UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Programa de Doctorado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Departamento de Análisis Matemático, Estadística e Investigación Operativa y Matemática Aplicada

Tesis Doctoral

Operadores de superposición actuando entre espacios de funciones analíticas

Salvador Domínguez Molina

Director de la tesis: Profesor Dr. D. Daniel Girela Álvarez
Departamento de Análisis Matemático, Estadística e Investigación Operativa y Matemática Aplicada, Universidad de Málaga

Junio de 2020

AUTOR: Salvador Dominguez Molina

http://orcid.org/0000-0003-3658-7117

EDITA: Publicaciones y Divulgación Científica. Universidad de Málaga

DECLARACIÓN DE AUTORÍA Y ORIGINALIDAD DE LA TESIS PRESENTADA PARA OBTENER EL TÍTULO DE DOCTOR

Salvador Domínguez Molina,

estudiante del programa de doctorado en Matemáticas, autor de la tesis, presentada para la obtención del título de Doctor por la Universidad de Málaga, titulada:

"Operadores de superposición actuando entre espacios de funciones analíticas ",

realizada bajo la tutorización y dirección del profesor Dr. D. Daniel Girela Álvarez,

DECLARO QUE:

La tesis presentada es una obra original que no infringe los derechos de propiedad intelectual ni los derechos de propiedad industrial u otros, conforme al ordenamiento jurídico vigente (Real Decreto Legislativo 1/1996, de 12 de abril, por el que se aprueba el texto refundido de la Ley de Propiedad Intelectual, regularizando, aclarando y armonizando las disposiciones legales vigentes sobre la materia), modificado por la ley 2/2019, de 1 de marzo.

Igualmente asumo, ante la Universidad de Málaga y ante cualquier otra instancia, la responsabilidad que pudiera derivarse en caso de plagio de contenidos de la tesis presentada, conforme al ordenamiento jurídico vigente.

En Málaga, a 27 de junio de 2020

Fdo.: Salvador Domínguez Molina

Daniel Girela Álvarez, Catedrático de Universidad del Área de Análisis Matemático de la Universidad de Málaga,

HACE CONSTAR:

Que **Salvador Domínguez Molina** ha realizado bajo su dirección el trabajo de investigación correspondiente a su Tesis Doctoral titulada "Operadores de superposición actuando entre espacios de funciones analíticas".

Revisado el presente trabajo, estimo que puede ser presentado al tribunal que ha de juzgarlo.

Para que así conste a los efectos oportunos, autorizo la presentación de esta Tesis Doctoral en la Universidad de Málaga.

En Málaga, a 27 de junio de 2020

Fdo.: Daniel Girela Álvarez.

Índice general

Agradecimientos

Esta tesis es la culminación de casi seis años de trabajo en el que mucha gente se ha visto involucrada. Al finalizar un trabajo tan arduo y lleno de dificultades como el desarrollo de una tesis doctoral, es inevitable que te asalte un muy humano egocentrismo que te lleva a concentrar la mayor parte del mérito en el aporte que has hecho. Sin embargo, el análisis objetivo te muestra inmediatamente que la magnitud de ese aporte hubiese sido imposible sin la participación de personas que han facilitado las cosas para que este trabajo llegue a un feliz término. Por ello, es para mí un honor y un verdadero placer utilizar este espacio para ser justo y consecuente con ellas, expresándoles mi agradecimiento.

Debo agradecer de manera especial y sincera a mi director de tesis Daniel Girela, ya no sólo por apostar por mí y aceptarme para realizar esta tesis doctoral bajo su dirección, sino por su apoyo y confianza en mi trabajo. Sin su trabajo esta tesis habría sido imposible de realizar. También me gustaría comentar que no sólo ha sido su aporte académico en la tesis, el cual ha quedado sobradamente demostrado con el resultado de la misma, sino su carácter humano, ya que aún en los momentos personales más difíciles siempre he podido contar con él. Por todo ello, sólo puedo expresarle un agradecimiento infinito.

También me gustaría dar las gracias a todos los profesores y profesoras de matemáticas que he tenido en mi vida académica, quienes, con su enseñanza, han despertado en mí la curiosidad por las matemáticas y han contribuido a que sea el matemático que soy hoy. En este sentido, quiero destacar a los profesores del área de Análisis Matemático de la Universidad de Málaga, que han estado presentes en la parte final de este proceso.

También, quisiera agradecer a todos los miembros de mi familia por los ánimos y el cariño que siempre han mostrado hacia mí, y a ellos dedico esta tesis. Sobre todo me gustaría agradecer a mis padres, Salvador e Isabel por estar siempre a mi lado, velando porque nada me faltara y asegurándose de que mi única preocupación fuese la de estudiar para completar la mejor formación posible. Todo esto, sin ellos, no lo habría conseguido. También me gustaría dedicar esta tesis a mis abuelos (Salvador, Magdalena, Alonso y Josefa) que aunque ya no están entre nosotros seguro que están orgullosos de un logro tan importante en mi vida.

Por último, y no por ello menos importante, me gustaría dar las gracias a las tres personas que son el pilar de mi vida, a mi mujer Cristina por el apoyo, confianza, ánimos y paciencia con la que ha vivido esta tesis y también por hacer que la vida sea maravillosa junto a mis dos hijas Alba y Adriana, que son los dos tesoros más importantes que tengo.

Introducción

Esta tesis está dedicada a estudiar la acción de operadores de superposición y operadores de superposición ponderados en distintos espacios de funciones analíticas en $\mathbb{D}$, el disco unidad en $\mathbb{C}$.

El espacio de todas las funciones analíticas en $\mathbb{D}$, dotado con la topología de la convergencia uniforme en subconjuntos compactos, será denotado por $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$.

Dada una función entera φ, el operador de superposición

$$S_\varphi : \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$$

se define por $S_\varphi(f) = \varphi \circ f$.

De forma más general, si φ es una función entera y $w \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$, el operador de superposición ponderado

$$S_{\varphi,w} : \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$$

se define por

$$S_{\varphi,w}(f)(z) \;=\; w(z)\,\varphi\big(f(z)\big), \quad f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}), \quad z \in \mathbb{D}.$$

En otras palabras, $S_{\varphi,w} = M_w \circ S_\varphi$, donde M_w es el operador de multiplicación puntual con símbolo w definido por

$$M_w(f)(z) = w(z)f(z), \quad f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Observemos que $S_\varphi = S_{\varphi,w}$ si $w(z) = 1$, para todo $z \in \mathbb{D}$.

Las cuestiones naturales en este contexto son:

Dados X e Y dos espacios lineales de funciones holomorfas en $\mathbb{D}$,

- ¿Cuáles son las funciones enteras φ tales que el operador S_φ aplica X en Y? Cuando esto sucede se dice que φ actúa por superposición de X en Y.

- ¿Cuáles son los pares de funciones (φ, w), siendo φ entera y $w \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$, tales que $S_{\varphi,w}$ aplica X en Y?

Por supuesto, los espacios X e Y en que estaremos interesados serán espacios normados o F-espacios continuamente contenidos en el espacio $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$. En tal caso, es natural preguntarse no sólo si S_φ o $S_{\varphi,w}$ aplica X en Y, sino también si es un operador acotado o continuo de X en Y.

Observemos que los operadores S_φ y $S_{\varphi,w}$ no son en general lineales, y consecuentemente, acotación y continuidad a priori no son equivalentes. De hecho, Buckley y Vukotić probaron en [25] que existen operadores de superposición continuos que no son acotados. No obstante, Boyd y Rueda [22] probaron que para extensas clases de espacios de Banach de funciones analíticas X e Y, un operador de superposición acotado de X en Y es continuo.

- Si Y contiene a las funciones constantes, entonces es claro que, para φ constante, el operador S_φ aplica X en Y.

- Si $\varphi(z) = z$, entonces $S_\varphi(f) = f$ para todo $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$, y por lo tanto
$$S_\varphi(X) \subset Y \Leftrightarrow X \subset Y.$$

- De manera informal, podemos decir que si $X \subset Y$, la respuesta a nuestra cuestión nos indica "cómo de pequeño es X comparado con Y". Si hay muchas φ's para las que $S_\varphi(X) \subset Y$, X es "pequeño comparado con Y".

Las cuestiones que hemos planteado han sido estudiadas, sobre todo para operadores de superposición, para distintos pares de espacios (X, Y) por un buen número de autores entre los que se encuentran: V. Álvarez, J. Bonet, C. Boyd, S. Buckley, G. Cámara, J. L. Fernández, P. Galanopoulos, J. Giménez, D. Girela, M. A. Márquez, J. C. Ramos, P. Rueda y D. Vukotić. Mencionemos aquí sólo dos o tres de estos resultados. Empezaremos en el caso en que X e Y son espacios de Hardy o espacios de Bergman. Cámera [26] y Cámera y Giménez [27] probaron lo siguiente.

Sean φ una función entera y $0 < p, q < \infty$.

(i) El operador de superposición S_φ aplica H^p en H^q si y sólo si φ es un polinomio de grado menor o igual que p/q.

(ii) El operador de superposición S_φ aplica A^p en A^q si y sólo si φ es un polinomio de grado menor o igual que p/q.

Álvarez, Márquez y Vukotić probaron en [4] el siguiente resultado.

Sean $0 < p < \infty$ y φ una función entera. Entonces:

1. *S_φ actúa del espacio de Bergman A^p en el espacio de Bloch $\mathcal{B}$ si y sólo si φ es constante.*

2. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

   (a) El operador de superposición S_φ aplica $\mathcal{B}$ en A^p.

   (b) El operador de superposición S_φ es un operador acotado de $\mathcal{B}$ en A^p.

   (c) φ es una función entera de orden menor que uno, o de orden uno y tipo cero.

Un peso v en $\mathbb{D}$ será una función positiva y continua definida en $\mathbb{D}$ que es radial, i. e., $v(z) = v(|z|)$ para todo $z \in \mathbb{D}$, y satisfaciendo que $v(r)$ es estrictamente decreciente en $[0, 1)$ y que $\lim_{r\to 1} v(r) = 0$. Para tales pesos v, el espacio de crecimiento ponderado H_v^∞ se define por

$$H_v^\infty = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) : \|f\|_v \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z)|f(z)| < \infty \right\}.$$

Bonet y Vukotić [19] caracterizaron las funciones enteras φ tales que S_φ aplica H_u^∞ en H_v^∞ para distintos pares de pesos (u, v).

Todos los resultados que hemos expuesto y, de hecho, todos los publicados que conocemos sobre operadores de superposición actuando entre espacios de funciones analíticas, tienen en común lo siguiente:

Si S_φ aplica X en Y, entonces $S_{\varphi'}$ aplica X en Y.

Este hecho nos llevó a plantearnos la siguiente cuestión:

Caracterizar los pares de espacios (X, Y) para los que esto es cierto, o al menos, encontrar una clase de espacios Y tales que si $S_\varphi(X) \subset Y$ para un cierto espacio X entonces también se tenga $S_{\varphi'}(X) \subset Y$.

La Sección 2. 2 de esta tesis trata estas cuestiones.

Hemos demostrado que si es v un peso en $\mathbb{D}$, $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach de funciones analíticas en $\mathbb{D}$ y φ una función entera tal que el operador de superposición S_φ es un operador acotado de X en H_v^∞ (respectivamente de X en el espacio $DH_v^\infty = \{f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) : f' \in H_v^\infty\}$), entonces $S_{\varphi'}$ aplica X en H_v^∞ (respectivamente en DH_v^∞).

Un caso particular de este resultado es el siguiente:

Si S_φ es un operador acotado de X en el espacio de Bloch $\mathcal{B}$, entonces $S_{\varphi'}$ aplica X en $\mathcal{B}$.

Volvamos al trabajo [19] en el que Bonet y Vukotić estudiaron operadores de superposición actuando entre espacios de crecimiento ponderado. Tomando $\alpha > 0$ y $v(z) = (1 - |z|)^\alpha$, el espacio H_v^∞ es

$$H(\infty, \alpha) = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) : M_\infty(r, f) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{(1-r)^\alpha} \right) \right\}.$$

Entre otros resultados Bonet y Vukotic probaron lo siguiente:

Sean $0 < \alpha < \infty$ y φ una función entera. Las condiciones siguientes son equivalentes:

(i) φ *es un polinomio de grado menor o igual que* β/α.

(ii) $S_\varphi(H(\infty,\alpha)) \subset H(\infty,\beta)$.

(iii) S_φ *es un operador continuo de* $H(\infty,\alpha)$ *en* $H(\infty,\beta)$.

Para $\alpha > 0$ y $0 < p < \infty$, definamos

$$H(p,\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) : M_p(r,f) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{(1-r)^\alpha}\right)\right\}.$$

Resulta natural plantearse el siguiente objetivo:

Caracterizar las funciones enteras φ tales que

$$S_\varphi(H(p,\alpha)) \subset H(p,\beta),$$

o, incluso, el objetivo más general de estudiar operadores de superposición actuando entre espacios de norma mixta. A ello dedicamos la Sección 2. 4 de la tesis.

El espacio de tipo Hardy de norma mixta $H(p,q,\alpha)$ $(0 < p,\, q \leq \infty,\ \alpha > 0)$ es el espacio de funciones $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ para las cuales $\|f\|_{p,q,\alpha} < \infty$, donde,

$$\|f\|_{p,q,\alpha} = \begin{cases} \left(\int_0^1 (1-r)^{\alpha q - 1} M_p^q(r,f)\,dr\right)^{1/q}, & \text{si } 0 < q < \infty, \\ \sup\limits_{0 \leq r < 1} (1-r)^\alpha M_p(r,f), & \text{si } q = \infty. \end{cases}$$

Estos espacios tienen su origen en trabajos de Hardy y Littlewood, pero fueron definidos explícitamente por primera vez por Flett en los 1970's. Se tiene que

$$H(p,\alpha) = H(p,\infty,\alpha), \quad 0 < p \leq \infty, \alpha > 0.$$

Con esta notación podemos observar que

$$A^p_\alpha = H(p,p,(\alpha+1)/p).$$

$$H^p \text{ corresponde al caso límite } H(p,\infty,0).$$

En un trabajo reciente I. Arévalo [9, 10] ha determinado totalmente las inclusiones entre estos espacios. Es decir, ha determinado las tripletas (p,q,α), (s,t,β) para las que $H(p,q,\alpha) \subset H(s,t,\beta)$. Nosotros determinamos en el Teorema 5 las funciones enteras φ que aplican $H(p,q,\alpha)$ en $H(s,t,\beta)$. En concreto, nuestro resultado es el siguiente:

Sean φ una función entera y $0 < p,q,s,t \leq \infty$, $0 < \alpha,\beta < \infty$. Entonces, el operador de superposición S_φ aplica $H(p,q,\alpha)$ en $H(s,t,\beta)$ si y sólo si φ es un polinomio de grado N, donde N satisface una de las cuatro condiciones siguientes:

(i) $\frac{p}{N} < s$ *y* $N < \frac{\beta+\frac{1}{s}}{\alpha+\frac{1}{p}}$.

(ii) $\frac{p}{N} < s$, $N = \frac{\beta+\frac{1}{s}}{\alpha+\frac{1}{p}}$ *y* $\frac{q}{N} \leq t$.

(iii) $\frac{p}{N} \geq s$ *y* $\alpha N < \beta$.

(iv) $\frac{p}{N} \geq s$, $\alpha N = \beta$ *y* $\frac{q}{t} \leq t$.

Además, en cualquiera de los cuatro casos S_φ es acotado y continuo de $H(p,q,\alpha)$ en $H(s,t,\beta)$.

También hemos dedicado partes de este trabajo a estudiar operadores de superposición y de superposición ponderados actuando

(a) entre espacios de Bergman con pesos y el espacio de Bloch y,

(b) entre espacios de Besov.

En relación a (a) hemos extendido los resultados de [4] que ya mencionamos anteriormente, probando en el Teorema 12 y el Teorema 13 los resultados siguientes.

Supongamos que $0 < p < \infty$ y $\alpha > -1$. Sea w una función analítica y no idénticamente nula en $\mathbb{D}$ y sea φ una función entera con $\varphi \not\equiv 0$. Entonces el operador *de superposición ponderado $S_{\varphi,w}$ aplica A^p_α en el espacio de Bloch $\mathcal{B}$ si y sólo si $w \in \mathcal{B}$ y φ es constante.*

Supongamos que:

(i) $0 < p < \infty$ *y* $\alpha > -1$.

(ii) $w \in A^p_\beta$ *para algún* β *con* $-1 < \beta < \alpha$.

(iii) φ *es una función entera de orden menor que uno, o de orden uno y tipo cero.*

Entonces el operador de superposición ponderado $S_{\varphi,w}$ es un operador acotado del espacio de Bloch $\mathcal{B}$ en el espacio de Bergman A^p_α.

Con respecto a (b), nuestro punto de partida es el siguiente resultado probado en [23]:

Si $1 \leq q < p < \infty$ y φ es una función entera, entonces el operador de superposición S_φ aplica B^p en B^q si y sólo si φ es constante.

Nosotros presentamos en la Sección 2.5.3 una demostración de este hecho distinta de la dada en [23]. Nuestra demostración se basa en un resultado sobre integrabilidad radial de la derivada de una función en $B^p \cap H^\infty$. En efecto, en la Sección 2.5.2 probamos, para $1 \leq q < p < \infty$, la existencia de funciones $f \in B^p \cap H^\infty$ tales que las medias integrales $M_p(r, f')$ de la derivada f' de f son "tan grandes como es posible" y con f' teniendo "malas propiedades de integrabilidad de orden q a lo largo de todos los radios".

Este resultado tiene aplicación también para estudiar los multiplicadores de B^q en B^p ($1 \leq q < p < \infty$). Es sabido que para p y q en estas condiciones, la función constantemente igual a 0 es el único multiplicador puntual de B^q en B^p. La demostración de este resultado que se presenta en [41] utiliza, entre otros resultados, un teorema de descomposición para espacios de Besov y la desigualdad de Khinchine. Nuestra demostración basada en los resultados mencionados de la Sección 2.5.2 es totalmente distinta y, pensamos, que más simple.

Finalizamos el Capítulo 2 obteniendo resultados adicionales sobre el crecimiento radial de las derivadas de funciones en los espacios de Besov que extienden al rango $1 < p < \infty$ otros obtenidos por Hallenbeck y Samotij [53] para el espacio de Dirichlet $\mathcal{D} = B^2$.

Indiquemos que parte de los resultados de esta tesis están contenidos en los artículos [29], [30] y [31], los dos primeros ya publicados y el tercero aceptado para su publicación.

Cerremos esta introducción comentando como es usual, utilizaremos $C = C(p, \alpha, q, \beta, \ldots)$ para denotar una constante positiva, la cual, sólo dependerá de alguno de los parámetros $p, \alpha, q, \beta, \ldots$ (los cuales, a veces, pueden ser omitidos) pero no necesariamente la misma en las distintas apariciones. También, para dos valores reales E_1 , E_2 escribiremos $E_1 \lesssim E_2$ o $E_1 \gtrsim E_2$, si existe una constante positiva C independiente de los argumentos tales que $E_1 \leq C \cdot E_2$, respectivamente $E_1 \geq C \cdot E_2$. Si tenemos $E_1 \leq C \cdot E_2$ y $E_1 \geq C \cdot E_2$ simultáneamente entonces diremos que E_1 y E_2 son equivalentes y escribiremos $E_1 \asymp E_2$.

1

Algunos espacios clásicos de funciones holomorfas en el disco unidad

1.1 Introducción

Esta tesis está dedicada a estudiar la acción de determinados operadores en ciertos espacios de funciones analíticas en el disco unidad. En este capítulo presentaremos algunos de estos espacios, recordando algunas de sus propiedades más importantes.

El disco unidad en $\mathbb{C}$ será denotado por $\mathbb{D}$, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$; la circunferencia unidad $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ será también denotada por $\mathbb{T}$. El espacio de todas las funciones analíticas en $\mathbb{D}$, dotado con la topología de la convergencia uniforme en subconjuntos compactos, será denotado por $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$. Reseñemos también que dA denotará a la medida de área normalizada en $\mathbb{D}$: $dA(z) = \frac{1}{\pi} dx\, dy = \frac{1}{\pi} r\, dr\, d\theta$.

En nuestro trabajo consideraremos distintos espacios lineales X de funciones analíticas en $\mathbb{D}$. En general, estos espacios serán espacios de Banach o F-espacios (espacios vectoriales topológicos cuya topología viene inducida por una distancia completa e invariante frente a traslaciones) que están continuamente contenidos en $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$, es decir, tales que convergencia con respecto a la norma o la distancia en X implican convergencia uniforme en compactos. Observemos que este hecho implica que para cada $z_0 \in \mathbb{D}$, el operador de evaluación puntual E_{z_0}, definido por

$$E_{z_0}(f) = f(z_0), \quad f \in X,$$

es un operador continuo de X en $\mathbb{C}$.

1.2 Espacios de Hardy

En esta sección vamos a introducir los espacios de Hardy H^p y recordaremos algunos resultados básicos de los mismos. Mencionamos los textos [34] y [42] como excelentes referencias sobre estos espacios.

Si $0 \leq r < 1$ y $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$, definimos

$$\begin{aligned} M_p(r,f) &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right)^{1/p}, \quad \text{si } 0 < p < \infty, \\ M_\infty(r,f) &= \max_{|z|=r} |f(z)|. \end{aligned}$$

Las medias $M_p(r,f)$ crecen con r. Para $0 < p \leq \infty$, el espacio de Hardy H^p es el formado por todas las funciones f que son holomorfas en $\mathbb{D}$ para las que

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{0 \leq r < 1} M_p(r,f) = \lim_{r \to 1} M_p(r,f) < \infty.$$

Con esta definición vemos que H^∞ es el espacio de las funciones holomorfas y acotadas en $\mathbb{D}$. Es claro que

$$H^q \subset H^p, \quad 0 < p < q \leq \infty.$$

Para $1 \leq p \leq \infty$, $\|\cdot\|_{H^p}$ es una norma en H^p y $(H^p, \|\cdot\|_{H^p})$ es un espacio de Banach. Para $0 < p < 1$, H^p es un F-espacio con la distancia d_p definida por $d_p(f,g) = \|f-g\|_{H^p}^p$ $(f, g \in H^p)$.

Un resultado básico en la teoría de los espacios de Hardy es el teorema de Fatou:

Teorema A. *Toda función $f \in H^p$ $(0 < p \leq \infty)$ tiene límite radial (de hecho, no-tangencial) finito*
$$f(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1} f(re^{i\theta})$$
para casi todo $\theta \in [0, 2\pi]$, y la función de sus valores en la frontera tiene la propiedad de que $f(e^{i\theta}) \in L^p(\mathbb{T})$ y $\log |f(e^{i\theta})| \in L^1$. Además, $\|f\|_{H^p} = \|f(e^{i\theta})\|_{L^p(\mathbb{T})}$.

Identificando cada función $f \in H^p$ con la función de sus valores en la frontera $f(e^{i\theta})$, podemos ver a H^p como un subespacio cerrado de $L^p(\mathbb{T})$.

La sucesión de ceros $\{z_k\}$ de una función $f \in H^p$, no idénticamente nula, repetidos de acuerdo a su multiplicidad satisface la condición de Blaschke
$$\sum_{k=1}^{\infty}(1 - |z_k|) < \infty$$
que asegura la convergencia del producto de Blaschke
$$B(z) = z^m \prod_{k=1}^{\infty} \frac{|z_k|}{z_k} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z}.$$
Este producto infinito define una función holomorfa en $\mathbb{D}$ cuya sucesión de ceros es $\{z_k\}$ (y 0 con multiplicidad m, si $m > 0$) y, además, B es una función en H^∞ con norma 1.

Si $f \in H^p$ $(0 < p \leq \infty)$, $f \not\equiv 0$, y B es el producto de Blaschke con los mismos ceros que f, entonces la función f/B no tiene ceros en $\mathbb{D}$, pertenece a H^p y tiene la misma norma-H^p que f.

Reseñemos también que un producto de Blaschke B satisface que $|B(e^{i\theta})| = 1$ para casi todo θ.

De lo que acabamos de exponer se deduce que toda función $f \in H^p$ $(0 < p \leq \infty)$ puede factorizarse en la forma $f = Bg$ donde B es el producto de Blaschke con los mismos ceros que f y g es una función en H^p sin ceros en $\mathbb{D}$ y con la misma norma que f. Nótese que como g no tiene ceros, para α real, podemos definir la función holomorfa g^α que pertenece a $H^{p/\alpha}$. Esta simple observación es de gran importancia ya que permite, para $0 < p, q < \infty$, deducir resultados en el espacio H^p a partir de resultados en H^q. En particular, permite obtener el siguiente resultado.

Teorema B. *Sea $f \in H^1$. Entonces existen $f_1, f_2 \in H^2$, con*

$$f = f_1 f_2, \quad y\ \|f_j\|_{H^2} = \|f\|_{H^1}^{1/2},\ (j = 1, 2).$$

Las funciones en los espacios de Hardy tienen importantes propiedades de crecimiento. Destaquemos las siguientes:

Teorema C.

(i) Si $0 < p < \infty$ y $f \in H^p$, entonces

$$|f(z)| = o((1 - |z|)^{-1/p}), \quad \textit{cuando } |z| \to 1.$$

(ii) Si $0 < p < q \leq \infty$ y $f \in H^p$, entonces

$$M_q(r, f) = o\left((1 - r)^{1/q - 1/p}\right), \qquad \textit{cuando } r \to 1.$$

Considerando las funciones f_a $(a > 0)$ definidas por $f_a(z) = (1 - z)^{-a}$ $(z \in \mathbb{D})$, para las que se tiene que $f_a \in H^p$ si y sólo si $a < 1/p$, se comprueba que los exponentes en este teorema son los mejores posibles. Sin embargo, podemos destacar que (ii) puede mejorarse. En efecto, Hardy y Littlewood [55] (véase también [34, Theorem 5. 11]) probaron el siguiente resultado.

Teorema D. *Si $0 < p < q \leq \infty$, $\lambda \geq p$ y $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, entonces para toda $f \in H^p$ se tiene que*

$$\int_0^1 (1 - r)^{\lambda\alpha - 1} \{M_q(r, f)\}^\lambda \, dr < \infty.$$

Pasemos ahora a hablar sobre los coeficientes de Taylor de funciones en los espacios de Hardy. Si $f \in H^p$ $(0 < p \leq \infty)$ y $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ $(z \in \mathbb{D})$, ¿qué podemos decir sobre la sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$?

El caso $p = 2$ es muy simple. Por la identidad de Parseval, se tiene que

$$M_2(r, f)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}, \quad 0 < r < 1,$$

y, por tanto,

$$f \in H^2 \text{ si y sólo si } \{a_n\} \in l^2,$$

es decir,

$$f \in H^2 \text{ si y sólo si } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

Además, se tiene que $\|f\|_{H^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2}$.

Las desigualdades de Hausdorff-Young implican que si $1 \leq p \leq 2$ y $f \in H^p$, entonces la sucesión $\{a_n\}$ pertenece al espacio ℓ^q, siendo q es el exponente conjugado de p, es decir, $1/p + 1/q = 1$, teniéndose

$$\|\{a_n\}\|_q \leq \|f\|_{H^p}.$$

Por su parte, Hardy y Littlewood obtuvieron el siguiente resultado (véase [34, Chapter 6]).

Teorema E. *Sea f holomorfa en $\mathbb{D}$, $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ $(z \in \mathbb{D})$.*

(i) Si $0 < p \leq 2$ y $f \in H^p$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2} |a_n|^p < \infty$.

(ii) Si $2 \leq p < \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2} |a_n|^p < \infty$, entonces $f \in H^p$.

Finalicemos esta sección recordando que para $1 < p < \infty$ el espacio dual de H^p, $(H^p)^\star$, es isométricamente isomorfo al espacio H^q, siendo q el exponente conjugado de p:

Cada $\phi \in (H^p)^\star$ puede ser expresado en la forma

$$\phi(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}\, d\theta$$

para una única función $g \in H^q$. Además, $\|\phi\| \asymp \|g\|_{H^q}$.

El espacio dual de H^1 también está identificado, es el espacio $BMOA$ que presentaremos en la sección siguiente.

1.3 El espacio $BMOA$ y el espacio de las funciones de Bloch

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ e I es un intervalo de $\mathbb{T}$, $m_I(f)$ denotará la media de f sobre el intervalo I, esto es,

$$m_I(f) = \frac{1}{|I|} \int_I f(e^{i\theta}) d\theta.$$

La oscilación media de f sobre I es

$$m_I\left(|f - m_I|\right) = \frac{1}{|I|} \int_I |f(e^{i\theta}) - m_I(f)| d\theta.$$

Diremos que f tiene oscilación media acotada o que $f \in BMO$ si $f \in L^1(\mathbb{T})$ y

$$\|f\|_\star = \sup_I \frac{1}{|I|} \int_I |f(e^{i\theta}) - m_I(f)| d\theta < \infty.$$

Claramente, $L^\infty \subset BMO$.

El espacio $BMOA$ es el formado por las funciones $f \in H^1$ cuya cuya función de valores en la frontera $f(e^{i\theta})$ pertenece a BMO. Este espacio es de Banach con la norma

$$\|f\|_\star = |f(0)| + \sup_I \left(\frac{1}{|I|} \int_I |f(e^{i\theta}) - m_I(f)| d\theta \right).$$

Mencionemos [42],[46] como referencias generales sobre $BMOA$.

Se tiene que

$$H^\infty \subset BMOA,$$

pero $BMOA$ contiene funciones no acotadas. El ejemplo típico es la función $f(z) = \log\frac{1}{1-z}$ que está en $BMOA\setminus H^\infty$. Un resultado básico en la teoría de las funciones de oscilación media acotada es el teorema de John-Nirenberg [65] (véase también [46, Theorem 4. 1]) que implica que aunque no tiene que estar acotada, una función en $BMOA$ no puede crecer demasiado deprisa. En particular, el mencionado teorema de John-Nirenberg implica que $BMOA \subset H^p$ para todo $p < \infty$. Tenemos pues

$$H^\infty \subsetneq BMOA \subsetneq H^p, \quad 0 < p < \infty.$$

Existen muchas caracterizaciones de $BMOA$ y $BMOA$ es “conformemente invariante”.

Denotemos por $\mathcal{M}$ al conjunto de todas las aplicaciones conformes de $\mathbb{D}$ sobre sí mismo. Es bien sabido que

$$\mathcal{M} = \{\lambda\varphi_a : a \in \mathbb{D}, |\lambda| = 1\},$$

donde φ_a es la transformación de Möbius definida por

$$\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\overline{a}z}.$$

Definición 1. *Sea (X,τ) un subespacio de $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ con estructura de espacio vectorial topológico. Decimos que X es un espacio conformemente invariante si se cumple que:*

1. *Existe una función homogénea, positiva y subaditiva $\rho : \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) \longrightarrow [0,\infty]$ tal que*

$$X = \{f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) : \rho(f) < \infty\}$$

y la topología de X es la inducida por $\rho_{|X}$.

Observamos que en este caso ρ es una seminorma en X.

2. *Existe una constante $C = C(X) > 0$ tal que:*

$$\textit{Si } f \in X \textit{ y } \Phi \in \mathcal{M} \textit{ entonces } f \circ \Phi \in X \textit{ y } \rho(f \circ \Phi) \leq C\rho(f).$$

Para $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ y $0 < p < \infty$, definimos

$$\rho_{\star,p}(f) = \sup_{S \in \mathcal{M}} \|f \circ S \,-\, f(S(0))\|_{H^p}.$$

Es claro que $\rho_{\star,p}(f \circ S) = \rho_{\star,p}(f)$, cualesquiera que sean $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ y $S \in \mathcal{M}$. Se tiene que para todo $p \in (0, \infty)$

$$BMOA = \{f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) : \rho_{\star,p}(f) < \infty\},$$

y entonces se sigue de forma inmediata que para todo $p \geq 1$, $BMOA$ con la seminorma $\rho_{\star,p}$ es un espacio conformemente invariante y un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_{BMOA_p}$ definida por

$$\|f\|_{BMOA_p} = |f(0)| + \rho_{\star,p}(f).$$

Deseamos resaltar también que $BMOA$ puede caracterizarse como el espacio de las funciones $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ tales que la medida $(1 - |z|^2)|f'(z)|^2 dA(z)$ es una medida de Carleson. Este resultado es esencialmente equivalente al teorema de dualidad de Fefferman que establece que el dual de H^1 es identificable con el espacio $BMOA$ (véase [46, Theorem 7. 1]).

Si $f \in BMOA$ entonces

$$|f'(z)| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{1 - |z|}\right).$$

Las funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ con esta propiedad son las llamadas funciones de Bloch:

Para $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ definimos:

$$\rho_{\mathcal{B}}(f) = \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)|f'(z)|$$

Si f es holomorfa en $\mathbb{D}$ diremos que f es una función de Bloch si $\rho_{\mathcal{B}}(f) < \infty$. El espacio de todas las funciones de Bloch será denotado por $\mathcal{B}$. Este espacio es conformemente invariante con la seminorma $\rho_{\mathcal{B}}$ y es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ definida por

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = |f(0)| + \rho_{\mathcal{B}}(f).$$

Es bien sabido que

$$H^\infty \subset BMOA \subset \mathcal{B}$$

y además ambas inclusiones son estrictas. Mencionemos [5] como una referencia básica para las funciones de Bloch.

1.4 Espacios de Bergman con peso

Para $0 < p < \infty$ y $\alpha > -1$ el espacio de Bergman A^p_α está formado por las funciones $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ tales que

$$\|f\|_{A^p_\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \left((\alpha+1) \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^\alpha |f(z)|^p \, dA(z) \right)^{1/p} < \infty.$$

Recordemos que dA representa la medida del área en $\mathbb{D}$, normalizada para que el área total de $\mathbb{D}$ sea 1. Así pues, $dA(z) = \frac{1}{\pi}\, dx\, dy = \frac{1}{\pi}\, r\, dr\, d\theta$. El espacio de Bergman A^p_0 se denota simplemente por A^p. Para este espacio A^p es obvio que $H^p \subset A^p$. De hecho, se tiene que

$$H^p \subset A^{2p}, \qquad 0 < p < \infty.$$

Podemos enunciar para espacios de Bergman resultados análogos a algunos de los que mencionamos para los espacios de Hardy en la sección anterior. Así, entre otros, tenemos los siguientes.

- La función $(1-z)^\lambda$ está en A^p si y sólo $\lambda < \frac{2}{p}$.

- Si $0 < p < \infty$ y $f \in A^p$, entonces

$$M_q(r, f) = o\left((1-r)^{\frac{1}{q}-\frac{2}{p}}\right)$$

para todo $q \geq p$, y además es la mejor estimación posible.

- Si $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ $(z \in \mathbb{D})$, entonces

$$f \in A^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{-1} |a_n|^2 < \infty.$$

Por el contrario, hemos de destacar que el teorema de Fatou no es válido para funciones en los espacios A^p_α y también que la sucesión de ceros de una función en A^p_α no ha de satisfacer la condición de Blaschke. También queremos reseñar que aunque el espacio de Bloch no está contenido en ninguno de los espacios de Hardy, se tiene que

$$\mathcal{B} \subset A^p_\alpha, \quad 0 < p < \infty, \ \alpha > -1.$$

Mencionemos los textos [35],[57] y [86] como excelentes referencias para la teoría de los espacios de Bergman.

1.5 Espacios de Dirichlet

Finalizamos este capítulo presentando los espacios de tipo Dirichlet.

Para $0 < p < \infty$ y $\alpha > -1$ el espacio de tipo Dirichlet $\mathcal{D}^p_\alpha$ $(p > 0, \alpha > -1)$ es el formado por las funciones $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ tales que $f' \in A^p_\alpha$. Por tanto, si f es una función analítica en $\mathbb{D}$, entonces $f \in \mathcal{D}^p_\alpha$ si y sólo si

$$\|f\|_{\mathcal{D}^p_\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} |f(0)| + \|f'\|_{A^p_\alpha} < \infty.$$

Tenemos las siguientes inclusiones

$$\mathcal{D}^p_\alpha \subset \mathcal{D}^q_\alpha, \quad \text{si } 0 < q < p < \infty, \ \alpha > -1.$$

$$\mathcal{D}^p_\alpha \subset \mathcal{D}^p_\beta, \quad \text{si } 0 < p < \infty, \ -1 < \alpha < \beta.$$

Si $\alpha > p-1$ es bien sabido que $\mathcal{D}^p_\alpha = A^p_{\alpha-p}$ [37, Theorem 6]. Por otra parte, si $\alpha < p-2$ entonces $\mathcal{D}^p_\alpha \subset H^\infty$. Por tanto $\mathcal{D}^p_\alpha$ es un “espacio de Dirichlet propio” cuando $p-2 \le \alpha \le p-1$.

De especial interés son los casos extremos $\alpha = p-2$ y $\alpha = p-1$.

Para $p > 1$, el espacio $\mathcal{D}^p_{p-2}$ es el espacio de Besov B^p. El espacio $\mathcal{D}^2_0 = B^2$ es el espacio de Dirichlet clásico formado por las funciones $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ que satisfacen que $\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2\, dA(z) < \infty$. Los espacios de Besov B^p $(1 < p < \infty)$ forman una cadena ascendente de espacios conformemente invariantes y todos ellos están contenidos en $BMOA$. Mencionamos [8, 32, 33, 60, 61, 83, 86] como referencias en las que encontrar mucha información sobre los espacios de Besov.

Los espacios $\mathcal{D}^p_{p-1}$ son los más próximos a los espacios de Hardy entre todos los espacios de tipo Dirichlet. Se tiene que $\mathcal{D}^2_1 = H^2$. Además, [69]

$$H^p \subsetneq \mathcal{D}^p_{p-1}, \quad \text{si } 2 < p < \infty,$$

y [37, 84]

$$\mathcal{D}^p_{p-1} \subsetneq H^p, \quad \text{si } 0 < p < 2.$$

2

Operadores de superposición entre espacios de funciones analíticas

2.1 Introducción

Dada una función entera φ, el operador de superposición

$$S_\varphi : \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$$

se define por $S_\varphi(f) = \varphi \circ f$ $(f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}))$.

La cuestión natural en este contexto es la siguiente:

Dados X e Y dos espacios lineales de funciones holomorfas en $\mathbb{D}$, ¿cuáles son las funciones enteras φ tales que el operador S_φ aplica X en Y? Cuando esto sucede se dice que φ actúa por superposición de X en Y.

Si componemos en el otro orden tenemos los operadores de composición. Con más precisión, si φ una función holomorfa en $\mathbb{D}$ con $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, el operador de composición C_φ con símbolo φ es el definido por

$$C_\varphi(f) \ = \ f \circ \varphi, \quad f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}).$$

Los operadores de composición actuando entre distintos espacios de funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ ha sido (y son actualmente) muy extensamente estudiados. Mencionemos las monografías [80] y [28] como excelentes textos generales sobre este tema.

La teoría de operadores de superposición tiene sentido y una larga historia en el contexto de funciones reales de variables reales y podemos mencionar el texto [7] como una buena referencia. Sin embargo, el estudio de operadores de superposición en el ámbito de espacios de funciones holomorfas es relativamente reciente, se inició hace menos de cuarenta años.

Los operadores de composición son lineales. Esto no es en general cierto para operadores de superposición. De hecho, es fácil ver que el operador de superposición S_φ es lineal si y sólo si φ es de la forma $\varphi(z) = \lambda z$ $(z \in \mathbb{C})$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$. Por supuesto, si X e Y son espacios normados (o, más generalmente, F-espacios) de funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ y φ es una función entera, es interesante no sólo saber si S_φ actúa de X en Y sino también si es continuo o acotado de X en Y. Observemos que al no ser S_φ lineal, la acotación y continuidad de S_φ no son a priori equivalentes.

Así pues, para X e Y dos espacios normados de funciones analíticas en $\mathbb{D}$ tenemos las tres siguiente cuestiones naturales que a priori pueden tener respuestas distintas:

(a) Caracterizar las funciones enteras φ tales que el operador de superposición S_φ actúa de X en Y.

(b) Caracterizar las funciones enteras φ tales que el operador de superposición S_φ es un operador acotado de X en Y.

(c) Caracterizar las funciones enteras φ tales que el operador de superposición S_φ es un operador continuo de X en Y.

- Si Y contiene a las funciones constantes, entonces es claro que, para φ una función constante, el operador S_φ aplica X en Y.

- Si $\varphi(z) = z$, entonces $S_\varphi(f) = f$ para todo $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ con lo que

$$S_\varphi(X) \subset Y \Leftrightarrow X \subset Y.$$

- Si $X \subset Y$, podemos decir que la respuesta a la pregunta (a) de caracterizar las funciones enteras φ para las que φ actúa de X en Y por superposición nos dice "qué tan pequeño es X en comparación con Y". De manera informal, tenemos que si hay muchas funciones enteras φ que actúan de X en Y por superposición, entonces X es "pequeño" comparado con Y.

Como ya hemos indicado, al no ser S_φ lineal las respuestas a las cuestiones (b) y (c) no son a priori idénticas: acotación y continuidad no son a priori equivalentes. De hecho, Buckley y Vukotić probaron en [25] que existen operadores de superposición continuos que no son acotados. No obstante, Boyd y Rueda [22] probaron que para extensas clases de espacios de Banach de funciones analíticas X e Y, un operador de superposición acotado de X en Y es continuo. En efecto, teniendo en cuenta que si Y es un espacio de Banach de funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ que está continuamente contenido en $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ entonces los operadores de evalución puntual son continuos en Y, el Corolario 3. 2 de [22] implica lo siguiente.

Teorema F. *Sean X e Y dos espacios de Banach de funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ continuamente contenidos en $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$. Sea φ una función entera que actúa de X en Y por superposición. Si S_φ es acotado de X en Y, entonces es continuo de X en Y.*

Las cuestiones que hemos planteado han sido estudiadas para distintos pares de espacios (X, Y) por diversos autores, la literatura en esta área es bastante extensa. Algunos artículos en la misma son los siguientes [4, 19, 21, 22, 23, 25, 27, 26, 40, 47, 68, 70, 74, 85]. Mencionaremos a continuación tan sólo algunos de los resultados contenidos en estos trabajos.

Cámera [26] y Cámera y Giménez [27] estudiaron operadores de superposición actuando entre espacios de Hardy y entre espacios de Bergman y probaron los siguientes resultados.

Teorema G. *Sea φ una función entera y $0 < p, q < \infty$.*

(i) El operador de superposición S_φ aplica H^p en H^q si y sólo si φ es un polinomio de grado como máximo p/q.

(ii) El operador de superposición S_φ aplica A^p en A^q si y sólo si φ es un polinomio de grado como máximo p/q.

Buckley, Fernández y Vukotić estudiaron en [23] operadores de superposición actuando entre espacios de Dirichlet y, entre otros, probaron el siguiente resultado.

Teorema H. *Sea φ una función entera y $0 < p, q < \infty$.*

(a) Si $p \leq 2 \leq q < \infty$ y $p \neq q$, entonces S_φ actúa por superposición de $\mathcal{D}^p_0$ en $\mathcal{D}^q_0$ si y sólo si φ es constante.

(b) Si $q \leq p < 2$ entonces $S_\varphi(\mathcal{D}^p_0) \subset \mathcal{D}^q_0$ si y sólo si φ es un polinomio de grado menor o igual que $\frac{p(2-q)}{q(2-p)}$.

(c) Si $p < q < 2$, entonces $S_\varphi(\mathcal{D}^p_0) \subset \mathcal{D}^q_0$ si y sólo si φ es constante.

(d) Si $2 < p < \infty$ y $q \leq p < \infty$, entonces $S_\varphi(\mathcal{D}^p_0) \subset \mathcal{D}^q_0$ cualquiera que sea φ.

(e) Si $2 < p < q < \infty$, entonces $S_\varphi(\mathcal{D}^p_0) \subset \mathcal{D}^q_0$ si y sólo si φ es constante.

Álvarez, Márquez y Vukotić estudiaron en [4] operadores de superposición actuando entre espacios de Bergman y el espacio de Bloch, $\mathcal{B}$, probando los siguientes resultados.

Teorema I. *Sea $0 < p < \infty$ y sea φ una función entera. El operador de superposición S_φ aplica el espacio de Bergman A^p en el espacio de Bloch $\mathcal{B}$ si y sólo si φ es constante.*

Teorema J. *Sean $0 < p < \infty$ y φ una función entera. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) El operador de superposición S_φ aplica $\mathcal{B}$ en A^p.

(b) El operador de superposición S_φ es un operador acotado de $\mathcal{B}$ en A^p.

(c) φ es una función entera de orden menor que uno, o de orden uno y tipo cero.

2.2 Relación entre el operador de superposición inducido por una función entera y el inducido por su derivada

En los resultados expuestos en los teoremas G, H, I y J se caracterizan las funciones enteras φ que actúan por superposición de X en Y para ciertos pares (X, Y) de espacios de funciones holomorfas en $\mathbb{D}$. Estos resultados y, realmente, todos los que conocemos de este tipo tienen en común lo siguiente:

- Si S_φ aplica X en Y entonces $S_{\varphi'}$ también aplica X en Y.

Este hecho nos llevó a plantearnos la cuestión de caracterizar los pares (X, Y) de subespacios de $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ con esta propiedad o al menos la de encontrar una clase amplia de espacios Y tales que si $S_\varphi(X) \subset Y$ para un cierto espacio X entonces también se tenga que $S_{\varphi'}(X) \subset Y$.

Para exponer los resultados que hemos obtenido en esta línea de trabajo, empezaremos introduciendo los espacios de crecimiento ponderado H_v^∞.

Definición 2. *Un peso v en $\mathbb{D}$ será una función positiva y continua definida en $\mathbb{D}$ que es radial, i. e., $v(z) = v(|z|)$ para todo $z \in \mathbb{D}$, y satisfaciendo que $v(r)$ es estrictamente decreciente en $[0, 1)$ y que $\lim_{r\to 1} v(r) = 0$.*

Para tales pesos v, el espacio de crecimiento ponderado H_v^∞ se define por

$$H_v^\infty = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) : \|f\|_v \stackrel{def}{=} \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z)|f(z)| < \infty \right\}.$$

Equivalentemente,

$$H_v^\infty = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) : M_\infty(r,f) = O\left(\frac{1}{v(r)}\right) \right\}.$$

El espacio H_v^∞ es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_v$ definida por

$$\|f\|_v = \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z)|f(z)|.$$

Estos espacios tienen sus antecedentes en trabajos de Shields y Williams [81] y han sido ampliamente estudiados, por ejemplo, en [14, 15, 17, 18, 56].

Bonet y Vukotić [19] caracterizaron las funciones enteras φ tales que S_φ aplica H_u^∞ en H_v^∞ para distintos pares de pesos (u,v). Volveremos a esta cuestión más adelante y seremos entonces más precisos. En el trabajo [29] hemos probado el siguiente resultado.

Teorema 1. *Sea v un peso en $\mathbb{D}$ y sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach de funciones analíticas en $\mathbb{D}$. Sea φ una función entera. Si el operador de superposición S_φ es un operador acotado de X en H_v^∞, entonces $S_{\varphi'}$ aplica X en H_v^∞.*

Demostración.

Supongamos que S_φ es un operador acotado de X en H_v^∞. Entonces existe una constante positiva L tal que

$$\|S_\varphi(g)\|_v \le L\|g\|, \quad g \in X,$$

lo que equivale a decir que

$$|S_\varphi(g)(\xi)| = |\varphi(g(\xi))| \le \frac{L\|g\|}{v(\xi)}, \quad g \in X, \quad \xi \in \mathbb{D}. \tag{2.1}$$

Sea $A = \max_{|\xi|\le 1} |\varphi'(\xi)|$.

Tomemos $f \in X$ y $z \in \mathbb{D}$.

- Si $|f(z)| \leq 1$, recordando que v es radial y que $v(r)$ decrece cuando r crece en $[0,1)$, deducimos que

$$|S_{\varphi'}(f)(z)| \;=\; |\varphi'(f(z))| \leq A \leq \frac{Av(0)}{v(z)}.$$

- Supongamos ahora que $|f(z)| \geq 1$. Tomemos entonces $R = 2|f(z)|$. Como de costumbre, si F es un función entera y $0 \leq r < \infty$, $M(r,F)$ denotará el máximo de $|F|$ en la circunferencia de centro 0 y radio R, es decir,

$$M(r,F) \;=\; \max_{|z|=r} |F(z)|.$$

Utilizando la fórmula integral de Cauchy para la primera derivada y simples estimaciones, obtenemos

$$\begin{aligned}
|S_{\varphi'}(f)(z)| &= |\varphi'(f(z))| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - f(z))^2}\, d\zeta \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\, 2\pi R\, \frac{M(2|f(z)|,\varphi)}{R^2} \\
&= \frac{M(2|f(z)|,\varphi)}{2|f(z)|} \\
&\leq \frac{1}{2}\, M(2|f(z)|,\varphi).
\end{aligned}$$

Tomemos ahora $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$M(2|f(z)|,\varphi) \;=\; \left|\varphi\left(2e^{i\theta} f(z)\right)\right|$$

y consideremos

$$g(\xi) \;=\; 2e^{i\theta} f(\xi), \quad \xi \in \mathbb{D}.$$

Entonces tenemos

$$|S_{\varphi'}(f)(z)| \leq \frac{1}{2}\, |\varphi(g(z))| \;=\; \frac{1}{2}\, |S_\varphi(g)(z)|\,. \tag{2.2}$$

Ahora, como $f \in X$ se tiene que $g \in X$ y $\|g\| = 2\|f\|$. Utilizando (2.1), deducimos que

$$|S_\varphi(g)(\xi)| \leq \frac{L\|f\|}{v(\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{D}.$$

Esto y (2.2) dan

$$|S_{\varphi'}(f)(z)| \leq \frac{L\|f\|}{2v(z)}.$$

Uniendo ambos casos, obtenemos que

$$|S_{\varphi'}(f)(z)| \leq \frac{C}{v(z)}, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D},$$

con $C = \text{máx}\left(Av(0), \frac{L\|f\|}{2}\right)$. Esto nos da que $S_{\varphi'}(f) \in H_v^\infty$ como queríamos demostrar. □

Si v es un peso $\mathbb{D}$, definimos DH_v^∞ como:

$$DH_v^\infty = \{f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) : f' \in H_v^\infty\}.$$

El espacio DH_v^∞ es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_{D,v}$ definida por

$$\|f\|_{D,v} = |f(0)| + \|f'\|_v.$$

A continuación vamos a ver que el Teorema 1 sigue siendo cierto si en su enunciado sustituimos H_v^∞ por DH_v^∞.

Teorema 2. *Sea v un peso en $\mathbb{D}$ y sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach de funciones holomorfas en $\mathbb{D}$. Sea φ una función entera y supongamos que el operador de superposición S_φ es un operador acotado de X en DH_v^∞. Entonces $S_{\varphi'}$ aplica X en DH_v^∞.*

Demostración.

El hecho de que S_φ es un operador acotado de X en DH_v^∞ quiere decir que existe una constante $A > 0$ tal que

$$|\varphi(f(0))| + v(z)|\varphi'(f(z))| \cdot |f'(z)| \leq A\|f\|, \quad f \in X, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Tomemos $f \in X$. Hemos de probar que $S_{\varphi'}(f) \in DH_v^\infty$.

Se tiene

$$\begin{aligned} S_{\varphi'}(f) \in DH_v^\infty &\Leftrightarrow \varphi' \circ f \in DH_v^\infty \\ &\Leftrightarrow (\varphi' \circ f)' = (\varphi'' \circ f)\, f' \in H_v^\infty \\ &\Leftrightarrow \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z)|\varphi''(f(z))| \cdot |f'(z)| < \infty. \end{aligned}$$

Tomemos $z \in \mathbb{D}$ y razonemos como en la demostración del Teorema 1 en el caso $|f(z)| \geq 1$, tomando $R = 2|f(z)|$, para obtener

$$\begin{aligned} |\varphi''(f(z))| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{\varphi'(\zeta)}{(\zeta - f(z))^2}\, d\zeta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\, 2\pi R\, \frac{M(2|f(z)|, \varphi')}{R^2} \\ &= \frac{M(2|f(z)|, \varphi')}{2|f(z)|} \\ &\leq \frac{1}{2}\, M(2|f(z)|, \varphi'). \end{aligned}$$

Tomemos ahora $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$M(2|f(z)|, \varphi') = |\varphi'(2e^{i\theta} f(z))|$$

y definamos

$$g(\xi) = 2e^{i\theta} f(\xi), \quad \xi \in \mathbb{D}.$$

Se tiene que

$$g \in X \quad \text{y} \quad \|g\| = 2\|f\|$$

y que

$$\begin{aligned} |\varphi''(f(z))|\,|f'(z)|v(z) &\leq \frac{1}{2}\,|\varphi'(g(z))|\,\frac{|g'(z)|}{2}v(z) \\ &= \frac{1}{4}\,|\varphi'(g(z))|\,g'(z)|v(z) \\ &\leq \frac{1}{4}A\|g\| \\ &= \frac{1}{2}\|f\|. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que $S_{\varphi'}(f) \in DH_v^\infty$ como queríamos demostrar. □

Si tomamos $v(z) = (1-|z|^2)$ entonces el espacio DH_v^∞ es el espacio de Bloch $\mathcal{B}$. Por tanto, tenemos el siguiente resultado, como caso particular del Teorema 2.

Corolario 1. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach de funciones analíticas en $\mathbb{D}$ y sea φ una función entera. Si el operador de superposición S_φ es un operador acotado de X en el espacio de Bloch $\mathcal{B}$, entonces $S_{\varphi'}(X) \subset \mathcal{B}$.*

2.3 Sucesiones de ceros y operadores de superposición

Ya vimos al comienzo de este capítulo que las funciones enteras φ que actúan de X en Y por superposición han sido caracterizadas para un buen número de pares (X, Y) de espacios de funciones holomorfas en el disco unidad $\mathbb{D}$. Recordemos el Teorema I, probado por Álvarez, Márquez y Vukotić en [4], que establece que las constantes son las únicas funciones enteras que actúan por superposición del espacio de Bergman A^p $(0 < p < \infty)$ en el espacio $\mathcal{B}$ de las funciones de Bloch. La demostración de este hecho presentada en [4] hace uso de resultados sobre aplicaciones conformes del disco unidad en sectores. En esta sección utilizaremos ideas completamente distintas para obtener la siguiente extensión del Teorema I.

Teorema 3. *Supongamos que* $0 < p < \infty$ *y* $\alpha > -1$. *Sea* φ *una función entera. Entonces el operador de superposición* S_φ *aplica el espacio de Bergman con peso* A^p_α *en el espacio de Bloch* $\mathcal{B}$ *si y sólo si* φ *es constante.*

Cuando $\alpha = 0$, este teorema se reduce al mencionado Teorema I. Indiquemos que en el capítulo tercero de la tesis obtendremos una extensión del Teorema 3.

Nuestra demostración del Teorema 3 hará uso de resultados sobre las sucesiones de ceros de los espacios en cuestión.

Si X es un subespacio de $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$, entonces diremos que una sucesión de puntos $\{z_k\}$ en $\mathbb{D}$ es una "sucesión de ceros de X", o una "X-sucesión de ceros" si existe una función $f \in X$ que se anula precisamente en los puntos de esa sucesión (contando multiplicidades). Es bien sabido que, como expusimos en el capítulo primero, las sucesiones de ceros de cualquiera de los espacios H^p $(0 < p \leq \infty)$ son las sucesiones de Blaschke. Pasemos a presentar algunos resultados sobre las sucesiones de ceros de los espacios de Bergman con peso A^p_α y del espacio de Bloch $\mathcal{B}$.

Horowitz probó en [62] el siguiente resultado.

Teorema K. *Supongamos que* $0 < p < \infty$ *y* $\alpha > -1$.

(i) Si $g \in A^p_\alpha$, $g(0) \neq 0$, *y* $\{z_k\}$ *es su sucesión de ceros, entonces*

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{|z_k|} = \mathrm{O}\left(n^{(1+\alpha)/p}\right). \tag{2.3}$$

(ii) La estimación en (i) es la mejor posible en el siguiente sentido: Para todo $\varepsilon > 0$, *existe una función* $g \in A^p_\alpha$ *con* $g(0) \neq 0$ *cuya sucesión de ceros* $\{z_k\}$ *satisface*

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{|z_k|} \neq \mathrm{O}\left(n^{(1+\alpha)/(p(1+\varepsilon))}\right). \tag{2.4}$$

Realmente, Horowitz demostró estos resultados para $\alpha > 0$ y Sedletskii [78] los demostró para todo $\alpha > -1$. Indiquemos que razonando como en la demostración de [48, Teorema 1] se obtiene que $\mathrm{O}\left(n^{(1+\alpha)/p}\right)$ puede reemplazarse por $\mathrm{o}\left(n^{(1+\alpha)/p}\right)$ en (2.3).

Girela, Nowak y Waniurski probaron en [48] que si f es una función de Bloch con $f(0) \neq 0$ y $\{\xi_k\}$ es su sucesión de ceros, entonces

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{|\xi_k|} = \mathrm{O}\left((\log n)^{1/2}\right). \tag{2.5}$$

Más tarde, Nowak [72] demostró que $\mathrm{O}\left((\log n)^{1/2}\right)$ no puede reemplazarse por $\mathrm{o}\left((\log n)^{1/2}\right)$.

Ahora ya estamos en disposición de presentar nuestra demostración del Teorema 3.

Demostración del Teorema 3.

Es trivial que si φ es constante entonces $S_\varphi(A^p_\alpha) \subset \mathcal{B}$.

Supongamos ahora que φ no es constante y que $S_\varphi(A^p_\alpha) \subset \mathcal{B}$.

Tomemos $\varepsilon > 0$ y, utilizando el Teorema K, tomemos una función $g \in A^p_\alpha$ con $g(0) \neq 0$ tal que su sucesión de ceros $\{z_k\}$ satisface (2.4). Como $g \in A^p_\alpha$ se tiene que

$$S_\varphi(g) = \varphi \circ g \in \mathcal{B}.$$

Como ni g ni φ son constantes, es claro que $\varphi \circ g$ tampoco lo es. Sea ahora $F = S_\varphi(g) - \varphi(0)$. Como $S_\varphi(g)$ es una función de Bloch, se sigue que

$$F = S_\varphi(g) - \varphi(0) = \varphi \circ g - \varphi(0) \in \mathcal{B}.$$

Ahora, es claro que $F \not\equiv 0$ y que todos los ceros de g son ceros de F. En otras palabras, la sucesión $\{z_k\}$ está contenida en la sucesión $\{\xi_k\}$ de los ceros de F. Como $\{z_k\}$ satisface (2.4), se sigue que $\{\xi_k\}$ no satisface (2.5). Esto está en contradicción con que $F \in \mathcal{B}$. $\square$

Los argumentos utilizados para probar el Teorema 3 dan el siguiente resultado.

Teorema 4. *Sean X y Y dos espacios de funciones analíticas en $\mathbb{D}$ que satisfacen las condiciones siguientes.*

(i) X contiene las funciones constantes.

(ii) Existe una función $f \in X$ con $f(0) \neq 0$ cuya sucesión de ceros $\{z_k\}$ no es una sucesión de ceros de Y.

Sea φ una función entera. Entonces el operador de superposición S_φ aplica X en Y si y sólo si φ es constante.

Hay muchas posibilidades de elección de los espacios X e Y en el Teorema 4 y cada una de ellas nos llevaría a un resultado concreto. Vamos a mencionar sólo un par de los mismos.

Como ya hemos mencionado anteriormente, las sucesiones de Blaschke son las sucesiones de ceros de cualquiera de los espacios de Hardy H^p $(0 < p \leq \infty)$ y también de la clase Nevannlinna N (véase [34]). De hecho, utilizando la fórmula de Jensen se sigue que si $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ y $f \not\equiv 0$ entonces su sucesión de ceros $\{z_k\}$ satisface la condición de Blaschke si y sólo si

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(re^{it})|\, dt \,<\, \infty.$$

Podemos enunciar el siguiente resultado como consecuencia del Teorema 4.

Corolario 2. *Sea Y un espacio de funciones analíticas en $\mathbb{D}$ tal que todas las sucesiones de ceros de Y son sucesiones de Blaschke y sea v un peso $\mathbb{D}$. Sea φ una función entera. Entonces el operador de superposición S_φ aplica H_v^∞ en Y si y sólo si φ es constante.*

Demostración.

Por el Teorema 4, es suficiente probar que existe una función $f \in H_v^\infty$, $f \not\equiv 0$, cuya sucesión de ceros $\{z_k\}$ no sea una sucesión de Blaschke.

Sea $\psi(r) = 1/v(r)$ ($r \in [0,1)$). Entonces ψ es una función positiva, continua y creciente en $[0,1)$, y $\lim_{r\to 1} \psi(r) \to \infty$. Utilizando el Lema 2 en p. 80 de [35], podemos elegir una sucesión creciente de números enteros positivos $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^{n_k} \leq \frac{1}{2} \log \psi(r), \quad 0 \leq r < 1.$$

Entonces la función f construida en p. 94 de [35] con esta sucesión $\{n_k\}$ pertenece a H_v^∞ y su sucesión de ceros no es una sucesión de Blaschke. $\square$

Cuando v es el peso definido por $v(z) = \left(\log \frac{e}{1-|z|}\right)^{-1}$ $(z \in \mathbb{D})$, el espacio H_v^∞ es el formado por las funciones $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ tales que

$$|f(z)| = \mathrm{O}\left(\log \frac{1}{1-|z|}\right), \quad \text{cuando } |z| \to 1. \tag{2.6}$$

Este espacio es el llamado A^0 en [48] y $H_{\log}^\infty$ en [49] y en [13]. El espacio $H_{\log}^\infty$ y el espacio Bloch están estrechamente relacionados. Es bien sabido que una funcion de Bloch f satisface (2.6). Así pues,

$$\mathcal{B} \subset H_{\log}^\infty.$$

Como la función $f(z) = \log \frac{1}{1-z}$ es una función Bloch, la condición de crecimiento (2.6) es la mejor posible para el espacio de Bloch. Bao y Ye [13] identificaron el espacio $H_{\log}^\infty$ como el dual de un subespacio de tipo Luecking de A^1 y demostraron que el espacio Bloch no es denso en $H_{\log}^\infty$. Utilizando el Teorema 4 y [48, Teorema 2] obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3. *Sea φ una función entera, entonces el operador de superposición S_φ aplica $H_{\log}^\infty$ en el espacio de Bloch $\mathcal{B}$ si y sólo si φ es constante.*

2.4 Operadores de superposición actuando entre espacios de norma mixta

Como ya hemos mencionado, Bonet y Vukotić [19] caracterizaron las funciones enteras φ tales que S_φ aplica H_u^∞ en H_v^∞ para distintos pares de pesos en $\mathbb{D}$, (u, v).

Tomando $\alpha > 0$ y $v(z) = (1 - |z|)^\alpha$, el espacio H_v^∞ es

$$H(\infty, \alpha) = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) : M_\infty(r, f) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{(1-r)^\alpha} \right) \right\}.$$

Entre otros resultados, Bonet y Vukotić probaron el siguiente.

Teorema L. *Sean $0 < \alpha, \beta < \infty$ y φ una función entera. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

(i) *φ es un polinomio de grado menor o igual que β/α.*

(ii) *$S_\varphi(H(\infty, \alpha)) \subset H(\infty, \beta)$.*

(iii) *S_φ es un operador continuo de $H(\infty, \alpha)$ en $H(\infty, \beta)$.*

Para $\alpha > 0$ y $0 < p < \infty$, definamos

$$H(p, \alpha) = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) : M_p(r, f) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{(1-r)^\alpha} \right) \right\}.$$

A la vista del Teorema L, resulta natural plantearse la siguiente cuestión.

Cuestión 1. *Caracterizar las funciones enteras φ tales que*

$$S_\varphi(H(p, \alpha)) \subset H(p, \beta).$$

De hecho, podemos plantearnos una cuestión más general, la de estudiar los operadores de superposición actuando entre espacios de norma mixta.

El espacio de norma mixta $H(p,q,\alpha)$ $(0 < p,q \leq \infty,\ \alpha > 0)$ es el espacio formado por las funciones $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ para las que $\|f\|_{p,q,\alpha} < \infty$, donde,

$$\|f\|_{p,q,\alpha} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1} M_p^q(r,f)\,dr\right)^{1/q}, & \text{si } 0 < q < \infty, \\ \displaystyle\sup_{0\leq r<1} (1-r)^{\alpha} M_p(r,f), & \text{si } q = \infty. \end{cases}$$

Estos espacios tienen su origen en el trabajo de Hardy y Littlewood [55], pero la primera definición explícita fue dada por Flett [37, 38]. Desde entonces, los espacios $H(p,q,\alpha)$ se han estudiado en muchos artículos (véase, por ejemplo, [1, 9, 12, 16, 24, 39, 63, 73, 75, 82] y las referencias que en los mismos se dan). Notemos que el espacio de Hardy H^p puede ser identificado con el espacio de norma mixta en el caso límite $H(p,\infty,0)$. Por su parte, se tiene que $A^p_\alpha = H(p,p,(\alpha+1)/p)$.

Con esta notación el Teorema L puede enunciarse como sigue:

Sea φ una función entera y sean $0 < \alpha,\beta < \infty$. Entonces el operador de superposición S_φ aplica $H(\infty,\infty,\alpha)$ en $H(\infty,\infty,\beta)$ si y sólo si φ es un polinomio de grado menor o igual que β/α.

En esta sección caracterizaremos las funciones enteras φ tales que el operador de superposición S_φ aplica el espacio $H(p,q,\alpha)$ en el espacio $H(s,t,\beta)$, para dos tripletas cualesquiera de parámetros (p,q,α), (s,t,β) con $0 < p,q,s,t \leq \infty$ y $0 < \alpha,\beta < \infty$, extendiendo así el Teorema L. Esta cuestión está estrechamente relacionada con las inclusiones entre espacios de norma mixta. Una caracterización completa de esas inclusiones fue probada en [9, 10] (véase también [12, 23, 63] para algunos resultados parciales). Nosotros probaremos el siguiente resultado.

Teorema 5. *Sea φ una función entera y $0 < p,q,s,t \leq \infty$, $0 < \alpha,\beta < \infty$. Entonces el operador de superposición S_φ aplica $H(p,q,\alpha)$ en $H(s,t,\beta)$ si y sólo si φ es un polinomio de grado N, donde N satisface una de las cuatro condiciones siguientes:*

(i) $\frac{p}{N} < s$ *y* $N < \frac{\beta+\frac{1}{s}}{\alpha+\frac{1}{p}}$.

(ii) $\frac{p}{N} < s,\ N = \frac{\beta+\frac{1}{s}}{\alpha+\frac{1}{p}}$ *y* $\frac{q}{N} \leq t$.

(iii) $\frac{p}{N} \geq s$ *y* $\alpha N < \beta$.

(iv) $\frac{p}{N} \geq s,\ \alpha N = \beta$ *y* $\frac{q}{t} \leq t$.

Además, en cualquiera de los cuatro casos el operador S_φ *es acotado y continuo de* $H(p,q,\alpha)$ *en* $H(s,t,\beta)$.

Antes de dar la demostración del Teorema 5 presentaremos una serie de resultados ya conocidos y otros resultados previos que hemos probado para llegar a la conclusión que hemos enunciado.

Vamos a empezar con la siguiente estimación para las medias integrales de funciones en el espacio $H(p,q,\alpha)$ (véase, e. g., [63, p. 146]).

Lema M. *Si* $0 < p, q \leq \infty$, $0 < \alpha < \infty$ *y* $f \in H(p,q,\alpha)$ *entonces*

$$M_p(r,f) \lesssim \frac{\|f\|_{p,q,\alpha}}{(1-r)^\alpha},$$
$$M_\infty(r,f) \lesssim \frac{\|f\|_{p,q,\alpha}}{(1-r)^{\alpha+\frac{1}{p}}}.$$

A continuación vamos a considerar funciones del tipo, $(1-z)^{-\gamma}\left(\log\frac{e}{1-z}\right)^{-c}$ con γ y c constantes no negativas. Estas funciones son muy útiles como ejemplos típicos de funciones que pertenecen a distintos espacios. En el siguente lema que puede verse en [12, Lema 2] (véase también [9]) se determina cuáles de estas funciones pertenecen a los espacios $H(p,q,\alpha)$.

Lema N. *Para* $\gamma > 0$ *y* $c > 0$, *consideremos*

$$F_\gamma(z) = \frac{1}{(1-z)^\gamma}, \qquad F_{\gamma,c}(z) = \frac{1}{(1-z)^\gamma}\left(\log\frac{e}{1-z}\right)^{-c}, \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

Supongamos que $0 < p \leq \infty$, $0 < q < \infty$ *y* $\alpha > 0$. *Entonces* *(i)* $F_\gamma \in H(p,q,\alpha)$ *si y sólo si* $\gamma < \alpha + \frac{1}{p}$.

(ii) $F_\gamma \in H(p,\infty,\alpha)$ *si y sólo si* $\gamma \le \alpha + \frac{1}{p}$.

(iii) $F_{\gamma,c} \in H(p,q,\alpha)$ *si y sólo si* $\gamma < \alpha + \frac{1}{p}$, *o* $\gamma = \alpha + \frac{1}{p}$ *y* $c > \frac{1}{q}$.

(iv) $F_{\gamma,c} \in H(p,\infty,\alpha)$ *si y sólo si* $\gamma \le \alpha + \frac{1}{p}$.

Denotaremos por $\mathcal{L}$ al conjunto de todas las funciones $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ que vienen dadas por una serie de potencias lagunar o de Hadamard, es decir, f es de la forma

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, z^{n_k}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

donde la sucesión de enteros no negativos $\{n_k\}$ satisface $n_{k+1} \ge \lambda n_k$, para todo k, para una cierta constante $\lambda > 1$. En el siguiente lema, que puede verse en [63, Capítulo 8] o en [73, p. 102] y que es una consecuencia del trabajo de [71], se presenta una caracterización de las funciones en $\mathcal{L} \cap H(p,q,\alpha)$.

Lema Ñ. *Sea* $f \in \mathcal{L}$, $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, z^{n_k}$ $(z \in \mathbb{D})$ *con* $n_{k+1} \ge \lambda n_k$, *para todo* k, *y* $\lambda > 1$. *Supongamos que* $0 < p, q \le \infty$ *y* $\alpha > 0$. *Entonces* $f \in H(p,q,\alpha)$ *si y sólo si la sucesión* $\{a_k/n_k^\alpha\}$ *pertenece al espacio* ℓ^q.

Finalmente y para terminar con esta serie de resultados previos ya probados, vamos a enunciar el resultado de Arévalo [9, Teoremas 1 y 2] que da una caracterización completa de las inclusiones entre espacios de norma mixta.

Teorema O. *Supongamos que* $0 < p, q, s, t \le \infty$, $0 < \alpha, \beta < \infty$.

(i) Si $p \ge s$, *entonces*

$$H(p,q,\alpha) \subset H(s,t,\beta) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \alpha < \beta, \quad o \\ \alpha = \beta \;\; y \;\; q \le t. \end{cases}$$

(ii) Si $p < s$, entonces

$$H(p,q,\alpha) \subset H(s,t,\beta) \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} \alpha + \dfrac{1}{p} < \beta + \dfrac{1}{s}, \quad o \\ \alpha + \dfrac{1}{p} = \beta + \dfrac{1}{s} \quad y \quad q \leq t. \end{cases}$$

Vamos a dividir la demostración del Teorema 5 en varios pasos. Primero utilizaremos argumentos semejantes a algunos de la demostración de la Proposición 3. 1 de [19] para probar que ser un polinomio es una condición necesaria en φ para que S_φ aplique un espacio de norma mixta en otro.

Lema 1. *Sean φ una función entera y $0 < p,q,s,t \leq \infty$, $0 < \alpha,\beta < \infty$. Si el operador de superposición S_φ aplica $H(p,q,\alpha)$ en $H(s,t,\beta)$ entonces φ es un polinomio de grado como máximo $\frac{\beta+\frac{1}{s}}{\alpha+\frac{1}{p}}$.*

Demostración.

Sea φ una función entera y supongamos que S_φ aplica $H(p,q,\alpha)$ en $H(s,t,\beta)$. Para concluir que S_φ es un polinomio de grado como máximo $\frac{\beta+\frac{1}{s}}{\alpha+\frac{1}{p}}$, por una estimación estandard de Cauchy, será suficiente probar que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{M(r,\varphi)}{r^A} = 0 \tag{2.7}$$

para todo $A > \frac{\beta+\frac{1}{s}}{\alpha+\frac{1}{p}}$ (véase, e. g., [58, Teorema 8. 2. 3]).

Así pues, tomemos $A > \frac{\beta+\frac{1}{s}}{\alpha+\frac{1}{p}}$ y supongamos que (2.7) no es verdadera. Tomemos $\gamma < \alpha + \frac{1}{p}$ y sea $g(z) = (1-z)^{-\gamma}$ $(z \in \mathbb{D})$. Utilizando el Lema N, vemos que $g \in H(p,q,\alpha)$.

Como (2.7) es falso, existen $\delta > 0$ y una sucesión $\{w_n\} \subset \mathbb{C}$ con $|w_n| > 1$, para todo n, y $\lim_{n\to\infty} |w_n| = \infty$ tal que

$$|\varphi(w_n)| \geq \delta |w_n|^A, \quad \text{para todo } n.$$

Razonando como en [19, p. 315], podemos asumir que $|\arg w_n| < \frac{\gamma\pi}{4}$ para todo n. Entonces, para todo n, consideremos z_n la preimagen de w_n por g:

$$z_n = 1 - \frac{1}{w_n^\gamma}, \quad (1-z_n)^{-1} = w_n^{1/\gamma}.$$

Para todo n, $|1-z_n| < 1$ y $|\arg(1-z_n)| < \pi/4$, con lo que, z_n pertenece a un dominio de Stolz con vértice 1. Así pues, existe $c > 0$ tal que $|1-z_n| \leq c(1-|z_n|)$ para cada n.

Como $g \in H(p,q,\alpha)$, $S_\varphi(g) = \varphi \circ g \in H(s,t,\beta)$. Utilizando el Lema M, deducimos que

$$|\varphi(w_n)| = |\varphi(g(z_n))| \lesssim \frac{1}{(1-|z_n|)^{\beta+\frac{1}{s}}}.$$

Entonces tenemos

$$\delta|w_n|^A \leq |\varphi(g(z_n))| \lesssim \frac{1}{(1-|z_n|)^{\beta+\frac{1}{s}}} \asymp |w_n|^{(\beta+\frac{1}{s})/\gamma}.$$

Como $\{|w_n|\} \to \infty$, esto implica que $A \leq (\beta + \frac{1}{s})/\gamma$. Como $\gamma \in (0, \alpha + \frac{1}{p})$ es arbitrario, obtenemos que $A \leq (\beta + \frac{1}{s})/(\alpha + \frac{1}{p})$, lo cual contradice nuestra hipótesis.

□

Lema 2. *Sean P un polinomio de grado n, $0 < p,q,s,t \leq \infty$ y $0 < \alpha, \beta < \infty$. Supongamos que el operador de superposición S_P aplica $H(p,q,\alpha)$ en $H(s,t,\beta)$ y sea Q un polinomio de grado k con $0 \leq k \leq n$. Entonces S_Q aplica $H(p,q,\alpha)$ en $H(s,t,\beta)$. Además, existen dos constantes positivas C_1, C_2 independientes de f tales que*

$$\|S_Q(f)\|_{s,t,\beta}^t \leq C_1 \|S_P(f)\|_{s,t,\beta}^t + C_2, \quad \textit{para toda } f \in H(p,q,\alpha).$$

Demostración.

Probaremos el resultado asumiendo que s y t son finitos. Para el resto de los casos sólo habrá que hacer pequeñas modificaciones.

Como $k \leq n$, existen $R, C > 0$ tales que

$$|Q(z)| \leq C|P(z)|, \quad \text{si } |z| \geq R.$$

Tomemos $f \in H(p,q,\alpha)$. Sabemos que $P \circ f \in H(s,t,\beta)$ y queremos probar que $Q \circ f \in H(s,t,\beta)$. Para $0 < r < 1$, sea

$$A_r = \{\theta \in [0,2\pi] : |f(re^{i\theta})| > R\}, \quad B_r = [0,2\pi] \setminus A_r.$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (1-r)^{\beta t-1} M_s(r, Q\circ f)^t \, dr \\
&= \int_0^1 (1-r)^{\beta t-1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |Q\left(f(re^{i\theta})\right)|^s \, d\theta \right)^{t/s} dr \\
&= \int_0^1 (1-r)^{\beta t-1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{A_r} |Q\left(f(re^{i\theta})\right)|^s \, d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{B_r} |Q\left(f(re^{i\theta})\right)|^s \, d\theta \right)^{t/s} dr \\
&\le \int_0^1 (1-r)^{\beta t-1} \left(\frac{C^s}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P\left(f(re^{i\theta})\right)|^s \, d\theta + M(R,Q)^s \right)^{t/s} dr \\
&\lesssim \int_0^1 (1-r)^{\beta t-1} \left(\frac{C^s}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P\left(f(re^{i\theta})\right)|^s \, d\theta \right)^{t/s} + M(R,Q)^t \\
&\lesssim \|S_P(f)\|_{s,t,\beta}^t + M(R,Q)^t.
\end{aligned}$$

Así pues, $S_Q(f) = Q \circ f \in H(s,t,\beta)$ y $\|S_Q(f)\|_{s,t,\beta}^t \le C_1 \|S_P(f)\|_{s,t,\beta}^t + C_2$, donde C_1 y C_2 son constantes positivas independientes de f. $\square$

En nuestro siguiente resultado probaremos el Teorema 5 para el caso de monomios. Este resultado y los dos lemas anteriores implicarán el Teorema 5 fácilmente.

Proposición 1. *Supongamos que $0 < p,q,s,t \le \infty$, $0 < \alpha, \beta < \infty$. Sea N un número entero no negativo y sea φ definida por $\varphi(z) = z^N$ $(z \in \mathbb{C})$. Entonces el operador de superposición S_φ aplica $H(p,q,\alpha)$ en $H(s,t,\beta)$ si y sólo si N satisface una de las cuatro condiciones siguientes:*

(i) $\frac{p}{N} < s$ *y* $N < \frac{\beta + \frac{1}{s}}{\alpha + \frac{1}{p}}$.

(ii) $\frac{p}{N} < s$, $N = \frac{\beta + \frac{1}{s}}{\alpha + \frac{1}{p}}$ *y* $\frac{q}{N} \le t$.

(iii) $\frac{p}{N} \ge s$ *y* $\alpha N < \beta$.

(iv) $\frac{p}{N} \geq s,\ \alpha N = \beta$ *y* $\frac{q}{t} \leq t.$

Además, en cualquiera de los cuatro casos el operador S_φ *es acotado y continuo de* $H(p, q, \alpha)$ *en* $H(s, t, \beta)$.

Un simple cálculo da el siguiente resultado que necesitaremos en la demostración de la Proposición 1.

Lema 3. *Si* $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$, $0 < s, t \leq \infty$, $0 < \beta < \infty$, *y* N *es un entero positivo, entonces*

$$f \in H(s, t, \beta) \ \Leftrightarrow\ f^N \in H\left(\frac{s}{N}, \frac{t}{N}, \beta N\right).$$

Además

$$\|f\|_{s,t,\beta}^{t} = \|f^N\|_{\frac{s}{N}, \frac{t}{N}, \beta N}^{t/N}.$$

Demostración de la Proposición 1.

Utilizando el Lema 3 y el Teorema O, tenemos que si N satisface una de las condiciones (i), (ii), (iii), o (iv) entonces S_φ es un operador acotado de $H(p, q, \alpha)$ en $H(s, t, \beta)$. Como las inclusiones en el Teorema O son acotadas y los funcionales de evaluación puntual son continuos en los espacios de norma mixta, utilizando el Teorema F ([22, Teorema 1]), vemos que S_φ es un operador continuo de $H(p, q, \alpha)$ en $H(s, t, \beta)$.

A continuación vamos a probar la necesidad de una de las condiciones (i)-(iv).

- Si $\frac{p}{N} < s$ y $N > \frac{\beta + \frac{1}{s}}{\alpha + \frac{1}{p}}$, tomamos $\gamma = \frac{1}{N}\left(\beta + \frac{1}{s}\right)$. Usando el Lema N (i), vemos que $F_\gamma \in H(p, q, \alpha)$, pero $F_\gamma^N = F_{\gamma N} \notin H(s, t, \beta)$.

- Si $\frac{p}{N} < s$, $N = \frac{\beta + \frac{1}{s}}{\alpha + \frac{1}{p}}$ y $\frac{q}{N} > t$, tomamos $\gamma = \frac{1}{N}\left(\beta + \frac{1}{s}\right) = \alpha + \frac{1}{p}$ y $c = \frac{1}{Nt}$. El Lema N (iii) implica que $F_{\gamma,c} \in H(p, q, \alpha)$ pero $F_{\gamma,c}^N = F_{\gamma N, cN} \notin H(s, t, \beta)$.

- Si $\frac{p}{N} \geq s$ y $\alpha N > \beta$, sea

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2^n}, \quad z \in \mathbb{D},$$

donde $a_n = 2^{n\beta/N}$ $(n = 1, 2, \dots)$. Tenemos

$$\left\{ \frac{a_n}{2^{n\alpha}} \right\} = \left\{ 2^{-\left(n(\alpha - \frac{\beta}{N})\right)} \right\} \in \ell^q$$

y entonces, usando el Lema Ñ, deducimos que $f \in H(p, q, \alpha)$.

Para ver que $f^N \notin H(s, t, \beta)$ empezaremos recordando que, como f está dada por una serie de potencias de Hadamard, tenemos que

$$M_u(r, f) \asymp M_2(r, f), \quad \text{siempre que } 0 < u < \infty$$

(véase, e. g. Teorema 8. 20 en [87, p. 215, Vol. I]). Entonces, tenemos

$$M_s(r, f^N) = M_{sN}(r, f)^N \asymp M_2(r, f)^N. \tag{2.8}$$

Notemos que

$$\left\{ a_n 2^{-n\frac{\beta}{N}} \right\} = \{1\} \notin \ell^{Nt}$$

y, por lo tanto $f \notin H(2, Nt, \frac{\beta}{N})$. Asumiendo que $t < \infty$, esto junto con (2.8) implica que

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-r)^{\beta t - 1} M_s(r, f^N)^t \, dr &\asymp \int_0^1 (1-r)^{\beta t - 1} M_2(r, f)^{Nt} \, dr \\ &\asymp \int_0^1 (1-r)^{\frac{\beta}{N} Nt - 1} M_2(r, f)^{Nt} \, dr \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Así pues $f^N \notin H(s, t, \beta)$. Un argumento similar se utiliza para el caso $t = \infty$.

- Si $\frac{p}{N} \geq s$, $\alpha N = \beta$ y $\frac{q}{N} > t$, tomamos

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2^n}, \quad z \in \mathbb{D}$$

con

$$a_n = 2^{n^{\frac{\beta}{N}}} n^{-1/(Nt)}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Notemos que

$$\left\{\frac{a_n}{2^{n\alpha}}\right\} = \left\{\frac{1}{n^{1/(Nt)}}\right\} \in \ell^q, \quad \left\{\frac{a_n}{2^{n^{\frac{\beta}{N}}}}\right\} = \left\{\frac{1}{n^{1/Nt}}\right\} \notin \ell^{Nt}.$$

Entonces, argumentando como en el caso anterior, obtenemos que $f \in H(p, q, \alpha)$ y $f^N \notin H(s, t, \beta)$. Omitimos los detalles.

□

Ya estamos en disposición de finalizar la sección probando el Teorema 5.

Demostración del Teorema 5.

Asumamos en primer lugar que $0 < p, q, s, t \leq \infty$, $0 < \alpha, \beta < \infty$, y que φ es una función entera tal que el operador de superposición S_φ aplica $H(p, q, \alpha)$ en $H(s, t, \beta)$.

El Lema 1 implica que φ es un polinomio. Sea N su grado y $P(z) = z^N$ $(z \in \mathbb{C})$. Utilizando el Lema 2, vemos que S_P aplica $H(p, q, \alpha)$ en $H(s, t, \beta)$ y entonces, por la Proposición 1, tenemos que N satisface una de las cuatro condiciones (i), (ii), (iii), o (iv).

La Proposición 1 nos da que S_P es un operador acotado de $H(p, a, \alpha)$ en $H(s, t, \beta)$ y el Lema 1 implica que existen dos constantes positivas C_1, C_2 tales que

$$\|S_\varphi(f)\|_{s,t,\beta}^t \leq C_1 \|S_P(f)\|_{s,t,\beta}^t + C_2, \quad \text{para todo } f \in H(p, q, \alpha).$$

Estos dos hechos juntos nos dan que S_φ es un operador acotado de $H(p, q, \alpha)$ en $H(s, t, \beta)$. Utilizando el ya varias veces mencionado resultado de Boyd y Rueda [22, Teorema 1] como anteriormente, deducimos que S_φ es un operador continuo de $H(p, q, \alpha)$ en $H(s, t, \beta)$.

Pasemos a probar la otra implicación. Supongamos por tanto que φ es un polinomio cuyo grado N satisface una de las condiciones establecidas en el Teorema 5 y $P(z) = z^N$ $(z \in \mathbb{C})$. Utilizando la Proposición 1 deducimos que S_p es un operador acotado de $H(p,q,\alpha)$ en $H(s,t,\beta)$ y entonces el Lema 2 y [22, Teorema 1] implican que S_φ es un operador acotado y continuo de $H(p,q,\alpha)$ en $H(s,t,\beta)$. Así finaliza la demostración. $\square$

2.5 Operadores de superposición actuando entre espacios de Besov

2.5.1 Introducción

Como ya indicamos en el Capítulo 1, para $1 < p < \infty$, el espacio de Besov B^p es el formado por las funciones f que son holomorfas en $\mathbb{D}$ y satisfacen que $f' \in A^p_{p-2}$. Por tanto, una función $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ pertenece a B^p si y sólo si $\rho_p(f) < \infty$, donde

$$\rho_p(f) = \|f'\|_{A^p_{p-2}} = \left((p-1)\int_{\mathbb{D}}(1-|z|^2)^{p-2}|f'(z)|^p\,dA(z)\right)^{1/p}.$$

Todos los espacios B^p $(1 < p < \infty)$ son conformemente invariantes con respecto a la seminorma ρ_p. Un importante y bien estudiado caso es el espacio de Dirichlet clásico B^2 (usualmente denotado por $\mathcal{D}$) que consta de las funciones f que son analíticas en $\mathbb{D}$ tales que $\int_{\mathbb{D}}|f'(z)|^2\,dA(z) < \infty$. Mencionamos [8] como una referencia básica sobre los espacios de Besov y el texto de Zhu [86] como un muy buen lugar en el que encontrar mucha información sobre ellos.

El espacio B^1 requiere una definición especial: B^1 es el espacio formado por todas las funciones f que son analíticas en $\mathbb{D}$ y satisfacen que $f'' \in A^1$. Aunque la seminorma asociada a esta definición no es conformente invariante, el espacio B^1 sí lo es. Otra definición de B^1, con una seminorma conformemente invariante, es presentada en [8], donde B^1 es denotado por $\mathcal{M}$.

Es bien sabido que los espacios de Besov B^p $(1 \le p < q < \infty)$ forman una cadena ascendente de espacios y que todos ellos están contenidos en el espacio $BMOA$ (y, por tanto, también en el espacio de Bloch $\mathcal{B}$):

$$B^1 \subset B^q \subset B^p \subset \mathcal{B}, \quad 1 < q < p < \infty.$$

Así pues, tenemos que si $p < q$ entonces el espacio B^p es más pequeño que B^q. Este resultado puede mejorarse. En efecto, uno de los resultados probados por Buckley, Fernández y Vukotić en [23] es el siguiente.

Teorema P. *Supongamos que $1 \leq q < p < \infty$ y sea φ una función entera. Entonces el operador de superposición S_φ aplica B^p en B^q si y sólo si φ es constante.*

En esta sección vamos a presentar una demostración de este resultado distinta de la dada en [23]. Nuestra demostración se basará en la obtención de ciertos resultados sobre la integrabilidad radial de la derivada de funciones en $B^p \cap H^\infty$. Estos resultados serán obtenidos en la subsección 2.5.2.

2.5.2 Un resultado sobre integrabilidad radial de funciones acotadas en los espacios de Besov

La obtención de resultados sobre la integrabilidad a lo largo de radios de distintas clases de funciones holomorfas en el disco unidad $\mathbb{D}$ es una cuestión de gran importancia en variable compleja que ha atraído la atención de muchos autores a lo largo de los años. Uno de los más conocidos resultados en esta línea se debe a Rudin que en el artículo [77] demostró la existencia de una función $f \in H^\infty$ para la cual la variación radial

$$V(f,\theta) = \int_0^1 |f'(re^{i\theta})| dr$$

es infinita para todo θ excepto a lo sumo para aquellos θ que pertenecen a un conjunto de primera categoría y medida cero. Bourgain [20] resolvió una cuestión planteada por Rudin demostrando que si $f \in H^\infty$ entonces el conjunto de los θ para los que $V(f,\theta) < \infty$ no puede ser vacío sino que, de hecho, tiene dimensión de Hausdorff 1. Otros trabajos en los que se estudian propiedades de integrabilidad radial de distintas clases de funciones analíticas son [6, 11, 44, 45, 51, 52, 53, 54].

Pasemos a considerar cuestiones de este tipo para las derivadas de funciones en los espacios de Besov.

Por la definición, es claro que si $1 < p < \infty$ y $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ entonces

$$f \in B^p \Leftrightarrow \int_0^1 (1-r)^{p-2} M_p(r, f')^p \, dr < \infty. \tag{2.9}$$

Claramente, esto implica que si $1 < p < \infty$ y $f \in B^p$ entonces

$$\int_0^1 (1-r)^{p-2} |f'(re^{i\theta})|^p \, dr < \infty, \text{ para casi todo } \theta \in [0, 2\pi]. \tag{2.10}$$

A continuación probaremos que (2.9) y (2.10) son estimaciones “muy precisas” en un sentido muy fuerte, hecho que está conectado con la ya mencionada cadena de inclusiones

$$B^1 \subset B^q \subset B^p \subset \mathcal{B}, \quad 1 < q < p < \infty.$$

Con más precisión, para $1 < q < p < \infty$, probaremos la existencia de funciones $f \in B^p \cap H^\infty$ con $M_p(r, f')$ “tan grande como sea posible” y con f' teniendo “malas propiedades de integrabilidad de orden q a lo largo de todos los radios”.

Teorema 6. *Supongamos que $1 < q < p < \infty$ y sea ϕ una función positiva y creciente definida en $[0, 1)$ y que satisface las siguientes propiedades:*

$$\int_0^1 (1-r)^{p-2} \phi(r)^p \, dr < \infty \tag{2.11}$$

y

$$\int_0^1 (1-r)^{q-2} \phi(r)^q \, dr = \infty. \tag{2.12}$$

Entonces existe una función $f \in (B^p \cap H^\infty) \setminus B^q$ con las dos propiedades siguientes:

$$M_p(r, f') \gtrsim \phi(r)$$

y

$$\int_0^1 (1-r)^{q-2}|f'(re^{i\theta})|^q\,dr \;=\; \infty, \quad \textit{para cada } \theta \in [0, 2\pi]. \tag{2.13}$$

Un ejemplo típico de una función ϕ en las condiciones del Teorema 6 es

$$\phi(r) \;=\; \frac{1}{(1-r)^\alpha}, \quad 0 \le r < 1,$$

siendo α un número real con $1 - \frac{1}{q} \;<\; \alpha \;<\; 1 - \frac{1}{p}$.

El sustituto del Teorema 6 para $q = 1$ es el siguiente.

Teorema 7. *Supongamos que $1 < p < \infty$ y sea ϕ una función positiva y creciente definida en $[0, 1)$ satisfaciendo (2.11). Entonces existe una función $f \in (B^p \cap H^\infty) \setminus B^1$ con las dos propiedades siguientes:*

$$M_p(r, f') \;\gtrsim\; \phi(r)$$

y

$$\int_0^1 |f''(re^{i\theta})|\,dr \;=\; \infty, \quad \textit{para cada } \theta \in [0, 2\pi]. \tag{2.14}$$

Demostración del Teorema 6 y del Teorema 7.

Sea ϕ como en el Teorema 6. Consideremos

$$r_k \;=\; 1 - \frac{1}{2^k}, \qquad k \;=\; 1, 2, \ldots.$$

Como ϕ es creciente es fácil ver que (2.11) implica que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k(p-1)}}\phi(r_k)^p \;<\; \infty. \tag{2.15}$$

Para $k \ge 1$, definimos $a_k = \frac{1}{2^k}\phi(r_k)$ y sea

$$f(z) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{2^k}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Entonces f es una función analítica en $\mathbb{D}$ dada por una serie de potencias lagunar. Utilizando (2.15) vemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k |a_k|^p \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k(p-1)}}\phi(r_k)^p \;<\; \infty.$$

Entonces deducimos que $f \in B^p$ (véase, e. g., [32, Teorema D]). Sea q el exponente conjugado de p, es decir, $q = p/(p-1)$. Utilizando la desigualdad de Hölder con los exponentes p y q y (2.15), obtenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k/p}2^{k/q}}\phi(r_k) \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{kq/p}}\right)^{1/q} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k(p-1)}}\phi(r_k)^p\right)^{1/p} < \infty.$$

De esto se sigue que $f \in H^\infty$.

Ahora,

$$zf'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi(r_k) z^{2^k}, \quad z \in \mathbb{D},$$

y entonces tenemos que

$$M_2(r, f')^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} \phi(r_k)^2 r^{2^{k+1}}, \quad 0 < r < 1. \tag{2.16}$$

Para un $r \in (0,1)$ dado, tomamos $k \in \mathbb{N}$ tal que $r_k \leq r < r_{k+1}$. Utilizando (2.16), el hecho de que las funciones $M_2(\cdot, f')$ y ϕ son crecientes en $(0,1)$, y la simple estimación $r_k^{2^k} \gtrsim 1$, obtenemos que

$$M_2(r, f')^2 \geq M_2(r_k, f')^2 \geq \phi(r_{k+1})^2 r_k^{2^{k+2}} \gtrsim \phi(r_{k+1})^2 \geq \phi(r)^2. \tag{2.17}$$

Ahora, como f está dada por una serie de potencias lagunar se tiene que $M_p(r, f') \asymp M_2(r, f')$ (véase, e. g., Teorema 8. 20 en [87, Vol. I, p. 215]). Entonces, por (2.17),

$$M_p(r, f') \gtrsim \phi(r).$$

Realmente, tenemos que $M_\lambda(r, f') \asymp M_2(r, f')$ para todo λ finito y, consecuentemente podemos decir que

$$M_\lambda(r, f') \gtrsim \phi(r), \quad 0 < \lambda < \infty.$$

Utilizando esto con $\lambda = q$ y (2.12) obtenemos que $f \notin B^q$. Esto y [32, Teorema D] implica $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k |a_k|^q = \infty$. Entonces (2.13) se obtiene usando un resultado de Gnuschke [50, Teorema 1]. Esto finaliza la demostración del Teorema 6.

Como $B^1 \subset B^q$, $f \notin B^1$ y entonces, por el Teorema D de [32], $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k |a_k| = \infty$. Entonces el mencionado resultado de Gnuschke implica (2.14). Por lo tanto el Teorema 7 está demostrado. □

2.5.3 Una demostración del Teorema P

Demostración de Teorema P.

Supongamos que $1 \leq q < p < \infty$.

Es trivial que si φ es constante entonces S_φ aplica B^p en B^q.

Supongamos ahora que $S_\varphi(B^p) \subset B^q$. Hemos de probar que φ es constante. Como $B^1 \subset B^s$ para todo $s > 1$, es suficiente considerar el caso $q > 1$.

Supongamos entonces que $q > 1$ y razonemos por reducción al absurdo, es decir, asumamos que φ no es constante. Utilicemos el Teorema 6 para tomar una función $f \in B^p \cap H^\infty$ satisfaciendo (2.13). Como $S_\varphi(B^p) \subset B^q$, deducimos que

$$S_\varphi(f) \,=\, \varphi \circ f \in B^q,$$

esto es,

$$\int_{\mathbb{D}} (1 - |z|^2)^{q-2} \, |\varphi'(f(z)) f'(z)|^q \, dA(z) \,<\, \infty.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^1 (1 - r)^{q-2} \left|\varphi'(f(re^{i\theta}))\right|^q \left|f'(re^{i\theta})\right|^q \, dr \,<\, \infty, \text{ para casi todo } \theta \in [0, 2\pi]. \quad (2.18)$$

Claramente, $\varphi' \circ f \not\equiv 0$ y $\varphi' \circ f \in H^\infty$. Usando el Teorema de Fatou y el Teorema de Unicidad de Riesz [34, Capítulo 2], vemos que la función $\varphi' \circ f$ tiene un límite radial finito y distinto de cero para casi todo punto $e^{i\theta}$ de $\partial\mathbb{D}$. Esto, junto con (2.18), implica que

$$\int_0^1 (1 - r)^{q-2} \left|f'(re^{i\theta})\right|^q \, dr \,<\, \infty, \text{ para casi todo } \theta \in [0, 2\pi],$$

lo cual está en contradicción con (2.13). □

2.6 Algunos resultados adicionales sobre espacios de Besov

En esta sección vamos a presentar unos resultados sobre espacios de Besov que hemos obtenido como consecuencia o extensión de los teoremas 6 y 7, aunque no tienen que ver con operadores de superposición.

En la subsección 2.6.1 presentaremos una aplicación de los mencionados resultados sobre integrabilidad radial a multiplicadores entre espacios de Besov. Por su parte, la subsección 2.6.2 estará dedicada a obtener unos resultados sobre el crecimiento de la derivada de funciones en los espacios B^p que en determinados sentidos mejoran al Teorema 6.

2.6.1 Una aplicación del Teorema 6 a multiplicadores entre espacios de Besov

Recordemos que para $g \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$, el operador de multiplicación

$$M_g : \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) \to \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$$

se define por

$$M_g(f)(z) = g(z)f(z), \quad f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}),\ z \in \mathbb{D}.$$

Si X y Y son dos espacios de funciones analíticas en $\mathbb{D}$ (que siempre asumiremos que son espacios de Banach o F-espacios continuamente contenidos en $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$) y $g \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ entonces se dice que

g es un **multiplicador** *de X en Y si $M_g(X) \subset Y$.*

El espacio de todos los multiplicadores del espacio X en el espacio Y se denotará por $M(X,Y)$ y $M(X,X)$ será denotado simplemente por $M(X)$. Utilizando el teorema del grafo cerrado vemos que si $g \in M(X,Y)$ entonces M_g es un operador acotado de X en Y.

Es bien sabido que si X no es trivial entonces $M(X) \subset H^\infty$ (véase, e. g., [3, Lemma 1. 1] o [84, Lemma 1. 10]). Claramente, esto implica lo siguiente:

$$\text{Si } Y \text{ no es trivial e } Y \subset X \text{ entonces } M(X,Y) \subset H^\infty. \tag{2.19}$$

Existe una muy extensa literatura dedicada al estudio de los multiplicadores entre distintos espacios de funciones analíticas en $\mathbb{D}$. En particular, el espacio de multiplicadores $M(B^p, B^q)$ ha sido estudiado en un buen número de artículos. El siguiente resultado es parte de [41, Theorem 2].

Teorema Q. *Si* $1 \leq q < p < \infty$ *entonces* $M(B^p, B^q) = \{0\}$.

La demostración presentada en [41] utiliza, entre otros resultados, un teorema de descomposición para espacios de Besov [41, Theorem 13] que se basa en el correspondiente resultado de Rochberg para espacios de Bergman [76, Theorem 2. 2] y la desigualdad de Khinchine. Nosotros vamos a presentar a continuación una nueva, y pensamos que más simple, demostración del Teorema Q como consecuencia del Teorema 6.

Demostración del Teorema Q.

Como $B^1 \subset B^s$ para todo $s > 1$, será suficiente probar el resultado en el caso $1 < q < p < \infty$. Por lo tanto, asumiremos esto y que $M_g(B^p) \subset B^q$.

Supongamos que $g \not\equiv 0$.

Como la función constante 1 pertenece a B^p, se tiene que $g \in B^q$. Teniendo en cuenta (2.19) y la inclusión $B^q \subset B^p$, vemos que $g \in H^\infty$. Por tanto

$$g \in B^q \cap H^\infty.$$

Utilicemos el Teorema 6 para tomar una función $f \in B^p \cap H^\infty$ satisfaciendo (2.13). Como $M_g(B^p) \subset B^q$, tenemos que $M_g(f) = g \cdot f \in B^q$, esto es

$$\int_{\mathbb{D}} (1 - |z|^2)^{q-2} |g'(z)f(z) + g(z)f'(z)|^q \, dA(z) < \infty. \tag{2.20}$$

Como $g \in B^q$ y $f \in H^\infty$ vemos que

$$\int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{q-2} |g'(z)f(z)|^q \, dA(z) \, < \, \infty.$$

Esto y (2.20) implican que

$$\int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{q-2} |g(z)f'(z)|^q \, dA(z) \, < \, \infty.$$

y, por lo tanto,

$$\int_0^1 (1-r)^{q-2} |g(re^{i\theta})f'(re^{i\theta})|^q \, d\theta \, < \, \infty, \quad \text{para casi todo } \theta \in [0, 2\pi]. \tag{2.21}$$

Como $g \in H^\infty$ y $g \not\equiv 0$, g tiene límite radial finito y distinto de cero para casi todo punto $e^{i\theta}$ en $\partial\mathbb{D}$. Esto y (2.21) implican que

$$\int_0^1 (1-r)^{q-2} |f'(re^{i\theta})|^q \, d\theta \, < \, \infty, \quad \text{para casi todo } \theta \in [0, 2\pi].$$

Esto está en contradicción con (2.13). □

2.6.2 Crecimiento radial de las derivadas de funciones en los espacios de Besov. Extensiones del Teorema 6

Hallenbeck y Samotij estudiaron en [53] el crecimiento radial de las derivadas de funciones en el espacio de Dirichlet $\mathcal{D} = B^2$. En los artículos [36], [43] y [79] se demostró de distintas formas que si $f \in \mathcal{D}$, entonces

$$|f'(re^{i\theta})| \, = \, \mathrm{o}\left[\frac{1}{(1-r)^{1/2}}\right], \quad \text{cuando } r \to 1, \text{ para casi todo } \theta. \tag{2.22}$$

Nuestra primera aportación en esta subsección será obtener el análogo de este resultado para los espacios B^p, $1 < p < \infty$.

Teorema 8. *Sean* $1 < p < \infty$ *y* $f \in B^p$. *Entonces*

$$|f'(re^{i\theta})| = \mathrm{o}\left(\frac{1}{(1-r)^{1-\frac{1}{p}}}\right), \quad \textit{cuando } r \to 1,$$

para casi todo θ.

Hallenbeck y Samotij [53, Theorem 2] demostraron la muy fuerte precisión de la estimación (2.22) para funciones en el espacio de Dirichlet $\mathcal{D}$, en el siguiente sentido.

Teorema R. *Sea $\varepsilon : (0,1) \to \mathbb{R}$ una función positiva con $\varepsilon(r) \to 0$, cuando $r \to 1$. Entonces existe una función $g \in \mathcal{D}$ para la que*

$$\limsup_{r\to 1} \left[\frac{(1-r)^{1/2} \min\limits_{|z|=r} |g'(z)|}{\varepsilon(r)} \right] = 0.$$

Para demostrar este resultado, Hallenbeck y Samotij utilizaron una construcción similar a otra utilizada previamente por MacGregor y Hallenbeck en [51]. Nosotros obtendremos una extensión de este resultado a todos los espacios B^p, $1 < p < \infty$ y nuestra demostración de esta extensión del Teorema R será distinta y más simple que la dada por Hallenbeck y Samotij para el espacio $\mathcal{D} = B^2$. Demostraremos también otro resultado similar que demuestra la precisión del Teorema 8 en otro sentido. En concreto, probaremos los dos siguientes resultados.

Teorema 9. *Sea $1 \le p < \infty$ y sea $\varepsilon : (0,1) \to \mathbb{R}$ una función positiva con $\varepsilon(r) \to 0$, cuando $r \to 1$. Entonces existe $g \in B^p$ tal que*

$$\limsup_{r\to 1} \frac{(1-r)^{1-\frac{1}{p}} \min\limits_{|z|=r} |g'(z)|}{\epsilon(r)} = \infty.$$

Teorema 10. *Sea $1 < p < \infty$ y sea ϕ una función positiva y creciente, definida en $[0,1)$ y con*

$$\int_0^1 (1-r)^{p-2} \phi(r)^p \, dr < \infty. \tag{2.23}$$

Entonces existe $f \in B^p$ tal que

$$\limsup_{r\to 1^-} \frac{\min\limits_{|z|=r} |f'(z)|}{\phi(r)} = \infty.$$

Observemos que el Teorema 9 es la extensión del Teorema R a los espacios de Besov B^P, $1 < p < \infty$, mientras que el Teorema 10 muestra la precisión del Teorema 8 en un sentido ligeramente diferente.

Demostración del Teorema 8.

Sean $1 < p < \infty$ y $f \in B^p$. Un bien conocido resultado de Hardy y Littlewood [55] (véase también, e. g., [34, Theorem 5 .6], [37, Theorem 6], o [86]) implica que

$$\int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{2p-2}|f''(z)|^p\, dA(z) < \infty$$

y entonces se tiene que

$$\int_0^1 (1-\rho)^{2p-2}|f''(\rho e^{i\theta})|^p d\rho < \infty, \tag{2.24}$$

para casi todo θ. Tomemos θ para el que (2.24) es cierto y $\epsilon > 0$. Entonces existe $r_0 \in (0,1)$ tal que

$$\int_{r_0}^1 (1-r)^{2p-2}|f''(\rho e^{i\theta})|^p d\rho < \epsilon^p. \tag{2.25}$$

Se tiene

$$\int_0^r |f''(\rho e^{i\theta})| d\rho = \int_0^{r_0} |f''(\rho e^{i\theta})| d\rho + \int_{r_0}^r |f''(\rho e^{i\theta})| d\rho, \quad r_0 < r < 1. \tag{2.26}$$

Sea q el exponente conjugado de p, es decir, q está definido por $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Utilizando la desigualdad de Hölder con exponentes p y q y (2.25), vemos que para $r_0 < r < 1$, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{r_0}^r |f''(\rho e^{i\theta})| d\rho &= \int_{r_0}^r (1-\rho)^{2-\frac{2}{p}} |f''(\rho e^{i\theta})| (1-\rho)^{\frac{2}{p}-2} d\rho \\
&\leq \left(\int_{r_0}^r (1-\rho)^{2p-2}|f''(\rho e^{i\theta})|^p d\rho\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{r_0}^r (1-\rho)^{2(\frac{1}{p}-1)q} d\rho\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \epsilon \left(\int_0^r (1-\rho)^{-2}\right)^{1/q} \\
&\leq \frac{\epsilon}{(1-r)^{1/q}} \\
&= \frac{\epsilon}{(1-r)^{1-\frac{1}{p}}}.
\end{aligned}$$

Esto, junto con (2.26), demuestra que

$$(1-r)^{1-\frac{1}{p}} \int_0^r |f''(\rho e^{i\theta})| d\rho \,=\, \mathrm{o}(1), \quad \text{cuando } r \to 1,$$

lo que, dado que

$$|f'(re^{i\theta})| \,\leq |f'(0)| \,+\, \int_0^r |f''(\rho e^{i\theta})| d\rho,$$

implica que

$$|f'(re^{i\theta})| \,=\, \mathrm{o}\left((1-r)^{\frac{1}{p}-1}\right) \quad \text{cuando } r \to 1.$$

□

Para demostrar el Teorema 9 y el Teorema 10 haremos uso de los dos siguientes lemas. El primero de ellos es el Lema en p. 339 de [66].

Lema S. *Sea S_k es una sucesión de números positivos que satisface $\frac{S_k}{S_{k+1}} \to 0$, cuando $k \to \infty$, entonces se tiene que*

$$\sum_{j=1}^{k-1} S_j = \mathrm{o}(S_k), \quad \textit{cuando } k \to \infty$$

y

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} S_j^{-1} = \mathrm{o}(S_k^{-1}), \quad \textit{cuando } k \to \infty.$$

Lema 4. *Sea $1 < p < \infty$ y sea ϕ una función positiva y creciente, definida en $(0,1)$, y que satisface (2.23). Entonces existe una función ϕ_1, positiva y creciente, definida en $[0,1)$ y satisfaciendo*

$$\int_0^1 (1-r)^{p-2}\phi_1(r)\, dr \,<\, \infty \quad y \quad \lim_{r\to 1^-} \frac{\phi_1(r)}{\phi(r)} = \infty.$$

Demostración del Lema 4.

Para $k = 0, 1, 2, \ldots$, sea

$$r_k = 1 - 2^{-k}, \quad a_k = \int_{r_k}^{r_{k+1}} (1-r)^{p-2}\phi(r)^p\, dr.$$

Claramente, (2.23) implica que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$. Ahora, utilicemos un bien conocido teorema de Dini (véase el apartado 175 (p. 293) de [67]), para tomar una sucesión creciente de números positivos $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ con

$$\lim\{c_k\} \;=\; \infty \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k c_k < \infty.$$

Es fácil ver que la función ϕ_1 definida por

$$\phi_1(r) \;=\; c_k^{1/p}\phi(r), \quad r \in [r_k, r_{k+1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

satisface la conclusión del lema. $\Box$

Demostración del Teorema 9.

Claramente, es suficiente probar que existen $g \in B^p$, una constante $C > 0$ y una sucesión $\{r_k\}_{k=1}^{\infty} \subset (0,1)$, creciente y con $\lim\{r_k\} = 1$, para la que

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{(1-r_k)^{1-\frac{1}{p}} \min\limits_{|z|=r_k} |g'(z)|}{\epsilon(r_k)} \;\geq\; C. \tag{2.27}$$

Tomemos una sucesión $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números naturales satisfaciendo las dos siguientes condiciones

$$(i)\;\; \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \to \infty, \text{ cuando } n \to \infty.$$
$$(ii)\;\; \epsilon\left(1 - \frac{1}{\lambda_n}\right) \leq \frac{1}{n} \;\; \text{para todo } n.$$

Definamos

$$a_n \;=\; \frac{\lambda_n^{-1/p}}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

y

$$g(z) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Observemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |a_n|^p \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \;<\; \infty. \tag{2.28}$$

Tenemos que g es una función holomorfa en $\mathbb{D}$, dada por una serie de potencias lagunar (por (i)). Entonces (2.28) implica que $g \in B^p$.

Definamos

$$r_k = 1 - \frac{1}{\lambda_k}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Para $|z| = r_k$, se tiene

$$\begin{aligned} |g'(z)| &\geq |zg'(z)| \\ &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^{1-\frac{1}{p}}}{n} z^{\lambda_n} \right| \\ &\geq A_k - B_k - C_k. \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{\lambda_k^{1-\frac{1}{p}}}{k} \cdot \left(1 - \frac{1}{\lambda_k}\right)^{\lambda_k}, \\ B_k &\leq \sum_{n=1}^{k-1} \frac{\lambda_n^{1-\frac{1}{p}}}{n}, \\ C_k &\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\lambda_n^{1-\frac{1}{p}}}{n} r_k^{\lambda_n}. \end{aligned}$$

Se tiene

$$A_k = \frac{\lambda_k^{1-\frac{1}{p}}}{k} \left(1 - \frac{1}{\lambda_k}\right)^{\lambda_k} \geq e^{-2} \frac{\lambda_k^{1-\frac{1}{p}}}{k}. \tag{2.29}$$

Si llamamos $\alpha_j = \lambda_j^{1-\frac{1}{p}} \frac{1}{j}$, tenemos, utilizando (i),

$$\frac{\alpha_j}{\alpha_{j+1}} = \frac{j+1}{j} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_{j+1}}\right)^{1-\frac{1}{p}} \to 0, \quad \text{cuando } j \to \infty.$$

Entonces, aplicando el Lema S, obtenemos

$$B_k = \mathrm{o}\left(\frac{\lambda_k^{1-\frac{1}{p}}}{k}\right). \tag{2.30}$$

Ahora, si definimos $\beta_j^{-1} = \frac{\lambda_j^{1-\frac{1}{p}} r_k^{\lambda_j}}{j}$, tenemos

$$\frac{\beta_j}{\beta_{j+1}} = \frac{j}{j+1}\left(\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j}\right)^{1-\frac{1}{p}} r_k^{\lambda_{j+1}-\lambda_j} \leq \lambda_{j+1}^{1-\frac{1}{p}} r_k^{\frac{\lambda_{j+1}}{2}} \to 0, \quad \text{cuando } j \to \infty.$$

Aplicando de nuevo el Lema S deducimos que

$$C_k = \mathrm{o}\left(\frac{\lambda_k^{1-\frac{1}{p}} r_k^{\lambda_k}}{k}\right) = o\left(\frac{\lambda_k^{1-\frac{1}{p}}}{k}\right). \tag{2.31}$$

Utilizando (2.29), (2.30) y (2.31), las definiciones de las sucesiones $\{\lambda_j\}$ y $\{r_j\}$, y la propiedad (ii), deducimos que existe una constante $C > 0$ tal que, si $|z| = r_k$ y k es suficientemente grande, entonces

$$|g'(z)| \geq C\frac{\lambda_k^{1-\frac{1}{p}}}{k} = C\frac{(1-r_k)^{\frac{1}{p}-1}}{k} \geq C(1-r_k)^{\frac{1}{p}-1}\epsilon(r_k).$$

Esto implica (2.27), finalizando la demostración. □

Demostración del Teorema 10.

Es claro que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\phi(r) \to \infty$, cuando $r \to 1$ y, teniendo en cuenta el Lema 4, es suficiente probar que existen $f \in B^p$ y una constante $C > 0$ tales que

$$\limsup_{r\to 1^-} \frac{\min\limits_{|z|=r}|f'(z)|}{\phi(r)} > C. \tag{2.32}$$

Tomemos una sucesión $\{r_k\}_{k=1}^{\infty} \subset (0,1)$ con las siguientes propiedades:

(a) $\{r_k\}$ es estrictamente creciente y $\lim\{r_k\} = 1$.

(b) $r_{k+1} - r_k > \frac{1}{2}(1-r_k)$, para todo k.

(c) $(1-r_{k+1})^{1+\frac{1}{p}} \cdot (1-r_k)^{-2} \to 0$, cuando $k \to \infty$.

(d) $\frac{\phi(r_{k+1})}{\phi(r_k)} \to \infty$, cuando $k \to \infty$.

Nótese que (b) implica que

$$1 - r_k = (1-r_{k+1}) + (r_{k+1}-r_k) > (1-r_{k+1}) + \frac{1}{2}(1-r_k)$$

y, por tanto,

$$\frac{1-r_k}{1-r_{k+1}} > 2 \quad \text{o, lo que es lo mismo, } 1-r_{k+1} < \frac{1}{2}(1-r_k). \tag{2.33}$$

Esto implica que

$$(1-r_{k+1})^{p-1} < \frac{1}{2^{p-1}}(1-r_k)^{p-1}$$

y entonces vemos que

$$\frac{1}{p-1}\left((1-r_k)^{p-1}-(1-r_{k+1})^{p-1}\right) \geq A(1-r_k)^{p-1}, \tag{2.34}$$

siendo $A = \frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{2^{p-1}}\right)$.

Utilizando que ϕ es creciente y (2.34) obtenemos

$$\begin{aligned}
\infty &> \sum_{k=1}^{\infty}\int_{r_k}^{r_{k+1}}(1-r)^{p-2}\phi(r)^p dr \\
&\geq \sum_{k=1}^{\infty}\phi(r_k)^p\int_{r_k}^{r_{k+1}}(1-r)^{p-2}dr \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\phi(r_k)^p\frac{(1-r_k)^{p-1}-(1-r_{k+1})^{p-1}}{p-1} \\
&\geq A\sum_{k=1}^{\infty}\phi(r_k)^p(1-r_k)^{p-1}.
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\phi(r_k)^p(1-r_k)^{p-1} < \infty.$$

Tomemos ahora $n_k = \left[\frac{1}{1-r_k}\right]$, $k \geq 1$. Aquí, como es usual, para $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ denota la parte entera de x. Definamos

$$a_k \ = \ \phi(r_k)(1-r_k), \quad k = 1, 2, \ldots$$

y

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Teniendo en cuenta la definición de la sucesión $\{n_k\}$ y (2.33), vemos que f viene dada por una serie de potencias lagunar. Además,

$$\sum_{k=1}^{\infty} n_k |a_k|^p \approx \sum_{k=1}^{\infty} (1-r_k)^{p-1}\phi(r_k)^p < \infty.$$

Entonces, vemos que $f \in B^p$.

Ahora, para $|z| = r_k$, se tiene

$$\begin{aligned}
|f'(z)| &\geq |zf'(z)| \\
&= \left|\sum_{j=1}^{\infty} n_j \phi(r_j)(1-r_j) z^{n_j}\right| \\
&\geq n_k\phi(r_k)(1-r_k)r_k^{n_k} - \sum_{j=1}^{k-1} n_j\phi(r_j)(1-r_j) - \sum_{j=k+1}^{\infty} n_j\phi(r_j)(1-r_j)r_k^{n_j} \\
&= I - II - III.
\end{aligned}$$

Tenemos entonces

$$\min_{|z|=r_k} |f'(z)| \geq I - II - III.$$

Teniendo en cuenta la definición de n_k, es claro que existe $C > 0$ tal que

$$I \geq C\phi(r_k).$$

Por otra parte, utilizando de nuevo la definición de la sucesión de exponentes $\{n_j\}$ y (d), vemos que

$$\frac{n_j(1-r_j)\phi(r_j)}{n_{j+1}(1-r_{j+1})\phi(r_{j+1})} \approx \frac{\phi(r_j)}{\phi(r_{j+1})} \to 0, \quad \text{cuando } j \to \infty$$

y entonces el Lema S implica que

$$II = \sum_{j=1}^{k-1} n_j\phi(r_j)(1-r_j)r_k^{n_j} = \mathrm{o}(\phi(r_k)).$$

Pasemos a estimar III. Utilizando la definición de los n_j y la desigualdad

$(1-x)^n < 2(nx)^{-2}$, que es cierta para $n > 0$ y $0 < x < 1$, deducimos que

$$\begin{aligned} III &= \sum_{j=k+1}^{\infty} n_j \phi(r_j)(1-r_j) r_k^{n_j} \\ &\approx \sum_{j=k+1}^{\infty} \phi(r_j) \left(1 - \frac{1}{n_k}\right)^{n_j} \\ &\leq 2n_k^2 \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{\phi(r_j)}{n_j^2}. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Como ϕ es creciente y satisface (2.23) se tiene que

$$\phi(r) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{(1-r)^{1-\frac{1}{p}}}\right).$$

Entonces, utilizando (c), deducinos que

$$\begin{aligned} \frac{n_j^2/\phi(r_j)}{n_{j+1}^2/\phi(r_{j+1})} &\approx \frac{(1-r_{j+1})^2 \phi(r_{j+1})}{(1-r_j)^2)\phi(r_j)} \\ &= \frac{(1-r_{j+1})^{1+\frac{1}{p}}}{(1-r_j)^2} \cdot \frac{(1-r_{j+1})^{1-\frac{1}{p}} \phi(r_{j+1})}{\phi(r_j)} \\ &\lesssim \frac{(1-r_{j+1})^{1+\frac{1}{p}}}{(1-r_j)^2} \\ &= \mathrm{o}(1). \end{aligned}$$

Entonces, utilizando la estimación (2.35) y el Lema S, obtenemos que

$$III = \mathrm{o}(\phi(r_k)).$$

Esto, junto con las estimaciones obtenidas de I y para II, implica que

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\min_{|z|=r_k} |f'(z)|}{\phi(r_k)} \geq C.$$

Esto prueba (2.32). $\square$

Finalizaremos este capítulo indicando que Hallenbeck y Samotij en su trabajo [53] realmente estudiaron el crecimiento radial de las derivadas sucesivas $f^{(k)}$ $(k \in \mathbb{N})$ de funciones f en el espacio de Dirichlet $\mathcal{D}$. De hecho, probaron los siguientes resultados.

Teorema T. *Sea k un número natural.*

(i) Si $f \in \mathcal{D}$, entonces

$$|f^{(k)}(re^{i\theta})| = \mathrm{o}\left(\frac{1}{(1-r)^{k-\frac{1}{2}}}\right), \quad \textit{para casi todo } \theta.$$

(ii) El resultado anterior es muy preciso en el siguiente sentido:

Sea ϵ una función positiva, definida en $(0,1)$, y con $\lim_{r\to 1}\epsilon(r) = 0$, entonces existe una función $g \in \mathcal{D}$ tal que

$$\limsup_{r\to 1} \frac{(1-r)^{k-\frac{1}{2}} \min\limits_{|z|=r} |g^{(k)}(z)|}{\epsilon(r)} = \infty.$$

Los argumentos que hemos presentado para demostrar el Teorema 8 y el Teorema 9 pueden adaptarse para obtener una extensión del Teorema T a los espacios B^p, $1 < p < \infty$. En concreto, podemos probar el siguiente resultado.

Teorema 11. *Sea $1 < p < \infty$ y sea k un número natural.*

(i) Si $f \in B^p$, entonces

$$|f^{(k)}(re^{i\theta})| = \mathrm{o}\left(\frac{1}{(1-r)^{k-\frac{1}{p}}}\right), \quad \textit{para casi todo } \theta.$$

(ii) El resultado anterior es muy preciso en el siguiente sentido:

Sea ϵ una función positiva, definida en $(0,1)$, y con $\lim_{r\to 1}\epsilon(r) = 0$, entonces existe una función $g \in B^p$ tal que

$$\limsup_{r\to 1} \frac{(1-r)^{k-\frac{1}{p}} \min\limits_{|z|=r} |g^{(k)}(z)|}{\epsilon(r)} = \infty.$$

Omitiremos los detalles de la demostración.

3

Operadores de superposición ponderados actuando entre espacios de funciones analíticas

3.1 Introducción

Los operadores de superposición ponderados son una generalización natural de los operadores de superposición.

Definición 3. *Si φ es una función entera y $w \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$, el operador de superposición ponderado*

$$S_{\varphi,w} : \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$$

se define por

$$S_{\varphi,w}(f)(z) = w(z)\,\varphi\big(f(z)\big), \quad f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}), \quad z \in \mathbb{D}.$$

En otras palabras, $S_{\varphi,w} = M_w \circ S_\varphi$, donde M_w es el operador de multiplicación (o multiplicador puntual) con símbolo w que, como ya vimos en el capítulo anterior, está definido por

$$M_w(f)(z) = w(z)f(z), \quad f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Observemos que $S_\varphi = S_{\varphi,w}$ con $w(z) = 1$, para todo $z \in \mathbb{D}$.

Las cuestiones naturales en este ámbito son las análogas de las planteadas en el Capítulo 2 para operadores de superposición:

Dado un par de espacios (X, Y) de funciones holomorfas en el disco unidad $\mathbb{D}$ nos planteamos caracterizar los operadores de superposición $S_{\varphi,w}$ que aplican X en Y y los que lo hacen de manera continua y/o acotada.

Desde luego, la literatura relativa a operadores de superposición ponderados no es tan extensa como la relativa a operadores de superposición. Mencionemos [2] y [64] como artículos recientes que tratan sobre operadores de superposición ponderados actuando en distintos subespacios de $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$.

Nuestro objetivo en este capítulo es extender al ámbito de operadores de superposición ponderados algunos de los resultados que hemos expuesto en el capítulo anterior sobre operadores de superposición actuando entre espacios de funciones analíticas en $\mathbb{D}$.

3.2 Operadores de superposición ponderados entre espacios de Bergman con pesos y el espacio de Bloch

Nuestro primer resultado en esta sección es la siguiente extensión del Teorema 3.

Teorema 12. *Supongamos que $0 < p < \infty$ y $\alpha > -1$. Sea w una función analítica y no idénticamente nula en $\mathbb{D}$ y sea φ una función entera con $\varphi \not\equiv 0$. Entonces el operador de superposición $S_{\varphi,w}$ aplica A^p_α en el espacio Bloch $\mathcal{B}$ si y sólo si $w \in \mathcal{B}$ y φ es constante.*

Observemos que el Teorema 12 con $w \equiv 1$ se reduce al mencionado Teorema 3.

Demostración del Teorema 12.

Es trivial que si φ es constante y $w \in \mathcal{B}$ entonces $S_{\varphi,w}(A^p_\alpha) \subset \mathcal{B}$.

Si φ es constante y no identicamente 0, y $S_{\varphi,w}$ aplica A^p_α en $\mathcal{B}$ entonces es claro que $w \in \mathcal{B}$.

Supongamos ahora que $w \not\equiv 0$, φ no es constante, y $S_{\varphi,w}(A^p_\alpha) \subset \mathcal{B}$. Tomemos $a \in \mathbb{C}$ tal que $\varphi(a) \neq 0$ y consideremos f, la función constante definida por $f(z) = a$, para todo $z \in \mathbb{D}$. Como $f \in A^p_\alpha$, se tiene que

$$S_{\varphi,w}(f) \,=\, \varphi(a) \cdot w \,\in \mathcal{B}.$$

Esto implica que $w \in \mathcal{B}$.

Tomemos ahora $\varepsilon > 0$ y, utilizando el Teorema K (ii), tomemos una función $g \in A^p_\alpha$ con $g(0) \neq 0$ y tal que su sucesión de ceros $\{z_k\}$ satisface (2.4). Es claro que $\varphi \circ g$ no es constante. Sea ahora $F = S_{\varphi,w}(g) - \varphi(0) \cdot w$. Como w y $S_{\varphi,w}(g)$ son funciones de Bloch, se sigue que

$$F \,=\, S_{\varphi,w}(g) \,-\, \varphi(0) \cdot w \,=\, w\,[\varphi \circ g \,-\, \varphi(0)] \,\in\, \mathcal{B}.$$

Ahora, es claro que $F \not\equiv 0$ y que todos los ceros de g son ceros de F. En otras palabras, la sucesión $\{z_k\}$ está contenida en la sucesión $\{\xi_k\}$ de los ceros de F. Como $\{z_k\}$ satisface (2.4), se sigue que $\{\xi_k\}$ no satisface (2.5). Esto es una contradicción con que $F \in \mathcal{B}$. $\square$

Pasemos ahora a operadores actuando en el otro sentido, de $\mathcal{B}$ en algún espacio de Bergman A^p_α. Recordemos que Álvarez, Márquez y Vukotić caracterizaron en [4] los operadores de superposición que aplican el espacio de Bloch $\mathcal{B}$ en el espacio de Bergman A^p, $0 < p < \infty$ (véase el Teorema J en el Capítulo 2 de esta tesis). Nosotros hemos obtenido el siguiente resultado en este ámbito.

Teorema 13. *Supongamos que:*

(i) $0 < p < \infty$ *y* $\alpha > -1$.

(ii) $w \in A^p_\beta$ *para algún* β *con* $-1 < \beta < \alpha$.

(iii) φ *es una función entera de orden menor que uno, o de orden uno y tipo cero.*

Entonces el operador de superposición ponderado $S_{\varphi,w}$ *es un operador acotado del espacio de Bloch* $\mathcal{B}$ *en el espacio* A^p_α.

Demostración.

Definamos $M(r) = \text{máx}_{|z|\le r} |\varphi(z)|$ $(0 < r < \infty)$. La condición (iii) implica que

$$\frac{\log M(r)}{r} \to 0, \quad \text{cuando } r \to \infty \tag{3.1}$$

(véase [59, Capitulo 14]). Tomemos $K > 0$ y sea f una función de Bloch con norma menor o igual que K. Es fácil ver (véase [5], por ejemplo) que existe una constante absoluta $C > 0$ tal que

$$|f(z)| \le \|f\|_{\mathcal{B}} \log \frac{C}{1-|z|}. \tag{3.2}$$

Por (3.1), existe $r_0 > 0$ (que depende sólo de φ y K) tal que

$$\frac{\log M(r)}{r} \le \frac{\alpha-\beta}{Kp}, \quad r \ge r_0.$$

Utilizando (3.2), vemos que siempre que $|f(z)| \ge r_0$ tenemos que

$$\begin{aligned} |S_\varphi(f)(z)| &= |\varphi(f(z))| \le \exp\left(\frac{\alpha-\beta}{Kp}|f(z)|\right) \\ &\le \exp\left(\frac{\alpha-\beta}{p}\log\frac{C}{1-|z|}\right) \\ &= D(1-|z|)^{(\beta-\alpha)/p}, \end{aligned}$$

con $D = C^{(\alpha-\beta)/p}$. Entonces se sigue que

$$\int_{|f(z)|\ge r_0} (1-|z|)^\alpha |w(z)|^p |S_\varphi(f)(z)|^p \, dA(z) \le D^p \int_{\mathbb{D}} (1-|z|)^\beta |w(z)|^p \, dA(z). \tag{3.3}$$

Si $|f(z)| \le r_0$ entonces, por el principio del módulo máximo, $|S_\varphi(f)(z)| \le M(r_0)$. Combinando esto con (3.3), obtenemos que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{D}} (1-|z|)^\alpha |w(z)|^p |S_\varphi(f)(z)|^p \, dA(z) \\ &\le D^p \int_{\mathbb{D}} (1-|z|)^\beta |w(z)|^p \, dA(z) + M(r_0)^p \int_{\mathbb{D}} (1-|z|)^\alpha |w(z)|^p \, dA(z). \end{aligned}$$

Éste es un número positivo que depende sólo de φ, w, p, α, β, y K, pero no de f. Así pues hemos probado que $S_{\varphi,w}$ es un operador acotado de $\mathcal{B}$ en A^α_p. $\square$

3.3 Operadores de superposición ponderados y conjuntos de ceros de espacios de funciones holomorfas

Los argumentos utilizados para probar el Teorema 12 sirven para obtener el siguiente resultado.

Teorema 14. *Sean X e Y dos espacios de funciones analíticas en $\mathbb{D}$ que satisfacen las siguientes condiciones.*

(i) X contiene las funciones constantes.

(ii) Existe una función $f \in X$ con $f(0) \neq 0$ cuya sucesión de ceros $\{z_k\}$ no es una sucesión de ceros de Y.

Sea w una función analítica y no idénticamente nula en $\mathbb{D}$ y sea φ una función entera con $\varphi \not\equiv 0$. Entonces el operador de superposición ponderado $S_{\varphi,w}$ aplica X en Y si y sólo si $w \in Y$ y φ es constante.

Como caso particular del Teorema 14, podemos enunciar el siguiente resultado para los espacios de crecimiento H_v^∞.

Corolario 4. *Sea Y un espacio de funciones analíticas en $\mathbb{D}$ tales que todas las sucesiones de ceros de Y son sucesiones de Blaschke y sea v un peso $\mathbb{D}$. Sean w una función analítica y no identicamente nula en $\mathbb{D}$, y φ una función entera con $\varphi \not\equiv 0$. Entonces el operador de superposición con peso $S_{\varphi,w}$ aplica H_v^∞ en Y si y sólo si $w \in Y$ y φ es constante.*

Utilizando el Teorema 14 y [48, Teorema 2] obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 5. *Sea w una función analítica no identicamente nula en $\mathbb{D}$ y sea φ una función entera con $\varphi \not\equiv 0$. entonces el operador de superposición ponderado $S_{\varphi,w}$ aplica $H_{\log}^\infty$ en el espacio Bloch si y sólo si $w \in \mathcal{B}$ y φ es constante.*

3.4 Operadores de superposición ponderados actuando entre espacios de Besov

En esta sección vamos a obtener una generalización del Teorema P que presentamos en la sección 2.5.

Teorema 15. *Supongamos que* $1 \le q < p < \infty$, $w \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$, $w \not\equiv 0$, *y* φ *es una función entera. Entonces el operador de superposición ponderado* $S_{w,\varphi}$ *aplica* B^p *en* B^q *si y sólo si* $w \in B^q$ *y* φ *es constante.*

Observemos que, cuando $w \equiv 1$, el Teorema 15 se reduce al Teorema P.

Demostración del Teorema 15.

Supongamos que $1 \le q < p < \infty$.

Es trivial que si φ es constante y $w \in B^q$ entonces $S_{\varphi,w}$ aplica B^p en B^q.

También es trivial que si φ es constante y no idénticamente nula, y $S_{\varphi,w}$ aplica B^p en B^q, entonces $w \in B^q$.

Queda por probar que si φ no es constante y $S_{\varphi,w}(B^p) \subset B^q$, entonces $w \equiv 0$.

Tomemos $a \in \mathbb{C}$ tal que $\varphi(a) \neq 0$ y sea h la función constante definida por $h(z) = a$, para todo $z \in \mathbb{D}$. Como $h \in B^p$, se tiene que

$$S_{\varphi,w}(h) \;=\; \varphi(a) \cdot w \in B^q.$$

Esto implica que

$$w \in B^q. \tag{3.4}$$

Hemos de probar que $w \equiv 0$. Como $B^1 \subset B^s$ para todo $s > 1$, será suficiente considerar el caso $q > 1$.

Así pues, supongamos que $q > 1$ y $w \not\equiv 0$. Vamos a usar el Teorema 6 para tomar una función $f \in B^p \cap H^\infty$ satisfaciendo (2.13). Como $S_{\varphi,w}(B^p) \subset B^q$, deducimos que

$$S_{\varphi,w}(f) \;=\; w \cdot (\varphi \circ f) \in B^q,$$

esto es,

$$\int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{q-2} \left| w'(z)\varphi(f(z)) + w(z)\varphi'(f(z))f'(z) \right|^q \, dA(z) < \infty.$$

Como $f \in H^\infty$, tenemos que $\varphi \circ f \in H^\infty$. Esto y (3.4) implican que

$$\int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{q-2} \left| w'(z)\varphi(f(z)) \right|^q \, dA(z) < \infty.$$

Entonces se sigue que

$$\int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{q-2} \left| w(z)\varphi'(f(z))f'(z) \right|^q \, dA(z) < \infty$$

y, por lo tanto,

$$\int_0^1 (1-r)^{q-2} \left| w(re^{i\theta})\varphi'(f(re^{i\theta})) \right|^q \left| f'(re^{i\theta}) \right|^q \, dr < \infty, \text{ para casi todo } \theta \in [0, 2\pi]. \tag{3.5}$$

Claramente, $\varphi' \circ f \not\equiv 0$ y $\varphi' \circ f \in H^\infty$. Este hecho, junto con la bien conocida inclusión $B^q \subset BMOA$, fácilmente implica que

$$w \cdot (\varphi' \circ f) \not\equiv 0 \quad \text{y} \quad w \cdot (\varphi' \circ f) \subset H^\lambda \text{ para todo } \lambda \in (0, \infty).$$

Utilizando el Teorema de Fatou y el Teorema de Unicidad de Riesz [34, Capítulo 2], vemos que la función $w \cdot (\varphi' \circ f)$ tiene límite radial finito y distinto de cero en casi todo punto $e^{i\theta}$ de $\partial\mathbb{D}$. Esto y (3.5) implican que

$$\int_0^1 (1-r)^{q-2} \left| f'(re^{i\theta}) \right|^q \, dr < \infty, \text{ para casi todo } \theta \in [0, 2\pi],$$

lo cual es una contradicción con (2.13). □

Bibliografía

[1] P. Ahern and M. Jevtić, *Duality and multipliers for mixed norm spaces*, Michigan Math. J. **30** (1983), no. 1, 53–64.

[2] A. E.-S. Ahmed and S. Omran, *Weighted superposition operators in some analytic function spaces*, J. Comput. Anal. Appl. **15** (2013), no. 6, 996–1005.

[3] A. Aleman, P. L. Duren, M. J. Martín and D. Vukotić, *Multiplicative isometries and isometric zero-divisors*, Canad. J. Math. **62** (2010), no. 5, 961–974.

[4] V. Alvarez, M. A. Márquez and D. Vukotić, *Superposition operators between the Bloch space and Bergman spaces*, Ark. Mat. **42** (2004), 205–216.

[5] J. M. Anderson, J. Clunie and Ch. Pommerenke, *On Bloch functions and normal functions*, J. Reine Angew. Math. **270** (1974), 12–37.

[6] J. M. Anderson and D. Girela, *Inequalities of Littlewood-Paley type, multipliers and radial growth of the derivative of analytic functions* J. Reine Angew. Math. **465** (1995), 11–40.

[7] J. Apple and P. P. Zabrejko, *Nonlinear superposition operators.* Cambridge Tracts in Mathematics, 95. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. viii+311 pp. ISBN: 0-521-36102-8.

[8] J. Arazy, S. D. Fisher and J. Peetre, *Möbius invariant function spaces*, J. Reine Angew. Math. **363** (1985), 110–145.

[9] I. Arévalo, *A characterization of the inclusions between mixed norm spaces*, J. Math. Anal. Appl. **429** (2015), no. 2, 942–955.

[10] I. Arévalo, *Corrigendum to "A characterization of the inclusions between mixed norm spaces" [J. Math. Anal. Appl.* ***429*** *(2) (2015) 942–955]*, J. Math. Anal. Appl. **433** (2016), no. 2, 1904–1905.

[11] R. Aulaskari, D. Girela and H. Wulan, *Taylor coefficients and mean growth of the derivative of Q_p functions*, J. Math. Anal. Appl. **258** (2001), no. 2, 415–428.

[12] K. Avetisyan, *A note on mixed norm spaces of analytic functions*, Aust. J. Math. Anal. Appl. **9** (2012), no. 1, Art. 16, 6 pp.

[13] G. Bao and F. Ye, *The Bloch space and the dual space of a Luecking-type subspace of A^1*, Complex Var. Elliptic Equ. **63** (2018), no. 10, 1438–1443.

[14] K. D. Bierstedt, J. Bonet and A. Galbis, *Weighted spaces of holomorphic functions on balanced domains*, Michigan Math. J. **40** (1993), no. 2, 271–297.

[15] K. D. Bierstedt, J. Bonet and J. Taskinen, *Associated weights and spaces of holomorphic functions*, Studia Math. **127** (1998), no. 2, 137–168.

[16] O. Blasco, *Multipliers on spaces of analytic functions*, Canad. J. Math. **47** (1995), no. 1, 44–64.

[17] J. Bonet, P. Dománski and M. Lindström, *Essential norm and weak compactness of composition operators on weighted Banach spaces of analytic functions*, Canad. Math. Bull. **42** (1999), no. 2, 139–148.

[18] J. Bonet, P. Dománski, M. Lindström and J. Taskinen, *Composition operators between weighted Banach spaces of analytic functions*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **64** (1998), no. 1, 101–118.

[19] J. Bonet and D. Vukotić, *Superposition operators between weighted Banach spaces of analytic functions of controlled growth*, Monatsh. Math. **170** (2013), no. 3–4, 311–323.

[20] J. Bourgain, *On the radial variation of bounded analytic functions on the disc*, Duke Math. J. **69** (1993), no. 3, 671–682.

[21] C. Boyd and P. Rueda, *Superposition operators between weighted spaces of analytic functions*, Quaest. Math. **36** (2013), no. 3, 411–419.

[22] C. Boyd and P. Rueda, *Holomorphic superposition operators between Banach function spaces*, J. Aust. Math. Soc. **96** (2014), no. 2, 186–197.

[23] S. M. Buckley, J. L. Fernández, and D. Vukotić, *Superposition operators on Dirichlet type spaces.* In: Papers on Analysis: a volume dedicated to Olli Martio on the occasion of his 60th Birthday, 41–61. Rep. Univ. Jyväskylä Dep. Math. Stat. **83**, Univ. Jyväskylä, Jyväskylä 2001.

[24] S. M. Buckley, P. Koskela and D. Vukotić, *Fractional integration, differentiation, and weighted Bergman spaces*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **126** (1999), no. 2, 369–385.

[25] S. M. Buckley and D. Vukotić, *Univalent interpolation in Besov spaces and superposition into Bergman Spaces*, Potential Anal. **29** (2008), no. 1, 1–16.

[26] G. A. Cámera, *Nonlinear superposition on spaces of analytic functions.* In: Harmonic analysis and operator theory (Caracas, 1994), 103–116. Contemp. Math. **189**, Amer. Math. Society, Providence, Rhode Island, 1995.

[27] G. A. Cámera and J. Giménez, *The nonlinear superposition operator acting on Bergman spaces*, Compositio Math. **93** (1994), no. 1, 23–35.

[28] C. C. Cowen and B. D. MacCluer, *Composition operators on spaces of analytic functions. Studies in Advanced Mathematics*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1995. xii+388 pp. ISBN: 0-8493-8492-3.

[29] S. Domínguez and D. Girela, *Sequences of zeros of analytic function spaces and weighted superposition operators*, Monatsh. Math. **190** (2019), n. 4, 725–734. https://doi.org/10.1007/s00605-019-01279-5.

[30] S. Domínguez and D. Girela, *A radial integrability result concerning bounded functions in analytic Besov spaces with applications*, Results in Mathematics **75**, Article number 67 (2020). https://doi.org/10.1007/s00025-020-01194-4.

[31] S. Domínguez and D. Girela, *Superposition operators between mixed norm spaces of analytic functions*, aceptado para su publicación en Mediterranean J. Math.

[32] J. J. Donaire, D. Girela and D. Vukotić, *On univalent functions in some Möbius invariant spaces*, J. Reine Angew. Math. **553** (2002), 43–72.

[33] J. J. Donaire, D. Girela and D. Vukotić, *On the growth and range of functions in Möbius invariant spaces*, J. Anal. Math. **112** (2010), 237–260.

[34] P. L. Duren, *Theory of H^p spaces*, Academic Press, New York-London, 1970. Reprint: Dover, Mineola-New York, 2000.

[35] P. L. Duren and A. P. Schuster, *Bergman Spaces*, Math. Surveys and Monographs, Vol. 100, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2004.

[36] T. M. Flett, *On the radial order of a univalent function*, J. Math. Soc. Japan **11** (1959), 1–3.

[37] T. M. Flett, *The dual of an inequality of Hardy and Littlewood and some related inequalities*, J. Math. Anal. Appl. **38** (1972), 746–765.

[38] T. M. Flett, *Lipschitz spaces of functions on the circle and the disc*, J. Math. Anal. Appl. **39** (1972), 125–158.

[39] S. Gadbois, *Mixed-norm generalizations of Bergman spaces and duality*, Proc. Amer. Math. Soc. **104** (1988), no. 4, 1171–1180.

[40] P. Galanopoulos, D. Girela and M. A. Márquez, *Superposition operators, Hardy spaces, and Dirichlet type spaces*, J. Math. Anal. Appl. **463** (2018), no. 2, 659–680.

[41] P. Galanopoulos, D. Girela and J. A. Peláez, *Multipliers and integration operators on Dirichlet spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), no. 4, 1855–1886.

[42] J. B Garnett, *Bounded Analytic Functions*, Academic Press, New York, London, 1981.

[43] F. W. Gehring, *On the radial order of subharmonic functions*, J. Math. Soc. Japan **9** (1957), 77–79.

[44] D. Girela, *On analytic functions with finite Dirichlet integral*, Complex Variables Theory Appl. **12** (1989), no. 1–4, 9–15.

[45] D. Girela, *Growth of the derivative of bounded analytic functions*, Complex Variables Theory Appl. **20** (1992), no. 1–4, 221–227.

[46] D. Girela, *Analytic functions of bounded mean oscillation*, Complex Function Spaces, Mekrijärvi 1999. Editor: R. Aulaskari. Univ. Joensuu Dept. Math. Rep. Ser. 4, Univ. Joensuu, Joensuu (2001) pp. 61–170.

[47] D. Girela and M. A. Márquez, *Superposition operators between Q_p spaces and Hardy spaces*, J. Math. Anal. Appl. **364** (2010), no. 2, 463–472.

[48] D. Girela, M. Nowak and P. Waniurski, *On the zeros of Bloch functions*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **129** (2000), no. 1, 117–128.

[49] D. Girela, J. A. Peláez, F. Pérez-González, and J. Rättyä, *Carleson measures for the Bloch space*, Integral Equations Operator Theory **61** (2008), no. 4, 511–547.

[50] D. Gnuschke, *Relations between certain sums and integrals concerning power series with Hadamard gaps*, Complex Variables Theory Appl. **4** (1984), no. 1, 89–100.

[51] D. J. Hallenbeck and T. H. MacGregor, *Radial growth and variation of bounded analytic functions*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) **31** (1988), no. 3, 489–498.

[52] D. J. Hallenbeck and K. Samotij, *On radial variation of bounded analytic functions*, Complex Variables Theory Appl. **15** (1990), no. 1, 43–52.

[53] D. J. Hallenbeck and K. Samotij, *Radial growth and variation of Dirichlet finite holomorphic functions in the disk*. Colloq. Math. **58** (1990), no. 2, 317–325.

[54] D. J. Hallenbeck and K. Samotij, *On radial variation of holomorphic functions with ℓ^p Taylor coefficients*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) **33** (1990), no. 3, 475–481.

[55] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Some properties of fractional integrals, II*, Math. Z. **34** (1932), 403–439.

[56] A. Harutyunyan and W. Lusky, *On the boundedness of the differentiation operator between weighted spaces of holomorphic functions*, Studia Math. **184** (2008), no. 3, 233–247.

[57] H. Hedenmalm, B. Korenblum and K. Zhu, *Theory of Bergman Spaces*, Graduate Texts in Mathematics **199**, Springer, New York, Berlin, etc., 2000.

[58] E. Hille, *Analytic Function Theory, Vol. I*, Ginn and Co., Boston, 1959.

[59] E. Hille, *Analytic Function Theory, Vol. II*, Ginn and Co., Boston, Mass.-New York-Toronto, Ont., 1962.

[60] F. Holland and D. Walsh, *Growth estimates for functions in the Besov spaces* A_p, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A **88** (1988), 1–18.

[61] F. Holland and D. Walsh, *Distributional inequalities for functions in Besov spaces*, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A **94** (1994), no. 1, 1–17.

[62] C. Horowitz, *Zeros of functions in the Bergman spaces*, Duke Math. J. **41** (1974), 693–710.

[63] M. Jevtić, D. Vukotić and M. Arsenović, *Taylor coefficients and coefficient multipliers of Hardy and Bergman-type spaces* RSME Springer Series, 2. Springer, Cham, 2016. xvi+323 pp.

[64] Z. J. Jiang, T. Wang, J. Liu and T. Song, *Weighted superposition operators from Zygmund spaces to* ffl-*Bloch spaces*, J. Comput. Anal. Appl. **23** (2017), no. 3, 487–495.

[65] F. John and L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation*, Com. Pure Appl. Math. **14** (1961), 415–426.

[66] P. B. Kennedy, *On the derivative of a function of bounded characteristic*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **15** (1964), 337–341.

[67] K. Knopp, *Theory and Application of Infinite Series*, Hafner Pu. Co., New York, 1971.

[68] Y.-X. Liang and Z-H. Zhou, *The nonlinear superposition operators between Zygmund-type and Bloch-type spaces*, Mediterr. J. Math. **16** (2019), no. 2, Art. 39, 19 pp.

[69] J. E. Littlewood and R. E. A. C. Paley, *Theorems on Fourier series and power series II*, Proc. London Math. Soc. **42** (1936), 52–89.

[70] R. J. Malavé-Malavé and J. C. Ramos-Fernández, *Superposition operators between logarithmic Bloch spaces*, Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser 2 **68** (2019), 105–121.

[71] M. Mateljević and M. Pavlović, *L^p-behavior of power series with positive coefficients and Hardy spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **87** (1983), no. 2, 309–316.

[72] M. Nowak, *On zeros of normal functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **27** (2002), no. 2, 381–390.

[73] M. Pavlović, *Function classes on the unit disc. An introduction*, De Gruyter Studies in Mathematics, 52. De Gruyter, Berlin, 2014. xiv+449 pp.

[74] J. C. Ramos-Fernández, *Bounded superposition operators between weighted Banach spaces of analytic functions*, Appl. Math. Comput. **219** (2013), no. 10, 4942–4949.

[75] A. Reijonen, *Derivatives of inner functions in weighted mixed norm spaces*, J. Geom. Anal. **29** (2019), no. 3, 1859–1875.

[76] R. Rochberg, *Decomposition theorems for Bergman spaces and their applications*, in: "Operator and function theory" (S. C. Power ed.), Reidel, Dordrecht, The Netherlands, (1985), pp. 225–278.

[77] W. Rudin, *The radial variation of analytic functions,* Duke Math. J. **22** (1955), 235–242.

[78] A. M. Sedletskii, *Zeros of analytic functions of the classes A^p_α*, in Current problems in function theory (Russian) (Teberda, 1985), Rostov. Gos. Univ., Rostov-on-Don (1987), 24–29, 177.

[79] W. Seidel and J. L. Walsh, *On the derivatives of functions analytic in the unit circle and their radii of univalence and of p-valence*, Trans. Amer. Math. Soc. **52** (1942), 128–216.

[80] J. H. Shapiro, *Composition operators and classical function theory*, Universitext: Tracts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1993. xvi+223 pp. ISBN: 0-387-94067-7.

[81] A. L. Shields and D. L. Williams, *Bounded projections, duality, and multipliers in spaces of analytic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **162** (1971), 287–302.

[82] W. T. Sledd, *Some results about spaces of analytic functions introduced by Hardy and Littlewood*. J. London Math. Soc. (2) **9** (1974/75), 328–336.

[83] D. A. Stegenga, *Multipliers of the Dirichlet space*. Illinois J. Math. **24** (1980). 113–139.

[84] S. A. Vinogradov, *Multiplication and division in the space of analytic functions with area integrable derivative, and in some related spaces* (in Russian), Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) **222** (1995), Issled. po Linein. Oper. i Teor. Funktsii **23**, 45–77, 308. *English translation in J. Math. Sci. (New York)* ***87****, no. 5 (1997), 3806–3827.*

[85] W. Xu, *Superposition operators on Bloch-type spaces*, Comput. Methods Funct. Theory **7** (2007), no. 2, 501–507.

[86] K. Zhu, *Operator Theory in Function Spaces, Second Edition*, Math. Surveys and Monographs, Vol. 138, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2007.

[87] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Vol. I and Vol. II, Second edition, Camb. Univ. Press, Cambridge, 1959.