wiley-Interscience, New York, NY, USA, 1987.
- [87] C. M. Fonseca and P. J. Fleming. Genetic algorithms for multiobjective optimization: Formulation, discussion and generalization. In *Genetic Algorithms: Proceedings of the Fifth International Conference*, pages 416–423, 1993.
- [88] O. E. Gais. Sistemas y poblaciones conceptuales. el paradigma evolucionista neo-darwiniano. *Revista de Filosofía*, pages pp. 53–69, nov. 2016. doi: 10.5354/0718-4360.1987.44273. URL <https://revistafilosofia.uchile.cl/index.php/RDF/article/view/44273>.
- [89] J. E. Gallardo and C. Cotta. A GRASP-based memetic algorithm with path relinking for the far from most string problem. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 41:183 – 194, 2015.
- [90] A. Galvez Toro and M. Amezcua. El factor h de Hirsch: the h-index: Una actualización sobre los metodos de evaluacion de los autores y sus aportaciones en publicaciones Cientificas. *Index de Enfermería*, 15:38 – 43, 00 2006. ISSN 1132-1296.
- [91] R. M. Garner, J. A. Hirsch, F. C. Albuquerque, and K. M. Fargen. Bibliometric indices: defining academic productivity and citation rates of researchers, departments and journals. *Journal of NeuroInterventional Surgery*, 10(2):102–106, 2018. ISSN 1759-8478. doi: 10.1136/neurintsurg-2017-013265. URL <https://jnris.bmj.com/content/10/2/102>.
- [92] J.-B. Geng, Q. Ji, Y. Fan, and F. Shaikh. Optimal lng importation portfolio considering multiple risk factors. *Journal of Cleaner Production*, 151:452–464, 2017. ISSN 09596526. doi: 10.1016/j.jclepro.2017.03.053. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85016467171&doi=10.1016%2fj.jclepro.2017.03.053&partnerID=40&md5=d7f8232fc453e0494c87c81e51338a8c>.
- [93] F. Glover. Future paths for integer programming and links to artificial intelligence. *Computers & Operations Research*, 13(5):533–549, 1986.
- [94] F. Glover and G. A. Kochenberger. *Handbook of Metaheuristics*. International series in operations research & management science. Kluwer Academic Publishers, 2003.
- [95] F. Glover, M. Laguna, and R. Marti. Principles of tabu search. *Approximation Algorithms and Metaheuristics*, 23:1–12, 2007.
- [96] F. W. Glover and M. Laguna. *Tabu Search*. Number v. 1 in Tabu Search. Springer US, 1998.
- [97] D. E. Goldberg. *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Artificial Intelligence. Addison-Wesley, 1989.
- [98] D. E. Goldberg and K. Deb. A comparative analysis of selection schemes used in genetic algorithms. *Foundations of genetic algorithms*, 1:69–93, 1991.

- [99] M. Gomez-Barrero, J. Galbally, J. Fierrez, and J. Ortega-Garcia. Hill-climbing attack based on the uphill simplex algorithm and its application to signature verification. In *Biometrics and ID Management*, pages 83–94. Springer, 2011.
- [100] C. Granger and P. Newbold. Spurious regressions in econometrics. *Journal of Econometrics*, 2(2):111–120, 1974. ISSN 0304-4076. doi: 10.1016/0304-4076(74)90034-7. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0304407674900347>.
- [101] N. Grishina, C. Lucas, and P. Date. Prospect theory based portfolio optimization an empirical study and analysis using intelligent algorithms. *Quantitative Finance*, pages 1–15, 2016. ISSN 14697688. doi: 10.1080/14697688.2016.1149611. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84978696538&doi=10.1080%2f14697688.2016.1149611&partnerID=40&md5=38fb07cb78a1b85afa3ba46b8842d1c3>.
- [102] A. Guerreiro and C. Fonseca. Hypervolume sharpe-ratio indicator: Formalization and first theoretical results. *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, 9921: 814–823, 2016. ISSN 03029743. doi: 10.1007/978-3-319-45823-6_76. URL https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84988521042&doi=10.1007%2f978-3-319-45823-6_76&partnerID=40&md5=a7e1d067ee1309fa571901c515bc0d97.
- [103] J. A. Gutierrez Janampa and j. tapia. Liquidez y rentabilidad. una revisión conceptual y sus dimensiones. *Revista de Investigación Valor Contable*, 3(1):30, mar. 2020. doi: 10.17162/rivc.v3i1.1229. URL https://rivc.upeu.edu.pe/index.php/ri_vc/article/view/1229.
- [104] A. Hamdi, A. Karimi, F. Mehrdoust, and S. Belhaouari. Portfolio Selection Problem Using CVaR Risk Measures Equipped with DEA, PSO, and ICA Algorithms. *Mathematics*, 10(15), 2022. ISSN 22277390. doi: 10.3390/math10152808. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85136777961&doi=10.3390%2fmath10152808&partnerID=40&md5=2388f450495ae6ba24eba19865743136>.
- [105] M. Hansen and A. Jaszkiwicz. Evaluating the quality of approximations to the nondominated set. Technical Report IMM-REP-1998-7, Institute of Mathematical Modelling Technical University of Denmark, 1998.
- [106] J. A. Hartigan and M. A. Wong. Algorithm AS 136: A K-Means Clustering Algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, 28(1):100–108, 1979. ISSN 00359254,14679876.
- [107] G. He and X.-L. Lu. An improved qpso algorithm and its application in fuzzy portfolio model with constraints. *Soft Computing*, 25(12):7695–7706, 2021. ISSN 14327643. doi: 10.1007/s00500-021-05688-3. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85102206577&doi=10.1007%2fs00500-021-05688-3&partnerID=40&md5=11c3b79603ca99bb782471409a2d6834>.
- [108] J. Hernandez Mejia, O. Schatze, O. Cuate, A. Lara, and K. Deb. RDS-NSGA-II: a memetic algorithm for reference point based multi-objective optimization. *Engineering Optimization*, 49(5):828–845, 2017. doi: 10.1080/0305215X.2016.1211127. URL <https://doi.org/10.1080/0305215X.2016.1211127>.
- [109] J. H. Holland. Adaptation in natural and artificial systems. Technical report, Ann Harbor: University of Michigan Press, 1975.

- [110] W. Hong, P. Yang, and K. Tang. Evolutionary computation for large-scale multi-objective optimization: A decade of progresses. *International Journal of Automation and Computing*, 18, 01 2021. doi: 10.1007/s11633-020-1253-0.
- [111] C. Houck, J. Joines, M. Kay, and J. Wilson. Empirical investigation of the benefits of partial Lamarckianism. *Evolutionary Computation*, 5(1):31–60, 1997.
- [112] J. Huxley and H. D. B. Kettlewell. *Darwin*. Salvat, 1987.
- [113] A. Ibrahim, S. Rahnamayan, M. Vargas Martin, and K. Deb. Fusion of Many-Objective Non-dominated Solutions Using Reference Points. In *Lecture Notes in Computer Science*, volume 10173, pages 314–328, 02 2017. doi: 10.1007/978-3-319-54157-0_22.
- [114] L. Ingber. Adaptive simulated annealing (ASA): Lessons learned. *Control and cybernetics*, 25: 33–54, 1996.
- [115] H. Ishibuchi and S. Kaige. Implementation of simple multiobjective memetic algorithms and its application to knapsack problems. *International Journal of Hybrid Intelligent Systems*, 1(1-2): 22–35, 2004. doi: 10.3233/HIS-2004-11-205. URL <https://journals.sagepub.com/doi/abs/10.3233/HIS-2004-11-205>.
- [116] M. Jacomy, T. Venturini, S. Heymann, and M. Bastian. ForceAtlas2, a Continuous Graph Layout Algorithm for Handy Network Visualization Designed for the Gephi Software. *PLOS ONE*, 9 (6):1–12, 06 2014. doi: 10.1371/journal.pone.0098679. URL <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0098679>.
- [117] H. Jalota, M. Thakur, and G. Mittal. Modelling and constructing membership function for uncertain portfolio parameters: A credibilistic framework. *Expert Systems with Applications*, 71:40–56, 2017. ISSN 09574174. doi: 10.1016/j.eswa.2016.11.014. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84998915589&doi=10.1016%2fj.eswa.2016.11.014&partnerID=40&md5=a61629ace59e355655cf172c02434aed>.
- [118] A. Jaskiewicz, H. Ishibuchi, and Q. Zhang. *Multiobjective memetic algorithms*, pages 201–217. Studies in Computational Intelligence. Springer, 2012. ISBN 9783642232466. doi: 10.1007/978-3-642-23247-3_13.
- [119] H. Jeffrey, N. Nicholas, and G. David E. A niched pareto genetic algorithm for multiobjective optimization. In *Proceedings of the First IEEE Conference on Evolutionary Computation, IEEE World Congress on Computational Intelligence*, pages 82–87. IEEE Service Center, 1994.
- [120] M. Jensen and K. Murphy. Performance Pay And Top Management Incentives. Papers 88-04, Rochester, Business - Managerial Economics Research Center, 1988. URL <https://ideas.repec.org/p/fth/robume/88-04.html>.
- [121] D. Jewan, R. Guo, and G. Witten. Optimal bespoke cdo design via nsga-ii. *Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences*, 2009, 2009. ISSN 11739126. doi: 10.1155/2009/925169. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-65649138456&doi=10.1155%2f2009%2f925169&partnerID=40&md5=64a00d38e92c976c128d2294249e5742>.
- [122] Y. Jin, R. Qu, and J. Atkin. A population-based incremental learning method for constrained portfolio optimisation. In J. T., W. S.M., W. F. Zaharie D., N. V., I. T., and P. D., editors, *Proceedings - 16th International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing, SYNASC 2014*, pages 212–219. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2015. ISBN 9781479984480. doi: 10.1109/SYNASC.2014.36. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84924231725&doi=10.1109%2fSYNASC.2014.36&partnerID=40&md5=271de71dad467f271c876f483811dcf3>.

- [123] P. Jorion. *Valor en riesgo : el nuevo paradigma para el control de riesgos con derivados*. Limusa Grupo Noriega Editores, Mexico, edición corregida. edition, 2009. ISBN 9789681861117.
- [124] L. Kang, X. Zhu, J. Wu, H. Sun, S. Siriya, and T. Kanokvate. Departure time optimization of last trains in subway networks: Mean-variance model and gsa algorithm. *Journal of Computing in Civil Engineering*, 29(6), 2015. ISSN 08873801. doi: 10.1061/(ASCE)CP.1943-5487.0000407. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84945125424&doi=10.1061%2f%28ASCE%29CP.1943-5487.0000407&partnerID=40&md5=e2bf16690c1398929138eb6057123844>.
- [125] M. Khalidji, M. Zeiaee, A. Taei, M. R. Jahed-Motlagh, and H. Khaloozadeh. Dynamically weighted continuous ant colony optimization for biobjective portfolio selection using value-at-risk. In *2009 Third Asia International Conference on Modelling Simulation*, pages 230–235, 2009. ISBN 9780769536484. doi: 10.1109/AMS.2009.133. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-70349746780&doi=10.1109%2fAMS.2009.133&partnerID=40&md5=4d1cb81aab62960ca1061580d7ab7da9>.
- [126] A. Khan, X. Cao, B. Liao, and A. Francis. Bio-inspired machine learning for distributed confidential multi-portfolio selection problem. *Biomimetics*, 7(3), 2022. ISSN 23137673. doi: 10.3390/biomimetics7030124. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85138574359&doi=10.3390%2fbiomimetics7030124&partnerID=40&md5=61dd6c0bba9e038954380bfc0eefcf67>.
- [127] F. Knight. *Risk, Uncertainty, and Profit*. Hart, Schaffner & Marx; Houghton Mifflin Company, 1921. URL <http://www.econlib.org/LIBRARY/Knight/knRUP.html>.
- [128] J. Knowles and D. Corne. M-paes: A memetic algorithm for multiobjective optimization. *Proceedings of the IEEE Conference on Evolutionary Computation, ICEC*, 1, 09 2000. doi: 10.1109/CEC.2000.870313.
- [129] J. Knowles and D. Corne. *Memetic Algorithms for Multiobjective Optimization: Issues, Methods and Prospects*, pages 313–352. Springer Nature, United States, 2004.
- [130] J. D. Knowles and D. W. Corne. Approximating the nondominated front using the pareto archived evolution strategy. *Evolutionary Computation*, 8:149–172, 2000.
- [131] J. Koza. *Genetic Programming: On the Programming of Computers by Means of Natural Selection*. A Bradford book. Bradford, 1992. ISBN 9780262111706. URL <https://books.google.co.ve/books?id=Bhtxo60BV0EC>.
- [132] N. Krasnogor. Memetic algorithms. In *In: Metaheuristics in Neural Networks Learning*, pages 225–247. Springer, 2006.
- [133] H. Kumar and S. Yadav. Using reference point-based nsga-ii to system reliability. *International Journal of Computer Sciences and Engineering*, 5:7–14, 12 2017. doi: 10.26438/ijcse/v5i12.714.
- [134] R. Lara-Cabrera, C. Cotta, and A. Fernández-Leiva. An analysis of the structure and evolution of the scientific collaboration network of computer intelligence in games. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 395:523–536, 2014.
- [135] A. J. Lasa Crespo. Construcción de la frontera eficiente de portafolios de inversión aplicación al caso de México. *Denarius*, 1(10):131, jun. 2005. URL <https://denarius.izt.uam.mx/index.php/denarius/article/view/289>.
- [136] E. Lehmann and H. D’Abrera. *Nonparametrics: Statistical Methods Based on Ranks*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1998.

- [137] K. Li, K. Deb, and Q. Zhang. Evolutionary multiobjective optimization with hybrid selection principles. In *2015 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, pages 900–907, 05 2015. doi: 10.1109/CEC.2015.7256986.
- [138] K. Liagkouras and K. Metaxiotis. A new probe guided mutation operator and its application for solving the cardinality constrained portfolio optimization problem. *Expert Systems with Applications*, 41(14):6274–6290, 2014. ISSN 09574174. doi: 10.1016/j.eswa.2014.03.051. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84901396385&doi=10.1016%2fj.eswa.2014.03.051&partnerID=40&md5=0f3411385ba7b6066076d53016c5c150>.
- [139] K. Liagkouras and K. Metaxiotis. A new efficiently encoded multiobjective algorithm for the solution of the cardinality constrained portfolio optimization problem. *Annals of Operations Research*, pages 1–39, 2016. ISSN 02545330. doi: 10.1007/s10479-016-2377-z. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84995758182&doi=10.1007%2fs10479-016-2377-z&partnerID=40&md5=b7427d42e1b58d9dde4bab6900b904d2>.
- [140] D. Lin, X. Li, and M. Li. A genetic algorithm for solving portfolio optimization problems with transaction costs and minimum transaction lots. In *ICNC (3)*, pages 808–811, 2005.
- [141] J. Lintner. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *The Review of Economics and Statistics*, 47(1):222–224, 1965. doi: 10.2307/1924119.
- [142] Y.-J. Liu and W.-G. Zhang. A multi-period fuzzy portfolio optimization model with minimum transaction lots. *European Journal of Operational Research*, 242(3): 933–941, 2015. ISSN 03772217. doi: 10.1016/j.ejor.2014.10.061. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84920545710&doi=10.1016%2fj.ejor.2014.10.061&partnerID=40&md5=9bd577949ef915fb19079b818a801fd6>.
- [143] S. P. Lloyd. Least squares quantization in PCM. Technical Report RR-5497, Bell Lab, 1957.
- [144] M. Locatelli, E. Seghezzi, L. Pellegrini, L. Tagliabue, and G. Di Giuda. Exploring natural language processing in construction and integration with building information modeling: A scientometric analysis. *Buildings*, 11:583, 11 2021. doi: 10.3390/buildings11120583.
- [145] K. Lwin, R. Qu, and J. Zheng. Multi-objective scatter search with external archive for portfolio optimization. In *IJCCI 2013 - Proceedings of the 5th International Joint Conference on Computational Intelligence*, pages 111–119, 2013. ISBN 9789898565778. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84887502204&partnerID=40&md5=42228a0ebd37c879733efd6d4f1cdbcba>.
- [146] K. Lwin, R. Qu, and B. MacCarthy. Mean-var portfolio optimization: A nonparametric approach. *European Journal of Operational Research*, 260(2):751–766, 2017. ISSN 03772217. doi: 10.1016/j.ejor.2017.01.005. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85009948944&doi=10.1016%2fj.ejor.2017.01.005&partnerID=40&md5=cb0751c53c5334f14a0fd49cbb267803>.
- [147] J. B. MacQueen. Some methods for classification and analysis of multivariate observations. In L. M. Le Cam and N. J., editors, *Fifth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability*, volume 1, pages 281–297, California, 1967. University of California Press.
- [148] H. B. Mann and D. R. Whitney. On a Test of Whether one of Two Random Variables is Stochastically Larger than the Other. *The Annals of Mathematical Statistics*, 18(1):50 – 60, 1947.

- [149] Y. Marinakis. Multiple phase neighborhood search-GRASP for the capacitated vehicle routing problem. *Expert Systems with Applications*, 39(8):6807–6815, 2012.
- [150] H. M. Markowitz. Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7:77–91, 1952. doi: 10.2307/2975974.
- [151] M. Mehlawat and P. Gupta. Fuzzy chance-constrained multiobjective portfolio selection model. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 22(3):653–671, 2014. ISSN 10636706. doi: 10.1109/TFUZZ.2013.2272479. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84893674594&doi=10.1109%2fTFUZZ.2013.2272479&partnerID=40&md5=e9e6ec3e528f0c67bdd3bdc3a7a18c1d>.
- [152] P. Merz. *Memetic algorithms for combinatorial optimization problems: fitness landscapes and effective search strategies*. PhD thesis, University of Siegen, Germany, 2000.
- [153] S. Mishra, G. Panda, and R. Majhi. Constrained portfolio asset selection using multiobjective bacteria foraging optimization. *Operational Research*, 14(1):113–145, 2014. ISSN 11092858. doi: 10.1007/s12351-013-0138-1. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84896518179&doi=10.1007%2fs12351-013-0138-1&partnerID=40&md5=9d17dd3e257b563f66bb24e070482512>.
- [154] S. Mishra, G. Panda, and R. Majhi. A comparative performance assessment of a set of multiobjective algorithms for constrained portfolio assets selection. *Swarm and Evolutionary Computation*, 16:38–51, 2014. ISSN 22106502. doi: 10.1016/j.swevo.2014.01.001. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84897067954&doi=10.1016%2fj.swevo.2014.01.001&partnerID=40&md5=a78b1860f12edc2c6b081d9c860e7795>.
- [155] G. Mittal and M. Mehlawat. A multiobjective portfolio rebalancing model incorporating transaction costs based on incremental discounts. *Optimization*, 63(10):1595–1613, 2014. ISSN 02331934. doi: 10.1080/02331934.2014.891032. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84905110235&doi=10.1080%2f02331934.2014.891032&partnerID=40&md5=1d65362975f0592411e2647e2b4d9878>.
- [156] C. Y. Morimoto, A. Pozo, and M. C. P. de Souto. A review of evolutionary multi-objective clustering approaches, 2022. URL <https://arxiv.org/abs/2110.08100>.
- [157] P. Moscato. On Evolution, Search, Optimization, Genetic Algorithms and Martial Arts: Towards Memetic Algorithms. Technical Report Caltech Concurrent Computation Program, Report. 826, California Institute of Technology, Pasadena, California, USA, 1989.
- [158] P. Moscato and C. Cotta. A gentle introduction to memetic algorithms. In *Handbook of metaheuristics*, pages 105–144. Springer, 2003.
- [159] P. Moscato and C. Cotta. An accelerated introduction to memetic algorithms. In M. Gendreau and J.-Y. Potvin, editors, *Handbook of Metaheuristics*, volume 272 of *International Series in Operations Research & Management Science*, pages 275–309. Springer International Publishing AG, 2019.
- [160] P. Moscato, L. Buriol, and C. Cotta. On the analysis of data derived from mitochondrial dna: Kolmogorov and a traveling salesman give their opinion. In D. Corne et al., editors, *Advances in Nature Inspired Computation: the PPSN VII Workshops*, pages 37–38. PEDAL, University of Reading, 2002.
- [161] R. Navarro. *Meta-heurísticas Híbridas para Optimización Mono-objetivo y Multi-objetivo.Paralelización y Aplicaciones*. PhD thesis, Universidad de Almería, 2006.

- [162] J. Nelder and R. Mead. A simplex method for function minimization. *The Computer Journal*, 7: 308–313, 1965.
- [163] F. Neri and C. Cotta. Memetic algorithms and memetic computing optimization: A literature review. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2:1–14, 2012.
- [164] F. Neri, C. Cotta, and P. Moscato, editors. *Handbook of Memetic Algorithms*, volume 379 of *Studies in Computational Intelligence*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2012.
- [165] S. Nesmachnow. Una versión paralela del algoritmo evolutivo para optimización multiobjetivo nsga-ii y su aplicación al diseño de redes de comunicaciones confiables. Technical report, Centro de Cálculo, Instituto de Computación. Universidad de la República, Uruguay., 2004.
- [166] T. Nguyen, L. Gordon-Brown, A. Khosravi, D. Creighton, and S. Nahavandi. Fuzzy portfolio allocation models through a new risk measure and fuzzy sharpe ratio. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 23(3):656–676, 2015. ISSN 10636706. doi: 10.1109/TFUZZ.2014.2321614. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84930940216&doi=10.1109%2fTFUZZ.2014.2321614&partnerID=40&md5=d3e20d8b06ee086bfe446a2df9eefa5a>.
- [167] G. Pai. Fuzzy decision theory based metaheuristic portfolio optimization and active rebalancing using interval type-2 fuzzy sets. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 25(2):377–391, 2017. ISSN 10636706. doi: 10.1109/TFUZZ.2016.2633972. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85018468321&doi=10.1109%2fTFUZZ.2016.2633972&partnerID=40&md5=08f78f7aa8538a7022f2ec66557e9c47>.
- [168] C. H. Papadimitriou and K. Steiglitz. *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*. Dover Books on Computer Science. Dover Publications, 2013.
- [169] V. Pareto. *Cours d’Economie Politique Professe a l’Universite de Lausanne*. F. Rouge, 1896. ISBN 9780608373911. URL <https://books.google.co.ve/books?id=KjnhnQAACAAJ>.
- [170] V. Perez. Cuando Charles Darwin publica el Origen de las Especies (1859). *Anales del Instituto de la Patagonia*, 37:51 – 60, 00 2009. ISSN 0718-686X. URL http://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0718-686X2009000200006&nrm=iso.
- [171] M. Pinelis and D. Ruppert. Machine learning portfolio allocation. *The Journal of Finance and Data Science*, 8:35–54, 2022. doi: 10.1016/j.jfds.2021.12.001.
- [172] G. Pólya. *How to Solve It*. Princeton University, 1945.
- [173] G. T. Pulido. Optimización multiobjetivo usando un micro algoritmo genético. Master’s thesis, Universidad Veracruzana, 2001.
- [174] D. Quintana, S. García-Rodríguez, S. Cincotti, and P. Isasi. Combining rmt-based filtering with time-stamped resampling for robust portfolio optimization. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 8(5):874–885, 2015. ISSN 18756891. doi: 10.1080/18756891.2015.1084707. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84942099010&doi=10.1080%2f18756891.2015.1084707&partnerID=40&md5=bfe8289dba0b1865158c4fc99ccded1e>.
- [175] M. N. R and M. K. V. Analysis of Road Accidents Using Data Mining Techniques. *International Journal of Engineering & Technology*, 7(3.10):40–44, 2018. ISSN 2227-524X. doi: 10.14419/ijet.v7i3.10.15626.

- [176] A. Ramedani, H. Didekhani, and A. Mehrabian. Scenario-based optimization robust model project portfolio selection under risk considerations. *Neural Computing and Applications*, 34(23):20589–20609, 2022. ISSN 09410643. doi: 10.1007/s00521-022-07434-8. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85139488584&doi=10.1007%2fs00521-022-07434-8&partnerID=40&md5=63921e84493b6e783a07aaf60b3bd51a>.
- [177] C. B. Reeves, editor. *Modern Heuristic Techniques for Combinatorial Problems*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1993.
- [178] T. Riaz, Y. Wang, and K.-B. Li. Multiple sequence alignment using tabu search. In *Proceedings of the second conference on Asia-Pacific bioinformatics-Volume 29*, pages 223–232. Australian Computer Society, Inc., 2004.
- [179] E. Rolland. A tabu search method for constrained real-number search: Applications to portfolio selection. Technical report, Dept. of accounting & management information systems, Ohio State University, Columbus, 1997.
- [180] S. A. Ross. The arbitrage theory of capital asset pricing. *Journal of Economic Theory*, 13(3): 341–360, 1976. doi: 10.1016/0022-0531(76)90046-6.
- [181] P. J. Rousseeuw. Silhouettes: a graphical aid to the interpretation and validation of cluster analysis. *Computational and Applied Mathematics*, 20:53–65, 1987.
- [182] A. B. Ruiz, R. Saborido Infantes, and M. Luque. A preference-based evolutionary algorithm for multiobjective optimization: The weighting achievement scalarizing function genetic algorithm. *Journal of Global Optimization*, 07 2014. doi: 10.1007/s10898-014-0214-y.
- [183] S. Sahu and B. Nayak. An adaptive genetic algorithm method for damage detection in structural elements. *Materials Today: Proceedings*, 2020.
- [184] L. Santana-Quintero and C. Coello. An introduction to evolutionary computation and some of its applications in economics and finance. *Revista Cuantitativa*, 2, 12 2006.
- [185] J. Santos and Y. Haimes. Applying the partitioned multiobjective risk method (PMRM) to portfolio selection. *Risk Analysis*, 24(3):697–713, 2004. ISSN 02724332. doi: 10.1111/j.0272-4332.2004.00469.x. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-3042795837&doi=10.1111%2fj.0272-4332.2004.00469.x&partnerID=40&md5=4f4d8643d4b3d693c3daab9fa2c7d846>.
- [186] J. D. Schaffer. Multiple objective optimization with vector evaluated geneticalgorithms. in genetic algorithms and their applications. In *Proceedings of the First International Conference on Genetic Algorithms*, pages 93–100, 1985.
- [187] Q. R. Sergio. Política financiera y bolsa de valores: Aplicación a una cartera. Master’s thesis, Universidad Nacional Experimental del Táchira, 1993.
- [188] W. F. Sharpe. Mutual fund performance. *Journal of Business.*, 39:119–138, 1966.
- [189] E. Silver. An overview of heuristic solution methods. *Journal of The Operational Research Society - J OPER RES SOC*, 55:936–956, 05 2004. doi: 10.1057/palgrave.jors.2601758.
- [190] A. Singhal. Modern information retrieval: A brief overview. *Bulletin of the IEEE Computer Society Technical Committee on Data Engineering*, 24(4):35–43, 2001.
- [191] S. Sivanandam and S. Deepa. *Introduction to Genetic Algorithms*. Springer Berlin Heidelberg, 2007.

- [192] F. J. Soltero, P. Fernández-Blanco, and J. I. Hidalgo. Collaborative multiobjective evolutionary algorithms in the search of better pareto fronts: An application to trading systems. *Applied Sciences*, 13(22), 2023. ISSN 2076-3417. doi: 10.3390/app132212485. URL <https://www.mdpi.com/2076-3417/13/22/12485>.
- [193] P. Somasundaram and M. Ramesh Babu. Risk-invoked self-scheduling of a genco in a day-ahead energy and spinning reserve market. *IEEJ Transactions on Electrical and Electronic Engineering*, 8(1):40–48, 2013. ISSN 19314973. doi: 10.1002/tee.21789. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84871848721&doi=10.1002%2ftee.21789&partnerID=40&md5=2884134ece55b7f294dc98bac2ce73ed>.
- [194] N. Srinivas and K. Deb. Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms. *Evolutionary Computation*, 2:221–248, 1994.
- [195] J. Stender, E. Hillebrand, and J. Kingdon. *Genetic Algorithms in Optimisation, Simulation and Modelling*. Frontiers in artificial intelligence and applications. IOS Press, 1994.
- [196] W. Sun and Y. X. Yuan. *Optimization Theory and Methods: Nonlinear Programming*. Springer Optimization and Its Applications. Springer, 2006.
- [197] X. Sun, J. Hao, and J. Li. Crude oil-import portfolio optimization based on interval prediction data. *Uncertainty and Operations Research*, pages 21–28, 2020. ISSN 2195996X. doi: 10.1007/978-981-15-5720-0_3. URL https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85125994721&doi=10.1007%2f978-981-15-5720-0_3&partnerID=40&md5=65bc63e6aedc5801b8fb95f1c4963d2a.
- [198] A. Sureka and P. R. Wurman. Using tabu best-response search to find pure strategy nash equilibria in normal form games. In *Proceedings of the fourth international joint conference on Autonomous agents and multiagent systems*, pages 1023–1029. ACM, 2005.
- [199] M. A. Tawhid and A. F. Ali. A hybrid grey wolf optimizer and genetic algorithm for minimizing potential energy function. *Memetic Computing*, 9(4):347–359, 2017.
- [200] J. L. Treynor and K. G. Mazuy. Can mutual funds outguess the market? In *Harvard Business Review* 44, 1966. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:166549943>.
- [201] M. M. Van Hulle. Hill-climbing, density-based clustering and equiprobabilistic topographic maps. *Journal of VLSI signal processing systems for signal, image and video technology*, 26(1-2):79–94, 2000.
- [202] M. Vasile and L. Ricciardi. *Multi Agent Collaborative Search*, pages 223–252. Springer International Publishing, Cham, 2017.
- [203] D. A. V. Veldhuizen and G. B. Lamont. Multiobjective evolutionary algorithms: Analyzing the state-of-the-art. *Evol. Comput.*, 8(2):125–147, 2000. doi: 10.1162/106365600568158.
- [204] M. Velez and J. A. Montoya. Metaheurísticos: Una alternativa para la solución de problemas combinatorios en administración de operaciones. *Revista EIA*, pages 99 – 115, 12 2007. ISSN 1794-1237. URL http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1794-12372007000200009&nrm=iso.
- [205] E. Vercher and J. Bermúdez. Portfolio optimization using a credibility mean-absolute semi-deviation model. *Expert Systems with Applications*, 42(20):7121–7131, 2015. ISSN 09574174. doi: 10.1016/j.eswa.2015.05.020. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84930615539&doi=10.1016%2fj.eswa.2015.05.020&partnerID=40&md5=47dc0fa0dc3b1f959a2040dc7f5fa88b>.

- [206] Y. Wang, Z. Zhang, L. Y. Zhang, J. Feng, J. Gao, and P. Lei. A genetic algorithm for constructing bijective substitution boxes with high nonlinearity. *Information Sciences*, 523:152 – 166, 2020.
- [207] J. M. Ware, I. D. Wilson, J. A. Ware, and C. B. Jones. A tabu search approach to automated map generalisation. In *Proceedings of the 10th ACM international symposium on Advances in geographic information systems*, pages 101–106. ACM, 2002.
- [208] D. Wolpert and W. Macready. No free lunch theorems for optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 1(67):67–82, 1997.
- [209] D. H. Wolpert and W. G. Macready. No free lunch theorems for optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 1(1):67–82, 1997.
- [210] yahoo Finance. Mutual funds center. 2011, 2011. URL <http://finance.yahoo.com/funds>.
- [211] X. Yin, Q. Ni, and Y. Zhai. A novel particle swarm optimization for portfolio optimization based on random population topology strategies. *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, 9140:164–175, 2015. ISSN 03029743. doi: 10.1007/978-3-319-20466-6_18. URL https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84947714758&doi=10.1007%2f978-3-319-20466-6_18&partnerID=40&md5=4da009f9b7bae432fb11c82b407c7d2b.
- [212] L. Zhang, S. Guo, Y. Zhu, and A. Lim. A tabu search algorithm for the safe transportation of hazardous materials. In *Proceedings of the 2005 ACM symposium on Applied computing*, pages 940–946. ACM, 2005.
- [213] Q. Zhang and H. Li. Moea/d: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition. *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on*, 11:712 – 731, 01 2008. doi: 10.1109/TEVC.2007.892759.
- [214] X. Zhang, C. Zhong, and L. Abualigah. Foreign exchange forecasting and portfolio optimization strategy based on hybrid-molecular differential evolution algorithms. *Soft Computing*, 27(7):3921–3939, 2023. ISSN 14327643. doi: 10.1007/s00500-022-07526-6. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85141372145&doi=10.1007%2fs00500-022-07526-6&partnerID=40&md5=ea2109736ea47f70316335de1dcf6727>.
- [215] Y. Zheng and J. Zheng. A novel portfolio optimization model via combining multi-objective optimization and multi-attribute decision making. *Applied Intelligence*, 52(5):5684–5695, 2022. ISSN 0924669X. doi: 10.1007/s10489-021-02747-y. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85112791582&doi=10.1007%2fs10489-021-02747-y&partnerID=40&md5=1d6540a183249ec6074522d27f56d4c9>.
- [216] Y. Zhou, W. Chen, and D. Lin. Design of optimum portfolio scheme based on improved nsga-ii algorithm. *Computational Intelligence and Neuroscience*, 2022, 2022. ISSN 16875265. doi: 10.1155/2022/7419500. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85132611758&doi=10.1155%2f2022%2f7419500&partnerID=40&md5=eecef9b4309900cd80f97c34534df749>.
- [217] E. Zitzler. *Evolutionary Multiobjective Optimization*, pages 871–904. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2012.
- [218] E. Zitzler and S. Kónzli. Indicator-based selection in multiobjective search. In X. Yao et al., editors, *Parallel Problem Solving from Nature VIII*, volume 3242 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 832–842, Berlin Heidelberg, 2004. Springer-Verlag.

- [219] E. Zitzler and L. Thiele. Multiobjective optimization using evolutionary algorithms — A comparative case study. In A. E. Eiben, T. Bäck, M. Schoenauer, and H.-P. Schwefel, editors, *Parallel Problem Solving from Nature — PPSN V*, volume 1498 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 292–301, Berlin, Heidelberg, 1998. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-540-49672-4.
- [220] E. Zitzler and L. Thiele. Multiobjective evolutionary algorithms: A comparative case study and the strength pareto approach. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 3(4):257–271, 1999.
- [221] E. Zitzler, K. Deb, and L. Thiele. Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: empirical results. *Evolutionary Computation*, 7:173–195, 2000.
- [222] E. Zitzler, M. Laumanns, and L. Thiele. Spea2: Improving the strength pareto evolutionary algorithm. Technical Report 103, Zurich, Switzerland, Gloriastrasse 35, CH-8092 Zurich, Switzerland, 2001.
- [223] E. Zitzler, M. Laumanns, and L. Thiele. SPEA2: Improving the strength pareto evolutionary algorithm. In K. Giannakoglou et al., editors, *EUROGEN 2001. Evolutionary Methods for Design, Optimization and Control with Applications to Industrial Problems*, pages 95–100, Athens, Greece, 2002.
- [224] E. Zitzler, L. Thiele, M. Laumanns, C. M. Fonseca, and V. Grunert da Fonseca. Performance Assessment of Multiobjective Optimizers: An Analysis and Review. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 7(2):117–132, 2003.
- [225] E. Zitzler, M. Laumanns, and S. Bleuler. A Tutorial on Evolutionary Multiobjective Optimization. In X. Gandibleux et al., editors, *Metaheuristics for Multiobjective Optimisation*, volume 535 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer, 2004.
- [226] J. Zou, Z. Zhang, J. Zheng, and S. Yang. A many-objective evolutionary algorithm based on dominance and decomposition with reference point adaptation. *Knowledge-Based Systems*, 231:107392, 2021. ISSN 0950-7051. doi: 10.1016/j.knosys.2021.107392. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0950705121006547>.
- [227] A. M. Zubeldia, L. M. M. Zabalza, and M. Z. Zubiaurre. El modelo de markowitz en la gestión de carteras. Technical report, Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea, 2002.

Índice Alfabético

- Algoritmo Evolutivo Multiobjetivo, [32](#)
- Algoritmos Evolutivos, [27](#)
- Algoritmos Genéticos, [27](#)

- Computación Evolutiva, [26](#)
- Contribuciones de la Investigación, [4](#)
- Cromosomas, [25](#)
- Cruce de Dos Puntos, [28](#)
- Cruce de un Punto, [28](#)
- Cruce Uniforme, [28](#)

- Dominance Preserving, [42](#)

- Elitismo, [33](#)
- Estrategia Evolutiva, [27](#)

- Gen, [26](#)
- Germoplasma, [24](#)

- Heurística, [13](#)
- Hill Climbing, [16](#)

- Individuo, [26](#)

- Método heurístico
 - Definición, [14](#)
- Métodos basados en población, [22](#)
- Métodos basados en Trayectorias, [16](#)
- Memetic Algorithms
 - Inicialización, [49](#)
 - Procedimiento de Mejora, [49](#)
- Metaheurísticos
 - Propiedades, [15](#)
- Metaheurística, [15](#)
- Mutación para Individuos Continuos, [29](#)
- Mutación por Intercambio para Individuos Discretos, [29](#)
- Mutación por Volteo para Individuos Discretos, [29](#)

- Neo-Darwinismo, [25](#)

- Optimización, [7](#)
- Optimización Monobjetivo, [11](#)
- Optimización Multiobjetivo, [12](#)

- Programación Evolutiva, [27](#)
- Programación Genética, [30](#)

- Selección de Ruleta, [28](#)
- Selección Elitista, [28](#)
- Selección Natural, [24](#)
- Selección por Torneo, [28](#)
- Simulated Annealing, [20](#)
- Solución óptima Global, [10](#)
- Solución óptima local, [10](#)

- Tabu Search, [17](#)
- Teoría General De Sistemas, [7](#)
- Técnica de Razonamiento Adaptativo, [22](#)

- Ácido Desoxirribonucleico, [26](#)