

MENU

IMPRIMIR

SALIR

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA
E. T. S. DE INGENIEROS INDUSTRIALES
DEPARTAMENTO DE TECNOLOGÍA ELECTRÓNICA

**COORDINACIÓN HIDROTÉRMICA EN EL CORTO
PLAZO MEDIANTE TÉCNICAS DE RELAJACIÓN
LAGRANGIANA**

TESIS DOCTORAL

Noemi Jiménez Redondo

Málaga, noviembre de 1998

MENU

IMPRIMIR

SALIR

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA
E. T. S. DE INGENIEROS INDUSTRIALES
DEPARTAMENTO DE TECNOLOGÍA ELECTRÓNICA

COORDINACIÓN HIDROTÉRMICA EN EL CORTO PLAZO MEDIANTE TÉCNICAS DE RELAJACIÓN LAGRANGIANA

TESIS DOCTORAL

por

Noemi Jiménez Redondo

Ingeniera Industrial por la E.T.S de Ingenieros Industriales (ICAI)
de la Universidad Pontificia de Comillas

Málaga, noviembre de 1998

MENU

IMPRIMIR

SALIR

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA
E. T. S. DE INGENIEROS INDUSTRIALES
DEPARTAMENTO DE TECNOLOGÍA ELECTRÓNICA

COORDINACIÓN HIDROTÉRMICA EN EL CORTO PLAZO MEDIANTE TÉCNICAS DE RELAJACIÓN LAGRANGIANA

TESIS DOCTORAL

Autora:
Noemi Jiménez Redondo

Director:
Prof. Dr. D. Antonio J. Conejo Navarro

Tutor:
Prof. Dr. D. Francisco Sandoval Hernández

Málaga, noviembre de 1998

MENU

IMPRIMIR

SALIR

MENU

IMPRIMIR

SALIR

A mi marido y mi hija, por el tiempo que les he robado.
A la "hermana pequeña", por la paz que me proporciona.
A mis padres y hermanos.

MENU

IMPRIMIR

SALIR

Agradecimientos

En primer lugar quiero expresar mi agradecimiento más sincero a quien más ha sufrido todos los inconvenientes que la realización de esta tesis ha acarreado: a mi marido, por su paciencia, su incondicional apoyo y por soportar mis peores momentos. A mi hija, por su sonrisa, sus besos y sus abrazos.

A mis padres quiero agradecerles el haberme incitado a entrar en el mundo de la investigación y universitario y su eterno apoyo y ayuda. A mis hermanos quiero agradecerles su apoyo y ayuda en muchas cuestiones prácticas.

A mi director de tesis, Dr. D. Antonio Conejo Navarro, quiero agradecerle su ayuda y el haber despertado en mí el interés por la investigación en ingeniería eléctrica.

A mi tutor de tesis, Dr. D. Francisco Sandoval Hernández, quiero agradecerle su apoyo, su confianza y sus ánimos.

De forma muy especial quiero agradecer a un grupo cercano de personas que en el día a día me han animado y me han ayudado a resolver muchos pequeños grandes problemas. A D. Ernesto Rivas Montoya le quiero agradecer su ayuda en la instalación de software en PC's, en la impresión de esta tesis y de transparencias para congresos, en la realización de *backups*,... y, sobre todo, su permanente buen humor. A Dña. Ana Pozo Ruz le quiero agradecer su gran ayuda en la edición de figuras y su constante disposición a echar una mano. A D. Sebastián Barceló de Aguilar le quiero agradecer su apoyo moral, sus charlas y su confianza, además de la gran ayuda en la realización miles de tareas administrativas. A Dña. Natalia Alguacil Conde le agradezco su ayuda en la solución de muchas cuestiones relacionadas con LaTeX y sus ánimos. A D. Juan Pérez Ruiz, compañero de fatigas, y a D. José Manuel Arroyo Sánchez.

A D. Francisco Javier Rubio Oderiz (de la Universidad Pontificia de Comillas) le quiero agradecer su constante amistad y el haberme proporcionado muchas de las referencias que aparecen en esta tesis.

A D. Rafael Larrosa Jiménez (del Servicio Central de Apoyo a la Investigación, SCAI) le quiero agradecer su valiosa ayuda en el mantenimiento de las estaciones de trabajo Silicon Graphics, sus enseñanzas sobre este tipo de entornos y su rápida respuesta a mis muchas peticiones. Al SCAI de la Universidad de Málaga, como institución, le quiero agradecer el uso que he realizado del ordenador Origin 2000, fundamental para algunas de las simulaciones ejecutadas.

Al Dr. D. Francisco D. Galiana le quiero agradecer el haberme permitido integrarme en su grupo de investigación de la Universidad de McGill (Montreal, Canadá) durante los meses junio-agosto

de 1995, sus interesantes conversaciones y ayuda técnica y su extraordinaria acogida y exquisita humanidad. Al Dr. D. Djordje Atanackovic quiero agradecerle su amistad y su gran hospitalidad durante mi estancia en McGill.

A D. Fernando Cacho (de Red Eléctrica de España, REE) le quiero agradecer sus interesantes conversaciones técnicas durante la realización de dos proyectos de investigación, el haberme enseñado a conocer el funcionamiento real de un sistema de energía eléctrica y el haberme hecho pensar. A D. Carlos Rodríguez Huidobro (de Red Eléctrica de España, REE) le quiero agradecer sus comentarios relativos a los modelos de los proyectos y los datos suministrados. A Red Eléctrica de España, como institución, le agradezco la colaboración y financiación.

A mis compañeros del departamento: D. Martín González García y D. Arturo Assunçao Gil por su ayuda con las estaciones SUN, a D. Alfonso Ariza Quintana por las muchas dudas resueltas relativas a las estaciones y por su ayuda en los tiempos del linux, a D. Ignacio Molina Conde por su ayuda en el uso de LaTeX y a muchos otro más cuya enumeración sería demasiado larga.

A la empresa Electricité de France le quiero agradecer el haberme permitido realizar una estancia en el departamento de *Méthodes d'Optimisation et Simulation* en abril de 1996. Al Dr. D. Arnaud Renaud y a D. Françoise Pellegrino les agradezco su tiempo y ayuda.

A la Dra. Dña. Claudia Sagastizabal (*Dpto. Engenharia Electrica*, PUC, Rio, Brasil) le agradezco el haberme proporcionado sus claros apuntes relativos a los *Bundle Methods*.

A Don José María Moreno Torralbo (de la Comisión del Sistema Eléctrico Nacional, CSEN) le quiero agradecer sus explicaciones acerca del funcionamiento del nuevo mercado español de energía eléctrica.

Al vicerrectorado de investigación de la Universidad de Málaga y de forma particular a su vicerrectora Excm. Sra. Dra. Dña. Adelaida de la Calle Martín le agradezco su apoyo y financiación.

Resumen

La coordinación hidrotérmica en el corto plazo tiene por objeto determinar el arranque y parada de los grupos térmicos así como la potencia generada por los grupos térmicos e hidráulicos durante un horizonte temporal de corto plazo. El objetivo es satisfacer la demanda con un nivel apropiado de seguridad y de forma que se minimicen los costes de explotación del sistema y se cumplan las restricciones que modelan el funcionamiento de las centrales térmicas e hidráulicas.

Matemáticamente, el problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo se plantea como un problema de optimización entero-mixto y no lineal. Para sistemas eléctricos de tamaño realista es además de gran dimensión. Su resolución no es simple. Las técnicas de relajación lagrangiana son las más apropiadas para resolver este tipo de problemas.

Utilizando el método de la relajación lagrangiana el problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo se descompone en un subproblema por cada central térmica y un subproblema por cada cuenca hidráulica. Así, se pasa de la resolución de un problema de gran complejidad y gran dimensión a la resolución de muchos subproblemas de pequeño tamaño y estructuras homogéneas. Esto permite un modelado muy preciso del equipo generador y la posibilidad de aplicar a cada subproblema la técnica de optimización que más se adapte a su estructura. Además, se pueden aplicar de forma natural técnicas de computación paralela con las consiguientes ventajas en cuanto a tiempos de cálculo.

Otra de las ventajas del método de la relajación lagrangiana es que, como subproducto del procedimiento de resolución, se extraen los valores de las variables del problema dual (o multiplicadores de Lagrange) cuyo significado económico resulta de utilidad tanto en los tradicionales sistemas de energía eléctrica centralizados o regulados (donde ayudan a la elaboración de tarifas) como en los modernos sistemas de energía eléctrica competitivos (donde las variables duales son una medida del precio de la energía en el mercado).

En los emergentes mercados de energía eléctrica desregulados, el método de la relajación lagrangiana presenta una importante ventaja: simula el funcionamiento de un mercado libre de energía eléctrica. Por ello, un modelo de coordinación hidrotérmica en el corto plazo mediante técnicas de relajación lagrangiana puede ser la herramienta utilizada por el operador del mercado y/o el operador del sistema de un sistema de energía eléctrica liberalizado.

El método de la relajación lagrangiana se basa en la resolución de un problema dual del problema original. Al problema original se le llama problema primal. Dada la no convexidad del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo, la solución del problema dual no coincide con la solución del problema primal sino que constituye una cota inferior. Una vez obtenida

la solución del problema dual se aplican procedimientos heurísticos para conseguir una solución cuasi-óptima primal.

La mayor dificultad de los procedimientos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo mediante técnicas de relajación lagrangiana estriba en la resolución del problema dual. El problema dual es un problema de optimización no diferenciable. Se resuelve a través de un proceso iterativo que consiste en resolver los subproblemas asociados a cada central térmica y a cada cuenca hidráulica y en actualizar los valores de los multiplicadores hasta alcanzar la convergencia. Por ello, los procedimientos de resolución del problema dual se identifican con los procedimientos de actualización de multiplicadores.

El método tradicionalmente empleado en la resolución del problema dual del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo es el método del subgradiente. En esta tesis se estudian en detalle y se proponen nuevos métodos de actualización de multiplicadores. El método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos, empleado en la actualización de multiplicadores, es un método no-oscilatorio y computacionalmente eficiente, original de este trabajo de investigación. Este método supera el comportamiento tanto de otros métodos que aparecen en la literatura como de otros métodos también originales de esta investigación.

Los procedimientos de resolución del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo que aparecen en la literatura finalizan la resolución del problema dual cuando se alcanza la convergencia en el valor de la función objetivo del mismo, a pesar de que las variables duales no se hayan estabilizado. Conseguir, además, convergencia en las variables duales tiene un coste computacional demasiado elevado que no está justificado en los sistemas de energía eléctrica centralizados por la potencial mejora en el máximo conseguido del problema dual.

Sin embargo, en un sistema de energía eléctrica liberalizado las variables del problema dual deben converger antes de finalizar el proceso. El motivo es que estas variables indican el precio del mercado de cada unidad de energía producida en cada subperiodo del horizonte temporal analizado (típicamente una hora). Por ello estas variables son las que determinan qué centrales suministrarán la energía eléctrica del sistema en cada hora: aquellas centrales que, con la remuneración indicada por las variables duales, sean capaces de, al menos, recuperar sus costes. Si estas variables no han convergido, o no se han estabilizado, en el algoritmo que las genera, entonces se está favoreciendo a unos generadores frente a otros. Para que el mercado de energía eléctrica sea ecuánime y transparente a todos, las variables duales deben converger y por tanto, antes de finalizar resolución del problema dual se debe alcanzar la estabilización o convergencia no sólo de la función objetivo son también de las variables duales.

En esta tesis se propone un método de coordinación hidrotérmica en el corto plazo mediante técnicas de relajación lagrangiana con el que se alcanza la convergencia no sólo en la función objetivo del problema dual (lo que es habitual en la literatura) sino también en las variables duales. El procedimiento de estabilización de las variables duales es computacionalmente eficiente. Así, el método propuesto pueda ser empleado tanto por el operador del mercado como por el operador del sistema de un sistema de energía eléctrica competitivo.

En esta tesis también se analizan procedimientos de resolución de los subproblemas térmicos mediante técnicas de programación dinámica. Los subproblemas hidráulicos se resuelven utilizando un optimizador comercial.

Se presentan resultados computacionales basados en el sistema eléctrico peninsular español.

[MENU](#)[IMPRIMIR](#)[SALIR](#)

Abstract

Short-term hydro-thermal coordination determines the start-up and shut-down of thermal units, as well as the power output of thermal and hydro units during a short-term planning horizon. The objective is to meet customer demand with an appropriate level of security and so that total operating costs are minimized.

Mathematically, the short-term hydro-thermal coordination problem can be formulated as a mixed-integer nonlinear optimization problem. For realistic size electric energy systems it is also a large-scale problem. Solving this large-scale nonlinear and combinatorial optimization problem is not an easy task. Lagrangian Relaxation techniques are the most suitable techniques to solve this kind of problems.

Using Lagrangian Relaxation techniques, the short-term hydro-thermal coordination problem can be naturally decomposed into one subproblem per thermal unit and one subproblem per hydro system. Therefore, by using these techniques, the solution of the short-term hydro thermal coordination problem (large scale and complex optimization problem) is accomplished by the solution of many small size and structurally homogeneous subproblems. This decomposition property allows a very precise modeling of each generating unit as well as the possibility of applying to each subproblem the most suitable optimization technique to its structure. It also allows the natural application of parallel computing with the corresponding advantages regarding computation time.

Another advantage of Lagrangian Relaxation techniques is that, as a byproduct of the optimization process, the values of the dual variables (or Lagrange multipliers) are achieved. The dual variables have an economical meaning which can be helpful in the traditional electric energy markets (where they provide useful information to elaborate electric energy bill) and in the modern de-regulated electric energy markets (where dual variables are a measure of the market price of electric energy).

In the framework of the modern de-regulated electric energy markets, the Lagrangian Relaxation procedure presents an important advantage: it simulates the functioning of a free market. That is the reason why a short-term hydro-thermal coordination model by Lagrangian Relaxation techniques can be the tool used by the market operator and/or the system operator of a de-regulated electric energy market.

The Lagrangian Relaxation procedure is based on the formulation and resolution of a dual problem of the original one, called primal problem. Because of the non-convexity property of the short-term hydro-thermal coordination problem, the solution of the dual problem is not the

solution of the primal problem, but it is a lower bound. Once achieved the solution of the dual problem, heuristic procedures are required to get a feasible primal solution.

The key of the efficiency of the solution of the short-term hydro-thermal coordination problem is the solution of the dual problem. The dual problem is a nondifferentiable optimization problem. It is solved by an iterative procedure which consists of solving the subproblems associated to each thermal unit and each hydro system and updating the multipliers until convergence is achieved.

The method traditionally used to update the multipliers (or to solve the dual problem) is the subgradient method. In this thesis several multipliers updating procedures are analyzed and new multipliers updating procedures are proposed. The dynamically constrained cutting plane method with a maximum number of hyperplanes is a novel, non-oscillating and computationally efficient method proposed in this thesis. It outperforms other updating multipliers procedures proposed in the literature as well as other novel approaches also presented in this thesis.

Lagrangian Relaxation short-term hydro-thermal coordination methods that appear in the literature, finish the resolution of the dual problem when the dual problem objective function has converge. Achieving convergence in the dual variables has a high computational cost which is not justified in the framework of centralized electric energy markets by the potential dual cost improvement.

However, in the new de-regulated electric energy markets the dual variables should converge before ending the dual problem solution process. The reason is that these variable values are a measure of the electric energy market price for each subperiod (typically each hour) of the planning horizon. Therefore, multiplier values determine which units will provide electric energy during each hour: those whose revenues (indicated by the dual variable values) can, at least, recover costs. If the dual variables do not converge, some generators are privileged among others. For the electric energy market to be equal and transparent, the dual variables should converge. Therefore, before ending the solution of the dual problem procedure, not only the dual problem objective function but also the dual variables should converge.

In this thesis a short-term hydro-thermal coordination method by Lagrangian Relaxation techniques is proposed. This method achieves convergence not only in the dual problem objective function but also in the dual variables. The procedure is computationally efficient. This multiplier stabilization property allows the method proposed to be used by the market operator and/or the system operator of a de-regulated electric energy system.

Dynamic programming procedures to solve thermal subproblems are also analyzed in this thesis. Hydro subproblems are solved by calling commercial optimization software.

Extensive computational results based on the electric energy system of mainland Spain are presented.

MENU

IMPRIMIR

SALIR

Índice General

1	Introducción	1
1.1	Los sistemas de energía eléctrica	1
1.2	El problema de la coordinación hidrotérmica	4
1.3	Revisión bibliográfica	7
1.3.1	Métodos de resolución de los problemas de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo y de la programación horaria de centrales térmicas . . .	9
1.3.2	Métodos de resolución del problema del despacho hidráulico	16
1.4	Planteamiento y objetivos de la tesis	18
1.5	Organización de la tesis	22
2	Coordinación hidrotérmica en el corto plazo mediante técnicas de relajación lagrangiana. Revisión bibliográfica	25
2.1	Introducción	25
2.2	El método de resolución dual-primal	27
2.3	El método de resolución en fases	28
2.4	Revisión bibliográfica de artículos basados en el método de resolución dual-primal	29
2.5	Revisión bibliográfica de artículos basados en el método de resolución en fases . .	32
2.6	Métodos de solución empleando técnicas de lagrangiano aumentado	39
2.7	Otros	42
3	Formulación del problema	43

3.1	Introducción	43
3.2	Notación	45
3.3	El equipo de generación térmica	49
3.3.1	Restricciones del equito térmico	51
3.3.2	Costes asociados a las centrales térmicas	54
3.4	El equipo de generación hidráulica	57
3.4.1	Restricciones del equipo hidráulico	58
3.4.2	Ampliación del modelado: inclusión de centrales de bombeo	60
3.5	Restricciones de carga	61
3.6	Planteamiento del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo . .	63
4	Solución mediante técnicas de relajación lagrangiana	67
4.1	Introducción	67
4.2	El método de la relajación lagrangiana aplicado al problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo. Formulación general	70
4.2.1	Planteamiento del problema: Problema Primal	70
4.2.2	El problema dual	72
4.2.3	Algoritmo de resolución del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo mediante técnicas de relajación lagrangiana	75
4.3	Varios modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo utilizando técnicas de relajación lagrangiana	78
4.3.1	Modelo 1	86
4.3.2	Modelo 2	89
4.3.3	Modelo 3	92
4.3.4	Modelo 4	95
4.3.5	Modelo 5	98
4.3.6	Modelo 6	101

4.3.7	Modelo 7	105
4.3.8	Modelo 8	109
4.4	Aplicación del algoritmo propuesto en los sistemas de energía eléctrica centralizados y en los sistemas de energía eléctrica desregulados	113
4.4.1	Aplicación del algoritmo en un sistema de energía eléctrica centralizado .	114
4.4.2	Aplicación del algoritmo en un sistema de energía eléctrica liberalizado .	116
5	Solución del problema primal relajado	121
5.1	Introducción	121
5.2	Subproblemas térmicos	122
5.2.1	El método de la programación dinámica	122
5.2.2	Programación dinámica para la resolución de la programación horaria de cada central térmica. Descripción general.	125
5.2.3	Consideraciones acerca del tratamiento de las restricciones de rampa . . .	144
5.2.4	Resolución analítica del despacho de una central térmica. Aplicación a varios tipos de subproblemas térmicos	145
5.3	Subproblemas hidráulicos	184
5.3.1	Planteamiento de distintos tipos de subproblemas hidráulicos	186
6	Solución del problema dual. Métodos de actualización de multiplicadores	191
6.1	Introducción	191
6.2	Revisión bibliográfica. Métodos de resolución del problema dual de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo empleados en la literatura	192
6.3	Optimización no diferenciable. El concepto de subgradiente y de ε -subgradiente .	194
6.4	Resolución del problema dual	195
6.5	Métodos de actualización de multiplicadores	198
6.6	Métodos de actualización de multiplicadores sin memoria	201
6.6.1	Método del subgradiente tradicional	202

6.6.2	Método del subgradiente modificado	204
6.7	Métodos de actualización de multiplicadores con memoria	208
6.7.1	Formas duales de los <i>Bundle Methods</i>	211
6.7.2	Método de los hiperplanos secantes	214
6.7.3	Método de los hiperplanos secantes con penalizaciones cuadráticas (o forma primal de los <i>Bundle Methods</i>)	222
6.7.4	El método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos	229
6.7.5	Método de los hiperplanos secantes con penalización, control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos	233
6.8	Métodos de actualización de multiplicadores. Aplicación a varios modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo	237
6.8.1	Modelo 1	238
6.8.2	Modelo 2	248
6.8.3	Modelo 3	254
6.8.4	Modelo 4	261
6.8.5	Modelo 5	268
6.8.6	Modelo 6	275
6.8.7	Modelo 7	283
6.8.8	Modelo 8	293
7	Solución del problema primal	305
7.1	Introducción	305
7.2	<i>Fase 1</i> : Solución del problema dual	306
7.3	Obtención de una solución primal factible	312
7.3.1	<i>Fase 2</i> : Obtención de un conjunto factible de variables de acoplamiento .	314
7.3.2	<i>Fase 3</i> : Despacho económico multiperiodo	322

8	Resultados computacionales	327
8.1	Introducción	327
8.2	Comparación de diversos métodos de actualización de multiplicadores	330
8.2.1	Caso estudio 1: Comparación de métodos de actualización de multiplicadores con un horizonte temporal de 24 horas	334
8.2.2	Caso estudio 2: Comparación de métodos de actualización de multiplicadores con un horizonte temporal de 48 horas	342
8.3	Resultados computacionales del algoritmo de coordinación hidrotérmica en el corto plazo propuesto	349
8.3.1	Caso estudio 3: Resultados computacionales del algoritmo propuesto al resolver un problema de coordinación hidrotérmica de horizonte temporal 24 horas	350
8.3.2	Caso estudio 4: Resultados computacionales del algoritmo propuesto al resolver un problema de coordinación hidrotérmica de horizonte temporal 48 horas	391
9	Conclusiones, aportaciones y líneas de futuros desarrollos	415
9.1	Resumen y conclusiones	415
9.2	Aportaciones de la tesis y tareas realizadas	416
9.3	Sugerencias para futuros desarrollos	419
A	Datos y resultados de los casos de estudio	421
A.1	Datos de demanda y del equipo generador	421
A.1.1	Demanda horaria	421
A.1.2	Datos del equipo generador	423
A.1.3	Resultados de una de las simulaciones ejecutadas (caso HPS_CD24) . . .	425
B	Artículo aceptado y pendiente de publicación en IEEE Transactions on Power Systems	451

Bibliografía	461

Índice de Figuras

5.1	Definición de estado 1. Diagrama de estados ($T_j^f = 2$, $T_j^p = 3$, $n_j^a = 3$ y $s_0 = -4$)	133
5.2	Definición de estado 1. Diagrama de estados ($T_j^f = 2$, $T_j^p = 3$, $n_j^a = 3$ y $s_0 = -1$)	133
5.3	Definición de estado 1. Diagrama de estados ($T_j^f = 2$, $T_j^p = 3$, $n_j^a = 3$ y $s_0 = 3$)	134
5.4	Definición de estado 1. Diagrama de estados ($T_j^f = 2$, $T_j^p = 3$, $n_j^a = 3$ y $s_0 = 1$)	134
5.5	Definición de estado 2. Diagrama de estados ($T_j^f = 2$, $T_j^p = 3$ y $s_0 = -4$)	137
5.6	Definición de estado 2. Diagrama de estados ($T_j^f = 2$, $T_j^p = 3$ y $s_0 = -1$)	137
5.7	Definición de estado 2. Diagrama de estados ($T_j^f = 2$, $T_j^p = 3$ y $s_0 = 3$)	137
5.8	Definición de estado 2. Diagrama de estados ($T_j^f = 2$, $T_j^p = 3$ y $s_0 = 1$)	138
5.9	Problema del despacho del modelo 3. Casos posibles	160
5.10	Problema del despacho del modelo 8. Casos posibles	181
6.1	El subgradiente de una función convexa	195
6.2	El ε -subgradiente de una función convexa	196
6.3	El método de los hiperplanos secantes	217
8.1	Curva de demanda horaria del 10 de junio de 1998	329
8.2	Curva de demanda horaria de los días 19 y 20 de agosto de 1998	330
8.3	Evolución de la fase 1 en el caso CM24_HPS	335
8.4	Evolución del valor de la función dual en el caso CM24_HPS	336
8.5	Evolución de la fase 1 en el caso CM24_HPSP	337
8.6	Evolución del valor de la función dual en el caso CM24_HPSP	338

8.7	Evolución de la fase 1 en el caso CM24_HPSCD	339
8.8	Evolución del valor de la función dual en el caso CM24_HPSCD	340
8.9	Evolución del valor de la función dual en las tres simulaciones analizadas (horizonte temporal: 24 horas)	341
8.10	Evolución de la fase 1 en el caso CM48_HPS	344
8.11	Evolución del valor de la función dual en el caso CM48_HPS	344
8.12	Evolución de la fase 1 en el caso CM48_HPSP	346
8.13	Evolución del valor de la función dual en el caso CM48_HPSP	346
8.14	Evolución de la fase 1 en el caso CM48_HPSCD	348
8.15	Evolución del valor de la función dual en el caso CM48_HPSCD	348
8.16	Evolución del valor de la función dual en las tres simulaciones analizadas (horizonte temporal: 48 horas)	350
8.17	Evolución de la función dual y de la función dual linealizada (caso HPS_CD24)	352
8.18	Multiplicadores λ al final de la etapa 1 (caso HPS_CD24)	353
8.19	Multiplicadores μ al final de la etapa 1 (caso HPS_CD24)	354
8.20	Demanda y multiplicadores λ (multiplicados por 8) al final de la etapa 1 (caso HPS_CD24)	355
8.21	Producción térmica, λ y μ al final de la etapa 1 (caso HPS_CD24)	355
8.22	Producción hidráulica, λ y μ al final de la etapa 1 (caso HPS_CD24)	356
8.23	Demanda, producción térmica y producción hidráulica al final de la etapa 1 (caso HPS_CD24)	356
8.24	Demanda y exceso de potencia acoplada al final de la etapa 1 (caso HPS_CD24)	357
8.25	Demanda y exceso de potencia producida al final de la etapa 1 (caso HPS_CD24)	358
8.26	Multiplicadores λ al final de la etapa 2 (caso HPS_CD24)	358
8.27	Multiplicadores μ al final de la etapa 2 (caso HPS_CD24)	359
8.28	Demanda y multiplicadores λ (multiplicados por 8) al final de la etapa 2 (caso HPS_CD24)	360

8.29 Producción térmica, λ y μ al final de la etapa 2 (caso HPS_CD24)	361
8.30 Producción hidráulica, λ y μ al final de la etapa 2 (caso HPS_CD24)	361
8.31 Demanda, producción térmica y producción hidráulica al final de la etapa 2 (caso HPS_CD24)	362
8.32 Demanda y exceso de potencia acoplada al final de la etapa 2 (caso HPS_CD24) .	362
8.33 Demanda y exceso de potencia producida al final de la etapa 2 (caso HPS_CD24)	364
8.34 Multiplicadores μ al final de la etapa 3 (caso HPS_CD24)	364
8.35 Producción térmica, λ y μ al final de la etapa 3 (caso HPS_CD24)	365
8.36 Producción hidráulica, λ y μ al final de la etapa 3 (caso HPS_CD24)	366
8.37 Demanda, producción térmica y producción hidráulica al final de la etapa 3 (caso HPS_CD24)	366
8.38 Demanda y exceso de potencia acoplada al final de la etapa 3 (caso HPS_CD24) .	367
8.39 Demanda y exceso de potencia producida al final de la etapa 3 (caso HPS_CD24)	367
8.40 Evolución de los multiplicadores λ asociados a los subperiodos 1-4 (caso HPS_CD24)	369
8.41 Evolución de los multiplicadores λ asociados a los subperiodos 5-8 (caso HPS_CD24)	370
8.42 Evolución de los multiplicadores λ asociados a los subperiodos 9-12 (caso HPS_CD24)	371
8.43 Evolución de los multiplicadores λ asociados a los subperiodos 13-16 (caso HPS_CD24)	372
8.44 Evolución de los multiplicadores λ asociados a los subperiodos 17-20 (caso HPS_CD24)	373
8.45 Evolución de los multiplicadores λ asociados a los subperiodos 21-24 (caso HPS_CD24)	374
8.46 Evolución de los multiplicadores λ asociados a los subperiodos 1-4 durante la etapa 2 (caso HPS_CD24)	375
8.47 Evolución de los multiplicadores λ asociados a los subperiodos 5-8 durante la etapa 2 (caso HPS_CD24)	376
8.48 Evolución de los multiplicadores λ asociados a los subperiodos 9-12 durante la etapa 2 (caso HPS_CD24)	377
8.49 Evolución de los multiplicadores λ asociados a los subperiodos 13-16 durante la etapa 2 (caso HPS_CD24)	378

8.50 Evolución de los multiplicadores λ asociados a los subperiodos 17-20 durante la etapa 2 (caso HPS_CD24)	379
8.51 Evolución de los multiplicadores λ asociados a los subperiodos 21-24 durante la etapa 2 (caso HPS_CD24)	380
8.52 Evolución de los multiplicadores μ asociados a los subperiodos 1-4 (caso HPS_CD24)	381
8.53 Evolución de los multiplicadores μ asociados a los subperiodos 5-8 (caso HPS_CD24)	382
8.54 Evolución de los multiplicadores μ asociados a los subperiodos 9-12 (caso HPS_CD24)	383
8.55 Evolución de los multiplicadores μ asociados a los subperiodos 13-16 (caso HPS_CD24)	384
8.56 Evolución de los multiplicadores μ asociados a los subperiodos 17-20 (caso HPS_CD24)	385
8.57 Evolución de los multiplicadores μ asociados a los subperiodos 20-24 (caso HPS_CD24)	386
8.58 Evolución de los multiplicadores μ asociados a los subperiodos 11-14 (caso HPS_CD24) durante las etapas 2 y 3	387
8.59 Evolución de los multiplicadores μ asociados a los subperiodos 16, 18-20 (caso HPS_CD24) durante las etapas 2 y 3	388
8.60 Evolución de los multiplicadores μ asociados a los subperiodos 21-24 (caso HPS_CD24) durante las etapas 2 y 3	389
8.61 Evolución de la función dual y de la función dual linealizada (caso HPS_CD48) durante la etapa 1	393
8.62 Evolución de la función dual durante las etapas 1, 2 y 3 (caso HPS_CD48)	394
8.63 Multiplicadores λ al final de la etapa 1 (caso HPS_CD48)	395
8.64 Multiplicadores μ al final de la etapa 1 (caso HPS_CD48)	395
8.65 Demanda y multiplicadores λ (multiplicados por 8) al final de la etapa 1 (caso HPS_CD48)	396
8.66 Producción térmica, λ y μ al final de la etapa 1 (caso HPS_CD48)	397
8.67 Producción hidráulica, λ y μ al final de la etapa 1 (caso HPS_CD48)	397
8.68 Demanda, producción térmica y producción hidráulica al final de la etapa 1 (caso HPS_CD48)	398
8.69 Demanda y exceso de potencia acoplada al final de la etapa 1 (caso HPS_CD48) .	399

8.70 Demanda y exceso de potencia producida al final de la etapa 1 (caso HPS_CD48)	399
8.71 Multiplicadores λ al final de la etapa 2 (caso HPS_CD48)	400
8.72 Multiplicadores μ al final de la etapa 2 (caso HPS_CD48)	400
8.73 Demanda y multiplicadores λ (multiplicados por 8) al final de la etapa 2 (caso HPS_CD48)	402
8.74 Producción térmica, λ y μ al final de la etapa 2 (caso HPS_CD48)	402
8.75 Producción hidráulica, λ y μ al final de la etapa 2 (caso HPS_CD48)	403
8.76 Demanda, producción térmica y producción hidráulica al final de la etapa 2 (caso HPS_CD48)	404
8.77 Demanda y exceso de potencia acoplada al final de la etapa 2 (caso HPS_CD48)	404
8.78 Demanda y exceso de potencia producida al final de la etapa 2 (caso HPS_CD48)	405
8.79 Multiplicadores μ al final de la etapa 3 (caso HPS_CD48)	405
8.80 Producción térmica, λ y μ al final de la etapa 3 (caso HPS_CD48)	406
8.81 Producción hidráulica, λ y μ al final de la etapa 3 (caso HPS_CD48)	407
8.82 Demanda, producción térmica y producción hidráulica al final de la etapa 3 (caso HPS_CD48)	407
8.83 Demanda y exceso de potencia acoplada al final de la etapa 3 (caso HPS_CD48)	408
8.84 Demanda y exceso de potencia producida al final de la etapa 3 (caso HPS_CD48)	409
8.85 Evolución de los multiplicadores λ asociados a los subperiodos 3, 8, 27 y 37 (caso HPS_CD48)	410
8.86 Evolución durante la etapa 2 de los multiplicadores λ asociados a los subperiodos 3, 8, 27 y 37 (caso HPS_CD48)	411
8.87 Evolución de los multiplicadores μ asociados a los subperiodos 8, 18, 37 y 43 (caso HPS_CD48)	412
8.88 Evolución durante las etapas 2 y 3 de los multiplicadores μ asociados a los subperiodos 8, 18, 37 y 43 (caso HPS_CD48)	413

Lista de símbolos

Letras minúsculas

- a_j Función de coste de producción (Pta) de la central térmica j .
- $b_j(x_{jk}^d)$ Función de coste de arranque (Pta) de la central j
- c_j Coste de desacoplar (o parar) la central térmica j (Pta).
- f Función de coste de explotación.
- h_j Vector que contiene las contribuciones a las restricciones globales de igualdad de la central térmica j en cada subperiodo del horizonte temporal analizado.
- h_i Vector que contiene las contribuciones a las restricciones globales de igualdad de las centrales de la cuenca hidráulica i en cada subperiodo del horizonte temporal analizado.
- g_j Vector que contiene las contribuciones a las restricciones globales de desigualdad de la central térmica j en cada subperiodo del horizonte temporal analizado.
- g_i Vector que contiene las contribuciones a las restricciones globales de desigualdad de las centrales de la cuenca hidráulica i en cada subperiodo del horizonte temporal analizado.
- i Subíndice que hace referencia a las cuencas hidráulicas.
- j Subíndice que hace referencia a las centrales térmicas.
- k Subíndice que hace referencia a los subperiodos del horizonte temporal analizado.
- l_k Número de horas del subperiodo k .
- $l(i)$ Subíndice que hace referencia a las centrales hidráulicas de la cuenca i .
- $m(l(i))$ Subíndice que hace referencia a las centrales hidráulicas situadas aguas arriba de la central l de la cuenca i .
- n_j^a Número de costes de arranque que se consideran para la central térmica j .
- $\underline{p}_j$ Potencia mínima de la central térmica j (MW).
- $\overline{p}_j$ Potencia máxima de la central térmica j (MW).
- $p_{l(i)k}$ Potencia hidráulica producida por la central hidráulica l de la cuenca i en el subperiodo k (MW).
- r_j^s Máxima rampa de subida de carga de la central j en un subperiodo (MW).
- r_j^b Máxima rampa de bajada de carga de la central j en un subperiodo (MW).

- $s_{l(i)k}$ Volumen de agua vertida por el embalse asociado a la central hidráulica l de la cuenca i durante el subperiodo k (Hm^3).
- $\tilde{s}_{jk}$ Variable entera que si es positiva indica el número de subperiodos que lleva acoplada la central térmica j al comienzo del subperiodo k y si es negativa indica el número de subperiodos que lleva desacoplada la central térmica j al comienzo del subperiodo k .
- $\tilde{s}_{j0}$ Parámetro que si es positivo indica el número de subperiodos que lleva acoplada la central j al comienzo del periodo de estudio y si es negativo indica el número de subperiodos que lleva desacoplada la central térmica j al comienzo del periodo de estudio.
- t_{jk} Potencia producida por la central térmica j en el subperiodo k (MW).
- $u_{l(i)k}$ Caudal de agua turbinada por la central hidráulica l de la cuenca i durante el subperiodo k (m^3/s).
- $\underline{u}_{l(i)}$ Caudal mínimo de agua que tiene que turbinar la central hidráulica l de la cuenca i en cada subperiodo (m^3/s).
- $\overline{u}_{l(i)}$ Caudal máximo de agua que puede turbinar la central hidráulica l de la cuenca i en cada subperiodo (m^3/s).
- v_{jk} Variable binaria de acoplamiento de la central térmica j en el subperiodo k (1 indica estado de acoplamiento de la central y 0 indica estado de desacoplamiento).
- v_j^0 Parámetro binario que define el estado de acoplamiento de la central térmica j al comienzo del periodo de estudio (1 indica estado de acoplamiento de la central y 0 indica estado de desacoplamiento).
- $w_{l(i)k}$ Volumen de aportaciones al embalse de la central hidráulica l de la cuenca i en el subperiodo k (Hm^3).
- x_{jk}^d Tiempo (en número de subperiodos) que lleva desacoplada la central térmica j en el subperiodo k .
- $x_{l(i)k}$ Volumen de agua del embalse de la central hidráulica l de la cuenca i al comienzo del subperiodo k (Hm^3).
- $x_{l(i)}^0$ Volumen inicial (al comienzo del periodo de estudio) de agua en el embalse asociado a la central hidráulica l de la cuenca i (Hm^3).
- $\underline{x}_{l(i)T}$ Límite inferior del volumen final (al final del periodo de estudio) de agua en el embalse asociado a la central hidráulica l de la cuenca i (Hm^3).
- $\overline{x}_{l(i)T}$ Límite superior del volumen final (al final del periodo de estudio) de agua en el embalse asociado a la central hidráulica l de la cuenca i (Hm^3).
- $\underline{x}_{l(i)}$ Límite inferior de volumen de agua almacenada en el embalse asociado a la central hidráulica l de la cuenca i (Hm^3).

$\bar{x}_{l(i)}$ Límite superior de volumen de agua almacenada en el embalse asociado a la central hidráulica l de la cuenca i (Hm^3).

y_{jk} Variable binaria de arranque de la central térmica j en el subperiodo k (1 indica que la central se arranca y 0 que no se arranca).

z_{jk} Variable binaria de parada de la central térmica j en el subperiodo k (1 indica que la central se para y 0 que no se para).

Letras mayúsculas

A_k Potencia de regulación hacia arriba en el subperiodo k (MW).

B_k Potencia de regulación hacia abajo en el subperiodo k (MW).

D_k Demanda eléctrica en el subperiodo k (MW).

G Vector que contiene los términos independientes de las restricciones globales de desigualdad.

H Vector que contiene los términos independientes de las restricciones globales de igualdad.

I Número total de cuencas hidráulicas.

J Número total de centrales térmicas.

K Número total de subperiodos del horizonte temporal analizado.

$L(i)$ Número de centrales hidráulicas asociadas a la cuenca hidráulica i .

$M(l(i))$ Número total de centrales hidráulicas situadas aguas arriba de la central hidráulica l de la cuenca i .

R_k Reserva rodante en el subperiodo k (MW).

T_j^f Mínimo tiempo de funcionamiento, en subperiodos, de la central térmica j .

T_j^p Mínimo tiempo de parada, en subperiodos, de la central térmica j .

Letras caligráficas

$\mathcal{X}_j$ Vector que contiene todas las variables asociadas a la central térmica j .

$\mathcal{Y}_i$ Vector que contiene todas las variables asociadas a las centrales de la cuenca hidráulica i .

$\mathcal{Z}$ Vector de variables primales (variables asociadas a todas las centrales térmicas e hidráulicas).

Letras griegas

α Vector de multiplicadores asociado a las restricciones de demanda mínima.

- β^a Vector de multiplicadores asociado a las restricciones de regulación hacia arriba.
- β^b Vector de multiplicadores asociado a las restricciones de regulación hacia abajo.
- ϕ Función dual.
- λ Vector de multiplicadores asociado a las restricciones globales de igualdad (restricciones de demanda).
- μ Vector de multiplicadores asociado a las restricciones globales de desigualdad (en el contexto de la formulación general del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo mediante técnicas de relajación lagrangiana).
- μ Vector de multiplicadores asociado a las restricciones de reserva rodante (en el contexto de la formulación de modelos particulares de coordinación hidrotérmica en el corto plazo mediante técnicas de relajación lagrangiana).
- ν Contador de iteraciones.
- j Conjunto de centrales térmicas.
 - i Conjunto de cuencas hidráulicas.
 - $l(i)$ Conjunto de centrales hidráulicas de la cuenca i .
 - $m(l(i))$ Conjunto de centrales situadas aguas arriba de la central l de la cuenca hidráulica i .
- $\rho_{l(i)}$ Función no lineal del caudal turbinado y del volumen de agua embalsada que define la potencia producida por la central l de la cuenca i en el subperiodo k .
- $\varrho_{l(i)}$ Coeficiente que determina la relación lineal entre la producción hidráulica de la central l de la cuenca i y el caudal turbinado por esta central si se supone constante la altura del embalse.
- $\tau_{m(l(i))}$ Tiempo, en subperiodos, que tarda el agua en llegar al embalse asociado a la central hidráulica l de la cuenca i desde el embalse, situado aguas arriba, asociado a la central $m(l(i))$.
- θ Vector que incluye todos los multiplicadores.

Capítulo 1

Introducción

1.1 Los sistemas de energía eléctrica

Los sistemas de energía eléctrica tienen una importancia fundamental en el mundo moderno debido a que representan un elemento primordial en el desarrollo económico y social de los países. Para satisfacer las necesidades crecientes de energía eléctrica se han construido complejos sistemas que comprenden centrales de generación de diversa índole y complejas redes de transporte y distribución. La planificación y explotación de tales sistemas es una tarea difícil y de vital importancia en el desarrollo económico por los grandes beneficios, o grandes pérdidas, que se pueden derivar de una buena, o mala, gestión de tales sistemas.

Por su carácter estratégico y sus enormes requisitos de inversión el desarrollo de las empresas eléctricas ha contado tradicionalmente con una importante tutela y protección del Estado [105]. Tanto la generación como el transporte y la distribución de energía eléctrica eran considerados monopolios naturales por las economías de escala que se podían obtener en estos campos. Por ello hasta hace muy pocos años la totalidad de los sistemas de energía eléctrica han funcionado de forma centralizada o regulada, esto es, sin libre mercado y con precios establecidos en tarifas. En este tipo de entornos (regulados o centralizados) la explotación de los sistemas de energía eléctrica se hace atendiendo a la minimización de los costes totales del sistema conjunto.

Recientemente se han empezado a liberalizar los sistemas de energía eléctrica de ciertos países. El motivo que ha desatado el cuestionamiento del mercado regulado tradicional de energía eléctrica ha sido fundamentalmente el fin de la consideración de la generación de energía eléctrica como monopolio natural. El desarrollo tecnológico ha permitido la construcción de turbinas muy eficientes. Esto ligado al abaratamiento del gas y al fin de la prohibición de quemar gas para producir electricidad durante los años 80 en los países occidentales, ha provocado el desarrollo y construcción de centrales de ciclo combinado, que necesitan una inversión mucho menor y

con tiempos de amortización más bajos que las centrales térmicas convencionales o nucleares [105], [57]. Esta drástica reducción de costes de inversión implica que son mucho más numerosos los potenciales agentes interesados a intervenir en el sector eléctrico y esto, unido a las nuevas tendencias liberalizadoras de la economía, ha llevado al deseo de introducir mecanismos de libre mercado y competencia en el sector eléctrico con el objetivo de tratar de estimular su eficiencia¹ y así disminuir el coste de la energía al usuario final.

La liberalización del sector eléctrico implica la separación de la actividad de generación, que, como se ha indicado, ha dejado de ser considerada monopolio natural, de las actividades de transporte y distribución. Con ello se permite la entrada de cualquier generador al negocio eléctrico estimulándose la competencia, pero se mantiene el carácter de monopolio natural del transporte y la distribución de energía eléctrica.

Dado su carácter monopolístico, las actividades del transporte y distribución de un sistema eléctrico liberalizado deben ser reguladas de forma que se establezcan peajes a pagar por el uso de la red por parte de generadores y consumidores del sistema. Así, cualquier generador (o consumidor) puede vender (o comprar) energía a cualquier consumidor (o generador) utilizándose la red, común a todo el sistema, de transporte y/o distribución.

Dados los elevados costes de inversión y de producción, la planificación eficiente y la explotación económicamente óptima de los sistemas de energía eléctrica ha ocupado siempre un papel destacado en este tipo de entornos. Esto unido a la complejidad de los modelos que representan los sistemas de energía eléctrica ha provocado el que las empresas eléctricas hayan buscado la ayuda de programas informáticos desde que el desarrollo de las tecnologías de la computación lo ha permitido.

Así, se han desarrollado en las empresas eléctricas modelos informáticos que cubren aspectos tan diversos como son la planificación de la ampliación de la generación o de la red de transporte y de distribución, la optimización de la producción, los estudios de fiabilidad del sistema o de la interconexión de varios sistemas, el control de tensiones, etc. Aunque estos modelos se han desarrollado desde la perspectiva del funcionamiento centralizado o regulado del sector eléctrico, mantienen hoy día su importancia ya que las empresas eléctricas, que tienen que asumir muchos más riesgos en su negocio ya que no tienen garantizada la venta de energía, necesitan de la ayuda de herramientas de apoyo que les permitan hacer evaluaciones económicas y técnicas del comportamiento a corto, medio y largo plazo del sistema y de sus equipos.

¹En países que viven un importante incremento de la demanda eléctrica y que se encuentran fuertemente endeudados es la necesidad de incorporar capital privado al sector con el que hacer frente a las enormes inversiones necesarias para cubrir esa demanda (y no frenar el desarrollo económico del país) la que ha guiado estos procesos de liberalización y de apertura del mercado de energía eléctrica.

España es uno de los pocos países que ya ha apostado por la liberalización del sector eléctrico. El 27 de noviembre de 1997, el Parlamento español aprueba la ley 54/1997 del sector eléctrico sobre la que se sustenta la nueva regulación del sector eléctrico español y el 1 de enero de 1998 se pone en marcha esta ley con el establecimiento de un mercado mayorista de energía eléctrica. Se ha pasado pues de una explotación centralizada y regulada por la empresa estatal Red Eléctrica de España (REE) al establecimiento de un mercado de producción de energía eléctrica. En este mercado que acaba de nacer, la demanda aún es un agente estático; es decir que por el momento los generadores ofertan precios horarios de generación para satisfacer una demanda que no reacciona ante los precios del mercado.

La reforma del sector eléctrico, guiada por la liberalización de la generación y la regulación del transporte y distribución, requiere la creación de organismos independientes que velen por el funcionamiento del mercado. En España se ha creado un ente regulador, la Comisión Nacional del Sistema Eléctrico (CNSE), que supervisa el buen funcionamiento de todo el sector y depende del Ministerio de Industria y Energía. La Comisión Nacional del Sistema Eléctrico español, como regulador principal, se apoya en dos organizaciones fundamentales e independientes entre sí: el operador del mercado y el operador del sistema.

El operador del mercado tiene como misión la gestión económica del mercado. Las tareas fundamentales del operador del mercado son pues la recepción y aceptación de las ofertas horarias de venta y compra de energía (esto último cuando el nuevo sistema liberalizado haya madurado y la demanda deje de ser una agente estático y reaccione a los precios del mercado), la casación de dichas ofertas y la determinación de los precios marginales de cada hora. La gestión del operador del mercado está sometida al seguimiento y control del comité de agentes del mercado.

El operador del sistema es el responsable de la gestión técnica del sistema. Su misión es garantizar la continuidad, calidad y seguridad del suministro eléctrico y la correcta coordinación del sistema de producción y transporte. Esto incluye la gestión de los flujos reales de energía de forma que se cumplan las restricciones que impone la red, el cálculo de las pérdidas de energía ocasionadas en el transporte y la gestión de los servicios complementarios. Se entiende por servicios complementarios aquellos que resultan necesarios para asegurar el suministro de energía eléctrica en las condiciones de calidad, seguridad y fiabilidad necesarias. Entre estos servicios se encuentran la regulación (cuyo objetivo es conseguir que en todo momento la generación de energía eléctrica iguale a la demanda de la misma, ya que de no ser así se producirían inestabilidades en el sistema), el mantenimiento de reserva rodante (esto es, el mantenimiento de potencia acoplada y disponible para producir para hacer frente a situaciones como la indisponibilidad de algún generador o la subida inesperada de la demanda) y el control de tensiones.

A pesar de esta tendencia mundial a la desregulación y liberalización de los sistemas de energía

eléctrica, son aún muy pocos los sistemas (típicamente países o estados) que ya han reformado su funcionamiento. Algunos de estos países o estados son: Chile, Inglaterra y Gales, Argentina, Noruega, España y California. En la mayoría de los países, existe aún poca confianza en la eficiencia de un libre mercado de un producto, como es la energía eléctrica, que está atado a muchas restricciones técnicas (restricciones tanto a nivel del funcionamiento de los propios generadores como restricciones globales del sistema) para conseguir un suministro seguro y de calidad.

En esta tesis se propone un modelo de coordinación hidrotérmica en el corto plazo que se encuadra dentro del funcionamiento de un sistema de energía eléctrica centralizado, aún vigente en la mayoría de los países. Existe un cambio de criterio fundamental en los modelos que se plantean desde la óptica de los sistemas centralizados o bien desde la óptica de los sistemas liberalizados. En los primeros el objetivo es minimizar los costes totales de explotación del sistema, mientras que en los segundos el objetivo, de cada generador, es maximizar su beneficio.

En el modelo que se propone en este trabajo de investigación el objetivo perseguido es la minimización de los costes de explotación del sistema conjunto. Sin embargo, el mecanismo de la relajación lagrangiana utilizado simula el funcionamiento de un mercado de generación con demanda estática (es decir, sin ofertas de compra de energía a distintos precios) en el que los generadores tratan de maximizar su beneficio, que es el punto de vista adoptado en los entornos liberalizados. El funcionamiento de este mercado simulado es el siguiente. Un operador regulador propone precios horarios de la energía. En respuesta a estos precios, los generadores, tratando de maximizar sus beneficios, presentan un programa horario de la potencia que están dispuestos a generar. El operador evalúa si con esta potencia se puede satisfacer la demanda. En las horas en que la suma de las propuestas de generación no sea suficiente para cumplir la demanda, el operador propone precios más altos. Por el contrario, en aquellas horas en que haya exceso de producción, el operador disminuye los precios. El proceso continúa hasta que se puede cumplir la demanda en todos los subperiodos del horizonte temporal analizado.

Así, el modelo propuesto en esta tesis resulta de utilidad tanto en un sistema de energía eléctrica centralizado, que es para lo que fue inicialmente concebido, como en un sistema de energía eléctrica liberalizado, donde puede ser una herramienta de ayuda tanto para el operador del mercado como para el operador del sistema.

1.2 El problema de la coordinación hidrotérmica

Los sistemas de energía eléctrica disponen de dos equipos generadores claramente diferenciados: el equipo de generación térmica y el equipo de generación hidráulica. Cada uno de estos equi-

pos tiene diferentes características y limitaciones en cuanto a costes, volumen de producción y capacidad de adaptación a la demanda del sistema.

El sistema de generación térmico está formado por centrales nucleares, térmicas convencionales y turbinas de gas. La utilización de estas centrales tiene asociada, en la generación de energía, costes de producción, que dependen de forma no lineal de la potencia generada en cada hora, y costes de arranque, que dependen de forma exponencial del tiempo de parada de la central de forma que cuanto más fría está la caldera mayor es el coste de arranque.

Las limitaciones más características de las centrales térmicas se especifican a continuación. Por un lado, la potencia generada no puede variar bruscamente sino que está restringida por una máxima rampa de subida y bajada de carga. Por otra parte, el arranque de las centrales térmicas puede necesitar de varias horas. Estas limitaciones implican que para que en cierto instante una central térmica pueda producir una potencia determinada, hace falta haber arrancado esta central con suficiente antelación y haber producido con ella un nivel de potencia que permita el cambio hacia la potencia deseada en el instante considerado.

Además, para evitar un envejecimiento prematuro por desgaste de la caldera, conviene mantener una central térmica acoplada (o desacoplada) un número mínimo de horas a partir del momento en que se arranca (o se para). Estas son las restricciones de tiempo mínimo de funcionamiento y parada.

La principal ventaja de las centrales térmicas es que su fuente primaria de energía (combustibles fósiles o nucleares) se puede suponer ilimitada.

El sistema hidráulico está constituido por centrales hidráulicas en lechos de ríos. Las centrales hidráulicas situadas en un mismo lecho (o cuenca hidráulica) están sometidas a un acoplamiento espacio-temporal. El acoplamiento espacial se debe a que el agua turbinada por una central llega a la central situada inmediatamente aguas abajo. El acoplamiento temporal se debe, por un lado, a que el agua turbinada por una central tarda cierto tiempo en llegar a la central situada aguas abajo y, por otro lado, a que el agua turbinada en cierto instante por una central hidráulica no podrá ser turbinada en un instante posterior por esa misma central.

Las centrales hidráulicas tienen un coste de explotación despreciable ya que el combustible que utilizan (el agua) es de coste nulo. Esto implica que el uso de las centrales hidráulicas disminuye el coste total de producción de energía. Además, estas centrales pueden variar rápidamente su nivel de generación de forma que pueden variar su producción en respuesta a los cambios de la demanda. El tiempo de arranque es muy pequeño (se suele considerar despreciable).

El gran inconveniente del sistema de generación hidráulico es que la cantidad de agua es limitada.

Esto quiere decir que hay que gestionar de forma adecuada la energía (o agua) disponible con el objetivo de que se favorezca la generación en aquellos momentos en que la demanda es alta. Cuando la demanda es alta, el coste de producción de energía eléctrica es elevado ya que habrá que emplear las centrales térmicas de coste de producción menor y las de coste de producción mayor. Es conveniente emplear la energía hidráulica (de coste de producción despreciable) en aquellos momentos en que de no disponer de esta energía, habría que producir con centrales térmicas caras. Así, gestionando de forma adecuada los recursos hidráulicos se disminuye el coste de explotación total del sistema.

De todo esto se deduce que una explotación eficiente del sistema de energía eléctrica debe coordinar la producción de las centrales térmicas e hidráulicas de forma que se saque el mejor partido de estos dos tipos de equipos generadores. Esta coordinación debe hacerse de forma que se suministre la demanda al mínimo coste. A diferencia de lo que ocurre con otros productos almacenables, la electricidad ha de generarse en el mismo momento en que se consume.

Así, el problema de la coordinación hidrotérmica consiste en determinar la política óptima de arranque y parada de las centrales térmicas y la producción de potencia de las centrales térmicas e hidráulicas de forma que se cumplan las restricciones que modelan el funcionamiento del equipo de generación térmico e hidráulico, se suministre la demanda y se cumplan otras restricciones del sistema cuyo objetivo es conseguir que el suministro de energía eléctrica sea seguro, fiable y de calidad. Todo ello debe hacerse de forma que se minimicen los costes totales de explotación del sistema.

Es importante destacar que el problema de la coordinación hidrotérmica se plantea desde la perspectiva de los sistemas de energía eléctrica centralizados. Se trata de la herramienta que utiliza, en estos entornos tradicionales, el regulador del sistema para decidir qué centrales van a suministrar la demanda y cuánta será la potencia generada por cada una de ellas de forma que se minimicen los costes totales de explotación del sistema.

Idealmente, los modelos de coordinación hidrotérmica deberían ser muy detallados y cubrir un horizonte temporal largo. Sin embargo dada la complejidad y las dimensiones de los sistemas de energía eléctrica, esto resulta computacionalmente imposible. En lugar de elaborar un único modelo, se establece una jerarquía de modelos dependiendo del alcance temporal de los mismos. El horizonte temporal de estos modelos varía desde el corto plazo, generalmente un día o una semana, hasta el medio/largo plazo, de un mes a varios años.

Los modelos de coordinación hidrotérmica en el medio/largo plazo (también llamados modelos de cobertura) se ocupan de la programación energética semanal o mensual de uno o varios años. En ellos se considera la gestión anual o hiperanual de los recursos hidráulico, políticas de combustible

y programas de mantenimiento. Por estudiarse un horizonte temporal amplio, para mantener el problema dentro de unas dimensiones que permitan su resolución, se simplifica el modelado del equipo generador. Asimismo, es necesario modelar adecuadamente las incertidumbres asociadas a la demanda, la disponibilidad del equipo generador y las aportaciones de agua a los embalses de las cuencas hidráulicas con producción hidroeléctrica.

Los modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo se ocupan de la planificación horaria de horizontes temporales que van desde un día a una semana divididos, habitualmente en subperiodos horarios. El modelado del equipo generador es muy detallado. Se trata de modelos deterministas, es decir se desprecian todo tipo de incertidumbres (en la disponibilidad de los equipos, en la demanda y en las aportaciones hidráulicas) ya que en estos horizontes temporales las previsiones apenas se alejan de la realidad que luego acontece.

La inclusión de la red de transporte en los modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo se ha considerado siempre un aspecto muy secundario por la complejidad que introduce en el modelado y porque su consideración en este tipo de modelos no suele afectar las decisiones de arranque/parada de las centrales. Así pues, se simplifica el modelado de la red de energía eléctrica de forma que se considera el modelo de nudo único. En el modelo de nudo único se supone que toda la generación y toda la demanda se concentra en un único nudo (y por tanto la red no existe).

En esta tesis se propone un modelo para resolver el problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo. El procedimiento de resolución se basa en el uso de técnicas de relajación lagrangiana.

Como ya se ha indicado, a pesar de que el problema de la coordinación hidrotérmica se plantea desde la óptica de los sistemas de energía eléctrica centralizados, el mecanismo de la relajación lagrangiana empleado permite que el modelo propuesto en esta tesis también sea de utilidad en los jóvenes entornos liberalizados.

1.3 Revisión bibliográfica

Desde la introducción de los ordenadores en las industrias del sector eléctrico, se han desarrollado muchos métodos para resolver el problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo y los problemas equivalentes, cuando se dispone únicamente de equipo de generación térmico o bien de equipo de generación hidráulico, de la programación horaria de centrales térmicas (o “unit commitment”) o de la planificación de la producción de un sistema hidráulico.

Como ya se ha indicado en el apartado 1.2, el problema de la coordinación hidrotérmica en

el corto plazo consiste en determinar la política óptima de arranques y paradas de los grupos térmicos, así como la producción de las centrales térmicas e hidráulicas de forma que se satisfaga la demanda, y demás restricciones del sistema, a coste mínimo y se cumplan las restricciones que modelan el funcionamiento del equipo de generación térmico e hidráulico. Los horizontes temporales considerados varían desde un día a una semana.

El problema de la programación horaria de centrales térmicas consiste en determinar la política óptima de arranque y parada de las centrales térmicas así como su producción de potencia de forma que se suministre la demanda a coste mínimo en un horizonte temporal de corto plazo. La planificación de la producción de un sistema hidráulico desempeña una tarea análoga cuando únicamente se consideran centrales hidráulicas.

Los problemas de la programación horaria de centrales térmicas y de la planificación de la producción de un sistema hidráulico se emplean cuando sólo se dispone de centrales térmicas o hidráulicas respectivamente, o bien cuando se resuelve un problema de coordinación hidrotérmica en el corto plazo descomponiendo el problema global en un subproblema de programación horaria de centrales térmicas y un subproblema de planificación de la producción del sistema hidráulico.

En este apartado se describen brevemente los métodos más relevantes que aparecen en la literatura para resolver estos problemas. Muchos de estos métodos son aplicables tanto a la resolución del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo como al problema de la programación horaria de centrales térmicas.

Para resolver el problema de la planificación de la producción de un sistema hidráulico se aplican métodos distintos a los empleados en el problema equivalente de la programación horaria de centrales térmicas debido a las diferencias fundamentales que existen entre estos equipos. Estas diferencias son:

- Por una parte las centrales hidráulicas de una misma cuenca están acopladas espacio-temporalmente. Las restricciones que modelan este acoplamiento son las restricciones de la conservación del agua (capítulo 3). Estas restricciones son lineales y presentan estructura de red. La estructura de red es una de las características más representativas de los modelos de las cuencas hidráulicas.
- Por otro lado las centrales hidráulicas pueden variar rápidamente su producción adaptándose a la demanda. Por ello, no se consideran restricciones de rampa. Tampoco se incluyen en el modelado de las centrales hidráulicas restricciones de tiempo mínimo de funcionamiento y parada, ya que no se plantean los problemas de desgaste térmico de la caldera que hay que considerar en el modelado de las centrales térmicas.

- Además, en la mayoría de los sistemas eléctricos, no se consideran variables enteras 0/1 de acoplamiento de las centrales hidráulicas por ser los costes de arranque de este tipo de centrales despreciables y por ser muy rápido (de forma que se suele considerar instantáneo) el proceso de arranque.

Por tanto, los modelos de planificación de la producción de un sistema hidráulico habitualmente no incluyen variables enteras de acoplamiento. De otro modo, se considera que todas las centrales hidráulicas están preparadas para producir. Por ello al problema de la planificación de la producción hidráulica se le llama despacho hidráulico². Los modelos de despacho hidráulico tratan de sacar partido de la estructura de red del sistema de generación hidráulico.

Este apartado se divide en dos partes. En la primera parte (apartado 1.3.1) se describen brevemente los métodos que aparecen en la literatura para la resolución del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo o de la programación horaria de centrales térmicas indicando en cada caso a qué problema (coordinación hidrotérmica en el corto plazo y/o programación horaria de centrales térmicas) se puede aplicar el método. En la segunda parte (apartado 1.3.2) se especifican los métodos de resolución del despacho hidráulico.

Dado que la estructura del problema del despacho hidráulico es muy distinta a las estructuras de los problemas de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo y la programación horaria de centrales térmicas, la revisión bibliográfica realizada sobre el problema del despacho hidráulico ha sido superficial. De hecho el método estudiado en detalle y sobre el cuál recaen las principales aportaciones de este trabajo de investigación, el método de la relajación lagrangiana, no se aplica al problema del despacho hidráulico.

1.3.1 Métodos de resolución de los problemas de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo y de la programación horaria de centrales térmicas

Matemáticamente los problemas de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo y la programación horaria de centrales térmicas se plantean como problemas de optimización de gran dimensión no lineales y con variables enteras y continuas. Las variables enteras, que son además variables 0/1, modelan los estados de acoplamiento, arranque y parada de las centrales térmicas.

En este apartado se describen los métodos que se han aplicado a la resolución de tales problemas que aparecen en la literatura. En [110] (publicación del año 1991) y [113] (publicación del año 1994) puede encontrarse una revisión bibliográfica de estos problemas.

²En el contexto de la explotación de los sistemas de energía eléctrica, se llama despacho al problema de optimización de la producción para cumplir la demanda no considerándose las variables enteras de acoplamiento de las centrales.

Métodos de lista de prioridad

Este método se emplea únicamente en la resolución del problema de la programación horaria de centrales térmicas [4], [61], [114], [73], [74], [75], [129]. Se basa en el ordenamiento de las centrales térmicas atendiendo a sus costes medios a potencia máxima en una “lista de prioridad” de forma que las centrales de menor coste ocupan las primeras posiciones de la lista. Las centrales se acoplan o desacoplan para cumplir las restricciones de carga del sistema (principalmente las restricciones de demanda y reserva rodante) siguiendo el orden establecido en la lista. La lista de prioridad no puede modelar de forma precisa las variaciones del coste en función de la potencia producida, ni los costes de arranque o parada de las centrales.

Este método heurístico es muy sencillo y fácil de implementar. Requiere poca memoria y poco tiempo de cálculo. Sin embargo, al no tener en cuenta la variación del coste con la potencia producida o los costes de arranque y parada de las centrales, no puede garantizar la cuasi-optimalidad de la solución encontrada. Además, este método requiere el empleo de reglas heurísticas (por ejemplo, reglas para respetar las restricciones de tiempo mínimo de funcionamiento y parada de la central) para la consecución de una solución factible.

Programación dinámica

Este método es uno de los que más se ha utilizado para resolver el problema de la programación horaria de centrales térmicas [96], [97], [126], [72], [122], [123], [92], [121], [112], [115], [93], [124], [55], [129]. El método de la programación dinámica se caracteriza por la definición de etapas y de estados. Típicamente en los algoritmos de programación dinámica aplicados a la resolución del problema de la programación horaria de centrales térmicas se identifican las etapas con los subperiodos del horizonte temporal analizado. En cada etapa (o subperiodo) se define una serie de estados. Resulta útil la representación gráfica en un diagrama de estados. Cada nodo, asociado a una etapa (o subperiodo del horizonte temporal analizado), del diagrama de estados representa un posible estado en el que se puede encontrar el sistema en la etapa considerada. Las posibles transiciones de un estado, en cierta etapa, o otro estado, en una etapa posterior, se representan mediante flechas entre estos estados.

Habitualmente, en los modelos de programación horaria de centrales térmicas mediante programación dinámica, cada estado (o nodo del diagrama de estados) se representa con un vector binario de dimensión igual al número de centrales térmicas consideradas, de forma que si la componente j de este vector es un 1 (o un 0), entonces la central j está acoplada (o desacoplada) en la etapa considerada. Esta definición de estado sólo contiene información acerca del estado de acoplamiento o desacoplamiento de cada central en cada etapa pero no indica el número de

horas que lleva la central acoplada o desacoplada. Por ello, con esta definición de estado, resulta difícil la inclusión de las restricciones del tiempo mínimo de funcionamiento y parada de las centrales térmicas así como la consideración de costes de arranque dependientes del tiempo que lleva parada la central (es decir, de la temperatura de la caldera). En [132] se especifica una definición de estado que refleja el número de horas que llevan acopladas o desacopladas todas las centrales térmicas consideradas en cada nodo del diagrama de estados (es decir, en cada estado de cada etapa). Esta definición de estado permite tener en cuenta las restricciones de tiempo mínimo de funcionamiento y parada, además de la consideración de costes de arranque dependientes del tiempo de parada de la central.

Ninguna de estas definiciones de estado permite, sin la aplicación de heurísticos, incluir restricciones que ligan temporalmente variables continuas. Se incluyen dentro de este tipo de restricciones las restricciones de rampa máxima de subida y bajada de carga de las centrales térmicas así como las restricciones de combustibles o energía, aunque estas últimas no se suelen considerar en los modelos de horizonte temporal de corto plazo.

La técnica de la programación dinámica garantiza la optimalidad de la solución encontrada siempre que se aplique sin utilizar heurísticos. Sin embargo, los requerimientos computacionales del problema aumentan muy rápidamente con el tamaño del mismo (de forma exponencial con el número de estados). Ello provoca el que sólo sea un método válido de resolución para sistemas pequeños. Para poder aplicar el método a sistemas de tamaño realista se aplican heurísticos con el objetivo de reducir el espacio de estados a analizar en cada etapa (o espacio de búsqueda). Esto implica la pérdida de garantía de la optimalidad de la solución encontrada. Además, como ya se ha indicado, resulta muy complejo la consideración de restricciones que ligen temporalmente variables continuas.

En algunas aplicaciones se han combinado técnicas de programación dinámica con técnicas de inteligencia artificial. En [94] y [95] se presenta un método que resuelve en una primera etapa el problema de la programación horaria de centrales térmicas utilizando técnicas de programación dinámica, combinada con heurísticos para reducir el espacio de búsqueda, y a continuación utiliza un sistema experto que refina la solución conseguida.

En [117] se combinan técnicas de programación dinámica con técnicas de lógica borrosa (o lógica difusa, en inglés “fuzzy logic”) en una aplicación que considera cierta incertidumbre en la demanda horaria.

Apenas se han empleado técnicas de programación dinámica para resolver el problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo debido a la dificultad que entraña la inclusión de las restricciones de conservación del agua, también llamadas restricciones de continuidad del

agua, (apartado 3.4) que ligán todos los subperiodos del horizonte temporal analizado mediante variables continuas. En [129] se propone discretizar la variable que representa el volumen de agua embalsada y considerar cada uno de los niveles discretizados de esta variable un posible estado. Se emplea este método para resolver problemas de despacho (ya que las variables de acoplamiento de las centrales térmicas se conocen previamente) hidrotérmico. Le et al. [72] resuelven el problema de la coordinación hidrotérmica descomponiendo en un problema de programación horaria de centrales térmicas y en un problema de despacho hidráulico. Resuelven el problema de la programación horaria empleando técnicas de programación dinámica.

Programación lineal entera mixta

Los métodos de programación lineal entera mixta plantean el problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo o de la programación horaria de centrales térmicas [40], [88], [17], [30] de forma lineal e incluyendo las variables enteras que reflejan los estados de acoplamiento o las decisiones de arranque y parada de las centrales térmicas. Se basan en la aplicación del método de ramificación y cotas (en inglés *Branch & Bound*).

El método de ramificación y cotas resulta eficiente si no hay muchas variables enteras. Sin embargo, al aumentar el número de variables enteras, el problema resulta computacionalmente muy difícil de resolver. Por ello resultan poco apropiados para sistemas eléctricos de gran dimensión. Además, la necesidad de linealizar introduce simplificaciones en el modelado.

Descomposición de Benders

Este método [41] se basa en la descomposición del problema global (programación horaria de centrales térmicas o coordinación hidrotérmica en el corto plazo) en un problema maestro y un subproblema. El problema maestro es un problema de optimización cuyas variables representan los acoplamientos de las centrales térmicas. Se trata por tanto de un problema de programación entera 0/1. En el subproblema las variables enteras (i.e. los acoplamientos de las centrales térmicas) se fijan a la solución del maestro y así el subproblema se ocupa de determinar la producción de cada central. Es pues un problema de despacho económico. Se puede utilizar cualquier algoritmo de despacho económico para resolver el subproblema.

En cada iteración el problema maestro resuelve un problema de programación entera determinando las variables óptimas de acoplamiento de las centrales térmicas y enviando esta información al subproblema. El subproblema resuelve un algoritmo de despacho económico (térmico o hidrotérmico según se trate de la resolución del problema de la programación horaria de centrales térmicas o del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo). Resuelto el sub-

problema se envían un conjunto de variables duales (del despacho económico) al maestro. El maestro incorpora la información que le manda el subproblema generando un nuevo “corte de Benders” (los cortes de Benders son las restricciones del problema maestro) en cada iteración.

El método de la descomposición de Benders se aplica tanto al problema de la programación horaria de centrales térmicas [120] como al problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo [5], [51]. La única diferencia está en el subproblema que en el primer caso es un despacho económico térmico y en el segundo es un despacho económico hidrotérmico. No supone habitualmente un aumento de la complejidad del problema el incluir centrales hidráulicas ya que la mayor dificultad estriba en el problema de programación entera, que no varía si se incluyen centrales hidráulicas.

El gran inconveniente de la aplicación del método de la descomposición de Benders al problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo o al problema de la programación horaria de centrales térmicas es que el problema maestro, problema de programación entera 0/1, sigue siendo de difícil resolución para sistemas eléctricos de tamaño realista. Para aumentar la eficiencia computacional en la resolución del maestro, algunas restricciones difíciles de tratar se sustituyen por restricciones más simples. Por ejemplo, en [51] no se consideran las restricciones de tiempo mínimo de funcionamiento y parada, que son restricciones no lineales, sino que se incluye una restricción lineal que sólo permite un máximo de un arranque por central y día.

Métodos de descomposición primal

Estos métodos [15], [16], [82], [83], [84] descomponen el problema de la coordinación hidrotérmica en un subproblema hidráulico (que determina la producción de las centrales hidráulicas) y un subproblema térmico (que determina la producción de las centrales térmicas). Estos métodos se basan en la definición de unas funciones de coordinación que relacionan los dos sistemas (térmico e hidráulico). Las funciones de coordinación expresan el coste total del sistema en función de la producción hidráulica. Se define una función de coordinación para cada periodo. La llamada función de coordinación primal de cierto periodo expresa el coste total de producción en ese periodo en función de la producción hidráulica del mismo. Estas funciones de coordinación suministran al subproblema hidráulico una información más completa que los costes marginales que emplean otros métodos de descomposición.

El método funciona de la siguiente forma. Partiendo de una producción hidráulica factible, se obtiene la curva de la demanda que debe ser satisfecha por las centrales térmicas. Con la demanda térmica se resuelve el problema de la programación horaria de centrales térmicas (o subproblema térmico) y con la solución obtenida se construyen las funciones de coordinación. A

continuación se resuelve el subproblema hidráulico (minimizando el coste total de producción, expresado en función de la producción hidráulica). Con la solución del subproblema hidráulico se resta a la demanda del sistema la producción hidráulica, resultando la demanda térmica, y se resuelve el subproblema térmico ejecutándose otra iteración.

En [37] se demuestra que bajo ciertas hipótesis el mecanismo de la descomposición primal es equivalente al mecanismo de la relajación lagrangiana.

La descomposición primal es robusta, sin embargo el subproblema térmico que resulta sigue siendo, para sistemas eléctricos de tamaño realista, un problema de gran dimensión y por tanto difícil de resolver. El mecanismo de la relajación (o descomposición) lagrangiana descompone el problema original en subproblemas de menor tamaño (un subproblema por cada central térmica y un subproblema por cada cuenca hidráulica). Por ello el desarrollo del método de la relajación lagrangiana ha propiciado el desuso de los métodos de descomposición primal.

Algoritmos genéticos

Los algoritmos genéticos [56] constituyen técnicas de búsqueda de soluciones próximas a la óptima inspiradas en la genética y en la evolución de los sistemas naturales. Se parte de una población (o conjunto de soluciones) generada aleatoriamente y suficientemente grande, en la que cada individuo representa una solución del problema. Mediante procesos de selección, cruce y mutación, adecuadamente definidos, las características de la solución inicial mejoran a medida que avanza el proceso evolutivo. Al cabo de un número de generaciones se llega a una solución suficientemente buena del problema.

La eficiencia de un algoritmo genético depende en gran medida de la codificación de las posibles soluciones al problema (también llamadas individuos o cromosomas) en forma de cadenas de genes. La codificación más empleada, y la más sencilla, es la codificación binaria (en cuyo caso cada gen es un 0 o un 1 y se alude a los “bits” en lugar de a los “genes”). Si las soluciones se codifican con cadenas muy largas de genes (o de bits) es probable que el funcionamiento del algoritmo no sea muy eficaz.

Los algoritmos genéticos son atractivos para resolver problemas de optimización combinatoria porque para la resolución de este tipo de problemas, que tratan de escoger un grupo de elementos de un conjunto de forma que se minimice cierta función objetivo, la codificación de soluciones resulta sencilla empleando el sistema binario. Así para un problema de este tipo, y de forma muy general, se puede representar cada posible solución del problema mediante un vector de dimensión igual al número de elementos totales del sistema de forma que si el elemento que ocupa la posición j es un 1 (o un 0), entonces el elemento al que está ligado la posición j es

seleccionado (o no es seleccionado).

La programación horaria de centrales térmicas es un problema de optimización combinatoria ya que la salida principal de un algoritmo de programación horaria es el conjunto de centrales acopladas. Una vez definidas las centrales acopladas se ejecuta un despacho económico para determinar las producciones óptimas.

Para resolver el problema de la programación horaria de centrales térmicas mediante algoritmos genéticos [63], [64], [59], [80], [3], [2] cada individuo, o posible solución del problema, se representa mediante una matriz de ceros y unos cuyo número de filas es igual al número de centrales térmicas disponibles y cuyo número de columnas es igual al número de subperiodos del horizonte temporal analizado. Si el elemento que ocupa la fila j y la columna k es un 1 (o un 0), entonces la central j está acoplada (o desacoplada) en el subperiodo k .

Los algoritmos genéticos constituyen técnicas heurísticas de búsqueda de soluciones óptimas. Por ello, no se puede garantizar que la solución obtenida se acerque a la óptima sino sólo que dicha solución es mejor que otras encontradas. Esto quiere decir que para comprobar el buen funcionamiento de un algoritmo genético se debe contrastar con algún otro procedimiento que garantice la optimalidad (o cuasi-optimalidad) de la solución. Resulta particularmente atractivo el método de la relajación lagrangiana como elemento de contrastación ya que este método genera una cota inferior y otra cota superior de la solución del problema. Si la solución que se consigue mediante un algoritmo genético se sitúa entre las cotas que proporciona un algoritmo de relajación lagrangiana, entonces el buen funcionamiento del algoritmo genético queda probado. En [3] y [2] se ha contrastado con un procedimiento de relajación lagrangiana [67] un algoritmo genético de punto interior para la resolución del problema de la programación horaria similar a los presentados en [63], [64]. El trabajo presentado en [80] también contrasta el funcionamiento de un algoritmo genético mediante el uso de un procedimiento de relajación lagrangiana.

La ventaja del uso de algoritmos genéticos es la gran flexibilidad en el modelado. Sin embargo, requieren un elevado tiempo de cálculo y ello implica que para sistemas eléctricos de tamaño realista resultan aún poco competitivos con otros procedimientos. La aplicación de técnicas de computación paralela permitirá eliminar este inconveniente.

Relajación lagrangiana

El método de la relajación (o descomposición) lagrangiana [70], [42], [38], [39], [28] se basa en la resolución del problema dual del problema que se pretende resolver (o problema primal). Al aplicar el método de la relajación lagrangiana al problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo (o a la programación horaria de centrales térmicas) el problema se descompone

en un subproblema por cada central térmica y un subproblema por cada cuenca hidráulica (o bien en un subproblema por cada central térmica). Es decir, gracias a la aplicación del método de la relajación lagrangiana se pasa de la resolución de un problema muy complejo y de gran dimensión a la resolución de muchos problemas de pequeño tamaño y estructuras homogéneas. Ello permite un modelado muy detallado del equipo generador y la aplicación a cada subproblema de la técnica de optimización que más se adapte a su estructura, además de la posibilidad de emplear de forma natural técnicas de computación paralela.

Por otra parte las variables duales que se obtienen al aplicar el método tienen un significado económico que resulta de utilidad tanto en los tradicionales sistemas de energía eléctrica regulados como en los modernos sistemas liberalizados o desregulados.

Hoy en día el método de la relajación lagrangiana es el más utilizado tanto para resolver el problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo como el problema de la programación horaria de centrales térmicas [89], [86], [11], [131], [7], [130], [85], [102], [128], [67], [68]. El algoritmo propuesto en esta tesis se basa en este método. En el capítulo 2 se hace una extensa revisión bibliográfica de los métodos de solución de los problemas de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo y de la programación horaria de centrales térmicas que aparecen en la literatura.

En el capítulo 4 se detalla la aplicación de este método al problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo. El caballo de batalla de los métodos de relajación lagrangiana está en el procedimiento de resolución del problema dual o, de forma equivalente, en los métodos de actualización de multiplicadores (que son las variables duales). En el capítulo 6 se presentan diversos procedimientos de actualización de multiplicadores. Algunos de ellos son originales de este trabajo de investigación.

1.3.2 Métodos de resolución del problema del despacho hidráulico

El objetivo del problema del despacho hidráulico es determinar la producción óptima de energía hidroeléctrica y otras variables como los caudales de agua turbinados o vertidos o los volúmenes de agua embalsada. El propósito perseguido es maximizar el “valor” de la energía hidroeléctrica producida en horizontes temporales que van de un día a una semana. No hay que olvidar que en un sistema de producción hidrotérmico, el despacho hidráulico es parte del problema conjunto de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo o del problema más simple del despacho hidrotérmico (si las variables que definen el estado de acoplamiento o desacoplamiento de los grupos térmicos son conocidas).

El “valor” asignado a la energía hidroeléctrica depende de las características del sistema hidráulico y del tipo y mezcla de fuentes de generación. Para un sistema de generación eléctrica hidráulico

puro o predominantemente hidráulico, la función objetivo (del problema del despacho hidráulico) puede ser maximizar la energía total producida o el caudal turbinado [29] (ya que la energía producida y el caudal turbinado están directamente relacionados). Sin embargo, para un sistema mixto hidrotérmico, la función objetivo puede contener información acerca del coste horario de la energía (que dependerá del coste de las centrales térmicas). Esto es lo habitual en los problemas de despacho hidrotérmico que se resuelven descomponiendo en un subproblema de despacho térmico y un subproblema de despacho hidráulico [51], [79], [52], [34], así como en los problemas de coordinación hidrotérmica que se resuelven empleando el método de la relajación lagrangiana. En este último caso, la función objetivo de cada subproblema asociado a cada cuenca hidráulica se ocupa de maximizar el beneficio atendiendo a las señales de precios horarios (o multiplicadores) que se deducen de la aplicación del método de la relajación lagrangiana [32], [35], [50], [68].

El problema del despacho hidráulico matemáticamente se plantea como un problema de optimización. Las restricciones de conservación del agua que modelan el acoplamiento espacio-temporal existente entre las centrales de una misma cuenca hidráulica son lineales y presentan estructura de red. Ello quiere decir que gran parte de la matriz de restricciones del problema de optimización con el que se resuelve el despacho hidráulico presenta estructura de red. Existen algoritmos especializados para problemas con este tipo de estructura. Los tiempos de resolución que se consiguen son mejores que los que se obtienen con algoritmos de resolución de problemas de optimización de propósito general.

En [53] puede encontrarse un procedimiento de resolución para el despacho hidrotérmico donde se explota la estructura de red de las restricciones de funcionamiento del equipo hidráulico y se modela, también con estructura de red el equipo térmico y la red de transporte. Así, el problema conjunto del despacho hidrotérmico presenta estructura de red y se resuelve de forma eficiente.

En [34] se trata el problema del despacho hidrotérmico de un sistema cuya proporción de generación hidráulica es mucho mayor que la térmica. Empleando métodos de descomposición el problema se descompone en un subproblema que contiene la información del equipo térmico y la red de transporte por cada subperiodo del horizonte temporal analizado y un subproblema que modela el funcionamiento del equipo hidráulico en todo el horizonte temporal analizado. Todos los subproblemas presentan estructura de red y se resuelven utilizando técnicas que aprovechan esta estructura. En [52] puede encontrarse otra referencia referente al problema del despacho hidrotérmico en la que se utilizan técnicas de descomposición y se resuelve el subproblema hidráulico aprovechando su estructura de red.

1.4 Planteamiento y objetivos de la tesis

Esta tesis se ocupa del desarrollo de un modelo de coordinación hidrotérmica en el corto plazo mediante técnicas de relajación lagrangiana. El problema de la coordinación hidrotérmica es un problema de optimización no lineal que incluye variables enteras y continuas. Para sistemas eléctricos de tamaño realista es además de gran dimensión. Su resolución es compleja.

El método de la relajación lagrangiana es el procedimiento hoy en día más utilizado para resolver este problema. Al aplicar el método de la relajación lagrangiana el problema original se descompone en un subproblema por cada central térmica y un subproblema por cada cuenca hidráulica. Así, se pasa de la resolución de un problema de gran complejidad y gran dimensión a la resolución de muchos subproblemas de pequeño tamaño y estructuras homogéneas. Esto permite el modelado muy detallado del equipo generador. Otros métodos de resolución empleados en la literatura (apartado 1.3.1) no son capaces de resolver problemas de optimización tan complejos (por su no linealidad y no diferenciabilidad) y de tan gran dimensión y, para hacer el problema computacionalmente resoluble, introducen simplificaciones en el modelado. La principal ventaja del método de la relajación lagrangiana es que permite un modelado muy preciso del equipo generador.

Además el método de la relajación lagrangiana permite la aplicación de forma natural de técnicas de computación paralela, ya que el problema original se descompone en subproblemas, con la consiguiente mejora en tiempo de cálculo.

Otra de las ventajas del método de la relajación lagrangiana es que, como subproducto del procedimiento de resolución, se extraen los valores de ciertas variables duales cuyo significado económico resulta de utilidad. En los sistemas de energía eléctrica centralizados, estas variables ayudan a la elaboración de tarifas. En los sistemas de energía eléctrica liberalizados o desregulados, estas variables son una medida del precio de la energía del mercado.

El método de resolución del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo que se desarrolla en esta tesis fue concebido desde la óptica de los sistemas de energía eléctrica regulados. Sin embargo, resulta una herramienta útil tanto para el operador del mercado como para el operador del sistema de los emergentes sistemas de energía eléctrica liberalizados, ya que el funcionamiento del método de la relajación lagrangiana simula el funcionamiento de un mercado de energía eléctrica.

El método de la relajación lagrangiana se basa en el planteamiento y resolución de un problema dual del problema original (o problema primal). El problema dual es el problema de optimización de una función cóncava (la función dual). Las variables del problema dual (o variables duales)

son los multiplicadores de Lagrange.

La mayor dificultad del método de relajación lagrangiana estriba en el procedimiento de actualización de multiplicadores. Tradicionalmente en los sistemas de energía eléctrica el método casi exclusivamente utilizado era el método del subgradiente. Recientemente [98], [78] han aparecido otros métodos más sofisticados basados en el uso de los *Bundle Methods*³.

La función dual del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo presenta una estructura tipo “meseta”. Esto quiere decir que al tratar de encontrar el valor del vector de variables (variables duales) que maximiza esta función se consiguen valores relativamente distintos del vector de variables con los que el valor de la función dual apenas varía.

En problemas con estructura tipo “meseta” el criterio de parada del algoritmo de optimización es la convergencia de la función objetivo, ya que conseguir también convergencia en el vector de variables tiene un coste computacional demasiado elevado. Particularmente, los procedimientos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo que aparecen en la literatura finalizan la resolución del problema dual cuando la función dual converge o bien cuando se han ejecutado un número de iteraciones fijado a priori. No se ha encontrado ninguna referencia en la literatura que se preocupe de la convergencia de las variables duales.

Para tratar de acelerar la convergencia del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo, con estructura tipo “meseta”, se pueden aplicar técnicas encaminadas a convexificar. Este es el propósito de las técnicas del lagrangiano aumentado [6], [7], [104]. El gran inconveniente de estas técnicas es que se pierde el significado físico de los multiplicadores y el algoritmo deja de ser adecuado para simular el funcionamiento de un mercado de energía eléctrica.

En un modelo de coordinación hidrotérmica en el corto plazo para un sistema de energía eléctrica regulado no tiene sentido perseguir la convergencia de las variables duales, una vez que la función dual ya ha convergido, por el elevado coste computacional que esto supone y la mejora prácticamente despreciable que se consigue en el valor de la función dual y, potencialmente, en el coste total de explotación del sistema.

Sin embargo, en un sistema de energía eléctrica liberalizado las variables del problema dual deben converger antes de finalizar el proceso. El motivo es que estas variables indican el precio que el mercado paga por cada unidad de energía producida en cada subperiodo (típicamente una hora) del horizonte temporal analizado. Por ello estas variables serán las que determinen qué centrales suministrarán la energía eléctrica del sistema en cada hora, que serán aquellas que sean

³Los *Bundle Methods*, desarrollados fundamentalmente por Lemaréchal y su equipo [91], [116], [54], son métodos de optimización de funciones no diferenciables que utilizan la información acumulada de la función a resolver, frente al tradicional método del subgradiente que utiliza en cada iteración únicamente la información obtenida en dicha iteración.

capaces de, al menos, recuperar sus costes. Si estas variables no han convergido (o no se han estabilizado) en el algoritmo que las genera, entonces se está favoreciendo a unos generadores frente a otros. Por tanto, para que el mercado de energía eléctrica sea ecuánime y transparente a todos, las variables duales deben converger.

Las principales aportaciones de esta tesis han sido:

- Desarrollo de un procedimiento novedoso de resolución del problema dual de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo en dos etapas. El objetivo es la consecución de convergencia no sólo en el valor de la función dual, sino también en los valores de las variables duales. Esto permite la utilización del algoritmo propuesto en los modernos entornos liberalizados de los sistemas de energía eléctrica.
- Desarrollo de un método original de actualización de multiplicadores (*Método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos*), aplicación al problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo y contrastación de su funcionamiento con otros métodos que aparecen en la literatura (método del subgradiente y método basado en las formas primales de los *Bundle Methods* o método de los hiperplanos secantes con penalización) y con otros métodos también novedosos de este trabajo de investigación. Este método ha resultado ser computacionalmente eficiente, superando el funcionamiento de los otros métodos analizados.
- Desarrollo y aplicación al problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo del método de actualización de multiplicadores *de los hiperplanos secantes con límite máximo al número de hiperplanos*. Este método se basa en el método de los hiperplanos secantes (método de solución de problemas de optimización no diferenciables). No se ha encontrado ninguna referencia en la literatura de la aplicación del método de los hiperplanos secantes al problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo.

Utilizando una sencilla idea se mantiene limitado el tamaño del problema a resolver al aplicar el método de los hiperplanos secantes, con lo que se mantiene acotada su complejidad y aumenta, de este modo, la eficiencia computacional (respecto a la eficiencia del método de los hiperplanos secantes). El procedimiento utilizado para limitar el tamaño del problema es simple y eficiente. No se ha encontrado en la literatura matemática especializada un método como éste, aunque sí se han aplicado otros procedimientos más complejos. Se ha contrastado el funcionamiento de este método con otros métodos originales o que aparecen en la literatura. Este método fue el punto de partida para el desarrollo del método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos al que se hace referencia en punto anterior, por eso resulta

interesante analizar su comportamiento para establecer comparaciones.

- Desarrollo de un modelo de actualización de multiplicadores que combina las formas primales de los *Bundle Methods* (desarrolladas por el equipo de Lemaréchal y aplicadas al problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo en [98]) con el método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos al que se hace referencia en el primer punto. Este método se comporta peor que el método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos al que se hace referencia en el primer punto. Por ello no se presentan casos de estudio que utilicen este procedimiento de actualización de multiplicadores.
- Formulación, análisis detallado y estudio del significado económico de los multiplicadores de varios modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo que se diferencian entre sí en las restricciones de carga consideradas y en la forma como se modelan tales restricciones.

Los modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo que aparecen en la literatura típicamente sólo consideran restricciones de demanda y de reserva rodante. Muy pocas referencias incluyen restricciones de demanda mínima. No se ha encontrado ninguna referencia que incluya restricciones de regulación hacia arriba y hacia abajo.

En esta tesis se han modelado las restricciones de reserva rodante de diversas formas. No se ha encontrado en la literatura ningún modelo de coordinación hidrotérmica en el corto plazo, ni de programación horaria de centrales térmicas, que incluya estas restricciones en la forma más compleja que se ha utilizado en esta tesis. La formulación más compleja de las restricciones de reserva rodante que se incluye en esta tesis, es con la que se protege más contra la posibilidad de no ser capaz de suministrar la demanda. Resulta pues la formulación más adecuada para conseguir un sistema muy seguro (es decir, con altas garantías en el suministro de energía eléctrica).

El modelo más completo de todos los analizados incluye restricciones de demanda, reserva rodante, demanda mínima y regulación hacia arriba y hacia abajo. No se ha encontrado en la literatura ninguna referencia que considere todas estas restricciones.

Un modelo de coordinación hidrotérmica en el corto plazo que incluya todas estas restricciones podría ser una herramienta de ayuda para el operador del sistema de un sistema de energía eléctrica liberalizado. También puede resultar de utilidad en un entorno centralizado para el análisis completo del problema.

Otros objetivos de la tesis han sido:

- Desarrollo de un algoritmo de programación dinámica para la programación horaria de una central térmica en respuesta a señales económicas (los multiplicadores de Lagrange o variables duales).
- Desarrollo de un algoritmo para conseguir una solución primal factible a partir de la solución del problema dual (dada la no convexidad del problema de la coordinación hidrotérmica).
- Desarrollo de un algoritmo de despacho económico multiperiodo.
- Implantación informática, aplicación del algoritmo propuesto a casos de estudio de tamaño realista basados en el sistema eléctrico peninsular español, contrastación con los resultados que se consiguen con otros métodos (también implementados por la autora) y análisis de los resultados.

1.5 Organización de la tesis

Esta tesis se organiza en nueve capítulos y dos apéndices.

En este primer capítulo se presenta el cambio que está aconteciendo en los sistemas de energía eléctrica donde, en cada vez más países, se está evolucionando desde un mercado de energía regulado a base de tarifas a un mercado libre de energía eléctrica. Se introduce el problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo y los métodos de solución que aparecen en la literatura para resolver no sólo este problema sino también los problemas relacionados de programación horaria de centrales térmicas y de despacho hidráulico. Se presentan los objetivos de la tesis y la organización en capítulos de la misma.

En el capítulo 2 se lleva a cabo una detallada revisión bibliográfica de los procedimientos de resolución de los problemas de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo y de la programación horaria de centrales térmicas que emplean técnicas de relajación lagrangiana.

En el capítulo 3 se formula matemáticamente el problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo. Se describen en detalle los equipos de generación térmico e hidráulico, sus restricciones técnicas y los costes asociados a su producción de energía eléctrica. También se formulan de forma general las posibles restricciones de carga que se deben cumplir utilizando de forma conveniente los recursos térmicos e hidráulicos.

En el capítulo 4 se expone el procedimiento de resolución propuesto. Se comienza explicando la aplicación del procedimiento de la relajación lagrangiana al problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo para desembocar en el algoritmo en tres fases (o bien en cuatro

etapas) desarrollado. Además, se plantean de diversas formas las restricciones de carga que se presentaron en el capítulo anterior. Atendiendo a las restricciones de carga consideradas se formulan en detalle ocho modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo analizando el significado económico de los multiplicadores que aparecen en cada uno de los modelos. Estos ocho modelos se desarrollan en los capítulos 4, 5 y 6. En el último apartado de este capítulo se muestra la utilidad del algoritmo propuesto tanto en los tradicionales sistemas de energía eléctrica centralizados como en los emergentes sistemas liberalizados.

El capítulo 5 se refiere a los subproblemas en que se descompone el problema primal relajado (un subproblema por cada central térmica y un subproblema por cada cuenca hidráulica). Se presentan dos procedimientos de resolución del problema asociado a cada central térmica (esto es, la programación horaria de cada central térmica en respuesta a señales económicas) basados en técnicas de programación dinámica y que se diferencian entre sí en la definición de estado empleada. Se especifica la forma de aplicar estos procedimientos a cada uno de los ocho modelos que se presentan en el capítulo 4. Respecto a los subproblemas hidráulicos, no se ha llevado a cabo ninguna investigación ni desarrollo respecto a métodos de resolución de este tipo de subproblemas. Se resuelven los subproblemas hidráulicos utilizando un optimizador comercial. En este capítulo se formulan los subproblemas hidráulicos asociados a los ocho modelos introducidos en capítulo 4.

El capítulo 6 se centra en los procedimientos de actualización de multiplicadores. Estos procedimientos constituyen el caballo de batalla de los métodos de coordinación hidrotérmica mediante relajación lagrangiana. La función dual del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo es una función no diferenciable y por tanto, los procedimientos de actualización de multiplicadores que se describen en este capítulo se pueden aplicar a la, matemáticamente compleja, tarea de resolución de problemas de optimización no diferenciable. En este capítulo se hace una revisión bibliográfica de métodos de actualización de multiplicadores que aparecen en la literatura de los sistemas de energía eléctrica y de métodos de optimización no diferenciable que aparecen en la literatura matemática. A continuación se presentan varios métodos de actualización de multiplicadores clasificándolos según sus características. Algunos de estos procedimientos son originales de este trabajo de investigación. Para finalizar, se aplican estos métodos a los ocho modelos de coordinación hidrotérmica que se presentan en el capítulo 4.

El capítulo 7 se refiere a la solución del problema primal. Completa la información presentada en los capítulos 4, 5 y 6. Se motiva y se presenta el procedimiento empleado para solucionar el problema dual consiguiendo no sólo convergencia en el valor de la función dual sino también en los multiplicadores (o variables duales). Además se explica el procedimiento empleado para conseguir una solución primal factible a partir de la solución del problema dual.

En el capítulo 8 se muestran algunos de los resultados computacionales fruto de este trabajo de investigación. En la primera parte del capítulo se comparan varios procedimientos de actualización de multiplicadores (algunos de ellos originales de este trabajo de investigación). En la segunda parte se presentan los resultados que se obtienen de la aplicación del algoritmo propuesto a dos casos de estudio destacándose las propiedades del método. Todos los casos de estudio incluidos en este capítulo son de tamaño realista y están basados en el sistema de generación peninsular español.

En el capítulo 9 se resume el trabajo realizado, se presentan las conclusiones y se proponen líneas de trabajo futuro.

El apéndice A contiene los datos de entrada y parte de los ficheros de salida de una de la simulaciones que se presentan en el capítulo 8.

El apéndice B incluye un artículo relacionado con este trabajo y aprobado para su publicación en IEEE Transactions on Power Systems.

Capítulo 2

Coordinación hidrotérmica en el corto plazo mediante técnicas de relajación lagrangiana. Revisión bibliográfica

2.1 Introducción

El método de la relajación lagrangiana [70], [42], [38], [39] se basa en la definición y resolución de un problema dual del problema original que se quiere resolver (problema primal). El problema dual resulta de más fácil resolución que el problema primal. De ahí el interés en resolver el problema primal a partir de la resolución del problema dual.

Si el problema primal es convexo, entonces la solución óptima del problema primal coincide con la solución óptima del problema dual y por tanto, resuelto el problema dual queda resuelto el problema primal. En caso contrario, la solución del problema dual no coincide con la solución del problema primal aunque constituye una cota inferior. En este caso, no basta con resolver el problema dual sino que hace falta algún procedimiento adicional para encontrar una solución primal factible (con un grado de bondad suficientemente bueno) a partir de la solución del problema dual.

El problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo es no convexo y por tanto la solución óptima del problema dual no coincide con la solución óptima del problema primal. Por ello y dada la dificultad que parecía entrañar la consecución de una solución primal factible a partir de la solución del problema dual, no se empezaron a utilizar las técnicas de relajación lagrangiana (como herramienta principal) para resolver este tipo de problemas hasta los años 80.

A finales de los 70 y principios de los 80, las técnicas de relajación lagrangiana se comenzaron a emplear en la resolución del problema de la coordinación hidrotérmica como herramienta de ayuda, para generar cotas inferiores, en los algoritmos de ramificación y cotas¹ (en inglés *Branch & Bound*) [89], [71].

Ya en los 80, Merlin y Sandrin [86] fueron los primeros en utilizar las técnicas de relajación lagrangiana como herramienta principal para resolver un problema de la programación horaria de centrales térmicas. El algoritmo propuesto [86] se basa en la observación de que si se encuentra una solución al problema dual que cumple las restricciones de reserva rodante, entonces es fácil encontrar una solución al problema primal con solo fijar las variables de acoplamiento de las centrales térmicas al valor que toman las mismas en la solución factible del problema dual encontrada y ejecutar un algoritmo de despacho económico. El método propuesto se basa en la resolución iterativa del problema dual y, en aquellas iteraciones en que la solución del problema dual cumple las restricciones de reserva rodante del problema primal, en la obtención de una solución primal factible (mediante la ejecución de un despacho económico). Cuando la diferencia relativa entre el valor máximo de la función objetivo del problema dual (cota inferior del valor óptimo del problema primal) y el mínimo coste del problema primal encontrado (cota superior del valor óptimo del problema primal) sea suficientemente pequeña, finaliza el proceso. La distancia relativa entre las cotas superior e inferior constituye una medida de calidad de la solución obtenida. A este procedimiento de resolución se le llama método dual-primal.

A partir de [86], se comenzaron a utilizar las técnicas de relajación lagrangiana para resolver el problema de la programación horaria de centrales térmicas y el problema más general de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo. El algoritmo utilizado fue, en principio, el propuesto en [86] (método dual-primal).

A finales de los 80, Zhuang y Galiana [131] desarrollan un algoritmo alternativo al propuesto en [86]. Proponen resolver el problema de la programación horaria de centrales térmicas mediante técnicas de relajación lagrangiana en fases. En la primera fase se soluciona el problema dual y en la segunda fase el problema primal. La segunda fase se descompone, de nuevo, en dos fases de forma que el algoritmo de [131] consta de tres fases. En la primera fase se resuelve el problema dual. En la segunda fase, a partir de la solución óptima de la fase primera (solución del problema dual) se genera una solución factible en reserva rodante para el problema primal. La tercera fase fija las variables de acoplamiento al valor que adquieren tales variables en la solución de la segunda fase y, a continuación, ejecuta un despacho económico. La solución de la tercera fase es por tanto una solución primal factible (cuyo grado de bondad se puede medir a través de la distancia relativa del coste de solución primal factible y el máximo valor encontrado

¹En [42] y [38] puede encontrarse información acerca del uso del método de la relajación lagrangiana para resolver problemas de programación entera por el método de ramificación y cotas.

del problema dual). A este procedimiento se le llama método de resolución en fases.

Durante finales de los 80 y principios de los 90 conviven, en la resolución de los problemas de coordinación hidrotérmica en el corto plazo (y programación horaria de centrales térmicas) el método de resolución dual-primal y el método de resolución en fases. Las publicaciones recientes utilizan el método de resolución en fases.

Además, desde principios de los noventa, comienzan a aplicarse técnicas de lagrangiano aumentado. La técnica del lagrangiano aumentado se basa en la definición y resolución de un problema en el que no sólo se dualizan las restricciones de complicación (que es el procedimiento empleado por el método de la relajación lagrangiana) sino que también se introducen penalizaciones cuadráticas con el objetivo de forzar la factibilidad del problema primal. El grupo de investigación que más ha contribuido al desarrollo de este tipo de técnicas ha sido el grupo de Electricité de France.

En este capítulo se describe el método de resolución dual-primal presentado por Merlin y Sandrin [86] y el método de resolución en fases presentado por Zhuang y Galiana [131]. A continuación se lleva a cabo una revisión bibliográfica detallada de los algoritmos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo o de programación horaria de centrales térmicas que aparecen en la literatura. Se clasifican atendiendo al método de resolución: dual-primal, en fases o bien mediante técnicas de lagrangiano aumentado. En un último apartado se comentan otros artículos que aparecen en la literatura que no siguen ninguno de los métodos indicados.

2.2 El método de resolución dual-primal

Merlin y Sandrin [86] resuelven el problema de la programación horaria de centrales térmicas definiendo un problema dual en el que relajan las restricciones de demanda y de reserva rodante. Estas son las restricciones de carga típicamente incluidas en los modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo y de programación horaria de centrales térmicas, y por ello son las restricciones típicamente relajadas al emplear el método de la relajación lagrangiana. El método de resolución dual-primal propuesto se describe a continuación. En cada iteración del algoritmo se resuelve el problema dual y se compara el valor de la función objetivo obtenido con el máximo valor conseguido hasta el momento almacenándose el valor máximo. A continuación se analiza si se cumplen las restricciones de reserva rodante. Si no se cumplen, se actualizan los multiplicadores (los asociados a las restricciones de reserva rodante y los asociados a las restricciones de demanda) utilizando técnicas de subgradiente y se ejecuta otra iteración con los nuevos valores de los multiplicadores. El tamaño del paso elegido es $1/(a + b \cdot \nu)$ donde a y b son constantes y ν es el contador de iteraciones.

Si se satisfacen las restricciones de reserva rodante, entonces se fijan las variables de acoplamiento al valor de la solución del problema dual y se ejecuta un algoritmo de despacho económico, con lo que se obtiene una solución primal factible. Se compara el coste de dicha solución con el mínimo coste de las soluciones primales factibles obtenidas hasta el momento, almacenándose la solución de coste mínimo. De la solución del despacho económico se extrae el coste marginal para cada periodo del horizonte temporal analizado.

Los multiplicadores asociados a las restricciones de reserva rodante (multiplicadores μ) se actualizan utilizando técnicas de subgradiente (con tamaño del paso $1/(a+b \cdot \nu)$). Los multiplicadores asociados a las restricciones de demanda (multiplicadores λ) se actualizan aprovechando la información respecto a los costes marginales de cada periodo conseguida tras la resolución del algoritmo de despacho económico. En particular, el vector de multiplicadores λ en la iteración siguiente será una combinación lineal del valor del vector de multiplicadores en la iteración actual y el vector de costes marginales que resulta de la ejecución del despacho económico (en la iteración actual).

El algoritmo finaliza cuando la diferencia relativa entre el mínimo coste primal factible y el máximo coste de la función lagrangiana sea suficientemente pequeño, o bien, cuando en un número fijado de iteraciones no se consiga ninguna mejora.

El método propuesto en [86] también establece una forma de acelerar la convergencia de los multiplicadores μ basado en la definición de un límite superior a la suma de las potencias acopladas². Este límite superior se actualiza en cada iteración. En la actualización de los multiplicadores μ se tiene en cuenta si se cumple dicho límite superior.

2.3 El método de resolución en fases

Zhuang y Galiana [131] proponen un método en fases para resolver el problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo. En lugar de combinar la solución del problema dual con la búsqueda de soluciones primales factibles (método dual-primal), resuelven el problema en fases. En la primera fase, a través de un proceso iterativo, resuelven el problema dual. En la segunda fase, y a partir de la solución del problema dual encontrada en la fase primera, buscan una solución para el problema primal factible en reserva rodante (de nuevo a través de un proceso iterativo). Al final de la fase segunda, quedan fijadas las variables de acoplamiento de las centrales térmicas y sólo resta ajustar las producciones para conseguir una solución que cumpla las restricciones de demanda. La fase tercera es pues un procedimiento de despacho económico.

²Nótese que las restricciones de reserva rodante constituyen un límite inferior a la suma de la potencias acopladas.

Zhuang y Galiana argumentan que en las proximidades del óptimo del problema dual, las variables de acoplamiento que resultan (de una solución del problema dual) tienden a producir menores infactibilidades en las restricciones de reserva rodante y demanda del problema primal. Por tanto, la solución dual que se encuentra próxima a la solución óptima del problema dual está más cerca de una solución primal factible que una solución dual alejada aún del óptimo. Además, la solución primal factible que se deriva de una solución dual próxima al óptimo tiende a ser de menor coste que la que se deriva de una solución dual alejada aún del óptimo.

Como este método [131] no se basa en la generación combinada de soluciones duales y primales, sólo necesita resolver una vez (en la fase tercera) un algoritmo de despacho económico. Esto repercute en la eficiencia computacional del método.

En la fase primera, se resuelve el problema dual actualizando los multiplicadores mediante el método del subgradiente. El tamaño del paso elegido es $1/(a + b \cdot \nu)$ donde a y b son constantes y ν es el contador de iteraciones. Esta fase finaliza cuando se han ejecutado un número de iteraciones fijado a priori.

El objetivo de la fase segunda es encontrar un conjunto de valores para las variables de acoplamiento de las centrales térmicas que cumplan las restricciones de reserva rodante. Dada la estrecha relación entre las variables de acoplamiento y las restricciones de reserva rodante (y, por tanto, los multiplicadores asociados a ellas), el procedimiento para conseguir soluciones factibles en reserva rodante consiste en aumentar en los periodos en que se producen infactibilidades en reserva rodante el valor de estos multiplicadores, hasta eliminar este tipo de infactibilidades. En cada iteración de la fase segunda, se elige el periodo en el que el incumplimiento de la restricción de reserva rodante es mayor y se aumenta el multiplicador μ asociado a ese periodo en la mínima proporción necesaria para eliminar la infactibilidad en dicho periodo. La fase segunda finaliza cuando se encuentra una solución que cumple las restricciones de reserva rodante en todos los periodos del horizonte temporal analizado.

En la fase tercera se fijan las variables de acoplamiento a los valores que resultan de la solución de la fase segunda y se ejecuta un despacho económico.

2.4 Revisión bibliográfica de artículos basados en el método de resolución dual-primal

A continuación se describen brevemente algunos de los métodos que aparecen en la literatura de coordinación hidrotérmica en el corto plazo en el corto plazo (o de programación horaria de centrales térmicas) basados en el método de resolución dual-primal [86]. Las referencias se

clasifican atendiendo a grupos de investigación.

Otras referencias de trabajos que siguen esta línea pueden encontrarse en [106], [107] y [108].

El grupo de Electricité de France

Ea y Monti [32] presentan un algoritmo para resolver el problema de la coordinación hidrotérmica que sigue el mismo modelo de [86]. La aportación de este trabajo frente a [86] es la introducción de las centrales hidráulicas. Asignan un coste al agua de cada embalse. Como las soluciones de los subproblemas hidráulicos oscilan mucho ante pequeñas variaciones de los multiplicadores, para acelerar la convergencia, se añaden en la función objetivo de los subproblemas hidráulicos términos que penalizan las desviaciones respecto a la solución de la iteración precedente. El procedimiento de resolución y la forma de actualización de multiplicadores sigue la propuesta de [86].

El grupo de Virmani

Virmani et al. [125] proponen un algoritmo dual-primal para resolver el problema de la programación horaria de centrales térmicas. Se consideran tres tipos de restricciones de reserva. Las dos primeras se pueden reducir a una única restricción que se acerca más a la realidad que la restricción utilizada en [86] (que es la restricción habitualmente empleada). La tercera es una restricción de reserva por área.

La principal aportación de [125] es que, una vez encuentra una solución que cumple las restricciones de reserva, trata de disminuir los multiplicadores μ (asociados a las restricciones de reserva) con el objetivo de evitar acoplamientos innecesarios (y así conseguir una solución primal factible de menor coste). En el método propuesto se define un bucle interior en el que se actualizan los multiplicadores μ congelándose los multiplicadores λ (asociados a las restricciones de demanda) y un bucle exterior en el que se actualizan los multiplicadores λ . La actualización de los multiplicadores μ se hace utilizando técnicas de subgradiente. Los multiplicadores λ se actualizan utilizando la información que se deriva de la ejecución de algoritmos de despacho económico.

El algoritmo propuesto [125] se describe a continuación. En primer lugar se inicializan los multiplicadores asociados a las restricciones de reserva (multiplicadores μ) a cero y los multiplicadores asociados a las restricciones de demanda (multiplicadores λ) a los costes marginales que se obtienen tras la ejecución de un despacho económico simplificado. Con estos valores de los multiplicadores se inicia la primera iteración entrando en el bucle interior (de actualización de los multiplicadores μ): se resuelven los subproblemas térmicos en que se descompone el problema primal relajado y se analiza si la solución cumple las restricciones de reserva. Si no las cumple

se actualizan los multiplicadores utilizando técnicas de subgradiente (no se dan detalles acerca del tamaño del paso). Si se satisfacen las restricciones de reserva, entonces, antes de pasar a la resolución de un despacho económico en el bucle exterior, se disminuyen los multiplicadores μ (utilizándose, según se explica en una discusión al artículo, técnicas de búsqueda binaria) hasta que de nuevo se producen infactibilidades en las restricciones de reserva rodante (quedándose entonces el algoritmo con el último valor del vector de multiplicadores μ con el que se consigue factibilidad en las restricciones de reserva). A continuación se pasa al bucle exterior ejecutándose un despacho económico y actualizándose los multiplicadores λ a los costes marginales horarios que resultan tras la resolución del despacho. Si el proceso aún no ha convergido, se ejecuta otra iteración con el nuevo valor de los multiplicadores λ y los multiplicadores μ igualados a cero. Se considera que se llega a una solución primal factible suficientemente buena cuando con pequeños cambios en los multiplicadores μ se alterna entre soluciones factibles e infactibles. Para confirmar la solución se ejecutan varias iteraciones.

El grupo de Peterson y Brammer

Peterson y Brammer [99] presentan un método que extiende el algoritmo de [125] para incluir restricciones de reserva que, de forma simplificada, tengan en cuenta las rampas de las centrales térmicas y para incluir restricciones de demanda mínima (suma de los mínimos técnicos de las centrales acopladas menor que la demanda). En el bucle interior se actualizan los multiplicadores asociados a las restricciones de desigualdad (restricciones de reserva y de demanda mínima) utilizando técnicas de subgradiente. El paso empleado es una constante. Una vez se encuentra una solución que cumple todas las restricciones de desigualdad se ejecuta un despacho económico y se actualizan los multiplicadores asociados a las restricciones de demanda. Entonces, con el objetivo de evitar acoplamientos innecesarios, se disminuyen los multiplicadores asociados a las restricciones de reserva hasta que se llegue a una solución infactible (guardándose entonces el mínimo valor de los multiplicadores que produce factibilidad). Los multiplicadores asociados a las restricciones de reserva se disminuyen multiplicándolos por una constante.

El grupo de Rakic

Rakic et al. [101] desarrollan un modelo dual-primal [86] de coordinación hidrotérmica en el corto plazo con centrales de bombeo. El procedimiento utilizado es el siguiente. En las iteraciones en que la solución del problema dual es una solución factible para el problema primal, se fijan las variables de acoplamiento y la potencia turbinada/bombeada por las centrales de bombeo a la solución del problema dual. Entonces se optimizan las producciones de las centrales térmicas e hidráulicas para satisfacer la demanda (i.e. se ejecuta un despacho económico) aplicando de nuevo técnicas de relajación lagrangiana (dualizando las restricciones de demanda). Los multiplicadores asociados a las restricciones de demanda (en el despacho económico) o multiplicadores

ρ se actualizan utilizando el método del gradiente [77], [27].

En todas las iteraciones los multiplicadores asociados a la restricciones de reserva rodante (multiplicadores μ) se actualizan utilizando técnicas de subgradiente (con tamaño del paso que depende del contador de iteraciones y que no se especifica). En las iteraciones en que no se encuentra una solución factible para el problema primal, los multiplicadores asociados a las restricciones de demanda (multiplicadores λ) se actualizan utilizando técnicas de subgradiente (de nuevo con tamaño que depende del contador de iteraciones y que no se especifica). Cuando se encuentra una solución factible para el problema primal, los multiplicadores asociados a las restricciones de demanda se actualizan a partir de una combinación lineal de los multiplicadores en la iteración en curso y los costes marginales (de cada periodo del horizonte temporal analizado) que resultan tras resolver el despacho económico (que son precisamente los multiplicadores asociados a las restricciones de demanda dualizadas para la resolución del despacho económico o multiplicadores ρ). Este es el mismo procedimiento de actualización de multiplicadores propuesto en [86].

En [102], los autores siguen el mismo algoritmo de [101] pero además consideran (y optimizan) la compra/venta de potencia a posibles generadores/consumidores vecinos. Además, con el objetivo de acelerar la convergencia en los multiplicadores asociados a las restricciones de reserva rodante (μ) se introduce un término en la actualización de los multiplicadores μ . Esta forma de acelerar la convergencia ya fue propuesta en [86]. Además se menciona la posibilidad de resolver el despacho económico, en aquellas iteraciones en que la solución del problema dual sea factible en reserva rodante para el problema primal, fijando de antemano las producciones de las centrales hidráulicas a la solución del problema dual.

2.5 Revisión bibliográfica de artículos basados en el método de resolución en fases

A continuación se describen brevemente algunos de los métodos, que aparecen en la literatura, de coordinación hidrotérmica en el corto plazo en el corto plazo (o de programación horaria de centrales térmicas) que utilizan un procedimiento de resolución en fases [131].

El grupo de Bertsekas

Bertsekas et al. [11] proponen un método basado en una modificación del problema dual para convertirlo en un problema con derivadas segundas y así poder aplicar métodos de Newton. Resuelven el problema dual mediante un proceso iterativo que finaliza cuando la diferencia entre el problema dual aproximado y el problema dual original es suficientemente pequeña. Sin embargo, esta idea fue abandonada en [111]. También se demuestra en [11] que, bajo ciertas

hipótesis, el agujero de dualidad (diferencia relativa entre el coste de la solución al problema primal y el coste de la solución al problema dual) disminuye al aumentar el número de centrales consideradas.

Los grupos de Ferreira

El grupo Ferreira de Pacific Gas & Electric (PG & E) Company (California, EE.UU.) propone [35] un método para resolver el problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo que sigue la estructura en tres fases propuesta en [131]. Las restricciones globales (y por tanto dualizadas al aplicar técnicas de relajación lagrangiana) son: las restricciones de demanda y reserva para todo el sistema, las restricciones de demanda y reserva por área y, por último, las restricciones de volumen (restricciones que relacionan las producciones de algunos tipos de centrales). Se modelan en detalle los distintos tipos de centrales de la compañía eléctrica PG & E y se indica el proceso de resolución de los subproblemas asociados a cada uno de estos tipos de centrales.

En la fase 1, el algoritmo propuesto en [35] (solución del problema dual), actualiza los multiplicadores utilizando el método del subgradiente. Presenta tres tipos de selección del tamaño del paso. Los dos primeros se basan en la utilización de un escalar positivo como tamaño del paso. En el primero de ellos se normaliza dividiendo por el módulo del subgradiente (método de Shor) y en el otro (método de Held) no se normaliza. El tercer método (método de Polyak) emplea una estimación del valor óptimo de la función objetivo del problema dual. Este tercer método no lo aplica por la dificultad que entraña la estimación del valor óptimo de la función objetivo del problema dual. Sin embargo, más adelante [85], el equipo de Ferreira del Instituto Superior Técnico de Portugal emplea una idea similar a la de este tercer método.

En la fase 2 (búsqueda de una solución que cumpla las restricciones globales de desigualdad), Ferreira [35] propone un proceso iterativo en el que en cada iteración se modifican todas los multiplicadores asociados a las restricciones globales de desigualdad que no se cumplan (a diferencia del método propuesto en [131] en que se modifica un multiplicador en cada iteración). Ya en una discusión que aparece en [131], Ferreira plantea este tipo de actualización de multiplicadores (todos los multiplicadores asociados a subperiodos de infactibilidad en reserva rodante en cada iteración). En el capítulo 7 (apartado 7.3) se elabora sobre este aspecto.

El equipo de Ferreira del Instituto Superior Técnico de Portugal, plantea en [85] la dificultad que entraña la elección del tamaño del paso al emplear el método del subgradiente en la actualización de los multiplicadores del problema dual. Además un paso que provoque una buena velocidad de convergencia para unos datos, puede ser una mala elección al cambiar los datos del problema. Por ello propone una forma de seleccionar el tamaño del paso que no dependa de cada caso particular.

Parte del método propuesto se inspira en [8]. La idea de partida consiste en seleccionar el tamaño del paso que, moviéndose en la dirección definida por el subgradiente de la iteración actual, maximice el valor de la función dual para la siguiente iteración. En la elección del tamaño del paso utiliza como dato una cota superior del problema primal (que puede conseguirse fácilmente de resultados históricos). Proponen un algoritmo de solución del problema dual en dos fases: en la primera, de forma rápida, se llega a una zona próxima al óptimo y en la segunda, con pasos de menor tamaño, se alcanza el óptimo.

El grupo de Cohen

Cohen y Wan [18] presentan un método de resolución en fases para resolver el problema de la programación horaria de centrales térmicas con restricciones de combustibles. Se definen 4 vectores de multiplicadores: un vector asociado a las restricciones de demanda (λ), un vector asociado a las restricciones de reserva (δ), un vector que incluye otras restricciones de reserva (γ) y un vector asociado a las restricciones de combustible (π).

Resuelven el problema en dos etapas. El proceso iterativo que se ejecuta en la primera etapa se lleva a cabo a través de tres bucles consecutivos. En cada bucle se actualiza un grupo de multiplicadores manteniéndose constantes el resto. En el primer bucle se actualizan los multiplicadores γ (manteniéndose los multiplicadores λ , δ y π constantes). En el segundo bucle se actualizan los multiplicadores λ y δ (manteniéndose los multiplicadores γ y π constantes). En el tercer bucle se actualizan los multiplicadores π (manteniéndose los multiplicadores γ , λ y δ constantes). La primera etapa finaliza cuando se cumplen las restricciones de combustibles y los multiplicadores π se han estabilizado.

En la segunda etapa se fijan las producciones de las centrales con restricciones de combustibles al resultado de la primera etapa, se resuelven los subproblemas asociados a las demás centrales térmicas y se actualizan los multiplicadores γ manteniéndose el resto constantes. El proceso finaliza cuando se cumplen las restricciones de reserva. Por tanto, a partir de esta solución se puede obtener una solución que cumpla las restricciones de demanda (aunque el artículo no menciona esta tercera etapa).

En [20] se presenta un método de programación horaria de centrales térmicas aplicando técnicas de relajación lagrangiana. Se consideran varios tipos de centrales y con diversos modos de funcionamiento. El artículo se centra en el modelado de algoritmos de programación dinámica para cada uno de los tipos de las centrales consideradas.

El grupo de Aoki

Aoki et al [1] proponen un método de resolución en fases para resolver el problema de la coor-

dinación hidrotérmica en el corto plazo en sistemas que disponen, entre otras, de centrales con restricciones de combustibles y centrales de bombeo. En la primera fase se resuelve el problema dual y en la segunda fase se modifican los acoplamientos que resultan de la primera fase hasta encontrar una solución factible. Las restricciones que se dualizan en la definición del problema dual son las restricciones de reserva rodante y las restricciones de demanda.

En la primera fase, la actualización de los multiplicadores se hace utilizando un método cuasi Newton [77], [27], [109] (los métodos cuasi Newton se basan en el cálculo de una aproximación de la matriz hesiana).

El problema dual se resuelve a base de la resolución iterativa de los subproblemas térmicos, los subproblemas asociados a centrales térmicas con restricciones de combustibles y los subproblemas de centrales hidráulicas y de bombeo. Para la resolución de los subproblemas asociados a las centrales con restricciones de combustibles se aplican de nuevo técnicas de relajación lagrangiana dualizando la restricción de combustible. El problema dual que resulta se resuelve de forma muy rápida por haber un solo multiplicador. Se utilizan técnicas de búsqueda binaria para la actualización de los multiplicadores de los subproblemas de las centrales con restricciones de combustibles.

La segunda fase comienza con la inicialización de las variables de acoplamiento al valor que toman estas variables en la fase primera. Si con tales valores se puede encontrar una solución primal factible finaliza el proceso. Si no es así se modifican los multiplicadores λ y μ (utilizando un procedimiento que se detalla en el artículo), se resuelven los subproblemas (térmicos convencionales, térmicos con restricciones de combustibles e hidráulicos y de bombeo) y se actualizan de nuevo los multiplicadores λ y μ hasta encontrar una solución con cuyas variables de acoplamiento se pueda derivar una solución factible para el problema primal. En la segunda fase de este método no se sigue el procedimiento más habitual [131], [35], [85] que consiste en modificar, en el proceso iterativo de la fase segunda, únicamente los multiplicadores μ y mantener los multiplicadores λ al valor que adquieren en la solución de la fase primera.

El grupo de Shahidepour

En [119] y [110], el equipo de Shahidehpour propone un método de resolución en fases para resolver el problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo con restricciones de combustibles. El problema dual se formula dualizando las restricciones de reserva rodante y demanda. La resolución del problema dual requiere la resolución de tres tipos de subproblemas: los subproblemas asociados a las cuencas hidráulicas, los subproblemas asociados a las centrales térmicas y los subproblemas asociado a las centrales con restricciones de combustibles. Para la resolución de este último tipo de subproblemas, al igual que en [1] se aplican de nuevo

técnicas de relajación lagrangiana dualizando la restricción de combustible y aplicando el mismo procedimiento de resolución (técnicas de búsqueda binaria).

Una vez se ha encontrado una solución factible [118], [119], [110] se aplica un procedimiento basado en programación lineal que trata de desacoplar alguna central para reducir el coste y determina la producción de todas las centrales.

El problema dual (fase 1) se resuelve empleando el mismo procedimiento de [1], esto es empleando un método cuasi Newton.

En la fase 2 (búsqueda de una solución factible) se actualizan los multiplicadores asociados a las restricciones de reserva rodante (multiplicadores μ) y los multiplicadores asociados a las restricciones de demanda (siguiendo la línea de [1]). Además se añade una restricción de reserva rodante máxima con el objetivo de tratar de evitar que el exceso de reserva produzca soluciones poco económicas. Los multiplicadores λ se actualizan sólo si se cumplen las restricciones de reserva rodante. Esta actualización requiere la ejecución de un algoritmo simplificado de despacho económico (que se resuelve utilizando técnicas de programación lineal). En la actualización de los multiplicadores λ y μ se emplean técnicas de interpolación lineal en las primeras iteraciones (de la fase 2) y técnicas de búsqueda binaria tras ser ejecutadas un número fijado de iteraciones. La fase 2 finaliza cuando se cumplen las restricciones de reserva rodante y de demanda.

Finalmente, en una tercera fase, se analiza si se puede desacoplar alguna central. La búsqueda se realiza (a partir de los resultados que se obtuvieron del despacho simplificado de la fase 2) sobre las centrales que están a potencia mínima y cuyo desacoplamiento no viola las restricciones de tiempo mínimo de funcionamiento. Se elige la central de mayor coste.

El grupo de Luh

El grupo de Luh propone en [44], [130] un algoritmo para resolver el problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo que, básicamente, sigue la estructura en fases propuesta en [131]. Esto es, en primer lugar se resuelve el problema dual y a continuación se acoplan más centrales, en el caso de que no se cumplan las restricciones de reserva rodante, y se ejecuta un despacho económico. El procedimiento que se sigue para obtener una solución factible en reserva rodante no se basa en modificar los multiplicadores asociados a tales restricciones sino que siguiendo reglas heurísticas, se acoplan centrales hasta conseguir factibilidad en reserva rodante. A continuación se ejecuta un despacho económico.

Se aplican dos tipos de reglas heurísticas y así se consiguen dos soluciones factibles y se elige la de menor coste. Para asegurarse de que la solución primal factible conseguida es suficientemente buena, se modifican los multiplicadores, y se ejecuta un número de iteraciones adicionales

(resolviendo de nuevo el problema dual, buscando a continuación dos soluciones primales factibles y eligiéndose la de mínimo coste). A estas iteraciones adicionales encaminadas a asegurar la bondad de la solución primal factible conseguida se las llama "iteraciones heurísticas". El método propuesto en una primera etapa, sigue la estructura en fases de [131] (resuelve el problema dual y a continuación, modificando la solución del problema dual, se obtiene una solución primal factible) pero en una segunda etapa (iteraciones heurísticas) sigue el método dual-primal [86] (se resuelve el problema dual, se obtiene una solución primal factible y se modifican los multiplicadores para ejecutar otra nueva iteración resolviendo de nuevo el problema dual hasta que se hayan ejecutado el número de iteraciones heurísticas fijado a priori).

La actualización de los multiplicadores propuesta en [130] se hace siguiendo el método del subgradiente. El tamaño del paso elegido utiliza una estimación, o cota superior, del valor en el optimizador de la función dual.

El modelado del sistema hidráulico desarrollado [130] es muy simple. No se modelan los acoplamientos espacio-temporales entre los embalses de una misma cuenca. Simplemente se fija la energía producida por cada central al cabo del día o de la semana (dependiendo del tipo de central).

En [48], el grupo de Luh profundiza en el método propuesto en [44],[130] y [47] pero añade centrales de bombeo (independientes, es decir desligadas geográficamente entre sí). Se detalla el modelado del equipo de bombeo. Al aplicar el método de la relajación lagrangiana, el problema primal relajado se descompone en un subproblema por cada central térmica, un subproblema por cada central hidráulica (ya que no se modelan los acoplamientos espacio-temporales del equipo hidráulico) y un subproblema por cada central de bombeo. Para resolver el subproblema asociado a cada central de bombeo se aplican de nuevo técnicas de relajación lagrangiana con actualización de multiplicadores mediante técnicas de subgradiente (no se especifica el tamaño del paso elegido). En este artículo se explican los problemas de inestabilidad que pueden provocar las linealidades al aplicar el método de la relajación lagrangiana y por ello la curva de producción hidráulica en función del caudal turbinado, que es una función lineal, se aproxima con una cuadrática.

El método de la relajación lagrangiana puede resultar inestable cuando se consideran costes lineales. Tratar de solucionar esta inestabilidad es lo que persigue el método del lagrangiano aumentado (apartado 2.6). En [49] se plantea el problema de la inestabilidad del método de relajación lagrangiana cuando se consideran costes lineales. Las transacciones de energía entre compañías eléctricas se cobran según una función de coste lineal (lo que implica posible inestabilidad del lagrangiano y, en cualquier caso, convergencia muy lenta al aplicar el método del subgradiente). En [49] se resuelve un problema de coordinación hidrotérmica en el que se

consideran transacciones de energía (a coste lineal) entre compañías eléctricas. La aportación de este artículo consiste en la definición de una aproximación cuadrática de los costes lineales de las transacciones. Esta aproximación acelera la convergencia en la resolución del problema dual al utilizar técnicas del subgradiente. De esta forma se evita el aumento de complejidad de los subproblemas (en que se descompone el problema primal relajado) que se origina al aplicar técnicas de lagrangiano aumentado y se evita el inconveniente del difícil ajuste de la constante de penalización al aplicar estas técnicas del lagrangiano aumentado (apartado 2.6). El esquema general del método de resolución (forma de resolver los subproblemas hidráulicos, térmicos y de bombeo así como el procedimiento heurístico para encontrar soluciones primales) es la presentada en otros artículos de este grupo de investigación [47], [130] y [48]

En [50] de nuevo se sigue el mismo esquema general propuesto en [130] y [47] pero se introduce un modelado detallado del equipo hidráulico con acoplamientos espacio-temporales entre las centrales. Al aplicar el método de la relajación lagrangiana, dualizando las restricciones de demanda y reserva rodante, el problema primal relajado se descompone en un subproblema por cada central térmica, un subproblema por cada central de bombeo (no se modelan las ligaduras espaciales) y un subproblema por cada cuenca hidráulica. El artículo se centra en el modelado y resolución mediante técnicas de relajación lagrangiana de cada subproblema hidráulico. Las restricciones que se dualizan, en la resolución de cada subproblema hidráulico, son las que definen los límites de los volúmenes de los embalses en cada periodo del horizonte temporal analizado y las que fijan los volúmenes al final del horizonte temporal considerado. Para la resolución del problema dual de cada subproblema hidráulico se aplican técnicas de subgradiente. Se aplica un procedimiento heurístico para conseguir una solución factible de cada subproblema hidráulico a partir de la solución de cada subproblema dual asociado.

En [78] se presenta un método para la resolución del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo que sigue el esquema general de otros trabajos de este grupo de investigación ([47], [130] y [48]). El artículo se centra en la etapa primera, esto es en la resolución del problema dual. En la actualización de los multiplicadores se aplica una forma dual de los llamados *Bundle Methods* (apartado 6.7.3).

El grupo de Ruzic

En [109] se propone un método de actualización de multiplicadores del problema dual. Este método se aplica dentro de un esquema de resolución del problema de la coordinación hidrotérmica en fases (trabajos anteriores de este autor utilizaban el procedimiento de resolución dual-primal propuesto en [86]). En este artículo se describen el método del subgradiente y un método cuasi Newton (i.e. un método basado en el cálculo en cada iteración de una aproximación a la matriz hesiana) y se propone un nuevo método (llamado *Método de la distancia*

a la optimalidad) basado en el cálculo (en cada iteración de resolución del problema dual) de una estimación de la distancia entre la solución dual de la iteración actual y la solución óptima del problema primal. Los multiplicadores se actualizan de forma que esta distancia disminuya. Lógicamente, dada la no convexidad del problema de la coordinación hidrotérmica, esta distancia no puede anularse nunca.

El grupo de Electricité de France

El grupo de Electricité de France desde la publicación de Ea y Monti [32] se ha dedicado fundamentalmente a la resolución del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo (y la programación horaria de centrales térmicas) mediante técnicas de lagrangiano aumentado (apartado 2.6). Sin embargo en 1996 proponen [98] un método de coordinación hidrotérmica en el corto plazo en dos etapas. En la primera resuelven el problema dual utilizando la forma primal de los *Bundle Methods* [91], [116], [54], [13] (apartado 6.7.3) y en la segunda, para forzar a la factibilidad del problema primal, aplican técnicas de lagrangiano aumentado. El proceso finaliza cuando se convergen los incumplimientos en las restricciones de demanda.

2.6 Métodos de solución empleando técnicas de lagrangiano aumentado

Las técnicas del lagrangiano aumentado se comenzaron a utilizar a principios de los 90. El grupo de investigación de Electricité de France ha sido el motor de la aplicación de este tipo de técnicas en los problemas de coordinación hidrotérmica en el corto plazo y programación horaria de centrales térmicas.

La función dual del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo presenta la peculiaridad de que en torno al óptimo ante variaciones apreciables del vector de variables duales, el valor de la función dual apenas se modifica. Estableciendo la analogía en $\mathbb{R}^3$, si únicamente se considera un subperiodo y únicamente se incluyen como restricciones de carga la restricción de demanda y la restricción de reserva rodante para el único subperiodo, entonces la función dual presenta una estructura tipo meseta en torno al óptimo. Esto significa que la convergencia al tratar de optimizar una función con esa estructura, puede resultar muy lenta. Además y aún en el caso de considerar un problema convexo (sin variables enteras), si los costes son lineales el método del lagrangiano puede resultar inestable de forma que no se pueda encontrar la solución del problema primal (a pesar de la convexidad del problema). Esta es la motivación (evitar la inestabilidad del lagrangiano y acelerar su convergencia) que lleva a convexificar el problema dual incluyendo penalizaciones cuadráticas en la función lagrangiana, definiéndose así el lagrangiano aumentado.

El inconveniente de incluir penalizaciones cuadráticas es que se pierde la propiedad de separabilidad (o descomposición en subproblemas) del problema de optimización, en variables primales, de la función lagrangiana (o problema primal relajado). Para preservar la separabilidad, el grupo de investigación de Electricité de France propone la aplicación del “principio del problema auxiliar” [21] [22]. El principio del problema auxiliar básicamente consiste en linealizar los términos no separables de la función objetivo del problema primal relajado y en añadir términos cuadráticos separables.

Se han empleado dos modalidades al aplicar técnicas de lagrangiano aumentado en la resolución del problema de la coordinación hidrotérmica. La primera consiste en relajar y penalizar de forma cuadrática las restricciones de demanda y reserva [6], [12], [104], [98], [128]. La segunda consiste en la aplicación del método de la duplicación de variables [7], [104].

Desde principios de los 90 y hasta 1996, el grupo de investigación de Electricité de France resuelve el problema empleando únicamente técnicas de lagrangiano aumentado. Como el método del lagrangiano aumentado [6], [7] [104] fuerza a la consecución de soluciones factibles en reserva rodante, este método no requiere el empleo de ningún procedimiento heurístico adicional. El criterio de parada es la convergencia en el incumplimiento de la demanda. Este grupo de investigación no se preocupa de que se cumplan las restricciones de demanda sino sólo de que los incumplimientos sean pequeños (siempre que haya suficiente potencia acoplada) ya que el ajuste exacto de las restricciones de demanda no modifica las variables de acoplamiento.

En 1996, Pellegrino et al. proponen un método de coordinación hidrotérmica en el corto plazo en dos etapas que sigue el método de resolución en fases descrito (apartado 2.3). En la segunda fase para forzar a la factibilidad del problema primal emplean técnicas del lagrangiano aumentado.

El equipo de Shahidepour propone [128] un método de coordinación hidrotérmica en el corto plazo que tiene en cuenta restricciones de red y restricciones medioambientales. Resuelve el problema en dos etapas. En la primera dualiza las restricciones de demanda, reserva rodante, medioambientales y los límites de la capacidad de las líneas. Además, penaliza de forma cuadrática las restricciones de demanda. Para preservar la separabilidad de la resolución del problema de optimización (en variables primales) de la función lagrangiana que resulta, utiliza la misma idea propuesta por el grupo de investigación de Electricité de France [6], [7], [104], [98]. Esta etapa finaliza cuando se encuentra una solución que cumple las restricciones dualizadas. En la segunda etapa, se desarrolla un algoritmo de despacho económico en el que se incluye un modelo DC de la red de transporte y las restricciones medioambientales. Para resolver el despacho económico se aplica de nuevo el método de la relajación lagrangiana dualizando las restricciones medioambientales. El proceso finaliza cuando se encuentra una solución que cumple las restricciones medioambientales. En la actualización de los multiplicadores (tanto de la

primera etapa como de la segunda) se emplean técnicas de subgradiente. El método propuesto, al igual que [127] (apartado 2.5) se preocupa especialmente de encontrar soluciones factibles ya que las dos etapas finalizan en cuanto se encuentra una solución factible, sin explorar si existen otras soluciones mejores.

Al utilizar las técnicas de relajación lagrangiana (sin incluir penalizaciones), los multiplicadores asociados a las restricciones de demanda representan, desde el punto de vista de los generadores, el beneficio a recibir por cada MWh producido (de forma equivalente, desde el punto de vista del sistema, representan el coste marginal de la energía). Análogamente los multiplicadores asociados a las restricciones de reserva representan el beneficio a recibir por los generadores por cada MW de reserva (o equivalentemente, el coste marginal de la reserva). Esta posibilidad de extraer significado económico a los multiplicadores es uno de los alicientes del uso de las técnicas de relajación lagrangiana. Esto resulta de particular interés en los sistemas deregulados (o liberalizados) de energía eléctrica.

Sin embargo, el uso de las técnicas del lagrangiano aumentado enmascara el significado económico de los multiplicadores de Lagrange. Por este motivo, las técnicas del lagrangiano aumentado no se han desarrollado en esta tesis doctoral. Precisamente para poder conseguir la información que suministran los multiplicadores de Lagrange, recientemente el grupo de investigación de Electricité de France [98] propone un método en dos etapas. En la primera aplica técnicas de relajación lagrangiana para resolver el problema dual y así consiguen el valor de los multiplicadores asociados a las restricciones de demanda y reserva rodante. En la segunda etapa, y para forzar a la factibilidad, aplica técnicas de lagrangiano aumentado. Como es habitual en los modelos desarrollados por este grupo, el criterio de parada es la estabilización en los incumplimientos en las restricciones de demanda (con suficiente potencia acoplada).

En determinadas circunstancias se puede conseguir que al emplear técnicas de lagrangiano aumentado, los multiplicadores converjan a los valores a los que convergerían si se aplicara el método del lagrangiano convencional (sin penalizaciones). Ello depende de la forma de definir la función lagrangiana aumentada, de la forma de actualizar los multiplicadores y de la forma de actualizar la constante de penalización. Además es difícil extraer reglas acerca del procedimiento a seguir porque formas de actuar (definición de la función lagrangiana aumentada y políticas de actualización de los multiplicadores y de la constante de penalización) con las que se consigue convergencia a los valores adecuados en determinados problemas, fallan cuando se aplican a otros problemas. Todo esto quiere decir que, hoy en día, el método del lagrangiano convencional presenta mejores propiedades que el método del lagrangiano aumentado por la información que aportan los multiplicadores y la fiabilidad de la misma.

Otro de los inconvenientes del uso de técnicas de lagrangiano aumentado es la dificultad en la

elección de la constante de penalización y las posibles inestabilidades numéricas que una mala elección puede provocar.

2.7 Otros

En [127] se propone un algoritmo de coordinación hidrotérmica que modela de forma detallada las restricciones de rampas (en el arranque, la parada, la subida de carga y la bajada de carga) de las centrales térmicas y los costes asociados a ellas. El proceso de resolución es el siguiente. Utilizando el método de la relajación lagrangiana se dualizan las restricciones de reserva rodante y demanda utilizando el método del subgradiente en la actualización de multiplicadores. En el momento en que se encuentra una solución que cumple las restricciones de reserva rodante, se ejecuta un despacho económico. El algoritmo de relajación lagrangiana en sí es muy simple. No se preocupa de la calidad de la solución del problema dual (y por tanto del problema primal) conseguida. El artículo se centra en la resolución de los subproblemas térmicos mediante técnicas de programación dinámica teniendo en cuenta los costes asociados a las rampas y en el desarrollo de un algoritmo de despacho económico que modele de forma precisa las rampas.

Capítulo 3

Formulación del problema

3.1 Introducción

El objetivo de un sistema de energía eléctrica es suministrar la demanda al mínimo coste, con un adecuado índice de fiabilidad y de forma que se cumplan las restricciones del sistema (técnicas, medio-ambientales, regulatorias, etc.).

Los sistemas de energía eléctrica disponen de dos equipos generadores, claramente diferenciados, que constituyen los sistemas de generación térmico e hidráulico. Cada uno de estos equipos tiene diferentes características y limitaciones en cuanto a costes, volumen de producción y capacidad de adaptación a la demanda del sistema.

El sistema térmico está formado por centrales nucleares, térmicas convencionales y turbinas de gas. La utilización de estas centrales tiene asociada, en la generación de energía, costes de producción, que dependen de forma no lineal de la potencia generada en cada hora, y costes de arranque, que dependen de forma exponencial del tiempo de parada de la central, de forma que cuanto más fría está la caldera mayor es el coste de arranque.

El sistema hidráulico está constituido por centrales hidráulicas en lechos de ríos. Las centrales hidráulicas de un mismo río (o cuenca hidráulica) están acopladas por la topología de la cuenca ya que el agua descargada por cierta central forma parte de la aportación de agua que recibe la central situada inmediatamente aguas abajo. La topología de la cuenca establece pues un acoplamiento espacio-temporal entre todas las centrales de la cuenca. El acoplamiento espacial se debe a que el agua descargada por una central llega a la central situada inmediatamente aguas abajo de la misma. El acoplamiento temporal se debe, por un lado, a que el agua liberada por la central situada aguas arriba tarda cierto tiempo en llegar a la central situada aguas abajo y, por otro lado, a que el agua turbinada en cierto instante por una central no podrá ser turbinada por esa central en un instante posterior.

La segunda propiedad característica de las centrales hidráulicas es que el coste de producción de energía de una central hidráulica es despreciable pero la cantidad de agua disponible es limitada. Por ello, no se puede turbinar agua continuamente, ya que el agua turbinada en un período no se podrá turbinar en un período posterior. Esta es la razón por la que utilizando racionalmente los recursos hidráulicos, se minimiza el coste de explotación (coste de generación de las centrales térmicas) del sistema hidrotérmico.

El problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo consiste en determinar la política óptima de arranque/parada de los grupos térmicos así como la política óptima de producción de energía, hidráulica y térmica, de forma que se suministre la demanda a coste mínimo y se mantenga cierta potencia en reserva (reserva rodante) de modo que el sistema pueda hacer frente al fallo de alguno (o algunos) de sus grupos generadores.

Los modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo reciben información de los modelos de coordinación hidrotérmica en el medio/largo plazo. Así por ejemplo, los modelos de coordinación hidrotérmica en el medio/largo plazo determinan el volumen de agua embalsada que deben contener los embalses ligados a las centrales hidráulicas al final del horizonte temporal analizado (o, más frecuentemente, los límites mínimo y máximo para los volúmenes de agua al final del periodo de estudio) o bien el valor futuro del agua embalsada. Esta información es dato de entrada para los modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo. Sin ella los modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo gastarían todo el agua embalsada lo que representaría una mala gestión de los recursos disponibles por tener en cuenta sólo las necesidades inmediatas y prescindir de las necesidades futuras.

El problema de la coordinación hidrotérmica matemáticamente se plantea como un problema de optimización combinatoria entero mixto, no lineal y de gran dimensión, en el que se minimizan los costes de explotación del sistema respetando las restricciones del equipo térmico, del equipo hidráulico y de la carga. Las restricciones de carga son las que ligan los sistemas térmico e hidráulico. Son, por tanto, las restricciones que complican la solución del problema ya que sin ellas el problema de optimización a resolver se descompondría en subproblemas menor tamaño y estructuras más simple y por ello de más fácil resolución. El horizonte de optimización varía desde una semana hasta un día y los intervalos de discretización tienen una duración que oscila entre media hora y varias horas dependiendo de la duración del periodo analizado.

Los elementos básicos de un sistema de energía eléctrica que intervienen en la coordinación hidrotérmica son las centrales térmicas y las centrales hidráulicas agrupadas en cuencas. La red de transporte no se modela en este problema porque no suele afectar a las decisiones de arranque/parada de las centrales.

Resulta conveniente, antes de comenzar la descripción del sistema hidroeléctrico, aclarar y distinguir los conceptos de grupo de generación y de central de energía eléctrica. Se llama grupo de generación a cada conjunto de turbina y generador acoplados en un mismo eje. La turbina recibe vapor (en el caso de grupos térmicos o nucleares) o bien caudal de agua (en el caso de los grupos hidráulicos), se mueve y esta energía mecánica se emplea en producir electricidad en el generador (también llamado alternador o máquina síncrona). Una central está ligada a un nodo de un sistema de energía eléctrica y comprende uno o varios grupos de generación. Sin embargo y a pesar de esta clara diferencia, la literatura relacionada con el control, la planificación y la explotación de los sistemas de energía eléctrica se refiere de forma indistinta a centrales y grupos de generación. Por ello en esta tesis se hace referencia de forma indistinta a centrales y grupos de generación de energía eléctrica.

Este capítulo se estructura como sigue. En el apartado 3.2 se introduce la notación utilizada. A continuación se describen los elementos que forman parte del sistema a modelar. En el apartado 3.3 se describe el equipo de generación térmica. En el apartado 3.4 se describe el equipo de generación hidráulica. En el apartado 3.5 se formulan las restricciones de carga (demanda, etc.) que deberá satisfacer el sistema hidroeléctrico. Por último, apartado 3.6, se formula el problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo.

3.2 Notación

Antes de comenzar la descripción del sistema hidrotérmico, se introduce la notación utilizada. Los símbolos empleados se clasifican en los siguientes grupos: índices, números y conjuntos, datos y variables. Los datos se clasifican atendiendo a su relación con el equipo térmico, el equipo hidráulico o las restricciones de carga. Las variables se clasifican en variables térmicas y variables hidráulicas.

- ÍNDICES, NÚMEROS Y CONJUNTOS

- Índices

- j es el subíndice que hace referencia a las centrales térmicas.

- i es el subíndice que hace referencia a las cuencas hidráulicas.

- $l(i)$ es el subíndice que hace referencia a las centrales hidráulicas de la cuenca i .

- $m(l(i))$ es el subíndice que hace referencia a las centrales hidráulicas situadas aguas arriba de la central l de la cuenca i .

- k es el subíndice que hace referencia a los subperiodos del horizonte temporal analizado.

– **Números**

J es el número total de centrales térmicas.

I es el número total de cuencas hidráulicas.

$L(i)$ es el número de centrales hidráulicas asociadas a la cuenca hidráulica i .

$M(l(i))$ es el número total de centrales hidráulicas situadas aguas arriba de la central hidráulica l de la cuenca i .

K es el número total de subperiodos del horizonte temporal analizado.

– **Conjuntos**

- j es el conjunto de centrales térmicas.
- i es el conjunto de cuencas hidráulicas.
- $l(i)$ es el conjunto de centrales hidráulicas de la cuenca i .
- $m(l(i))$ es el conjunto de centrales situadas aguas arriba de la central l de la cuenca hidráulica i .

• **DATOS**

– **Datos térmicos**

$a_j(t_{jk})$ es una función polinómica de la potencia térmica producida por la central j en el subperiodo k . Define el coste de producción (Pta) de la central térmica j en el subperiodo k .

$b_j(x_{jk}^d)$ es una función no lineal del tiempo que lleva desacoplada la central térmica j en el subperiodo k , x_{jk}^d . Define el coste de arranque (Pta) de la central j en el subperiodo k .

c_j es el coste de desacoplar (o parar) la central térmica j (Pta).

n_j^a es el número de costes de arranque que se consideran para la central térmica j .

$\underline{p}_j$ es la potencia mínima de la central térmica j (MW).

$\bar{p}_j$ es la potencia máxima de la central térmica j (MW).

r_j^s es la máxima rampa de subida de carga de la central j en un subperiodo (MW).

r_j^b es la máxima rampa de bajada de carga de la central j en un subperiodo (MW).

T_j^f es el mínimo tiempo de funcionamiento, en subperiodos, de la central térmica j .

T_j^p es el mínimo tiempo de parada, en subperiodos, de la central térmica j .

v_j^0 es el parámetro binario que define el estado de acoplamiento de la central térmica j al comienzo del periodo de estudio. Si vale 1, la central j está acoplada al comienzo del periodo de estudio. Si vale 0, la central está inicialmente desacoplada.

$\tilde{s}_{j0}$ es un parámetro que si es positivo indica el número de subperiodos que lleva acoplada la centra j al comienzo del periodo de estudio y si es negativo indica el número de subperiodos que lleva desacoplada la central térmica j al comienzo del periodo de estudio.

– **Datos hidráulicos**

$w_{l(i)k}$ es el volumen de aportaciones al embalse de la central hidráulica l de la cuenca i en el subperiodo k (Hm^3).

$\tau_{m(l(i))}$ es el tiempo, en subperiodos, que tarda el agua en llegar al embalse asociado a la central hidráulica l de la cuenca i desde el embalse, situado aguas arriba, asociado a la central $m(l(i))$.

$x_{l(i)}^0$ es el volumen inicial (al comienzo del periodo de estudio) de agua en el embalse asociado a la central hidráulica l de la cuenca i (Hm^3).

$\underline{x}_{l(i)T}$ es el límite inferior del volumen final (al final del periodo de estudio) de agua en el embalse asociado a la central hidráulica l de la cuenca i (Hm^3).

$\overline{x}_{l(i)T}$ es el límite superior del volumen final (al final del periodo de estudio) de agua en el embalse asociado a la central hidráulica l de la cuenca i (Hm^3).

$\underline{x}_{l(i)}$ es el límite inferior de volumen de agua almacenada en el embalse asociado a la central hidráulica l de la cuenca i (Hm^3).

$\overline{x}_{l(i)}$ es el límite superior de volumen de agua almacenada en el embalse asociado a la central hidráulica l de la cuenca i (Hm^3).

$\underline{u}_{l(i)}$ es el caudal mínimo de agua que tiene que turbinar la central hidráulica l de la cuenca i en cada subperiodo (m^3/s).

$\overline{u}_{l(i)}$ es el caudal máximo de agua que puede turbinar la central hidráulica l de la cuenca i en cada subperiodo (m^3/s).

$\rho_{l(i)}(u_{l(i)k}, x_{l(i)k})$ es una función no lineal del caudal de agua turbinada por la central hidráulica l de la cuenca i en el subperiodo k ($u_{l(i)k}$) y del volumen de agua en el embalse asociado a la central l de la cuenca i en el subperiodo considerado k ($x_{l(i)k}$). Define la potencia producida por la central l de la cuenca i en el subperiodo k .

$\varrho_{l(i)}$ es el coeficiente que determina la relación lineal entre la producción hidráulica de la central l de la cuenca i y el caudal turbinado por esta central si se supone constante la altura del embalse.

– **Datos de carga**

D_k es la demanda eléctrica en el subperiodo k (MW).

R_k es la reserva rodante en el subperiodo k (MW).

A_k es la potencia de regulación hacia arriba en el subperiodo k (MW).

B_k es la potencia de regulación hacia abajo en el subperiodo k (MW).

l_k es el número de horas del subperiodo k .

- VARIABLES

- Variables térmicas

t_{jk} es la potencia producida por la central térmica j en el subperiodo k (MW).

v_{jk} es una variable binaria de decision que vale 1 si la central térmica j está acoplada en el subperiodo k .

y_{jk} es una variable binaria de decision que vale 1 si la central térmica j se acopla (o se arranca) al comienzo del subperiodo k .

z_{jk} es una variable binaria de decision que vale 1 si la central térmica j se desacopla (o se para) al comienzo del subperiodo k .

$\tilde{s}_{jk}$ es una variable entera que si es positiva indica el número de subperiodos que lleva acoplada la central térmica j al comienzo del subperiodo k y si es negativa indica el número de subperiodos que lleva desacoplada la central térmica j al comienzo del subperiodo k .

x_{jk}^d es el tiempo (en número de subperiodos) que lleva desacoplada la central térmica j en el subperiodo k .

r_{jk}^t es una variable auxiliar que indica la contribución a la reserva rodante de la central térmica j en el subperiodo k (MW). El superíndice t diferencia la contribución a la reserva rodante de las centrales térmicas frente a la contribución a la reserva rodante de las centrales hidráulicas.

r_{jk}^{at} es una variable auxiliar que indica la contribución a la regulación hacia arriba de la central térmica j en el subperiodo k (MW). El superíndice at indica regulación hacia arriba de una central térmica.

r_{jk}^{bt} es una variable auxiliar que indica la contribución a la regulación hacia abajo de la central térmica j en el subperiodo k (MW). El superíndice bt indica regulación hacia abajo de una central térmica.

- Variables hidráulicas

$x_{l(i)k}$ es el volumen de agua del embalse de la central hidráulica l de la cuenca i al comienzo del subperiodo k (Hm^3).

$u_{l(i)k}$ es el caudal de agua turbinada por la central hidráulica l de la cuenca i durante el subperiodo k (m^3/s).

$s_{l(i)k}$ es el volumen de agua vertida por el embalse asociado a la central hidráulica l de la cuenca i durante el subperiodo k (Hm^3).

$p_{l(i)k}$ es la potencia hidráulica producida por la central hidráulica l de la cuenca i en el subperiodo k (MW).

$r_{l(i)k}^h$ es una variable auxiliar que indica la contribución a la reserva rodante de la central hidráulica l de la cuenca i en el subperiodo k (MW). El superíndice h diferencia la contribución a la reserva rodante de las centrales hidráulicas frente a la contribución a la reserva rodante de las centrales térmicas.

$r_{l(i)k}^{ah}$ es una variable auxiliar que indica la contribución a la regulación hacia arriba de la central hidráulica l de la cuenca i en el subperiodo k (MW). El superíndice ah indica regulación hacia arriba de una central hidráulica.

$r_{l(i)k}^{bh}$ es una variable auxiliar que indica la contribución a la regulación hacia abajo de la central hidráulica l de la cuenca i en el subperiodo k (MW). El superíndice bh indica regulación hacia abajo de una central hidráulica.

3.3 El equipo de generación térmica

Las centrales térmicas (o de forma más precisa los grupos térmicos) son elementos de producción que convierten energía calorífica en electricidad. Básicamente, un grupo térmico consta de una caldera que genera vapor para mover una turbina acoplada mecánicamente a un generador de energía eléctrica (o alternador). Como ya se ha indicado, una central puede estar constituida por uno o más grupos térmicos conectados a un mismo nudo eléctrico (y por tanto en una misma localización geográfica). La salida eléctrica de la central alimenta tanto al sistema de energía eléctrica como al sistema de energía auxiliar de la central.

Las centrales térmicas se clasifican, según la fuente de energía que utilizan, en centrales térmicas convencionales (que queman combustibles fósiles, entre los cuales se incluyen carbón, fuel-oil y gas) y centrales térmicas nucleares. De forma muy simplificada la diferencia entre las centrales térmicas convencionales y las centrales nucleares está en la forma de producir vapor para mover la turbina.

Las centrales térmicas pueden tener restricciones de combustible impuestas por la disponibilidad limitada de las fuentes naturales, por acuerdos contractuales con los proveedores o por problemas de transporte. No obstante las restricciones de combustible no se incluyen en los modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo sino que se hace en los modelos a medio/largo plazo.

Las características que definen el funcionamiento de las centrales térmicas son las siguientes.

- Límites de generación.

Cada central está diseñada para trabajar dentro de un rango factible definido por sus

potencias máxima y mínima en MW. A la potencia mínima nominal se le suele llamar mínimo técnico.

- Rampas de subida y bajada.

El incremento o decremento de la potencia de salida de una central durante un intervalo está limitado por estas restricciones.

- Trayectorias de arranque y parada

Cuando se arrancan o se paran las centrales térmicas se hace siguiendo unas curvas que determinan la producción de potencia durante los procesos de arranque y de parada.

- Tiempo mínimo de funcionamiento (TMF).

Una vez que una central térmica se ha acoplado, debe permanecer en servicio durante, al menos, un período mínimo de tiempo, por razones de comportamiento térmico de la caldera.

- Tiempo mínimo de parada (TMP).

Una vez que una central térmica se ha desacoplado, no puede volver a ser acoplada durante un mínimo intervalo de tiempo, por razones de comportamiento térmico de la caldera.

- Restricción de cuadrilla.

Si una central está formada por más de un grupo, no puede ser arrancado más de un grupo simultáneamente.

- Restricción de volumen.

Por motivos contractuales o de tipo regulatorio, puede existir un límite inferior o superior en la producción total de energía de algunas centrales.

El coste de operación de una central es fundamentalmente el coste del combustible. En las centrales térmicas se consume combustible en la generación de energía (coste de producción), en el proceso de arranque (coste de arranque) y en el proceso de parada (coste de parada). El consumo de combustible en el arranque no está relacionado con la potencia de salida, pero depende del tiempo que la central lleva desacoplada. En el proceso de parada el combustible consumido es el que se desaprovecha al dejar de producir energía. Tanto los costes de arranque como los costes de producción son no lineales.

El coste total incluye el coste de producción, el coste de arranque y el coste de parada. El coste de producción se divide en coste de producción fijo y coste de producción variable. Además, el coste de producción también se puede dividir en coste del combustible y coste de explotación y

mantenimiento. El coste de explotación y mantenimiento es el coste que no está asociado directamente con la producción de energía eléctrica sino que está relacionado con aquellas operaciones que son imprescindibles para el correcto funcionamiento de una central.

En este apartado formulan las restricciones que modelan el funcionamiento de las centrales térmicas y se describen los costes involucrados en su explotación en el corto plazo.

3.3.1 Restricciones del equito térmico

Potencias máxima y mínima

Cada central está diseñada para trabajar dentro de un rango factible definido por sus capacidades máxima y mínima en MW's. A la potencia mínima nominal se le suele llamar mínimo técnico. Este mínimo técnico viene establecido por el diseño del generador y la estabilidad de la combustión.

$$\underline{p}_j v_{jk} \leq t_{jk} \leq \overline{p}_j v_{jk} \quad \forall j \quad \forall k \quad (3.1)$$

Rampa de subida

Una central no puede aumentar bruscamente su producción de una hora a la siguiente. La rampa máxima de subida es la máxima potencia en que puede aumentar una central su producción de una hora a la siguiente. Matemáticamente, esta restricción queda definida así:

$$t_{jk+1} - t_{jk} \leq r_j^s \quad \forall j \quad k = 1, \dots, T-1 \quad (3.2)$$

Rampa de bajada

Al igual que con la rampa de subida, una central no puede disminuir bruscamente la potencia producida en el intervalo de una hora. La rampa de bajada es la máxima potencia en que puede disminuir una central su producción al pasar a la siguiente hora. Matemáticamente, esta restricción se expresa así:

$$t_{jk} - t_{jk+1} \leq r_j^b \quad \forall j \quad k = 1, \dots, T-1 \quad (3.3)$$

Trayectorias de arranque y parada

Las centrales térmicas se arrancan y se paran siguiendo curvas específicas que determinan la evolución de la producción de energía en los procesos de acoplamiento (o arranque) y desaco-

plamiento (o parada) de la central.

Restricciones lógicas

Las restricciones lógicas son las que relacionan y mantienen la coherencia del significado de las variables binarias de estado consideradas (variables de acoplamiento, de arranque y de parada), a saber:

- una central que no está acoplada en cierto subperiodo, no puede pararse (o desacoplarse) en el siguiente subperiodo;
- una central que está desacoplada en cierto subperiodo, no ha podido arrancarse (o acoplarse) al comienzo de ese subperiodo;
- una central que está acoplada en cierto subperiodo, no puede arrancarse al comienzo del subperiodo siguiente;
- una central que no se ha arrancado en cierto subperiodo y que estaba desacoplada en subperiodo anterior, no puede estar acoplada;
- una central que no se ha parado al comienzo de cierto subperiodo y que estaba acoplada en el subperiodo anterior, no puede estar desacoplada;
- una central que se para (o desacopla) al comienzo de cierto subperiodo, no puede estar acoplada en ese subperiodo;
- una central que se arranca al comienzo de cierto subperiodo, no puede estar desacoplada en ese subperiodo.

Así, las restricciones que ligan las variables de acoplamiento arranque y parada en el primer subperiodo son las siguientes:

$$y_{j1} - z_{j1} = v_{j1} - v_{j0} \quad \forall j \quad (3.4)$$

y, de forma similar, a continuación se formulan las restricciones correspondientes para el resto de subperiodos del horizonte temporal analizado [30].

$$y_{jk} - z_{jk} = v_{jk} - v_{jk-1} \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (3.5)$$

Tiempos mínimos de funcionamiento y parada

Una central que se acopla o se desacopla debe permanecer en ese estado un número mínimo de horas. El motivo de imponer estas restricciones es evitar desgastes o daños en las calderas de centrales causados por cambios frecuentes de temperaturas.

Las restricciones de tiempo mínimo de funcionamiento para el primer subperiodo se formulan:

$$\left(\tilde{s}_{j0} - T_j^f\right) (v_{j0} - v_{j1}) \geq 0 \quad \forall j \quad (3.6)$$

y para el resto de subperiodos

$$\left(\tilde{s}_{jk-1} - T_j^f\right) (v_{jk-1} - v_{jk}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (3.7)$$

Las restricciones de tiempo mínimo de parada para el primer subperiodo se formulan:

$$\left(\tilde{s}_{j0} + T_j^p\right) (v_{j1} - v_{j0}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (3.8)$$

y para el resto de subperiodos

$$\left(\tilde{s}_{jk-1} + T_j^p\right) (v_{jk} - v_{jk-1}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (3.9)$$

Restricción de cuadrilla

Si una central consta de dos o más grupos, es posible que no se pueda poner en funcionamiento más de uno al mismo tiempo si no hay suficiente personal para ocuparse del arranque simultáneo de dos o más grupos.

Restricción de volumen máximo

Por diversos motivos, una central puede tener un límite superior en su producción de energía. Entre los principales motivos cabe destacar la conservación del medio ambiente, ya que las centrales térmicas producen desechos derivados de la combustión del combustible. Esta restricción se puede representar matemáticamente de la siguiente forma:

$$\sum_{k=1}^K t_{jk} l_k \leq \bar{e}_j \quad \forall j \quad (3.10)$$

donde $\bar{e}_j$ es la máxima energía que puede producir la central j (MW).

Las restricciones de volumen máximo no suelen aparecer en los modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo (aunque sí se considerean en los modelos a medio/largo plazo). Por ello no se han incluido en la formulación global que se presenta en el apartado 3.6 ni en la implantación informática que se ha llevado a cabo.

Restricción de volumen mínimo

Al igual que con la restricción de volumen máximo de energía, la producción de una central puede tener un límite inferior que debe ser superado. Este límite inferior de producción de energía puede ser necesario por diversos motivos como pueden ser: razones políticas (como pueden ser la necesidad de mantener puestos de trabajo en sectores mineros), necesidad de consumir grandes cantidades de combustible de elevado coste de almacenaje, contratos con suministradores de combustibles, etc.

Matemáticamente, esta restricción se expresa de la siguiente forma:

$$\sum_{k=1}^K t_{jk} l_k \geq \underline{e}_j \quad \forall j \quad (3.11)$$

donde $\underline{e}_j$ es la mínima energía que puede producir la central j (MW).

De nuevo, estas restricciones no se han incluido en la formulación global que se presenta en el apartado 3.6 ni en la implantación informática que se ha llevado a cabo ya que no se suelen considerar en los modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo.

3.3.2 Costes asociados a las centrales térmicas

La utilización de centrales térmicas tiene asociada, en la generación de energía, costes de producción, que dependen de forma no lineal de la potencia generada en cada hora, y costes de arranque, que dependen de forma exponencial del tiempo de parada de la central, de forma que cuanto más fría está la caldera mayor es el coste de arranque. Los costes totales se dividen en:

- a) Costes de producción que incluyen costes de combustible y costes de operación y mantenimiento. Estos costes se dividen a su vez en costes fijos y costes variables.
- b) Costes de arranque.
- c) Costes de parada.

Estos costes se analizan a continuación.

Costes de producción

Cada central se caracteriza por unos costes de producción, que indican cuánto cuesta producir un MWh. El coste de producción de una central térmica es una función no lineal de la potencia generada por dicha central. Generalmente, esta función no lineal se expresa como una función cuadrática de la siguiente forma:

$$a_j(t_{jk}) = a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} \quad (3.12)$$

donde:

- a_{1j} , a_{2j} y a_{3j} son coeficientes característicos de cada central.
- t_{jk} es la potencia generada por la central j en el subperiodo k .
- $a_j(t_{jk})$ es el coste de producción de la central j en el subperiodo k .

Como se ha indicado anteriormente, los costes de producción se dividen en costes fijos y costes variables. Para la aproximación cuadrática el coste fijo es el coeficiente a_{3j} , mientras que el resto son los costes variables.

El coste de producción aumenta con la potencia generada de forma cuadrática (y no de forma lineal) por los costes de los servicios auxiliares, los cuales aumentan por unidad con la potencia generada.

El coste del combustible (expresado en Pta/MWh) se obtiene habitualmente a partir del precio del combustible (Pta/Termia), que representa cuánto cuesta producir una unidad de calor; y del consumo específico (Termia/MWh), que representa cuánto calor es necesario consumir para producir un MWh. La Termia es una unidad de calor que equivale a 1000 kilocalorías.

Coste de arranque

El coste de arranque es el coste de poner en funcionamiento una central, tras haber estado un período de tiempo desacoplada. El cálculo del coste de arranque depende del estado de temperatura y presión de la caldera. Se distinguen:

1. Costes de arranque cuando no se mantiene la temperatura y presión de la caldera.

Dependen del tiempo que lleve la central desacoplada. Son unos costes que aumentan exponencialmente con el tiempo que lleve la central desacoplada. Responden a la siguiente

expresión:

$$b_j(x_{jk}^d) = (C_j^f - C_j^c) \left(1 - e^{\frac{-x_{jk}^d}{\tau_j}} \right) + C_j^c \quad (3.13)$$

donde:

- $b_j(x_{jk}^d)$ es el coste de arranque de la central j ,
- x_{jk}^d es el tiempo (horas) que lleva la central j desacoplada (y, en este caso, enfriándose) en el subperiodo k ,
- C_j^f es el coste de arranque en frío (el superíndice f indica *frío*) de la central j (Pta),
- C_j^c es un coste de arranque en caliente (el superíndice c indica *caliente*) de la central j (Pta), y
- τ_j es la constante térmica de la caldera de la central (horas).

Como el coste de arranque depende de forma exponencial del tiempo que la central lleva desacoplada, se puede suponer que al cabo de i veces la constante térmica de la caldera, la exponencial se estabiliza (típicamente a i se le da el valor de 3 ó 4). Esto quiere decir que a partir de que la central lleve desacoplada $i \times \tau_j$ horas, el coste de arranque puede suponerse constante e igual a C_j^f .

En los modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo, el coste de arranque se evalúa en intervalos de tiempo discreto. Esto quiere decir que al cabo del número de subperiodos que correspondan a $i \times \tau_j$ horas, el coste de arranque se hace constante. Esto implica que se puede definir un número finito de costes de arranque, n_j^a , que será menor o igual al número de subperiodos correspondientes a $i \times \tau_j$ horas más 1. Cada uno de los costes de arranque corresponde a la evaluación de la expresión (3.13) en los intervalos de tiempo discretos considerados.

A menudo para hacer más sencillo el proceso de cálculo de los costes de arranque (en el caso de no mantener la temperatura y presión de la caldera) se simplifica considerando dos estados y sus correspondientes costes. Así se considera estado de arranque en frío si el tiempo que la central lleva desacoplada y enfriándose es mayor que un tiempo crítico τ_j^c . Al coste asociado a este estado se le llama coste de arranque en frío (C_j^f). De la misma forma se considera estado de arranque en caliente si el tiempo que la central lleva desacoplada y enfriándose es menor que el tiempo crítico τ_j^c . Al coste asociado a este estado se le llama coste de arranque en caliente (C_j^c). Es decir:

$$b_j(x_{jk}^d) = C_j^f \quad \text{si} \quad x_{jk}^d \geq \tau_j^c \quad (3.14)$$

$$b_j(x_{jk}^d) = C_j^c \quad \text{si} \quad x_{jk}^d < \tau_j^c \quad (3.15)$$

Los costes de arranque en frío (C_j^f) y los costes de arranque en caliente (C_j^c) se miden en pesetas. Por supuesto, el coste de arranque en frío es mayor que el coste de arranque en caliente.

2. Costes de arranque cuando se mantiene la temperatura y presión de la caldera.

Son los costes de arranque que se tienen cuando la central se ha desacoplado pero se sigue manteniendo la temperatura de trabajo. Estos costes son lineales y responden a esta expresión:

$$b_j(x_{jk}^d) = C_j^t F_j x_{jk}^d + C_j^c \quad (3.16)$$

donde:

- $b_j(x_{jk}^d)$ es el coste de arranque de la central j ,
- x_{jk}^d es el tiempo (horas) que lleva la central j desacoplada (y, en este caso, enfriándose) en el subperiodo k ,
- C_j^t es el consumo por el mantenimiento de la caldera (Termia/h),
- F_j es el coste del combustible, y
- C_j^c es el coste de arranque en caliente (el superíndice c indica *caliente*) de la central j (Pta),

Costes de parada

Estos costes son típicamente constantes para cada central y representan el desaprovechamiento de combustible, y la necesidad de mano de obra que conlleva desacoplar una central. Son generalmente mucho más pequeños que los costes de arranque.

3.4 El equipo de generación hidráulica

Como ya se ha indicado en la introducción a este capítulo, las características diferenciales del equipo de generación hidráulico son dos:

- Por un lado existe un acoplamiento espacio-temporal entre las centrales de una misma cuenca hidráulica. Por ello, el modelado de una cuenca debe incluir la topología de la misma y resulta más complejo que el modelado de una central térmica.
- Por otra parte, se trata de centrales de energía limitada (por ser limitado el volumen de agua embalsada). Ello implica que hay que gestionar de forma adecuada la energía (o el

agua turbinada y bombeada) de forma que la producción sea mayor en los momentos en que el precio de la electricidad sea más alto (con el objetivo de obtener mayores beneficios).

Existen dos tipos de centrales hidráulicas:

- Centrales hidráulicas de agua fluyente. Estas centrales no tiene embalse asociado y por tanto no tienen la posibilidad de acumular agua (o dicho de otro modo, todo el agua que llega a la central ha de ser turbinada o vertida).
- Centrales hidráulicas ligadas a embalse. Estas centrales están asociadas a embalses y por tanto tienen la posibilidad de almacenar agua.

Una cuenca hidráulica se modela como una serie de nodos interconectados formando una red. Los nodos asociados a centrales de agua fluyente se llaman nodos simples y los nodos asociados a las centrales asociadas a embalse se llaman nodos de acumulación.

3.4.1 Restricciones del equipo hidráulico

Una cuenca hidráulica se modela utilizando las siguientes restricciones

- Ecuaciones de la conservación del agua. Estas ecuaciones se aplican a todos los embalses de la cuenca y en todos los subperiodos del horizonte temporal analizado. Se formulan a continuación.

$$x_{l(i)k+1} = x_{l(i)k} - u_{l(i)k}l_k - s_{l(i)k} + w_{l(i)k} + \sum_{m(l(i)) \in m(l(i))} \left(u_{m(l(i)),k-\tau_{m(l(i))}} l_k + s_{m(l(i)),k-\tau_{m(l(i))}} \right) \quad \forall l(i) \in i \quad \forall k \quad (3.17)$$

- Ecuaciones que determinan la potencia generada. La potencia generada por una central hidráulica es una función no lineal del caudal turbinado y de la altura (y por tanto del volumen) del embalse, esto es:

$$p_{l(i)k} = \rho_{l(i)}(u_{l(i)k}, x_{l(i)k}) \quad \forall l(i) \in i \quad \forall k \quad (3.18)$$

En turbinas Kaplan y Francis la potencia hidráulica útil W_u producida por una central se formula de la siguiente forma [81], [87]:

$$W_u = K_1 u h - K_2 u^2 \quad (3.19)$$

donde K_1 y K_2 son constantes, u representa el caudal turbinado y h es la altura efectiva (nótese que existe una relación directa entre la altura y el volumen del embalse). El término

$K_2 u^2$ representa las pérdidas debidas a la fricción. Estas pérdidas son consecuencia de la viscosidad del agua.

En el modelo que se ha implementado se han despreciado las pérdidas debidas a la fricción. También se ha despreciado la influencia de la altura del embalse. En horizontes temporales de corto plazo las variaciones en las alturas de los embalses resultan normalmente poco significativas. Por eso, en estos modelos, es una simplificación aceptable suponer las alturas de los embalses constantes y como consecuencia suponer que la potencia generada es sólo una función lineal del caudal generado. Con esta simplificación, cada subproblema hidráulico (capítulo 4) resulta un problema de programación lineal con las ventajas en cuanto a velocidad de resolución que esto conlleva.

Así pues la potencia generada por cada central hidráulica se ha modelado a través de la siguiente función lineal:

$$p_{l(i)k} = \varrho_{l(i)} u_{l(i)k} \quad (3.20)$$

donde $\varrho_{l(i)}$ es una constante de proporcionalidad asociada a cada central l de cada cuenca hidráulica i .

No obstante, el método de resolución basado en técnicas de relajación lagrangiana propuesto permite modelar de forma rigurosa cada cuenca hidráulica, teniendo en cuenta todo tipo de no linealidades y la influencia de la altura del embalse en la potencia producida. La consecuencia de complicar el modelado hidráulico es que hacen falta técnicas más elaboradas o herramientas más potentes para resolver cada subproblema hidráulico. El estudio detallado de los subproblemas hidráulicos y los procedimientos de resolución no ha sido el objetivo de este trabajo de investigación. Por este motivo, y dado que las simplificaciones realizadas son suficientemente buenas en horizontes temporales de corto plazo, se ha supuesto constante la altura del embalse y se ha considerado, en la implantación informática desarrollada, la potencia hidráulica una función lineal del caudal turbinado.

- Límites inferior y superior en el caudal turbinado, es decir:

$$\underline{u}_{l(i)} \leq u_{l(i)k} \leq \overline{u}_{l(i)} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall k \quad (3.21)$$

- Límites inferior y superior en el volumen del embalse, es decir:

$$\underline{x}_{l(i)} \leq x_{l(i)k} \leq \overline{x}_{l(i)} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall k \quad (3.22)$$

- Límite del volumen vertido. El volumen de agua vertido, siempre positivo o nulo, debe ser menor que el volumen máximo del embalse, es decir:

$$0 \leq s_{l(i)k} \leq \overline{x}_{l(i)} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall k \quad (3.23)$$

- Condiciones iniciales y finales de los volúmenes de los embalses de la cuenca, es decir:

$$x_{l(i)1} = x_{l(i)}^0 \quad \forall l(i) \in i \quad (3.24)$$

$$\underline{x}_{l(i)T} \leq x_{l(i)T+1} \leq \bar{x}_{l(i)T} \quad \forall l(i) \in i \quad (3.25)$$

3.4.2 Ampliación del modelado: inclusión de centrales de bombeo

Para incluir centrales de bombeo (es decir, centrales con capacidad para turbinar o bombear), basta con modificar las ecuaciones de la conservación del agua (3.17) y las ecuaciones que determinan la potencia total producida por la central hidráulica (3.20).

Así, en el caso de incluirse centrales de bombeo, las ecuaciones de la continuidad del agua (3.17), se sustituyen por las siguientes:

$$x_{l(i)k+1} = x_{l(i)k} - u_{l(i)k}l_k - s_{l(i)k} + w_{l(i)k} - b_{l(i)k}l_k + \sum_{n_{l(i)} \in n_{l(i)}} b_{n_{l(i)},k-\tau_{n_{l(i)}}}l_k + \sum_{m(l(i)) \in m(l(i))} \left(u_{m(l(i)),k-\tau_{m(l(i))}}l_k + s_{m(l(i)),k-\tau_{m(l(i))}} \right) \quad \forall l(i) \in i \quad \forall k \quad (3.26)$$

y las ecuaciones que determinan la potencia neta hidráulica producida por la central 3.20 se sustituyen por las siguientes:

$$p_{l(i)k}^t = \rho_{l(i)}^t(u_{l(i)k}, x_{l(i)k}) \quad \forall l(i) \in i \quad \forall k \quad (3.27)$$

$$p_{l(i)k}^b = \rho_{l(i)}^b(b_{l(i)k}, x_{l(i)k}) \quad \forall l(i) \in i \quad \forall k \quad (3.28)$$

$$p_{l(i)k} = p_{l(i)k}^t - p_{l(i)k}^b \quad \forall l(i) \in i \quad \forall k \quad (3.29)$$

donde

$n_{l(i)}$ es el subíndice que hace referencia a las centrales de bombeo situadas aguas abajo de la central l de la cuenca i ;

- $n_{l(i)}$ es el conjunto de centrales de bombeo situadas aguas abajo de la central l la cuenca hidráulica i ;

$b_{l(i)k}$ es el caudal de agua bombeado por la central de bombeo l de la cuenca i durante el subperiodo k (m^3/s);

$p_{l(i)k}^t$ es la potencia hidráulica turbinada por la central de bombeo l de la cuenca i en el subperiodo k (MW);

$p_{l(i)k}^b$ es la potencia hidráulica bombeada por la central de bombeo l de la cuenca i en el subperiodo k (MW);

$\rho_{l(i)}^t(u_{l(i)k}, x_{l(i)k})$ es una función no lineal del caudal de agua turbinada por la central de bombeo l de la cuenca i en el subperiodo k ($u_{l(i)k}$) y del volumen de agua en el embalse asociado a la central l de la cuenca i en el periodo considerado k ($x_{l(i)k}$). Define la potencia turbinada por la central de bombeo l de la cuenca i en el subperiodo k ;

$\rho_{l(i)}^b(u_{l(i)k}, x_{l(i)k})$ es una función no lineal del caudal de agua bombeado por la central de bombeo l de la cuenca i en el subperiodo k ($u_{l(i)k}$) y del volumen de agua en el embalse asociado a la central l de la cuenca i en el periodo considerado k ($x_{l(i)k}$). Define la potencia bombeada por la central de bombeo l de la cuenca i en el subperiodo k ;

$p_{l(i)k}$ es la potencia neta producida por la central de bombeo l de la cuenca i en el subperiodo k (MW).

Lógicamente, es anti-económico para una central de bombeo turbinar con algunos de sus grupos y bombear con otros al mismo tiempo. Para evitar que el modelo pueda producir este resultado se pueden incluir variables enteras en el modelo que no permitan que algunos grupos de la central bombeen mientras que otros turbinan ni viceversa. En algunos modelos para evitar este conflicto se decide a priori en qué subperiodos se turbinan y en cuáles se bombea. De acuerdo con esto y en la anterior formulación si $p_{l(i)k}^t$ es mayor que cero entonces $p_{l(i)k}^b$ es igual a cero (es decir si en el subperiodo k la central de bombeo l de la cuenca i turbinan, entonces no puede bombear en ese mismo subperiodo) y análogamente si $p_{l(i)k}^b$ es mayor que cero, entonces $p_{l(i)k}^t$ es igual a cero (o de otro modo, si en el subperiodo k la central de bombeo l de la cuenca i bombea, entonces no puede turbinar en ese mismo subperiodo).

En la implantación informática que se ha realizado no se han incluido centrales de bombeo.

3.5 Restricciones de carga

Las restricciones de carga son las que ligan los equipos térmico e hidráulico. Por eso también se les llama restricciones globales o restricciones de complicación.

Las restricciones de carga consideradas en los modelos de coordinación hidrotérmica son las siguientes:

- Restricciones de demanda.

Son las restricciones de carga más importantes ya que el objetivo de un sistema de energía eléctrica es precisamente satisfacer la demanda en todos los subperiodos del horizonte temporal analizado. Se formulan a continuación.

$$\sum_{j \in J} t_{jk} + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k} = D_k \quad \forall k \quad (3.30)$$

- Restricciones de reserva rodante.

Con ellas se pretende que el suministro de energía tenga un adecuado índice de fiabilidad. El objetivo de estas restricciones es que el sistema esté preparado para hacer frente a un aumento brusco de la demanda, a la avería de algún generador o a cualquier otro fallo que pueda ocurrir. El valor asignado a la reserva rodante depende de la experiencia del operador del sistema. Se suele considerar un buen margen de reserva rodante el 10% de la demanda esperada en cada subperiodo. En ocasiones se le asigna a la reserva rodante un valor igual a la mayor potencia de todas las centrales térmicas del sistema.

En el capítulo 4 (apartado 4.3) se presentan y comentan varios tipos de restricciones de regulación. En cualquier caso, de forma general, se pueden formular de la siguiente manera:

$$\sum_{j \in J} r_{jk}^t + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} r_{l(i)k}^h \geq R_k \quad \forall k \quad (3.31)$$

donde el superíndice t hace referencia a las centrales térmicas y el superíndice h a las centrales hidráulicas.

- Restricciones de demanda mínima.

Estas restricciones se ocupan de que la suma de potencias de mínimo técnico de las centrales acopladas sea menor, en todos los subperiodos, que la demanda. Es decir:

$$\sum_{j \in J} p_j v_{jk} \leq D_k \quad \forall k \quad (3.32)$$

- Restricciones de regulación.

Estas restricciones procuran que, en el control en tiempo real, el sistema sea capaz de igualar la producción a la demanda. Así, si la demanda resulta ser algo mayor que la prevista, se deberá aumentar la producción y para que esto sea posible deberá haber “hueco” suficiente de potencia hacia arriba (entendiendo como “hueco” hacia arriba, la diferencia entre la suma de las potencias máximas de las centrales acopladas y las potencias producidas por las mismas). A estas restricciones se las llama restricciones de regulación hacia arriba.

De forma equivalente, las restricciones de regulación hacia abajo se ocupan de que haya suficiente “hueco” de potencia hacia abajo (entendiendo como “hueco” hacia abajo,

la diferencia entre la suma de las potencias producidas por las centrales acopladas y las potencias de mínimo técnico hacia abajo) por si, en el control en tiempo real, la demanda resulta ser menor que la prevista.

En el capítulo 4 (apartado 4.3) se presentan y comentan varios tipos de restricciones de regulación. En cualquier caso, de forma general, se pueden formular de la siguiente manera las restricciones de regulación hacia arriba:

$$\sum_{j \in J} r_{jk}^{at} + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} r_{l(i)k}^{ah} \geq A_k \quad \forall k \quad (3.33)$$

y de forma análoga las restricciones de regulación hacia abajo:

$$\sum_{j \in J} r_{jk}^{bt} + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} r_{l(i)k}^{bh} \geq B_k \quad \forall k \quad (3.34)$$

donde el superíndice *at* alude a la regulación hacia arriba de las centrales térmicas y el superíndice *ah* a la regulación hacia arriba de las centrales hidráulicas y, de forma análoga, el superíndice *bt* hace referencia a la regulación hacia abajo de las centrales térmicas y el superíndice *bh* a la regulación hacia abajo de las centrales hidráulicas.

Los modelos de coordinación hidrotérmica en general emplean el modelo de red de nudo único. Es decir, se considera que toda la generación y toda la demanda se concentra en un único nudo (y por tanto no se modela la red de transporte). Por ello, en la lista anterior de restricciones de carga no se han considerado restricciones relacionadas con la red de transporte.

Todos los modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo incluyen restricciones de demanda y de reserva rodante para cada subperiodo del horizonte temporal analizado.

Las restricciones de demanda mínima no se suelen incluir a no ser que un número elevado de centrales del equipo de generación térmico tenga un mínimo técnico alto y por tanto exista el riesgo de que se produzcan infactibilidades en las restricciones de demanda.

Las restricciones de regulación se podrían incluir en aquellos modelos de coordinación hidrotérmica empleados por el operador del sistema en un entorno desregulado. No se ha encontrado en la literatura ningún modelo de coordinación hidrotérmica en el corto plazo que incluya restricciones de regulación hacia arriba y hacia abajo.

3.6 Planteamiento del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo

El problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo se plantea como un problema de optimización en el que se minimizan los costes de explotación sujeto a satisfacer las restricciones

que modelan el funcionamiento del equipo de generación térmico, satisfacer las restricciones que modelan el funcionamiento del equipo de generación hidráulico y satisfacer las restricciones de carga.

El coste de generación de las centrales hidráulicas es despreciable frente al coste de generación de las centrales térmicas y por ello el coste de explotación total es igual al coste de explotación del equipo térmico.

A continuación se plantea el problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo en su forma más completa. Habitualmente las restricciones de carga consideradas son únicamente las restricciones de demanda y reserva rodante.

Minimizar _{(t,v,y,z,x,u,h,s)}

$$f(t, v, y, z) = \sum_{j \in J} \sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] \quad (3.35)$$

sujeto a

$$\underline{p}_j v_{jk} \leq t_{jk} \leq \bar{p}_j v_{jk} \quad \forall j \quad \forall k \quad (3.36)$$

$$t_{jk+1} - t_{jk} \leq r_j^s \quad \forall j \quad k = 1, \dots, T-1 \quad (3.37)$$

$$t_{jk} - t_{jk+1} \leq r_j^b \quad \forall j \quad k = 1, \dots, T-1 \quad (3.38)$$

$$y_{j1} - z_{j1} = v_{j1} - v_{j0} \quad \forall j \quad (3.39)$$

$$y_{jk} - z_{jk} = v_{jk} - v_{jk-1} \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (3.40)$$

$$\left(\tilde{s}_{j0} - T_j^f \right) (v_{j0} - v_{j1}) \geq 0 \quad \forall j \quad (3.41)$$

$$\left(\tilde{s}_{jk-1} - T_j^f \right) (v_{jk-1} - v_{jk}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (3.42)$$

$$\left(\tilde{s}_{j0} + T_j^p \right) (v_{j1} - v_{j0}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (3.43)$$

$$\left(\tilde{s}_{jk-1} + T_j^p \right) (v_{jk} - v_{jk-1}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (3.44)$$

$$p_{l(i)k} = \rho_{l(i)}(u_{l(i)k}, x_{l(i)k}) \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (3.45)$$

$$x_{l(i)k+1} = x_{l(i)k} - u_{l(i)k} l_k - s_{l(i)k} + w_{l(i)k} + \sum_{m(l(i)) \in m(l(i))} \left(u_{m(l(i)),k-\tau_{m(l(i))}} l_k + s_{m(l(i)),k-\tau_{m(l(i))}} \right) \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (3.46)$$

$$\underline{u}_{l(i)} \leq u_{l(i)k} \leq \bar{u}_{l(i)vk} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (3.47)$$

$$\underline{x}_{l(i)} \leq x_{l(i)k} \leq \bar{x}_{l(i)v} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (3.48)$$

$$0 \leq s_{l(i)k} \leq \bar{x}_{l(i)} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (3.49)$$

$$x_{l(i)1} = x_{l(i)}^0 \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad (3.50)$$

$$\underline{x}_{l(i)T} \leq x_{l(i)T+1} \leq \bar{x}_{l(i)T} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad (3.51)$$

$$\sum_{j \in J} t_{jk} + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k} = D_k \quad \forall k \quad (3.52)$$

$$\sum_{j \in J} r_{jk}^t + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} r_{l(i)k}^h \geq R_k \quad \forall k \quad (3.53)$$

$$\sum_{j \in J} p_j v_{jk} \leq D_k \quad \forall k \quad (3.54)$$

$$\sum_{j \in J} r_{jk}^a \geq A_k \quad \forall k \quad (3.55)$$

$$\sum_{j \in J} r_{jk}^b \geq B_k \quad \forall k \quad (3.56)$$

A este problema, así planteado, se le llama Problema Primal (PP).

Como ya se ha indicado (apartado (3.4.2), para incluir centrales de bombeo hay que sustituir del problema anterior (ecuaciones (3.35)-(3.56)) las ecuaciones (3.46) por las ecuaciones (3.26) y las ecuaciones (3.45) por las ecuaciones (3.27)-(3.29).

Capítulo 4

Solución mediante técnicas de relajación lagrangiana

4.1 Introducción

El problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo se plantea como un problema de optimización no lineal entera-mixta y de gran dimensión, para sistemas eléctricos de tamaño real. Dado el tamaño y la complejidad del problema resulta computacionalmente imposible resolverlo en un solo bloque sin hacer drásticas simplificaciones en el modelado. Se requieren por ello aplicar técnicas de descomposición. Resultan particularmente atractivas las técnicas de relajación o de descomposición lagrangiana. Otras técnicas de descomposición que aparecen en la literatura son la descomposición de Benders y la descomposición primal. En el capítulo 1 (apartado 1.3.1) se describen estos métodos de descomposición alternativos a la relajación lagrangiana indicando cuáles son sus inconvenientes.

El método de la relajación lagrangiana [70], [42], [38], [39] se basa en el planteamiento de un problema dual del problema que se quiere resolver o problema primal. Si el problema primal es convexo, entonces el valor de la función objetivo en el minimizador del problema primal coincide con el valor de la función objetivo en el maximizador del problema dual. Si no lo es, el valor de la función objetivo en el maximizador del problema dual constituye una cota inferior para el valor de la función objetivo en el minimizador del problema primal. A la diferencia entre el valor óptimo de la función objetivo del problema primal y el valor óptimo de la función objetivo del problema dual se le llama *agujero de dualidad*. A medida que aumenta el tamaño del problema el agujero de dualidad disminuye [33], [11], [36].

En [36], Ferreira demuestra que el agujero de dualidad que resulta al aplicar técnicas de relajación lagrangiana a la resolución del problema de la programación horaria de centrales térmicas disminuye al aumentar el tamaño del problema (la demostración la hace suponiendo que no hay

restricciones de tiempos mínimos). En [33] se establece que el agujero de dualidad disminuye al aumentar el tamaño del problema. En [11] se demuestra que, bajo ciertas hipótesis simplificadoras, el agujero de dualidad disminuye al aumentar el número de centrales. Empíricamente se ha demostrado en multitud de ocasiones que el agujero de dualidad disminuye al aumentar el tamaño del problema.

El método de la relajación lagrangiana resulta particularmente atractivo cuando en la formulación del problema primal existen algunas restricciones que complican la resolución del problema. Se define un problema dual que carece de estas restricciones y cuya resolución es más sencilla que la del problema primal.

En el planteamiento del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo (problema primal), las restricciones de carga (capítulo 3) son las que complican la resolución del problema ya que ligan, en cada subperiodo del horizonte temporal analizado, las variables asociadas a las centrales del equipo generador. Utilizando la técnica de la relajación lagrangiana se incorporan en la función objetivo las restricciones de complicación mediante los multiplicadores de Lagrange. Al problema de optimización que resulta se le llama *Problema Primal Relajado* (PPR). Las variables de optimización del problema primal son las mismas que las variables de optimización del problema primal relajado ya que los multiplicadores de Lagrange, que forman parte de su función objetivo, son parámetros para el problema primal relajado.

El problema dual del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo se plantea como el problema de la maximización del problema primal relajado. Las variables de optimización del problema dual son los multiplicadores de Lagrange. El problema dual se resuelve a través de un proceso iterativo que consiste en resolver el problema primal relajado para ciertos valores de los multiplicadores de Lagrange y en actualizar los valores de estos multiplicadores hasta que se alcance la convergencia. Por ello, los procedimientos de resolución del problema dual se identifican con los procedimientos de actualización de multiplicadores.

El problema primal relajado se resuelve de forma fácil y eficiente ya que se descompone, de forma natural, en un subproblema por cada central térmica y un subproblema por cada cuenca hidráulica. Por ello también se le llama *Problema Primal Descompuesto* (PPD). Así, mediante la técnica de la relajación lagrangiana, se pasa de la resolución de un problema muy complejo y de gran dimensión a la resolución de muchos problemas de pequeño tamaño y de estructuras homogéneas (los subproblemas térmicos tienen estructuras similares entre sí y los subproblemas hidráulicos también presentan estructuras parecidas). Esto permite poder aplicar a cada tipo de subproblema la técnica de optimización que mejor se adapte a su estructura, de forma que el proceso de optimización sea eficiente.

La descomposición del problema primal relajado en subproblemas permite modelar de forma muy rigurosa cada central térmica y cada cuenca hidráulica, incluyendo cualquier tipo de peculiaridad que se considere necesaria en cualquier tipo de central. Además, se pueden aplicar de forma natural técnicas de computación paralela. Estas son ventajas fundamentales de las técnicas de relajación (o descomposición) lagrangiana.

Además de las ventajas que se derivan de la descomposición del problema primal relajado en subproblemas, otro de los atractivos de la aplicación del método de la relajación lagrangiana es que las variables del problema dual (multiplicadores de Lagrange) tienen un significado económico claro que resulta de gran utilidad tanto para el centro de control de un sistema de energía eléctrica centralizado como para los operadores del mercado y del sistema de un entorno liberalizado o desregulado (apartado 4.4).

El único inconveniente de la aplicación de técnicas de relajación lagrangiana para resolver el problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo es que, debido a la existencia de variables enteras en la formulación del problema primal, se trata de un problema de optimización no convexo y por tanto la solución óptima del problema dual no coincide con la solución óptima del problema primal sino que es una cota inferior. No obstante, la solución óptima del problema dual está muy próxima a la solución óptima del problema primal en sistemas eléctricos de tamaño realista [86], [131]. Aplicando heurísticos y partiendo de la solución óptima del problema dual (apartado 4.2.3 y capítulo 7), puede encontrarse fácilmente una solución factible para el problema primal cuyo coste se encuentre suficientemente próximo al valor óptimo de la función objetivo del problema dual. Precisamente otra de las ventajas del uso de técnicas de relajación lagrangiana es que se tiene una medida de la calidad de la solución primal encontrada: la diferencia relativa entre coste de la mejor solución primal conseguida y coste de la mejor solución dual encontrada. Esta medida de calidad es una cota superior del agujero de dualidad.

Este capítulo se estructura como se describe a continuación. En el apartado 4.2 se formulan los problemas primal y dual de forma general y se describe el procedimiento de resolución del problema primal mediante técnicas de relajación lagrangiana. En el apartado 4.3 se presentan varios modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo que se diferencian en las restricciones de carga consideradas, se formulan los correspondientes problemas duales y se especifican los algoritmos de resolución de estos problemas. En el apartado 4.4 se muestra la utilidad del algoritmo propuesto tanto en los tradicionales sistemas de energía eléctrica centralizados como en los emergentes entornos liberalizados.

4.2 El método de la relajación lagrangiana aplicado al problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo. Formulación general

En este apartado se formula de forma general el problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo (o problema primal) y el problema dual asociado, indicándose el método de resolución del problema dual. El planteamiento es general en cuanto a que no se especifica cuáles son las restricciones de complicación (o globales) del problema primal sino que se clasifican en restricciones de igualdad y en restricciones de desigualdad.

Como el problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo no es convexo, una vez encontrada la solución del problema dual no queda resuelto el problema primal. Por tanto, hace falta algún procedimiento adicional para encontrar la solución del problema primal a partir de la solución del problema dual.

En el apartado 4.2.1 se formula el problema primal. En el apartado 4.2.2 se plantea el problema dual y se describe el algoritmo para su resolución. En el apartado 4.2.3 se presenta el procedimiento para resolver el problema primal (a partir de la solución del problema dual).

4.2.1 Planteamiento del problema: Problema Primal

El problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo se plantea como un problema de optimización no diferenciable en el que se minimizan los costes de explotación del sistema respetando las restricciones del equipo térmico, del equipo hidráulico y de carga. A este problema lo llamaremos problema primal (PP). Se formula de la siguiente forma:

$$\text{Minimizar}_{\mathcal{Z}=(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \quad f(\mathcal{X}) = \sum_{j \in \mathcal{J}} f_j(\mathcal{X}_j) \quad (4.1)$$

sujeto a

$$s_j(\mathcal{X}_j) \leq 0 \quad (4.2)$$

$$s_i(\mathcal{Y}_i) \leq 0 \quad (4.3)$$

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} h_j(\mathcal{X}_j) + \sum_{i \in \mathcal{I}} h_i(\mathcal{Y}_i) = H \quad (4.4)$$

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} g_j(\mathcal{X}_j) + \sum_{i \in \mathcal{I}} g_i(\mathcal{Y}_i) \geq G \quad (4.5)$$

donde el vector de variables $\mathcal{Z}$ se descompone en un vector $\mathcal{X}$ que contiene las variables que modelan el equipo térmico y un vector $\mathcal{Y}$ que contiene las variables que modelan el equipo hidráulico.

El vector $\mathcal{X}$ está formado por J subvectores (donde J es el número de centrales térmicas) i.e. $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_J)$. Cada subvector $\mathcal{X}_j$ contiene el conjunto de variables que modelan la central térmica j .

El vector $\mathcal{Y}$ está formado por I subvectores (donde I es el número de cuencas hidráulicas) i.e. $\mathcal{Y} = (\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \dots, \mathcal{Y}_I)$. Cada subvector $\mathcal{Y}_i$ contiene el conjunto de variables que modelan la cuenca hidráulica i .

La función objetivo (4.1) representa el coste total de explotación del sistema que es igual al coste total de explotación del equipo térmico, ya que sus costes de explotación son mucho mayores que los costes de explotación del equipo hidráulico (y por ello se desprecian estos últimos). La expresión detallada de la función objetivo puede encontrarse en la ecuación (3.35).

Las ecuaciones (4.2) y (4.3) son las restricciones que modelan los equipos térmico e hidráulico respectivamente. Se les llama restricciones locales porque no acoplan los equipos térmico e hidráulico. Existe un grupo de restricciones locales por cada central térmica (ecuaciones (3.36)-(3.44)) y un grupo de restricciones locales por cada cuenca hidráulica (ecuaciones (3.45)-(3.51)), de forma que no existe, en estas restricciones, ninguna relación entre distintas centrales térmicas ni entre distintas centrales hidráulicas pertenecientes a distintas cuencas, ni entre centrales térmicas y centrales hidráulicas.

Las ecuaciones (4.4) y (4.5) son las restricciones de carga. Se les llama restricciones globales porque acoplan las variables relacionadas con las centrales térmicas e hidráulicas. Las restricciones de carga se dividen en dos grupos: restricciones de igualdad (4.4) y restricciones de desigualdad (4.5).

Las restricciones de igualdad (4.4) son las restricciones de demanda en todos los subperiodos del horizonte temporal analizado (ecuaciones (3.52)). H , $h_j(x_j)$ y $h_i(y_i)$ son vectores de dimensión igual al número de subperiodos del horizonte temporal analizado.

Las restricciones de desigualdad (4.5) incluyen típicamente las restricciones de reserva rodante en cada subperiodo del horizonte temporal analizado (ecuaciones (3.53)). En algunos modelos se incluyen además restricciones que impiden la infactibilidad en horas valle por excesivo número de centrales térmicas acopladas, también llamadas restricciones de demanda mínima (ecuaciones (3.54)) y/o restricciones de regulación (ecuaciones (3.55)-(3.56)) en cada subperiodo del horizonte temporal analizado. G , $g_j(x_j)$ y $g_i(y_i)$ son vectores de dimensión igual número de subperiodos del horizonte temporal analizado o múltiplo de este número.

Las restricciones de carga (ecuaciones (4.4) y (4.5)) son las que complican la resolución del problema ya que acoplan todas las centrales térmicas y todas las centrales hidráulicas. Estas

restricciones son las que impiden que el problema primal se pueda descomponer.

4.2.2 El problema dual

Utilizando la técnica de la relajación lagrangiana se define un vector de multiplicadores λ asociado al vector de restricciones globales de igualdad (ecuación (4.4)) y un vector de multiplicadores μ asociado al vector de restricciones globales de desigualdad (ecuación (4.5)). Dualizando las restricciones globales (i.e. incorporándolas en la función objetivo mediante los multiplicadores de Lagrange asociados a ellas) se formula la función lagrangiana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \lambda, \mu) = & \sum_{j \in \mathcal{J}} f_j(\mathcal{X}_j) + \lambda^\top \left(H - \sum_{j \in \mathcal{J}} h_j(\mathcal{X}_j) - \sum_{i \in \mathcal{I}} h_i(\mathcal{Y}_i) \right) + \\ & \mu^\top \left(G - \sum_{j \in \mathcal{J}} g_j(\mathcal{X}_j) - \sum_{i \in \mathcal{I}} g_i(\mathcal{Y}_i) \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

La función dual $\phi(\lambda, \mu)$ para cada coordenada (λ, μ) , contiene el resultado de minimizar, en variables primales, la función lagrangiana $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \lambda, \mu)$ (ecuación (4.6)) sujeto a satisfacer las restricciones locales de los equipos térmico e hidráulico (ecuaciones (4.2) y (4.3)). Se formula a continuación:

$$\phi(\lambda, \mu) = \underset{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}{\text{Minimizar}} \quad \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \lambda, \mu) \quad (4.7)$$

sujeto a

$$s_j(\mathcal{X}_j) \leq 0 \quad (4.8)$$

$$s_i(\mathcal{Y}_i) \leq 0 \quad (4.9)$$

Al problema que hay que resolver para evaluar la función dual en cada coordenada (λ, μ) se le llama *Problema Primal Relajado*. Esto es:

$$\underset{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}{\text{Minimizar}} \quad \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \lambda, \mu) \quad (4.10)$$

sujeto a

$$s_j(\mathcal{X}_j) \leq 0 \quad (4.11)$$

$$s_i(\mathcal{Y}_i) \leq 0 \quad (4.12)$$

Sustituyendo la expresión de la función lagrangiana (ecuación (4.6)) resulta:

$$\underset{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}{\text{Minimizar}}$$

$$\lambda^T H + \mu^T G + \sum_{j \in J} \left[f_j(\mathcal{X}_j) - \lambda^T h_j(\mathcal{X}_j) - \mu^T g_j(\mathcal{X}_j) \right] - \sum_{i \in I} \left[\lambda^T h_i(\mathcal{Y}_i) + \mu^T g_i(\mathcal{Y}_i) \right] \quad (4.13)$$

sujeito a

$$s_j(\mathcal{X}_j) \leq 0 \quad \forall j \quad (4.14)$$

$$s_i(\mathcal{Y}_i) \leq 0 \quad \forall i \quad (4.15)$$

y extrayendo del anterior problema de optimización los términos que no dependen de las variables primales, se formula la función dual de la siguiente forma:

$$\phi(\lambda, \mu) = \lambda^T H + \mu^T G + d(\lambda, \mu), \quad (4.16)$$

donde $d(\lambda, \mu)$ es el valor de la función objetivo en el minimizador del siguiente problema de optimización (que es el problema planteado en las ecuaciones (4.13)-(4.14) en el que se han eliminado de la función objetivo los términos que no dependen de las variables primales):

Minimizar_($\mathcal{X}, \mathcal{Y}$)

$$\sum_{j \in J} \left[f_j(\mathcal{X}_j) - \lambda^T h_j(\mathcal{X}_j) - \mu^T g_j(\mathcal{X}_j) \right] - \sum_{i \in I} \left[\lambda^T h_i(\mathcal{Y}_i) + \mu^T g_i(\mathcal{Y}_i) \right] \quad (4.17)$$

sujeito a

$$s_j(\mathcal{X}_j) \leq 0 \quad \forall j \quad (4.18)$$

$$s_i(\mathcal{Y}_i) \leq 0 \quad \forall i \quad (4.19)$$

Este problema de optimización (ecuaciones (4.17)-(4.19)) se descompone de forma natural (y por tanto se puede paralelizar) en:

- un subproblema por cada central térmica
- un subproblema por cada cuenca hidráulica

Debido a esta descomposición natural al problema primal relajado también se le llama *Problema Primal Descompuesto* (PPD).

El subproblema asociado a la central térmica j se formula de la siguiente manera:

$$\text{Minimizar}_{\mathcal{X}_j} \quad f_j(\mathcal{X}_j) - \lambda^T h_j(\mathcal{X}_j) - \mu^T g_j(\mathcal{X}_j) \quad (4.20)$$

sujeito a

$$s_j(\mathcal{X}_j) \leq 0 \quad (4.21)$$

Cada subproblema térmico resulta de muy pequeña dimensión lo que permite modelar muy en detalle cada central térmica y aplicar la técnica de optimización que resulte más adecuada. Típicamente se utilizan técnicas de programación dinámica. En el capítulo 5 se explica de forma detallada la forma de resolución de los subproblemas térmicos.

El subproblema asociado a la cuenca hidráulica i se formula de la siguiente manera:

$$\text{Maximizar}_{\mathcal{Y}_i} \quad \lambda^T h_i(\mathcal{Y}_i) + \mu^T g_i(\mathcal{Y}_i) \quad (4.22)$$

sujeeto a

$$s_i(\mathcal{Y}_i) \leq 0 \quad (4.23)$$

Cada subproblema hidráulico también resulta de pequeña dimensión lo que permite modelar muy en detalle cada cuenca hidráulica. Los subproblemas hidráulicos presentan estructura de red. Existen técnicas de programación lineal y no lineal que resuelven de forma eficiente este tipo de problemas.

El problema dual (PD) del problema original o primal (PP) (ecuaciones (4.1)-(4.5)) es el resultado de maximizar la función dual. Se formula de la siguiente manera:

$$\text{Maximizar}_{(\lambda, \mu)} \quad \phi(\lambda, \mu) \quad (4.24)$$

sujeeto a

$$\mu \geq 0 \quad (4.25)$$

La resolución del problema dual (ecuaciones (4.24)-(4.25)) necesita de la resolución del problema primal relajado. El problema dual se resuelve de forma algorítmica. El algoritmo de resolución del problema dual es el siguiente:

Paso 1 Se inicializa el vector de multiplicadores (λ, μ) .

Paso 2 Se evalúa la función dual $\phi(\lambda, \mu)$ (ecuación (4.16)) para el valor del vector de multiplicadores de la iteración actual. La evaluación de la función dual requiere la resolución del problema primal relajado y por tanto se resuelve un subproblema por cada central térmica (ecuaciones (4.20)-(4.21)) y un subproblema por cada cuenca hidráulica (ecuaciones (4.22)-(4.23)).

Paso 3 Se actualiza el vector de multiplicadores siguiendo alguno de los procedimientos que se detallan en el capítulo 6. Esta actualización proporciona un paso en una dirección de ascenso del problema dual.

Paso 4 Si se cumplen los criterios de convergencia finaliza el proceso. En caso contrario se vuelve al Paso 2. Los criterios de convergencia se presentan en el capítulo 6.

4.2.3 Algoritmo de resolución del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo mediante técnicas de relajación lagrangiana

Dada la no convexidad del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo, la solución del problema dual no coincide con la solución del problema primal. De hecho la solución del problema dual puede no cumplir las restricciones de complicación (restricciones de carga) del problema primal y por tanto puede ser infactible para el problema primal.

Por ello, y una vez resuelto el problema dual, hace falta algún procedimiento adicional que obtenga una solución primal factible a partir de la solución del problema dual (que es una cota inferior para el problema primal) y de forma que su coste se encuentre próximo al valor de la función objetivo del problema dual en el maximizador. La diferencia relativa entre el coste de la solución factible del problema primal encontrada y el coste del problema dual es un indicador de la calidad de la solución encontrada.

La solución del problema primal se consigue tras tres fases [131], [35], [130], [48], [49], [50], [47], [85], [68].

Fase 1 Solución del problema dual.

Fase 2 Obtención de una solución que cumpla las restricciones globales de desigualdad del problema primal.

Fase 3 Obtención de una solución que cumpla las restricciones globales de igualdad (restricciones de demanda) mediante la ejecución de un despacho económico multiperiodo [129].

En el problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo existe una relación estrecha entre las variables enteras del problema (por ejemplo: las variables que indican el estado de acoplamiento de las centrales térmicas) y las restricciones de carga de desigualdad. Por ello, una vez conseguida, tras la ejecución de la *Fase 2*, una solución que cumpla las restricciones de desigualdad se tiene un conjunto de variables enteras factibles para el problema primal.

Las restricciones de carga de igualdad son las restricciones de demanda en cada subperiodo del horizonte temporal analizado. Fijando los valores de las variables de acoplamiento a la solución de la *Fase 2* y ejecutando un algoritmo de despacho económico multiperiodo (*Fase 3*) se obtiene una solución primal factible (i.e. que cumple las restricciones de carga de desigualdad y de igualdad).

Si la diferencia relativa entre el valor de la función objetivo de la solución primal factible encon-

trada (solución de la *Fase 3*) y el valor de la función objetivo de la solución del problema dual conseguida (solución de la *Fase 1*) es suficientemente pequeña, entonces esta solución primal factible está suficientemente próxima a la solución óptima del problema primal. La solución obtenida es, por tanto, una solución ϵ -óptima del problema primal.

Típicamente se han utilizado técnicas de subgradiente para la resolución del problema dual [86], [32], [131], [125], [99], [101], [102], [35], [85], [18], [44], [45], [47], [130], [48], [50]. Recientemente se han propuesto técnicas más elaboradas de actualización de multiplicadores [98], [78], [68], [109].

En el trabajo de investigación al que esta tesis se refiere se propone un algoritmo de coordinación hidrotérmica que sigue la anterior estructura en tres fases pero que descompone la *Fase 1* en dos etapas sucesivas. El algoritmo consta de tres fases y cuatro etapas. Se describe a continuación:

Fase 1

Etapas 1 Se resuelve el problema dual utilizando el método de reconstrucción del problema dual mediante hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos.

Etapas 2 Se refina la solución obtenida en la *Etapas 1* utilizando técnicas de subgradiente.

Fase 2

Etapas 3 Si la solución de la *Fase 2* no cumple todas las restricciones globales de desigualdad del problema primal, entonces se ejecuta un proceso iterativo en el que se aumentan únicamente los multiplicadores asociados a estas restricciones de forma proporcional a los incumplimientos y se resuelve el problema primal relajado hasta conseguir factibilidad en todas las restricciones globales de desigualdad. Al final de este proceso quedan fijadas las variables enteras del problema primal.

Fase 3

Etapas 4 Se ejecuta un algoritmo de despacho económico multiperiodo [129].

El método de solución de la *Etapas 1* (*Método de reconstrucción del problema dual mediante hiperplanos con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos*, [68]) es original de este trabajo de investigación.

La introducción de la *Etapas 2* en la *Fase 1* surge de la observación de que cerca del maximizador del problema dual, el valor de la función dual $\phi(\theta)$ apenas varía aunque sí varíe de forma relativamente significativa el valor del vector de multiplicadores θ . De otro modo, si se observa la evolución, en función del contador de iteraciones, de la *Etapas 1*, se observa que cuando el valor de la función objetivo se ha estabilizado, el valor del vector de multiplicadores aún no lo

ha hecho. Seguir iterando en la *Etapa 1* hasta conseguir estabilidad en el valor del vector de multiplicadores tiene un coste computacional muy elevado y la mejora del valor de la función objetivo es despreciable.

En un entorno centralizado de explotación de un sistema de energía eléctrica no tiene sentido perseguir la estabilidad de los multiplicadores por ser la mejora en el valor de la función objetivo despreciable y el esfuerzo computacional necesario para ello considerable. Sin embargo, si el algoritmo de coordinación hidrotérmica propuesto es la herramienta que utiliza el operador del mercado y/o el operador del sistema de un sistema de energía eléctrica desregulado, entonces los multiplicadores (que tienen un significado económico claro) deben estabilizarse para que el funcionamiento del mercado de energía eléctrica sea transparente y coherente a generadores y consumidores.

Las técnicas de optimización del problema dual basadas en el subgradiente actualizan, en cada iteración, los multiplicadores de Lagrange de forma proporcional a los incumplimientos de las restricciones globales a las que están asociados. Al ser esta actualización muy simple y dado que, tras la *Etapa 1*, el valor del vector de multiplicadores del problema dual se encuentra muy próximo al valor de dicho vector en el maximizador, se consigue, mediante la *Etapa 2*, estabilidad en el valor del vector de multiplicadores de forma muy eficiente computacionalmente.

Los multiplicadores de Lagrange, en el problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo, representan la remuneración (o un indicador de la remuneración) a las centrales de generación por producir o por acoplar potencia eléctrica. La elección del vector de multiplicadores es equivalente a la elección de las centrales destinadas a producir (aquellas que, con la remuneración correspondiente al vector de multiplicadores escogido, al menos recuperen costes). Por ello y desde el punto de vista de la transparencia y coherencia en un entorno desregulado, si el valor de la función dual en la zona próxima al maximizador apenas varía ante variaciones del valor del vector de multiplicadores, entonces se debe elegir el valor del vector de multiplicadores que minimice los incumplimientos en las restricciones globales del sistema (típicamente las restricciones de demanda y reserva rodante). Las técnicas de actualización de multiplicadores basadas en el subgradiente precisamente persiguen la disminución de los incumplimientos en las restricciones globales y por ello resulta conveniente la introducción de la *Etapa 2* en un entorno desregulado.

4.3 Varios modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo utilizando técnicas de relajación lagrangiana

En este apartado se plantean ocho modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo. Se diferencian entre sí en las restricciones de carga consideradas. Para cada uno de estos modelos se plantean el problema primal, la función lagrangiana, el problema primal relajado y la función dual. Además se formulan de forma detallada los subproblemas en que se descompone el problema primal relajado. Del análisis de los subproblemas térmicos e hidráulicos se extraen conclusiones acerca del significado económico de los multiplicadores de Lagrange.

Todos los modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo incluyen restricciones de demanda y de reserva rodante. Las restricciones de reserva rodante se pueden formular utilizando tres tipos de ecuaciones. El tipo de restricciones de reserva rodante considerado es uno de los parámetros que diferencia entre sí los distintos modelos que se plantean en este apartado.

Algunos de los modelos incluyen (además de las restricciones de demanda y reserva rodante) restricciones de demanda mínima. Los modelos más completos consideran restricciones de demanda, reserva rodante, demanda mínima y restricciones de regulación.

En el capítulo 3 se presentaron las restricciones de carga que pueden (o deben) aparecer en los modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo. Las restricciones de reserva rodante y de regulación se formularon de forma general. El objetivo de incluir restricciones de reserva rodante y de regulación en los modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo (o de programación horaria de centrales térmicas) es explotar el sistema de forma segura. Existen varias maneras de formular estas restricciones. A continuación se vuelven a formular las restricciones de demanda y demanda mínima de la misma forma como se hizo en el capítulo 3 y se presentan varios tipos de restricciones de reserva rodante y de regulación. La notación empleada se explica en el capítulo 3.

- *Restricciones de demanda*

Las restricciones de demanda siempre aparecen en todos los modelos de coordinación hidrotérmica ya que la misión de los sistemas de energía eléctrica es precisamente suministrar la demanda. Las restricciones de demanda se formulan de la siguiente manera:

$$\sum_{j \in J} t_{jk} + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k} = D_k \quad \forall k \quad (4.26)$$

Al vector de multiplicadores asociado al vector de restricciones de demanda se le denota λ . La dimensión de este vector coincide con el número de restricciones de demanda (o con el número de subperiodos del horizonte temporal analizado).

- *Restricciones de reserva rodante*

Los sistemas de energía eléctrica además de suministrar la demanda deben hacerlo con un adecuado nivel de seguridad. Para ello deben acoplar (o tener preparadas para producir) más centrales que las estrictamente necesarias para satisfacer la demanda prevista. Así, si alguna central falla o la demanda resulta ser más alta de la prevista, el sistema puede seguir satisfaciendo la demanda. Para poder hacer frente a circunstancias inesperadas como éstas, los algoritmos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo deben incluir restricciones de reserva rodante. Es importante destacar que tales restricciones sólo tratan de hacer el sistema más seguro, pero que no se trata de restricciones que haya que formular de alguna manera particular (como ocurre con las restricciones de demanda que se formulan de forma única). Es decir que se pueden establecer, en los modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo, distintos tipos de restricciones de reserva rodante. Dependiendo del tipo empleado, el sistema de energía eléctrica resultará más seguro (y por tanto más caro) o menos seguro (y por tanto más barato).

El tipo de restricciones de reserva rodante más utilizado en la literatura y por las compañías eléctricas es el más simple y el que menos protege al sistema contra la posibilidad de no suministrar toda la demanda. Estas restricciones obligan a que la suma de las potencias acopladas sea mayor que la suma de la demanda y la reserva rodante en cada periodo, es decir:

$$\sum_{j \in J} \bar{p}_j v_{jk} + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} p_{l(i)k} \geq D_k + R_k \quad \forall k \quad (4.27)$$

Otras veces se utilizan unas restricciones de reserva rodante algo más restrictivas: se constriñe a que el “hueco” de potencia (diferencia entre potencia acoplada y potencia producida) sea mayor que la reserva rodante. En estos casos las restricciones se plantean de la siguiente forma:

$$\sum_{j \in J} (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \geq R_k \quad \forall k \quad (4.28)$$

Sin embargo, a pesar de que este segundo tipo de restricciones de reserva rodante sea más preciso, podría ocurrir que en una situación imprevista (como el fallo de alguna central o la subida inesperada de la demanda) el sistema no pudiera satisfacer la demanda a pesar de que se mantuviera suficiente “hueco” de potencia, por la inercia de las centrales térmicas a variar su carga (restricciones de rampa). Por eso las restricciones de reserva rodante que de forma más fiable protegen al sistema son aquellas que tienen en cuenta la verdadera potencia que cada una de las centrales acopladas puede aportar para hacer frente a una situación imprevista: el mínimo entre el “hueco” de potencia y la rampa de subida. Así

las restricciones de reserva rodante que de forma más fiable protegen al sistema son las siguientes:

$$\sum_{j \in J} \text{Minimo} \left[\left(\bar{p}_j - t_{jk} \right) v_{jk}, r_j^s v_{jk} \right] + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} \left(\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k} \right) \geq R_k \quad \forall k \quad (4.29)$$

Este último tipo de restricciones se reformula para poderlo incluir en la función lagrangiana. Para ello se emplea una variable binaria auxiliar por cada central térmica j y cada subperiodo k que indica si la potencia que cada central j puede aportar en cada subperiodo k a la restricción de reserva rodante es el “hueco” de potencia o la rampa de subida. Así, resulta:

$$\sum_{j \in J} \left[\left(\bar{p}_j - t_{jk} \right) v_{jk} w_{jk} + r_j^s v_{jk} (1 - w_{jk}) \right] + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} \left(\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k} \right) \geq R_k \quad \forall k \quad (4.30)$$

donde w_{jk} es la variable binaria que vale 1 si $\left(\bar{p}_j - t_{jk} \right) v_{jk} \leq r_j^s v_{jk}$ y 0 en caso contrario. Sea cual sea el tipo de restricciones de reserva rodante empleado ((4.27), (4.28) o (4.29)), se denota mediante μ al vector de multiplicadores asociados a las restricciones de reserva rodante. La dimensión de este vector coincide con el número de subperiodos del horizonte temporal analizado. Nótese que en la formulación general (apartado 4.2) se ha llamado μ al vector de multiplicadores asociado a todas las restricciones de desigualdad, sin embargo por el contexto queda claro si μ representa el vector de multiplicadores asociado a todas las restricciones de desigualdad (cuando se hace referencia a la formulación general del problema de la coordinación hidrotérmica) o si representa el vector de multiplicadores asociado a las restricciones de reserva rodante (cuando se hace referencia a los modelos particulares de coordinación hidrotérmica que se presentan en este apartado).

- *Restricciones de demanda mínima*

En sistemas de energía eléctrica donde los mínimos técnicos de un número considerable de centrales sean elevados, resulta conveniente incluir, además de las restricciones de demanda y reserva rodante en cada subperiodo del horizonte temporal analizado, restricciones que impidan que la suma de los mínimos técnicos de las centrales acopladas sea mayor que la demanda. De esta forma se evita el que se puedan producir infactibilidades en las restricciones de demanda por excesivo número de centrales acopladas. Estas son las restricciones de demanda mínima. Aunque se presentaron en el capítulo 3, se vuelven a formular a continuación.

$$\sum_{j \in J} p_j v_{jk} \leq D_k \quad \forall k \quad (4.31)$$

Al vector de multiplicadores asociado al vector de restricciones de demanda mínima se le llama α . La dimensión de este vector coincide con el número de subperiodos del horizonte temporal analizado.

- *Restricciones de regulación*

La formulación del problema de la coordinación hidrotérmica resulta más completa si se consideran las restricciones de regulación (restricciones de regulación hacia arriba y restricciones de regulación hacia abajo). Las restricciones de regulación son la que permiten que, en el control en tiempo real, la generación se pueda igualar a la demanda. Así, las restricciones de regulación hacia arriba son las que permiten que el equipo generador conjunto tenga capacidad para poder aumentar la producción, si la demanda en el control en tiempo real, sube y las restricciones de regulación hacia abajo son las que permiten que el equipo generador conjunto tenga capacidad para poder disminuir la producción, si la demanda en el control en tiempo real, baja. Es decir, las restricciones de regulación hacia arriba (o hacia abajo) son las que obligan a que haya suficiente “hueco” hacia arriba (o hacia abajo) para poder aumentar (o disminuir) la producción, si fuera necesario, en el control en tiempo real.

Las restricciones de regulación se pueden incluir en modelos muy completos de sistemas eléctricos en entornos centralizados o bien en los modelos que utilizan los operadores del sistema en entornos desregulados o liberalizados (apartado 4.4).

Igual que ocurre con las restricciones de reserva rodante, las restricciones de regulación no son restricciones que haya que formular de una forma particular (como ocurre con las restricciones de demanda o de demanda mínima). Se trata de restricciones cuyo objetivo es asegurar que no se produzcan inestabilidades en el control en tiempo real. Se pueden formular de dos maneras diferentes.

Las restricciones de regulación hacia arriba más simples obligan a que la suma de los “huecos” hacia arriba (diferencia entre la potencia máxima de las centrales y la potencia producida por las mismas) de todas las centrales térmicas acopladas y de todas las centrales hidráulicas, sea mayor que cierto valor (que puede ser constante para todos los subperiodos o, de forma más general, depender del subperiodo del horizonte temporal analizado). Se formulan de la siguiente forma:

$$\sum_{j \in J} (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \geq A_k \quad \forall k \quad (4.32)$$

De la misma forma, las restricciones de regulación hacia abajo más simples (y, de nuevo, más utilizadas) obligan a que la suma de los “huecos” hacia abajo (diferencia entre la

potencia producida por las centrales acopladas y su potencia mínima) de todas las centrales térmicas acopladas y de todas las centrales hidráulicas sea mayor que cierto valor (que puede ser constante para todos los subperiodos o, de forma más general, depender del subperiodo del horizonte temporal analizado). Estas restricciones se formulan de la siguiente forma:

$$\sum_{j \in J} (t_{jk} - \underline{p}_j) v_{jk} + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} (p_{l(i)k} - \underline{h}_{l(i)}) \geq B_k \quad \forall k \quad (4.33)$$

En la ecuación anterior se han incluido las potencias mínimas de las centrales hidráulicas para mantener el rigor en la definición de regulación hacia abajo. No obstante, la potencia mínima de las centrales hidráulicas (que depende del caudal mínimo a turbinar) es habitualmente cero.

Sin embargo en un sistema en que la subida y bajada de carga estuviera muy limitada por las rampas (de subida y/o de bajada) de las centrales térmicas, podría ocurrir que, debido a estas restricciones de rampa y a pesar de haber “hueco” suficiente (hacia arriba y/o hacia abajo), el sistema no pudiera ajustar la producción a la demanda con los problemas de inestabilidad que esto provocaría. Por ello las restricciones de regulación que más protegen al sistema contra posibles inestabilidades en el funcionamiento en tiempo real son las que obligan a que la suma de las potencias en que cada central térmica puede aumentar su producción (el mínimo entre el “hueco” hacia arriba y la rampa de subida) más el “hueco” de potencia hacia arriba de las centrales hidráulicas¹ sea mayor que cierto valor y las que obligan a que la suma de las potencias en que cada central térmica puede disminuir su producción (el mínimo entre el “hueco” hacia abajo y la rampa de bajada) más el “hueco” de potencia hacia abajo de las centrales hidráulicas sea mayor que cierto valor. Estas restricciones se formulan a continuación:

$$\sum_{j \in J} \text{Minimo} \left[(\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk}, r_j^s v_{jk} \right] + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \geq A_k \quad \forall k \quad (4.34)$$

$$\sum_{j \in J} \text{Minimo} \left[(t_{jk} - \underline{p}_j) v_{jk}, r_j^b v_{jk} \right] + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} (p_{l(i)k} - \underline{h}_{l(i)}) \geq B_k \quad \forall k \quad (4.35)$$

Para poder incluir estas últimas restricciones en la función lagrangiana se reformulan a continuación:

$$\sum_{j \in J} \left[(\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} u_{jk}^s + r_j^s v_{jk} (1 - u_{jk}^s) \right] + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \geq A_k \quad \forall k \quad (4.36)$$

¹Como ya se indicó en los capítulos 1 y 3 las centrales hidráulicas pueden variar su carga de forma muy rápida y por ello no se consideran restricciones de subida ni de bajada de carga para modelar su funcionamiento.

$$\sum_{j \in J} \left[(t_{jk} - \underline{p}_j) v_{jk} u_{jk}^b + r_j^b v_{jk} (1 - u_{jk}^b) \right] + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} (p_{l(i)k} - \underline{h}_{l(i)}) \geq B_k \quad \forall k \quad (4.37)$$

donde u_{jk}^s y u_{jk}^b son variables binarias auxiliares que se definen para cada central térmica j y cada periodo k .

Si $(\bar{p}_j - t_{jk})v_{jk} \leq r_j^s v_{jk}$, entonces la potencia que puede aportar la central térmica j en el subperiodo k para la regulación hacia arriba viene limitada por el “hueco” de potencia hacia arriba y $u_{jk}^s = 1$. En caso contrario, la potencia que puede aportar la central térmica j en el subperiodo k para la regulación hacia arriba viene limitada por la rampa de subida de carga y $u_{jk}^s = 0$.

De la misma forma si $(t_{jk} - \underline{p}_j)v_{jk} \leq r_j^b v_{jk}$, entonces la potencia que puede aportar la central térmica j en el subperiodo k para la regulación hacia abajo viene limitada por el “hueco” de potencia hacia abajo y $u_{jk}^b = 1$. En caso contrario, la potencia que puede aportar la central térmica j en el subperiodo k para la regulación hacia abajo viene limitada por la rampa de bajada de carga y $u_{jk}^b = 0$.

Sea cual sea el tipo de restricciones de regulación que se emplee (el definido por las ecuaciones (4.32) y (4.33), o bien el definido por las ecuaciones (4.34) y (4.35)), se denotará β^a al vector de multiplicadores asociado a las restricciones de regulación hacia arriba (ecuaciones (4.32) o (4.34)) y β^b al vector de multiplicadores asociado a las restricciones de regulación hacia abajo (ecuaciones (4.33) o (4.35)). Ambos vectores de multiplicadores (β^a y β^b) son de dimensión igual al número de subperiodos del horizonte temporal analizado.

Es importante destacar que aunque las restricciones de reserva rodante y regulación (particularmente las restricciones de regulación hacia arriba) se formulan matemáticamente de forma análoga, representan realidades físicas bien diferenciadas. El que una central contribuya a las restricciones de reserva rodante implica que dicha central está acoplada y preparada para producir más potencia en el caso de que fuera necesario (por un aumento inesperado de la demanda, respecto a la demanda prevista, o por el fallo de alguna central). Se debe remunerar a una central en una situación como esta para que le resulte rentable estar acoplada manteniendo un “hueco” de potencia disponible para que el sistema pueda hacer frente a una situación imprevista.

Por otra parte, las centrales que regulan son aquellas que varían su producción en el control en tiempo real subiendo y bajando ligeramente de carga alrededor de un punto de operación para adaptar la generación de energía eléctrica a la demanda. Típicamente la energía generada por una central que regula apenas se diferencia de la que generaría si se mantuviera a potencia constante en el punto de operación, es decir, que la tarea de regulación no suele estar ligada a un aumento en la producción de energía y por tanto a un aumento en el ingreso que obtiene la

central por la generación de energía. Sin embargo, regular supone un desgaste de la central y en consecuencia un coste adicional al coste de producción. Ello quiere decir que se debe remunerar a las centrales que regulan para compensar el coste adicional en el que incurren por el desgaste (o envejecimiento) de la central que provoca la realización de esta tarea.

Así, las restricciones de reserva rodante y de regulación se incluyen (o se pueden incluir) en los modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo para que el sistema sea más seguro pero cada una de ellas trata aspectos distintos de la “seguridad” de un sistema de energía eléctrica. Las restricciones de reserva rodante se ocupan de que el sistema pueda hacer frente a una situación imprevista como un aumento, respecto a la previsión, de la demanda o el fallo de alguna central y, por tanto, se refieren a la seguridad en el suministro de energía eléctrica. Por otro lado, las restricciones de regulación se ocupan de que, en el control en tiempo real, las centrales puedan aumentar y disminuir ligeramente su producción para que la generación de energía eléctrica coincida con la demanda de la misma. Por tanto, las restricciones de regulación se refieren a la seguridad en la estabilidad del sistema (y por tanto a la calidad de la energía suministrada). Todo esto quiere decir que la remuneración a una central por contribuir al cumplimiento de la restricción de reserva rodante en cierto periodo no debe anular la remuneración por contribuir a la regulación ni viceversa. Además, y lógicamente de acuerdo con las distintas realidades físicas que representan, los coeficientes de reserva rodante R_k son mucho mayores que los coeficientes de regulación A_k y B_k .

Matemáticamente, al aplicar la técnica de la relajación lagrangiana a cualquier problema de optimización, los multiplicadores asociados a las restricciones dualizadas de igualdad pueden ser mayores, menores o iguales a cero (aunque en determinadas aplicaciones puedan tener un significado físico o económico claro y por tanto pueda quedar determinado de antemano si son positivos o negativos). Los multiplicadores asociados a las restricciones de menor o igual son mayores o iguales a cero y los multiplicadores asociados a restricciones de mayor o igual son menores o iguales a cero.

En la resolución del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo mediante técnicas de relajación lagrangiana, las restricciones globales (o restricciones a dualizar) de desigualdad se formularán como restricciones de menor o igual con el objetivo de que los multiplicadores asociados a dichas restricciones resulten mayores o iguales a cero.

Los modelos analizados en este capítulo son los siguientes:

Modelo 1 Es el modelo más simple pero también el más utilizado en la literatura. Se consideran las restricciones de demanda (ecuaciones (4.26)) y reserva rodante en su forma más simple (ecuaciones (4.27)).

Modelo 2 Se consideran las restricciones de demanda (ecuaciones (4.26)) y reserva rodante en la forma indicada en las ecuaciones (4.28).

Modelo 3 Se consideran las restricciones de demanda (ecuaciones (4.26)) y reserva rodante en su forma más compleja (ecuaciones (4.29)).

Modelo 4 Se consideran las restricciones de demanda (ecuaciones (4.26)), reserva rodante en su forma más simple (ecuaciones (4.27)) y demanda mínima (ecuaciones (4.31)).

Modelo 5 Se consideran las restricciones de demanda (ecuaciones (4.26)), reserva rodante en la forma indicada en las (ecuaciones (4.28)) y demanda mínima (ecuaciones (4.31)).

Modelo 6 Se consideran las restricciones de demanda (ecuaciones (4.26)), reserva rodante en su forma más compleja (ecuaciones (4.29)) y demanda mínima (ecuaciones (4.31)).

Modelo 7 Se consideran las restricciones de demanda (ecuaciones (4.26)), reserva rodante en la forma indicada en las ecuaciones (4.28), demanda mínima (ecuaciones (4.31)) y las restricciones de regulación en su forma más simple (ecuaciones (4.32) y (4.33)).

Modelo 8 Es el modelo más complejo. Se consideran las restricciones de demanda (ecuaciones (4.26)), reserva rodante en su forma más compleja (ecuaciones (4.29)), demanda mínima (ecuaciones (4.31)) y las restricciones de regulación en su forma más compleja (ecuaciones (4.34) y (4.35)).

Respecto a los modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo que aparecen en la literatura caben hacer los siguientes comentarios:

- La mayoría de los modelos de coordinación hidrotérmica que se tratan en la literatura sólo consideran restricciones de demanda y de reserva rodante. Habitualmente las restricciones de reserva rodante se formulan teniendo sólo en cuenta la potencia acoplada (ecuaciones (4.27)) o bien teniendo en cuenta el “hueco” de potencia (ecuaciones (4.28)). En [1] se formulan las restricciones de reserva rodante de la forma general indicada en las ecuaciones (3.31) (apartado 3.5) y se indica la dependencia de la potencia que puede aportar cada central a la reserva rodante del sistema con la rampa máxima de subida de carga y con el “hueco” de potencia. Sin embargo, a lo largo de todo el planteamiento del problema se emplea la expresión general (ecuaciones (3.31)) y no se especifica la forma de discriminar si en cada caso particular la contribución a la reserva depende del “hueco” de potencia disponible o de la rampa máxima de subida de carga de la central.
- Algunas referencias de la literatura incluyen las restricciones de demanda mínima.

- No se ha encontrado en las literatura ninguna referencia que incluya restricciones de regulación hacia arriba y de regulación hacia abajo. Recientemente el grupo de investigación de Svoboda (de Pacific Gas & Electric Company, California, EE.UU.) ha presentado un artículo [43] en el que se incluyen restricciones de demanda mínima y de regulación hacia abajo.

4.3.1 Modelo 1

Formulación del problema y resolución del problema dual

En este modelo las restricciones de carga consideradas son las ecuaciones (4.26) y (4.27). Se definen dos vectores de multiplicadores de Lagrange:

λ asociado a las restricciones de demanda (4.26), y

μ asociado a las restricciones de reserva rodante (4.27).

El problema primal se plantea a continuación:

$$\text{Minimizar}_{(t,v,y,z,x,u,h,s)} \quad f(t, v, y, z) = \sum_{j \in J} \sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] \quad (4.38)$$

sujeito a

$$s_j(t_j, v_j, y_j, z_j) \leq 0 \quad \forall j \quad (4.39)$$

$$s_i(x_{l(i)}, u_{l(i)}, p_{l(i)}, s_{l(i)}) \leq 0 \quad \forall i \quad (4.40)$$

$$\sum_{j \in J} t_{jk} + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} p_{l(i)k} = D_k \quad \forall k \quad (4.41)$$

$$\sum_{j \in J} \bar{p}_j v_{jk} + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} p_{l(i)k} \geq D_k + R_k \quad \forall k \quad (4.42)$$

donde las ecuaciones (4.39) representan las restricciones que modelan las centrales térmicas (ecuaciones (3.36)-(3.44)) y las ecuaciones (4.40) representan las restricciones que modelan las cuencas hidráulicas (ecuaciones (3.45)-(3.51)).

La función lagrangiana resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t, v, y, z, x, u, p, s, \lambda, \mu) = & \sum_{j \in J} \sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] + \\ & \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(D_k - \sum_{j \in J} t_{jk} - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} p_{l(i)k} \right) + \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^K \mu_k \left(D_k + R_k - \sum_{j \in j} \bar{p}_j v_{jk} - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k} \right) \quad (4.43)$$

La función dual $\phi(\lambda, \mu)$ para cada coordenada (λ, μ) , contiene el resultado de minimizar, en variables primales, la función lagrangiana $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \lambda, \mu)$ (ecuación (4.43)) sujeto a satisfacer las restricciones locales de los equipos térmico e hidráulico (ecuaciones (4.39) y (4.40)). Se formula a continuación:

$$\phi(\lambda, \mu) = \text{Minimizar}_{(t,v,y,z,x,u,h,s,\lambda,\mu)} \mathcal{L}(t, v, y, z, x, u, h, s, \lambda, \mu) \quad (4.44)$$

sujeto a

$$s_j(t_j, v_j, y_j, z_j) \leq 0 \quad \forall j \quad (4.45)$$

$$s_i(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)}) \leq 0 \quad \forall i \quad (4.46)$$

Al problema que hay que resolver para evaluar la función dual en cada coordenada (λ, μ) se le llama *Problema Primal Relajado*. Esto es:

$$\text{Minimizar}_{(t,v,y,z,x,u,h,s,\lambda,\mu)} \mathcal{L}(t, v, y, z, x, u, h, s, \lambda, \mu) \quad (4.47)$$

sujeto a

$$s_j(t_j, v_j, y_j, z_j) \leq 0 \quad (4.48)$$

$$s_i(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)}) \leq 0 \quad (4.49)$$

Sustituyendo la expresión de la función lagrangiana (ecuación 4.43)) en la ecuación (4.44) resulta la siguiente función dual:

$$\phi(\lambda, \mu) = \sum_{k=1}^K \lambda_k D_k + \sum_{k=1}^K \mu_k (D_k + R_k) + d(\lambda, \mu) \quad (4.50)$$

donde $d(\lambda, \mu)$ es el resultado del siguiente problema de optimización:

$$\text{Minimizar}_{(t,v,y,z,x,u,h,s)}$$

$$\sum_{j \in j} \left[\sum_{k=1}^K \left(v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right) - \sum_{k=1}^K \lambda_k t_{jk} - \sum_{k=1}^K \mu_k \bar{p}_j v_{jk} \right] - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\lambda_k + \mu_k) p_{l(i)k} \quad (4.51)$$

sujeto a

$$s_j(t_j, v_j, y_j, z_j) \leq 0 \quad \forall j \quad (4.52)$$

$$s_i(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)}) \leq 0 \quad \forall i \quad (4.53)$$

Este problema se descompone de forma natural en un subproblema por cada central térmica y un subproblema por cada cuenca hidráulica.

El subproblema asociado a cada central térmica j se plantea:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar}_{(t_j, v_j, y_j, z_j)} \\ &\sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] - \left[\sum_{k=1}^K \lambda_k t_{jk} + \sum_{k=1}^K \mu_k \bar{p}_j v_{jk} \right] \end{aligned} \quad (4.54)$$

sujeito a

$$s_j(t_j, v_j, y_j, z_j) \leq 0 \quad (4.55)$$

El subproblema asociado a la cuenca hidráulica i :

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar}_{(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)})} \\ &\sum_{k=1}^K \sum_{l(i) \in l(i)} (\lambda_k + \mu_k) p_{l(i)k} \end{aligned} \quad (4.56)$$

sujeito a

$$s_i(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)}) \leq 0 \quad (4.57)$$

El problema dual es el problema de maximización de la función dual $\phi(\lambda, \mu)$. Se plantea de la forma indicada en las ecuaciones (4.24)-(4.25) y se resuelve utilizando el algoritmo presentando en el apartado 4.2.2.

Análisis de los subproblemas

Del análisis del subproblema asociado a cada central térmica j (ecuaciones (4.54)-(4.55)) puede observarse que el primer término de la función objetivo representa el coste total en el que incurre cada central térmica j por producir o acoplar potencia durante todo el horizonte temporal analizado y que el segundo término representa el ingreso que recibe cada central térmica j por producir o acoplar potencia durante todo el horizonte temporal analizado. La función objetivo a minimizar es el balance *coste - ingreso*. Pero minimizar *coste - ingreso* es equivalente a maximizar el beneficio neto (*ingreso - coste*) que obtiene cada central térmica j por producir o acoplar potencia. Por tanto para cada central térmica j , el multiplicador λ_k representa la remuneración por cada unidad de energía (MWh) producida durante el subperiodo k y el multiplicador μ_k representa la remuneración por cada unidad de potencia (MW) acoplada durante el subperiodo k .

De la misma forma puede observarse que la función objetivo del subproblema asociado a la cuenca hidráulica i representa la suma de los beneficios de todas las centrales de la cuenca por

la potencia total disponible (la suma de las potencias máximas de cada central) y por la energía total producida. El coste de producción de la energía hidráulica se considera despreciable. Así, cada cuenca hidráulica se ocupa de maximizar su beneficio y para cada central de la cuenca el multiplicador λ_k representa la remuneración por cada unidad de energía (MWh) producida durante el subperiodo k y el multiplicador μ_k representa la remuneración por cada unidad de potencia (MW) acoplada (que coincide, dadas las características de las centrales hidráulicas, con la potencia máxima de cada central) durante el subperiodo k .

De todo esto puede deducirse que desde el punto de vista de las centrales generadoras, cada multiplicador λ_k representa la remuneración por cada unidad de energía (MWh) producida durante el subperiodo k y cada multiplicador μ_k representa la remuneración por cada unidad de potencia (MW) disponible durante el subperiodo k . De forma equivalente desde el punto de vista del sistema cada multiplicador λ_k representa la cantidad a pagar a cada central por cada unidad de energía (MWh) producida durante el subperiodo k y cada multiplicador μ_k representa la cantidad a pagar a cada central por cada unidad de potencia (MW) disponible durante el subperiodo k .

4.3.2 Modelo 2

Formulación del problema y resolución del problema dual

En este modelo las restricciones de carga consideradas son las ecuaciones (4.26) y (4.28). Se definen dos vectores de multiplicadores de Lagrange:

λ asociado a las restricciones de demanda (4.26), y

μ asociado a las restricciones de reserva rodante (4.28).

El problema primal se plantea a continuación:

$$\text{Minimizar}_{(t,v,y,z,x,u,h,s)} \quad f(t, v, y, z) = \sum_{j \in J} \sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] \quad (4.58)$$

sujeito a

$$s_j(t_j, v_j, y_j, z_j) \leq 0 \quad \forall j \quad (4.59)$$

$$s_i(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)}) \leq 0 \quad \forall i \quad (4.60)$$

$$\sum_{j \in J} t_{jk} + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k} = D_k \quad \forall k \quad (4.61)$$

$$\sum_{j \in J} (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \geq R_k \quad \forall k \quad (4.62)$$

donde las ecuaciones (4.59) representan las restricciones que modelan las centrales térmicas (ecuaciones (3.36)-(3.44)) y las ecuaciones (4.60) representan las restricciones que modelan las cuencas hidráulicas (ecuaciones (3.45)-(3.51)).

La función lagrangiana resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t, v, y, z, x, u, h, s, \lambda, \mu) = & \sum_{j \in J} \sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] + \\ & \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(D_k - \sum_{j \in J} t_{jk} - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k} \right) + \\ & \sum_{k=1}^K \mu_k \left[R_k - \sum_{j \in J} (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \right] \end{aligned} \quad (4.63)$$

La evaluación de la función dual $\phi(\lambda, \mu)$ para cada coordenada (λ, μ) requiere de la resolución del problema primal relajado (esto es, el problema de minimizar en variables primales la función lagrangiana sujeto a satisfacer las restricciones que modelan el funcionamiento del equipo de generación térmico e hidráulico, siendo los vectores de multiplicadores λ y μ constantes). Así, la función dual se define de la siguiente forma:

$$\phi(\lambda, \mu) = \text{Minimizar}_{(t, v, y, z, x, u, h, s, \lambda, \mu)} \mathcal{L}(t, v, y, z, x, u, h, s, \lambda, \mu) \quad (4.64)$$

sujeto a

$$s_j(t_j, v_j, y_j, z_j) \leq 0 \quad \forall j \quad (4.65)$$

$$s_i(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)}) \leq 0 \quad \forall i \quad (4.66)$$

y sustituyendo la ecuación (4.63) en la ecuación (4.64) resulta:

$$\phi(\lambda, \mu) = \sum_{k=1}^K \lambda_k D_k + \sum_{k=1}^K \mu_k R_k + d(\lambda, \mu) \quad (4.67)$$

donde $d(\lambda, \mu)$ es el resultado del siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar}_{(t, v, y, z, x, u, h, s)} \sum_{j \in J} \left\{ \sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^K \lambda_k t_{jk} - \sum_{k=1}^K \mu_k (\bar{p}_j - t_{jk}) \right\} - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} \left[\sum_{k=1}^K \lambda_k p_{l(i)k} + \sum_{k=1}^K \mu_k (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \right] \end{aligned} \quad (4.68)$$

sujeto a

$$s_j(t_j, v_j, y_j, z_j) \leq 0 \quad \forall j \quad (4.69)$$

$$s_i(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)}) \leq 0 \quad \forall i \quad (4.70)$$

Este problema se descompone de forma natural en un subproblema por cada central térmica y un subproblema por cada cuenca hidráulica.

El subproblema asociado a cada central térmica j se plantea:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar}_{(t_j, v_j, y_j, z_j)} \\ &\sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] - \left[\sum_{k=1}^K \lambda_k t_{jk} + \sum_{k=1}^K \mu_k (\bar{p}_j - t_{jk}) \right] \end{aligned} \quad (4.71)$$

sujeeto a

$$s_j(t_j, v_j, y_j, z_j) \leq 0 \quad (4.72)$$

El subproblema asociado a la cuenca hidráulica i :

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar}_{(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)})} \\ &\sum_{l(i) \in l(i)} \sum_{k=1}^K \left[\lambda_k p_{l(i)k} + \mu_k (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \right] \end{aligned} \quad (4.73)$$

sujeeto a

$$s_i(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)}) \leq 0 \quad (4.74)$$

El problema dual es el problema de maximización de la función dual $\phi(\lambda, \mu)$. Se plantea de la forma indicada en las ecuaciones (4.24)-(4.25) y se resuelve utilizando el algoritmo presentado en el apartado 4.2.2.

Análisis de los subproblemas

De nuevo y analizando la formulación de cada subproblema térmico (ecuaciones (4.71)-(4.72)), el primer término de la función objetivo representa el coste total en el que incurre cada central térmica j por producir y acoplar potencia durante todo el horizonte temporal analizado y que el segundo término representa el ingreso que recibe cada central térmica j por producir potencia o estar disponible para ello durante todo el horizonte temporal analizado. Se resuelve el problema de minimizar el balance *coste - ingreso* o bien de maximizar el beneficio neto (*ingreso - coste*). Así, para cada central térmica j , el multiplicador λ_k representa la remuneración por cada unidad de energía (MWh) producida durante el subperiodo k y el multiplicador μ_k representa la remuneración por cada unidad de potencia acoplada y preparada para producir, o de otra forma, representa el pago unitario por el “hueco” de potencia disponible (diferencia entre la potencia máxima y la potencia producida) durante el subperiodo k .

De la misma forma puede observarse que la función objetivo del subproblema asociado a la cuenca hidráulica i (ecuaciones (4.73)-(4.74)) representa la suma de los beneficios de todas las centrales

de la cuenca por producir energía o estar disponible para ello. El coste de producción de la energía hidráulica se considera despreciable. Así, para cada central de la cuenca el multiplicador λ_k representa la remuneración por cada unidad de energía (MWh) producida durante el subperiodo k y el multiplicador μ_k representa el pago unitario por el “hueco” de potencia disponible durante el subperiodo k .

De todo esto puede deducirse que desde el punto de vista de las centrales generadoras, cada multiplicador λ_k representa la remuneración por cada unidad de energía (MWh) producida durante el subperiodo k y cada multiplicador μ_k representa la remuneración por cada unidad de “hueco” de potencia (MW) disponible durante el subperiodo k . De forma equivalente desde el punto de vista del sistema cada multiplicador λ_k representa la cantidad a pagar a cada central por cada unidad de energía (MWh) producida durante el subperiodo k y cada multiplicador μ_k representa el pago unitario por el “hueco” de potencia (MW) disponible durante el subperiodo k .

4.3.3 Modelo 3

Formulación de problema y resolución del problema dual

En este modelo las restricciones de carga consideradas son las ecuaciones (4.26) y (4.29). Se definen dos vectores de multiplicadores de Lagrange:

λ asociado a las restricciones de demanda (4.26), y

μ asociado a las restricciones de reserva rodante (4.29).

Para poder aplicar el procedimiento de la relajación lagrangiana las restricciones de reserva rodante (4.29) se formularán en la forma indicada en (4.30)

El problema primal se plantea a continuación:

$$\text{Minimizar}_{(t,v,y,z,x,u,h,s)} \quad f(t, v, y, z) = \sum_{j \in J} \sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] \quad (4.75)$$

sujeito a

$$s_j(t_j, v_j, y_j, z_j) \leq 0 \quad \forall j \quad (4.76)$$

$$s_i(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)}) \leq 0 \quad \forall i \quad (4.77)$$

$$\sum_{j \in J} t_{jk} + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k} = D_k \quad \forall k \quad (4.78)$$

$$\sum_{j \in J} \left[(\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} w_{jk} + r_j^s v_{jk} (1 - w_{jk}) \right] + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \geq R_k \quad \forall k \quad (4.79)$$

donde las ecuaciones (4.76) representan las restricciones que modelan las centrales térmicas (ecuaciones (3.36)-(3.44)) y las ecuaciones (4.77) representan las restricciones que modelan las cuencas hidráulicas (ecuaciones (3.45)-(3.51)).

La función lagrangiana resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t, v, y, z, x, u, h, s, \lambda, \mu) = & \sum_{j \in J} \sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] + \\ & \sum_{k=1}^K \mu_k \left[R_k - \sum_{j \in J} \left[(\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} w_{jk} + r_j^s v_{jk} (1 - w_{jk}) \right] - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} \left(\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k} \right) \right] \\ & + \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(D_k - \sum_{j \in J} t_{jk} - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k} \right) \end{aligned} \quad (4.80)$$

La función dual se define:

$$\phi(\lambda, \mu) = \text{Minimizar}_{(t,v,y,z,x,u,h,s,\lambda,\mu)} \mathcal{L}(t, v, y, z, x, u, h, s, \lambda, \mu) \quad (4.81)$$

sujeto a

$$s_j(t_j, v_j, y_j, z_j) \leq 0 \quad \forall j \quad (4.82)$$

$$s_i(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)}) \leq 0 \quad \forall i \quad (4.83)$$

Sustituyendo la ecuación (4.80) en la ecuación (4.81) y sacando fuera del problema de optimización los términos constantes (para este problema) resulta:

$$\phi(\lambda, \mu) = \sum_{k=1}^K \lambda_k D_k + \sum_{k=1}^K \mu_k R_k + d(\lambda, \mu) \quad (4.84)$$

donde $d(\lambda, \mu)$ es el resultado del siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar}_{(t,v,y,z,x,u,h,s)} & \sum_{j \in J} \left\{ \sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] \right. \\ & - \sum_{k=1}^K \lambda_k t_{jk} - \sum_{k=1}^K \mu_k \left[(\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} w_{jk} + r_j^s v_{jk} (1 - w_{jk}) \right] \} \\ & - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} \left[\sum_{k=1}^K \lambda_k p_{l(i)k} + \sum_{k=1}^K \mu_k (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \right] \end{aligned} \quad (4.85)$$

sujeto a

$$s_j(t_j, v_j, y_j, z_j) \leq 0 \quad \forall j \quad (4.86)$$

$$s_i(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)}) \leq 0 \quad \forall i \quad (4.87)$$

Este problema se descompone de forma natural en un subproblema por cada central térmica y un subproblema por cada cuenca hidráulica.

El subproblema asociado a cada central térmica j se plantea:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar}_{(t_j, v_j, y_j, z_j)} \quad & \sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] \\ & - \left\{ \sum_{k=1}^K \lambda_k t_{jk} + \sum_{k=1}^K \mu_k \left[(\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} w_{jk} + r_j^s v_{jk} (1 - w_{jk}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.88)$$

sujeito a

$$s_j(t_j, v_j, y_j, z_j) \leq 0 \quad (4.89)$$

El subproblema asociado a la cuenca hidráulica i :

$$\text{Maximizar}_{(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)})} \quad \sum_{l(i) \in l(i)} \sum_{k=1}^K \left[\lambda_k p_{l(i)k} + \mu_k (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \right] \quad (4.90)$$

sujeito a

$$s_i(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)}) \leq 0 \quad (4.91)$$

El problema dual es el problema de maximización de la función dual $\phi(\lambda, \mu)$. Se plantea de la forma indicada en las ecuaciones (4.24)-(4.25) y se resuelve utilizando el algoritmo presentando en el apartado 4.2.2.

Análisis de los subproblemas

De nuevo y analizando la formulación de cada subproblema térmico (ecuaciones (4.88)-(4.89)), el primer término de la función objetivo representa el coste total en el que incurre cada central térmica j por producir y acoplar potencia durante todo el horizonte temporal analizado y que el segundo término representa el ingreso que recibe cada central térmica j por producir potencia o estar disponible para ello durante todo el horizonte temporal analizado. Se resuelve el problema de minimizar el balance *coste - ingreso* o bien de maximizar el beneficio neto (*ingreso - coste*). Así, para cada central térmica j , el multiplicador λ_k representa la remuneración por cada unidad de energía (MWh) producida durante el subperiodo k y el multiplicador μ_k representa la remuneración unitaria (por MW) a la contribución a la reserva rodante de la central (siendo esta contribución el mínimo entre el “hueco” de potencia y la rampa de subida).

De la misma forma puede observarse que la función objetivo del subproblema asociado a la cuenca hidráulica i (ecuaciones (4.90)-(4.91)) representa la suma de los beneficios de todas las centrales

de la cuenca por producir energía o estar disponible para ello. El coste de producción de la energía hidráulica se considera despreciable. Así, para cada central de la cuenca el multiplicador λ_k representa la remuneración por cada unidad de energía (MWh) producida durante el subperiodo k y el multiplicador μ_k representa el pago unitario por el “hueco” de potencia disponible durante el subperiodo k .

De todo esto puede deducirse que desde el punto de vista de las centrales generadoras, cada multiplicador λ_k representa la remuneración por cada unidad de energía (MWh) producida durante el subperiodo k y cada multiplicador μ_k representa la remuneración unitaria a la contribución a la reserva durante el subperiodo k . De forma equivalente desde el punto de vista del sistema cada multiplicador λ_k representa la cantidad a pagar a cada central por cada unidad de energía (MWh) producida durante el subperiodo k y cada multiplicador μ_k representa el pago unitario por la contribución a la reserva durante el subperiodo k .

4.3.4 Modelo 4

Formulación de problema y resolución del problema dual

En este modelo las restricciones de carga consideradas son las ecuaciones (4.26), (4.27) y (4.31). Se definen tres vectores de multiplicadores de Lagrange:

λ asociado a las restricciones de demanda (4.26),

μ asociado a las restricciones de reserva rodante (4.27) y

α asociado a las restricciones de demanda mínima (4.31).

El problema primal se formula a continuación:

$$\text{Minimizar}_{(t,v,y,z,x,u,h,s)} \quad f(t, v, y, z) = \sum_{j \in J} \sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] \quad (4.92)$$

sujeto a

$$s_j(t_j, v_j, y_j, z_j) \leq 0 \quad \forall j \quad (4.93)$$

$$s_i(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)}) \leq 0 \quad \forall i \quad (4.94)$$

$$\sum_{j \in J} t_{jk} + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} p_{l(i)k} = D_k \quad \forall k \quad (4.95)$$

$$\sum_{j \in J} \bar{p}_j v_{jk} + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} p_{l(i)k} \geq D_k + R_k \quad \forall k \quad (4.96)$$

$$\sum_{j \in J} \underline{p}_j v_{jk} \leq D_k \quad \forall k \quad (4.97)$$

donde las ecuaciones (4.93) representan las restricciones que modelan las centrales térmicas (ecuaciones (3.36)-(3.44)) y las ecuaciones (4.94) representan las restricciones que modelan las cuencas hidráulicas (ecuaciones (3.45)-(3.51)).

La función lagrangiana resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t, v, y, z, x, u, h, s, \lambda, \mu) = & \sum_{j \in J} \sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] + \\ & \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(D_k - \sum_{j \in J} t_{jk} - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k} \right) + \\ & \sum_{k=1}^K \mu_k \left(D_k + R_k - \sum_{j \in J} \bar{p}_j v_{jk} - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k} \right) + \\ & \sum_{k=1}^K \alpha_k \left(\sum_{j \in J} \underline{p}_j v_{jk} - D_k \right) \end{aligned} \quad (4.98)$$

La función dual se define de la siguiente forma:

$$\phi(\lambda, \mu) = \text{Minimizar}_{(t,v,y,z,u,h,s,\lambda,\mu)} \mathcal{L}(t, v, y, z, x, u, h, s, \lambda, \mu) \quad (4.99)$$

sujeto a

$$s_j(t_j, v_j, y_j, z_j) \leq 0 \quad \forall j \quad (4.100)$$

$$s_i(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)}) \leq 0 \quad \forall i \quad (4.101)$$

Sustituyendo la ecuación (4.98) en la ecuación (4.99) y sacando fuera del problema de optimización los términos constantes (para este problema) resulta:

$$\phi(\lambda, \mu) = \sum_{k=1}^K \lambda_k D_k + \sum_{k=1}^K \mu_k (D_k + R_k) - \sum_{k=1}^K \alpha_k D_k + d(\lambda, \mu) \quad (4.102)$$

donde $d(\lambda, \mu)$ es el resultado del problema primal descompuesto que se formula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar}_{(t,v,y,z,x,u,h,s)} & \sum_{j \in J} \left\{ \sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^K \lambda_k t_{jk} - \sum_{k=1}^K \mu_k \bar{p}_j v_{jk} + \sum_{k=1}^K \alpha_k \underline{p}_j v_{jk} \right\} - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} (\lambda_k + \mu_k) p_{l(i)k} \end{aligned} \quad (4.103)$$

sujeto a

$$s_j(t_j, v_j, y_j, z_j) \leq 0 \quad \forall j \quad (4.104)$$

$$s_i(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)}) \leq 0 \quad \forall i \quad (4.105)$$

Este problema se descompone de forma natural en un subproblema por cada central térmica y un subproblema por cada cuenca hidráulica.

El subproblema asociado a cada central térmica j se plantea:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar}_{(t_j, v_j, y_j, z_j)} \quad & \sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] \\ & - \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k t_{jk} + \sum_{k=1}^K \mu_k \bar{p}_j v_{jk} - \sum_{k=1}^K \alpha_k \underline{p}_j v_{jk} \right) \end{aligned} \quad (4.106)$$

sujeto a

$$s_j(t_j, v_j, y_j, z_j) \leq 0 \quad (4.107)$$

El subproblema asociado a la cuenca hidráulica i :

$$\begin{aligned} \text{Maximizar}_{(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)})} \quad & \sum_{k=1}^K \sum_{l(i) \in l(i)} (\lambda_k + \mu_k) p_{l(i)k} \end{aligned} \quad (4.108)$$

sujeto a

$$s_i(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)}) \leq 0 \quad (4.109)$$

El problema dual es el problema de maximización de la función dual $\phi(\lambda, \mu)$. Se plantea de la forma indicada en las ecuaciones (4.24)-(4.25) y se resuelve utilizando el algoritmo presentando en el apartado 4.2.2.

Análisis de los subproblemas

Del análisis del subproblema asociado a cada central térmica j (ecuaciones (4.106)- (4.107)) se observa que cada central térmica persigue minimizar el coste total (o maximizar su beneficio neto). El primer término de la función objetivo (4.106) representa el coste de producción de la central térmica j . El segundo término representa el ingreso que recibe la central por producir o acoplar. En este caso el segundo término consta de dos términos positivos (i.e. dos términos que representan un pago del sistema a la central) y un término negativo (i.e. una penalización que debe pagar la central). De este segundo término se observa que: para cada central térmica j el multiplicador λ_k (primer sumando del término de ingreso) representa la remuneración por cada unidad de energía (MWh) producida, el multiplicador μ_k (segundo sumando del término de ingreso) representa la remuneración por cada unidad de potencia (MW) acoplada y el multiplicador α_k (tercer sumando del término de ingreso) es una penalización que deberá pagar cada central térmica si está acoplada en el subperiodo k por cada unidad de potencia (MW) de mínimo técnico.

De forma equivalente las centrales de cada cuenca hidráulica se ocupan de maximizar su ingreso. El coste de producción para este tipo de centrales es despreciable. Así, para cada central hidráulica, el multiplicador λ_k representa la remuneración por cada unidad de energía (MWh) producida y el multiplicador μ_k representa un pago unitario (i.e. por cada MW) por la potencia máxima de la central. Dadas las características de las centrales hidráulicas (se puede considerar que no tienen limitación de mínimo técnico o que la potencia mínima que pueden producir es cero), no tiene sentido el multiplicador α_k .

De todo esto puede deducirse que desde el punto de vista de las centrales generadoras, el multiplicador λ_k representa la remuneración por cada unidad de energía (MWh) producida durante el subperiodo k , el multiplicador μ_k representa la remuneración por cada unidad de potencia acoplada (teniendo en cuenta que las centrales hidráulicas se consideran siempre acopladas y por tanto para cada central hidráulica μ_k representa un pago unitario por su potencia máxima) y el multiplicador α_k representa la penalización que deberá pagar cada central térmica si está acoplada en el subperiodo k por cada unidad de potencia (MW) de mínimo técnico. De forma equivalente desde el punto de vista del sistema el multiplicador λ_k representa la cantidad a pagar a cada central por cada unidad de energía (MWh) producida durante el subperiodo k , el multiplicador μ_k representa cantidad a pagar por cada unidad de potencia acoplada (teniendo en cuenta que las centrales hidráulicas siempre están acopladas) durante el subperiodo k y el multiplicador α_k representa el pago unitario que recibe el sistema (por parte de las centrales térmicas) por la potencia de mínimo técnico acoplada.

4.3.5 Modelo 5

Formulación de problema y resolución del problema dual

En este modelo las restricciones de carga consideradas son las ecuaciones (4.26), (4.28) y (4.31). Se definen tres vectores de multiplicadores de Lagrange:

λ asociado a las restricciones de demanda (4.26),

μ asociado a las restricciones de reserva rodante (4.28) y

α asociado a las restricciones de demanda mínima (4.31).

El problema primal se formula a continuación:

$$\text{Minimizar}_{(t,v,y,z,x,u,h,s)} \quad f(t,v,y,z) = \sum_{j \in J} \sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] \quad (4.110)$$

sujeto a

$$s_j(t_j, v_j, y_j, z_j) \leq 0 \quad \forall j \quad (4.111)$$

$$s_i(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)}) \leq 0 \quad \forall i \quad (4.112)$$

$$\sum_{j \in j} t_{jk} + \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k} = D_k \quad \forall k \quad (4.113)$$

$$\sum_{j \in j} (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} + \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \geq R_k \quad \forall k \quad (4.114)$$

$$\sum_{j \in j} \underline{p}_j v_{jk} \leq D_k \quad \forall k \quad (4.115)$$

donde las ecuaciones (4.111) representan las restricciones que modelan las centrales térmicas (ecuaciones (3.36)-(3.44)) y las ecuaciones (4.112) representan las restricciones que modelan las cuencas hidráulicas (ecuaciones (3.45)-(3.51)).

La función lagrangiana resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t, v, y, z, x, u, h, s, \lambda, \mu) = & \sum_{j \in j} \sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] + \\ & \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk} - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k} \right) + \\ & \sum_{k=1}^K \mu_k \left[R_k - \sum_{j \in j} (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \right] + \\ & \sum_{k=1}^K \alpha_k \left(\sum_{j \in j} \underline{p}_j v_{jk} - D_k \right) \end{aligned} \quad (4.116)$$

La función dual se define de la siguiente forma:

$$\phi(\lambda, \mu) = \text{Minimizar}_{(t,v,y,z,x,u,h,s,\lambda,\mu)} \mathcal{L}(t, v, y, z, x, u, h, s, \lambda, \mu) \quad (4.117)$$

sujeto a

$$s_j(t_j, v_j, y_j, z_j) \leq 0 \quad \forall j \quad (4.118)$$

$$s_i(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)}) \leq 0 \quad \forall i \quad (4.119)$$

Sustituyendo la ecuación (4.116) en la ecuación (4.117) y sacando fuera del problema de optimización los términos constantes (para este problema) resulta:

$$\phi(\lambda, \mu) = \sum_{k=1}^K \lambda_k D_k + \sum_{k=1}^K \mu_k R_k - \sum_{k=1}^K \alpha_k D_k + d(\lambda, \mu) \quad (4.120)$$

donde $d(\lambda, \mu)$ es el resultado del problema primal descompuesto que se formula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar}_{(t,v,y,z,x,u,h,s)} \quad & \sum_{j \in J} \left\{ \sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] \right. \\ & - \sum_{k=1}^K \lambda_k t_{jk} - \sum_{k=1}^K \mu_k (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} + \sum_{k=1}^K \alpha_k \underline{p}_j v_{jk} \} \\ & \left. - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} \left[\sum_{k=1}^K \lambda_k p_{l(i)k} + \sum_{k=1}^K \mu_k (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.121)$$

sujeito a

$$s_j(t_j, v_j, y_j, z_j) \leq 0 \quad \forall j \quad (4.122)$$

$$s_i(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)}) \leq 0 \quad \forall i \quad (4.123)$$

Este problema se descompone de forma natural en un subproblema por cada central térmica y un subproblema por cada cuenca hidráulica.

El subproblema asociado a cada central térmica j se plantea:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar}_{(t_j, v_j, y_j, z_j)} \quad & \sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] \\ & - \left[\sum_{k=1}^K \lambda_k t_{jk} + \sum_{k=1}^K \mu_k (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} - \sum_{k=1}^K \alpha_k \underline{p}_j v_{jk} \right] \end{aligned} \quad (4.124)$$

sujeito a

$$s_j(t_j, v_j, y_j, z_j) \leq 0 \quad (4.125)$$

El subproblema asociado a la cuenca hidráulica i :

$$\text{Maximizar}_{(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)})} \quad \sum_{l(i) \in l(i)} \sum_{k=1}^K \left[\lambda_k p_{l(i)k} + \mu_k (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \right] \quad (4.126)$$

sujeito a

$$s_i(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)}) \leq 0 \quad (4.127)$$

El problema dual es el problema de maximización de la función dual $\phi(\lambda, \mu)$. Se plantea de la forma indicada en las ecuaciones (4.24)-(4.25) y se resuelve utilizando el algoritmo presentando en el apartado 4.2.2.

Análisis de los subproblemas

La única diferencia del subproblema térmico (ecuaciones (4.124)-(4.125)) que resulta en este modelo respecto al que resulta en el modelo 4 (apartado 4.3.4, ecuaciones (4.106)- (4.107)), está en el ingreso que recibe cada central por acoplar potencia. Por tanto, el multiplicador λ_k representa la remuneración por cada unidad de energía (MWh) producida, el multiplicador μ_k representa la remuneración por cada unidad de potencia (MW) acoplada y preparada para producir, o bien el pago unitario por el “hueco” de potencia, y el multiplicador α_k (tercer sumando del término de ingreso) representa la penalización que deberá pagar cada central térmica si está acoplada en el subperiodo k por cada unidad de potencia (MW) de mínimo técnico.

El subproblema hidráulico que resulta es el mismo que se deduce en el modelo 2 (apartado 4.3.2). Por tanto el significado de los multiplicadores es el mismo. Esto es, el multiplicador λ_k representa la remuneración por cada unidad de energía (MWh) producida durante el subperiodo k y el multiplicador μ_k representa el pago unitario por el “hueco” de potencia disponible durante el subperiodo k . Dadas las características de las centrales hidráulicas (se puede considerar que no tienen limitación de mínimo técnico o que la potencia mínima que pueden producir es cero), no tiene ningún sentido el multiplicador α_k .

De todo esto puede deducirse que desde el punto de vista de las centrales generadoras, el multiplicador λ_k representa la remuneración por cada unidad de energía (MWh) producida durante el subperiodo k , el multiplicador μ_k representa la remuneración por cada unidad de potencia disponible y preparada para producir (o “hueco” de potencia) durante el subperiodo k y el multiplicador α_k representa la penalización que deberá pagar cada central térmica si está acoplada en el subperiodo k por cada unidad de potencia (MW) de mínimo técnico. De forma equivalente desde el punto de vista del sistema el multiplicador λ_k representa la cantidad a pagar a cada central por cada unidad de energía (MWh) producida durante el subperiodo k , el multiplicador μ_k representa el pago unitario por el “hueco” de potencia (MW) disponible durante el subperiodo k y el multiplicador α_k representa el pago unitario que recibe el sistema (por parte de las centrales térmicas) por la potencia de mínimo técnico acoplada.

4.3.6 Modelo 6

Formulación de problema y resolución del problema dual

En este modelo las restricciones de carga consideradas son las ecuaciones (4.26), (4.29) y (4.31). Se definen tres vectores de multiplicadores de Lagrange:

λ asociado a las restricciones de demanda (4.26),

μ asociado a las restricciones de reserva rodante (4.29) y

α asociado a las restricciones de demanda mínima (4.31).

Para poder aplicar el procedimiento de la relajación lagrangiana las restricciones de reserva rodante (4.29) se formularán en la forma indicada en (4.30).

El problema primal se plantea a continuación:

$$\text{Minimizar}_{(t,v,y,z,x,u,h,s)} \quad f(t, v, y, z) = \sum_{j \in J} \sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] \quad (4.128)$$

sujeto a

$$s_j(t_j, v_j, y_j, z_j) \leq 0 \quad \forall j \quad (4.129)$$

$$s_i(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)}) \leq 0 \quad \forall i \quad (4.130)$$

$$\sum_{j \in J} t_{jk} + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k} = D_k \quad \forall k \quad (4.131)$$

$$\sum_{j \in J} \left[(\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} w_{jk} + r_j^s v_{jk} (1 - w_{jk}) \right] + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \geq R_k \quad \forall k \quad (4.132)$$

$$\sum_{j \in J} \underline{p}_j v_{jk} \leq D_k \quad \forall k \quad (4.133)$$

donde las ecuaciones (4.129) representan las restricciones que modelan las centrales térmicas (ecuaciones (3.36)-(3.44)) y las ecuaciones (4.130) representan las restricciones que modelan las cuencas hidráulicas (ecuaciones (3.45)-(3.51)).

La función lagrangiana resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t, v, y, z, x, u, h, s, \lambda, \mu) = & \sum_{j \in J} \sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] + \\ & \sum_{k=1}^K \mu_k \left[R_k - \sum_{j \in J} \left[(\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} w_{jk} + r_j^s v_{jk} (1 - w_{jk}) \right] - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \right] \\ & + \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(D_k - \sum_{j \in J} t_{jk} - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k} \right) \\ & + \sum_{k=1}^K \alpha_k \left(\sum_{j \in J} \underline{p}_j v_{jk} - D_k \right) \end{aligned} \quad (4.134)$$

La función dual se define de la siguiente manera:

$$\phi(\lambda, \mu) = \text{Minimizar}_{(t,v,y,z,x,u,h,s,\lambda,\mu)} \quad \mathcal{L}(t, v, y, z, x, u, h, s, \lambda, \mu) \quad (4.135)$$

sujeito a

$$s_j(t_j, v_j, y_j, z_j) \leq 0 \quad \forall j \quad (4.136)$$

$$s_i(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)}) \leq 0 \quad \forall i \quad (4.137)$$

Sustituyendo la ecuación (4.134) en la ecuación (4.135) y sacando fuera del problema de optimización los términos constantes (para este problema) resulta:

$$\phi(\lambda, \mu) = \sum_{k=1}^K \lambda_k D_k + \sum_{k=1}^K \mu_k R_k - \sum_{k=1}^K \alpha_k D_k + d(\lambda, \mu) \quad (4.138)$$

donde $d(\lambda, \mu)$ es el resultado del siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar}_{(t,v,y,z,x,u,h,s)} \quad & \sum_{j \in J} \left\{ \sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] \right. \\ & - \sum_{k=1}^K \lambda_k t_{jk} - \sum_{k=1}^K \mu_k \left[(\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} w_{jk} + r_j^s v_{jk} (1 - w_{jk}) \right] + \sum_{k=1}^K \alpha_k \underline{p}_j v_{jk} \} \\ & - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} \left[\sum_{k=1}^K \lambda_k p_{l(i)k} + \sum_{k=1}^K \mu_k (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \right] \end{aligned} \quad (4.139)$$

sujeito a

$$s_j(t_j, v_j, y_j, z_j) \leq 0 \quad \forall j \quad (4.140)$$

$$s_i(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)}) \leq 0 \quad \forall i \quad (4.141)$$

Este problema se descompone de forma natural en un subproblema por cada central térmica y un subproblema por cada cuenca hidráulica.

El subproblema asociado a cada central térmica j se plantea:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar}_{(t_j, v_j, y_j, z_j)} \quad & \sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] \\ & - \left\{ \sum_{k=1}^K \lambda_k t_{jk} + \sum_{k=1}^K \mu_k \left[(\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} w_{jk} + r_j^s v_{jk} (1 - w_{jk}) \right] - \sum_{k=1}^K \alpha_k \underline{p}_j v_{jk} \right\} \end{aligned} \quad (4.142)$$

sujeito a

$$s_j(t_j, v_j, y_j, z_j) \leq 0 \quad (4.143)$$

El subproblema asociado a la cuenca hidráulica i :

$$\text{Maximizar}_{(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)})} \quad \sum_{l(i) \in L(i)} \sum_{k=1}^K \left[\lambda_k p_{l(i)k} + \mu_k (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \right] \quad (4.144)$$

sujeto a

$$s_i(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)}) \leq 0 \quad (4.145)$$

El problema dual es el problema de maximización de la función dual $\phi(\lambda, \mu)$. Se plantea de la forma indicada en las ecuaciones (4.24)-(4.25) y se resuelve utilizando el algoritmo presentando en el apartado 4.2.2.

Análisis de los subproblemas

De nuevo y analizando la formulación de cada subproblema térmico (ecuaciones (4.142)- (4.143)), el primer término de la función objetivo representa el coste total en el que incurre cada central térmica j por producir y acoplar potencia durante todo el horizonte temporal analizado y que el segundo término representa el ingreso que recibe cada central térmica j por producir potencia o estar disponible para ello durante todo el horizonte temporal analizado. Se resuelve el problema de minimizar el balance *coste - ingreso* o bien de maximizar el beneficio neto (*ingreso - coste*). Así, para cada central térmica j , el multiplicador λ_k representa la remuneración por cada unidad de energía (MWh) producida durante el subperiodo k , el multiplicador μ_k representa la remuneración unitaria (por MW) por la contribución a la reserva de la central (siendo esta contribución el mínimo entre el “hueco” de potencia y la rampa de subida) y el multiplicador α_k es una penalización que deberá pagar cada central térmica si está acoplada en el subperiodo k por cada unidad de potencia (MW) de mínimo técnico.

De la misma forma puede observarse que la función objetivo del subproblema asociado a la cuenca hidráulica i (ecuaciones (4.144)- (4.145)) representa la suma de los beneficios de todas las centrales de la cuenca por producir energía o estar disponible para ello. El coste de producción de la energía hidráulica se considera despreciable. Así, para cada central de la cuenca el multiplicador λ_k representa la remuneración por cada unidad de energía (MWh) producida durante el subperiodo k y el multiplicador μ_k representa el pago unitario por el “hueco” de potencia disponible durante el subperiodo k . Dadas las características de las centrales hidráulicas (se puede considerar que no tienen limitación de mínimo técnico o que la potencia mínima que pueden producir es cero), no tiene ningún sentido el multiplicador α_k .

De todo esto puede deducirse que desde el punto de vista de las centrales generadoras, el multiplicador λ_k representa la remuneración por cada unidad de energía (MWh) producida durante el subperiodo k , el multiplicador μ_k representa la remuneración unitaria a la contribución a la reserva durante el subperiodo k y el multiplicador α_k representa la penalización que deberá pagar cada central térmica si está acoplada en el subperiodo k por cada unidad de potencia (MW) de mínimo técnico. De forma equivalente desde el punto de vista del sistema el multiplicador

λ_k representa la cantidad a pagar a cada central por cada unidad de energía (MWh) producida durante el subperiodo k , el multiplicador μ_k representa el pago unitario por la contribución a la reserva durante el subperiodo k y el multiplicador α_k representa el pago unitario que recibe el sistema (por parte de las centrales térmicas) por la potencia de mínimo técnico acoplada.

4.3.7 Modelo 7

Formulación de problema y resolución del problema dual

En este modelo las restricciones de carga consideradas son las ecuaciones (4.26), (4.28), (4.31), (4.32) y (4.33). Se definen cinco vectores de multiplicadores de Lagrange:

λ asociado a las restricciones de demanda (4.26),

μ asociado a las restricciones de reserva rodante (4.28),

α asociado a las restricciones de demanda mínima (4.31),

β^a asociado a las restricciones de regulación hacia arriba (4.32) y

β^b asociado a las restricciones de regulación hacia abajo (4.33)

El problema primal se formula a continuación:

$$\text{Minimizar}_{(t,v,y,z,x,u,h,s)} \quad f(t, v, y, z) = \sum_{j \in J} \sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] \quad (4.146)$$

sujeto a

$$s_j(t_j, v_j, y_j, z_j) \leq 0 \quad \forall j \quad (4.147)$$

$$s_i(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)}) \leq 0 \quad \forall i \quad (4.148)$$

$$\sum_{j \in J} t_{jk} + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} p_{l(i)k} = D_k \quad \forall k \quad (4.149)$$

$$\sum_{j \in J} (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \geq R_k \quad \forall k \quad (4.150)$$

$$\sum_{j \in J} \underline{p}_j v_{jk} \leq D_k \quad \forall k \quad (4.151)$$

$$\sum_{j \in J} (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \geq A_k \quad \forall k \quad (4.152)$$

$$\sum_{j \in J} (t_{jk} - \underline{p}_j) v_{jk} + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} (p_{l(i)k} - \underline{h}_{l(i)}) \geq B_k \quad \forall k \quad (4.153)$$

donde las ecuaciones (4.147) representan las restricciones que modelan las centrales térmicas (ecuaciones (3.36)-(3.44)) y las ecuaciones (4.148) representan las restricciones que modelan las

cuencas hidráulicas (ecuaciones (3.45)-(3.51)).

La función lagrangiana resulta:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(t, v, y, z, x, u, h, s, \lambda, \mu) = & \sum_{j \in j} \sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] + \\
 & \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk} - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k} \right) + \\
 & \sum_{k=1}^K \mu_k \left[R_k - \sum_{j \in j} (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \right] + \\
 & \sum_{k=1}^K \alpha_k \left(\sum_{j \in j} \underline{p}_j v_{jk} - D_k \right) + \\
 & \sum_{k=1}^K \beta_k^a \left[A_k - \sum_{j \in j} (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \right] + \\
 & \sum_{k=1}^K \beta_k^b \left[B_k - \sum_{j \in j} (t_{jk} - \underline{p}_j) v_{jk} - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (p_{l(i)k} - \underline{h}_{l(i)}) \right]
 \end{aligned} \tag{4.154}$$

La función dual se define:

$$\phi(\lambda, \mu) = \text{Minimizar}_{(t,v,y,z,x,u,h,s,\lambda,\mu)} \mathcal{L}(t, v, y, z, x, u, h, s, \lambda, \mu) \tag{4.155}$$

sujeto a

$$s_j(t_j, v_j, y_j, z_j) \leq 0 \quad \forall j \tag{4.156}$$

$$s_i(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)}) \leq 0 \quad \forall i \tag{4.157}$$

Sustituyendo la ecuación (4.154) en la ecuación (4.155) y sacando fuera del problema de optimización los términos constantes (para este problema) resulta:

$$\phi(\lambda, \mu) = \sum_{k=1}^K \lambda_k D_k + \sum_{k=1}^K \mu_k R_k - \sum_{k=1}^K \alpha_k D_k + \sum_{k=1}^K \beta_k^a A_k + \sum_{k=1}^K \beta_k^b B_k + d(\lambda, \mu) \tag{4.158}$$

donde $d(\lambda, \mu)$ es el resultado del problema primal descompuesto que se formula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar}_{(t,v,y,z,x,u,h,s)} & \sum_{j \in j} \left[\sum_{k=1}^K (v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d)) \right. \\
 & \left. - \sum_{k=1}^K \lambda_k t_{jk} - \sum_{k=1}^K \mu_k (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} + \sum_{k=1}^K \alpha_k \underline{p}_j v_{jk} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=1}^K \beta_k^a (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} - \sum_{k=1}^K \beta_k^b (t_{jk} - \underline{p}_j) v_{jk} \Big] \\
& - \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{l(i) \in \mathcal{L}(i)} \left[\sum_{k=1}^K \lambda_k p_{l(i)k} + \sum_{k=1}^K \mu_k (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^K \beta_k^a (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) + \sum_{k=1}^K \beta_k^b (p_{l(i)k} - \underline{h}_{l(i)}) \right] \quad (4.159)
\end{aligned}$$

sujeto a

$$s_j(t_j, v_j, y_j, z_j) \leq 0 \quad \forall j \quad (4.160)$$

$$s_i(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)}) \leq 0 \quad \forall i \quad (4.161)$$

Este problema se descompone de forma natural en un subproblema por cada central térmica y un subproblema por cada cuenca hidráulica.

El subproblema asociado a cada central térmica j se plantea:

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar}_{(t_j, v_j, y_j, z_j)} & \sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] \\
& - \left[\sum_{k=1}^K \lambda_k t_{jk} + \sum_{k=1}^K \mu_k (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} - \sum_{k=1}^K \alpha_k \underline{p}_j v_{jk} \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^K \beta_k^a (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} + \sum_{k=1}^K \beta_k^b (t_{jk} - \underline{p}_j) v_{jk} \right] \quad (4.162)
\end{aligned}$$

sujeto a

$$s_j(t_j, v_j, y_j, z_j) \leq 0 \quad (4.163)$$

El subproblema asociado a la cuenca hidráulica i :

$$\begin{aligned}
\text{Maximizar}_{(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)})} & \sum_{l(i) \in \mathcal{L}(i)} \sum_{k=1}^K \left[\lambda_k p_{l(i)k} + \mu_k (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) + \right. \\
& \left. \beta_k^a (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) + \beta_k^b (p_{l(i)k} - \underline{h}_{l(i)}) \right] \quad (4.164)
\end{aligned}$$

sujeto a

$$s_i(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)}) \leq 0 \quad (4.165)$$

El problema dual es el problema de maximización de la función dual $\phi(\lambda, \mu)$. Se plantea de la forma indicada en las ecuaciones (4.24)-(4.25) y se resuelve utilizando el algoritmo presentando en el apartado 4.2.2.

Análisis de los subproblemas

Este modelo se diferencia del modelo 5 (apartado 4.3.5) en la inclusión de las restricciones de regulación en su forma más simple (ecuaciones (4.32) y (4.32)). Como las restricciones de regulación afectan tanto a las centrales térmicas como a las centrales hidráulicas se modifican los dos tipos de subproblemas (térmicos e hidráulicos) apareciendo dos términos adicionales relacionados con las restricciones de regulación hacia arriba y las restricciones de regulación hacia abajo.

Para cada central térmica, el multiplicador λ_k representa la remuneración por cada unidad de energía (MWh) producida en el subperiodo k , el multiplicador μ_k representa la remuneración por cada unidad de potencia (MW) acoplada y preparada para producir en el subperiodo k , o bien el pago unitario por el “hueco” de potencia, el multiplicador α_k representa la penalización que deberá pagar cada central térmica si está acoplada en el subperiodo k por cada unidad de potencia (MW) de mínimo técnico, el multiplicador β_k^a representa la remuneración por cada unidad de potencia disponible para regular hacia arriba en el subperiodo k , o bien por el “hueco” disponible hacia arriba y el multiplicador β_k^b representa la remuneración por cada unidad de potencia disponible para regular hacia abajo en el subperiodo k , o bien por el “hueco” disponible hacia abajo.

Para las centrales hidráulicas y los multiplicadores λ_k , μ_k , β_k^a y β_k^b tienen el mismo significado económico, es decir: el multiplicador λ_k representa la remuneración por cada unidad de energía (MWh) producida durante el subperiodo k , el multiplicador μ_k representa el pago unitario por el “hueco” de potencia disponible durante el subperiodo k , el multiplicador β_k^a representa la remuneración por cada unidad de potencia disponible para regular hacia arriba en el subperiodo k , o bien por el “hueco” disponible hacia arriba y el multiplicador β_k^b representa la remuneración por cada unidad de potencia disponible para regular hacia abajo en el subperiodo k , o bien por el “hueco” disponible hacia abajo. El multiplicador α_k no tiene significado para estas centrales.

Por tanto desde el punto de vista de las centrales generadoras, el multiplicador λ_k representa la remuneración por cada unidad de energía (MWh) producida durante el subperiodo k , el multiplicador μ_k representa la remuneración por cada unidad de potencia disponible y preparada para producir (o “hueco” de potencia) durante el subperiodo k , el multiplicador α_k representa la penalización que deberá pagar cada central térmica si está acoplada en el subperiodo k por cada unidad de potencia (MW) de mínimo técnico, el multiplicador β_k^a representa la remuneración por cada unidad de potencia disponible para regular hacia arriba en el subperiodo k , o bien por el “hueco” disponible hacia arriba y el multiplicador β_k^b representa la remuneración por cada unidad de potencia disponible para regular hacia abajo en el subperiodo k , o bien por

el “hueco” disponible hacia abajo. De forma equivalente desde el punto de vista del sistema, el multiplicador λ_k representa la cantidad a pagar a cada central por cada unidad de energía (MWh) producida durante el subperiodo k , el multiplicador μ_k representa el pago unitario por el “hueco” de potencia (MW) disponible durante el subperiodo k , el multiplicador α_k representa el pago unitario que recibe el sistema (por parte de las centrales térmicas) por la potencia de mínimo técnico acoplada en el subperiodo k , el multiplicador β_k^a representa el pago unitario por la capacidad de regular hacia arriba en el subperiodo k y el multiplicador β_k^b representa el pago unitario por la capacidad de regular hacia abajo.

4.3.8 Modelo 8

Formulación de problema y resolución del problema dual

En este modelo las restricciones de carga consideradas son las ecuaciones (4.26), (4.29), (4.31), (4.34) y (4.35). Se definen cinco vectores de multiplicadores de Lagrange:

λ asociado a las restricciones de demanda (4.26),

μ asociado a las restricciones de reserva rodante (4.29),

α asociado a las restricciones de demanda mínima (4.31),

β^a asociado a las restricciones de regulación hacia arriba (4.34) y

β^b asociado a las restricciones de regulación hacia abajo (4.35)

Para poder aplicar el procedimiento de la relajación lagrangiana las restricciones de reserva rodante (4.29) se formulan en la forma indicada en (4.30) y las restricciones de regulación hacia arriba y hacia abajo se formulan en la forma indicada en (4.34) y (4.35).

El problema primal se plantea a continuación:

$$\text{Minimizar}_{(t,v,y,z,x,u,h,s)} \quad f(t, v, y, z) = \sum_{j \in J} \sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] \quad (4.166)$$

sujeito a

$$s_j(t_j, v_j, y_j, z_j) \leq 0 \quad \forall j \quad (4.167)$$

$$s_i(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)}) \leq 0 \quad \forall i \quad (4.168)$$

$$\sum_{j \in J} t_{jk} + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} p_{l(i)k} = D_k \quad \forall k \quad (4.169)$$

$$\sum_{j \in J} \left[(\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} w_{jk} + r_j^s v_{jk} (1 - w_{jk}) \right] + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \geq R_k \quad \forall k \quad (4.170)$$

$$\sum_{j \in j} \underline{p}_j v_{jk} \leq D_k \quad \forall k \quad (4.171)$$

$$\sum_{j \in j} \left[(\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} u_{jk}^s + r_j^s v_{jk} (1 - u_{jk}^s) \right] + \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \geq A_k \quad \forall k \quad (4.172)$$

$$\sum_{j \in j} \left[(t_{jk} - \underline{p}_j) v_{jk} u_{jk}^b + r_j^b v_{jk} (1 - u_{jk}^b) \right] + \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (p_{l(i)k} - \underline{h}_{l(i)}) \geq B_k \quad \forall k \quad (4.173)$$

donde las ecuaciones (4.167) representan las restricciones que modelan las centrales térmicas (ecuaciones (3.36)-(3.44)) y las ecuaciones (4.168) representan las restricciones que modelan las cuencas hidráulicas (ecuaciones (3.45)-(3.51)).

La función lagrangiana resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t, v, y, z, x, u, h, s, \lambda, \mu) = & \sum_{j \in j} \sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] + \\ & \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk} - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k} \right) + \\ & \sum_{k=1}^K \mu_k \left[R_k - \sum_{j \in j} \left[(\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} w_{jk} + r_j^s v_{jk} (1 - w_{jk}) \right] - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \right] + \\ & \sum_{k=1}^K \alpha_k \left(\sum_{j \in j} \underline{p}_j v_{jk} - D_k \right) + \\ & \sum_{k=1}^K \beta_k^a \left[A_k - \sum_{j \in j} \left[(\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} u_{jk}^s + r_j^s v_{jk} (1 - u_{jk}^s) \right] \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \right] + \\ & \sum_{k=1}^K \beta_k^b \left[B_k - \sum_{j \in j} \left[(t_{jk} - \underline{p}_j) v_{jk} u_{jk}^b + r_j^b v_{jk} (1 - u_{jk}^b) \right] \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (p_{l(i)k} - \underline{h}_{l(i)}) \right] \quad (4.174) \end{aligned}$$

La función dual se define de la siguiente forma:

$$\phi(\lambda, \mu) = \text{Minimizar}_{(t, v, y, z, x, u, h, s, \lambda, \mu)} \mathcal{L}(t, v, y, z, x, u, h, s, \lambda, \mu) \quad (4.175)$$

sujeto a

$$s_j(t_j, v_j, y_j, z_j) \leq 0 \quad \forall j \quad (4.176)$$

$$s_i(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)}) \leq 0 \quad \forall i \quad (4.177)$$

Sustituyendo la ecuación (4.174) en la ecuación (4.175) y sacando fuera del problema de optimización los términos constantes (para este problema) resulta:

$$\phi(\lambda, \mu) = \sum_{k=1}^K \lambda_k D_k + \sum_{k=1}^K \mu_k R_k - \sum_{k=1}^K \alpha_k D_k + \sum_{k=1}^K \beta_k^a A_k + \sum_{k=1}^K \beta_k^b B_k + d(\lambda, \mu) \quad (4.178)$$

donde $d(\lambda, \mu)$ es el resultado del siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar}_{(t,v,y,z,x,u,h,s)} \quad & \sum_{j \in J} \left[\sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] \right. \\
 & - \sum_{k=1}^K \lambda_k t_{jk} - \sum_{k=1}^K \mu_k \left[(\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} w_{jk} + r_j^s v_{jk} (1 - w_{jk}) \right] + \sum_{k=1}^K \alpha_k \underline{p}_j v_{jk} \\
 & - \sum_{k=1}^K \beta_k^a \left[(\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} u_{jk}^s + r_j^s v_{jk} (1 - u_{jk}^s) \right] - \sum_{k=1}^K \beta_k^b \left[(t_{jk} - \underline{p}_j) v_{jk} u_{jk}^b + r_j^b v_{jk} (1 - u_{jk}^b) \right] \Big] \\
 & - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} \left[\sum_{k=1}^K \lambda_k p_{l(i)k} + \sum_{k=1}^K \mu_k (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \right. \\
 & \left. + \sum_{k=1}^K \beta_k^a (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) + \sum_{k=1}^K \beta_k^b (p_{l(i)k} - \underline{h}_{l(i)}) \right] \tag{4.179}
 \end{aligned}$$

sujeto a

$$s_j(t_j, v_j, y_j, z_j) \leq 0 \quad \forall j \tag{4.180}$$

$$s_i(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)}) \leq 0 \quad \forall i \tag{4.181}$$

Este problema se descompone de forma natural en un subproblema por cada central térmica y un subproblema por cada cuenca hidráulica.

El subproblema asociado a cada central térmica j se plantea:

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar}_{(t_j, v_j, y_j, z_j)} \quad & \sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] \\
 & - \left[\sum_{k=1}^K \lambda_k t_{jk} + \sum_{k=1}^K \mu_k \left[(\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} w_{jk} + r_j^s v_{jk} (1 - w_{jk}) \right] - \sum_{k=1}^K \alpha_k \underline{p}_j v_{jk} \right. \\
 & - \sum_{k=1}^K \beta_k^a \left[(\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} u_{jk}^s + r_j^s v_{jk} (1 - u_{jk}^s) \right] \\
 & \left. - \sum_{k=1}^K \beta_k^b \left[(t_{jk} - \underline{p}_j) v_{jk} u_{jk}^b + r_j^b v_{jk} (1 - u_{jk}^b) \right] \right] \tag{4.182}
 \end{aligned}$$

sujeto a

$$s_j(t_j, v_j, y_j, z_j) \leq 0 \tag{4.183}$$

El subproblema asociado a la cuenca hidráulica i :

$$\begin{aligned}
 \text{Maximizar}_{(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)})} \quad & \sum_{l(i) \in l(i)} \sum_{k=1}^K \left[\lambda_k p_{l(i)k} + \mu_k (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \right. \\
 & \left. + \beta_k^a (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) + \beta_k^b (p_{l(i)k} - \underline{h}_{l(i)}) \right] \tag{4.184}
 \end{aligned}$$

sujeto a

$$s_i(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)}) \leq 0 \quad (4.185)$$

El problema dual es el problema de maximización de la función dual $\phi(\lambda, \mu)$. Se plantea de la forma indicada en las ecuaciones (4.24)-(4.25) y se resuelve utilizando el algoritmo presentando en el apartado 4.2.2.

Análisis de los subproblemas

De nuevo y analizando la formulación de cada subproblema térmico (ecuaciones (4.182)- (4.183)), se puede observar que el primer término de la función objetivo representa el coste total en el que incurre cada central térmica j por producir y acoplar potencia durante todo el horizonte temporal analizado y que el segundo término representa el ingreso que recibe cada central térmica j por producir potencia, estar disponible para ello o por regular durante todo el horizonte temporal analizado. Se resuelve el problema de minimizar el balance *coste - ingreso* o bien de maximizar el beneficio neto (*ingreso - coste*). Así, para cada central térmica j , el multiplicador λ_k representa la remuneración por cada unidad de energía (MWh) producida durante el subperiodo k , el multiplicador μ_k representa la remuneración unitaria (por MW) a la contribución a la reserva de la central (siendo esta contribución el mínimo entre el “hueco” de potencia y la rampa de subida), el multiplicador α_k es una penalización que deberá pagar cada central térmica si está acoplada en el subperiodo k por cada unidad de potencia (MW) de mínimo técnico, el multiplicador β_k^a representa la remuneración por cada unidad de potencia disponible para regular hacia arriba en el subperiodo k (siendo la potencia disponible para regular hacia arriba el mínimo entre el “hueco” disponible hacia arriba y la rampa de subida de la central) y, de forma análoga, el multiplicador β_k^b representa la remuneración por cada unidad de potencia disponible para regular hacia abajo en el subperiodo k (siendo la potencia disponible para regular hacia abajo el mínimo entre el “hueco” disponible hacia abajo y la rampa de bajada de la central)

De la misma forma puede observarse que la función objetivo del subproblema asociado a la cuenca hidráulica i (ecuaciones (4.184)- (4.185)) representa la suma de los beneficios de todas las centrales de la cuenca por producir energía o estar disponible para ello. El coste de producción de la energía hidráulica se considera despreciable. Así, para cada central de la cuenca el multiplicador λ_k representa la remuneración por cada unidad de energía (MWh) producida durante el subperiodo k , el multiplicador μ_k representa el pago unitario por el “hueco” de potencia disponible durante el subperiodo k , el multiplicador β_k^a representa la remuneración por cada unidad de potencia disponible para regular hacia arriba en el subperiodo k , o bien por el “hueco” disponible hacia arriba y el multiplicador β_k^b representa la remuneración por cada unidad de potencia disponible para regular hacia abajo en el subperiodo k , o bien por el “hueco” disponible hacia

abajo. Dadas las características de las centrales hidráulicas (se puede considerar que no tienen limitación de mínimo técnico o que la potencia mínima que pueden producir es cero), no tiene ningún sentido el multiplicador α_k .

De todo esto puede deducirse que desde el punto de vista de las centrales generadoras, el multiplicador λ_k representa la remuneración por cada unidad de energía (MWh) producida durante el subperiodo k , el multiplicador μ_k representa la remuneración unitaria a la contribución a la reserva durante el subperiodo k , el multiplicador α_k representa la penalización que deberá pagar cada central térmica si está acoplada en el subperiodo k por cada unidad de potencia (MW) de mínimo técnico, el multiplicador β_k^a representa la remuneración por cada unidad de potencia disponible para regular hacia arriba en el subperiodo k y el multiplicador β_k^b representa la remuneración por cada unidad de potencia disponible para regular hacia abajo en el subperiodo k . De forma equivalente desde el punto de vista del sistema el multiplicador λ_k representa la cantidad a pagar a cada central por cada unidad de energía (MWh) producida durante el subperiodo k , el multiplicador μ_k representa el pago unitario por la contribución a la reserva durante el subperiodo k , el multiplicador α_k representa el pago unitario que recibe el sistema (por parte de las centrales térmicas) por la potencia de mínimo técnico acoplada y los multiplicadores β_k^a y β_k^b representan el pago por cada unidad de potencia (MW) disponible para regular hacia arriba y hacia abajo respectivamente.

4.4 Aplicación del algoritmo propuesto en los sistemas de energía eléctrica centralizados y en los sistemas de energía eléctrica desregulados

Este apartado se centra en la utilidad del modelo de coordinación hidrotérmica en el corto plazo que se propone en esta tesis tanto en los tradicionales, y aún muy numerosos, sistemas de energía eléctrica centralizados como en los modernos, e incipientes, sistemas desregulados o liberalizados.

La aplicación del modelo propuesto en entornos centralizados es directa. Es para este tipo de entornos para lo que fue concebido. Por otra parte, el mecanismo de la relajación lagrangiana simula el funcionamiento de un mercado de energía. Esto quiere decir que también resulta útil el modelo propuesto en los entornos liberalizados.

Parte de lo que en este apartado se afirma acerca de la forma de aplicar el modelo propuesto a un sistema liberalizado, como el español, es, dada la juventud de la nueva regulación del sector eléctrico español, interpretación personal de la autora que se basa fundamentalmente, ya que hay muy pocos documentos públicos al respecto, en la información obtenida a través de una

colaboración con Red Eléctrica de España (REE) entre abril y julio de 1997.

4.4.1 Aplicación del algoritmo en un sistema de energía eléctrica centralizado

Como ya se ha indicado (apartado 1.2) el problema de la coordinación hidrotérmica se plantea desde la perspectiva de los sistemas de energía eléctrica centralizados o regulados. La aplicación del modelo propuesto en este entorno es pues directa.

La solución de la *Fase 2* del algoritmo propuesto (apartado 4.2.3 y capítulo 7) determina las variables de acoplamiento de las centrales térmicas. Esta es la salida fundamental de un modelo de coordinación hidrotérmica. Una vez, decididas las variables de acoplamiento y ejecutando un algoritmo de despacho económico (*Fase 3* del algoritmo propuesto), se establece la potencia a producir por las centrales hidráulicas y las centrales térmicas acopladas de forma que se cumpla la demanda a mínimo coste.

Además de determinar las variables de acoplamiento de las centrales térmicas y las potencias generadas por las centrales térmicas e hidráulicas en cada subperiodo del horizonte temporal analizado, el modelo propuesto proporciona una información adicional que resulta de gran utilidad: los valores de las variables duales o multiplicadores de Lagrange.

En el apartado 4.3 se especifica el significado de los multiplicadores de Lagrange en los ocho modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo que se diferencian en las restricciones globales de desigualdad formuladas. Así, los valores de los multiplicadores al final de la *Fase 2* contienen información económica que puede resultar de utilidad para la elaboración de las tarifas de energía eléctrica.

Queda hacer una pequeña observación acerca de la aplicación del método propuesto, en un entorno regulado, cuando en el sistema existen varios grupos de generación iguales. Esta situación es relativamente habitual ya que a menudo una central térmica está formada por varios grupos² idénticos. El inconveniente que esto puede ocasionar al aplicar un procedimiento de relajación lagrangiana y la fácil solución a este problema se especifican a continuación.

Tratamiento de grupos de generación idénticos

Al emplear el mecanismo de la relajación lagrangiana, las centrales determinan su producción en respuesta a unas señales económicas, que son los multiplicadores de Lagrange o las variables duales, de forma que se maximice su beneficio, si se trata de una central térmica, o el beneficio

²A lo largo de casi todo este documento se habla del acoplamiento y producción de centrales. Esto es lo habitual en la terminología empleada en los sistemas de energía eléctrica. Sin embargo en este apartado es conveniente distinguir entre grupo y central. En el apartado 3.1 se aclara la diferencia entre grupo y central.

de las centrales de la cuenca, si se trata de una central hidráulica. Esta es la misión de cada subproblema asociado a cada central térmica y de cada subproblema asociado a cada cuenca hidráulica en que se descompone el problema primal relajado (apartado 4.2.2) del algoritmo propuesto. Si no existen restricciones de cuadrilla que acoplen los grupos que forman parte de una central térmica, entonces se define un subproblema por cada grupo.

Esto quiere decir que dos grupos térmicos idénticos (con la misma función de coste de producción), siempre que las ligaduras temporales o las restricciones de cuadrilla no lo impidan, reaccionarán de la misma forma ante las variables duales en cierto subperiodo tendiendo a producir la misma cantidad de potencia. Las ligaduras temporales que pueden evitar este igual comportamiento, si los grupos se encuentran en distinta situación (distinta producción en el subperiodo anterior o distinto número de horas acoplado o desacoplado), son: las restricciones de rampa máxima de subida y bajada de carga, las restricciones de tiempo mínimo de funcionamiento y parada o bien un coste de arranque distinto debido a una temperatura de la caldera diferente. La temperatura de la caldera depende del número de horas que lleve desacoplado el grupo.

Si dos grupos reaccionan igual ante las variables duales de cierto subperiodo, puede ocurrir que, si estas variables no llegan a cierto umbral, ninguno de ellos produzca potencia (o produzcan únicamente el mínimo técnico) o bien ninguno de ellos se acople a la red, de forma que es posible que haya bastante defecto de potencia producida y/o acoplada (para cumplir la demanda y/o otras restricciones del sistema). Sin embargo, si las variables duales llegan al umbral, entonces, y dado el idéntico comportamiento, puede que los dos grupos produzcan (o produzcan la misma potencia por encima del mínimo técnico) o bien que los dos grupos se acoplen a pesar de que el sistema sólo requiera del acoplamiento o de la producción de uno de los grupos.

La forma de solucionar este inconveniente en un entorno regulado, donde el operador del sistema es el que decide qué grupos van a estar acoplados y cuánta potencia va a generar cada uno, es bien simple: basta con modificar ligeramente el coste de los grupos térmicos idénticos. Esta modificación deberá ser muy pequeña de forma que el coste total de explotación del sistema no se vea alterado. Por pequeña que sea la modificación (siempre que esté por encima del error de precisión del ordenador), el mecanismo de la relajación lagrangiana hará que el grupo que ligeramente más barato produzca más, o se acople, y que el grupo que es ligeramente más caro produzca menos, o bien no se acople.

4.4.2 Aplicación del algoritmo en un sistema de energía eléctrica liberalizado

Los sistemas de energía eléctrica están en proceso de cambio (apartado 1.1). Desde el tradicional enfoque regulado o centralizado, donde un regulador del sistema toma todas las decisiones relativas tanto a la planificación de la explotación como a la planificación de inversiones, se está evolucionando hacia un enfoque desregulado, siguiendo las tendencias liberalizadoras de la economía, en el que la compra/venta de energía eléctrica se lleva a cabo siguiendo las leyes del libre mercado.

Aunque son aún muy pocos los sistemas de energía eléctrica (típicamente países o estados) que han establecido ya las nuevas bases de un negocio de la energía eléctrica liberalizado, son muchos los estudios que a nivel mundial se están desarrollando en este campo con el objetivo de analizar los beneficios que el funcionamiento desregulado puede acarrear.

España es uno de los pocos países en el que la energía eléctrica se compra en un mercado mayorista de producción. La reforma del sector eléctrico requiere la creación de nuevos organismos independientes que velen por el funcionamiento del mercado. En España, el ente regulador es la Comisión Nacional del Sistema Eléctrico (CNSE) que se apoya en dos organizaciones fundamentales: el operador del mercado y el operador del sistema (apartado 1.1).

El operador del mercado se ocupa de la gestión económica del mercado. El operador del sistema se ocupa de la gestión técnica del mercado, esto es, se encarga de que el sistema de energía eléctrica funcione y de que el suministro de energía eléctrica tenga un adecuado índice de calidad y seguridad.

En este apartado se compara el funcionamiento de un mercado de energía eléctrica con el mecanismo de la relajación lagrangiana. Esto permite que el algoritmo propuesto pueda resultar una herramienta de utilidad tanto para el operador del mercado como para el operador del sistema de un sistema de energía eléctrica liberalizado.

Supóngase, en primer lugar, que se plantea un problema de coordinación hidrotérmica en el corto plazo en el que las únicas restricciones globales consideradas son las restricciones de demanda en cada subperiodo (por ejemplo en cada hora) del horizonte temporal analizado. Al emplear técnicas de relajación lagrangiana, el mecanismo de actualización de multiplicadores puede interpretarse de la siguiente forma. Un regulador del mercado propone precios horarios de la energía, que son los multiplicadores de Lagrange de las restricciones de demanda o bien las variables duales del problema dual. Los generadores del sistema planifican, en respuesta a estos precios, su explotación en el horizonte temporal considerado tratando de maximizar sus beneficios. Cada generador térmico resuelve un problema de optimización, mientras que los

generadores de una misma cuenca hidráulica resuelven un problema de optimización de los beneficios de todas las centrales de la cuenca. Cada uno de estos subproblemas de maximización de beneficios son los subproblemas en que se descompone el problema primal relajado (apartado 4.2.2). Los generadores responden pues al regulador del mercado con la potencia que están dispuestos a generar en cada subperiodo del horizonte temporal considerado. El regulador del mercado, con las respuestas de los generadores, actualiza los precios o los multiplicadores. Uno de los procedimientos de actualización, el más simple y el más intuitivo, es el siguiente: en aquellos subperiodos en que no se cumpla la demanda se aumenta el precio de la energía (que es el multiplicador asociado a la restricción de demanda en este subperiodo) y en aquellos subperiodos en que haya exceso de producción se disminuyen los precios. Este es el tradicional método del subgradiente empleado en la actualización de multiplicadores (apartado 6.6.1), empleando otros métodos más sofisticados (capítulo 6) se acelera la convergencia.

El regulador envía los nuevos precios horarios de energía a los generadores. Estos, de nuevo, planifican su producción en respuesta a estos precios y mandan al regulador las nuevas producciones horarias. El regulador actualiza otra vez los precios. El proceso continua hasta que se alcancen los criterios de convergencia (típicamente que se pueda satisfacer la demanda del sistema de la forma más económica posible). Una vez alcanzada la convergencia, los precios horarios de energía quedan definidos. Entonces aquellos generadores que, con esta remuneración, sean capaces de, al menos, recuperar sus costes, serán los que suministren la demanda del sistema en cada hora.

Existe pues una analogía directa entre el funcionamiento de un mercado y el mecanismo de la relajación lagrangiana. Utilizando el método de la relajación lagrangiana, cada generador planifica su producción para maximizar su beneficio. Esto es lo que hacen los generadores en un mercado de libre competencia. Por otra parte los generadores reciben, en el mecanismo de la relajación lagrangiana, señales económicas. En un mercado libre son los precios los que mueven a los vendedores y compradores.

La diferencia fundamental entre el mecanismo de la relajación lagrangiana y el funcionamiento de un mercado en un entorno de competencia es que, en el mecanismo de la relajación lagrangiana, la demanda es un agente estático que no reacciona ante los precios del mercado. En un mercado de competencia los consumidores reaccionan ante los precios de forma que cuando el precio de un producto es elevado, la demanda del mismo es reducida y viceversa. Sin embargo, el libre mercado de la energía es aún muy joven y la elasticidad de la demanda es todavía muy reducida. En España la demanda es, hoy día, un agente estático. Hace falta un proceso de maduración y asentamiento para que la demanda responda a los precios del mercado.

Aunque el mecanismo de determinación de los precios de la energía eléctrica en España se hace

a través de la casación (o cruce) de las curvas de ofertas de venta y ofertas de compra (está última curva es independiente de los precios), el método propuesto sirve para realizar estudios de simulación del funcionamiento de mercado.

Habitualmente los modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo incluyen restricciones de demanda y restricciones de reserva rodante. La analogía del mecanismo de la relajación lagrangiana, incluyéndose restricciones de demanda y de reserva rodante, con el mercado (anteriormente descrito) en el que el regulador propone precios, los generadores responden y el regulador actualiza los precios, se mantiene. La única diferencia es que, en este caso, el regulador no sólo propone precios horarios de energía sino también precios horarios por contribuir a la reserva rodante del sistema.

Si se consideran modelos de coordinación hidrotérmica más completos en los que se incluyen, además de las restricciones de demanda y reserva rodante, restricciones de demanda mínima (importante en los sistemas de energía eléctrica en que los mínimos técnicos de un número considerable de centrales sea elevado) y/o restricciones de regulación hacia arriba y hacia abajo, entonces la analogía del mecanismo de la relajación lagrangiana con el mercado se mantiene sólo que, en este caso, el regulador propone precios horarios de la energía, la contribución a la reserva rodante y la contribución a la regulación hacia arriba y hacia abajo así como una penalización por cada MW de mínimo técnico acoplado. Los generadores maximizan sus beneficios atendiendo a las remuneraciones y penalizaciones que pueden recibir.

Los multiplicadores asociados a las restricciones de demanda mínima (ecuaciones (4.31)) son el único elemento que, en el mecanismo de la relajación lagrangiana, diferencia a dos centrales del mismo coste de producción pero de distinta potencia de mínimo técnico. Por otra parte, y en opinión de la autora, el mercado no debería tratar de igual forma dos ofertas de generación del mismo coste variable pero distinta potencia de mínimo técnico. En igualdad de condiciones el mercado debería escoger la oferta que permite un funcionamiento más flexible del sistema, en este caso la central de menor mínimo técnico. Sólo si no hay riesgo de que se produzcan infactibilidades en las restricciones de demanda (por ser la suma de los mínimos técnicos de las centrales acopladas mayor que la demanda del sistema), dos ofertas de generación al mismo coste deberían recibir idéntico tratamiento.

Resulta por tanto conveniente, a la hora de simular el funcionamiento del mercado, la inclusión de penalizaciones por potencia de mínimo técnico. Así, en aquellos subperiodos en que el exceso de potencia de mínimo técnico de las centrales acopladas pueda producir infactibilidades en las restricciones de demanda, los multiplicadores asociados las restricciones de demanda mínima serán distintos de cero, en consecuencia, se hará efectiva la penalización y se encontrará una solución factible. En los subperiodos en que no haya riesgo de infactibilidades por excesiva po-

tencia de mínimo técnico acoplada, los multiplicadores asociados a las restricciones de demanda mínima serán nulos.

Es importante destacar que el inconveniente, fácilmente subsanable, que se presenta en los entornos centralizados cuando se dispone de grupos de generación idénticos (apartado 4.4.1), desaparece en los entornos desregulados o liberalizados. En un entorno liberalizado el mercado debe ser transparente y ecuánime con todos los generadores. Ello quiere decir que se debe dar el mismo tratamiento a todos los grupos sin favorecer a unos frente a otros (que es lo que se hace en entornos centralizados al alterar ligeramente los costes de los grupos idénticos). Por tanto, lo que era una desventaja en entornos centralizados se convierte en una buena propiedad en los nuevos entornos liberalizados.

Un modelo de coordinación hidrotérmica como el propuesto que se emplee por el operador del mercado de un entorno liberalizado, debe incluir al menos las restricciones de demanda y de reserva rodante. Además las restricciones de reserva rodante a considerar deberían ser de los tipos modelados por las ecuaciones (4.28) o (4.29). Así se estimula al acoplamiento de aquellas centrales cuyo nivel de generación no es suficiente para compensar los gastos del acoplamiento, remunerándolas por su contribución a las restricciones de reserva rodante.

En un sistema en que los mínimos técnicos de un número elevado de centrales fuera elevado, el modelo de coordinación hidrotérmica útil para el operador del mercado también debe incluir las restricciones de demanda mínima.

Para el operador del sistema de un entorno liberalizado, es una herramienta útil un modelo de coordinación hidrotérmica como el que se propone en esta tesis que incluya las restricciones de demanda, reserva rodante, demanda mínima y regulación hacia arriba y hacia abajo. Las restricciones de reserva rodante se deben modelar, en este caso, utilizando las ecuaciones (4.29) que son las que mejor garantizan la seguridad del sistema). De igual modo las restricciones de regulación hacia arriba y hacia abajo se deben modelar utilizando las ecuaciones (4.34)-(4.35).

Queda así justificada la utilidad del modelo propuesto, particularmente de las dos primeras fases, para simular el comportamiento del mercado, en un entorno de libre competencia, tanto desde el punto de vista del operador del mercado como desde el punto de vista del operador del sistema.

La *Fase 3*, que es un despacho económico de las centrales acopladas (quedando las centrales acopladas determinadas al final de la *Fase 2*), no es necesaria para efectuar la venta en el mercado de energía con, típicamente, un día de antelación ya que no proporciona, de forma directa, información económica, además de que no altera las centrales acopladas respecto a la *Fase 2*.

Capítulo 5

Solución del problema primal relajado

5.1 Introducción

Este capítulo se centra en la resolución de los subproblemas en que se descompone el problema primal relajado (capítulo 4). Se divide en dos partes. En la primera parte se trata la resolución de los subproblemas térmicos mediante técnicas de programación dinámica (apartado 5.2) y en la segunda parte, la resolución de los subproblemas hidráulicos (apartado 5.3).

El subproblema asociado a cada central térmica es el problema de la planificación de la explotación de la misma, atendiendo a señales económicas, en cada subperiodo del horizonte temporal considerado. Se emplean técnicas de programación dinámica para su resolución. En el apartado 5.2.1 se introducen las técnicas de programación dinámica. En el apartado 5.2.2 se describe el procedimiento de resolución empleado para resolver el subproblema asociado a cada central térmica mediante técnicas de programación dinámica. Se presentan dos tipos de definición de estado y, ligados a ellos, dos tipos de diagramas de estados. Con estos dos tipos de diagramas de estados se pueden definir dos procedimientos de resolución de cada subproblema térmico mediante técnicas de programación dinámica. En el primero de ellos los costes de arranque dependen del tiempo de parada de la central. En el segundo, los costes de arranque se suponen constantes (lo cual es bastante habitual en sistemas que, como el español, sólo paran las centrales térmicas en fin de semana). En el apartado 5.2.3, se hacen algunas consideraciones acerca del tratamiento de las restricciones de rampa de subida y bajada de carga de las centrales térmicas. Para finalizar esta primera parte del capítulo, en el apartado 5.2.4, se marcan las diferencias en la resolución de los distintos subproblemas térmicos que se formulan al aplicar el método de la relajación lagrangiana a varios modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo. Estos modelos se presentan en el apartado 4.3 y se diferencian entre sí en las restricciones de carga

consideradas.

Cada subproblema hidráulico (apartado 5.3) representa el problema de la planificación de la producción de las centrales hidráulicas de una misma cuenca, atendiendo a señales económicas, en cada subperiodo del periodo de estudio. No se ha hecho ningún análisis acerca de procedimientos eficientes de resolución de este tipo de subproblemas (por quedar fuera de los objetivos de este trabajo de investigación). Para resolver estos subproblemas se ha empleado el optimizador comercial de propósito general MINOS 5.4 [90]. MINOS resuelve problemas de programación lineal y no lineal. No aprovecha la estructura de red de los subproblemas hidráulicos y por ello la resolución de tales subproblemas no es muy eficiente. Uno de las tareas futuras de este trabajo de investigación es la resolución de los subproblemas hidráulicos mediante optimizadores comerciales, como CPLEX [133], que aprovechen la estructura de red que presentan estos problemas de optimización. En el apartado 5.3.1 se plantean varios tipos de subproblemas hidráulicos asociados a distintos modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo. Estos modelos se introdujeron en el apartado 4.3.

5.2 Subproblemas térmicos

5.2.1 El método de la programación dinámica

Las técnicas de programación dinámica [14], [27], [103], [10] constituyen técnicas de optimización que transforman un problema complejo en una secuencia de problemas más simples. Para poder resolver un problema por programación dinámica debe ser por tanto un problema de optimización multi-etapa.

El método de la programación dinámica se basa en el *principio de optimalidad de Bellman* [10] que establece que “cualquier decisión multi-etapa óptima tiene la propiedad de que cualquiera que sea la situación actual (un estado de una determinada etapa) dentro de esa decisión multi-etapa óptima, el resto de las decisiones futuras ha de constituir una decisión multi-etapa óptima con respecto a la situación actual”. Este principio permite la resolución del problema de optimización multi-etapa a través de la optimización recursiva de problemas de una etapa.

Las tres características que definen un problema de programación dinámica son:

- las etapas,
- los estados, y
- la función recursiva de optimización

La característica fundamental del método de la programación dinámica es la estructuración del problema a resolver en múltiples etapas que se resuelven de forma secuencial. En cada etapa se resuelven unos problemas de optimización que ayudan a la definición de los problemas de optimización de la siguiente etapa.

Asociado a cada etapa del problema se definen los estados del proceso. Los estados reflejan la información necesaria para poder tener en cuenta todas las consecuencias que la decisión actual (paso de un estado de la etapa actual a otro estado en otra etapa posterior) puede tener en las etapas siguientes. La determinación de los estados a definir en el problema es la tarea más difícil del diseño de un algoritmo de programación dinámica. La elección de los estados debe hacerse de forma que se tenga en cuenta lo siguiente:

- i) el número de estados debe contener suficiente información como para poder tomar decisiones futuras sin tener en cuenta la forma de llegar al estado actual; y
- ii) el número de estados debe ser pequeño ya que la carga computacional aumenta de forma exponencial con el número de estados.

Este último aspecto es el que limita el campo de utilización de los métodos de programación dinámica.

La tercera característica general de los métodos de programación dinámica es la definición de una función recursiva de optimización que permita la resolución de un problema de optimización de N etapas a través de la resolución, en cada paso del algoritmo, de un problema de optimización de una sola etapa, hasta encontrar un recorrido óptimo desde la etapa 1 hasta la etapa N . Este procedimiento se puede basar en una *recursión hacia atrás* (donde la primera etapa que se resuelve es la última etapa del problema) o en una *recursión hacia adelante* (donde la primera etapa que se resuelve es la primera etapa del problema).

En cada estado de cada etapa se resuelve un problema de optimización que consiste en determinar la mejor forma de llegar a ese estado de esa etapa. La función objetivo de este problema es la función recursiva de optimización asociada al estado de la etapa considerado. La solución de este problema de optimización ayuda a la resolución de los problemas de optimización que se pueden plantear en las etapas siguientes analizadas.

La programación dinámica con recursión hacia adelante consiste en determinar, para cada estado de cada etapa, la mejor manera de llegar a la situación actual (el estado de la etapa considerado) desde la etapa inicial; se comienza, por tanto, por la primera etapa y se avanza en el proceso de resolución de etapa en etapa hasta llegar a la última etapa. Por otra parte, la programación dinámica con recursión hacia atrás analiza cuál es el mejor forma de llegar a la última etapa

desde la situación actual (el estado de la etapa considerado); se comienza desde la última etapa para alcanzar, al final del proceso, la etapa inicial. En [14] y [27] pueden encontrarse ejemplos muy ilustrativos del método de la programación dinámica con recursión hacia adelante y con recursión hacia atrás

Así, el primer paso para resolver un problema de optimización multi-etapa mediante técnicas de programación dinámica es identificar las etapas, los estados y la función recursiva de optimización. Definidos los estados y las etapas, es conveniente establecer el diagrama de estados que defina las posibles transiciones de unos estados a otros estados de etapas posteriores.

El diagrama de estados de cualquier algoritmo de programación dinámica presenta nodos y arcos. Los arcos señalan las posibles transiciones de unos nodos a otros. Cada nodo se identifica con dos coordenadas. La primera coordenada (la abscisa) indica la etapa del nodo. La segunda coordenada (la ordenada) indica el estado del nodo. Típicamente los posibles estados en los que, a priori, se puede encontrar el sistema son los mismos en todas las etapas. Quiere ello decir que si el problema a resolver consta de N etapas y en cada etapa el sistema se podría encontrar en S estados, entonces el número total de nodos del diagrama de estados es de $N \times S$.

Dado que el método de la programación dinámica resuelve una etapa cada vez, lo que puede provocar es que el problema sea computacionalmente difícil, o imposible, de resolver no es tanto el aumento del número de etapas como el aumento del número de estados en cada etapa. Por ello la clave del éxito de un algoritmo de programación dinámica es la elección de un número pequeño de valores que representen de forma adecuada los posibles estados en que se puede encontrar el sistema en cada etapa.

Si el estado del sistema se identifica con una variable discreta, entonces cada posible estado (o cada nodo del diagrama de estados) se identifica con cada posible valor de dicha variable. Si el conjunto de valores que puede tomar esta variable discreta es suficientemente pequeño, entonces el algoritmo de programación dinámica será eficiente.

Sin embargo, si el estado del sistema se identifica con una variable continua entonces, para aplicar técnicas de programación dinámica, hay que discretizar esta variable permitiéndole adoptar un número finito de valores. Si la discretización es muy fina (con el objetivo de que el error, cometido al asignar valores discretos a algo que varía de forma continua, sea pequeño), entonces el excesivo número de estados posibles provoca que la carga computacional sea muy elevada y el problema irresoluble. Si la discretización es muy gruesa entonces el modelado se ajusta poco a la realidad.

Todo esto quiere decir que resulta poco adecuado aplicar técnicas de programación dinámica cuando el estado se identifica con variables continuas. Resulta más apropiado aplicar técnicas de

programación dinámica cuando el estado se identifica con variables discretas que pueden adoptar un número finito, y suficientemente pequeño, de valores.

5.2.2 Programación dinámica para la resolución de la programación horaria de cada central térmica. Descripción general.

Al resolver el problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo mediante técnicas de relajación lagrangiana, el problema primal relajado (capítulo 4) se descompone en un subproblema por cada central térmica y un subproblema por cada cuenca hidráulica. Mediante la resolución del subproblema asociado a cada central térmica en cada iteración del algoritmo de resolución del problema dual (capítulos 4 y 6), se decide la planificación óptima de la central en respuesta a los precios horarios de esa iteración (multiplicadores de Lagrange). Cada subproblema térmico (ecuaciones (4.20)-(4.21) y (3.36)-(3.44)) se plantea de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar}_{t_{jk}, v_{jk}, y_{jk}, z_{jk}, \tilde{s}_{jk}, x_{jx}^d} \\ &\sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] - \lambda^T h_j(t_{jk}) - \mu^T g_j(t_{jk}, v_{jk}) \end{aligned} \quad (5.1)$$

sujeto a

$$\underline{p}_j v_{jk} \leq t_{jk} \leq \overline{p}_j v_{jk} \quad \forall j \quad \forall k \quad (5.2)$$

$$t_{jk} - t_{jk-1} \leq r_j^s \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.3)$$

$$t_{jk-1} - t_{jk} \leq r_j^b \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.4)$$

$$y_{j1} - z_{j1} = v_{j1} - v_{j0} \quad \forall j \quad (5.5)$$

$$y_{jk} - z_{jk} = v_{jk} - v_{jk-1} \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.6)$$

$$(\tilde{s}_{j0} - T_j^f)(v_{j0} - v_{j1}) \geq 0 \quad \forall j \quad (5.7)$$

$$(\tilde{s}_{jk-1} - T_j^f)(v_{jk-1} - v_{jk}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.8)$$

$$(\tilde{s}_{j0} + T_j^p)(v_{j1} - v_{j0}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.9)$$

$$(\tilde{s}_{jk-1} + T_j^p)(v_{jk} - v_{jk-1}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.10)$$

La función objetivo (ecuación (5.1)) representa el coste total. El primer sumando representa el coste de explotación de la central a lo largo del horizonte temporal analizado. Los otros sumandos representan el ingreso (ya que son negativos) que recibe la central por contribuir al cumplimiento de las restricciones del sistema (o restricciones de carga). La central recibirá beneficio económico por su producción y por ello, alcanzada la convergencia el valor en el óptimo de la función objetivo será negativo.

Las ecuaciones (5.2) establecen que la potencia generada por la central en los subperiodos de acoplamiento está comprendida entre su mínimo técnico y su máximo técnico.

Las ecuaciones (5.3) y (5.4) son las restricciones de rampas máximas de subida y bajada de carga de la central.

Las ecuaciones (5.5) y (5.6) establecen la lógica que liga las decisiones de acoplamiento, arranque y parada de la central.

Las ecuaciones (5.7) y (5.8) son las restricciones de tiempo mínimo de funcionamiento y las ecuaciones (5.9) y (5.10) son las restricciones de tiempo mínimo de parada.

No se han considerado las restricciones que fijan la producción de potencia en los procesos de arranque y parada de las centrales térmicas. Aunque la técnica de programación dinámica que se emplea para resolver el subproblema asociado a cada central térmica permite la inclusión de este tipo de restricciones. Esta tarea ha quedado fuera de los objetivos de esta tesis.

El problema de optimización asociado a cada central térmica (ecuaciones (5.1)-(5.10)) se resuelve utilizando técnicas de programación dinámica con recursión hacia adelante. Resulta conveniente emplear recursión hacia adelante [129] ya que en algunos aspectos del modelado del funcionamiento de la central hace falta tener en cuenta la historia pasada de la misma. En este tipo de situaciones la recursión hacia adelante es más apropiada que la recursión hacia atrás. Los aspectos del modelado de la central que requieren conocimiento de la historia pasada son: los costes de arranque (que dependen del tiempo que la central haya estado desacoplada), las restricciones de tiempo mínimo de funcionamiento y parada de la central y las restricciones de rampa máxima de subida y bajada de carga. Además, otro motivo que lleva a la elección de la recursión hacia adelante es que las condiciones iniciales (estado de la central en la primera etapa) son conocidas. Así, mediante el proceso de programación dinámica se determina la planificación óptima de la explotación de la central en todos los subperiodos del horizonte temporal analizado, partiendo de una situación inicial conocida al final del subperiodo anterior al periodo de estudio.

El principio de optimalidad de Bellman [10] aplicado a la programación dinámica con recursión hacia adelante (o programación dinámica hacia adelante) establece que “una secuencia de decisiones óptimas en un proceso de decisión multi-etapa tiene la propiedad de que cualquiera que sea la decisión (óptima) final y el estado que preceda al estado (óptimo) final, las decisiones tomadas hasta entonces constituyen una secuencia de decisiones óptimas que conducen desde el estado inicial hasta el estado que precede al estado (óptimo) final”.

Un algoritmo de programación dinámica hacia adelante [14], [27], [103] consta de dos fases. En la primera fase se establece la forma óptima (de entre todas las posibles indicadas en el diagrama de estados) de llegar a cada estado en cada etapa. Esta es la fase de recursión hacia adelante. La segunda fase comienza con la elección del estado de la última etapa de coste mínimo y en la “vuelta hacia atrás” desde el estado óptimo de la última etapa hasta el estado inicial a través de

las transiciones de coste mínimo establecidas en la fase primera. A la segunda fase se le llama fase de recursión hacia atrás.

Lo primero que hay que hacer para resolver el problema de la planificación óptima de cada central térmica en respuesta a señales económicas (o subproblema térmico) mediante un algoritmo de programación dinámica es identificar en él las etapas y los estados (dibujando el diagrama de estados) y definir la función recursiva de optimización que permita la resolución de este problema multi-etapa a partir de la solución de problemas de una etapa.

En este apartado se identifican las etapas, los estados (dibujándose el diagrama de estados que indica las posibles transiciones de un estado de cierta etapa a otro estado de una etapa posterior) y la función recursiva de optimización que permite la resolución del problema de la planificación de la explotación en todos los subperiodos del horizonte temporal analizado (problema multi-etapa) a partir de la solución de problemas asociados a una etapa (o un subperiodo). Se establecen dos tipos de definiciones de estado. La primera, y más general, permite el modelado de las restricciones de tiempo mínimo de funcionamiento y parada de la central y la consideración de costes de arranque dependientes de la temperatura de la caldera (es decir, del número de horas que lleva desacoplada la central). La segunda definición de estado modela de forma adecuada las restricciones de tiempo mínimo de funcionamiento y parada, sin embargo, los costes de arranque se suponen constantes. Cada una de estas definiciones lleva ligado un tipo de diagrama de estados.

La definición de estado que se ha implantado informáticamente es la que considera costes de arranque constantes. Es bastante habitual la consideración de costes de arranque constantes sobre todo en sistemas, como el español, en los que no hay muchos arranques y paradas durante la semana. En el sistema español, típicamente, se paran centrales en el fin de semana y se arrancan el lunes.

Las dos definiciones de estado consideradas sólo permiten la consideración de las restricciones de rampas máxima de subida y bajada de carga de la central de forma “miope”. La inclusión de restricciones que ligen temporalmente variables continuas resulta complejo al emplear técnicas de programación dinámica por la necesidad de discretizar estas variables, con el consiguiente aumento de la carga computacional. Más adelante, en este apartado, se introduce la dificultad que presenta la inclusión de las restricciones de rampa al emplear técnicas de programación dinámica y en el apartado 5.2.3 se hacen algunas consideraciones acerca del tratamiento de este tipo de restricciones en la literatura.

Así, asociados a las dos definiciones de estados (con sus correspondientes diagramas de estados), se establecen dos tipos de algoritmos de resolución de cada subproblema térmico mediante

técnicas de programación dinámica. En ambos, la definición de etapa es la misma. La función recursiva de optimización establecida se puede aplicar a los dos tipos de diagramas de estados.

En este apartado, tras la definición de las etapas, los estados y la función recursiva de optimización, se efectúa un análisis computacional de los dos tipos de algoritmos de programación dinámica asociados a los dos tipos de diagramas de estado.

Etapas

Al aplicar técnicas de programación dinámica a la resolución del subproblema asociado a cada central térmica, el número de etapas a considerar coincide con el número de subperiodos del horizonte temporal analizado. Cada etapa, por tanto, se identifica con cada subperiodo del horizonte temporal analizado.

Estados

La elección del conjunto de estados es el aspecto más complejo de la definición de un algoritmo de programación dinámica. Se define el estado de un sistema como la mínima cantidad de información sobre la historia del sistema que permite predecir el efecto del pasado en el futuro. Esto quiere decir que el conjunto de estados que se definan en cada etapa del algoritmo de programación dinámica empleado para resolver cada subproblema térmico, debe contener información de todos los aspectos del funcionamiento de la central relacionados con el tiempo.

A continuación se establecen dos tipos de definiciones de estado. La primera es más general. La segunda es una simplificación para el caso, por otra parte habitual en el sistema español, de que los costes de arranque se consideren constantes.

Definición de estado 1: costes de arranque dependientes del tiempo de parada

En el subproblema asociado a cada central térmica (ecuaciones (5.1)-(5.10)) los aspectos relacionados con el tiempo son:

- los costes de arranque (ecuación (5.1)) que dependen del número de etapas (o subperiodos) que haya estado desacoplada la central y que se discretizan (apartado 3.3.2) debido a la división del periodo de estudio en subperiodos,
- las restricciones de rampa (ecuaciones (5.3)-(5.4)) que ligan la producción en una etapa con la producción en la etapa anterior, y
- las restricciones de tiempo mínimo de funcionamiento y parada (ecuaciones (5.7)-(5.10))

que imponen el número mínimo de etapas (o subperiodos) que la central debe estar acoplada, o desacoplada, desde la etapa (o subperiodo) en que se arranca, o se para.

Esto quiere decir que el estado del sistema debe contener información sobre:

- El número de horas que la central lleva parada si la central está desacoplada (con el objetivo de poder tener en cuenta las restricciones de mínimo tiempo de parada y poder aplicar los costes de arranque adecuados en el momento en que se decida acoplar la central).
- El número de horas que la central lleva acoplada si la central está acoplada (con el objetivo de poder tener en cuenta las restricciones de mínimo tiempo de funcionamiento).
- La potencia producida por la central si la central está acoplada (con el objetivo de poder tener en cuenta las restricciones de rampa).

Así, los estados de acoplamiento pueden representarse por una pareja de variables donde la primera variable sea discreta e indique el número de subperiodos que la central lleva acoplada y la segunda variable sea continua e indique la potencia producida, mientras que los estados de desacoplamiento pueden representarse por una única variable discreta que indique el número de subperiodos que lleva la central desacoplada.

Para poder aplicar técnicas de programación dinámica, a cualquier problema de optimización, el número de estados posibles en cada etapa debe ser finito. Eso quiere decir que, si en la definición de estado interviene alguna variable continua, entonces dicha variable debe discretizarse. Si la discretización es muy gruesa se comenten errores de modelado. Si la discretización es muy fina aumenta mucho la carga computacional pudiendo llegar a ser irresoluble el problema. Se pueden aplicar heurísticos (restricciones tunel) que limiten el número de estados a analizar cuando el número de posibles estados en un algoritmo de programación dinámica sea muy elevado. El inconveniente de estas técnicas de reducción de la carga computacional es que se pierde la garantía de la optimalidad de la solución encontrada.

Así, en el problema de resolución de cada subproblema térmico mediante técnicas de programación dinámica, para incluir la definición de potencia producida en la definición de los estados de acoplamiento, se debe discretizar esta variable. Típicamente los escalones de esta discretización se relacionan con la máxima rampa de subida y bajada de carga de la central [19], [127].

Para evitar la discretización de la potencia producida (para incluir las restricciones de rampa en la definición del estado) se puede no incluir esta variable en el estado de la central y considerar las restricciones de rampa de forma “miope”. Es decir que se ligan las producciones de cada subperiodo con las de los subperiodos inmediatamente anterior e inmediatamente posterior pero

no se consideran las restricciones de rampa en su conjunto, esto es, todos los subperiodos a la vez.

En la implantación informática que se ha llevado a cabo se ha adoptado esta simplificación (modelado de las máximas rampas de subida y bajada de carga de la central de forma “miope”). El motivo ha sido la escasa relevancia de las restricciones de rampa en los casos de estudio analizados.

Si se prescinde de las restricciones de rampa en la definición del estado, la variable de estado debe contener únicamente información acerca del número de horas que la central lleva acoplada o desacoplada (para tener en cuenta las restricciones de tiempo mínimo de funcionamiento y parada y los costes de arranque).

La variable s_{jk} que representa el estado de la central j en la etapa k [132] se define utilizando una variable auxiliar $\tilde{s}_{jk}$ que, si toma un valor positivo indica el número de horas que lleva acoplada la central y, si toma un valor negativo indica el número de horas que lleva desacoplada la central. La variable de estado s_{jk} se establece de la siguiente forma:

$$s_{jk} = \begin{cases} T_j^f & \text{si } \tilde{s}_{jk} \geq T_j^f \\ \tilde{s}_{jk} & \text{si } -(T_j^p + n_j^a - 1) < \tilde{s}_{jk} < T_j^f \\ -(T_j^p + n_j^a - 1) & \text{si } \tilde{s}_{jk} \leq -(T_j^p + n_j^a - 1) \end{cases} \quad (5.11)$$

Según esta definición de estado, el número de estados a considerar en cada etapa es igual a $T_j^f + T_j^p + n_j^a - 1$ donde T_j^f es el tiempo mínimo de funcionamiento (en subperiodos), T_j^p es el tiempo mínimo de parada (en subperiodos) y n_j^a es el número de costes de arranque considerados. Además, el estado se identifica con un número que si es positivo indica estado de acoplamiento y se es negativo indica estado de desacoplamiento. El número total de estados de acoplamiento es igual al tiempo mínimo de funcionamiento (en subperiodos), T_j^f . El número total de estados de desacoplamiento es igual a $T_j^p + n_j^a - 1$.

Con la ayuda del diagrama de estados se establecen todas las posibles transiciones de unos estados a otros. Las transiciones se indican mediante arcos. Aunque no se indican de manera explícita, para mayor claridad de las figuras, todas las transiciones en todos los diagramas de estado de esta tesis van de izquierda a derecha, es decir, todas las transiciones son desde etapas (o subperiodos) anteriores a etapas (o subperiodos) posteriores. El mecanismo de la programación dinámica empleado en la resolución del subproblema asociado a cada central térmica consiste en, dado el diagrama de estados en el que se reflejen todas las posibles transiciones desde la situación inicial, encontrar el camino de coste mínimo desde la situación inicial hasta el último subperiodo del horizonte temporal analizado.

Las posibles transiciones que pueden tener lugar en el modelado del funcionamiento de una central térmica (o de otro modo, las posibles decisiones que se pueden tomar relativas al acoplamiento o desacoplamiento de la central) y de acuerdo con la definición de estado de la ecuación (5.11) son las siguientes:

- Paso de un estado de desacoplamiento a otro estado de acoplamiento. Esta transición tiene lugar cuando se toma la decisión de arrancar (o acoplar) una central que estaba desacoplada. En esta situación, las restricciones de tiempo mínimo de funcionamiento obligan a que la central permanezca acoplada un número mínimo de subperiodos igual a T_j^f . Esto quiere decir que si al final de la etapa (o subperiodo) k se decide acoplar la central térmica j , entonces, siempre que el tiempo mínimo de funcionamiento sea mayor que 1, no cabe plantearse la decisión de desacoplar la central al final de la etapa (o subperiodo) $k + 1$. De otro modo, si se toma la decisión de arrancar la central j al final de la etapa k , entonces hasta el final de la etapa $k + T_j^f$ la central tiene que seguir forzosamente acoplada.

Por ello en los diagramas de estados que aparecen en este capítulo (tanto en el caso de que los costes de arranque dependan de la temperatura de la caldera como en el caso de que se supongan constantes), las transiciones desde un estado de desacoplamiento hasta un estado de acoplamiento se efectúan entre etapas que no son consecutivas a no ser que el tiempo mínimo de funcionamiento de la central sea de 1 subperiodo (o etapa) o bien, que la decisión de arrancar se haya tomado al final del penúltimo subperiodo del horizonte temporal analizado. Así, los arcos que representan las transiciones, en el diagrama de estados, entre un estado de desacoplamiento (de cualquier etapa k) a un estado de acoplamiento (de una etapa posterior) tienen una “duración” en subperiodos (o etapas) igual a T_j^f .

Sólo en el caso de que $k + T_j^f$ (el subperiodo al que debe llegar el arco teniendo en cuenta el tiempo mínimo de funcionamiento de la central) sea mayor que el número de subperiodos del horizonte temporal analizado, la “duración” del arco (en subperiodos) será menor que T_j^f . En este caso, aunque la central tenga que seguir acoplada, el horizonte temporal analizado finaliza; por tanto hay que analizar los costes hasta llegar al estado de acoplamiento de la última etapa (o subperiodo) al que llega el arco considerado. Este estado de acoplamiento refleja el número de subperiodos que la central lleva acoplada. En este último caso, la “duración” del arco que indica la transición de un estado de desacoplamiento a un estado de acoplamiento será de $K - k$ subperiodos, donde K es el número de subperiodos del horizonte temporal analizado.

- Paso de un estado de acoplamiento a otro estado de desacoplamiento. Esta transición está ligada a la decisión de parar (o desacoplar) una central que estaba acoplada. De forma

análoga a lo indicado en el punto anterior, el cumplimiento de las restricciones de tiempo mínimo de parada obliga a que la central permanezca desacoplada en los siguientes T_j^p subperiodos. Por ello si al final de la etapa (o subperiodo) k se toma la decisión de parar la central, entonces hasta el final de la etapa (o subperiodo) $k + T_j^p$ no cabe plantearse la decisión de volver a acoplar la central. Sólo en el caso de que el tiempo mínimo de parada en subperiodos T_j^p sea 1, existe la posibilidad de acoplar de nuevo la central al final de la etapa (o subperiodo) siguiente.

Por ello, de forma análoga a lo indicado en el punto anterior, las transiciones entre un estado de acoplamiento y otro estado de desacoplamiento sólo se efectúan entre etapas (o subperiodos) consecutivos si el tiempo mínimo de parada de la central es de un subperiodo, o bien si la decisión de parar la central se toma al final del penúltimo subperiodo del horizonte temporal analizado. Así, los arcos que indican las transiciones de un estado de acoplamiento a otro estado de desacoplamiento tienen una “duración” (en subperiodos) igual a T_j^p . Únicamente en el caso de que $k + T_j^p$, donde k representa la etapa (o subperiodo) al final del cual se para (o desacopla) la central, sea mayor que el número de subperiodos del horizonte temporal analizado, la “duración” del arco será menor. En este último caso, la “duración” del arco será de $K - k$ subperiodos.

- Paso de un estado de acoplamiento en cierta etapa a otro estado de acoplamiento de la etapa siguiente. La transición en este caso se efectúa entre subperiodos (o etapas) consecutivos. Además, la central ya ha superado el tiempo mínimo de funcionamiento.
- Paso de un estado de desacoplamiento a otro estado de desacoplamiento. La transición, de nuevo, se efectúa entre subperiodos (o etapas) consecutivos. Además, la central ya ha superado el tiempo mínimo de parada.

Las figuras 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4 muestran varios diagramas de estado (que se corresponden con varias situaciones iniciales de la central). Se podría haber dibujado un único diagrama de estados considerando todas las posibles situaciones en que se puede encontrar la central en el momento inicial (al final del subperiodo anterior al periodo estudio). Sin embargo, para mayor claridad en las figuras, se ha optado por dibujar varios diagramas de estados correspondientes a distintas situaciones de partida.

Para la central considerada en estas figuras (5.1, 5.2, 5.3 y 5.4) el tiempo mínimo de funcionamiento es de 2 subperiodos, el mínimo tiempo de parada es de 3 subperiodos y se consideran hasta 3 costes de arranque distintos (como consecuencia de la discretización descrita en el apartado 3.3.2). En consecuencia, se distinguen (ecuación (5.11)) 2 estados de acoplamiento y 5 estados de desacoplamiento en cada etapa. Los estados de acoplamiento de cada etapa k se

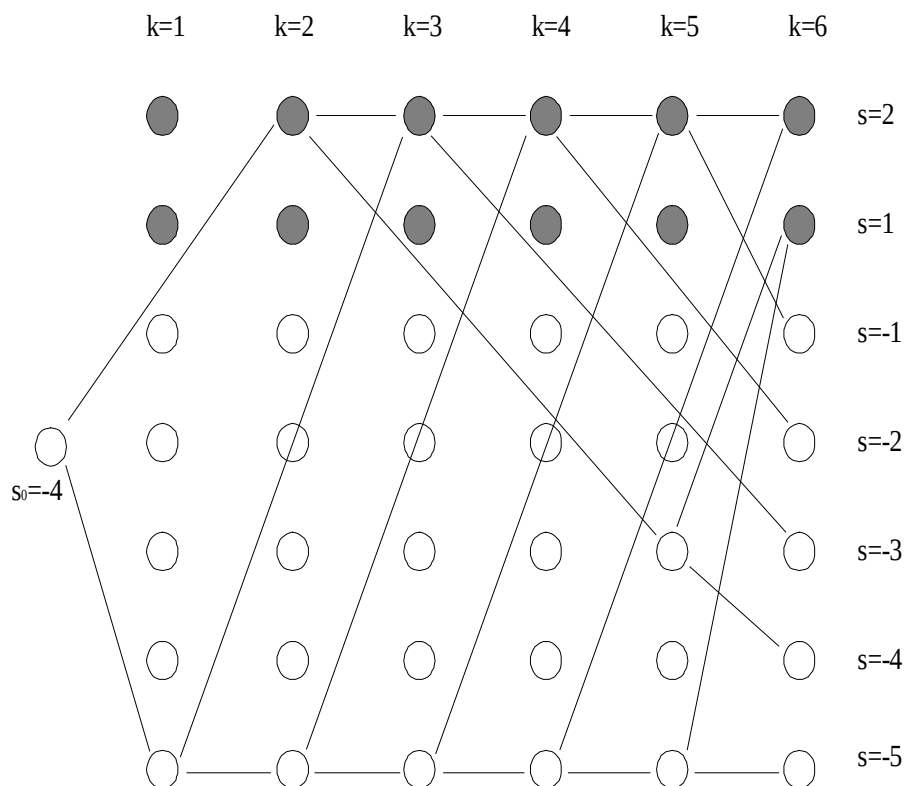


Figura 5.1: Definición de estado 1. Diagrama de estados ($T_j^f = 2$, $T_j^p = 3$, $n_j^a = 3$ y $s_0 = -4$)

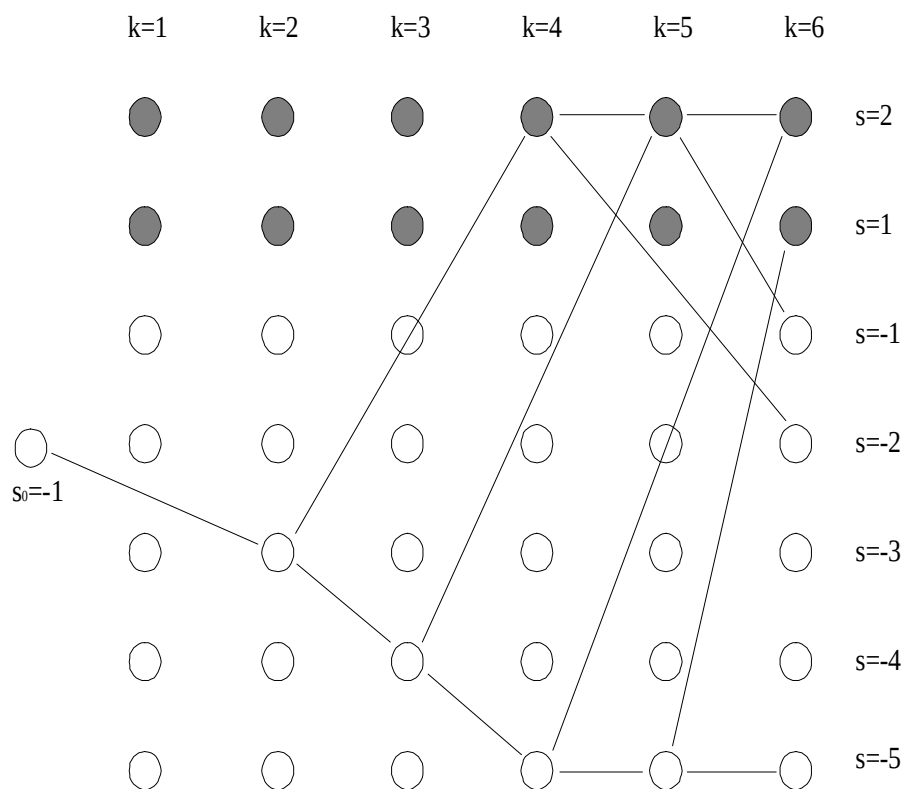


Figura 5.2: Definición de estado 1. Diagrama de estados ($T_j^f = 2$, $T_j^p = 3$, $n_j^a = 3$ y $s_0 = -1$)

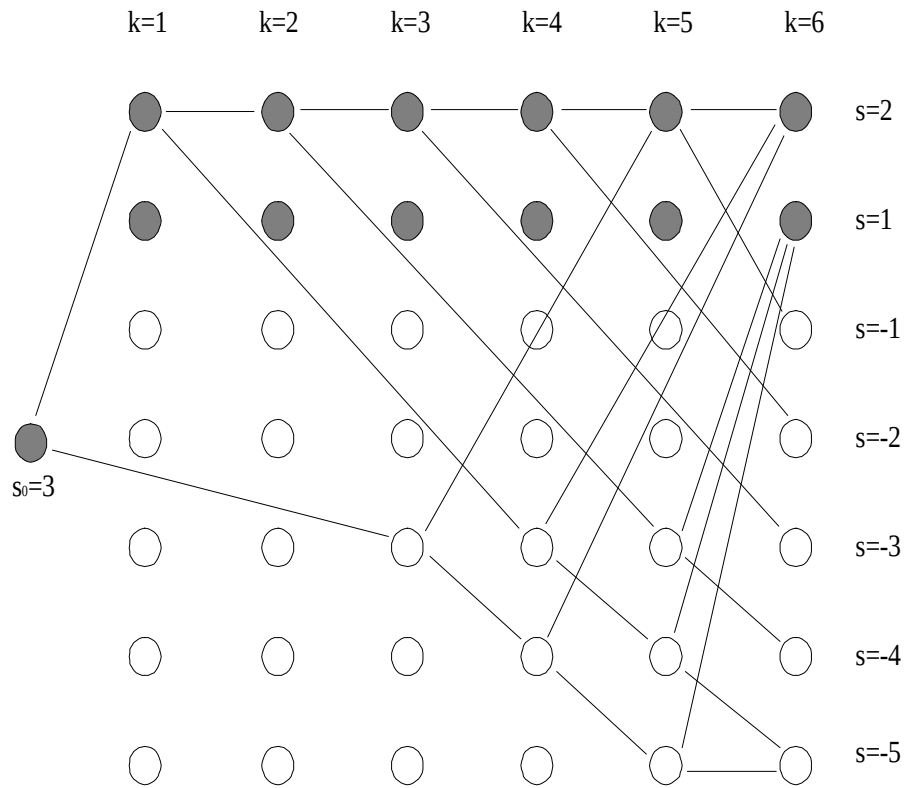


Figura 5.3: Definición de estado 1. Diagrama de estados ($T_j^f = 2$, $T_j^p = 3$, $n_j^a = 3$ y $s_0 = 3$)

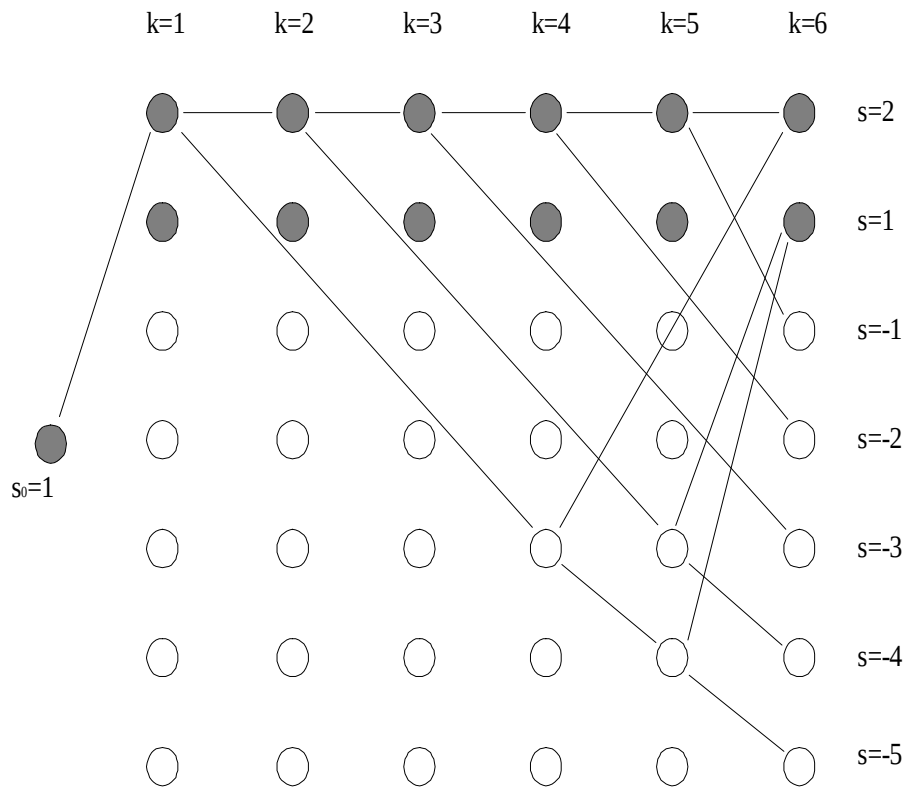


Figura 5.4: Definición de estado 1. Diagrama de estados ($T_j^f = 2$, $T_j^p = 3$, $n_j^a = 3$ y $s_0 = 1$)

identifican con los valores de la variable de estado $s_k = 1$ y $s_k = 2$, donde se ha prescindido del subíndice j , que se emplea en la definición de estado de cada central térmica j (ecuación (5.11)), ya que cada subproblema térmico se identifica con una única central. Los estados de desacoplamiento en cada etapa k se identifican con los siguientes valores de la variables de estado: $s_k = -1$, $s_k = -2$, $s_k = -3$, $s_k = -4$ y $s_k = -5$.

En los diagramas de estados de las figuras 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4, los nodos sombreados representan estados de acoplamiento y los nodos blancos representan estados de desacoplamiento. A cada nodo se le asigna un par de coordenadas. La coordenada horizontal indica la etapa (i.e., el subperiodo) a la que pertenece el estado y la coordenada vertical indica el estado (definido según la ecuación (5.11)). El estado inicial se identifica con el nodo s_0 . En los casos en que en el momento inicial la central esté acoplada, el nodo s_0 estará sombreado. Si la central está inicialmente desacoplada el estado inicial se representa mediante un nodo blanco.

En la figura 5.1 la central está inicialmente desacoplada y lleva en ese estado un tiempo superior al mínimo tiempo de parada (4 subperiodos).

En la figura 5.2 la central está inicialmente desacoplada y lleva en ese estado un tiempo inferior al mínimo tiempo de parada (1 subperiodos)

En la figura 5.3 la central está inicialmente acoplada y lleva en ese estado un tiempo superior al mínimo tiempo de funcionamiento (3 subperiodos).

En la figura 5.4 la central está inicialmente acoplada y lleva en ese estado un tiempo inferior al mínimo tiempo de funcionamiento (1 subperiodo).

En estas figuras puede observarse que los arcos que indican las transiciones de un estado de acoplamiento a un estado de desacoplamiento tienen una “duración” (en subperiodos) igual a T_j^p (siendo T_j^p el tiempo, en subperiodos, mínimo de parada de la central), a no ser que desde que se toma la decisión de desacoplar la central hasta que finaliza el periodo de estudio haya transcurrido un número de subperiodos menor que T_j^p . De forma análoga, los arcos que indican transiciones de un estado de desacoplamiento a un estado de acoplamiento tienen una “duración” (en subperiodos) igual a T_j^f (siendo T_j^f el tiempo, en subperiodos, mínimo de funcionamiento de la central), a no ser que desde que se toma la decisión de acoplar la central hasta que finaliza el periodo de estudio haya transcurrido un número de subperiodos menor que T_j^f . Por tanto los arcos ligan estados de etapas consecutivas sólo cuando:

- se ha superado el mínimo tiempo de funcionamiento y se mantiene la central acoplada;
- se ha superado el mínimo tiempo de parada y se mantiene la central desacoplada; o bien

- se decide acoplar una central que estaba desacoplada o desacoplar una central que estaba acoplada al final del penúltimo subperiodo.

A continuación se simplifica esta definición de estado (ecuación (5.11)) para el caso de que los costes de arranque se supongan constantes.

Definición de estado 2: costes de arranque constantes

En el caso de que los costes de arranque se supongan constantes, la definición de estado se simplifica. Sólo hacen falta definir, en cada etapa (o subperiodo), dos estados: central acoplada o central desacoplada. Si la central está acoplada la variable de estado s_k (donde se ha prescindido del subíndice j que hace referencia a la central térmica ya que cada subproblema térmico se refiere a una única central) toma el valor 1 y si la central está desacoplada la variable de estado toma el valor 0.

Las restricciones de tiempo mínimo de funcionamiento y parada se reflejan fácilmente en el diagrama de estados de la misma forma que se ha hecho con la anterior definición de estado (estado 1, página 128). De nuevo las transiciones posibles entre estados de distintas etapas son:

- Paso de un estado de acoplamiento a un estado de desacoplamiento. El arco que se identifica con esta transición tiene una “duración” (en subperiodos) igual a T_j^p , a no ser que el subperiodo en el que de nuevo se pueda acoplar la central (por haber transcurrido ya el tiempo mínimo de parada) sea posterior al último subperiodo del horizonte temporal analizado. En este último caso, la “duración” (en subperiodos) del arco es $K - k$ donde K es el número de subperiodos del periodo de estudio y k es el subperiodo en el que se para (o desacopla) la central.
- Paso de un estado de desacoplamiento a un estado de acoplamiento. El arco que se identifica con esta transición tiene una “duración” (en subperiodos) igual a T_j^f , a no ser que el subperiodo en el que de nuevo se pueda desacoplar la central (por haber transcurrido ya el tiempo mínimo de funcionamiento) sea posterior al último subperiodo del horizonte temporal analizado. En este último caso, la “duración” (en subperiodos) del arco es $K - k$.
- Paso de un estado de acoplamiento en cierta etapa a otro estado de acoplamiento de la etapa siguiente. La transición en este caso se efectúa entre subperiodos (o etapas) consecutivos. Además, la central ya ha superado el tiempo mínimo de funcionamiento.
- Paso de un estado de desacoplamiento a otro estado de desacoplamiento. La transición, de nuevo, se efectúa entre subperiodos (o etapas) consecutivos. Además, la central ya ha superado el tiempo mínimo de parada.

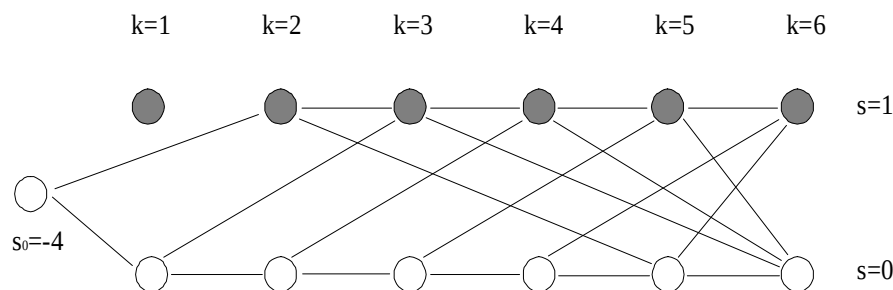


Figura 5.5: Definición de estado 2. Diagrama de estados ($T_j^f = 2$, $T_j^p = 3$ y $s_0 = -4$)

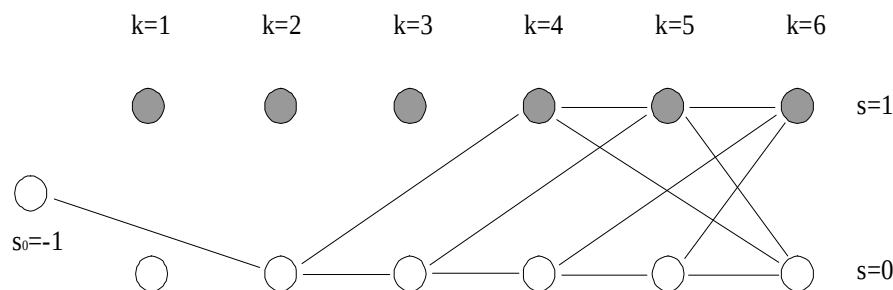


Figura 5.6: Definición de estado 2. Diagrama de estados ($T_j^f = 2$, $T_j^p = 3$ y $s_0 = -1$)

Las figuras 5.5, 5.6, 5.7 y 5.8 muestran diagramas de estados, correspondientes a esta definición de estado, para varias situaciones iniciales de la central. Para cada etapa k , el estado de acoplamiento, $s_k = 1$, se representa mediante un nodo sombreado y el estado de desacoplamiento, $s_k = 0$, mediante un nodo blanco. De igual forma, si el nodo que representa el estado inicial es blanco, entonces la central está inicialmente desacoplada. Si es sombreado, la central está inicialmente acoplada.

El tiempo mínimo de funcionamiento de la central a la que hacen referencia las figuras 5.5, 5.6, 5.7 y 5.8 es de 2 subperiodos y el tiempo mínimo de parada es de 3 subperiodos. Como ya se ha indicado los costes de arranque son constantes.

En la figura 5.5 la central está inicialmente desacoplada y lleva en ese estado un tiempo superior

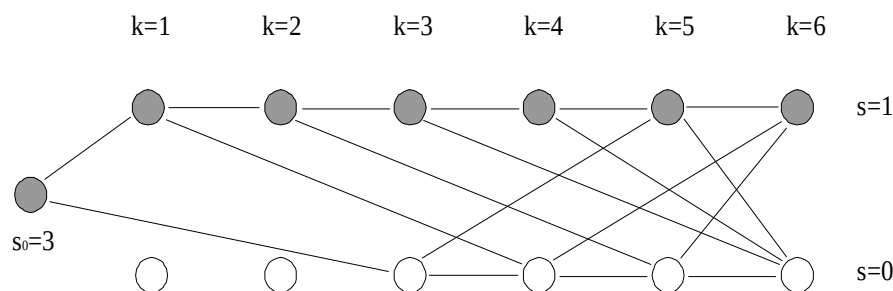


Figura 5.7: Definición de estado 2. Diagrama de estados ($T_j^f = 2$, $T_j^p = 3$ y $s_0 = 3$)

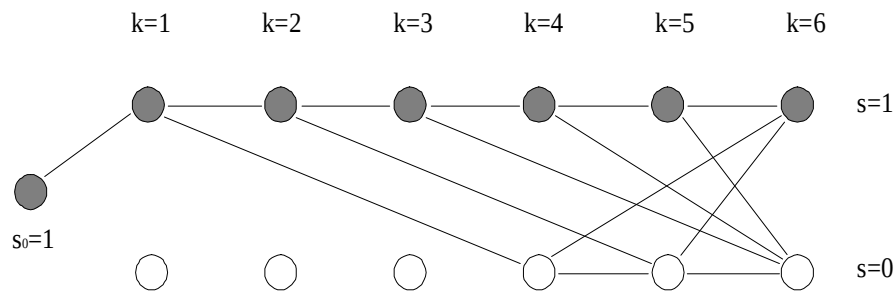


Figura 5.8: Definición de estado 2. Diagrama de estados ($T_j^f = 2$, $T_j^p = 3$ y $s_0 = 1$)

al mínimo tiempo de parada (4 subperiodos).

En la figura 5.6 la central está inicialmente desacoplada y lleva en ese estado un tiempo inferior al mínimo tiempo de parada (1 subperiodo).

En la figura 5.7 la central está inicialmente acoplada y lleva en ese estado un tiempo superior al mínimo tiempo de funcionamiento (3 subperiodos).

En la figura 5.8 la central está inicialmente acoplada y lleva en ese estado un tiempo inferior al mínimo tiempo de funcionamiento (1 subperiodo).

De nuevo, igual que para la definición de estado utilizada en las figuras 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4, puede observarse en las figuras 5.5, 5.6, 5.7 y 5.8 que los arcos que indican las transiciones de un estado de acoplamiento a un estado de desacoplamiento tienen una “duración” (en subperiodos) igual a T_j^p (siendo T_j^p el tiempo, en subperiodos, mínimo de parada de la central), a no ser que desde que se toma la decisión de desacoplar la central hasta que finaliza el periodo de estudio haya transcurrido un número de subperiodos menor que T_j^p . De forma análoga, los arcos que indican transiciones de un estado de desacoplamiento a un estado de acoplamiento tienen una “duración” (en subperiodos) igual a T_j^f (siendo T_j^f el tiempo, en subperiodos, mínimo de funcionamiento de la central), a no ser que desde que se toma la decisión de acoplar la central hasta que finaliza el periodo de estudio haya transcurrido un número de subperiodos menor que T_j^p . Por tanto los arcos ligan estados de etapas consecutivas sólo cuando:

- se ha superado el mínimo tiempo de funcionamiento y se mantiene la central acoplada;
- se ha superado el mínimo tiempo de parada y se mantiene la central desacoplada; o bien
- se decide acoplar una central que estaba desacoplada o desacoplar una central que estaba acoplada al final del penúltimo subperiodo.

Función recursiva de optimización

Como ya se ha indicado, la resolución de un problema de optimización multietapa mediante programación dinámica con recursión hacia adelante consta de dos fases. En la primera fase (fase de recursión hacia adelante), partiendo de la etapa inicial, se analiza la mejor forma de llegar a cada estado de cada etapa. Los estados posibles a los que se puede llegar, conocida la situación inicial, se indican en el diagrama de estados. Así, en cada estado posible i de cada etapa k hay que resolver un problema de optimización que determine el camino óptimo desde la etapa inicial hasta el estado i de la etapa actual k . La función objetivo de este problema es la función recursiva de optimización. Una vez alcanzados los estados posibles de la última etapa, y resueltos los problemas de optimización que determinen la mejor forma de llegar a ellos, comienza la fase de recursión hacia atrás. La fase de recursión hacia atrás, comienza con la elección del estado de la última etapa cuyo coste, evaluado a través del problema de optimización asociado al estado, sea menor. Una vez elegido el estado de la última etapa de menor coste, y utilizando la información obtenida en la fase de recursión hacia adelante (mejor forma de llegar desde etapas previas a cada estado de cada etapa), se determina el camino óptimo desde la situación inicial hasta este estado final.

La función recursiva de optimización define el problema de optimización a resolver, en la fase de recursión hacia adelante del algoritmo de programación dinámica, en cada estado i de cada etapa k . Se define de la siguiente forma:

$$\alpha(k, i) = \text{Min}_{\{l\}} \{f(k, i) + t(h, l; k, i) + \alpha(h, l)\} \quad (5.12)$$

donde:

$\alpha(k, i)$ es el coste mínimo para llegar al estado i en la etapa k ;

$f(k, i)$ es el coste asociado al estado i en la etapa k ;

$t(h, l; k, i)$ es el coste de transición desde el estado l en la etapa h hasta el estado i en la etapa k (donde la etapa h representa un subperiodo de tiempo anterior a la etapa k);

$\{l\}$ es el conjunto de estados asociado a la etapa h .

Por tanto, $\alpha(k, i)$ representa el coste mínimo para llegar al estado i de la etapa (o subperiodo) k desde cualquier estado l de etapas (o subperiodos) anteriores $h < k$. Nótese que, como en las dos definiciones de estado consideradas las transiciones no tienen por qué realizarse entre etapas consecutivas, la etapa h no es necesariamente la etapa inmediatamente anterior a la etapa k .

A continuación se detalla la forma de calcular los costes que intervienen en la función recursiva de optimización. La descripción es válida para las dos definiciones de estado consideradas: definición de estado 1 (ecuación (5.11)) asociada a los diagramas de estados de las figuras 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4 (costes de arranque dependientes del tiempo de parada de la central, páginas 128 y siguientes), y definición de estado 2 asociada a los diagramas de estados de las figuras 5.5, 5.6, 5.7 y 5.8 (costes de arranque constantes, páginas 136 y siguientes).

Recuérdese que para la definición de estado 1, los estados de acoplamiento se identifican con números enteros positivos y los estados de desacoplamiento con números enteros negativos, mientras que para la definición de estado 2 los estados de acoplamiento se identifican con el número entero 1 y los estados de desacoplamiento con el número entero 0. Así, de forma general y cuando se haga referencia a las dos definiciones de estado consideradas, los estados de acoplamiento se identifican con números enteros positivos, $i > 0$ (donde i representa un estado) y los estados de desacoplamiento con números enteros negativos o nulos, $i \leq 0$.

Coste de transición $t(h, l; k, i)$

El coste de transición desde el estado l en la etapa h hasta el estado i en la etapa k , $t(h, l; k, i)$, se calcula de la siguiente forma:

- Si se pasa de un estado de acoplamiento ($l > 0$) a otro estado de acoplamiento ($i > 0$), entonces el coste de transición es nulo. Este tipo de transiciones ocurre entre etapas consecutivas, es decir que en la etapa h ya se ha superado el tiempo mínimo de funcionamiento.
- Si se pasa de un estado de desacoplamiento ($l \leq 0$) a otro estado de acoplamiento ($i > 0$), entonces el coste de transición es igual al coste de arranque (que en la definición de estado 1 depende del estado l de la central en la etapa h) más el coste de producción de los estados intermedios de acoplamiento, si los hubiera. Los estados intermedios de acoplamiento son estados de acoplamiento obligatorio, es decir estados de acoplamiento en los que no cabe plantearse desacoplar la central porque se incumplirían restricciones de tiempo mínimo de funcionamiento. Se trata por tanto, de estados que no son inicio ni fin de arco del diagrama de estados. El coste de producción de los estados intermedios es la suma de los costes desde el estado $h + 1$ hasta el estado $k - 1$, donde $k - 1 - h \leq T_j^f - 1$ (siendo T_j^f el tiempo mínimo de funcionamiento, en subperiodos o etapas, de la central j considerada). La forma de calcular el coste de producción de un estado de acoplamiento ($i > 0$) en una etapa k , $f(k, i)$ se describe más adelante.
- Si se pasa de un estado de desacoplamiento ($l \leq 0$) a otro estado de desacoplamiento ($i \leq 0$), entonces el coste de transición es nulo. Este tipo de transiciones se dan entre etapas consecutivas.

- Si se pasa de un estado de acoplamiento ($l > 0$) a otro estado de desacoplamiento ($i \leq 0$), entonces el coste de transición es igual al coste de parada de la central.

Coste de estado $f(k, i)$

Si la central está desacoplada en la etapa k (estado $i \leq 0$), entonces el coste asociado al estado i en la etapa k es nulo ($f(k, i) = 0$) ya que no se incurre en ningún coste de producción.

Si la central está acoplada en la etapa k (estado $i > 0$), entonces el coste asociado al estado i en la etapa k ($f(k, i)$) es el coste de producción en esa etapa. Este coste se calcula resolviendo el siguiente problema de optimización:

$$\text{Minimizar}_{t_{jk}} \quad a_j(t_{jk}) - \lambda_k h_j(t_{jk}) - \mu_k g_j(t_{jk}) \quad (5.13)$$

sujeto a

$$\underline{p}_j \leq t_{jk} \leq \bar{p}_j \quad (5.14)$$

$$t_{jk} - t_{jk-1} \leq r_j^s \quad (5.15)$$

$$t_{jk-1} - t_{jk} \leq r_j^b \quad (5.16)$$

Nótese que este problema de optimización es el problema de determinación de la potencia a producir por la central (que está acoplada) en el subperiodo k teniendo en cuenta el coste de producción $a_j(t_{jk})$ y la remuneración por dicha producción $\lambda_k h_j(t_{jk}) + \mu_k g_j(t_{jk})$. Esto es, se trata del problema del despacho de la central en la etapa (o subperiodo) k . Además, dada la forma como se han tenido en cuenta las restricciones de rampa, la producción de potencia está limitada por el mínimo y máximo técnico de la central (es decir, por $\underline{p}_j$ y $\bar{p}_j$) y por la potencia producida en el subperiodo anterior, siempre que en el subperiodo anterior la central estuviera acoplada, a través de la rampa máxima de subida de carga r_j^s y de la rampa máxima de bajada de carga r_j^b .

Este procedimiento trata las restricciones de rampa de forma “miope” ya que no se tienen en cuenta tales restricciones de forma global, en el conjunto de subperiodos, sino que simplemente se ligan los periodos consecutivos. El óptimo que se obtiene con este tratamiento “miope” de las restricciones de rampa, no tiene por qué coincidir con el óptimo real que se obtendría resolviendo todos los subperiodos a la vez (es decir con el óptimo del problema planteado según las ecuaciones (5.1)-(5.10)). Sin embargo, se ha escogido este tratamiento “miope” de las restricciones de rampa porque en el sistema español las restricciones de rampa máxima de subida y bajada de carga no se suelen activar y, en consecuencia, los resultados obtenidos en los casos de estudio analizados han sido satisfactorios. Además, la resolución de los subproblemas térmicos mediante técnicas de programación dinámica ha sido un objetivo secundario para este trabajo de investigación.

En el apartado 5.2.3 se hacen algunas consideraciones acerca de formas alternativas de tratar las restricciones de rampas, evitando el procedimiento “miope”.

El problema de optimización que hay que resolver para calcular el coste de los nodos de acoplamiento, o problema de despacho de la central en cada subperiodo (ecuaciones (5.13)-(5.16)) puede reformularse teniendo en cuenta que los costes de producción de las centrales térmicas generalmente se modelan como funciones cuadráticas de la potencia generada (apartado 3.3.2) y refundiendo las restricciones del problema (ecuaciones (5.14)-(5.16)). Así, el problema del despacho de la central en una etapa resulta:

$$\text{Minimizar}_{t_{jk}} \quad a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} - \lambda_k h_j(t_{jk}) - \mu_k g_j(t_{jk}) \quad (5.17)$$

sujeto a

$$\underline{t} - t_{jk} \leq 0 \quad (5.18)$$

$$t_{jk} - \bar{t} \leq 0 \quad (5.19)$$

donde a_{1j} , a_{2j} y a_{3j} son los coeficientes de la función cuadrática de coste de producción y $\underline{t}$ y $\bar{t}$ son los límites de potencia que se definen para el estado de acoplamiento analizado, es decir:

$$\underline{t} = \text{Max} \left(\underline{p}_j, t_{jk-1} - r_j^b \right) \quad (5.20)$$

$$\bar{t} = \text{Min} \left(\bar{p}_j, t_{jk-1} + r_j^s \right) \quad (5.21)$$

Este problema de optimización (ecuaciones (5.17)-(5.19)) se puede resolver de forma analítica (lo que revierte en la eficiencia computacional del algoritmo de programación dinámica). En el apartado 5.2.4 se indica la forma de resolución de los distintos tipos de problemas de despacho que se generan según los diferentes tipos de modelos de coordinación hidrotérmica que se presentaron en el apartado 4.3.

Análisis computacional de los subproblemas térmicos

En este apartado se hace un análisis computacional de los dos métodos de programación dinámica que se derivan de las dos definiciones de estado presentadas según la consideración o no de costes de arranque dependientes del tiempo de parada, y que llevan asociadas dos tipos de diagramas de estados (estado 1, página 128, y estado 2, página 136).

Sea cual sea la definición de estado, el número de etapas a considerar en la resolución de cada subproblema térmico mediante técnicas de programación dinámica, es igual al número de subperiodos del periodo de estudio, K .

Definición de estado 1

Esta definición de estado se emplea en el caso de que se quieran modelar costes de arranque dependientes del tiempo de parada de la central. La definición de estado en este caso se indica en la ecuación (5.11)).

Según esta definición de estado, el número de estados por etapa es igual a $T_j^f + T_j^p + n_j^a - 1$ donde T_j^f es el tiempo mínimo de funcionamiento de la central en subperiodos, T_j^p es el tiempo mínimo de parada de la central en subperiodos y n_j^a es el número de arranque considerados (apartado 3.3.2).

El número total de estados de los diagramas de estados asociados a esta definición de estado es de $(T_j^f + T_j^p + n_j^a - 1) \times K$. Hay que hacer notar que, en el proceso de la programación dinámica sólo hay que analizar aquellos estados, del diagrama de estados, a los que llega un arco. Estos son los estados posibles.

Respecto al número de transiciones posibles entre estados de distintas etapas (o subperiodos), del análisis de los diagramas de estados asociados a esta definición de estado (figuras 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4) puede deducirse lo siguiente:

- Para cualquier etapa k desde la primera hasta la penúltima, cada estado puede provenir de un máximo de dos estados.
- En la última etapa y para cualquier estado de acoplamiento, el número máximo de estados de los que se puede provenir es igual a $T_j^f + 1$, donde T_j^f es el número de subperiodos que definen el mínimo tiempo de funcionamiento de la central térmica.
- En la última etapa y para cualquier estado de desacoplamiento, el número máximo de estados de los que se puede provenir es igual a 2.

Definición de estado 2

Esta definición de estado se emplea en el caso de que los costes de arranque se supongan constantes. Esto es bastante habitual en sistemas de energía eléctrica, como el español, en que prácticamente todas las paradas de las centrales se producen en fin de semana y todos los arranques se producen los lunes.

Si los costes se consideran constantes, sólo se definen dos estados en cada etapa k : central acoplada $s_k = 1$ o central desacoplada $s_k = 0$. Por tanto, y dado que el número de etapas es igual al número de subperiodos del periodo de estudio, K , el número total de estados de los diagramas de estados asociados a esta definición de estado es igual a $2 \times K$.

Respecto al número de transiciones posibles entre estados de distintas etapas (o subperiodos), del análisis de los diagramas de estados asociados a esta definición de estado (figuras 5.5, 5.6, 5.7 y 5.8) puede deducirse lo siguiente:

- Desde la primera hasta la penúltima etapa, cada estado puede provenir de un máximo de dos estados.
- En la última etapa y estado de acoplamiento, el número máximo de estados de los que se puede provenir es igual a $T_j^f + 1$, donde T_j^f es el número de subperiodos que definen el mínimo tiempo de funcionamiento de la central térmica.
- En la última etapa y estado de desacoplamiento, el número máximo de estados de los que se puede provenir es igual a $T_j^p + 1$, donde T_j^p es el número de subperiodos que definen el mínimo tiempo de parada de la central térmica.

Tanto el número de estados como el número de transiciones involucrados en cada subproblema térmico es muy reducido. La carga computacional de cada algoritmo de programación dinámica es muy pequeña.

5.2.3 Consideraciones acerca del tratamiento de las restricciones de rampa

En los métodos de programación dinámica propuestos para resolver cada subproblema térmico se tratan las restricciones de rampas de subida y bajada de carga de las centrales térmicas de forma “miope”. Es decir, se ligan las producciones de dos subperiodos consecutivos pero no se consideran todos los subperiodos en su conjunto. El óptimo obtenido al aplicar este procedimiento “miope” no tiene por qué coincidir con el óptimo real que se consigue al tratar todos los subperiodos en su conjunto. Sin embargo, este ha sido el procedimiento empleado porque con él se han obtenido resultados satisfactorios en los casos de estudio analizados ya que las restricciones de rampas máximas de subida y bajada de carga no suelen limitar en el sistema español.

En este apartado se introducen dos procedimientos para considerar de forma más precisa las restricciones de rampa. Ninguno de estos procedimientos se han probado en este trabajo de investigación por quedar fuera de los objetivos principales del mismo. Sin embargo, pueden ser futuras fuentes de estudio.

El primer procedimiento consiste en tener en cuenta en la definición de los estados de acoplamiento no sólo el número de horas que la central lleva acoplada sino también la potencia generada. Como ya se ha indicado, la inclusión de una variable continua en la definición de

estado, exige la discretización de la misma en un número finito de estados. Este procedimiento ya se ha presentado en el apartado 5.2.2. Habitualmente los escalones en que se discretiza la potencia generada dependen de las rampas máximas de subida y bajada de carga [19], [127].

Otro procedimiento consiste en resolver el subproblema asociado a cada central térmica, ecuaciones (5.1)-(5.10), empleando, de nuevo, el método de la relajación lagrangiana dualizando las restricciones de rampas máximas de subida y bajada de carga de la central. El problema primal relajado que resulta se resuelve utilizando técnicas de programación dinámica con recursión hacia adelante. Con este procedimiento la resolución de cada subproblema térmico requiere de la aplicación de un algoritmo iterativo en el que se actualizan los multiplicadores asociados a las restricciones de rampas máximas de subida y bajada de carga. En [44] se emplea este procedimiento. Se utiliza el método del subgradiente en la actualización de los multiplicadores asociados a las restricciones de rampas hasta que se obtiene una solución que cumple estas restricciones.

5.2.4 Resolución analítica del despacho de una central térmica. Aplicación a varios tipos de subproblemas térmicos

En el apartado 5.2.2 se han establecido dos definiciones de estado (estado 1 y estado 2), se han presentado varios ejemplos de diagramas de estados ligados a cada una de estas definiciones de estado y se ha definido la función recursiva de optimización. Con estos elementos queda determinada la resolución del subproblema asociado a cada central térmica mediante técnicas de programación dinámica con recursión hacia adelante.

Este apartado se centra en la resolución de los subproblemas térmicos que resultan al aplicar el método de la relajación lagrangiana a los ocho modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo que se presentaron en el apartado 4.3.

Los ocho modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo considerados se diferencian entre sí en el tipo y la formulación de las restricciones globales (o restricciones de carga) incluidas. Las restricciones globales se dualizan al aplicar el método de la relajación lagrangiana.

Por ello, la diferencia entre los subproblemas térmicos asociados a cada uno de estos ocho modelos está en los términos que incluyen multiplicadores de Lagrange y que representan remuneraciones a las centrales por su contribución a las restricciones globales.

En consecuencia, para todos los modelos considerados la definición del diagrama de estados es la misma y sólo depende de la definición de estado (estado 1 o estado 2) adoptada. Lo que diferencia a los subproblemas térmicos asociados a los ocho modelos de coordinación hidrotérmica es el coste asociado a los estados de acoplamiento ya que es en los problemas de despacho de cada estado de acoplamiento donde intervienen los multiplicadores de Lagrange.

El problema del despacho de cada nodo de acoplamiento se ha formulado de manera general en las ecuaciones (5.13)-(5.16) o bien (5.17)-(5.19). Es un problema muy simple que se puede resolver de forma analítica. Esto revierte en la eficiencia computacional del procedimiento de resolución de los subproblemas térmicos.

En este apartado se establece la resolución analítica de los problemas de despacho de los subproblemas asociados a los ocho modelos de coordinación hidrotérmica considerados (apartado 4.3).

Modelo 1

El subproblema térmico asociado a la central j según este modelo (apartado 4.3.1), y considerando el coste de producción $a_j(t_{jk})$ cuadrático, se formula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar}_{t_{jk}, v_{jk}, y_{jk}, z_{jk}, \tilde{s}_{jk}, x_{jx}^d} \\ &\sum_{k=1}^K \left[v_{jk} \left(a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} \right) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] - \lambda_k t_{jk} - \mu_k \bar{p}_j v_{jk} \end{aligned} \quad (5.22)$$

sueto a

$$\underline{p}_j v_{jk} \leq t_{jk} \leq \bar{p}_j v_{jk} \quad \forall k \quad (5.23)$$

$$t_{jk} - t_{jk-1} \leq r_j^s \quad k = 2, \dots, T \quad (5.24)$$

$$t_{jk-1} - t_{jk} \leq r_j^b \quad k = 2, \dots, T \quad (5.25)$$

$$y_{j1} - z_{j1} = v_{j1} - v_{j0} \quad (5.26)$$

$$y_{jk} - z_{jk} = v_{jk} - v_{jk-1} \quad k = 2, \dots, T \quad (5.27)$$

$$\left(\tilde{s}_{j0} - T_j^f \right) (v_{j0} - v_{j1}) \geq 0 \quad (5.28)$$

$$\left(\tilde{s}_{jk-1} - T_j^f \right) (v_{jk-1} - v_{jk}) \geq 0 \quad k = 2, \dots, T \quad (5.29)$$

$$\left(\tilde{s}_{j0} + T_j^p \right) (v_{j1} - v_{j0}) \geq 0 \quad (5.30)$$

$$\left(\tilde{s}_{jk-1} + T_j^p \right) (v_{jk} - v_{jk-1}) \geq 0 \quad k = 2, \dots, T \quad (5.31)$$

Al resolver este problema de optimización mediante técnicas de programación dinámica (utilizando cualquiera de las definiciones de estado que se incluyen en el apartado 5.2.2), los costes de arranque y parada se asignan a las transiciones entre estados. Las restricciones que establecen la lógica de las decisiones de arranque, parada y acoplamiento de la central (ecuaciones (5.26) y (5.27)) así como las restricciones de tiempo mínimo de funcionamiento y parada de la central (ecuaciones (5.28)-(5.31)) se modelan a través de las transiciones posibles entre estados que se reflejan en el diagrama de estados. Los factores restantes se incluyen en el problema de optimización de la producción de cada estado de acoplamiento o problema del despacho de cada estado, o nodo, de acoplamiento. Estos factores son los costes de producción y la remuneración a

la contribución del cumplimiento de las restricciones del sistema a través de los multiplicadores de Lagrange (ecuación (5.22)), las restricciones de mínimo y máximo técnico (ecuaciones (5.23)) y las restricciones de rampa máxima de subida y bajada de carga (ecuaciones (5.24)-(5.25)).

Así, el problema de despacho de cada estado de acoplamiento es el siguiente:

$$\text{Minimizar}_{t_{jk}} \quad a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk} - \mu_k \bar{p}_j \quad (5.32)$$

sujeito a

$$\underline{t} - t_{jk} \leq 0 \quad (5.33)$$

$$t_{jk} - \bar{t} \leq 0 \quad (5.34)$$

donde a_{1j} , a_{2j} y a_{3j} son los coeficientes de la función cuadrática de coste de producción y:

$$\underline{t} = \text{Max} \left(\underline{p}_j, t_{jk-1} - r_j^b \right) \quad (5.35)$$

$$\bar{t} = \text{Min} \left(\bar{p}_j, t_{jk-1} + r_j^s \right) \quad (5.36)$$

Nótese que el problema (5.32)-(5.34) procede del problema (5.22)-(5.31) del que se han eliminado los costes de arranque y parada (términos $z_{jk} c_j$ y $y_{jk} b(x_{jk}^d)$ de la función objetivo, ecuación (5.22)), que se tienen en cuenta en los costes de las transiciones de los diagramas de estados y las restricciones de tiempo mínimo de funcionamiento (ecuaciones (5.28)-(5.29)) y parada (ecuaciones (5.30)-(5.31)) así como las restricciones lógicas que relacionan las variables de acoplamiento, de arranque y de parada (ecuaciones (5.26)-(5.27)), que se tienen en cuenta en la definición de las transiciones posibles entre estados.

Para resolver el problema del despacho (ecuaciones (5.32)-(5.34)) se aplican las condiciones necesarias de optimalidad de primer orden [77], [27] definiéndose el lagrangiano [23], [25]:

$$\mathcal{L}(t_{jk}, \gamma_1, \gamma_2) \equiv a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk} - \mu_k \bar{p}_j + \gamma_1 (\underline{t} - t_{jk}) + \gamma_2 (t_{jk} - \bar{t}) \quad (5.37)$$

o bien

$$\mathcal{L}(t_{jk}, \gamma_1, \gamma_2) \equiv a_{1j} t_{jk}^2 + (a_{2j} - \lambda_k - \gamma_1 + \gamma_2) t_{jk} + a_{3j} - \mu_k \bar{p}_j + \gamma_1 \underline{t} - \gamma_2 \bar{t} \quad (5.38)$$

Las condiciones necesarias de optimalidad de primer orden son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_{jk}} = 2 a_{1j} t_{jk} + a_{2j} - \lambda_k - \gamma_1 + \gamma_2 = 0 \quad (5.39)$$

$$\gamma_1 (\underline{t} - t_{jk}) = 0 \quad \gamma_1 \geq 0 \quad (5.40)$$

$$\gamma_2 (t_{jk} - \bar{t}) = 0 \quad \gamma_2 \geq 0 \quad (5.41)$$

Considerando el problema no degenerado, de la condición (5.40) se deduce:

$$\text{Si } \gamma_1 = 0 \rightarrow \underline{t} - t_{jk} \neq 0 \quad (5.42)$$

$$\text{Si } \gamma_1 \neq 0 \rightarrow \underline{t} - t_{jk} = 0 \quad (5.43)$$

Análogamente, de la condición (5.41) se deduce:

$$\text{Si } \gamma_2 = 0 \rightarrow t_{jk} - \bar{t} \neq 0 \quad (5.44)$$

$$\text{Si } \gamma_2 \neq 0 \rightarrow t_{jk} - \bar{t} = 0 \quad (5.45)$$

Son pues posibles los siguientes casos:

1. $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$.
2. $\gamma_1 \neq 0, \gamma_2 \neq 0$.
3. $\gamma_1 = 0, \gamma_2 \neq 0$.
4. $\gamma_1 \neq 0, \gamma_2 = 0$.

Se analizan estos casos a continuación.

1. $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$.

De la condición de optimalidad (5.40) se deduce que la potencia producida no es igual al límite inferior definido para el estado analizado (es decir, $t_{jk} \neq \underline{t}$).

De la condición de optimalidad (5.41) se deduce que la potencia producida no es igual al límite superior definido para el estado analizado (es decir, $t_{jk} \neq \bar{t}$).

Por tanto la potencia óptima a producir en el subperiodo analizado t_{jk}^* se deriva de la primera condición de optimalidad (5.39), esto es:

$$2 a_{1j} t_{jk} + a_{2j} - \lambda_k - \gamma_1 + \gamma_2 = 0 \quad (5.46)$$

de donde se deduce:

$$t_{jk}^* = \frac{\lambda_k - a_{2j}}{2 a_{1j}} \quad (5.47)$$

2. $\gamma_1 \neq 0, \gamma_2 \neq 0$.

Si $\gamma_1 \neq 0$ entonces, aplicando la segunda condición de optimalidad (ecuación (5.40)), la potencia producida debe ser igual al límite inferior definido, es decir, $t_{jk}^* = \underline{t}$.

Si $\gamma_2 \neq 0$ entonces, aplicando la tercera condición de optimalidad (ecuación (5.41)), la potencia producida debe ser igual al límite superior definido, es decir, $t_{jk}^* = \bar{t}$. Este resultado se contradice con el anterior.

Por ello es imposible en la práctica que se dé este caso. Es decir es imposible que simultáneamente γ_1 y γ_2 sean distintos de cero.

3. $\gamma_1 = 0, \gamma_2 \neq 0$.

Si $\gamma_2 \neq 0$, entonces de la tercera condición de optimalidad (ecuación (5.41)) se deduce que la potencia óptima a producir debe ser igual al límite superior de potencia definido para el estado analizado, esto es, $t_{jk}^* = \bar{t}$.

Aplicando la primera condición de optimalidad (ecuación (5.39)) se puede deducir el valor de γ_2 :

$$\gamma_2 = -2 a_{1j} t_{jk} - a_{2j} + \lambda_k \quad (5.48)$$

4. $\gamma_1 \neq 0, \gamma_2 = 0$.

Si $\gamma_1 \neq 0$, entonces de la segunda condición de optimalidad (ecuación (5.40)) se deduce que la potencia óptima a producir debe ser igual al límite inferior de potencia definido para el estado analizado, esto es, $t_{jk}^* = \underline{t}$.

Aplicando la primera condición de optimalidad (ecuación (5.39)) se puede deducir el valor de γ_1 :

$$\gamma_1 = 2 a_{1j} t_{jk} + a_{2j} - \lambda_k \quad (5.49)$$

El procedimiento que se emplea para resolver el despacho de cada estado de acoplamiento, a partir del análisis efectuado de las condiciones de optimalidad, se describe a continuación.

Se resuelve la ecuación siguiente para $\tilde{t}_{jk}$:

$$2 a_{1j} \tilde{t}_{jk} + a_{2j} - \lambda_k = 0 \quad (5.50)$$

Si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta está comprendido entre los límites inferior $\underline{t}$ y superior de potencia $\bar{t}$, definidos para el estado analizado (ecuaciones (5.35) y (5.36)), entonces la potencia óptima t_{jk}^* es $\tilde{t}_{jk}$.

Si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta, es menor que el límite inferior de potencia $\underline{t}$ definidos para el estado analizado (ecuación (5.35)), entonces la potencia óptima t_{jk}^* es igual al límite inferior $\underline{t}$.

Por último, si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta, es mayor que el límite superior de potencia $\bar{t}$ definidos para el estado analizado (ecuación (5.36)), entonces la potencia óptima t_{jk}^* es igual al límite superior $\bar{t}$.

Modelo 2

El subproblema térmico asociado a la central j según este modelo (apartado 4.3.2), considerando el coste de producción $a_j(t_{jk})$ cuadrático, se formula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar}_{t_{jk}, v_{jk}, y_{jk}, z_{jk}, \tilde{s}_{jk}, x_{jx}^d} \\ &\sum_{k=1}^K \left[v_{jk} \left(a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} \right) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] - \left[\lambda_k t_{jk} + \mu_k (\bar{p}_j - t_{jk}) \right] \end{aligned} \quad (5.51)$$

sujeto a

$$\underline{p}_j v_{jk} \leq t_{jk} \leq \bar{p}_j v_{jk} \quad \forall j \quad \forall k \quad (5.52)$$

$$t_{jk} - t_{jk-1} \leq r_j^s \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.53)$$

$$t_{jk-1} - t_{jk} \leq r_j^b \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.54)$$

$$y_{j1} - z_{j1} = v_{j1} - v_{j0} \quad \forall j \quad (5.55)$$

$$y_{jk} - z_{jk} = v_{jk} - v_{jk-1} \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.56)$$

$$(\tilde{s}_{j0} - T_j^f)(v_{j0} - v_{j1}) \geq 0 \quad \forall j \quad (5.57)$$

$$(\tilde{s}_{jk-1} - T_j^f)(v_{jk-1} - v_{jk}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.58)$$

$$(\tilde{s}_{j0} + T_j^p)(v_{j1} - v_{j0}) \geq 0 \quad \forall j \quad (5.59)$$

$$(\tilde{s}_{jk-1} + T_j^p)(v_{jk} - v_{jk-1}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.60)$$

Como ya se ha indicado las restricciones que establecen la lógica de las decisiones de arranque, parada y acoplamiento de la central (ecuaciones (5.55) y (5.56)), las restricciones de tiempo mínimo de funcionamiento y parada de la central (ecuaciones (5.57)-(5.60)) y los costes de arranque y parada se modelan a través de la definición de las transiciones posibles en el diagrama de estados y de los costes asociados a ellas.

El problema de despacho de cada estado de acoplamiento es el siguiente:

$$\text{Minimizar}_{t_{jk}} \quad a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk} - \mu_k (\bar{p}_j - t_{jk}) \quad (5.61)$$

sujeto a

$$\underline{t} - t_{jk} \leq 0 \quad (5.62)$$

$$t_{jk} - \bar{t} \leq 0 \quad (5.63)$$

donde a_{1j} , a_{2j} y a_{3j} son los coeficientes de la función cuadrática de coste de producción y, $\underline{t}$ y $\bar{t}$ se definen en las ecuaciones (5.35) y (5.36).

Para resolver este problema de optimización (ecuaciones (5.61)-(5.63)) se aplican las condiciones necesarias de optimalidad de primer orden [77], [27] definiéndose el lagrangiano [23], [25]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t_{jk}, \gamma_1, \gamma_2) \equiv & a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk} - \mu_k (\bar{p}_j - t_{jk}) \\ & + \gamma_1 (\underline{t} - t_{jk}) + \gamma_2 (t_{jk} - \bar{t}) \end{aligned} \quad (5.64)$$

o bien

$$\mathcal{L}(t_{jk}, \gamma_1, \gamma_2) \equiv a_{1j} t_{jk}^2 + (a_{2j} - \lambda_k + \mu_k - \gamma_1 + \gamma_2) t_{jk} + a_{3j} - \mu_k \bar{p}_j + \gamma_1 \underline{t} - \gamma_2 \bar{t} \quad (5.65)$$

Las condiciones necesarias de optimalidad de primer orden son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_{jk}} = 2 a_{1j} t_{jk} + a_{2j} - \lambda_k + \mu_k - \gamma_1 + \gamma_2 = 0 \quad (5.66)$$

$$\gamma_1 (\underline{t} - t_{jk}) = 0 \quad \gamma_1 \geq 0 \quad (5.67)$$

$$\gamma_2 (t_{jk} - \bar{t}) = 0 \quad \gamma_2 \geq 0 \quad (5.68)$$

Siguiendo el mismo procedimiento presentado en el modelo 1, se analizan los los siguientes casos:

1. $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$.
2. $\gamma_1 \neq 0, \gamma_2 \neq 0$.
3. $\gamma_1 = 0, \gamma_2 \neq 0$.
4. $\gamma_1 \neq 0, \gamma_2 = 0$.
1. $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$.

De la condición de optimalidad (5.67) se deduce que la potencia producida no es igual al límite inferior definido para el estado analizado (es decir, $t_{jk} \neq \underline{t}$).

De la condición de optimalidad (5.68) se deduce que la potencia producida no es igual al límite superior definido para el estado analizado (es decir, $t_{jk} \neq \bar{t}$).

Por tanto la potencia óptima a producir en el subperiodo analizado t_{jk}^* se deriva de la primera condición de optimalidad (5.66), es decir:

$$t_{jk}^* = \frac{\lambda_k - \mu_k - a_{2j}}{2 a_{1j}} \quad (5.69)$$

2. $\gamma_1 \neq 0, \gamma_2 \neq 0$.

Si $\gamma_1 \neq 0$ entonces, aplicando la segunda condición de optimalidad (ecuación (5.67)), la potencia producida debe ser igual al limite inferior definido, es decir, $t_{jk}^* = \underline{t}$.

Si $\gamma_2 \neq 0$ entonces, aplicando la tercera condición de optimalidad (ecuación (5.68)), la potencia producida debe ser igual al limite superior definido, es decir, $t_{jk}^* = \bar{t}$. Este resultado se contradice con el anterior.

Por ello es imposible en la práctica que se dé este caso. Es decir es imposible que simultáneamente γ_1 y γ_2 sean distintos de cero.

3. $\gamma_1 = 0, \gamma_2 \neq 0$.

Si $\gamma_2 \neq 0$, entonces de la tercera condición de optimalidad (ecuación (5.68)) se deduce que la potencia óptima a producir debe ser igual al límite superior de potencia definido para el estado analizado, esto es, $t_{jk}^* = \bar{t}$.

Aplicando la primera condición de optimalidad (ecuación (5.66)) se puede deducir el valor de γ_2 :

$$\gamma_2 = -2 a_{1j} t_{jk} - a_{2j} + \lambda_k - \mu_k \quad (5.70)$$

4. $\gamma_1 \neq 0, \gamma_2 = 0$.

Si $\gamma_1 \neq 0$, entonces de la segunda condición de optimalidad (ecuación (5.67)) se deduce que la potencia óptima a producir debe ser igual al límite inferior de potencia definido para el estado analizado, esto es, $t_{jk}^* = \underline{t}$.

Aplicando la primera condición de optimalidad (ecuación (5.66)) se puede deducir el valor de γ_1 :

$$\gamma_1 = 2 a_{1j} t_{jk} + a_{2j} - \lambda_k + \mu_k \quad (5.71)$$

El procedimiento que se emplea para resolver el despacho de cada estado de acoplamiento, a partir del análisis efectuado de las condiciones de optimalidad, se describe a continuación.

Se resuelve la ecuación siguiente para $\tilde{t}_{jk}$:

$$2 a_{1j} \tilde{t}_{jk} + a_{2j} - \lambda_k + \mu_k = 0 \quad (5.72)$$

Si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta está comprendido entre los límites inferior $\underline{t}$ y superior de potencia $\bar{t}$, definidos para el estado analizado (ecuaciones (5.35) y (5.36)), entonces la potencia óptima t_{jk}^* es $\tilde{t}_{jk}$.

Si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta, es menor que el límite inferior de potencia $\underline{t}$ definidos para el estado analizado (ecuación (5.35)), entonces la potencia óptima t_{jk}^* es igual al límite inferior $\underline{t}$.

Por último, si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta, es mayor que el límite superior de potencia $\bar{t}$ definidos para el estado analizado (ecuación (5.36)), entonces la potencia óptima t_{jk}^* es igual al límite superior $\bar{t}$.

Modelo 3

El subproblema térmico asociado a la central j según este modelo (apartado 4.3.3), y considerando el coste de producción $a_j(t_{jk})$ cuadrático, se formula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar}_{t_{jk}, v_{jk}, y_{jk}, z_{jk}, \tilde{s}_{jk}, x_{jx}^d} \\ &\sum_{k=1}^K \left[v_{jk} \left(a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} \right) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] \\ &- \left\{ \sum_{k=1}^K \lambda_k t_{jk} + \sum_{k=1}^K \mu_k \left[(\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} w_{jk} + r_j^s v_{jk} (1 - w_{jk}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.73)$$

sujeito a

$$\underline{p}_j v_{jk} \leq t_{jk} \leq \bar{p}_j v_{jk} \quad \forall j \quad \forall k \quad (5.74)$$

$$t_{jk} - t_{jk-1} \leq r_j^s \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.75)$$

$$t_{jk-1} - t_{jk} \leq r_j^b \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.76)$$

$$y_{j1} - z_{j1} = v_{j1} - v_{j0} \quad \forall j \quad (5.77)$$

$$y_{jk} - z_{jk} = v_{jk} - v_{jk-1} \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.78)$$

$$(\tilde{s}_{j0} - T_j^f) (v_{j0} - v_{j1}) \geq 0 \quad \forall j \quad (5.79)$$

$$(\tilde{s}_{jk-1} - T_j^f) (v_{jk-1} - v_{jk}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.80)$$

$$(\tilde{s}_{j0} + T_j^p) (v_{j1} - v_{j0}) \geq 0 \quad \forall j \quad (5.81)$$

$$(\tilde{s}_{jk-1} + T_j^p) (v_{jk} - v_{jk-1}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.82)$$

El problema de despacho de cada estado de acoplamiento es el siguiente:

Minimizar $_{t_{jk}}$

$$a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk} - \mu_k \left[(\bar{p}_j - t_{jk}) w_{jk} + r_j^s (1 - w_{jk}) \right] \quad (5.83)$$

sujeeto a

$$\underline{t} - t_{jk} \leq 0 \quad (5.84)$$

$$t_{jk} - \bar{t} \leq 0 \quad (5.85)$$

donde a_{1j} , a_{2j} y a_{3j} son los coeficientes de la función cuadrática de coste de producción, w_{jk} es una variable binaria que vale 1 si $(\bar{p}_j - t_{jk}) \leq r_j^s$ (es decir si, al considerar las restricciones de reserva rodante, el hueco es menor que la rampa de subida) y 0 en caso contrario (si la rampa de subida es menor que el hueco) y, $\underline{t}$ y $\bar{t}$ se definen en las ecuaciones (5.35) y (5.36).

Este problema (ecuaciones (5.83)-(5.85)) se resuelve a través de la resolución de dos problemas. En uno de ellos la variable w_{jk} vale 0, y por tanto la rampa es menor que el hueco. A este problema de optimización se le llama P1. En el otro problema w_{jk} vale 1, y por tanto el hueco es menor que la rampa. A este problema se le llama P2.

A continuación se plantean los problemas P1 y P2 indicándose los procedimientos de solución de cada uno de ellos. Después se describe el método de solución del problema del despacho asociado a este tercer modelo (ecuaciones (5.83)-(5.85)).

Problema P1

El problema P1 se plantea de la siguiente manera:

Minimizar $_{t_{jk}}$

$$a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk} - \mu_k r_j^s \quad (5.86)$$

sujeeto a

$$\underline{t} - t_{jk} \leq 0 \quad (5.87)$$

$$t_{jk} - \bar{t} \leq 0 \quad (5.88)$$

El lagrangiano se define como sigue:

$$\mathcal{L}(t_{jk}, \gamma_a, \gamma_b) \equiv a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk} - \mu_k r_j^s + \gamma_a (\underline{t} - t_{jk}) + \gamma_b (t_{jk} - \bar{t}) \quad (5.89)$$

Las condiciones de optimalidad son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_{jk}} = 2 a_{1j} t_{jk} + a_{2j} - \lambda_k - \gamma_a + \gamma_b = 0 \quad (5.90)$$

$$\gamma_a (\underline{t} - t_{jk}) = 0 \quad \gamma_a \geq 0 \quad (5.91)$$

$$\gamma_b (t_{jk} - \bar{t}) = 0 \quad \gamma_b \geq 0 \quad (5.92)$$

Del análisis de las condiciones de optimalidad resultan posibles las siguientes combinaciones:

1. $\gamma_a = 0, \gamma_b = 0$.

En esta situación la potencia óptima a producir por la central j en el periodo considerado k se encuentra entre los límites inferior $\underline{t}$ y superior $\bar{t}$. La potencia óptima a producir, que se denota como $t_{jk}^*|_{P1}$ para indicar que corresponde a la resolución del problema P1, se calcula despejando t_{jk} de la primera condición de optimalidad (5.90). Es decir:

$$t_{jk}^*|_{P1} = \frac{\lambda_k - a_{2j}}{2 a_{1j}} \quad (5.93)$$

El coste óptimo asociado a esta solución es el siguiente:

$$a_{1j} \left(\frac{\lambda_k - a_{2j}}{2 a_{1j}} \right)^2 + a_{2j} \frac{\lambda_k - a_{2j}}{2 a_{1j}} + a_{3j} - \lambda_k \frac{\lambda_k - a_{2j}}{2 a_{1j}} - \mu_k r_j^s \quad (5.94)$$

2. $\gamma_a \neq 0, \gamma_b \neq 0$.

Si $\gamma_a \neq 0$ entonces, aplicando la segunda condición de optimalidad (ecuación (5.91)), la potencia producida debe ser igual al límite inferior definido, es decir, $t_{jk}^*|_{P1} = \underline{t}$.

Si $\gamma_b \neq 0$ entonces, aplicando la tercera condición de optimalidad (ecuación (5.92)), la potencia producida debe ser igual al límite superior definido, es decir, $t_{jk}^*|_{P1} = \bar{t}$. Este resultado se contradice con el anterior.

Por ello es imposible en la práctica que se dé este caso. Es decir es imposible que simultáneamente γ_a y γ_b sean distintos de cero.

3. $\gamma_a = 0, \gamma_b \neq 0$.

Si $\gamma_b \neq 0$, entonces de la tercera condición de optimalidad (ecuación (5.92)) se deduce que la potencia óptima a producir debe ser igual al límite superior de potencia definido para el estado analizado, esto es, $t_{jk}^*|_{P1} = \bar{t}$.

Aplicando la primera condición de optimalidad (ecuación (5.90)) se puede deducir el valor de γ_b :

$$\gamma_b = -2 a_{1j} \bar{t} - a_{2j} + \lambda_k \quad (5.95)$$

El coste óptimo de esta solución es el siguiente

$$a_{1j} \bar{t}^2 + a_{2j} \bar{t} + a_{3j} - \lambda_k \bar{t} - \mu_k r_j^s \quad (5.96)$$

4. $\gamma_a \neq 0$, $\gamma_b = 0$.

Si $\gamma_a \neq 0$, entonces de la segunda condición de optimalidad (ecuación (5.91)) se deduce que la potencia óptima a producir debe ser igual al límite inferior de potencia definido para el estado analizado, esto es, $t_{jk}^*|_{P1} = \underline{t}$.

Aplicando la primera condición de optimalidad (ecuación (5.90)) se puede deducir el valor de γ_a :

$$\gamma_a = 2 a_{1j} \underline{t}_{jk} + a_{2j} - \lambda_k \quad (5.97)$$

El coste óptimo de esta solución es el siguiente

$$a_{1j} \underline{t}^2 + a_{2j} \underline{t} + a_{3j} - \lambda_k \underline{t} - \mu_k r_j^s \quad (5.98)$$

Así, el procedimiento a seguir para resolver el problema P1 es el siguiente. Se resuelve para $\tilde{t}_{jk}$ la siguiente ecuación:

$$2 a_{1j} \tilde{t}_{jk} + a_{2j} - \lambda_k = 0 \quad (5.99)$$

Si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta está comprendido entre los límites inferior $\underline{t}$ y superior de potencia $\bar{t}$, definidos para el estado analizado (ecuaciones (5.35) y (5.36)), entonces la potencia óptima $t_{jk}^*|_{P1}$ es $\tilde{t}_{jk}$, es decir:

$$t_{jk}^*|_{P1} = \frac{\lambda_k - a_{2j}}{2 a_{1j}} \quad (5.100)$$

y el coste óptimo es el indicado en la ecuación (5.94).

Si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta, es mayor que el límite superior de potencia $\bar{t}$ definidos para el estado analizado (ecuación (5.36)), entonces la potencia óptima $t_{jk}^*|_{P1}$ es igual al límite superior $\bar{t}$ y el coste óptimo es el indicado en la ecuación (5.96).

Por último, si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta, es menor que el límite inferior de potencia $\underline{t}$ definidos para el estado analizado (ecuación (5.35)), entonces la potencia óptima $t_{jk}^*|_{P1}$ es igual al límite inferior $\underline{t}$ y el coste óptimo es el indicado en la ecuación (5.98).

Problema P2

El problema P2 se plantea de la siguiente manera:

Minimizar: t_{jk}

$$a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk} - \mu_k (\bar{p} - t_{jk}) \quad (5.101)$$

sujeto a

$$\underline{t} - t_{jk} \leq 0 \quad (5.102)$$

$$t_{jk} - \bar{t} \leq 0 \quad (5.103)$$

El lagrangiano se define como sigue:

$$\mathcal{L}(t_{jk}, \gamma_A, \gamma_B) \equiv a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk} - \mu_k (\bar{p} - t_{jk}) + \gamma_A (\underline{t} - t_{jk}) + \gamma_B (t_{jk} - \bar{t}) \quad (5.104)$$

Las condiciones de optimalidad son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_{jk}} = 2 a_{1j} t_{jk} + a_{2j} - \lambda_k + \mu_k - \gamma_A + \gamma_B = 0 \quad (5.105)$$

$$\gamma_A (\underline{t} - t_{jk}) = 0 \quad \gamma_A \geq 0 \quad (5.106)$$

$$\gamma_B (t_{jk} - \bar{t}) = 0 \quad \gamma_B \geq 0 \quad (5.107)$$

Del análisis de las condiciones de optimalidad resultan posibles las siguientes combinaciones:

1. $\gamma_A = 0, \gamma_B = 0$.

En esta situación la potencia óptima a producir por la central j en el periodo considerado k se encuentra entre los límites inferior $\underline{t}$ y superior $\bar{t}$. La potencia óptima a producir $t_{jk}^*|_{P2}$ se calcula a partir de la primera condición de optimalidad (5.105). Resulta:

$$t_{jk}^*|_{P2} = \frac{\lambda_k - a_{2j} - \mu_k}{2 a_{1j}} \quad (5.108)$$

El coste óptimo asociado a esta solución es el siguiente:

$$a_{1j} \left(\frac{\lambda_k - a_{2j} - \mu_k}{2 a_{1j}} \right)^2 + a_{2j} \frac{\lambda_k - a_{2j} - \mu_k}{2 a_{1j}} + a_{3j} - \lambda_k \frac{\lambda_k - a_{2j} - \mu_k}{2 a_{1j}} - \mu_k \left(\bar{p} - \frac{\lambda_k - a_{2j} - \mu_k}{2 a_{1j}} \right) \quad (5.109)$$

2. $\gamma_A \neq 0, \gamma_B \neq 0$.

Del análisis de las condiciones de optimalidad (5.106) y (5.107), puede deducirse que es imposible, en la práctica, simultáneamente γ_A y γ_B sean distintos de cero.

3. $\gamma_A = 0, \gamma_B \neq 0$.

De la tercera condición de optimalidad (ecuación (5.107)) se deduce que la potencia óptima a producir debe ser igual al límite superior de potencia definido para el estado analizado, esto es, $t_{jk}^*|_{P2} = \bar{t}$.

Aplicando la primera condición de optimalidad (ecuación (5.105)) se puede deducir el valor de γ_B :

$$\gamma_B = -2 a_{1j} t_{jk} - a_{2j} + \lambda_k - \mu_k \quad (5.110)$$

El coste óptimo de esta solución es el siguiente

$$a_{1j} \bar{t}^2 + a_{2j} \bar{t} + a_{3j} - \lambda_k \bar{t} - \mu_k (\bar{p} - \bar{t}) \quad (5.111)$$

4. $\gamma_A \neq 0, \gamma_B = 0$.

Si $\gamma_A \neq 0$, entonces de la segunda condición de optimalidad (ecuación (5.106)) se deduce que la potencia óptima a producir debe ser igual al límite inferior de potencia definido para el estado analizado, esto es, $t_{jk}^*|_{P2} = \underline{t}$.

Aplicando la primera condición de optimalidad (ecuación (5.105)) se puede deducir el valor de γ_A :

$$\gamma_A = 2 a_{1j} t_{jk} + a_{2j} - \lambda_k + \mu_k \quad (5.112)$$

El coste óptimo de esta solución es el siguiente

$$a_{1j} \underline{t}^2 + a_{2j} \underline{t} + a_{3j} - \lambda_k \underline{t} - \mu_k (\bar{p} - \underline{t}) \quad (5.113)$$

De nuevo, el procedimiento a seguir para resolver el problema P2 es el siguiente. Se resuelve para $\tilde{t}_{jk}$ la siguiente ecuación:

$$2 a_{1j} \tilde{t}_{jk} + a_{2j} - \lambda_k + \mu_k = 0 \quad (5.114)$$

Si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta está comprendido entre los límites inferior $\underline{t}$ y superior de potencia $\bar{t}$, definidos para el estado analizado (ecuaciones (5.35) y (5.36)), entonces la potencia óptima $t_{jk}^*|_{P2}$ es $\tilde{t}_{jk}$, es decir:

$$t_{jk}^*|_{P2} = \frac{\lambda_k - a_{2j}\mu_k}{2 a_{1j}} \quad (5.115)$$

y el coste óptimo es el indicado en la ecuación (5.109).

Si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta, es mayor que el límite superior de potencia $\bar{t}$ definidos para el estado analizado (ecuación (5.36)), entonces la potencia óptima $t_{jk}^*|_{P2}$ es igual al límite superior $\bar{t}$ y el coste óptimo es el indicado en la ecuación (5.111).

Por último, si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta, es menor que el límite inferior de potencia $\underline{t}$ definidos para el estado analizado (ecuación (5.35)), entonces la potencia óptima $t_{jk}^*|_{P2}$ es igual al límite inferior $\underline{t}$ y el coste óptimo es el indicado en la ecuación (5.113).

Procedimiento de resolución del problema del despacho

El procedimiento para resolver el problema del despacho de la central térmica j en el subperiodo k (ecuaciones (5.83)-(5.85)) se detalla a continuación.

Se resuelve el problema P1 según el procedimiento arriba indicado. Entonces:

1. si se verifica que:

$$r_k^s \leq \bar{p}_j - t_{jk}^*|_{P1} \quad (5.116)$$

donde $t_{jk}^*|_{P1}$ es la potencia óptima a producir en el problema P1, entonces esta es la potencia óptima a producir por la central considerada en el subperiodo considerado siendo el coste óptimo de dicho despacho:

$$a_{1j} t_{jk}^*|_{P1}^2 + a_{2j} t_{jk}^*|_{P1} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk}^*|_{P1} - \mu_k r_j^s \quad (5.117)$$

2. Si por el contrario:

$$r_k^s > \bar{p}_j - t_{jk}^*|_{P1} \quad (5.118)$$

entonces la solución obtenida no es válida y se resuelve el problema P2. En este caso, la potencia óptima a producir por la central es $t_{jk}^*|_{P2}$ (donde $t_{jk}^*|_{P2}$ es la potencia óptima solución del problema P2) y el coste óptimo de este despacho es:

$$a_{1j} t_{jk}^*|_{P2}^2 + a_{2j} t_{jk}^*|_{P2} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk}^*|_{P2} - \mu_k (\bar{p}_j - t_{jk}^*|_{P2}) \quad (5.119)$$

La figura 5.9 ilustra los posibles casos que pueden ocurrir. En las seis gráficas que se incluyen en esta figura la variable independiente es la potencia a producir en el despacho considerado (se prescinde de los subíndices jk), t^* es la potencia óptima a producir, $\underline{t}$ y $\bar{t}$ son las potencias mínima y máxima que se definen en las ecuaciones (5.35) y (5.36).

En todas estas gráficas aparecen tres curvas. La curva cuadrática representa el coste de producción de la central menos la remuneración por la contribución a la restricción de demanda del

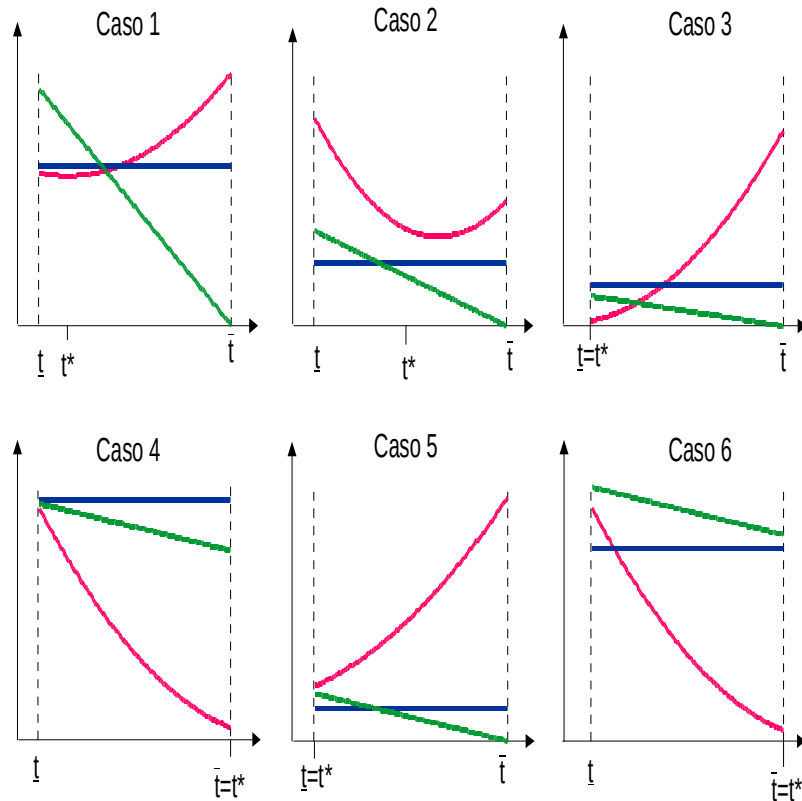


Figura 5.9: Problema del despacho del modelo 3. Casos posibles

subperiodo considerado (es decir, $a_{1j}t_{jk}^2 + a_{2j}t_{jk} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk}$). La recta horizontal representa la remuneración de la central a la contribución a la restricción de reserva rodante en el caso de que la rampa sea menor que el hueco, es decir representa el término $\mu_k r_j^s$ de la función objetivo de problema del despacho (ecuación (5.83)). La recta de pendiente negativa representa la contribución a la restricción de reserva rodante en el caso de que el hueco sea menor que la rampa, es decir representa el término $\mu_k (\bar{p}_j - t_{jk})$.

La función objetivo a minimizar en el despacho (ecuaciones (5.83)-(5.85)) es la curva cuadrática menos la recta horizontal, en el caso de que la rampa sea menor que el hueco (problema P1), o bien la misma curva cuadrática menos la recta de pendiente negativa en el caso de que el hueco sea menor que la rampa (problema P2). La solución del problema debe estar en el intervalo definido por $\underline{t}$ y $\bar{t}$.

Son posibles seis casos (figura 5.9):

- Caso 1.

En el punto donde se encuentra la solución la rampa es menor o igual que el hueco (es decir $r_k^s \leq \bar{p}_j - t^*$). La solución al problema del despacho (solución del problema P1) es la

siguiente:

$$t^* = \frac{\lambda_k - a_{2j}}{2 a_{1j}} \quad (5.120)$$

y el coste óptimo del despacho es el que se indica en la ecuación (5.94).

- Caso 2.

En el punto donde se encuentra la solución la rampa es mayor que el hueco (es decir $r_k^s > \bar{p}_j - t^*$). La solución al problema del despacho (solución del problema P2) es la siguiente:

$$t_{jk}^*|_{P2} = \frac{\lambda_k - a_{2j} - \mu_k}{2 a_{1j}} \quad (5.121)$$

y el coste óptimo del despacho es el que se indica en la ecuación (5.109).

- Caso 3.

En el punto donde se encuentra la solución la rampa es mayor que el hueco (es decir $r_k^s > \bar{p}_j - t^*$). La solución al problema del despacho (solución del problema P2) es $t^* = \underline{t}$ y el coste óptimo es el indicado en la ecuación (5.113).

- Caso 4.

En el punto donde se encuentra la solución la rampa es mayor que el hueco (es decir $r_k^s > \bar{p}_j - t^*$). La solución al problema del despacho (solución del problema P2) es $t^* = \bar{t}$ y el coste óptimo es el indicado en la ecuación (5.111).

- Caso 5.

En el punto donde se encuentra la solución la rampa es menor o igual que el hueco (es decir $r_k^s \leq \bar{p}_j - t^*$). La solución al problema del despacho (solución del problema P1) es $t^* = \underline{t}$ y el coste óptimo es el indicado en la ecuación (5.98).

- Caso 6.

En el punto donde se encuentra la solución la rampa es menor o igual que el hueco (es decir $r_k^s \leq \bar{p}_j - t^*$). La solución al problema del despacho (solución del problema P1) es $t^* = \bar{t}$ y el coste óptimo es el indicado en la ecuación (5.96).

Modelo 4

El subproblema térmico asociado a la central j según este modelo (apartado 4.3.4) se formula de la siguiente forma:

Minimizar $t_{jk}, v_{jk}, y_{jk}, z_{jk}, \tilde{s}_{jk}, x_{jx}^d$

$$\sum_{k=1}^K \left[v_{jk} \left(a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} \right) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] - \left(\lambda_k t_{jk} + \mu_k \bar{p}_j v_{jk} - \alpha_k \underline{p}_j v_{jk} \right) \quad (5.122)$$

sujeito a

$$\underline{p}_j v_{jk} \leq t_{jk} \leq \bar{p}_j v_{jk} \quad \forall j \quad \forall k \quad (5.123)$$

$$t_{jk} - t_{jk-1} \leq r_j^s \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.124)$$

$$t_{jk-1} - t_{jk} \leq r_j^b \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.125)$$

$$y_{j1} - z_{j1} = v_{j1} - v_{j0} \quad \forall j \quad (5.126)$$

$$y_{jk} - z_{jk} = v_{jk} - v_{jk-1} \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.127)$$

$$\left(\tilde{s}_{j0} - T_j^f \right) (v_{j0} - v_{j1}) \geq 0 \quad \forall j \quad (5.128)$$

$$\left(\tilde{s}_{jk-1} - T_j^f \right) (v_{jk-1} - v_{jk}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.129)$$

$$\left(\tilde{s}_{j0} + T_j^p \right) (v_{j1} - v_{j0}) \geq 0 \quad \forall j \quad (5.130)$$

$$\left(\tilde{s}_{jk-1} + T_j^p \right) (v_{jk} - v_{jk-1}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.131)$$

El problema de despacho de cada estado de acoplamiento es el siguiente:

$$\text{Minimizar}_{t_{jk}} \quad a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk} - \mu_k \bar{p}_j + \alpha_k \underline{p}_j \quad (5.132)$$

sujeito a

$$\underline{t} - t_{jk} \leq 0 \quad (5.133)$$

$$t_{jk} - \bar{t} \leq 0 \quad (5.134)$$

donde a_{1j} , a_{2j} y a_{3j} son los coeficientes de la función cuadrática de coste de producción, y, $\underline{t}$ y $\bar{t}$ se definen en las ecuaciones (5.35) y (5.36).

El lagrangiano se define de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}(t_{jk}, \gamma_1, \gamma_2) \equiv a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk} - \mu_k \bar{p}_j + \alpha_k \underline{p}_j + \gamma_1 (\underline{t} - t_{jk}) + \gamma_2 (t_{jk} - \bar{t}) \quad (5.135)$$

Las condiciones necesarias de optimalidad de primer orden son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_{jk}} = 2 a_{1j} t_{jk} + a_{2j} - \lambda_k + -\gamma_1 + \gamma_2 = 0 \quad (5.136)$$

$$\gamma_1 (\underline{t} - t_{jk}) = 0 \quad \gamma_1 \geq 0 \quad (5.137)$$

$$\gamma_2 (t_{jk} - \bar{t}) = 0 \quad \gamma_2 \geq 0 \quad (5.138)$$

A partir del análisis de las condiciones necesarias de optimalidad de primer orden y siguiendo un proceso análogo al presentado en los modelos 1 y 2, puede establecerse el siguiente procedimiento para la resolución del despacho de cada nodo de acoplamiento (ecuaciones (5.132)-(5.134)).

Se resuelve la ecuación que se formula a continuación para $\tilde{t}_{jk}$:

$$2 a_{1j} \tilde{t}_{jk} + a_{2j} - \lambda_k = 0 \quad (5.139)$$

Si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta está comprendido entre los límites inferior $\underline{t}$ y superior de potencia $\bar{t}$, definidos para el estado analizado (ecuaciones (5.35) y (5.36)), entonces la potencia óptima t_{jk}^* es $\tilde{t}_{jk}$.

Si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta, es menor que el límite inferior de potencia $\underline{t}$ definidos para el estado analizado (ecuación (5.35)), entonces la potencia óptima t_{jk}^* es igual al límite inferior $\underline{t}$.

Por último, si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta, es mayor que el límite superior de potencia $\bar{t}$ definidos para el estado analizado (ecuación (5.36)), entonces la potencia óptima t_{jk}^* es igual al límite superior $\bar{t}$.

Modelo 5

El subproblema térmico asociado a la central j según este modelo (apartado 4.3.5) se formula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar}_{t_{jk}, v_{jk}, y_{jk}, z_{jk}, \tilde{s}_{jk}, x_{jx}^d} \\ &\sum_{k=1}^K \left[v_{jk} (a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] \\ &\quad - \left[\lambda_k t_{jk} + \mu_k (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} - \alpha_k \underline{p}_j v_{jk} \right] \end{aligned} \quad (5.140)$$

sujeto a

$$\underline{p}_j v_{jk} \leq t_{jk} \leq \bar{p}_j v_{jk} \quad \forall j \quad \forall k \quad (5.141)$$

$$t_{jk} - t_{jk-1} \leq r_j^s \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.142)$$

$$t_{jk-1} - t_{jk} \leq r_j^b \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.143)$$

$$y_{j1} - z_{j1} = v_{j1} - v_{j0} \quad \forall j \quad (5.144)$$

$$y_{jk} - z_{jk} = v_{jk} - v_{jk-1} \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.145)$$

$$(\tilde{s}_{j0} - T_j^f) (v_{j0} - v_{j1}) \geq 0 \quad \forall j \quad (5.146)$$

$$(\tilde{s}_{jk-1} - T_j^f) (v_{jk-1} - v_{jk}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.147)$$

$$(\tilde{s}_{j0} + T_j^p) (v_{j1} - v_{j0}) \geq 0 \quad \forall j \quad (5.148)$$

$$(\tilde{s}_{jk-1} + T_j^p) (v_{jk} - v_{jk-1}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.149)$$

El problema de despacho de cada estado de acoplamiento es el siguiente:

$$\text{Minimizar}_{t_{jk}} \quad a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk} - \mu_k (\bar{p}_j - t_{jk}) + \alpha_k \underline{p}_j \quad (5.150)$$

sujeeto a

$$\underline{t} - t_{jk} \leq 0 \quad (5.151)$$

$$t_{jk} - \bar{t} \leq 0 \quad (5.152)$$

donde a_{1j} , a_{2j} y a_{3j} son los coeficientes de la función cuadrática de coste de producción y, $\underline{t}$ y $\bar{t}$ se definen en las ecuaciones (5.35) y (5.36).

El lagrangiano se define de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t_{jk}, \gamma_1, \gamma_2) \equiv & a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk} - \mu_k (\bar{p}_j - t_{jk}) + \alpha_k \underline{p}_j \\ & + \gamma_1 (\underline{t} - t_{jk}) + \gamma_2 (t_{jk} - \bar{t}) \end{aligned} \quad (5.153)$$

Las condiciones necesarias de optimalidad de primer orden son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_{jk}} = 2 a_{1j} t_{jk} + a_{2j} - \lambda_k + \mu_k - \gamma_1 + \gamma_2 = 0 \quad (5.154)$$

$$\gamma_1 (\underline{t} - t_{jk}) = 0 \quad \gamma_1 \geq 0 \quad (5.155)$$

$$\gamma_2 (t_{jk} - \bar{t}) = 0 \quad \gamma_2 \geq 0 \quad (5.156)$$

A partir del análisis de las condiciones necesarias de optimalidad de primer orden y siguiendo un proceso análogo al utilizado en los modelos 1 y 2, puede establecerse el siguiente procedimiento para la resolución del despacho de cada nodo de acoplamiento (ecuaciones (5.150)-(5.152)).

Se resuelve la ecuación que se formula a continuación para $\tilde{t}_{jk}$:

$$2 a_{1j} \tilde{t}_{jk} + a_{2j} - \lambda_k + \mu_k = 0 \quad (5.157)$$

Si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta está comprendido entre los límites inferior $\underline{t}$ y superior de potencia $\bar{t}$, definidos para el estado analizado (ecuaciones (5.35) y (5.36)), entonces la potencia óptima t_{jk}^* es $\tilde{t}_{jk}$.

Si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta, es menor que el límite inferior de potencia $\underline{t}$ definidos para el estado analizado (ecuación (5.35)), entonces la potencia óptima t_{jk}^* es igual al límite inferior $\underline{t}$.

Por último, si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta, es mayor que el límite superior de potencia $\bar{t}$ definidos para el estado analizado (ecuación (5.36)), entonces la potencia óptima t_{jk}^* es igual al límite superior $\bar{t}$.

Modelo 6

El subproblema térmico asociado a la central j según este modelo (apartado 4.3.3), y considerando el coste de producción $a_j(t_{jk})$ cuadrático, se formula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar}_{t_{jk}, v_{jk}, y_{jk}, z_{jk}, \tilde{s}_{jk}, x_{jx}^d} \\ &\quad \sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] \\ &\quad - \left\{ \sum_{k=1}^K \lambda_k t_{jk} + \sum_{k=1}^K \mu_k \left[(\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} w_{jk} + r_j^s v_{jk} (1 - w_{jk}) \right] - \sum_{k=1}^K \alpha_k \underline{p}_j v_{jk} \right\} \end{aligned} \quad (5.158)$$

sujeito a

$$\underline{p}_j v_{jk} \leq t_{jk} \leq \bar{p}_j v_{jk} \quad \forall j \quad \forall k \quad (5.159)$$

$$t_{jk} - t_{jk-1} \leq r_j^s \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.160)$$

$$t_{jk-1} - t_{jk} \leq r_j^b \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.161)$$

$$y_{j1} - z_{j1} = v_{j1} - v_{j0} \quad \forall j \quad (5.162)$$

$$y_{jk} - z_{jk} = v_{jk} - v_{jk-1} \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.163)$$

$$(\tilde{s}_{j0} - T_j^f)(v_{j0} - v_{j1}) \geq 0 \quad \forall j \quad (5.164)$$

$$(\tilde{s}_{jk-1} - T_j^f)(v_{jk-1} - v_{jk}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.165)$$

$$(\tilde{s}_{j0} + T_j^p)(v_{j1} - v_{j0}) \geq 0 \quad \forall j \quad (5.166)$$

$$(\tilde{s}_{jk-1} + T_j^p)(v_{jk} - v_{jk-1}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.167)$$

El problema de despacho de cada estado de acoplamiento es el siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar}_{t_{jk}} \\ &\quad a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk} - \mu_k \left[(\bar{p}_j - t_{jk}) w_{jk} + r_j^s (1 - w_{jk}) \right] - \alpha_k \underline{p}_j \end{aligned} \quad (5.168)$$

sujeito a

$$\underline{t} - t_{jk} \leq 0 \quad (5.169)$$

$$t_{jk} - \bar{t} \leq 0 \quad (5.170)$$

donde a_{1j} , a_{2j} y a_{3j} son los coeficientes de la función cuadrática de coste de producción, w_{jk} es una variable binaria que vale 1 si $(\bar{p}_j - t_{jk}) \leq r_j^s$ (es decir si, al considerar las restricciones de reserva rodante, el hueco es menor que la rampa de subida) y 0 en caso contrario (si la rampa de subida es menor que el hueco) y, $\underline{t}$ y $\bar{t}$ se definen en las ecuaciones (5.35) y (5.36).

Siguiendo el mismo procedimiento empleado en el análisis del problema del despacho en el modelo 3, este problema (ecuaciones (5.168)-(5.170)) se resuelve a través de la resolución de dos

problemas. En el primero (problema P1) la variable w_{jk} vale 0, y por tanto la rampa es menor que el hueco. En el segundo, w_{jk} vale 1, y por tanto el hueco es menor que la rampa (problema P2).

A continuación se plantean los problemas P1 y P2 indicándose los procedimientos de solución de cada uno de ellos. Después se describe el método de solución del problema del despacho asociado al modelo 6 (ecuaciones (5.168)-(5.170)).

Problema P1

El problema P1 se plantea de la siguiente manera:

Minimizar t_{jk}

$$a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk} - \mu_k r_j^s - \alpha_k p_j \quad (5.171)$$

sujeeto a

$$\underline{t} - t_{jk} \leq 0 \quad (5.172)$$

$$t_{jk} - \bar{t} \leq 0 \quad (5.173)$$

El lagrangiano se define de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t_{jk}, \gamma_a, \gamma_b) \equiv & a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk} - \mu_k r_j^s - \alpha_k p_j \\ & + \gamma_a (\underline{t} - t_{jk}) + \gamma_b (t_{jk} - \bar{t}) \end{aligned} \quad (5.174)$$

Las condiciones de optimalidad son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_{jk}} = 2 a_{1j} t_{jk} + a_{2j} - \lambda_k - \gamma_a + \gamma_b = 0 \quad (5.175)$$

$$\gamma_a (\underline{t} - t_{jk}) = 0 \quad \gamma_a \geq 0 \quad (5.176)$$

$$\gamma_b (t_{jk} - \bar{t}) = 0 \quad \gamma_b \geq 0 \quad (5.177)$$

Del análisis de las condiciones de optimalidad y siguiendo un proceso análogo a los descritos en el análisis de los modelos 1, 2 y 3, puede establecerse el siguiente procedimiento de resolución del problema P1.

Se resuelve para $\tilde{t}_{jk}$ la siguiente ecuación:

$$2 a_{1j} \tilde{t}_{jk} + a_{2j} - \lambda_k = 0 \quad (5.178)$$

Si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta está comprendido entre los límites inferior $\underline{t}$ y superior de potencia $\bar{t}$, definidos para el estado analizado (ecuaciones (5.35) y (5.36)), entonces la potencia óptima del problema P1 $t_{jk}^*|_{P1}$ es $\tilde{t}_{jk}$, es decir:

$$t_{jk}^*|_{P1} = \frac{\lambda_k - a_{2j}}{2 a_{1j}} \quad (5.179)$$

y el coste óptimo es:

$$a_{1j} \left(\frac{\lambda_k - a_{2j}}{2 a_{1j}} \right)^2 + a_{2j} \frac{\lambda_k - a_{2j}}{2 a_{1j}} + a_{3j} - \lambda_k \frac{\lambda_k - a_{2j}}{2 a_{1j}} - \mu_k r_j^s - \alpha_k \underline{p}_j \quad (5.180)$$

Si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta, es mayor que el límite superior de potencia $\bar{t}$ definidos para el estado analizado (ecuación (5.36)), entonces la potencia óptima $t_{jk}^*|_{P1}$ es igual al límite superior $\bar{t}$ y el coste óptimo es el siguiente:

$$a_{1j} \bar{t}^2 + a_{2j} \bar{t} + a_{3j} - \lambda_k \bar{t} - \mu_k r_j^s - \alpha_k \underline{p}_j \quad (5.181)$$

Por último, si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta, es menor que el límite inferior de potencia $\underline{t}$ definidos para el estado analizado (ecuación (5.35)), entonces la potencia óptima $t_{jk}^*|_{P1}$ es igual al límite inferior $\underline{t}$ y el coste óptimo es

$$a_{1j} \underline{t}^2 + a_{2j} \underline{t} + a_{3j} - \lambda_k \underline{t} - \mu_k r_j^s - \alpha_k \underline{p}_j \quad (5.182)$$

Problema P2

El problema P2 se plantea de la siguiente manera:

Minimizar t_{jk}

$$a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk} - \mu_k (\bar{p} - t_{jk}) - \alpha_k \underline{p}_j \quad (5.183)$$

sujeto a

$$\underline{t} - t_{jk} \leq 0 \quad (5.184)$$

$$t_{jk} - \bar{t} \leq 0 \quad (5.185)$$

El lagrangiano se define como sigue:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t_{jk}, \gamma_A, \gamma_B) \equiv & a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk} - \mu_k (\bar{p} - t_{jk}) \\ & - \alpha_k \underline{p}_j + \gamma_A (\underline{t} - t_{jk}) + \gamma_B (t_{jk} - \bar{t}) \end{aligned} \quad (5.186)$$

Las condiciones de optimalidad son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_{jk}} = 2 a_{1j} t_{jk} + a_{2j} - \lambda_k + \mu_k - \gamma_A + \gamma_B = 0 \quad (5.187)$$

$$\gamma_A (\underline{t} - t_{jk}) = 0 \quad \gamma_A \geq 0 \quad (5.188)$$

$$\gamma_B (t_{jk} - \bar{t}) = 0 \quad \gamma_B \geq 0 \quad (5.189)$$

A partir del análisis de las condiciones de optimalidad puede definirse el siguiente procedimiento de resolución del problema P2. Se resuelve para $\tilde{t}_{jk}$ la siguiente ecuación:

$$2 a_{1j} \tilde{t}_{jk} + a_{2j} - \lambda_k + \mu_k = 0 \quad (5.190)$$

Si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta está comprendido entre los límites inferior $\underline{t}$ y superior de potencia $\bar{t}$, definidos para el estado analizado (ecuaciones (5.35) y (5.36)), entonces la potencia óptima $t_{jk}^*|_{P2}$ es $\tilde{t}_{jk}$, es decir:

$$t_{jk}^*|_{P2} = \frac{\lambda_k - a_{2j} - \mu_k}{2 a_{1j}} \quad (5.191)$$

y el coste óptimo es el siguiente:

$$a_{1j} \left(\frac{\lambda_k - a_{2j} - \mu_k}{2 a_{1j}} \right)^2 + a_{2j} \frac{\lambda_k - a_{2j} - \mu_k}{2 a_{1j}} + a_{3j} - \lambda_k \frac{\lambda_k - a_{2j} - \mu_k}{2 a_{1j}} - \mu_k \left(\bar{p} - \frac{\lambda_k - a_{2j} - \mu_k}{2 a_{1j}} \right) - \alpha_k p_j \quad (5.192)$$

Si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta, es mayor que el límite superior de potencia $\bar{t}$ definidos para el estado analizado (ecuación (5.36)), entonces la potencia óptima $t_{jk}^*|_{P2}$ es igual al límite superior $\bar{t}$ y el coste óptimo se calcula a continuación:

$$a_{1j} \bar{t}^2 + a_{2j} \bar{t} + a_{3j} - \lambda_k \bar{t} - \mu_k (\bar{p} - \bar{t}) - \alpha_k p_j \quad (5.193)$$

Por último, si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta, es menor que el límite inferior de potencia $\underline{t}$ definidos para el estado analizado (ecuación (5.35)), entonces la potencia óptima $t_{jk}^*|_{P2}$ es igual al límite inferior $\underline{t}$ y el coste óptimo es el siguiente:

$$a_{1j} \underline{t}^2 + a_{2j} \underline{t} + a_{3j} - \lambda_k \underline{t} - \mu_k (\bar{p} - \underline{t}) - \alpha_k p_j \quad (5.194)$$

El procedimiento para resolver el problema del despacho de la central térmica j en el subperiodo k (ecuaciones (5.168)-(5.170)) se detalla a continuación.

Se resuelve el problema P1 según el procedimiento arriba indicado. Entonces:

1. si se verifica que:

$$r_k^s \leq \bar{p}_j - t_{jk}^*|_{P1} \quad (5.195)$$

donde $t_{jk}^*|_{P1}$ es la potencia óptima a producir en el problema P1, entonces ésta es la potencia óptima a producir por la central considerada en el subperiodo considerado siendo el coste óptimo de dicho despacho:

$$a_{1j} t_{jk}^*|_{P1}^2 + a_{2j} t_{jk}^*|_{P1} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk}^*|_{P1} - \mu_k r_j^s - \alpha_k \underline{p}_j \quad (5.196)$$

2. Si por el contrario:

$$r_k^s > \bar{p}_j - t_{jk}^*|_{P1} \quad (5.197)$$

entonces la solución obtenida no es válida y se resuelve el problema P2. En este caso, la potencia óptima a producir por la central es $t_{jk}^*|_{P2}$ (donde $t_{jk}^*|_{P2}$ es la potencia óptima solución del problema P2) y el coste óptimo de este despacho es:

$$a_{1j} t_{jk}^*|_{P2}^2 + a_{2j} t_{jk}^*|_{P2} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk}^*|_{P2} - \mu_k (\bar{p}_j - t_{jk}^*|_{P2}) - \alpha_k \underline{p}_j \quad (5.198)$$

Se puede establecer una interpretación gráfica semejante a la presentada en el análisis del modelo 3 (figura 5.9). Basta con incluir el término constante $-\alpha_k \underline{p}_j$ en la curva cuadrática. La interpretación de los seis casos posibles es la misma.

Modelo 7

El subproblema térmico asociado a la central j según este modelo (apartado 4.3.7) se formula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar}_{t_{jk}, v_{jk}, y_{jk}, z_{jk}, \tilde{s}_{jk}, x_{jx}^d} \\ &\sum_{k=1}^K \left[v_{jk} \left(a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} \right) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jx}^d) \right] - [\lambda_k t_{jk} + \\ &\mu_k (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} - \alpha_k \underline{p}_j v_{jk} + \beta_k^a (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} + \beta_k^b (t_{jk} - \underline{p}_j) v_{jk}] \end{aligned} \quad (5.199)$$

sujeto a

$$\underline{p}_j v_{jk} \leq t_{jk} \leq \bar{p}_j v_{jk} \quad \forall j \quad \forall k \quad (5.200)$$

$$t_{jk} - t_{jk-1} \leq r_j^s \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.201)$$

$$t_{jk-1} - t_{jk} \leq r_j^b \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.202)$$

$$y_{j1} - z_{j1} = v_{j1} - v_{j0} \quad \forall j \quad (5.203)$$

$$y_{jk} - z_{jk} = v_{jk} - v_{jk-1} \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.204)$$

$$(\tilde{s}_{j0} - T_j^f)(v_{j0} - v_{j1}) \geq 0 \quad \forall j \quad (5.205)$$

$$(\tilde{s}_{jk-1} - T_j^f)(v_{jk-1} - v_{jk}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.206)$$

$$(\tilde{s}_{j0} + T_j^p)(v_{j1} - v_{j0}) \geq 0 \quad \forall j \quad (5.207)$$

$$(\tilde{s}_{jk-1} + T_j^p)(v_{jk} - v_{jk-1}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.208)$$

El problema de despacho de cada estado de acoplamiento es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar}_{t_{jk}} \quad & a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk} - \mu_k (\bar{p}_j - t_{jk}) + \alpha_k \underline{p}_j \\ & - \beta_k^a (\bar{p}_j - t_{jk}) - \beta_k^b (t_{jk} - \underline{p}_j) \end{aligned} \quad (5.209)$$

sueto a

$$\underline{t} - t_{jk} \leq 0 \quad (5.210)$$

$$t_{jk} - \bar{t} \leq 0 \quad (5.211)$$

donde a_{1j} , a_{2j} y a_{3j} son los coeficientes de la función cuadrática de coste de producción y, $\underline{t}$ y $\bar{t}$ se definen en las ecuaciones (5.35) y (5.36).

El lagrangiano se define de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t_{jk}, \gamma_1, \gamma_2) \equiv & a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk} - \mu_k (\bar{p}_j - t_{jk}) + \alpha_k \underline{p}_j \\ & - \beta_k^a (\bar{p}_j - t_{jk}) - \beta_k^b (t_{jk} - \underline{p}_j) + \gamma_1 (\underline{t} - t_{jk}) + \gamma_2 (t_{jk} - \bar{t}) \end{aligned} \quad (5.212)$$

Las condiciones necesarias de optimalidad de primer orden son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_{jk}} = 2 a_{1j} t_{jk} + a_{2j} - \lambda_k + \mu_k + \beta_k^a - \beta_k^b - \gamma_1 + \gamma_2 = 0 \quad (5.213)$$

$$\gamma_1 (\underline{t} - t_{jk}) = 0 \quad \gamma_1 \geq 0 \quad (5.214)$$

$$\gamma_2 (t_{jk} - \bar{t}) = 0 \quad \gamma_2 \geq 0 \quad (5.215)$$

A partir del análisis de las condiciones necesarias de optimalidad de primer orden y siguiendo un proceso análogo al presentado en los modelos 1 y 2, puede establecerse el siguiente procedimiento para la resolución del despacho de cada nodo de acoplamiento (ecuaciones (5.209)-(5.211)).

Se resuelve la ecuación que se formula a continuación para $\tilde{t}_{jk}$:

$$2 a_{1j} \tilde{t}_{jk} + a_{2j} - \lambda_k + \mu_k + \beta_k^a - \beta_k^b = 0 \quad (5.216)$$

Si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta está comprendido entre los límites inferior $\underline{t}$ y superior de potencia $\bar{t}$, definidos para el estado analizado (ecuaciones (5.35) y (5.36)), entonces la potencia óptima t_{jk}^* es $\tilde{t}_{jk}$.

Si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta, es menor que el límite inferior de potencia $\underline{t}$ definidos para el estado analizado (ecuación (5.35)), entonces la potencia óptima t_{jk}^* es igual al límite inferior $\underline{t}$.

Por último, si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta, es mayor que el límite superior de potencia $\bar{t}$ definidos para el estado analizado (ecuación (5.36)), entonces la potencia óptima t_{jk}^* es igual al límite superior $\bar{t}$.

Modelo 8

El subproblema térmico asociado a la central j según este modelo (apartado 4.3.8), y considerando el coste de producción $a_j(t_{jk})$ cuadrático, se formula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar}_{t_{jk}, v_{jk}, y_{jk}, z_{jk}, \tilde{s}_{jk}, x_{jx}^d} \\ &\sum_{k=1}^K \left[v_{jk} \left(a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} \right) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] - \sum_{k=1}^K \lambda_k t_{jk} \\ &+ \sum_{k=1}^K \mu_k \left[\left(\bar{p}_j - t_{jk} \right) v_{jk} w_{jk} + r_j^s v_{jk} (1 - w_{jk}) \right] - \sum_{k=1}^K \alpha_k \underline{p}_j v_{jk} \\ &- \sum_{k=1}^K \beta_k^a \left[\left(\bar{p}_j - t_{jk} \right) v_{jk} u_{jk}^s + r_j^s v_{jk} (1 - u_{jk}^s) \right] \\ &- \sum_{k=1}^K \beta_k^b \left[\left(t_{jk} - \underline{p}_j \right) v_{jk} u_{jk}^b + r_j^b v_{jk} (1 - u_{jk}^b) \right] \end{aligned} \quad (5.217)$$

sujeito a

$$\underline{p}_j v_{jk} \leq t_{jk} \leq \bar{p}_j v_{jk} \quad \forall j \quad \forall k \quad (5.218)$$

$$t_{jk} - t_{jk-1} \leq r_j^s \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.219)$$

$$t_{jk-1} - t_{jk} \leq r_j^b \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.220)$$

$$y_{j1} - z_{j1} = v_{j1} - v_{j0} \quad \forall j \quad (5.221)$$

$$y_{jk} - z_{jk} = v_{jk} - v_{jk-1} \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.222)$$

$$\left(\tilde{s}_{j0} - T_j^f \right) (v_{j0} - v_{j1}) \geq 0 \quad \forall j \quad (5.223)$$

$$\left(\tilde{s}_{jk-1} - T_j^f \right) (v_{jk-1} - v_{jk}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.224)$$

$$(\tilde{s}_{j0} + T_j^p)(v_{j1} - v_{j0}) \geq 0 \quad \forall j \quad (5.225)$$

$$(\tilde{s}_{jk-1} + T_j^p)(v_{jk} - v_{jk-1}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (5.226)$$

El problema de despacho de cada estado de acoplamiento es el siguiente:

Minimizar $_{t_{jk}}$

$$a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk} - \alpha_k \underline{p}_j - \mu_k \left[(\bar{p}_j - t_{jk}) w_{jk} + r_j^s (1 - w_{jk}) \right] \\ - \beta_k^a \left[(\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} u_{jk}^s + r_j^s v_{jk} (1 - u_{jk}^s) \right] \beta_k^b \left[(t_{jk} - \underline{p}_j) v_{jk} u_{jk}^b + r_j^b v_{jk} (1 - u_{jk}^b) \right] \quad (5.227)$$

sujeto a

$$\underline{t} - t_{jk} \leq 0 \quad (5.228)$$

$$t_{jk} - \bar{t} \leq 0 \quad (5.229)$$

donde

- a_{1j} , a_{2j} y a_{3j} son los coeficientes de la función cuadrática de coste de producción,
- w_{jk} es una variable binaria que vale 1 si al considerar las restricciones de reserva rodante, el hueco es menor que la rampa de subida (es decir, si $(\bar{p}_j - t_{jk}) \leq r_j^s$) y 0 en caso contrario (si la rampa de subida es menor que el hueco),
- u_{jk}^s es una variable binaria que vale 1 si al considerar las restricciones de regulación hacia arriba el hueco es menor que la rampa de subida (es decir si, $(\bar{p}_j - t_{jk}) \leq r_j^s$) y 0 en caso contrario (si la rampa de subida es menor que el hueco)
- u_{jk}^b es una variable binaria que vale 1 si al considerar las restricciones de regulación hacia abajo el hueco es menor que la rampa de bajada (es decir si, $(t_{jk} - \underline{p}_j) \leq r_j^b$) y 0 en caso contrario (si la rampa de bajada es menor que el hueco) y,
- $\underline{t}$ y $\bar{t}$ son las potencias mínima y máxima definidas en las ecuaciones (5.35) y (5.36).

Dado que las variables binarias w_{jk} y u_{jk}^s tienen el mismo significado (indicar si el hueco hacia arriba es mayor o menor que la rampa de subida), se puede prescindir de una de ellas (por ejemplo de u_{jk}^s). Así el despacho asociado a cada nodo de acoplamiento resulta:

Minimizar $_{t_{jk}}$

$$a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk} - \alpha_k \underline{p}_j - (\mu_k + \beta_k^a) \left[(\bar{p}_j - t_{jk}) w_{jk} + r_j^s (1 - w_{jk}) \right] \\ - \beta_k^b \left[(t_{jk} - \underline{p}_j) u_{jk}^b + r_j^b (1 - u_{jk}^b) \right] \quad (5.230)$$

sujeto a

$$\underline{t} - t_{jk} \leq 0 \quad (5.231)$$

$$t_{jk} - \bar{t} \leq 0 \quad (5.232)$$

Puesto que este problema (ecuaciones (5.230)-(5.232)) contiene 2 variables binarias, se resuelve a través de la resolución de cuatro problemas. Cada uno de estos problemas se caracteriza por los valores que adquieren las variables w_{jk} y u_{jk}^b . Son los siguientes:

- Problema P1

Este es el problema del despacho a resolver en el caso de que el hueco de potencia hacia arriba sea mayor que la rampa de subida ($w_{jk} = 0$) y de que el hueco de potencia hacia abajo sea mayor que la rampa de bajada ($u_{jk}^b = 0$).

- Problema P2

Este es el problema del despacho a resolver en el caso de que el hueco de potencia hacia arriba sea mayor que la rampa de subida ($w_{jk} = 0$) y de que el hueco de potencia hacia abajo sea menor que la rampa de bajada ($u_{jk}^b = 1$).

- Problema P3

Este es el problema del despacho a resolver en el caso de que el hueco de potencia hacia arriba sea menor que la rampa de subida ($w_{jk} = 1$) y de que el hueco de potencia hacia abajo sea mayor que la rampa de bajada ($u_{jk}^b = 0$).

- Problema P4

Este es el problema del despacho a resolver en el caso de que el hueco de potencia hacia arriba sea menor que la rampa de subida ($w_{jk} = 1$) y de que el hueco de potencia hacia abajo sea menor que la rampa de bajada ($u_{jk}^b = 1$).

A continuación se plantean todos estos problemas (P1, P2, P3 y P4) indicándose los procedimientos de solución de cada uno de ellos. Después se describe el método de solución del problema del despacho asociado a este modelo (ecuaciones (5.230)-(5.232)) y se interpretan gráficamente las situaciones o casos posibles.

Problema P1

El problema P1 se plantea de la siguiente manera:

Minimizar t_{jk}

$$a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk} - \alpha_k p_j - (\mu_k + \beta_k^a) r_j^s - \beta_k^b r_j^b \quad (5.233)$$

sujeto a

$$\underline{t} - t_{jk} \leq 0 \quad (5.234)$$

$$t_{jk} - \bar{t} \leq 0 \quad (5.235)$$

El lagrangiano se define de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t_{jk}, \gamma_1, \gamma_2) \equiv & a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk} - \alpha_k \underline{p}_j - (\mu_k + \beta_k^a) r_j^s - \beta_k^b r_k^b \\ & + \gamma_1 (\underline{t} - t_{jk}) + \gamma_2 (t_{jk} - \bar{t}) \end{aligned} \quad (5.236)$$

Las condiciones de optimalidad son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_{jk}} = 2 a_{1j} t_{jk} + a_{2j} - \lambda_k - \gamma_1 + \gamma_2 = 0 \quad (5.237)$$

$$\gamma_1 (\underline{t} - t_{jk}) = 0 \quad \gamma_1 \geq 0 \quad (5.238)$$

$$\gamma_2 (t_{jk} - \bar{t}) = 0 \quad \gamma_2 \geq 0 \quad (5.239)$$

Del análisis de las condiciones de optimalidad, a través de un proceso similar al explicado en detalle para algunos de los modelos anteriores, se puede definir el siguiente procedimiento de resolución del problema P1.

1. Se resuelve para $\tilde{t}_{jk}$ la siguiente ecuación:

$$2 a_{1j} \tilde{t}_{jk} + a_{2j} - \lambda_k = 0 \quad (5.240)$$

2. Si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta está comprendido entre los límites inferior $\underline{t}$ y superior de potencia $\bar{t}$, definidos para el estado analizado (ecuaciones (5.35) y (5.36)), entonces la potencia óptima $t_{jk}^*|_{P1}$ es $\tilde{t}_{jk}$, es decir:

$$t_{jk}^*|_{P1} = \frac{\lambda_k - a_{2j}}{2 a_{1j}} \quad (5.241)$$

y el coste óptimo es el siguiente:

$$\begin{aligned} a_{1j} \left(\frac{\lambda_k - a_{2j}}{2 a_{1j}} \right)^2 + a_{2j} \frac{\lambda_k - a_{2j}}{2 a_{1j}} + a_{3j} - \lambda_k \frac{\lambda_k - a_{2j}}{2 a_{1j}} - \alpha_k \underline{p}_j \\ - (\mu_k + \beta_k^a) r_j^s - \beta_k^b r_k^b \end{aligned} \quad (5.242)$$

3. Si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta, es mayor que el límite superior de potencia $\bar{t}$ definidos para el estado analizado (ecuación (5.36)), entonces la potencia óptima $t_{jk}^*|_{P1}$ es igual al límite superior $\bar{t}$ y el coste óptimo es:

$$a_{1j} \bar{t}^2 + a_{2j} \bar{t} + a_{3j} - \lambda_k \bar{t} - \alpha_k \underline{p}_j - (\mu_k + \beta_k^a) r_j^s - \beta_k^b r_k^b \quad (5.243)$$

4. Por último, si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta, es menor que el límite inferior de potencia $\underline{t}$ definidos para el estado analizado (ecuación (5.35)), entonces la potencia óptima $t_{jk}^*|_{P1}$ es igual al límite inferior $\underline{t}$ y el coste óptimo es el indicado en la siguiente ecuación:

$$a_{1j} \underline{t}^2 + a_{2j} \underline{t} + a_{3j} - \lambda_k \bar{t} - \alpha_k \underline{p}_j - (\mu_k + \beta_k^a) r_j^s - \beta_k^b r_k^b \quad (5.244)$$

Problema P2

El problema P2 se plantea de la siguiente manera:

Minimizar $_{t_{jk}}$

$$a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk} - \alpha_k \underline{p}_j - (\mu_k + \beta_k^a) r_j^s - \beta_k^b (t_{jk} - \underline{p}_j) \quad (5.245)$$

sujeito a

$$\underline{t} - t_{jk} \leq 0 \quad (5.246)$$

$$t_{jk} - \bar{t} \leq 0 \quad (5.247)$$

El lagrangiano se define de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t_{jk}, \gamma_3, \gamma_4) \equiv & a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk} - \alpha_k \underline{p}_j - (\mu_k + \beta_k^a) r_j^s \\ & - \beta_k^b (t_{jk} - \underline{p}_j) + \gamma_3 (\underline{t} - t_{jk}) + \gamma_4 (t_{jk} - \bar{t}) \end{aligned} \quad (5.248)$$

Las condiciones de optimalidad son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_{jk}} = 2 a_{1j} t_{jk} + a_{2j} - \lambda_k - \beta_k^b - \gamma_3 + \gamma_4 = 0 \quad (5.249)$$

$$\gamma_3 (\underline{t} - t_{jk}) = 0 \quad \gamma_3 \geq 0 \quad (5.250)$$

$$\gamma_4 (t_{jk} - \bar{t}) = 0 \quad \gamma_4 \geq 0 \quad (5.251)$$

Del análisis de las condiciones de optimalidad, a través de un proceso similar al explicado en detalle para algunos de los modelos anteriores, se puede definir el siguiente procedimiento de resolución del problema P2.

1. Se resuelve para $\tilde{t}_{jk}$ la siguiente ecuación:

$$2 a_{1j} \tilde{t}_{jk} + a_{2j} - \lambda_k - \beta_k^b = 0 \quad (5.252)$$

2. Si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta está comprendido entre los límites inferior $\underline{t}$ y superior de potencia $\bar{t}$, definidos para el estado analizado (ecuaciones (5.35) y (5.36)), entonces la potencia óptima $t_{jk}^*|_{P2}$ es $\tilde{t}_{jk}$, es decir:

$$t_{jk}^*|_{P1} = \frac{\lambda_k + \beta_k^b - a_{2j}}{2 a_{1j}} \quad (5.253)$$

y el coste óptimo es el siguiente:

$$a_{1j} \left(\frac{\lambda_k + \beta_k^b - a_{2j}}{2 a_{1j}} \right)^2 + a_{2j} \frac{\lambda_k + \beta_k^b - a_{2j}}{2 a_{1j}} + a_{3j} - \lambda_k \frac{\lambda_k + \beta_k^b - a_{2j}}{2 a_{1j}} - \alpha_k \underline{p}_j - (\mu_k + \beta_k^a) r_j^s - \beta_k^b \left(\frac{\lambda_k + \beta_k^b - a_{2j}}{2 a_{1j}} - \underline{p}_j \right) \quad (5.254)$$

3. Si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta, es mayor que el límite superior de potencia $\bar{t}$ definidos para el estado analizado (ecuación (5.36)), entonces la potencia óptima $t_{jk}^*|_{P2}$ es igual al límite superior $\bar{t}$ y el coste óptimo es:

$$a_{1j} \bar{t}^2 + a_{2j} \bar{t} + a_{3j} - \lambda_k \bar{t} - \alpha_k \underline{p}_j - (\mu_k + \beta_k^a) r_j^s - \beta_k^b (\bar{t} - \underline{p}_j) \quad (5.255)$$

4. Por último, si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta, es menor que el límite inferior de potencia $\underline{t}$ definidos para el estado analizado (ecuación (5.35)), entonces la potencia óptima $t_{jk}^*|_{P2}$ es igual al límite inferior $\underline{t}$ y el coste óptimo es el indicado en la siguiente ecuación:

$$a_{1j} \underline{t}^2 + a_{2j} \underline{t} + a_{3j} - \lambda_k \underline{t} - \alpha_k \underline{p}_j - (\mu_k + \beta_k^a) r_j^s - \beta_k^b (\underline{t} - \underline{p}_j) \quad (5.256)$$

Problema P3

El problema P3 se plantea de la siguiente manera:

Minimizar t_{jk}

$$a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk} - \alpha_k \underline{p}_j - (\mu_k + \beta_k^a) (\bar{p}_j - t_{jk}) - \beta_k^b r_j^b \quad (5.257)$$

sujeto a

$$\underline{t} - t_{jk} \leq 0 \quad (5.258)$$

$$t_{jk} - \bar{t} \leq 0 \quad (5.259)$$

El lagrangiano se define de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}(t_{jk}, \gamma_5, \gamma_6) \equiv a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk} - \alpha_k \underline{p}_j - (\mu_k + \beta_k^a) (\bar{p}_j - t_{jk}) - \beta_k^b r_j^b + \gamma_5 (\underline{t} - t_{jk}) + \gamma_6 (t_{jk} - \bar{t}) \quad (5.260)$$

Las condiciones de optimalidad son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_{jk}} = 2 a_{1j} t_{jk} + a_{2j} - \lambda_k + \mu_k + \beta_k^a - \gamma_5 + \gamma_6 = 0 \quad (5.261)$$

$$\gamma_5 (\underline{t} - t_{jk}) = 0 \quad \gamma_5 \geq 0 \quad (5.262)$$

$$\gamma_6 (t_{jk} - \bar{t}) = 0 \quad \gamma_6 \geq 0 \quad (5.263)$$

Del análisis de las condiciones de optimalidad, a través de un proceso similar al explicado en detalle para algunos de los modelos anteriores, se puede definir el siguiente procedimiento de resolución del problema P3.

1. Se resuelve para $\tilde{t}_{jk}$ la siguiente ecuación:

$$2 a_{1j} \tilde{t}_{jk} + a_{2j} - \lambda_k + \mu_k + \beta_k^a = 0 \quad (5.264)$$

2. Si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta está comprendido entre los límites inferior $\underline{t}$ y superior de potencia $\bar{t}$, definidos para el estado analizado (ecuaciones (5.35) y (5.36)), entonces la potencia óptima $t_{jk}^*|_{P3}$ es $\tilde{t}_{jk}$, es decir:

$$t_{jk}^*|_{P3} = \frac{\lambda_k - \mu_k - \beta_k^a - a_{2j}}{2 a_{1j}} \quad (5.265)$$

y el coste óptimo es el siguiente:

$$a_{1j} \left(\frac{\lambda_k - \mu_k - \beta_k^a - a_{2j}}{2 a_{1j}} \right)^2 + a_{2j} \frac{\lambda_k - \mu_k - \beta_k^a - a_{2j}}{2 a_{1j}} + a_{3j} - \beta_k^b r_j^b - \lambda_k \frac{\lambda_k - \mu_k - \beta_k^a - a_{2j}}{2 a_{1j}} - \alpha_k \underline{p}_j - (\mu_k + \beta_k^a) \left(\bar{p}_j - \frac{\lambda_k - \mu_k - \beta_k^a - a_{2j}}{2 a_{1j}} \right) \quad (5.266)$$

3. Si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta, es mayor que el límite superior de potencia $\bar{t}$ definidos para el estado analizado (ecuación (5.36)), entonces la potencia óptima $t_{jk}^*|_{P3}$ es igual al límite superior $\bar{t}$ y el coste óptimo es:

$$a_{1j} \bar{t}^2 + a_{2j} \bar{t} + a_{3j} - \lambda_k \bar{t} - \alpha_k \underline{p}_j - (\mu_k + \beta_k^a) (\bar{p}_j - \bar{t}) - \beta_k^b r_j^b \quad (5.267)$$

4. Por último, si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta, es menor que el límite inferior de potencia $\underline{t}$ definidos para el estado analizado (ecuación (5.35)), entonces la potencia óptima $t_{jk}^*|_{P3}$ es igual al límite inferior $\underline{t}$ y el coste óptimo es el indicado en la siguiente ecuación:

$$a_{1j} \underline{t}^2 + a_{2j} \underline{t} + a_{3j} - \lambda_k \underline{t} - \alpha_k \underline{p}_j - (\mu_k + \beta_k^a) (\bar{p}_j - \underline{t}) - \beta_k^b r_j^b \quad (5.268)$$

Problema P4

El problema P4 se plantea de la siguiente manera:

Minimizar _{t_{jk}}

$$a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk} - \alpha_k \underline{p}_j - (\mu_k + \beta_k^a) (\bar{p}_j - t_{jk}) - \beta_k^b (t_{jk} - \underline{p}_j) \quad (5.269)$$

sujeito a

$$\underline{t} - t_{jk} \leq 0 \quad (5.270)$$

$$t_{jk} - \bar{t} \leq 0 \quad (5.271)$$

El lagrangiano se define de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t_{jk}, \gamma_7, \gamma_8) \equiv & a_{1j} t_{jk}^2 + a_{2j} t_{jk} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk} - \alpha_k \underline{p}_j - (\mu_k + \beta_k^a) (\bar{p}_j - t_{jk}) \\ & - \beta_k^b (t_{jk} - \underline{p}_j) + \gamma_7 (\underline{t} - t_{jk}) + \gamma_8 (t_{jk} - \bar{t}) \end{aligned} \quad (5.272)$$

Las condiciones de optimalidad son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_{jk}} = 2 a_{1j} t_{jk} + a_{2j} - \lambda_k + \mu_k + \beta_k^a - \beta_k^b - \gamma_7 + \gamma_8 = 0 \quad (5.273)$$

$$\gamma_7 (\underline{t} - t_{jk}) = 0 \quad \gamma_7 \geq 0 \quad (5.274)$$

$$\gamma_8 (t_{jk} - \bar{t}) = 0 \quad \gamma_8 \geq 0 \quad (5.275)$$

Del análisis de las condiciones de optimalidad, a través de un proceso similar al explicado en detalle para algunos de los modelos anteriores, se puede definir el siguiente procedimiento de resolución del problema P3.

1. Se resuelve para $\tilde{t}_{jk}$ la siguiente ecuación:

$$2 a_{1j} \tilde{t}_{jk} + a_{2j} - \lambda_k + \mu_k + \beta_k^a - \beta_k^b = 0 \quad (5.276)$$

2. Si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta está comprendido entre los límites inferior $\underline{t}$ y superior de potencia $\bar{t}$, definidos para el estado analizado (ecuaciones (5.35) y (5.36)), entonces la potencia óptima $t_{jk}^*|_{P4}$ es $\tilde{t}_{jk}$, es decir:

$$t_{jk}^*|_{P4} = \frac{\lambda_k + \beta_k^b - \mu_k - \beta_k^a - a_{2j}}{2 a_{1j}} \quad (5.277)$$

y el coste óptimo es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 & a_{1j} \left(\frac{\lambda_k + \beta_k^b - \mu_k - \beta_k^a - a_{2j}}{2 a_{1j}} \right)^2 + a_{2j} \frac{\lambda_k + \beta_k^b - \mu_k - \beta_k^a - a_{2j}}{2 a_{1j}} + a_{3j} \\
 & - \lambda_k \frac{\lambda_k + \beta_k^b - \mu_k - \beta_k^a - a_{2j}}{2 a_{1j}} - (\mu_k + \beta_k^a) \left(\bar{p}_j - \frac{\lambda_k + \beta_k^b - \mu_k - \beta_k^a - a_{2j}}{2 a_{1j}} \right) \\
 & - \beta_k^b \left(\frac{\lambda_k + \beta_k^b - \mu_k - \beta_k^a - a_{2j}}{2 a_{1j}} - \underline{p}_j \right) - \alpha_k \underline{p}_j
 \end{aligned} \quad (5.278)$$

3. Si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta, es mayor que el límite superior de potencia $\bar{t}$ definidos para el estado analizado (ecuación (5.36)), entonces la potencia óptima $t_{jk}^*|_{P4}$ es igual al límite superior $\bar{t}$ y el coste óptimo es:

$$a_{1j} \bar{t}^2 + a_{2j} \bar{t} + a_{3j} - \lambda_k \bar{t} - \alpha_k \underline{p}_j - (\mu_k + \beta_k^a) (\bar{p}_j - \bar{t}) - \beta_k^b (\bar{t} - \underline{p}_j) \quad (5.279)$$

4. Por último, si el valor $\tilde{t}_{jk}$ que resulta, es menor que el límite inferior de potencia $\underline{t}$ definidos para el estado analizado (ecuación (5.35)), entonces la potencia óptima $t_{jk}^*|_{P4}$ es igual al límite inferior $\underline{t}$ y el coste óptimo es el indicado en la siguiente ecuación:

$$a_{1j} \underline{t}^2 + a_{2j} \underline{t} + a_{3j} - \lambda_k \underline{t} - \alpha_k \underline{p}_j - (\mu_k + \beta_k^a) (\bar{p}_j - \underline{t}) - \beta_k^b (\underline{t} - \underline{p}_j) \quad (5.280)$$

Procedimiento de resolución del problema del despacho

El procedimiento para resolver el problema del despacho de la central térmica j en el subperiodo k (ecuaciones (5.227)-(5.229) o (5.230)-(5.232)) se detalla a continuación.

1. Se resuelve el problema P1 según el procedimiento arriba indicado. Si la solución $t_{jk}^*|_{P1}$ verifica que:

$$r_j^s \leq \bar{p}_j - t_{jk}^*|_{P1} \quad (5.281)$$

$$r_j^b \leq t_{jk}^*|_{P1} - \underline{p}_j \quad (5.282)$$

entonces ésta es la potencia óptima a producir por la central considerada en el subperiodo considerado ($t_{jk}^*|_{P1}$) siendo el coste óptimo de dicho despacho:

$$a_{1j} \left(t_{jk}^*|_{P1} \right)^2 + a_{2j} t_{jk}^*|_{P1} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk}^*|_{P1} - \alpha_k \underline{p}_j - (\mu_k + \beta_k^a) r_j^s - \beta_k^b r_k^b \quad (5.283)$$

y finaliza el proceso. Si no se cumplen las condiciones (5.281)-(5.282), entonces se va pasa al punto siguiente.

2. Se resuelve P2. Si la solución $t_{jk}^*|_{P2}$ cumple:

$$r_j^s \leq \bar{p}_j - t_{jk}^*|_{P2} \quad (5.284)$$

$$r_j^b \geq t_{jk}^*|_{P2} - \underline{p}_j \quad (5.285)$$

entonces la solución del despacho es $t_{jk}^*|_{P2}$, el coste asociado es:

$$\begin{aligned} & a_{1j} \left(t_{jk}^*|_{P2} \right)^2 + a_{2j} t_{jk}^*|_{P2} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk}^*|_{P2} - \alpha_k \underline{p}_j - (\mu_k + \beta_k^a) r_j^s \\ & - \beta_k^b \left(t_{jk}^*|_{P2} - \underline{p}_j \right) \end{aligned} \quad (5.286)$$

y finaliza el proceso. En el caso de que no se cumplan las condiciones (5.284)-(5.285) continua el proceso.

3. Se resuelve P3. Si la solución obtenida $t_{jk}^*|_{P3}$ cumple:

$$r_j^s \geq \bar{p}_j - t_{jk}^*|_{P3} \quad (5.287)$$

$$r_j^b \leq t_{jk}^*|_{P3} - \underline{p}_j \quad (5.288)$$

entonces la solución del despacho es $t_{jk}^*|_{P3}$, el coste asociado es el siguiente:

$$\begin{aligned} & a_{1j} \left(t_{jk}^*|_{P3} \right)^2 + a_{2j} t_{jk}^*|_{P3} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk}^*|_{P3} - \alpha_k \underline{p}_j \\ & - (\mu_k + \beta_k^a) \left(\bar{p}_j - t_{jk}^*|_{P3} \right) - \beta_k^b r_j^b \end{aligned} \quad (5.289)$$

y finaliza el proceso. En el caso de que no se cumplan las condiciones (5.287)-(5.288) continua el proceso.

4. Se resuelve P4. La solución obtenida $t_{jk}^*|_{P4}$ cumple las siguientes condiciones:

$$r_j^s \geq \bar{p}_j - t_{jk}^*|_{P4} \quad (5.290)$$

$$r_j^b \geq t_{jk}^*|_{P4} - \underline{p}_j \quad (5.291)$$

y es la solución del despacho siendo el coste del mismo:

$$\begin{aligned} & a_{1j} \left(t_{jk}^*|_{P4} \right)^2 + a_{2j} t_{jk}^*|_{P4} + a_{3j} - \lambda_k t_{jk}^*|_{P4} - \alpha_k \underline{p}_j \\ & - (\mu_k + \beta_k^a) \left(\bar{p}_j - t_{jk}^*|_{P4} \right) - \beta_k^b \left(t_{jk}^*|_{P4} - \underline{p}_j \right) \end{aligned} \quad (5.292)$$

y finaliza el proceso.

De nuevo, igual que en el modelo 3, se presenta una figura que ilustra las posibles situaciones que pueden ocurrir (figura 5.10). En todas las gráficas que aparecen en esta figura la curva en negro es la curva cuadrática que representa el coste de producción de la central menos la

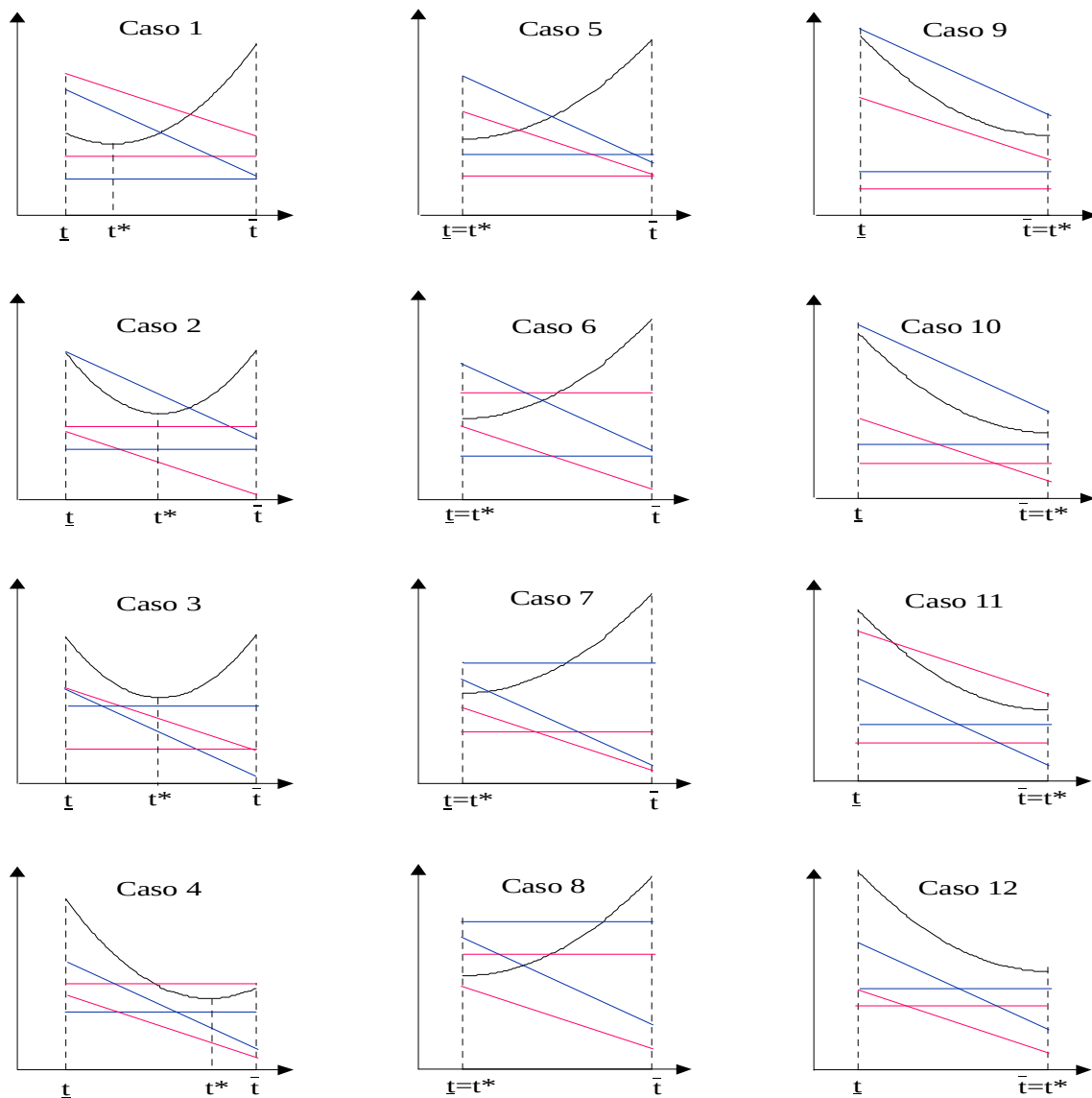


Figura 5.10: Problema del despacho del modelo 8. Casos posibles

remuneración por su contribución a las restricciones de demanda y demanda mínima. Las dos rectas de color azul representan la remuneración por la contribución a las restricciones de reserva rodante y regulación hacia arriba en el subperiodo analizado. La azul recta horizontal representa la remuneración en el caso de que la rampa de subida sea menor que el hueco de potencia hacia arriba. La recta azul de pendiente negativa representa la remuneración en el caso de que el hueco de potencia hacia arriba sea menor que la rampa de subida. De forma análoga, la recta roja horizontal representa la remuneración a la restricción de regulación hacia abajo en el subperiodo considerado en el caso de que la rampa de bajada sea menor que el hueco de potencia hacia abajo y la recta roja de pendiente negativa representa la remuneración a la restricción de regulación hacia abajo en el caso de que el hueco de potencia hacia abajo sea menor que la rampa de bajada.

La potencia óptima del despacho se denota en las gráficas de la figura 5.10 como t^* (prescindiendo de los subíndices jk ya que el problema del despacho está ligado a una única central j y en un único periodo k). La región de factibilidad del despacho queda definida por las potencias $\underline{t}$ y $\bar{t}$.

Son posibles doce casos (figura 5.10):

- Caso 1.

En el punto donde se encuentra la solución, t^* o t_{jk}^* , la rampa de subida es menor o igual que el hueco de potencia hacia arriba ($w_{jk} = 0$) y la rampa de bajada es menor que el hueco de potencia hacia abajo ($u_{jk}^b = 0$). La solución al problema del despacho (solución del problema P1) es la siguiente:

$$t^* = \frac{\lambda_k - a_{2j}}{2 a_{1j}} \quad (5.293)$$

y el coste óptimo del despacho es el que se indica en la ecuación (5.242).

- Caso 2.

En el punto donde se encuentra la solución, t^* o t_{jk}^* , la rampa de subida es menor o igual que el hueco de potencia hacia arriba ($w_{jk} = 0$) y la rampa de bajada es mayor que el hueco de potencia hacia abajo ($u_{jk}^b = 1$). La solución al problema del despacho (solución del problema P2) es la siguiente:

$$t_{jk}^* = \frac{\lambda_k + \beta_k^b - a_{2j}}{2 a_{1j}} \quad (5.294)$$

y el coste óptimo del despacho es el que se indica en la ecuación (5.254).

- Caso 3.

En el punto donde se encuentra la solución, t^* o t_{jk}^* , la rampa de subida es mayor que el hueco de potencia hacia arriba ($w_{jk} = 1$) y la rampa de bajada es menor que el hueco de potencia hacia abajo ($u_{jk}^b = 0$). La solución al problema del despacho (solución del problema P3) es la siguiente:

$$t_{jk}^* = \frac{\lambda_k - \mu_k - \beta_k^a - a_{2j}}{2 a_{1j}} \quad (5.295)$$

y el coste óptimo del despacho es el que se indica en la ecuación (5.266).

- Caso 4.

En el punto donde se encuentra la solución, t^* o t_{jk}^* , la rampa de subida es mayor que el hueco de potencia hacia arriba ($w_{jk} = 1$) y la rampa de bajada es mayor que el hueco de potencia hacia abajo ($u_{jk}^b = 1$). La solución al problema del despacho (solución del problema P4) es la siguiente:

$$t_{jk}^* = \frac{\lambda_k + \beta_k^b - \mu_k - \beta_k^a - a_{2j}}{2 a_{1j}} \quad (5.296)$$

y el coste óptimo del despacho es el que se indica en la ecuación (5.278).

- Caso 5.

En el punto donde se encuentra la solución, t^* o t_{jk}^* , la rampa de subida es menor o igual que el hueco de potencia hacia arriba ($w_{jk} = 0$) y la rampa de bajada es menor que el hueco de potencia hacia abajo ($u_{jk}^b = 0$). La solución al problema del despacho (solución del problema P1) es $t_{jk}^* = \underline{t}$ y el coste óptimo el indicado en la ecuación (5.244).

- Caso 6.

En el punto donde se encuentra la solución, t^* o t_{jk}^* , la rampa de subida es menor o igual que el hueco de potencia hacia arriba ($w_{jk} = 0$) y la rampa de bajada es mayor que el hueco de potencia hacia abajo ($u_{jk}^b = 1$). La solución al problema del despacho (solución del problema P2) es $t_{jk}^* = \underline{t}$ y el coste óptimo el indicado en la ecuación (5.256).

- Caso 7.

En el punto donde se encuentra la solución, t^* o t_{jk}^* , la rampa de subida es mayor que el hueco de potencia hacia arriba ($w_{jk} = 1$) y la rampa de bajada es menor que el hueco de potencia hacia abajo ($u_{jk}^b = 0$). La solución al problema del despacho (solución del problema P3) es $t_{jk}^* = \underline{t}$ y el coste óptimo el indicado en la ecuación (5.268).

- Caso 8.

En el punto donde se encuentra la solución, t^* o t_{jk}^* , la rampa de subida es mayor que el hueco de potencia hacia arriba ($w_{jk} = 1$) y la rampa de bajada es mayor que el hueco

de potencia hacia abajo ($u_{jk}^b = 1$). La solución al problema del despacho (solución del problema P4) es $t_{jk}^* = \underline{t}$ y el coste óptimo el indicado en la ecuación (5.280).

- Caso 9.

En el punto donde se encuentra la solución, t^* o t_{jk}^* , la rampa de subida es menor o igual que el hueco de potencia hacia arriba ($w_{jk} = 0$) y la rampa de bajada es menor que el hueco de potencia hacia abajo ($u_{jk}^b = 0$). La solución al problema del despacho (solución del problema P1) es $t_{jk}^* = \bar{t}$ y el coste óptimo el indicado en la ecuación (5.243).

- Caso 10.

En el punto donde se encuentra la solución, t^* o t_{jk}^* , la rampa de subida es menor o igual que el hueco de potencia hacia arriba ($w_{jk} = 0$) y la rampa de bajada es mayor que el hueco de potencia hacia abajo ($u_{jk}^b = 1$). La solución al problema del despacho (solución del problema P2) es $t_{jk}^* = \bar{t}$ y el coste óptimo el indicado en la ecuación (5.255).

- Caso 11.

En el punto donde se encuentra la solución, t^* o t_{jk}^* , la rampa de subida es mayor que el hueco de potencia hacia arriba ($w_{jk} = 1$) y la rampa de bajada es menor que el hueco de potencia hacia abajo ($u_{jk}^b = 0$). La solución al problema del despacho (solución del problema P3) es $t_{jk}^* = \bar{t}$ y el coste óptimo el indicado en la ecuación (5.267).

- Caso 12.

En el punto donde se encuentra la solución, t^* o t_{jk}^* , la rampa de subida es mayor que el hueco de potencia hacia arriba ($w_{jk} = 1$) y la rampa de bajada es mayor que el hueco de potencia hacia abajo ($u_{jk}^b = 1$). La solución al problema del despacho (solución del problema P4) es $t_{jk}^* = \bar{t}$ y el coste óptimo el indicado en la ecuación (5.279).

5.3 Subproblemas hidráulicos

Al aplicar el método de la relajación lagrangiana al problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo, el problema primal relajado (capítulo 4) se descompone en un subproblema por cada central térmica y en un subproblema por cada cuenca hidráulica.

No se ha realizado ninguna investigación referente a métodos de resolución de los subproblemas hidráulicos. Se han resuelto utilizando el optimizador comercial de propósito general MINOS 5.4 [90].

El subproblema asociado a cada cuenca hidráulica presenta estructura de red. El uso de algún optimizador que aprovechara esta propiedad, como el optimizador comercial CPLEX [133] mejo-

raría de forma significativa el tiempo de cálculo de la resolución de cada subproblema hidráulico y en consecuencia el tiempo de cálculo del proceso de coordinación hidrotérmica en el corto plazo.

El subproblema asociado a la cuenca hidráulica i , atendiendo al planteamiento general empleado en el apartado 4.2.1, se formula de la siguiente forma:

$$\text{Maximizar}_{(x_{l(i)k}, u_{l(i)k}, p_{l(i)k}, s_{l(i)k})} \quad \lambda^T h_{l(i)}(p_{l(i)k}) + \mu^T g_j(p_{l(i)k}) \quad (5.297)$$

suje to a

$$p_{l(i)k} = \rho_{l(i)}(u_{l(i)k}, x_{l(i)k}) \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.298)$$

$$x_{l(i)k+1} = x_{l(i)k} - u_{l(i)k} - s_{l(i)k} + w_{l(i)k} + \sum_{m(l(i)) \in m(l(i))} [u_{m(l(i)),k-\tau_{m(l(i))}} + s_{m(l(i)),k-\tau_{m(l(i))}}] \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.299)$$

$$\underline{u}_{l(i)} \leq u_{l(i)k} \leq \overline{u}_{l(i)v} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.300)$$

$$\underline{x}_{l(i)} \leq x_{l(i)k} \leq \overline{x}_{l(i)v} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.301)$$

$$0 \leq s_{l(i)k} \leq \overline{x}_{l(i)} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.302)$$

$$x_{l(i)1} = x_{l(i)}^0 \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad (5.303)$$

$$\underline{x}_{l(i)T} \leq x_{l(i)T+1} \leq \overline{x}_{l(i)T} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad (5.304)$$

La función objetivo (ecuación (5.297)) representa el ingreso que reciben todas las centrales de la cuenca por su contribución a las restricciones del sistema. El coste de producción de la energía hidroeléctrica se considera despreciable.

Las ecuaciones (5.298) son las que determinan la producción de potencia de cada central de la cuenca en cada subperiodo del horizonte temporal analizado. En la implantación informática que se ha llevado a cabo se ha supuesto que la potencia producida es una función lineal del caudal turbinado. Se han despreciado pues las pérdidas por fricción en la turbina y, dado que el horizonte temporal considerado es de corto plazo, se ha supuesto que no varía la altura del embalse (apartado 3.4.1).

Las ecuaciones (5.299) son las ecuaciones de conservación del agua (apartado 3.4.1). Estas restricciones son las que modelan el acoplamiento espacio-temporal existente entre las centrales de una misma cuenca (apartado 3.4).

Las ecuaciones (5.300), (5.301) y (5.302) son las que establecen los límites mínimo y máximo de, respectivamente, las siguientes variables: el caudal turbinado por cada central hidráulica en cada subperiodo, el volumen de agua en el embalse asociado a cada central hidráulica en cada subperiodo y el volumen de agua vertido por el embalse asociado a cada central en cada

subperiodo.

Las ecuaciones (5.303) establecen las condiciones de volumen inicial en cada central al comienzo del periodo de estudio y las ecuaciones (5.304) establecen entre qué límites se debe encontrar el volumen de agua en cada embalse al final del periodo de estudio.

5.3.1 Planteamiento de distintos tipos de subproblemas hidráulicos

A continuación se formulan los distintos tipos de subproblemas hidráulicos a que dan lugar los ocho modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo que se presentaron en el apartado 4.3.

Modelo 1

El subproblema asociado a la cuenca hidráulica i en el modelo 1 (apartado 4.3.1) se formula de la siguiente manera:

$$\text{Maximizar}_{(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)})} \sum_{k=1}^K \sum_{l(i) \in l(i)} (\lambda_k(\nu) + \mu_k(\nu)) p_{l(i)k} \quad (5.305)$$

sujeto a

$$p_{l(i)k} = \rho_{l(i)}(u_{l(i)k}, x_{l(i)k}) \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.306)$$

$$x_{l(i)k+1} = x_{l(i)k} - u_{l(i)k} l_k - s_{l(i)k} + w_{l(i)k} + \sum_{m(l(i)) \in m(l(i))} \left[u_{m(l(i)), k-\tau_{m(l(i))}} l_k + s_{m(l(i)), k-\tau_{m(l(i))}} \right] \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.307)$$

$$\underline{u}_{l(i)} \leq u_{l(i)k} \leq \bar{u}_{l(i)vk} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.308)$$

$$\underline{x}_{l(i)} \leq x_{l(i)k} \leq \bar{x}_{l(i)v} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.309)$$

$$0 \leq s_{l(i)k} \leq \bar{x}_{l(i)} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.310)$$

$$x_{l(i)1} = x_{l(i)}^0 \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad (5.311)$$

$$\underline{x}_{l(i)T} \leq x_{l(i)T+1} \leq \bar{x}_{l(i)T} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad (5.312)$$

Modelo 2

El subproblema asociado a la cuenca hidráulica i en el modelo 1 (apartado 4.3.2) se formula de la siguiente manera:

$$\text{Maximizar}_{(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)})} \sum_{l(i) \in l(i)} \sum_{k=1}^K \left[\lambda_k(\nu) p_{l(i)k} + \mu_k(\nu) (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \right] \quad (5.313)$$

sujeto a

$$p_{l(i)k} = \rho_{l(i)}(u_{l(i)k}, x_{l(i)k}) \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.314)$$

$$x_{l(i)k+1} = x_{l(i)k} - u_{l(i)k}l_k - s_{l(i)k} + w_{l(i)k} + \sum_{m(l(i)) \in m(l(i))} [u_{m(l(i)),k-\tau_{m(l(i))}}l_k + s_{m(l(i)),k-\tau_{m(l(i))}}] \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.315)$$

$$\underline{u}_{l(i)} \leq u_{l(i)k} \leq \overline{u}_{l(i)vk} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.316)$$

$$\underline{x}_{l(i)} \leq x_{l(i)k} \leq \overline{x}_{l(i)v} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.317)$$

$$0 \leq s_{l(i)k} \leq \overline{x}_{l(i)} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.318)$$

$$x_{l(i)1} = x_{l(i)}^0 \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad (5.319)$$

$$\underline{x}_{l(i)T} \leq x_{l(i)T+1} \leq \overline{x}_{l(i)T} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad (5.320)$$

Modelo 3

El subproblema asociado a la cuenca hidráulica i en el modelo 1 (apartado 4.3.3) se formula de la siguiente manera:

$$\text{Maximizar}_{(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)})} \sum_{l(i) \in i} \sum_{k=1}^K [\lambda_k(\nu) p_{l(i)k} + \mu_k(\nu) (\overline{h}_{l(i)} - p_{l(i)k})] \quad (5.321)$$

sujeto a

$$p_{l(i)k} = \rho_{l(i)}(u_{l(i)k}, x_{l(i)k}) \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.322)$$

$$x_{l(i)k+1} = x_{l(i)k} - u_{l(i)k}l_k - s_{l(i)k} + w_{l(i)k} + \sum_{m(l(i)) \in m(l(i))} [u_{m(l(i)),k-\tau_{m(l(i))}}l_k + s_{m(l(i)),k-\tau_{m(l(i))}}] \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.323)$$

$$\underline{u}_{l(i)} \leq u_{l(i)k} \leq \overline{u}_{l(i)vk} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.324)$$

$$\underline{x}_{l(i)} \leq x_{l(i)k} \leq \overline{x}_{l(i)v} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.325)$$

$$0 \leq s_{l(i)k} \leq \overline{x}_{l(i)} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.326)$$

$$x_{l(i)1} = x_{l(i)}^0 \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad (5.327)$$

$$\underline{x}_{l(i)T} \leq x_{l(i)T+1} \leq \overline{x}_{l(i)T} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad (5.328)$$

Modelo 4

El subproblema asociado a la cuenca hidráulica i en el modelo 1 (apartado 4.3.4) se formula de la siguiente manera:

$$\text{Maximizar}_{(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)})} \sum_{l(i) \in i} \sum_{k=1}^K (\lambda_k(\nu) + \mu_k(\nu)) p_{l(i)k} \quad (5.329)$$

sujeto a

$$p_{l(i)k} = \rho_{l(i)}(u_{l(i)k}, x_{l(i)k}) \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.330)$$

$$x_{l(i)k+1} = x_{l(i)k} - u_{l(i)k}l_k - s_{l(i)k} + w_{l(i)k} + \sum_{m(l(i)) \in m(l(i))} [u_{m(l(i)),k-\tau_{m(l(i))}}l_k + s_{m(l(i)),k-\tau_{m(l(i))}}] \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.331)$$

$$\underline{u}_{l(i)} \leq u_{l(i)k} \leq \overline{u}_{l(i)vk} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.332)$$

$$\underline{x}_{l(i)} \leq x_{l(i)k} \leq \overline{x}_{l(i)v} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.333)$$

$$0 \leq s_{l(i)k} \leq \overline{x}_{l(i)} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.334)$$

$$x_{l(i)1} = x_{l(i)}^0 \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad (5.335)$$

$$\underline{x}_{l(i)T} \leq x_{l(i)T+1} \leq \overline{x}_{l(i)T} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad (5.336)$$

Modelo 5

El subproblema asociado a la cuenca hidráulica i en el modelo 1 (apartado 4.3.5) se formula de la siguiente manera:

$$\text{Maximizar}_{(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)})} \sum_{l(i) \in i} \sum_{k=1}^K [\lambda_k(\nu) p_{l(i)k} + \mu_k(\nu) (\overline{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k})] \quad (5.337)$$

sujeto a

$$p_{l(i)k} = \rho_{l(i)}(u_{l(i)k}, x_{l(i)k}) \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.338)$$

$$x_{l(i)k+1} = x_{l(i)k} - u_{l(i)k}l_k - s_{l(i)k} + w_{l(i)k} + \sum_{m(l(i)) \in m(l(i))} [u_{m(l(i)),k-\tau_{m(l(i))}}l_k + s_{m(l(i)),k-\tau_{m(l(i))}}] \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.339)$$

$$\underline{u}_{l(i)} \leq u_{l(i)k} \leq \overline{u}_{l(i)vk} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.340)$$

$$\underline{x}_{l(i)} \leq x_{l(i)k} \leq \overline{x}_{l(i)v} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.341)$$

$$0 \leq s_{l(i)k} \leq \overline{x}_{l(i)} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.342)$$

$$x_{l(i)1} = x_{l(i)}^0 \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad (5.343)$$

$$\underline{x}_{l(i)T} \leq x_{l(i)T+1} \leq \overline{x}_{l(i)T} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad (5.344)$$

Modelo 6

El subproblema asociado a la cuenca hidráulica i en el modelo 1 (apartado 4.3.6) se formula de la siguiente manera:

$$\text{Maximizar}_{(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)})} \sum_{l(i) \in i} \sum_{k=1}^K [\lambda_k(\nu) p_{l(i)k} + \mu_k(\nu) (\overline{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k})] \quad (5.345)$$

sujeto a

$$p_{l(i)k} = \rho_{l(i)}(u_{l(i)k}, x_{l(i)k}) \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.346)$$

$$x_{l(i)k+1} = x_{l(i)k} - u_{l(i)k}l_k - s_{l(i)k} + w_{l(i)k} + \sum_{m(l(i)) \in m(l(i))} [u_{m(l(i)),k-\tau_{m(l(i))}}l_k + s_{m(l(i)),k-\tau_{m(l(i))}}] \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.347)$$

$$\underline{u}_{l(i)} \leq u_{l(i)k} \leq \overline{u}_{l(i)vk} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.348)$$

$$\underline{x}_{l(i)} \leq x_{l(i)k} \leq \overline{x}_{l(i)v} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.349)$$

$$0 \leq s_{l(i)k} \leq \overline{x}_{l(i)} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.350)$$

$$x_{l(i)1} = x_{l(i)}^0 \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad (5.351)$$

$$\underline{x}_{l(i)T} \leq x_{l(i)T+1} \leq \overline{x}_{l(i)T} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad (5.352)$$

Modelo 7

El subproblema asociado a la cuenca hidráulica i en el modelo 1 (apartado 4.3.7) se formula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar}_{(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)})} \quad & \sum_{l(i) \in i} \sum_{k=1}^K [\lambda_k(\nu) p_{l(i)k} + \mu_k(\nu) (\overline{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k}) \\ & + \beta_k^a (\overline{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k}) + \beta_k^b (p_{l(i)k} - \underline{h}_{l(i)k})] \end{aligned} \quad (5.353)$$

sujeto a

$$p_{l(i)k} = \rho_{l(i)}(u_{l(i)k}, x_{l(i)k}) \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.354)$$

$$x_{l(i)k+1} = x_{l(i)k} - u_{l(i)k}l_k - s_{l(i)k} + w_{l(i)k} + \sum_{m(l(i)) \in m(l(i))} [u_{m(l(i)),k-\tau_{m(l(i))}}l_k + s_{m(l(i)),k-\tau_{m(l(i))}}] \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.355)$$

$$\underline{u}_{l(i)} \leq u_{l(i)k} \leq \overline{u}_{l(i)vk} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.356)$$

$$\underline{x}_{l(i)} \leq x_{l(i)k} \leq \overline{x}_{l(i)v} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.357)$$

$$0 \leq s_{l(i)k} \leq \overline{x}_{l(i)} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.358)$$

$$x_{l(i)1} = x_{l(i)}^0 \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad (5.359)$$

$$\underline{x}_{l(i)T} \leq x_{l(i)T+1} \leq \overline{x}_{l(i)T} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad (5.360)$$

Modelo 8

El subproblema asociado a la cuenca hidráulica i en el modelo 1 (apartado 4.3.8) se formula de la siguiente manera:

$$\text{Maximizar}_{(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)})} \quad \sum_{l(i) \in i} \sum_{k=1}^K [\lambda_k(\nu) p_{l(i)k} + \mu_k(\nu) (\overline{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k})]$$

$$+ \beta_k^a \left(\bar{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k} \right) + \beta_k^b \left(p_{l(i)k} - \underline{h}_{l(i)k} \right) \quad (5.361)$$

sueto a

$$p_{l(i)k} = \rho_{l(i)}(u_{l(i)k}, x_{l(i)k}) \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.362)$$

$$x_{l(i)k+1} = x_{l(i)k} - u_{l(i)k}l_k - s_{l(i)k} + w_{l(i)k} + \sum_{m(l(i)) \in m(l(i))} \left[u_{m(l(i)),k-\tau_{m(l(i))}}l_k + s_{m(l(i)),k-\tau_{m(l(i))}} \right] \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.363)$$

$$\underline{u}_{l(i)} \leq u_{l(i)k} \leq \bar{u}_{l(i)vk} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.364)$$

$$\underline{x}_{l(i)} \leq x_{l(i)k} \leq \bar{x}_{l(i)v} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.365)$$

$$0 \leq s_{l(i)k} \leq \bar{x}_{l(i)} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (5.366)$$

$$x_{l(i)1} = x_{l(i)}^0 \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad (5.367)$$

$$\underline{x}_{l(i)T} \leq x_{l(i)T+1} \leq \bar{x}_{l(i)T} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad (5.368)$$

Capítulo 6

Solución del problema dual. Métodos de actualización de multiplicadores

6.1 Introducción

El problema dual del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo es, al igual que el problema primal, un problema de optimización no diferenciable. Los métodos de optimización tradicionales basados en el gradiente y/o la matriz hesiana [27], [77] no se pueden aplicar en este contexto.

En este capítulo se detallan los posibles procedimientos de resolución del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo. Algunos de ellos son aportaciones de este trabajo de investigación.

Los métodos de resolución del problema dual de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo que se presentan en este capítulo se podrían aplicar a la resolución de cualquier problema de optimización no diferenciable (con tal que en cada iteración del algoritmo se pudiera deducir el valor de la función no diferenciable a resolver en un punto y un subgradiente en ese punto). La extensión de estos métodos a la optimización de cualquier problema de optimización no diferenciable es inmediata.

En este capítulo se proponen nuevos métodos de resolución del problema dual (métodos de actualización de multiplicadores) y se aplican métodos generales de optimización de funciones no diferenciables al problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo. Todo esto constituye una de las principales aportaciones de este trabajo de investigación.

Este capítulo se estructura como sigue. En el apartado 6.2 se hace una revisión bibliográfica de

los métodos de resolución del problema dual del problema de la coordinación hidrotérmica. En el apartado 6.3 se presenta brevemente el concepto de subgradiente que es la base de la teoría de optimización no diferenciable y se introduce el concepto de ϵ -subgradiente que utiliza uno de los métodos de actualización de multiplicadores (las formas duales de los *Bundle Methods*, apartado 6.7.1) que se describe en este capítulo. En el apartado 6.4 se vuelve a formular el problema dual de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo (formulación idéntica a la presentada en el apartado 4.2 que se repite aquí para mayor claridad) y se plantea el algoritmo de resolución del problema dual. La mayor dificultad del algoritmo de resolución del problema dual estriba en el procedimiento de actualización de los multiplicadores. La eficiencia del algoritmo dependerá en gran medida del procedimiento de actualización de multiplicadores empleado. En los apartados 6.5, 6.6 y 6.7 se clasifican y se describen en detalle los procedimientos de actualización de multiplicadores que se han contrastado. El método presentado en el apartado 6.7.4 *método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos* [68], es original de este trabajo de investigación. También es original el *método de los hiperplanos secantes con penalización, control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos* (apartado 6.7.5). La aplicación de los métodos descritos en los apartados 6.6.2 y 6.7.2 al problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo también es original. En el apartado 6.8 se aplican los métodos de actualización de multiplicadores descritos a los diversos modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo formulados en el apartado 4.3.

6.2 Revisión bibliográfica. Métodos de resolución del problema dual de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo empleados en la literatura

El método tradicionalmente empleado para resolver el problema dual del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo es el método del subgradiente [86], [32], [131], [125], [99], [101], [102], [35], [85], [18], [44], [45], [47], [130], [48], [50].

En [1], [119] y [110] se emplean métodos cuasi Newton en la actualización de los multiplicadores del problema dual. Algunos autores denominan a estos métodos “métodos de métrica variable”. En ellos el vector de multiplicadores se actualiza sumando al vector de multiplicadores de la iteración en curso un vector proporcional al producto de una aproximación de la matriz hesiana y un subgradiente de esa iteración. Los métodos cuasi Newton se basan pues en el cálculo en cada iteración de una aproximación de la matriz hesiana. El inconveniente de estos métodos es el aumento de la complejidad de la actualización de multiplicadores. Si aumenta mucho el número de subperiodos del horizonte temporal analizado, la matriz hesiana se hace muy grande y densa.

Este método necesita un número de iteraciones significativamente menor que el método del subgradiente para alcanzar la convergencia, sin embargo las operaciones con matrices provocan un aumento importante del tiempo de cálculo en cada iteración. Los métodos cuasi Newton (o de “métrica variable”) no han sido tratados en este trabajo de investigación. En [109] puede encontrarse una descripción de la aplicación de este método al problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo.

Recientemente se han comenzado a aplicar, en la resolución del problema dual del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo ([98] y [78]) los métodos basados en la acumulación de información del problema dual a resolver (en inglés *Bundle Methods*) propuestos por el grupo de Lemaréchal (capítulo VII de [91], capítulo XII de [116] y [54]).

Los *Bundle Methods* son técnicas de optimización de funciones no diferenciables que aprovechan en cada iteración no sólo la información del problema a resolver de la iteración actual (como hace el tradicionalmente empleado método del subgradiente), sino que además emplea la información acumulada en la iteraciones precedentes. Dentro de este grupo de técnicas hay dos procedimientos diferenciados: las formas primales y las formas duales.

Las formas primales de los *Bundle Methods* (capítulo VII de [91], capítulo XII de [116] y [54]) son procedimientos de optimización de funciones no diferenciables que sofistican el método de los hiperplanos secantes tratando de evitar el comportamiento oscilante de este método.

El método de los hiperplanos secantes ([60], [100], capítulo VII de [91], [9], [54]) se basa en la reconstrucción del problema a resolver mediante hiperplanos tangentes a la función a optimizar y en la resolución del problema lineal a tramos que resulta. Al aplicar el método de los hiperplanos secantes o cualquier método que se derive de él se obtiene un índice de la calidad de la solución encontrada. Este índice de calidad es la diferencia relativa entre el máximo valor de la función dual aproximada en la última iteración ejecutada y el valor de la función dual en esa iteración. Esto es de gran utilidad para determinar el criterio de parada del algoritmo de resolución de cualquier problema de optimización no diferenciable y una de las grandes ventajas de este tipo de métodos frente al método del subgradiente. No se ha encontrado ninguna referencia en la literatura que emplee el método de los hiperplanos secantes para resolver el problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo (salvo la aplicación que se hace en [68] con fines comparativos).

El método de los hiperplanos secantes es oscilante. Las formas primales de los *Bundle Methods* tratan de solucionar el inconveniente de excesiva inestabilidad del método de los hiperplanos secantes. Para ello introducen un término de penalización en la función objetivo del problema lineal aproximado. Una aplicación de las formas primales de los *Bundle Methods* al problema

de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo puede encontrarse en [98].

Las formas duales de los *Bundle Methods* [54], [91] (capítulo VII), [116] (capítulo XII) son métodos de optimización no diferenciable que buscan el camino hacia el óptimo moviéndose en las direcciones de ε -subgradientes, en lugar de hacerlo en las direcciones de subgradientes. La idea de partida es aprovechar la información de los subgradientes calculados en iteraciones previas para definir ε -subgradientes en iteraciones posteriores (ya que un subgradiente calculado en una iteración constituye, siempre que la función no diferenciable a optimizar sea convexa, un ε subgradiente de una iteración posterior). El ajuste de parámetros resulta complejo. Este es uno de los grandes inconvenientes de este tipo de método. Además, al tratarse de una sofisticación del método del subgradiente se pierde la ventaja de poder establecer fácilmente una medida de la calidad de la solución encontrada (que es una de las ventajas de los métodos basados en el método de los hiperplanos secantes, y por ello una de las ventajas de las formas primales de los *Bundle Methods*). Todo esto ha resultado en el mayor uso y desarrollo de las formas primales frente a las formas duales de los *Bundle Methods*. Una aplicación de este tipo de métodos al problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo puede encontrarse en [78].

En [68] se presenta un procedimiento novedoso de resolución del problema dual basado en el método de los hiperplanos secantes y aplicado a la resolución del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo. Se compara el funcionamiento del método con el funcionamiento del método del subgradiente, el método de los hiperplanos secantes y las formas primales de los *Bundle Methods*. Este método es una de las aportaciones de este trabajo de investigación.

6.3 Optimización no diferenciable. El concepto de subgradiente y de ε -subgradiente

La función dual del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo es cóncava [9] pero no diferenciable. En la teoría de optimización de funciones convexas no diferenciables se define el concepto de subgradiente, similar al concepto del gradiente en funciones diferenciables.

Sea $f(x)$ una función convexa definida en $\mathbb{R}^n$, a cualquier vector $a \in \mathbb{R}^n$ que cumpla:

$$f(x + y) \geq f(x) + (a, y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \quad (6.1)$$

donde (a, y) representa el producto escalar de los vectores a e y , se le llama *subgradiente* de la función $f(x)$ en el punto x . Como se observa en la figura 6.1 el subgradiente no es en general único (sólo en el caso de que el punto x sea diferenciable, el subgradiente es único y coincide con el gradiente). Al conjunto de subgradientes se le denomina *subdiferencial* y se le denota como $\partial f(x)$. Puede probarse [100] que $\partial f(x)$ es un conjunto convexo, no vacío, cerrado y con límites.

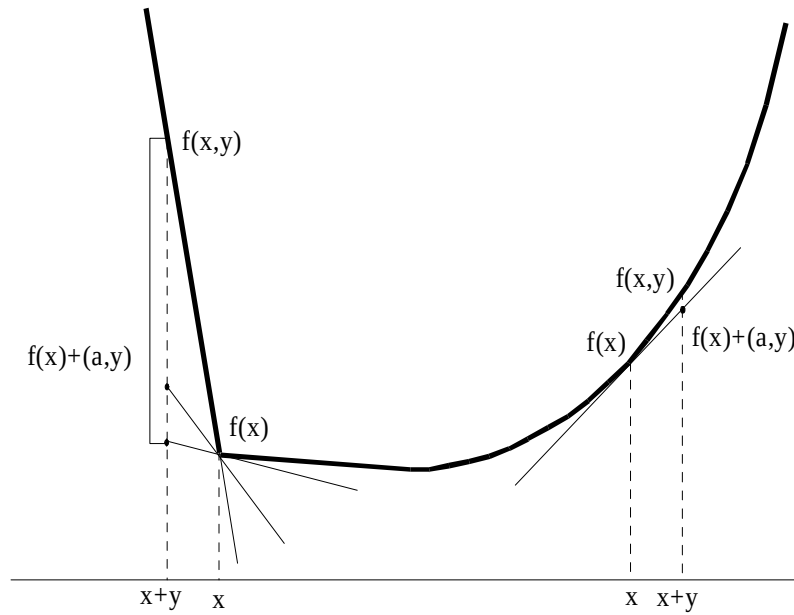


Figura 6.1: El subgradiente de una función convexa

Aunque el conjunto de subgradientes $\partial f(x)$ no es único, las técnicas de optimización de funciones no diferenciables típicamente necesitan calcular un solo subgradiente del conjunto de subgradientes de $f(x)$ en el punto x . Además, la determinación de este subgradiente (en cierto punto x) suele ser sencilla en la mayoría de las aplicaciones.

El concepto de subgradiente puede extenderse de la siguiente forma. Un vector $a \in \mathbb{R}^n$ es un ε -subgradiente de la función convexa $f(x)$ en el punto x si cumple:

$$f(x+y) \geq f(x) + (a, y) - \varepsilon \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \quad (6.2)$$

donde $\varepsilon \geq 0$ es una constante. El conjunto de ε -subgradientes no es único (ni siquiera para funciones diferenciables), se le llama ε -subdiferencial y se le denota como $\partial_\varepsilon f(x)$ [100].

Gráficamente el conjunto de ε -subgradientes representa el conjunto de hiperplanos en $\mathbb{R}^{n+1}$ que separan $f(x)$ de la coordenada $(x, f(x) - \varepsilon)$. La figura 6.2 ilustra el concepto de ε -subgradiente.

6.4 Resolución del problema dual

El problema dual del problema de la coordinación hidrotérmica se formuló matemáticamente en el apartado 4.2.2. Para mayor claridad en la exposición se vuelve a formular a continuación.

$$\text{Maximizar}_{\theta=(\lambda,\mu)} \quad \phi(\theta) = \phi(\lambda, \mu) \quad (6.3)$$

sujeto a

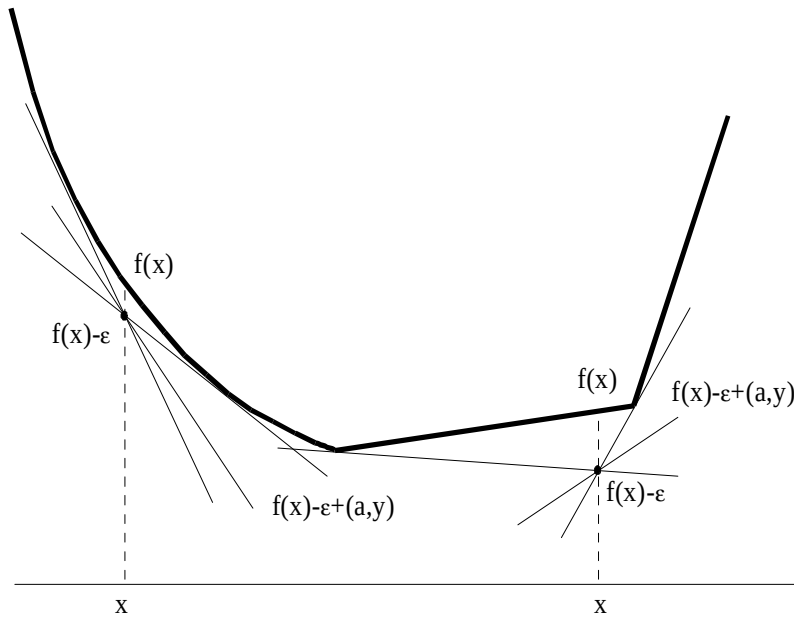


Figura 6.2: El ε -subgradiente de una función convexa

$$\mu \geq 0 \quad (6.4)$$

donde θ es el vector de multiplicadores que incluye a los multiplicadores λ asociados a las restricciones globales de igualdad del problema primal (ecuaciones (4.4)) y a los multiplicadores μ asociados a las restricciones globales de desigualdad del problema primal (ecuaciones (4.5)) y $\phi(\theta)$ es la función dual.

La evaluación de la función dual $\phi(\theta) = \phi(\lambda, \mu)$ (ecuaciones (4.7)-(4.9)) para cierto valor del vector de multiplicadores $\theta = (\lambda, \mu)$ necesita de la resolución del problema primal relajado (ecuaciones (4.10)-(4.12)) para ese valor del vector de multiplicadores. Recuérdesse que el problema primal relajado es el problema de optimización en variables primales de la función lagrangiana sujeto a satisfacer las restricciones locales del problema primal (restricciones del equipo térmico y restricciones del equipo hidráulico) y siendo el vector de multiplicadores constante. Como se indicó en el capítulo 4 (ecuación (4.16)), la función dual puede expresarse de la siguiente forma:

$$\phi(\theta) = \phi(\lambda, \mu) = \lambda^T H + \mu^T G + d(\lambda, \mu), \quad (6.5)$$

donde $d(\lambda, \mu)$ es la solución del siguiente problema de optimización (que se planteó en el capítulo 4, ecuaciones (4.17)-(4.19), y que se repite aquí para mayor claridad):

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar}_{(x,y)} \\ & \sum_j [f_j(x_j) - \lambda^T h_j(x_j) - \mu^T g_j(x_j)] - \sum_i [\lambda^T h_i(y_i) + \mu^T g_i(y_i)] \\ & \text{sujeto a} \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$s_j(\mathcal{X}_j) \leq 0 \quad \forall j \quad (6.7)$$

$$s_i(\mathcal{Y}_i) \leq 0 \quad \forall i \quad (6.8)$$

Como ya se ha indicado en el capítulo 4, este problema de optimización se descompone en un subproblema por cada central térmica y un subproblema por cada cuenca hidráulica. Esta es una de las ventajas del método de la relajación lagrangiana.

En todos los procedimientos de resolución del problema dual que se describen en este capítulo y en cada iteración ν del método, se requiere la evaluación de la función dual $\phi(\theta(\nu))$ para el valor del vector de multiplicadores $\theta(\nu) = (\lambda(\nu), \mu(\nu))$ y el cálculo de un subgradiente en ese punto. Tanto la evaluación de la función dual (ecuación (6.5)) como el cálculo de un subgradiente en ese punto necesita de la resolución del problema primal relajado (en cada iteración).

Todos los procedimientos de resolución del problema dual descritos en este capítulo, salvo el método del subgradiente modificado (apartado 6.6.2), siguen el siguiente algoritmo general de resolución (que se presentó en el apartado 4.2.2 y que se repite aquí para mayor claridad en la exposición):

Algoritmo PD_BÁSICO

- Paso 1 Inicialización del vector de multiplicadores o de la región de factibilidad de dicho vector.
- Paso 2 Evaluación de la función dual (ecuación (6.5)) y por tanto resolución del problema primal relajado (esto es, resolución de un subproblema por cada central térmica y un subproblema por cada cuenca hidráulica).
- Paso 3 Actualización del vector de multiplicadores utilizando alguno de los procedimientos que se describen en este capítulo. Esta actualización proporciona un paso en una dirección de ascenso del problema dual.
- Paso 4 Si se cumplen los criterios de convergencia finaliza el proceso. En caso contrario se vuelve al Paso 2

La eficiencia del método de actualización de multiplicadores elegido determina, junto con los algoritmos de resolución de los subproblema térmicos e hidráulicos que se emplean en el Paso 2 (capítulo 5), la eficacia del algoritmo de resolución del problema dual.

En los apartados 6.5, 6.6 y 6.7 se clasifican y describen los posibles métodos de actualización de multiplicadores. En la descripción de cada uno de los métodos se hacen indicaciones acerca de la

inicialización de multiplicadores o región de factibilidad (paso 1) y del criterio de convergencia (paso 4).

Aunque las formas duales de los *Bundle Methods* no han sido tratadas en este trabajo de investigación, se incluye una descripción de este tipo de métodos.

6.5 Métodos de actualización de multiplicadores

La función dual que resulta al aplicar las técnicas de relajación lagrangiana al problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo es una función cóncava [9] no diferenciable. Para aplicar cualquiera de las técnicas de actualización de multiplicadores que se describen en este capítulo basta con calcular un sólo subgradiente, en cada iteración, del conjunto de subgradientes.

En cada iteración del *Algoritmo PD_BÁSICO* (apartado 6.4) y de la ejecución del paso 2 se obtiene, además de los valores óptimos de las variables del problema primal para el valor del vector de multiplicadores de la iteración en curso, la siguiente información (que utilizan todos los métodos de actualización de multiplicadores):

- Valor de la función dual $\phi(\theta(\nu)) = \phi(\lambda(\nu), \mu(\nu))$ o $\phi(\nu)$ para el valor del vector de multiplicadores de la iteración en curso (evaluada utilizando la ecuación (6.5)).
- Un subgradiente de la función dual en ese punto $s(\theta(\nu))$ o bien $s(\nu)$.

Para resolver el problema dual del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo, se puede fácilmente calcular un subgradiente $s(\nu)$ del conjunto de subgradientes de la función dual $\partial\phi(\theta(\nu))$. El subgradiente $s(\nu)$ es un vector columna de dimensión igual al número de restricciones globales que se incluyan en la formulación del problema primal (ecuaciones (4.1)-(4.5)). Se define de la siguiente forma:

$$s(\nu) = (h(\theta(\nu)), g(\theta(\nu)))^T = (h(\nu), g(\nu))^T \quad (6.9)$$

El vector $h(\nu)$ es un vector columna de dimensión igual al número de subperiodos del horizonte temporal analizado, ya que las restricciones globales de igualdad consideradas en el problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo son las restricciones de demanda. El vector $h(\nu)$ contiene los incumplimientos en las restricciones de demanda, es decir:

$$h(\nu) = H - \sum_{j \in j} h_j(\mathcal{X}_j(\nu)) - \sum_{i \in i} h_i(\mathcal{Y}_i(\nu)) \quad (6.10)$$

siendo $\mathcal{X}_j(\nu)$ el vector que contiene los valores óptimos, que resultan tras la resolución del problema primal relajado (Paso 2 del *Algoritmo PD-BÁSICO*), de las variables relacionadas con la central térmica j e $\mathcal{Y}_i(\nu)$ el vector que contiene los valores óptimos, que resultan tras la resolución del problema primal relajado, de las variables relacionadas con la cuenca hidráulica i .

La dimensión del vector columna $g(\nu)$ dependerá del número de restricciones globales de desigualdad consideradas. Típicamente se consideran únicamente las restricciones de reserva rodante. En estos casos la dimensión de $g(\nu)$ es igual al número de subperiodos del horizonte temporal analizado. En algunas ocasiones se consideran, además de las restricciones de reserva rodante, restricciones de demanda mínima y/o restricciones de regulación. En estos casos la dimensión de $g(\nu)$ es igual a un múltiplo del número de subperiodos del horizonte temporal analizado.

Si el valor de cierta componente de $g(\nu)$ es negativo, entonces la restricción de desigualdad a la que va asociada se cumple, siendo el valor absoluto de esa componente de $g(\nu)$ el exceso, respecto al mínimo exigido, en el cumplimiento de la restricción en cuestión. De forma análoga si el valor de cierta componente de $g(\nu)$ es positivo, entonces la restricción de desigualdad a la que va asociada no se cumple, siendo el valor de esa componente de $g(\nu)$ el incumplimiento de la restricción en cuestión. Por tanto, $g(\nu)$ se calcula de la siguiente forma:

$$g(\nu) = G - \sum_{j \in J} g_j(\mathcal{X}_j(\nu)) - \sum_{i \in I} g_i(\mathcal{Y}_i(\nu)) \quad (6.11)$$

donde $\mathcal{X}_j(\nu)$ e $\mathcal{Y}_i(\nu)$ de nuevo representan los valores óptimos de las variables relacionadas con el equipo térmico e hidráulico para el valor del vector de multiplicadores de la iteración en curso $\theta(\nu)$.

Los métodos de actualización de multiplicadores se pueden clasificar, en primera aproximación, en dos grandes grupos:

- Métodos sin memoria.
- Métodos con memoria.

Los primeros utilizan en cada iteración únicamente la información del problema primal relajado (o problema primal descompuesto) de la iteración en curso, esto es, el valor de la función objetivo $\phi(\theta(\nu))$ y un subgradiente en ese punto $s(\nu)$. Se trata de las tradicionalmente usadas técnicas de subgradiente.

El segundo grupo de técnicas utiliza en cada iteración del método no sólo la información conseguida de la resolución del problema primal relajado en la iteración en curso sino también la

conseguida en las iteraciones precedentes. Dentro de este grupo de técnicas se distinguen de nuevo dos grupos: el grupo basado en sofisticaciones al método del subgradiente y el grupo basado en el método de los hiperplanos secantes.

Las técnicas de actualización de multiplicadores con memoria basadas en el método del subgradiente o formas duales de los *Bundle Methods* [54], [91] (capítulo VII), [116] (capítulo XII) han sido utilizadas para resolver el problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo en [78]. Estas técnicas presentan peores propiedades de convergencia que las formas primales de los *Bundle Methods*, basadas en el método de los hiperplanos secantes. Debido a los inconvenientes que parecen presentar estos métodos (que se describen en el capítulo XIV de [54] y se enumeran en el apartado 6.7.1), no se han tratado en este trabajo de investigación.

Las técnicas de actualización de multiplicadores con memoria basadas en el método de los hiperplanos secantes (apartado 6.7.2) reconstruyen la función dual mediante hiperplanos. El método de los hiperplanos secantes se basa en la definición de un modelo que aproxima a la función dual y en la resolución del problema dual aproximado que resulta. El modelo aproximado del problema dual se construye utilizando en cada iteración la información de la función dual obtenida hasta dicha iteración. El modelo aproximado de la función dual es un modelo linealizado a tramos que envuelve exteriormente (ya que la función dual es concava) a la función dual. En cada iteración se define un nuevo modelo linealizado a tramos que aproxima el problema dual. El modelo linealizado se aproxima cada vez más, a medida que aumenta el contador de iteraciones, al problema dual. El método de los hiperplanos secantes se describe en el apartado 6.7.2. En este mismo apartado se presenta un método de hiperplanos secantes modificado que resulta más eficiente que el método general por mantener acotado el tamaño del problema dual relajado lineal a tramos eliminando la información menos relevante.

El método de los hiperplanos secantes converge hacia el óptimo pero es oscilante. Para eliminar este inconveniente de inestabilidad y así resolver de forma eficiente el problema dual aproximado se puede:

1. modificar la función objetivo incluyendo un término cuadrático que penalice el alejamiento de la que parezca la mejor solución obtenida hasta el momento,
2. actuar sobre la región de factibilidad de forma que ésta varíe de forma dinámica, o bien,
3. combinar las penalizaciones cuadráticas con la variación de forma dinámica de la región de factibilidad.

De la aplicación de la primera de las opciones de la lista anterior surge el método de los hiperplanos secantes con penalización [91] (capítulo VII), [116] (capítulo XII), [54], [98] (o bien la

forma primal de los *Bundle Methods* habitualmente empleada). Este método se describe en el apartado 6.7.3

De la aplicación de la segunda de las opciones se deriva el método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad [68] que se propone en este trabajo de investigación. Este método se presenta en el apartado 6.7.4.

De la aplicación de la tercera opción surge el método de los hiperplanos secantes con penalización y control dinámico de la región de factibilidad, que también se propone en este trabajo de investigación. Este método se detalla en el apartado 6.7.5.

Aunque en este capítulo se describen las técnicas de actualización de multiplicadores atendiendo a la clasificación antes indicada (métodos sin memoria y métodos con memoria), también se pueden clasificar en:

- Métodos basados en el subgradiente (que incluye los métodos basados en subgradiente sin memoria y las formas duales de los *Bundle Methods*).
- Métodos basados en la reconstrucción de la función dual mediante hiperplanos o método de los hiperplanos secantes.

6.6 Métodos de actualización de multiplicadores sin memoria

Los métodos de actualización de multiplicadores sin memoria utilizan en cada iteración del *Algoritmo PD_BÁSICO* (apartado 6.4) la información resultante de la evaluación de la función dual únicamente en esa iteración. Son las tradicionalmente usadas técnicas del subgradiente.

La ventaja de este tipo de técnicas es su gran sencillez y por ello el reducido tiempo de cálculo que se requiere en cada iteración en la ejecución del *Paso 3* del *Algoritmo PD_BÁSICO* (apartado 6.4). Sin embargo, la convergencia al aplicar este tipo de técnicas es muy lenta (salvo en el caso en que se parta de una solución cercana a la óptima). Aunque el tiempo de ejecución de cada iteración es muy rápido, hacen falta muchas iteraciones con lo que el tiempo de ejecución total es bastante mayor que el que se consigue utilizando métodos con memoria (suponiendo que no se parte de una solución muy próxima a la óptima).

Otro de los inconvenientes de los métodos sin memoria es que se carece de alguna medida que evalúe la calidad de la solución conseguida del problema dual y por ello no es fácil establecer un criterio de parada.

Típicamente el criterio de parada suele ser ejecutar un número de iteraciones seleccionado a priori

o bien finalizar cuando la diferencia entre las funciones objetivos de dos iteraciones sucesivas sea pequeña. El primer criterio se basa en la experiencia conseguida en la resolución de problemas parecidos pero no garantiza que la solución obtenida se encuentre próxima a la solución óptima del problema dual. El segundo criterio tampoco tiene por qué garantizar la convergencia ya que la diferencia entre los valores de la función objetivo de dos iteraciones consecutivas puede ser pequeña si el algoritmo evoluciona lentamente. En algunas ocasiones se finaliza el proceso cuando en un número prefijado de iteraciones (típicamente alrededor de 10 iteraciones) no se consiga ninguna mejora significativa en el valor de la función dual.

6.6.1 Método del subgradiente tradicional

Es el método más simple utilizado en la optimización de funciones no diferenciables [42], [38], [39]. Se trata de una extensión del método del gradiente que se aplica en optimización de funciones diferenciables [27], [77]. Consiste en actualizar las variables de optimización del problema a resolver de forma proporcional al subgradiente.

Al resolver el problema dual de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo mediante el método del subgradiente, en cada iteración del *Algoritmo PD_BÁSICO* (apartado 6.4) en el Paso 3, el vector de multiplicadores θ se actualiza de forma proporcional al subgradiente $s(\nu)$, calculado según las ecuaciones (6.9), (6.10) y (6.11). Es decir:

$$\theta(\nu + 1) = \theta(\nu) + k(\nu) \frac{s(\nu)}{|s(\nu)|} \quad (6.12)$$

donde $k(\nu)$ es el tamaño del paso en cada iteración. Si el tamaño del paso es demasiado pequeño, la convergencia podría resultar muy lenta pero si el tamaño del paso es demasiado grande el método podría oscilar (y por tanto no converger).

En algunas ocasiones no se normaliza dividiendo por el modulo del subgradiente $|s(\nu)|$, es decir se aplica una actualización del tipo:

$$\theta(\nu + 1) = \theta(\nu) + k(\nu)s(\nu) \quad (6.13)$$

Nótese que no normalizar el vector subgradiente es equivalente a utilizar un tamaño del paso $k(\nu)$ mayor.

Para garantizar la convergencia al aplicar actualizaciones tanto del tipo (6.12) como del tipo (6.13), el tamaño del paso elegido debe cumplir la regla de Polyak [100], esto es:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} k(\nu) \rightarrow 0 \quad (6.14)$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} k(\nu) \rightarrow \infty \quad (6.15)$$

En las aplicaciones del método del subgradiente a los problemas de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo o de la programación horaria de centrales térmicas suele emplearse el siguiente paso:

$$k(\nu) = \frac{1}{m + n \times \nu} \quad (6.16)$$

donde m y n son constantes elegidas a priori.

En algunas referencias que aparecen en la literatura [130], [85], [58], el tamaño del paso depende de una estimación del valor óptimo de la función dual (que se hace en cada iteración) o bien de un valor óptimo (o cuasi óptimo) de la función dual de una ejecución ya realizada correspondiente al mismo equipo generador con una curva de carga similar (por ejemplo, si el horizonte temporal es de una semana se puede partir de la solución correspondiente a la misma semana del año anterior).

El algoritmo del método es el siguiente:

Algoritmo SG

Paso 1 Inicialización del vector de multiplicadores.

Paso 2 Evaluación de la función dual y por tanto resolución del problema primal relajado (que se descompone de forma natural en un subproblema por cada central térmica y en un subproblema por cada cuenca hidráulica).

Paso 3 Actualización del vector de multiplicadores de la siguiente forma:

$$\theta(\nu + 1) = \theta(\nu) + k(\nu) \frac{s(\nu)}{|s(\nu)|} \quad (6.17)$$

Paso 4 Si se cumple el criterio de convergencia finaliza el proceso. En caso contrario se va al paso 2.

El método del subgradiente presenta los siguientes inconvenientes:

1. La elección del tamaño del paso (muy importante para que el método presente buenas propiedades de convergencia) no es sencilla y puede depender de los datos del problema.
2. Resulta difícil establecer un criterio de parada.

Respecto al primero de los inconvenientes, si el tamaño del paso elegido es del tipo indicado en la ecuación (6.16) entonces, la elección de los parámetros m y n depende de los datos del problema de forma que valores que produzcan una convergencia eficaz para ciertos datos podrían resultar muy poco adecuados al cambiar los datos. Lo mismo puede aplicarse a otro tipo de expresiones como las que se encuentran en [100] (que no son habituales en los sistemas de energía eléctrica).

Si el tamaño del paso elegido se basa en una estimación del óptimo de la función dual en cada iteración, el cálculo del óptimo aproximado suele resultar complejo y por ello aumentar de forma considerable el tiempo empleado en cada iteración del algoritmo del subgradiente. De esta forma se pierde la principal ventaja del método del subgradiente (su gran simplicidad y reducido tiempo de cálculo en cada iteración).

Respecto al segundo de los inconvenientes, no existe ninguna medida de la calidad de la solución encontrada al aplicar el método del subgradiente. Típicamente se suele finalizar el proceso cuando ocurre alguna de las siguientes situaciones:

1. se ha ejecutado un número prefijado de iteraciones,
2. la diferencia relativa entre los valores de la función dual, evaluada según la ecuación (6.5), en dos iteraciones consecutivas es suficientemente pequeña, o bien
3. en un número prefijado de iteraciones no se consigue ninguna mejora significativa.

La ventaja del método del subgradiente es su gran sencillez. El tiempo de cálculo de la actualización de los multiplicadores en cada iteración del *Algoritmo PD_BÁSICO* (apartado 6.4) es muy rápido. Sin embargo, requiere la ejecución de muchas iteraciones hasta alcanzar la convergencia. Resulta el método de actualización de multiplicadores más lento de todos analizados. Sólo si se parte de un valor inicial del vector de multiplicadores próximo a la solución del problema, este método resulta competitivo frente a los demás. Por este motivo resulta conveniente aplicarlo en la *Etapa 2* (cuando la solución del problema dual se encuentra muy próxima a la solución óptima) del algoritmo que se propone en esta tesis (apartado 4.2.3 y capítulo 7).

6.6.2 Método del subgradiente modificado

Al emplear el método del subgradiente tradicional y cualquiera de los métodos de actualización de multiplicadores con memoria, la resolución del problema primal relajado (Paso 2 del *Algoritmo PD_BÁSICO*, apartado 6.4) puede paralelizarse de forma directa ya que este problema de optimización se descompone en un subproblema por cada central térmica y en un subproblema por cada cuenca hidráulica.

En el método del subgradiente tradicional, en cada iteración, se resuelve el problema primal relajado para el valor del vector de multiplicadores de la iteración en curso. El problema primal relajado se descompone de forma natural en un subproblema por cada central térmica y un subproblema por cada cuenca hidráulica. Cada subproblema, térmico o hidráulico, se resuelve de forma independiente y todos ellos se resuelven para el mismo valor del vector de multiplicadores.

Kaskavelis y Caramanis [58] afirman que, dado que todos los subproblemas se resuelven para el mismo valor del vector de multiplicadores, aunque la diferencia en el valor del vector de multiplicadores de una iteración a la siguiente haya sido pequeña, se pueden producir grandes diferencias en el valor de la función objetivo del problema dual además de grandes infactibilidades en las restricciones de complicación del problema dual. Esto provoca que se produzcan muchas oscilaciones al aplicar el método del subgradiente y, como consecuencia, que la convergencia sea muy lenta. Por ello proponen resolver cada subproblema (térmico o hidráulico) con un valor del vector de multiplicadores distinto. Esto es, proponen actualizar el vector de multiplicadores no sólo una única vez, y al final de la resolución de todos los subproblema en que se descompone el problema primal relajado, en cada iteración del *Algoritmo PD_BÁSICO* (como se hace al aplicar el método del subgradiente) sino una vez tras la resolución de cada subproblema (térmico o hidráulico). De esta forma, se resuelve cada subproblema con la última información disponible. Este procedimiento disminuye las oscilaciones que se producen al aplicar el método del subgradiente tradicional y por tanto acelera la convergencia.

Dado que el principio básico es la actualización del vector de multiplicadores tras la resolución de cada subproblema, el método del subgradiente modificado no sigue el algoritmo general de resolución del problema dual, *Algoritmo PD_BÁSICO* (apartado 6.4). En este método se definen *iteraciones* y *subiteraciones*. Cada vez que se resuelve un nuevo subproblema se ejecuta una nueva subiteración. Tras la resolución de todos los subproblemas de forma secuencial, en que se descompone el problema primal relajado, se ejecuta una nueva iteración.

En cada subiteración se resuelve un subproblema y se actualiza el vector de multiplicadores. Tras la resolución del subproblema que ocupa la posición p (y por tanto en la subiteración p) se actualiza el vector de multiplicadores utilizando los resultados de la resolución de los p primeros subproblemas de la iteración actual y los resultados de los restantes $P - p$ subproblemas (siendo P el número total de subproblemas en que se descompone el problema primal relajado) de la iteración anterior. De esta forma, cada vez que se actualiza el vector de multiplicadores, se utiliza la información más reciente.

Es decir, en la iteración ν y subiteración p , el vector de multiplicadores θ se actualiza de la

siguiente forma:

$$\theta(\nu + 1, p + 1) = \theta(\nu, p) + k(\nu) \frac{s'(\nu)}{|s'(\nu)|} \quad (6.18)$$

$$\text{siendo } k(\nu) = \frac{1}{m+n \times \nu} \quad (6.19)$$

donde $\theta(\nu, p)$ es el valor del vector de multiplicadores en la iteración ν y subiteración p y, $s'(\nu)$ incorpora los resultados (es decir las variables óptimas para el valor del vector de multiplicadores $\theta(\nu, p)$) de la resolución de los p primeros subproblemas de la iteración actual y los resultados de los $P - p$ restantes subproblemas de la iteración anterior.

El tamaño del paso $k(\nu)$ cumple, igual que el tamaño del paso elegido en el algoritmo del subgradiente tradicional, la regla de Polyak [100] (ecuaciones (6.14) y (6.15)). Se puede emplear un tamaño del paso del tipo indicado en la ecuación (6.16) o bien, como se propone en [58], utilizar algún tipo de estimación del valor óptimo de la función a resolver.

Al aplicar el método del subgradiente modificado al problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo, el número total de subiteraciones es igual a la suma del número total de centrales térmicas (J según la notación presentada en el capítulo 3 de este documento) y el número total de cuencas hidráulicas (I según la notación presentada en el capítulo 3). Como cada subproblema se resuelve con un valor del vector de multiplicadores distinto, el orden empleado en la resolución de los subproblemas afecta a los resultados que se obtienen en cada iteración. En el algoritmo que se describe en este apartado se ha elegido resolver en primer lugar los subproblemas térmicos (en el mismo orden en que aparecen los datos de las centrales térmicas en el fichero de entrada correspondiente) y a continuación los subproblemas hidráulicos (en el mismo orden en que aparecen los datos de las cuencas hidráulicas en el fichero correspondiente).

El vector $s'(\nu)$ (ecuación (6.18)) se calcula de la siguiente forma:

$$s'(\nu) = (h'(\theta(\nu, p)), g'(\theta(\nu, p))) \quad (6.20)$$

donde ν es el contador de iteraciones y p es el contador de subiteraciones o subproblemas.

Si p es menor que el número de centrales térmicas (J):

$$h'(\nu, p) = H - \sum_{j=1}^p h_j(\mathcal{X}_j(\nu)) - \sum_{j=p+1}^J h_j(\mathcal{X}_j(\nu - 1)) - \sum_{i=1}^I h_i(\mathcal{Y}_i(\nu - 1)) \quad (6.21)$$

$$g'(\nu, p) = G - \sum_{j=1}^p g_j(\mathcal{X}_j(\nu)) - \sum_{j=p+1}^J g_j(\mathcal{X}_j(\nu - 1)) - \sum_{i=1}^I g_i(\mathcal{Y}_i(\nu - 1)) \quad (6.22)$$

y si p es mayor que el número de centrales térmicas (J):

$$h'(\nu, p) = H - \sum_{j=1}^J h_j(\mathcal{X}_j(\nu)) - \sum_{i=1}^p h_i(\mathcal{Y}_i(\nu)) - \sum_{i=p+1}^I h_i(\mathcal{Y}_i(\nu-1)) \quad (6.23)$$

$$g'(\nu, p) = G - \sum_{j=1}^J g_j(\mathcal{X}_j(\nu)) - \sum_{i=1}^p g_i(\mathcal{Y}_i(\nu)) - \sum_{i=p+1}^I g_i(\mathcal{Y}_i(\nu-1)) \quad (6.24)$$

donde $\mathcal{X}_j(\nu)$ y $\mathcal{X}_j(\nu-1)$ son los vectores que contienen los valores óptimos de las variables asociadas a la central térmica j en las iteraciones ν e $\nu-1$ respectivamente e, $\mathcal{Y}_i(\nu)$ e $\mathcal{Y}_i(\nu-1)$ son los vectores que contienen los valores óptimos de las variables asociadas a la cuenca hidráulica i en las iteraciones ν e $\nu-1$ respectivamente.

El método del subgradiente modificado que se describe en este documento sigue la idea general propuesta en [58] pero con otra elección del tamaño del paso. El tamaño del paso elegido es el mismo que el empleado en el *Algoritmo SG* (ecuación 6.16).

El algoritmo del método del subgradiente modificado es el siguiente:

Algoritmo SGM

Paso 1 Inicialización del vector de multiplicadores.

Paso 2 Desde $p = 1$ hasta P , hacer:

Resolución del subproblema p y actualización del vector de multiplicadores $\theta(\nu+1, p)$ de la siguiente forma:

$$\theta(\nu, p+1) = \theta(\nu, p) + k(\nu) \frac{s'(\nu)}{|s'(\nu)|} \quad (6.25)$$

$$\text{siendo } k(\nu) = \frac{1}{m+n \times \nu} \quad (6.26)$$

donde $s'(\nu, p)$ se calcula según las ecuaciones (6.20)-(6.24) y P es el número total de subproblemas (que es igual a la suma del número de centrales térmicas y el número de cuencas hidráulicas).

Paso 3 Asignación de nuevos valores para el vector de multiplicadores de la próxima iteración:

$$\theta(\nu+1, 1) = \theta(\nu, P+1) \quad (6.27)$$

Paso 4 Si se cumple el criterio de convergencia finaliza el proceso. En caso contrario se va al paso 2.

Nótese que el algoritmo anterior no sigue el esquema general de resolución del problema dual *PD_BÁSICO* (apartado 6.4).

Es importante destacar que el vector $s'(\nu)$ no es ningún subgradiente de la función dual y por ello la actualización del vector de multiplicadores que se lleva a cabo en el método del subgradiente modificado (ecuación (6.25)) no es en la dirección del subgradiente de la función dual $\phi(\theta)$ sino en la dirección de una función que supuestamente [58] converge asintóticamente al óptimo de la función dual pero que, estrictamente hablando, no es la función dual.

Respecto a los criterios de convergencia se aplican los mismos que en el método del subgradiente tradicional.

El inconveniente de este método es que la resolución de los subproblemas ha de ser secuencial y por ello se pierde la posibilidad de aplicar técnicas de computación paralela, que es una de las ventajas de la resolución del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo mediante relajación lagrangiana. Para mantener la posibilidad de resolución paralela se puede modificar ligeramente el procedimiento de resolución como se explica a continuación. Si en lugar de resolver cada subproblema con un valor del vector de multiplicadores distinto, se agrupan los subproblemas en conjuntos que contengan un número de subproblemas menor que el número de procesadores de la máquina a emplear, entonces los subproblemas del mismo grupo se pueden resolver de forma paralela (cada uno en un procesador diferente) con el mismo valor del vector de multiplicadores y, una vez finalizada la resolución de todos los subproblemas de un grupo, se actualiza el vector de multiplicadores y así el siguiente grupo de subproblemas recibe como entrada un nuevo vector de multiplicadores con la información más reciente.

Dado que este método proporciona peores resultados que los procedimientos de actualización de multiplicadores basados en el método de los hiperplanos secantes que se describen en este capítulo, no se incluyen en esta tesis resultados computacionales de la aplicación del método del subgradiente modificado al problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo.

6.7 Métodos de actualización de multiplicadores con memoria

Los métodos de actualización de multiplicadores con memoria utilizan en cada iteración del algoritmo de resolución del problema dual, el *Algoritmo PD_BÁSICO* (apartado 6.4), no sólo la información obtenida de la resolución del problema primal relajado en esa iteración (el valor de la función dual para el valor del vector de multiplicadores de la iteración en curso y un subgradiente en ese punto) sino también la información conseguida en iteraciones anteriores. Por eso se les llama métodos de actualización de multiplicadores con memoria.

Como ya se ha indicado existen dos tipos de métodos de actualización de multiplicadores con memoria. El primer tipo se basa en el método del subgradiente. A este tipo de técnicas se les llama formas duales de los *Bundle Methods*. Debido a los inconvenientes que presentan este tipo de métodos, que se indican en el apartado 6.7.1, no se han aplicado estas técnicas en este trabajo de investigación. No obstante el método se introduce en el apartado 6.7.1. En [91] (capítulo VII) y [116] (capítulo XII) se introduce este tipo de métodos; mayor grado de profundidad puede encontrarse en [54]. En [78] se presenta una aplicación de las formas duales de los *Bundle Methods* al problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo.

El segundo grupo de técnicas de actualización de multiplicadores con memoria se basa en el método de los hiperplanos secantes. El método de los hiperplanos secantes es un método general de optimización de funciones convexas no diferenciables que se apoya en la reconstrucción mediante hiperplanos de la función no diferenciable a resolver para encontrar el óptimo de dicha función.

Los métodos de actualización de multiplicadores con memoria basados en el método de los hiperplanos secantes se fundamentan en la definición de una función lineal a tramos que envuelve exteriormente a la función dual. Este modelo linealizado de la función dual se enriquece en cada iteración de forma que a medida que se incrementa el contador de iteraciones la función lineal a tramos se aproxima más a la función dual.

Los métodos de actualización de multiplicadores con memoria basados en el método de los hiperplanos secantes, en el paso 3 de cada iteración del *Algoritmo PD_BÁSICO* (apartado 6.4), resuelven un problema de optimización de una función dual aproximada. A este problema de optimización lo llamaremos *Problema Dual Relajado (PDR)* por tratarse de una aproximación del problema dual. La solución óptima del problema dual relajado de cada iteración es el valor del vector de multiplicadores para la siguiente iteración del *Algoritmo PD_BÁSICO* (apartado 6.4).

En este apartado se describen cuatro tipos de métodos de actualización de multiplicadores:

- Métodos basados en las formas duales de los *Bundle Methods* (apartado 6.7.1).
- Métodos de los hiperplanos secantes (apartado 6.7.2).
- Métodos de los hiperplanos secantes con penalización, o bien, formas primales de los *Bundle Methods* (apartado 6.7.3).
- Método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos (apartado 6.7.4).

- Método de los hiperplanos secantes con penalización, control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos (apartado 6.7.5).

En el apartado 6.7.1 se describen brevemente los métodos basados en las formas duales de los *Bundle Methods* [54], [91] (capítulo VII), [116] (capítulo XII) y [78].

El apartado 6.7.2 comienza con la descripción del método de los hiperplanos secantes de la forma como aparece en la literatura matemática [60], [100], [91] (capítulo VII), [9] [54] y se indican los inconvenientes de este método: el aumento en cada iteración de la complejidad computacional del problema dual relajado y la excesiva inestabilidad en la búsqueda de la solución óptima del problema dual. A continuación se propone una modificación a este procedimiento general resultando el método de los hiperplanos secantes con límite máximo al número hiperplanos. Así se resuelve el inconveniente del aumento de la complejidad computacional, en cada iteración, del método general de los hiperplanos secantes. El procedimiento empleado para mantener acotado el tamaño del problema dual relajado es simple y por ello eficiente computacionalmente. No se ha encontrado en la literatura ningún método similar a este, aunque en la literatura matemática sí aparecen procedimientos más complejos que persiguen este mismo objetivo [62], [31].

El método de los hiperplanos secantes con penalización es la más habitual de las formas primales de los *Bundle Methods*. En la primera parte del apartado 6.7.3 se describe este método tal y como aparece en la literatura matemática [91] (capítulo VII), [116] (capítulo XII), [54]. Este método trata de solucionar el problema de la excesiva inestabilidad del método de los hiperplanos secantes añadiendo un término de penalización cuadrática a la función objetivo del problema dual relajado que se formula en el método de los hiperplanos secantes. De esta forma se disminuyen las oscilaciones que se producen al aplicar el método de los hiperplanos secantes. Sin embargo, este método mantiene el inconveniente del tamaño creciente del problema dual relajado del método de los hiperplanos secantes. Para solucionar este inconveniente, y aplicando la misma idea propuesta en el apartado 6.7.2, se presenta el método de los hiperplanos secantes con penalización y con límite máximo al número de hiperplanos en la segunda parte del apartado 6.7.3.

El método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos (apartado 6.7.4), que se propone en esta tesis [68], trata de solucionar el problema de excesiva inestabilidad del método de los hiperplanos secantes modificando en cada iteración la región de factibilidad del problema dual relajado. Este método aprovecha la facilidad con que se puede definir la región de factibilidad del problema dual: simplemente un intervalo de la recta real para cada componente del vector de multiplicadores. No se ha encontrado en la literatura (ni matemática ni de sistemas de energía eléctrica) ningún

método de optimización de funciones no diferenciables que utilice ideas similares. Para evitar el inconveniente del tamaño creciente del problema utiliza la misma idea presentada en 6.7.2 (original de este trabajo de investigación).

En el apartado 6.7.5 se presenta un método híbrido (método de los hiperplanos secantes con penalización, control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos), también original de esta tesis, que para superar el inconveniente de la excesiva inestabilidad del método de los hiperplanos secantes combina la variación dinámica de la región de factibilidad, descrita en el apartado 6.7.4, con las penalizaciones cuadráticas descritas en el 6.7.3. Para mantener acotado el tamaño del problema dual relajado emplea la misma idea presentada en 6.7.2.

6.7.1 Formas duales de los *Bundle Methods*

Las formas duales de los *Bundle Methods* son métodos que utilizan en cada iteración no sólo la información obtenida de la iteración actual (valor de la función dual y un subgradiente) sino también la información conseguida en iteraciones anteriores. Se trata de métodos que buscan el camino hacia el óptimo empleando las direcciones definidas por ε -subgradientes.

Un subgradiente representa un hiperplano tangente a la función en el punto considerado. Proporciona, por tanto, una información local de la función a la que se refiere. Un ε -subgradiente, sin embargo, representa un hiperplano que sobrestima (en el caso de que la función analizada sea concava) a la función y que, en el punto considerado, está a una distancia ε de la misma. En este sentido, un ε -subgradiente suministra una información más global ya que, al “alejarse” una pequeña distancia ε de la función, suministra información de la forma de la misma no sólo válida en el punto considerado sino también en un entorno de este punto.

Además las formas duales de los *Bundle Methods* aprovechan el hecho de que un subgradiente de la función en un punto representa un ε -subgradiente de la función en otro punto. Aplicando esta idea al problema de optimización de la función dual, un subgradiente obtenido de la resolución del problema primal relajado en cierta iteración (y por tanto para cierto valor del vector de multiplicadores), es un ε -subgradiente de la función dual en el punto definido por el vector de multiplicadores de una iteración posterior.

En cada iteración ν del algoritmo, las formas duales de los *Bundle Methods* calculan la distancia entre el valor del hiperplano tangente a la función dual en la iteración i (esto es, el subgradiente de la función dual para el valor del vector de multiplicadores de la iteración i) y la función dual en la iteración actual ν (siendo $\nu > i$). Esta distancia o residuo ε_i se calcula de la siguiente

forma:

$$\epsilon_i = \phi(\theta(i)) + s(i)^T (\theta(\nu) - \theta(i)) - \phi(\theta(\nu)) \quad (6.28)$$

Así, el subgradiente obtenido de la resolución del problema primal relajado en la iteración i , es un ϵ_i -subgradiente de la función dual en la iteración actual ν , $\nu > i$.

Al igual que las formas primales (apartado 6.7.3), las formas duales de los *Bundle Methods* definen un vector $\Theta(\nu)$ ¹, que actualizan en cada iteración, en el que almacenan el que se considera mejor valor del vector de multiplicadores obtenido hasta la iteración ν . En [54] se define el criterio que decide qué valor del vector de multiplicadores se debe elegir entre dos opciones posibles.

Las formas duales de los *Bundle Methods* calculan una dirección de avance en cada iteración ν , que es la mejor combinación lineal de los ϵ -subgradientes disponibles de la función dual en esa iteración ν . Elegidos, a través de la resolución de un problema de optimización, los coeficientes de esta combinación lineal, queda determinada la dirección de avance. Entonces se elige el tamaño del paso a avanzar, desde $\Theta(\nu)$, en la dirección seleccionada. La elección del tamaño del paso se lleva a cabo a través de un proceso iterativo [54]. Entonces, si con el nuevo valor del vector de multiplicadores, en la iteración siguiente $\nu + 1$ y una vez resuelto el problema primal relajado, la mejora conseguida en el valor de la función dual es suficientemente buena, entonces se actualiza el valor de Θ al valor del vector de multiplicadores con el que se ha resuelto el problema primal relajado en la iteración $\nu + 1$ y se declara *paso de ascenso*. En caso contrario se declara *paso nulo* y el valor de Θ se mantiene igual al valor de la iteración anterior (esto es $\Theta(\nu + 1) = \Theta(\nu)$).

El algoritmo del método es el siguiente:

Algoritmo DBD

- Paso 1 Definición del parámetro de control ϵ . Inicialización del contador de iteraciones ν a 1. Inicialización del vector de multiplicadores θ para la primera iteración.
- Paso 2 Resolución del problema primal relajado (PPR), esto es, resolución de un subproblema por cada central térmica y un subproblema por cada cuenca hidráulica.
- Paso 3 3a Si $\nu = 1$ se va al paso 3b. En caso contrario se analiza si con el valor del vector de multiplicadores de la iteración actual $\theta(\nu)$ ha mejorado de forma significativa el valor de la función dual. Si es así, entonces se modifica el valor de Θ , es decir: $\Theta(\nu) = \theta(\nu)$. En caso contrario: $\Theta(\nu) = \Theta(\nu - 1)$.

¹En las formas duales de los *Bundle Methods* no se le da ningún nombre particular a este vector. En las formas primales de los *Bundle Methods* (apartado 6.7.3), al vector Θ se le llama centro de gravedad o centro de estabilidad.

3b Cálculo de la dirección de avance: $\hat{s}(\nu)$ de la siguiente forma:

$$\hat{s}(\nu) = \sum_{i=1}^{\nu} \gamma_i^* s(i) \quad (6.29)$$

donde γ_i^* son las variables que optimizan el problema de optimización que se plantea a continuación.

$$\text{Minimizar}_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\nu} \quad \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^{\nu} \gamma_i s(i) \right|^2 \quad (6.30)$$

sueto a

$$\gamma_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, \nu \quad (6.31)$$

$$\sum_{i=1}^{\nu} \gamma_i = 1 \quad (6.32)$$

$$\sum_{i=1}^{\nu} \gamma_i \varepsilon_i \leq \varepsilon \quad (6.33)$$

siendo $s(i)$ el subgradiente de la función dual calculado en la iteración i (o bien, el hiperplano tangente a la función dual para el valor del vector de multiplicadores de la iteración i), y ε_i el residuo asociado a este hiperplano (evaluado mediante la ecuación (6.28)).

Paso 4 Si $|\hat{s}(\nu)|$ es suficientemente pequeño entonces, finaliza el proceso o bien se reduce el valor del parámetro de control ε y se vuelve al paso 3b. En caso contrario se actualiza el vector de multiplicadores de forma que:

$$\theta(\nu + 1) = \Theta(\nu) + t\hat{s}(\nu) \quad (6.34)$$

donde el tamaño del paso t en la dirección de avance $\hat{s}(\nu)$ se elige, por medio de un proceso iterativo, de forma que se maximice el ascenso conseguido en la función dual.

Este método no ha sido estudiado en detalle ni analizado en este trabajo de investigación. En [54] se indican los inconvenientes de las formas duales de los *Bundle Methods*, de forma que los autores de [54] se inclinan por las formas primales de estos métodos (apartado 6.7.3).

En [78] puede encontrarse una aplicación de las formas duales de los *Bundle Methods* a la resolución del problema dual del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo.

Los principales inconvenientes de las formas duales de los *Bundle Methods* son los siguientes:

- Como se indica en [54], el elemento clave de la eficiencia de este tipo de métodos es la elección adecuada del parámetro de control ε . La elección de este parámetro no es fácil. En el capítulo XIV de [54] se hacen algunas consideraciones acerca del papel de este parámetro en el comportamiento del algoritmo.

- La elección del tamaño del paso t en la dirección de avance $\hat{s}(\nu)$ puede ser costosa computacionalmente, ya que es un proceso iterativo que hay que ejecutar en cada iteración del algoritmo. Para que este proceso sea eficiente hay que ajustar de forma adecuada ciertos parámetros.
- Las formas duales de los *Bundle Methods* no permiten establecer medidas indicativas de la calidad de la solución encontrada. Esta es una gran desventaja de estos métodos con respecto a los métodos de actualización de multiplicadores basados en el método de los hiperplanos secantes.
- Por tratarse de un método próximo al subgradiente, no está claro que las formas duales de los *Bundle Methods* no sean oscilantes. En [78] se muestra el comportamiento no oscilante de un método basado en las formas duales de los *Bundle Methods* al aplicarlo a un ejemplo de coordinación hidrotérmica en el corto plazo de muy pequeña dimensión (dos centrales térmicas y dos subperiodos). En una discusión a este artículo [69] se pregunta si el método se comporta de forma no oscilatoria en un caso de gran dimensión. Los autores de [78] responden que el método propuesto se comporta mejor que el método del subgradiente pero no proporcionan ninguna gráfica en la que se observe la evolución de la función dual.

6.7.2 Método de los hiperplanos secantes

Método de los hiperplanos secantes. Descripción general

El método de los hiperplanos secantes es un método general empleado en la optimización de funciones no diferenciables [60], [100], [91] (capítulo VII), [9] [54]. En este apartado se explica el funcionamiento del método cuando se aplica a la resolución del problema dual del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo. La extensión del método a la resolución de cualquier problema de optimización no diferenciable es inmediata. El único requisito que se exige para la aplicación de este método a un problema general de optimización de una función convexa (o cóncava) no diferenciable $f(x)$ es que pueda obtenerse, en cada iteración, el valor de la función dual en un punto $x(\nu)$ y un subgradiente ese punto.

La resolución del problema dual del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo mediante el método de los hiperplanos secantes se basa en la reconstrucción mediante hiperplanos de la función dual, esto es, en la definición de una aproximación lineal a tramos de la función dual y en la resolución del problema de optimización de dicha función dual aproximada y lineal a tramos.

En cada iteración del *Algoritmo PD_BÁSICO* (apartado 6.4) y con la información obtenida de

la resolución del problema primal relajado (el valor de la función dual, para el valor del vector de multiplicadores de la iteración en curso $\theta(\nu)$, $\phi(\theta(\nu))$, y un subgradiente en ese punto $s(\nu)$) se define un hiperplano tangente a la función dual en ese punto (es decir en el punto definido por la coordenada $(\theta(\nu), \phi(\theta(\nu)))$). Con cada iteración se obtiene un nuevo hiperplano tangente y así la aproximación a la función dual se hace más exacta de iteración en iteración.

Así en la iteración ν la aproximación a la función dual es la siguiente función lineal a tramos:

$$\hat{\phi}(\theta(\nu)) \equiv \text{Minimo}\{\phi(\theta(i)) + s(i)^T (\theta - \theta(i)) \quad i = 1, \dots, \nu\} \quad (6.35)$$

La función $\hat{\phi}(\theta(\nu))$ sobrestima a la verdadera función dual $\phi(\theta)$ y coincide con ella en cada punto $(\theta(\nu), \phi(\theta(\nu)))$. Es decir:

$$\hat{\phi}(\theta(\nu)) \geq \phi(\theta) \quad (6.36)$$

$$\hat{\phi}(\theta(i)) = \phi(\theta(i)) \quad \text{para } i = 1, \dots, \nu \quad (6.37)$$

Además, en cada iteración, la aproximación a la función dual se acerca más a la función real:

$$\hat{\phi}(\theta(\nu)) \leq \hat{\phi}(\theta(\nu - 1)) \quad (6.38)$$

En cada iteración del algoritmo *Algoritmo PD_BÁSICO* (apartado 6.4), el vector de multiplicadores actualizado es el vector θ que maximiza la función dual aproximada en la iteración ν , $\hat{\phi}(\theta(\nu))$ (ecuación (6.35)). Esto es:

$$\theta(\nu + 1) = \text{Argmax}_{\theta \in C} \hat{\phi}(\theta(\nu)) \quad (6.39)$$

donde C representa la región de factibilidad. Para que el método de los hiperplanos secantes converja, el problema dual relajado debe estar definido sobre un conjunto C convexo y compacto que además deberá ser lo suficientemente grande como para poder garantizar que contiene a la solución óptima del problema dual.

La región de factibilidad para el problema dual del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo se define de forma muy simple: un intervalo por cada componente del vector de multiplicadores. Se deben escoger intervalos lo suficientemente grandes como para garantizar que la solución del problema dual está contenida en el dominio de definición del problema dual relajado.

El algoritmo de resolución del problema dual utilizando el método de los hiperplanos secantes es el siguiente:

Algoritmo HPS

- Paso 1 Definición de la región de factibilidad o dominio de definición del vector de multiplicadores. El vector de multiplicadores para la primera iteración se hace igual al vector límite inferior (o límite superior) del dominio de definición o a cualquier punto intermedio.
- Paso 2 Resolución del problema primal relajado (PPR), esto es, resolución de un subproblema por cada central térmica y un subproblema por cada cuanca hidráulica.
- Paso 3 Con la información obtenida de la resolución del PPR se añade un nuevo hiperplano al modelo aproximado y lineal a tramos del problema dual, y se resuelve el problema dual relajado (linealizado a tramos):

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximizar}_{z, \theta \in C} \quad z \\
 &\text{sujeto a} \\
 &\quad z \leq \phi(\theta(i)) + s(i)^T (\theta - \theta(i)) \quad i = 1, \dots, \nu
 \end{aligned} \tag{6.40}$$

- Paso 4 Si se cumple el criterio de convergencia finaliza el proceso. En caso contrario se incrementa el contador de iteraciones y se actualiza el vector de multiplicadores con el vector de multiplicadores que optimiza el anterior problema de programación lineal.

La figura 6.3 muestra el funcionamiento del método suponiendo que el vector de multiplicadores sólo tiene una única componente. Se inicia el algoritmo en la primera iteración con el valor θ_1 para el vector de multiplicadores (que es el límite inferior de la región de factibilidad). Con este valor se resuelve el problema primal relajado. De la resolución del problema primal relajado se obtiene el valor de la función dual para θ_1 , $\phi(\theta_1)$, y un subgradiente en ese punto s_1 . Con esta información se define un primer hiperplano tangente r_1 a la función dual en el punto $(\theta_1, \phi(\theta_1))$ y así en la primera iteración se resuelve el problema de hallar el valor máximo del hiperplano r_1 sujeto a encontrarse en la región de factibilidad definida por el intervalo (un único intervalo ya que se tiene un único multiplicador) de variación del multiplicador, C . El límite superior del vector de multiplicadores es invariablemente el valor que maximiza el problema dual relajado de la primera iteración θ_2 , si, como ocurre en la figura 6.3, el valor inicial del vector de multiplicadores es el límite inferior del dominio de definición C . En la segunda iteración se resuelve el problema primal relajado para θ_2 y de la resolución de este problema se obtiene el valor de la función dual $\phi(\theta_2)$ y un subgradiente en ese punto s_2 . Con $\phi(\theta_2)$ y s_2 se define un nuevo hiperplano r_2 tangente a la función dual en el punto $(\theta_2, \phi(\theta_2))$ y en la segunda iteración el problema dual relajado a resolver es el problema de maximizar la función definida por los hiperplanos r_1 y r_2 . La solución es θ_3 . Con θ_3 se ejecuta otra iteración: se resuelve el problema

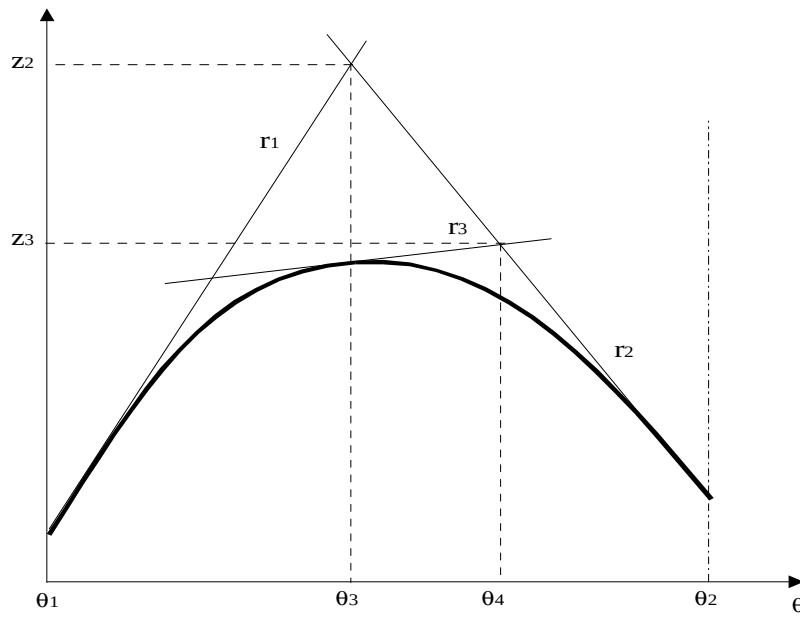


Figura 6.3: El método de los hiperplanos secantes

primal relajado, se define un nuevo hiperplano tangente a la función dual r_3 y se resuelve el problema de maximizar la función lineal a tramos definida por los hiperplanos r_1 , r_2 y r_3 . La solución es θ_4 . El proceso continua de esta forma hasta alcanzar la convergencia.

En la figura 6.3 se puede comprobar que la aproximación lineal a tramos envuelve exteriormente a la función dual y que, a medida que aumenta el contador de iteraciones el número de hiperplanos tangentes a la función dual (o restricciones del problema dual relajado) aumenta.

Como el método de los hiperplanos secantes, y todos los métodos que se derivan de él, se basa en la definición de una función lineal a tramos que envuelve exteriormente al problema dual, presenta una ventaja fundamental respecto a los métodos basados en técnicas de subgradiente: es posible definir una medida de la calidad de la solución obtenida y por tanto se puede establecer un buen criterio de parada.

El índice de calidad de la solución alcanzada se define como la distancia relativa entre el máximo de la función dual aproximada y el valor de la función dual en cada iteración. El algoritmo finalizará cuando se alcance una iteración en que el índice de calidad sea suficientemente bueno (o lo que es lo mismo, cuando la aproximación lineal a tramos de la función dual se aproxime suficientemente bien a la función dual). El algoritmo finalizará cuando se alcance una iteración ν en la que se cumpla que:

$$\frac{z - \phi(\theta(\nu))}{\phi(\theta(\nu))} \leq \varepsilon \quad (6.41)$$

donde ε es un parámetro definido a priori.

El método de los hiperplanos secantes se basa en la resolución de un problema de programación lineal (con las ventajas en cuanto a facilidad de resolución que ello conlleva). El número de restricciones es igual al número de iteraciones y por tanto la complejidad del problema a resolver en cada iteración aumenta. Esto puede llegar a provocar un tiempo de cálculo apreciable ya que la matriz de restricciones que define el problema es muy densa. Existen optimizadores comerciales que resuelven de forma muy eficiente problemas de programación lineal definidos por matrices cuasi-vacías pero que resultan menos eficaces cuando se enfrentan a problemas definidos por matrices muy densas.

Para mantener acotado el tamaño (y por tanto la complejidad y el tiempo de cálculo) del problema dual relajado a resolver en cada iteración, se propone una modificación al método de los hiperplanos secantes en la que se define un número máximo de hiperplanos y se desechan aquellos hiperplanos no activos que más se alejen de la función dual. En la segunda parte de este apartado se describe esta modificación. Todos los demás métodos de actualización de multiplicadores que se describen en este capítulo se basan en el método de los hiperplanos secantes con límite máximo al número de hiperplanos.

El método de los hiperplanos secantes es oscilante. Esta es la principal crítica que se hace a este método. De forma invariable, en la segunda iteración, el vector de multiplicadores será igual al vector que defina los límites superiores o los límites inferiores de los intervalos de definición de los multiplicadores. Durante las primeras iteraciones los saltos de las oscilaciones son muy grandes y tanto más grandes cuanto mayor sea el dominio de definición del vector de multiplicadores. Por otra parte para garantizar que el método encuentre la solución del problema dual, el dominio de definición debe ser suficientemente grande. Así, empleando este método, en una iteración se puede estar muy cerca de la solución del problema y en la iteración siguiente saltar a un valor muy alejado de la misma. Puede observarse en la figura 6.3 que en la tercera iteración se ha llegado muy cerca de la solución (θ_3 se encuentra próxima a la solución) y en la iteración siguiente se ha saltado a un valor alejado (θ_4 se ha alejado de la solución).

Los métodos de los hiperplanos secantes con penalización o formas primales de los *Bundle Methods* (apartado 6.7.3), el método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos (apartado 6.7.4) y el método híbrido de los hiperplanos secantes con penalización, con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos (apartado 6.7.5) tratan de resolver este inconveniente de excesiva inestabilidad.

El método de los hiperplanos secantes con límite máximo al número de hiperplanos

Uno de los inconvenientes del método de los hiperplanos secantes es que el tamaño del problema dual relajado a resolver en el Paso 3 del *Algoritmo HPS* aumenta en cada iteración. Esto, unido al hecho de que la matriz de restricciones que define el problema dual relajado es muy densa, provoca el que disminuya la eficiencia computacional del método ya que aumenta el tamaño del problema a resolver (siendo además algunas de las restricciones poco relevantes y por tanto se podría prescindir de ellas).

Para solventar este problema se ha modificado el *Algoritmo HPS* fijando un límite máximo al número de hiperplanos (o restricciones) a utilizar en la definición de la función dual aproximada y lineal a tramos de cada iteración. Así, en cada iteración del algoritmo de los hiperplanos secantes modificado se escogen los hiperplanos que más se acerquen al valor de la función dual para el valor del vector de multiplicadores de la iteración en curso. Por supuesto, el hiperplano resultante de la resolución del problema primal relajado de la iteración actual es tangente a la función dual para el valor del vector de multiplicadores de la iteración en curso y por tanto siempre forma parte del conjunto de restricciones del problema dual relajado de dicha iteración.

En este método se realiza una gestión de la información del problema dual acumulada a lo largo de las iteraciones ejecutadas. Esta información está contenida en lo que se llama *conjunto dinámico para el modelado de la función dual aproximada*. Cada elemento del conjunto dinámico representa un hiperplano secante a la función dual en algún punto, concretamente en el punto $(\theta(i), \phi(\theta(i)))$ y está formado por un valor del vector de multiplicadores $\theta(i)$, el valor de la función dual para ese valor del vector de multiplicadores $\phi(\theta(i)) = \phi(\theta(i))$ y un subgradiente en ese punto $s(i) = s(\theta(i))$.

El conjunto dinámico para el modelado de la función dual aproximada se actualiza en cada iteración, previamente a la resolución del problema dual relajado de esa iteración, partiendo del conjunto dinámico de la iteración precedente. Al número de elementos del conjunto dinámico se le llama n y al máximo número de elementos del conjunto dinámico (o de restricciones del problema dual relajado) se le denomina $\bar{n}$.

Mientras que el número de iteraciones ejecutadas sea menor que $\bar{n}$, en cada iteración del algoritmo se actualiza el conjunto dinámico añadiendo un nuevo hiperplano al conjunto dinámico de la iteración precedente.

En el momento en que el contador de iteraciones sea mayor que $\bar{n}$, el conjunto dinámico se actualiza de la siguiente forma. En primer lugar se calculan los residuos de los hiperplanos que forman parte del conjunto dinámico de la iteración precedente y se elimina el hiperplano

de mayor residuo que no haya estado activo en la resolución del problema dual relajado de la iteración anterior. A continuación se añade el hiperplano secante a la función dual para el valor del vector de multiplicadores de la iteración en curso. De esta forma el número de elementos del conjunto dinámico se mantiene constante e igual a $\bar{n}$.

El residuo ϵ_i (ecuación (6.28)) del hiperplano que ocupa la posición i en el conjunto dinámico para el modelado de la función dual es la distancia que existe desde el hiperplano i para el valor del vector de multiplicadores de la iteración en curso $\theta(\nu)$ hasta el valor de la función dual para ese mismo valor del vector de multiplicadores $\phi(\theta(\nu))$. Se vuelve a formular para mayor claridad en la exposición:

$$\epsilon_i = \phi(\theta(i)) + s(i)^T (\theta(\nu) - \theta(i)) - \phi(\theta(\nu)) \quad (6.42)$$

Los residuos son siempre positivos ya que la función dual aproximada sobreestima a la auténtica función dual.

Si ocurriera que siendo el contador de iteraciones mayor que $\bar{n}$, todos los hiperplanos del conjunto dinámico de la iteración precedente estuvieran activos, entonces se incrementaría en una unidad el número máximo de hiperplanos. En la práctica, si esto ocurriera significaría que el número máximo de hiperplanos fijado de antemano es demasiado pequeño. Como consecuencia de la poca información disponible para modelar el problema dual, el método necesitaría de un número elevado de iteraciones y por ello sería conveniente realizar una nueva ejecución aumentando el número máximo de hiperplanos $\bar{n}$.

Así, en este método de los hiperplanos secantes con número máximo de hiperplanos la función dual aproximada en cada iteración $\hat{\phi}(\theta(\nu))$ se define de la siguiente forma:

$$\hat{\phi}(\theta(\nu)) \equiv \text{Minimo} \{ \phi(\theta(i)) + s(i)^T (\theta - \theta(i)) \quad i = 1, \dots, n \quad n \leq \bar{n} \} \quad (6.43)$$

El algoritmo que resulta es el siguiente:

Algoritmo HPS-M

Paso 1 Definición de la región de factibilidad o dominio de definición del vector de multiplicadores.

El vector de multiplicadores para la primera iteración se hace igual al vector límite inferior (o límite superior) del dominio de definición o bien a cualquier valor intermedio. Se inicializa el contador de iteraciones a 1 ($\nu = 1$) y el número de elementos del conjunto dinámico para el modelado del problema dual a 0 ($n = 0$).

Paso 2 Resolución del problema primal relajado (PPR), esto es, resolución de un subproblema por cada central térmica y un subproblema por cada cuenca hidráulica.

Paso 3 3a Actualización del conjunto dinámico para el modelado del problema dual.

Si el contador de iteraciones es menor o igual que $\bar{n}$, se añade el hiperplano secante a la función dual para el valor del vector de multiplicadores de la iteración actual. A continuación se incrementa en 1 el número de elementos del conjunto dinámico y se va al paso 3b.

Si el contador de iteraciones es mayor que $\bar{n}$, se calculan los residuos de los hiperplanos que forman parte del conjunto dinámico de la iteración precedente (utilizando la ecuación (6.42)). A continuación se actualiza el conjunto dinámico partiendo del conjunto dinámico de la iteración anterior, eliminando el hiperplano no activo de mayor residuo y añadiendo el hiperplano secante a la función dual para el valor del vector de multiplicadores de la iteración en curso.

3b Resolución del problema dual relajado que se plantea:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar}_{z, \theta \in C} \quad z \\ &\text{sujeto a} \\ &z \leq \phi(\theta(i)) + s(i)^T (\theta - \theta(i)) \quad i = 1, \dots, n \quad n \leq \bar{n} \end{aligned} \quad (6.44)$$

siendo n el número de elementos (o hiperplanos) del conjunto dinámico para el modelado del problema dual y C la región de factibilidad (o intervalos de definición de los multiplicadores) que deberá ser lo suficientemente grande como para asegurar que contiene al valor que optimiza el problema dual.

Paso 4 Si se cumple el criterio de convergencia finaliza el proceso. En caso contrario se incrementa el contador de iteraciones y se actualiza el vector de multiplicadores con el vector de multiplicadores que optimiza el problema dual relajado que se resuelve en el paso 3b.

El algoritmo finalizará (criterio de convergencia) cuando la aproximación lineal a tramos de la función dual se aproxime suficientemente bien a la función dual), esto es cuando se cumpla que:

$$\frac{z - \phi(\theta(\nu))}{\phi(\theta(\nu))} \leq \varepsilon \quad (6.45)$$

donde ε es un parámetro definido a priori.

6.7.3 Método de los hiperplanos secantes con penalizaciones cuadráticas (o forma primal de los *Bundle Methods*)

El método de los hiperplanos secantes con penalización. Descripción general

El método de los hiperplanos secantes con penalización fue introducido por el grupo de Lemarechal [91] (capítulo VII), [116] (capítulo XII), [54] con el nombre de *formas primales de los Bundle Methods*. Este método trata de superar el comportamiento inestable del método de los hiperplanos secantes. Para ello modifica el método de los hiperplanos secantes introduciendo penalizaciones en la función objetivo que guíen el camino hacia el óptimo.

La idea clave de este método es la definición de un *centro de estabilidad* o *centro de gravedad*, $\Theta(\nu)$, que se actualiza en cada iteración. El centro de estabilidad en la iteración ν contiene el valor del vector de multiplicadores con el que se obtiene la que se considera mejor solución hasta la iteración ν . Es importante destacar que el centro de estabilidad no tiene por qué coincidir con el valor del vector de multiplicadores con el que se consigue mayor valor de la función dual. O dicho de otra forma, aunque en cierta iteración el valor del vector de multiplicadores $\theta(\nu)$ produzca un valor de la función dual $\phi(\theta(\nu))$ mayor que el que se obtiene con el centro de estabilidad de la iteración anterior, $\phi(\Theta(\nu - 1))$, solamente si la mejora conseguida ha sido suficientemente significativa el centro de estabilidad de la iteración en curso se hará igual a $\theta(\nu)$. Para evaluar la bondad de la mejora conseguida se define un *crecimiento nominal* $\delta(\nu)$ que se calcula en cada iteración.

El procedimiento es el siguiente. En cada iteración se resuelve el problema primal relajado para el valor del vector de multiplicadores $\theta(\nu)$. Como resultado de este problema se obtiene el valor de la función dual, $\phi(\theta(\nu))$ (ecuación (6.5)), y un subgradiente en ese punto, $s(\nu)$ (ecuaciones (6.9)-(6.11)). Luego se actualiza el centro de estabilidad $\Theta(\nu)$ analizando si la diferencia entre el valor de la función dual en la iteración actual y el valor de la función dual para el centro de estabilidad de la iteración anterior es al menos mayor que un porcentaje definido a priori del crecimiento nominal calculado en la iteración anterior, $\delta(\nu - 1)$.

A continuación se añade un nuevo hiperplano a la función dual aproximada y linealizada a tramos $\hat{\phi}(\theta(\nu))$ definida en el apartado 6.7.2 y se resuelve el problema de maximización de dicha función introduciendo un término de penalización cuadrática por alejarse del centro de estabilidad, es decir se resuelve el siguiente problema de optimización (problema dual relajado):

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar}_{z, \theta \in C} \quad z - \alpha |\theta - \Theta(\nu)|^2 \\ &\text{sujeto a} \\ &\quad z \leq \phi(\theta(i)) + s(i)^T (\theta - \theta(i)) \quad i = 1, \dots, \nu \end{aligned} \tag{6.46}$$

donde α es una constante de penalización y $|\cdot|$ representa la norma euclídea. Con los resultados de este problema de optimización se calcula el crecimiento nominal $\delta(\nu)$ (que será útil en la actualización del centro de estabilidad de la iteración siguiente) y se ejecuta otra iteración con el valor del vector de multiplicadores que optimiza el problema dual relajado definido arriba (ecuaciones (6.46)), hasta que el proceso converja.

El centro de estabilidad se actualiza en cada iteración de la siguiente forma. Si

$$\phi(\theta(\nu)) - \phi(\Theta(\nu - 1)) \geq m \delta(\nu - 1) \quad (6.47)$$

donde m es un parámetro definido a priori ($0 \leq m \leq 1$), entonces se modifica el centro de estabilidad de forma que:

$$\Theta(\nu) = \theta(\nu) \quad (6.48)$$

y se dice que se ha dado un *paso de ascenso* ya que con el nuevo valor del vector de multiplicadores se ha conseguido un mayor valor de la función dual y la mejora conseguida ha sido significativa.

En caso contrario se mantiene el centro de estabilidad de la iteración anterior:

$$\Theta(\nu) = \Theta(\nu - 1) \quad (6.49)$$

y se dice que se ha dado un *paso nulo* ya que con el nuevo valor del vector de multiplicadores no se ha conseguido un incremento significativo (e incluso puede que haya sido un decremento) del valor de la función dual.

Llamaremos $\Phi(\nu)$ a la función que almacena el valor de la función dual para el valor del vector de multiplicadores θ igual al valor del centro de estabilidad de cada iteración. Es decir:

$$\Phi(\nu) = \phi(\Theta(\nu)) \quad (6.50)$$

La función $\Phi(\nu)$ es monótona creciente ya que en cada iteración su valor aumenta (si se modifica el centro de estabilidad, en cuyo caso se ha dado un *paso de ascenso*) o permanece igual (si se mantiene el centro de estabilidad de la iteración anterior, en cuyo caso se ha dado un *paso nulo*). A medida que avanza el proceso, el centro de estabilidad se aproxima al valor del vector de multiplicadores que optimiza el problema dual y la función $\Phi(\nu)$ al valor óptimo de la función objetivo del problema dual.

El crecimiento nominal $\delta(\nu)$ se calcula en cada iteración tras la resolución del problema dual relajado como la distancia entre el valor de la función objetivo del problema dual relajado y el

valor de la función dual, es decir:

$$\delta(\nu) = z^*(\nu) - \alpha|\theta^* - \Theta(\nu)|^2 - \phi(\theta(\nu)) \quad (6.51)$$

donde $z^*(\nu)$ y θ^* son las variables óptimas del problema dual relajado (ecuaciones (6.46))

El algoritmo del método de los hiperplanos secantes con penalización [91] (capítulo VII), [116] (capítulo XII), [54] es pues el siguiente:

(*Algoritmo HPS-P*)

Paso 1 Definición de la región de factibilidad o dominio de definición del vector de multiplicadores.

El vector de multiplicadores para la primera iteración se hace igual al vector límite inferior (o límite superior) del dominio de definición o a cualquier valor intermedio. Se inicializa el contador de iteraciones ν a 1.

Paso 2 Resolución del problema primal relajado (PPR), esto es, resolución de un subproblema por cada central térmica y un subproblema por cada cuenca hidráulica.

Paso 3 3a Actualización del centro de estabilidad $\Theta(\nu)$.

Si $\nu = 1$, entonces el centro de estabilidad es igual al valor inicial del vector de multiplicadores.

Si $\nu \geq 2$ y si

$$\phi(\theta(\nu)) - \phi(\Theta(\nu - 1)) \geq m\delta(\nu - 1) \quad 0 \leq m \leq 1, \quad (6.52)$$

entonces

$$\Theta(\nu) = \theta(\nu). \quad (6.53)$$

En otro caso

$$\Theta(\nu) = \Theta(\nu - 1). \quad (6.54)$$

3b Resolución del problema dual relajado que se plantea:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar}_{z, \theta \in C} \quad z - \alpha|\theta - \Theta(\nu)|^2 \\ &\text{sujeto a} \\ &\quad z \leq \phi(\theta(i)) + s(i)^T (\theta - \theta(i)) \quad i = 1, \dots, \nu \end{aligned} \quad (6.55)$$

3c Cálculo del crecimiento nominal:

$$\delta(\nu) = z^*(\nu) - \alpha|\theta^* - \Theta(\nu)|^2 - \phi(\theta(\nu)) \quad (6.56)$$

donde $z^*(\nu)$ y θ^* son las variables óptimas del problema dual relajado (ecuaciones (6.55))

Paso 4 Si se cumple el criterio de convergencia finaliza el proceso. En caso contrario se incrementa el contador de iteraciones y se actualiza el vector de multiplicadores con el vector de multiplicadores que optimiza el problema dual relajado que se resuelve en el paso 3b.

Una de las mayores dificultades en la aplicación de este método es la elección de la constante de penalización α . Si la constante de penalización es demasiado grande se enfatiza demasiado la penalización y el problema resultante, muy convexificado, se aleja mucho del problema original (es decir, deja de ser una buena aproximación del problema dual). Si la constante de penalización es muy pequeña, el método se parece al método de los hiperplanos secantes y se mantiene el comportamiento inestable de éste. Es conveniente, y así se ha hecho en la implantación informática que se ha realizado emplear una constante de penalización que dependa del contador de iteraciones. Resulta lógico penalizar poco en las primeras iteraciones cuando el centro de estabilidad está aún muy lejos del valor del vector de multiplicadores que maximiza la función dual e incrementar la constante de penalización a medida que avanza el proceso.

Hoy en día, la investigación de las formas primales de los *Bundle Methods* se centra en la elección de los términos relacionados con la penalización por el alejamiento del centro de estabilidad. Típicamente, como se describe en este apartado, se emplea la norma euclídea, para penalizar el alejamiento respecto al centro de estabilidad, y se utiliza una constante de penalización $\alpha = \alpha(\nu)$ que dependa del contador de iteraciones ν . Recientemente [76] se ha propuesto un método basado en las formas primales de los *Bundle Methods* que emplea una norma distinta de la euclídea. Dicha norma se establece a partir de una matriz $M(\nu)$ definida positiva que se actualiza en cada iteración. La actualización de $M(\nu)$ se hace empleando métodos cuasi Newton.

No obstante, el estudio de las formas primales de los *Bundle Methods* (o métodos de los hiperplanos secantes con penalización) en el trabajo a que esta tesis se refiere vino motivado por el deseo de comparar este tipo de métodos con el método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos (apartado 6.7.4), que es el método que se emplea en la *Etapa 1* del algoritmo de coordinación hidrotérmica en el corto plazo mediante relajación lagrangiana que se propone (apartado 4.2.3 del capítulo 4 y capítulo 7). Por ello, no se ha investigado acerca de las posibles formas de mejorar los métodos de los hiperplanos secantes con penalización (o formas primales de los *Bundle Methods*) y en la implantación informática de este tipo de métodos que se ha llevado a cabo (para poder comparar distintos métodos de actualización de multiplicadores), sólo se ha empleado la norma euclídea.

Otro de los inconvenientes del método de los hiperplanos secantes con penalización, igual que

ocurre en el método de los hiperplanos secantes, es que el número de restricciones del problema dual relajado aumenta en cada iteración. Esto provoca, dado que la matriz de restricciones es muy densa, un aumento importante de la complejidad del problema a resolver y una disminución de la eficiencia computacional. Para este método este inconveniente es más grave que para el método de los hiperplanos secantes ya que se trata de un problema de optimización cuadrática (de más compleja resolución que un problema de programación lineal). Los optimizadores comerciales empleados en la resolución de este problema de programación cuadrática no resultan muy eficientes cuando el tamaño del problema a resolver aumenta de forma indefinida ya que la matriz de restricciones es muy densa.

A continuación se presenta una modificación al método de los hiperplanos secantes con penalización que aparece en la literatura, en la que se mantiene acotado el tamaño del problema dual relajado a resolver en el paso 3b del *Algoritmo HPS-P*.

El método de los hiperplanos secantes con penalización y límite máximo al número de hiperplanos

Este método es una modificación del método general de los hiperplanos secantes con penalización que se describe en la literatura. El objetivo perseguido es evitar el aumento indefinido de la complejidad del problema dual relajado a resolver en cada iteración. Para ello se fija un número máximo de hiperplanos a considerar en la definición de la función lineal a tramos que aproxima a la función dual (o de forma equivalente, se fija un número máximo de restricciones en la formulación del problema dual relajado). El mecanismo empleado para ello, que se describe en el apartado 6.7.2, se basa en la definición de un conjunto dinámico para el modelado de la función dual aproximada que se actualiza en cada iteración y que contiene los hiperplanos que más se acercan al valor de la función dual en la iteración en curso.

La segunda modificación que se hace al método general de los hiperplanos secantes es la definición de una constante de penalización creciente con el contador de iteraciones.

El algoritmo del método es el siguiente:

Algoritmo HPS-PM

Paso 1 Definición de la región de factibilidad o dominio de definición del vector de multiplicadores.

El vector de multiplicadores para la primera iteración se hace igual al vector límite inferior (o límite superior) del dominio de definición o a cualquier valor intermedio. Se inicializa el contador de iteraciones ν a 1 y el contador de número de elementos del conjunto dinámico para el modelado del problema dual a 0.

Paso 2 Resolución del problema primal relajado (PPR), esto es, resolución de un subproblema por cada central térmica y un subproblema por cada cuenca hidráulica.

Paso 3 3a Actualización del centro de estabilidad $\Theta(\nu)$.

Si $\nu = 1$, entonces el centro de estabilidad es igual al valor inicial del vector de multiplicadores.

Si $\nu \geq 2$ y si

$$\phi(\theta(\nu)) - \phi(\Theta(\nu - 1)) \geq m \delta(\nu - 1) \quad 0 \leq m \leq 1, \quad (6.57)$$

entonces

$$\Theta(\nu) = \theta(\nu). \quad (6.58)$$

En otro caso

$$\Theta(\nu) = \Theta(\nu - 1) \quad (6.59)$$

3b Actualización del conjunto dinámico para el modelado del problema dual.

Si el contador de iteraciones es menor o igual que $\bar{n}$, se añade el hiperplano secante a la función dual para el valor del vector de multiplicadores de la iteración actual. A continuación se incrementa en 1 el número de elementos del conjunto dinámico y se va al paso 3b.

Si el contador de iteraciones es mayor que $\bar{n}$, se calculan los residuos de los hiperplanos que forman parte del conjunto dinámico de la iteración precedente (utilizando la ecuación (6.42)). A continuación se actualiza el conjunto dinámico partiendo del conjunto dinámico de la iteración anterior, eliminando el hiperplano no activo de mayor residuo y añadiendo el hiperplano secante a la función dual para el valor del vector de multiplicadores de la iteración en curso.

3c Resolución del problema dual relajado que se plantea:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar}_{z, \theta \in C} \quad z - \alpha(\nu) |\theta - \Theta(\nu)|^2 \\ &\text{sueto a} \\ &z \leq \phi(\theta(i)) + s(i)^T (\theta - \theta(i)) \quad i = 1, \dots, n \quad n \leq \bar{n} \end{aligned} \quad (6.60)$$

donde n es el número de hiperplanos (o restricciones) empleados en la definición de la función dual aproximada y $\bar{n}$ es el número máximo de hiperplanos definido a priori.

3d Cálculo del crecimiento nominal:

$$\delta(\nu) = z^*(\nu) - \alpha(\nu)|\theta^* - \Theta(\nu)|^2 - \phi(\theta(\nu)) \quad (6.61)$$

donde $z^*(\nu)$ y θ^* son las variables óptimas del problema dual relajado (ecuaciones (6.60)).

Paso 4 Si se cumple el criterio de convergencia finaliza el proceso. En caso contrario se incrementa el contador de iteraciones y se actualiza el vector de multiplicadores con el vector de multiplicadores que optimiza el problema dual relajado que se resuelve en el paso 3c.

La mayor dificultad de este método es el difícil ajuste de los parámetros relacionados con la actualización de la constante de penalización $\alpha(\nu)$ (que debe aumentar a medida que se incrementa el contador de iteraciones).

En [98] puede encontrarse un método similar al presentado en este documento pero que no mantiene limitado el tamaño del problema dual relajado (y por tanto su resolución resulta menos eficiente computacionalmente que la que se describe en este documento). La elección de la constante de penalización del método propuesto en este documento también es distinta de la presentada en [98]. En [98] la constante de penalización es constante.

El método de los hiperplanos secantes con penalización y límite máximo al número de hiperplanos (*Algoritmo HPS-PM*) se ha implementado para comparar su funcionamiento con otros métodos de actualización de multiplicadores (y de forma particular con el método que se emplea en la *Etapas 1* del algoritmo de coordinación hidrotérmica en el corto plazo que se propone en este trabajo de investigación, apartado 4.2.3 del capítulo 4 y capítulo 7). Se ha empleado un mismo criterio de convergencia para todos los métodos que se basan en el método de los hiperplanos secantes para poder compararlos.

El criterio de convergencia, como ya se ha indicado, ha sido el acercamiento entre la variable z que representa la función dual lineal a tramos, y la función dual. Es decir, el algoritmo finaliza cuando se cumpla que:

$$\frac{z - \phi(\theta(\nu))}{\phi(\theta(\nu))} \leq \varepsilon \quad (6.62)$$

donde ε es un parámetro definido a priori.

En [54] y [98] se propone otro criterio de convergencia.

6.7.4 El método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos

Este es el algoritmo que se comporta mejor para resolver el problema dual del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo. No se ha encontrado (ni en la literatura matemática ni en la relacionada con los sistemas de energía eléctrica) ningún método similar. Es una aportación novedosa de esta trabajo de investigación.

El método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos es un método del tipo de región de confianza que trata de solucionar los dos inconvenientes que se achacan al método de los hiperplanos secantes. Estos inconvenientes son:

- el método es oscilante y,
- el tamaño del problema dual relajado aumenta en cada iteración del algoritmo y con ello la eficiencia computacional disminuye.

Para solucionar el segundo inconveniente se define un número máximo de hiperplanos y un conjunto dinámico para el modelado de la función dual que se actualiza en cada iteración. La información para definir los hiperplanos que se emplean en cada iteración se almacena en el conjunto dinámico para el modelado del problema dual. El conjunto dinámico se actualiza en cada iteración. El procedimiento empleado para mantener acotado el número de hiperplanos se basa en el cálculo de los residuos de cada hiperplano y en la eliminación del hiperplano no activo de residuo mayor. El proceso se describe en el apartado 6.7.2.

El procedimiento empleado para solucionar el problema de la excesiva inestabilidad del método de los hiperplanos secantes aprovecha la simplicidad con que se define la región de factibilidad del problema dual. El dominio de definición de cada componente del vector de multiplicadores es simplemente un intervalo de la recta real $\mathbb{R}$. Por ello, fácilmente puede definirse una región de factibilidad para cada componente del vector de multiplicadores en cada iteración y actualizarla en cada iteración, simplemente modificando los límites superior e inferior de la componente es cuestión.

Así, el método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad modifica el método de los hiperplanos secantes de forma que los intervalos de definición de los multiplicadores se actualicen en cada iteración dependiendo de los resultados de la resolución del problema dual relajado de la iteración anterior. Esto evita la necesidad de definir un dominio de definición muy grande (para asegurar que contiene la solución del problema) y previene de las excesivas oscilaciones del método de los hiperplanos secantes. Con este método se puede

partir de un dominio inicial de definición de multiplicadores todo lo pequeño que se estime conveniente, con lo que se evitan las grandes oscilaciones de las primeras iteraciones del método de los hiperplanos secantes.

Si en alguna iteración y como resultado de la resolución del problema dual relajado, alguna componente del vector de multiplicadores alcanza alguno de los valores extremos (superior o inferior) del intervalo de definición de dicha componente, entonces se modifica dicho intervalo de definición para la resolución del problema dual relajado de la siguiente iteración. Si el multiplicador llega al límite superior del intervalo de definición (como resultado de la resolución del problema dual relajado), entonces en la iteración siguiente se aumentan los límites inferior y superior de ese multiplicador. De igual forma, si el multiplicador llega al límite inferior del intervalo de definición (como resultado de la resolución del problema dual relajado), entonces en la iteración siguiente se disminuyen los límites inferior y superior de ese multiplicador.

El problema dual relajado a resolver en cada iteración se formula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar}_{z, \theta \in C(\nu)} \quad z \\ & \text{sujeto a} \\ & z \leq \phi(\theta(i)) + s(i)^T (\theta - \theta(i)) \quad i = 1, \dots, n \quad n \leq \bar{n} \end{aligned} \quad (6.63)$$

Es importante hacer notar que el anterior problema de optimización se formula igual que el problema dual relajado planteado al emplear el método de los hiperplanos secantes pero con dos importantes modificaciones, esto es:

- la región de factibilidad $C(\nu)$ varía de forma dinámica en cada iteración y,
- el tamaño del problema a resolver se mantiene acotado.

Estas modificaciones son las que resuelven los dos inconvenientes, anteriormente reseñados, del método de los hiperplanos secantes.

El procedimiento empleado para la modificación dinámica de la región de factibilidad se detalla a continuación. Sea θ_j la componente j del vector de multiplicadores θ . Si en la iteración ν y tras la resolución del problema dual relajado (ecuación (6.63)) se cumple:

$$\theta_j^* = \bar{\theta}_j(\nu) \quad (6.64)$$

donde θ_j^* es el valor óptimo de la componente j del vector de multiplicadores que resulta tras la resolución del problema dual relajado en la iteración ν y $\bar{\theta}_j(\nu)$ es el límite superior de la

componente j del vector de multiplicadores en la iteración ν , entonces se modifican los límites de definición de esa componente θ_j del vector de multiplicadores para la siguiente iteración de la siguiente forma:

$$\bar{\theta}_j(\nu + 1) = \bar{\theta}_j(\nu)(1 + a) \quad (6.65)$$

$$\underline{\theta}_j(\nu + 1) = \underline{\theta}_j(\nu)(1 - b) \quad (6.66)$$

donde el rayado superior indica límite superior y el subrayado indica límite inferior. Nótese que el parámetro b debe ser menor que 1.

De la misma forma, si en la iteración ν y tras la resolución del problema dual relajado (ecuación (6.63)) se cumple:

$$\theta_j^* = \underline{\theta}_j(\nu) \quad (6.67)$$

donde θ_j^* es el valor óptimo de la componente j del vector de multiplicadores que resulta tras la resolución del problema dual relajado en la iteración ν y $\underline{\theta}_j(\nu)$ es el límite inferior de la componente j del vector de multiplicadores en la iteración ν , entonces se modifican los límites de definición de esa componente θ_j para la siguiente iteración de forma que:

$$\bar{\theta}_j(\nu + 1) = \underline{\theta}_j(\nu)(1 + c) \quad (6.68)$$

$$\underline{\theta}_j(\nu + 1) = \underline{\theta}_j(\nu)(1 - d) \quad (6.69)$$

donde el parámetro d debe ser menor que 1.

Es importante destacar que el procedimiento anterior para el control de la región de factibilidad es simple y por tanto resulta computacionalmente eficiente. El ajuste de los parámetros a , b , c y d es sencillo y no depende de los datos del problema. Valores típicos para estos parámetros son $a = c = 2$ y $b = d = 0.8$.

El algoritmo empleado por el método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos es el siguiente:

Algoritmo HPS-CD

Paso 1 Definición de la región de factibilidad o dominio de definición inicial del vector de multiplicadores. El vector de multiplicadores para la primera iteración se hace igual al vector

límite inferior (o límite superior) del dominio de definición para la primera iteración o cualquier valor intermedio. Se inicializa el contador de iteraciones a 1 y el número de elementos del conjunto dinámico para el modelado del problema dual a 0.

Paso 2 Resolución del problema primal relajado (PPR), esto es, resolución de un subproblema por cada central térmica y un subproblema por cada cuenca hidráulica.

Paso 3 3a Actualización del conjunto dinámico para el modelado del problema dual.

Si el contador de iteraciones es menor o igual que $\bar{n}$, se añade el hiperplano secante a la función dual para el valor del vector de multiplicadores de la iteración actual. A continuación se incrementa en 1 el número de elementos del conjunto dinámico y se va al paso 3b.

Si el contador de iteraciones es mayor que $\bar{n}$, se calculan los residuos de los hiperplanos que forman parte del conjunto dinámico de la iteración precedente (utilizando la ecuación (6.42)). A continuación se actualiza el conjunto dinámico partiendo del conjunto dinámico de la iteración anterior, eliminando el hiperplano no activo de mayor residuo y añadiendo el hiperplano secante a la función dual para el valor del vector de multiplicadores de la iteración en curso.

3b Resolución del problema dual relajado (PDR) que se plantea:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar}_{z, \theta \in C(\nu)} \quad z \\ &\text{sujeto a} \\ &\quad z \leq \phi(\theta(i)) + s(i)^T (\theta - \theta(i)) \quad i = 1, \dots, n \quad n \leq \bar{n} \end{aligned} \quad (6.70)$$

siendo n el número de elementos (o hiperplanos) del conjunto dinámico para el modelado del problema dual y $C(\nu)$ la región de factibilidad (o los intervalos de definición de los multiplicadores) en cada iteración.

3c Actualización de la región de factibilidad de los multiplicadores:

Para cada componente j del vector de multiplicadores θ^* que optimiza el PDR del paso 3b, hacer

$$\begin{aligned} &\text{- si } \theta_j^* = \bar{\theta}_j(\nu), \text{ entonces:} \\ &\quad \bar{\theta}_j(\nu + 1) = \bar{\theta}_j(\nu)(1 + a) \end{aligned} \quad (6.71)$$

$$\underline{\theta}_j(\nu + 1) = \bar{\theta}_j(\nu)(1 - b) \quad b \leq 1; \quad (6.72)$$

$$\begin{aligned} &\text{- si } \theta_j^* = \underline{\theta}_j(\nu), \text{ entonces} \\ &\quad \bar{\theta}_j(\nu + 1) = \underline{\theta}_j(\nu)(1 + c) \end{aligned} \quad (6.73)$$

$$\underline{\theta}_j(\nu + 1) = \underline{\theta}_j(\nu)(1 - d) \quad d \leq 1; \quad (6.74)$$

- en otro caso

$$\bar{\theta}_j(\nu + 1) = \bar{\theta}_j(\nu) \quad (6.75)$$

$$\underline{\theta}_j(\nu + 1) = \underline{\theta}_j(\nu) \quad . \quad (6.76)$$

Paso 4 Si se cumple el criterio de convergencia finaliza el proceso. En caso contrario se incrementa el contador de iteraciones y se actualiza el vector de multiplicadores con el vector de multiplicadores que optimiza el problema dual relajado que se resuelve en el paso 3b.

El algoritmo finalizará (criterio de convergencia) cuando la aproximación lineal a tramos de la función dual se aproxime suficientemente bien a la función dual. Esto es cuando se cumpla que:

$$\frac{z - \phi(\theta(\nu))}{\phi(\theta(\nu))} \leq \varepsilon \quad (6.77)$$

donde ε es un parámetro definido a priori.

El método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad supera los dos inconvenientes del método de los hiperplanos secantes. El control de la región de factibilidad se lleva a cabo a través de un procedimiento simple. El ajuste de los parámetros involucrados en dicho control es muy sencillo y no depende de los datos del problema.

El problema dual relajado a resolver en cada iteración del algoritmo es un problema de programación lineal de pequeño tamaño. El procedimiento empleado para mantener acotado el tamaño del problema dual relajado también es simple, por lo que resulta eficiente computacionalmente. Es el procedimiento de actualización de multiplicadores con el que se consiguen mejores resultados y en menos tiempo de cálculo (capítulo 8).

6.7.5 Método de los hiperplanos secantes con penalización, control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos

Este método trata de evitar los inconvenientes del método de los hiperplanos secantes. Para resolver el inconveniente del crecimiento del tamaño del problema dual relajado a resolver al incrementarse el contador de iteraciones, se define un número máximo de hiperplanos y se aplica el procedimiento indicado en el apartado 6.7.2.

Para evitar el comportamiento oscilatorio del método de los hiperplanos secantes, se combinan las ideas implementadas en el método de los hiperplanos secantes con penalización (apartado 6.7.3) y en el método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad (apartado 6.7.4).

Durante las primeras iteraciones se aplica el mismo procedimiento empleado por el método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos (apartado 6.7.4). No tiene sentido aplicar en estas iteraciones iniciales penalizaciones cuadráticas ya que el centro de gravedad, en las primeras iteraciones del método de los hiperplanos secantes con penalización, se encuentra aún muy lejos del óptimo del problema dual. Así, durante la q primeras iteraciones iniciales (donde q es un parámetro definido a priori) el problema dual relajado a resolver es un problema de programación lineal, de resolución más eficiente computacionalmente que un problema de programación cuadrática.

Transcurridas las primeras q iteraciones, se define un centro de estabilidad que se inicializa al valor del vector de multiplicadores con el que se resuelve el problema dual relajado en la iteración q y una constante de penalización para cada componente j del vector de multiplicadores θ . Esta constante de penalización, $\alpha(\nu, j)$, depende del contador de iteraciones, de forma que aumenta a medida que se incrementa el contador de iteraciones, y de la componente j del vector de multiplicadores a la que va asociada. A partir de entonces, el vector de multiplicadores se actualizará en cada iteración con el valor que maximice el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar}_{z, \theta \in C(\nu)} \quad z - \sum_j \alpha(\nu, j) |\theta(j) - \Theta(\nu, j)|^2 \\ & \text{sujeto a} \\ & \quad z \leq \phi(\theta(i)) + s(i)^T (\theta - \theta(i)) \quad i = 1, \dots, n \quad n \leq \bar{n} \end{aligned} \quad (6.78)$$

En este problema de optimización se define un dominio de definición que se actualiza en cada iteración y se aplican penalizaciones cuadráticas a aquellas componentes del vector de multiplicadores que no coincidan con los valores extremos de su dominio de definición. Así, para las componentes j del vector de multiplicadores que no haya que penalizar se define una constante de penalización $\alpha(\nu, j)$ nula y para el resto de las componentes se define una constante de penalización creciente con el contador de iteraciones ν .

El algoritmo de este método es el siguiente:

Algoritmo HPS-CDP

Paso 1 Definición de la región de factibilidad o dominio de definición inicial del vector de multiplicadores. El vector de multiplicadores para la primera iteración se hace igual al vector límite inferior (o límite superior) del dominio de definición para la primera iteración o bien a cualquier valor intermedio. Se inicializa el contador de iteraciones a 1 y el número de elementos del conjunto dinámico para el modelado del problema dual a 0

Paso 2 Resolución del problema primal relajado (PPR), esto es, resolución de un subproblema por cada central térmica y un subproblema por cada cuenca hidráulica.

Paso 3 3a Si $\nu < q$ se va al paso 3b.

Si $\nu \geq q$ se actualiza el centro de estabilidad $\Theta(\nu)$ siguiendo el procedimiento que se describe a continuación.

Si $\nu = q$, entonces el centro de estabilidad es igual al valor del vector de multiplicadores de esa iteración $\Theta(q) = \theta(q)$.

Si $\nu \geq q + 1$ y si

$$\phi(\theta(\nu)) - \phi(\Theta(\nu - 1)) \geq m \delta(\nu - 1) \quad 0 \leq m \leq 1, \quad (6.79)$$

entonces se actualiza el centro de estabilidad de forma que:

$$\Theta(\nu) = \theta(\nu). \quad (6.80)$$

En otro caso no se modifica el centro de estabilidad de forma que:

$$\Theta(\nu) = \Theta(\nu - 1). \quad (6.81)$$

3b Actualización del conjunto dinámico para el modelado del problema dual.

Si el contador de iteraciones es menor o igual que $\bar{n}$, se añade el hiperplano secante a la función dual para el valor del vector de multiplicadores de la iteración actual. A continuación se incrementa en 1 el número de elementos del conjunto dinámico y se va al paso 3c.

Si el contador de iteraciones es mayor que $\bar{n}$, se calculan los residuos de los hiperplanos que forman parte del conjunto dinámico de la iteración precedente (utilizando la ecuación (6.42)). A continuación se actualiza el conjunto dinámico partiendo del conjunto dinámico de la iteración anterior, eliminando el hiperplano no activo de mayor residuo y añadiendo el hiperplano secante a la función dual para el valor del vector de multiplicadores de la iteración en curso.

3c Resolución del problema dual relajado (PDR)

Si $\nu \leq q - 1$ se resuelve el siguiente problema de programación lineal (PDR)

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar}_{z, \theta \in C(\nu)} \quad z \\ &\text{sujeto a} \\ &z \leq \phi(\theta(i)) + s(i)^T (\theta - \theta(i)) \quad i = 1, \dots, n \quad n \leq \bar{n} \end{aligned} \quad (6.82)$$

En caso contrario se resuelve el siguiente problema de programación cuadrática (PDR)

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar}_{z, \theta \in C(\nu)} \quad z - \sum_j \alpha(\nu, j) |\theta(j) - \Theta(\nu, j)|^2 \\ & \text{sujeto a} \\ & z \leq \phi(\theta(i)) + s(i)^T (\theta - \theta(i)) \quad i = 1, \dots, n \quad n \leq \bar{n} \end{aligned} \quad (6.83)$$

En ambos casos n es el número de elementos (o hiperplanos) del conjunto dinámico para el modelado del problema dual, $C(\nu)$ es la región de factibilidad (o intervalos de definición de los multiplicadores) definida para la iteración ν y j es el índice que hace referencia a cada componente j del vector de multiplicadores.

3d Si $\nu \geq q$, se calcula el crecimiento nominal $\delta(\nu)$ de la siguiente forma:

$$\delta(\nu) = z^*(\nu) - \alpha(\nu) |\theta^* - \Theta(\nu)|^2 - \phi(\theta(\nu)) \quad (6.84)$$

donde $z^*(\nu)$ y θ^* son las variables óptimas del problema dual relajado (ecuaciones (6.82) o bien (6.83)).

3e Actualización de la región de factibilidad de los multiplicadores:

Para cada componente j del vector de multiplicadores θ^* que optimiza el PDR del paso 3c, hacer

- si $\theta_j^* = \bar{\theta}_j(\nu)$, entonces:

$$\bar{\theta}_j(\nu + 1) = \bar{\theta}_j(\nu)(1 + a) \quad (6.85)$$

$$\underline{\theta}_j(\nu + 1) = \bar{\theta}_j(\nu)(1 - b) \quad b \leq 1; \quad (6.86)$$

- si $\theta_j^* = \underline{\theta}_j(\nu)$, entonces

$$\bar{\theta}_j(\nu + 1) = \underline{\theta}_j(\nu)(1 + c) \quad (6.87)$$

$$\underline{\theta}_j(\nu + 1) = \underline{\theta}_j(\nu)(1 - d) \quad d \leq 1; \quad (6.88)$$

- en otro caso

$$\bar{\theta}_j(\nu + 1) = \bar{\theta}_j(\nu) \quad (6.89)$$

$$\underline{\theta}_j(\nu + 1) = \underline{\theta}_j(\nu) \quad (6.90)$$

3f Si $\nu \geq q$ se actualiza de la constante de penalización $\alpha(\nu + 1, j)$ para cada componente j del vector de multiplicadores de la forma que se detalla a continuación.

Para cada componente j del vector de multiplicadores, si se han modificado los límites del intervalo de definición de esa componente para la resolución del problema dual relajado de la próxima iteración, entonces:

$$\alpha(\nu + 1, j) = 0 \quad (6.91)$$

En caso contrario

$$\alpha(\nu + 1, j) = K(\nu + 1 - q) \quad (6.92)$$

donde K es una constante definida a priori.

Paso 4 Si se cumple el criterio de convergencia finaliza el proceso. En caso contrario se incrementa el contador de iteraciones y se actualiza el vector de multiplicadores con el vector de multiplicadores que optimiza el problema dual relajado que se resuelve en el paso 3c.

El método híbrido de los hiperplanos secantes con penalización, control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos resulta ser de mayor eficiencia computacional que el método de los hiperplanos secantes con penalización y límite máximo al número de hiperplanos ya que durante las primeras iteraciones se resuelven problemas de programación lineal (frente a los problemas de programación cuadrática que resuelve el método de los hiperplanos secantes con penalización). Este método mejora los resultados conseguidos por el método de los hiperplanos secantes con límite máximo al número de hiperplanos y los conseguidos por el método de los hiperplanos secantes con penalización y límite máximo al número de hiperplanos. Sin embargo, no mejora los resultados conseguidos por el método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos (ni desde el punto de vista de la calidad de la solución encontrada, ni desde el punto de vista de la eficiencia computacional). Como no se trata de ningún método presentado en la literatura y no produce mejores resultados que el otro método que se propone en este trabajo de investigación (método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos), no se muestran resultados computacionales en el capítulo 8.

6.8 Métodos de actualización de multiplicadores. Aplicación a varios modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo

Este apartado se centra en los ocho modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo que se diferencian entre sí en las restricciones globales consideradas y que se presentaron en el apartado 4.3.

Para cada uno de los ocho modelos se detallan las componentes de que consta el vector de multiplicadores θ , se plantea el subproblema asociado a cada central térmica y el subproblema asociado a cada cuenca hidráulica y se indica la forma de calcular, en cada iteración y a partir de la solución de los subproblemas térmicos e hidráulicos, el valor de la función dual y un subgradiente.

Con todos estos elementos (vector de multiplicadores, valor de la función dual en cada iteración y vector subgradiente en cada iteración) se puede aplicar cualquiera de los métodos de actualización de multiplicadores que se presentan en este capítulo.

La aplicación del método del subgradiente tradicional (apartado 6.6.1) y del método del subgradiente modificado (apartado 6.6.2) es inmediata una vez definidos el vector de multiplicadores, el valor de la función dual y un subgradiente en cada iteración. Por ello no se añade, en este apartado, ninguna consideración adicional a esta cuestión.

Dado que el estudio las formas duales de los *Bundle Methods* [91] (capítulo VII), [116] (capítulo XII) y [54] no ha sido objetivo del trabajo de investigación a que esta tesis se refiere, no se incluye en este apartado la forma de aplicar este tipo de métodos de actualización de multiplicadores a ninguno de los modelos definidos en el apartado 4.3.

Así, en este apartado y para cada uno de los ocho modelos considerados, tras la definición de los subproblemas térmicos e hidráulicos y de la forma de calcular el valor de la función dual y un subgradiente en cada iteración, se procede a detallar la formulación del problema dual relajado a resolver si se emplean los métodos de actualización de multiplicadores con memoria basados en el método de los hiperplanos secantes. Particularmente, se han considerado los modelos que mantienen acotado el número de hiperplanos.

6.8.1 Modelo 1

El modelo 1 se presenta en el apartado 4.3.1. Las restricciones de carga consideradas son las restricciones de demanda (ecuaciones (4.41)) y las restricciones de reserva rodante en su forma más simple (ecuaciones (4.42)). Para mayor claridad en la exposición, estas restricciones se vuelven a formular a continuación:

$$\sum_{j \in J} t_{jk} + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} p_{l(i)k} = D_k \quad \forall k \quad (6.93)$$

$$\sum_{j \in J} \bar{p}_j v_{jk} + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} p_{l(i)k} \geq D_k + R_k \quad \forall k \quad (6.94)$$

El vector de multiplicadores θ está formado por dos subvectores: el subvector λ y el subvector μ , es decir:

$$\theta = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \quad (6.95)$$

El subvector λ es un vector columna de dimensión igual al número de subperiodos del horizonte temporal analizado. Cada componente λ_k es el multiplicador asociado a la restricción de demanda (ecuación (6.93)) en el subperiodo k . Se define:

$$\lambda = (\lambda_1 \quad \lambda_2 \cdots \lambda_K)^\top \quad (6.96)$$

donde K es el número de subperiodos del horizonte temporal analizado.

El subvector μ es un vector columna de dimensión igual al número de subperiodos del horizonte temporal analizado. Cada componente μ_k es el multiplicador asociado a la restricción de reserva rodante (ecuación (6.94)) en el subperiodo k . Se define:

$$\mu = (\mu_1 \quad \mu_2 \cdots \mu_K)^\top \quad (6.97)$$

El subproblema asociado a cada central térmica j se plantea de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar}_{(t_j, v_j, y_j, z_j)} \\ &\sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] - \sum_{k=1}^K \left[\lambda_k(\nu) t_{jk} + \mu_k(\nu) \bar{p}_j v_{jk} \right] \end{aligned} \quad (6.98)$$

sujeto a

$$\underline{p}_j v_{jk} \leq t_{jk} \leq \bar{p}_j v_{jk} \quad \forall j \quad \forall k \quad (6.99)$$

$$t_{jk+1} - t_{jk} \leq r_j^s \quad \forall j \quad k = 1, \dots, T-1 \quad (6.100)$$

$$t_{jk} - t_{jk+1} \leq r_j^b \quad \forall j \quad k = 1, \dots, T-1 \quad (6.101)$$

$$y_{j1} - z_{j1} = v_{j1} - v_{j0} \quad \forall j \quad (6.102)$$

$$y_{jk} - z_{jk} = v_{jk} - v_{jk-1} \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.103)$$

$$(\tilde{s}_{j0} - T_j^f)(v_{j0} - v_{j1}) \geq 0 \quad \forall j \quad (6.104)$$

$$(\tilde{s}_{jk-1} - T_j^f)(v_{jk-1} - v_{jk}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.105)$$

$$(\tilde{s}_{j0} + T_j^p)(v_{j1} - v_{j0}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.106)$$

$$(\tilde{s}_{jk-1} + T_j^p)(v_{jk} - v_{jk-1}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.107)$$

El subproblema asociado a la cuenca hidráulica i se formula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar}_{(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)})} \\ &\sum_{k=1}^K \sum_{l(i) \in l(i)} (\lambda_k(\nu) + \mu_k(\nu)) p_{l(i)k} \end{aligned} \quad (6.108)$$

sujeto a

$$p_{l(i)k} = \rho_{l(i)}(u_{l(i)k}, x_{l(i)k}) \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.109)$$

$$x_{l_i k+1} = x_{l_i k} - u_{l_i k} - s l_i k + w_{l_i k} +$$

$$\sum_{m(l(i)) \in m(l(i))} \left[u_{m(l(i)),k-\tau_{m(l(i))}} + s_{m(l(i)),k-\tau_{m(l(i))}} \right] \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.110)$$

$$\underline{u}_{l(i)} \leq u_{l(i)k} \leq \overline{u}_{l(i)vk} \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.111)$$

$$\underline{x}_{l(i)} \leq x_{l(i)k} \leq \overline{x}_{l(i)v} \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.112)$$

$$0 \leq s_{l(i)k} \leq \overline{x}_{l(i)} \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.113)$$

$$x_{l(i)1} = x_{l(i)}^0 \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad (6.114)$$

$$\underline{x}_{l(i)T} \leq x_{l(i)T+1} \leq \overline{x}_{l(i)T} \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad (6.115)$$

donde $\lambda_k(\nu)$ representa el valor del multiplicador asociado a la restricción de demanda en el subperiodo k y en la iteración ν y $\mu_k(\nu)$ representa el valor del multiplicador asociado a la restricción de reserva rodante en el subperiodo k y en la iteración ν .

Si llamamos t_{jk}^* , v_{jk}^* , y_{jk}^* , z_{jk}^* y x_{jk}^{d*} a los valores óptimos de las variables t_{jk} , v_{jk} , y_{jk} , z_{jk} y x_{jk}^d que resultan tras la resolución del subproblema asociado a la central térmica j en la iteración ν (ecuaciones (6.98)-(6.107)), entonces se almacenan en $t_{jk}(\nu)$, $v_{jk}(\nu)$, $y_{jk}(\nu)$, $z_{jk}(\nu)$ y $x_{jk}^d(\nu)$ dichos valores óptimos, es decir:

$$t_{jk}(\nu) = t_{jk}^* \quad (6.116)$$

$$v_{jk}(\nu) = v_{jk}^* \quad (6.117)$$

$$y_{jk}(\nu) = y_{jk}^* \quad (6.118)$$

$$z_{jk}(\nu) = z_{jk}^* \quad (6.119)$$

$$x_{jk}^d(\nu) = x_{jk}^{d*} \quad (6.120)$$

Nótese la diferencia entre t_{jk} , que es una variable de optimización del subproblema asociado a la central térmica j , y $t_{jk}(\nu)$, que es un parámetro en el que se almacena, en cada iteración, el resultado de un problema de optimización. Las mismas consideraciones se aplican a la diferencia entre las variables v_{jk} , y_{jk} y z_{jk} y los parámetros $v_{jk}(\nu)$, $y_{jk}(\nu)$ y $z_{jk}(\nu)$.

Al valor de la función objetivo en el minimizador del subproblema asociado a la central térmica j en la iteración ν se le denomina $\varphi_j^t(\nu)$ (donde el superíndice t indica que se trata de un subproblema térmico), esto es:

$$\begin{aligned} \varphi_j^t(\nu) = & \sum_{k=1}^K \left[v_{jk}(\nu) a_j(t_{jk}(\nu)) + z_{jk}(\nu) c_j + y_{jk}(\nu) b(x_{jk}^d(\nu)) \right] \\ & - \sum_{k=1}^K \left[\lambda_k(\nu) t_{jk}(\nu) + \mu_k(\nu) \overline{p}_j v_{jk}(\nu) \right] \end{aligned} \quad (6.121)$$

Análogamente, se denota como $x_{l(i)}^*$, $u_{l(i)}^*$, $h_{l(i)}^*$ y $s_{l(i)}^*$ a los valores óptimos de las variables $x_{l(i)}$, $u_{l(i)}$, $h_{l(i)}$ y $s_{l(i)}$ respectivamente, que se obtienen de la resolución del subproblema asociado a la cuenca hidráulica i en la iteración ν (los subíndices $l(i)$ aluden a cada central hidráulica l de la cuenca i considerada), y se almacenan en $x_{l(i)}(\nu)$, $u_{l(i)}(\nu)$, $h_{l(i)}(\nu)$ y $s_{l(i)}(\nu)$ dichos valores óptimos, es decir:

$$x_{l(i)}(\nu) = x_{l(i)}^* \quad (6.122)$$

$$u_{l(i)}(\nu) = u_{l(i)}^* \quad (6.123)$$

$$h_{l(i)}(\nu) = h_{l(i)}^* \quad (6.124)$$

$$s_{l(i)}(\nu) = s_{l(i)}^* \quad (6.125)$$

De nuevo, hay que resaltar la diferencia entre las variables de optimización del subproblema asociado a la cuenca hidráulica i $x_{l(i)}$, $u_{l(i)}$, $h_{l(i)}$ y $s_{l(i)}$ y los parámetros en los que se almacenan, en cada iteración, los resultados de este problema de optimización $x_{l(i)}(\nu)$, $u_{l(i)}(\nu)$, $h_{l(i)}(\nu)$ y $s_{l(i)}(\nu)$.

Al valor de la función objetivo, cambiada de signo, en el maximizador del subproblema asociado a la cuenca hidráulica i en cada iteración ν se le llama $\varphi_i^h(\nu)$ (donde el superíndice h indica que se trata de un subproblema hidráulico), esto es:

$$\varphi_i^h(\nu) = - \sum_{k=1}^K \sum_{l(i) \in l(i)} (\lambda_k(\nu) + \mu_k(\nu)) p_{l(i)k}(\nu) \quad (6.126)$$

Sea cual sea el método de actualización de multiplicadores que se emplee, una vez resueltos en cada iteración los subproblemas térmicos e hidráulicos en que se descompone el problema primal relajado, hay que evaluar el valor de la función dual $\phi(\lambda(\nu), \mu(\nu))$ para el valor del vector de multiplicadores de esa iteración y un subgradiente $s(\nu)$ en ese punto.

El valor de la función dual, en cada iteración ν , se calcula de la siguiente forma:

$$\phi(\lambda(\nu), \mu(\nu)) = \sum_{k=1}^K [\lambda_k(\nu) D_k + \mu_k(\nu) (R_k + D_k)] + \sum_{j \in j} \varphi_j^t(\nu) + \sum_{l_i \in l(i)} \varphi_i^h(\nu) \quad (6.127)$$

donde $\varphi_j^t(\nu)$ y $\varphi_i^h(\nu)$ se evalúan utilizando las ecuaciones (6.121) y (6.126) respectivamente.

Como ya se ha indicado (apartado 6.5), un vector subgradiente en cada iteración $s(\nu)$ puede fácilmente calcularse a partir de la evaluación de las restricciones dualizadas. Así, en el modelo 1, el vector subgradiente $s(\nu)$ está formado por dos subvectores: un subvector asociado a las restricciones de demanda (ecuaciones (6.93)) y un subvector asociado a las restricciones de reserva rodante (ecuaciones (6.94)).

El vector subgradiente $s(\nu)$ que se empleará por cualquiera de los procedimientos de actualización de multiplicadores que se presentan en este capítulo, está formado por dos subvectores. El primer subvector $s_D(\nu)$ está asociado a las restricciones de demanda y el segundo subvector $s_R(\nu)$ está asociado a las restricciones de reserva rodante. Se define:

$$s(\nu) = \begin{pmatrix} s_D(\nu) \\ s_R(\nu) \end{pmatrix} \quad (6.128)$$

siendo

$$s_D(\nu) = \begin{pmatrix} D_1 - \sum_{j \in j} t_{j1}(\nu) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)1}(\nu) \\ D_2 - \sum_{j \in j} t_{j2}(\nu) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)2}(\nu) \\ \vdots \\ D_K - \sum_{j \in j} t_{jK}(\nu) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)K}(\nu) \end{pmatrix} \quad (6.129)$$

$$s_R(\nu) = \begin{pmatrix} D_1 + R_1 - \sum_{j \in j} \bar{p}_j v_{j1}(\nu) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)1}(\nu) \\ D_2 + R_2 - \sum_{j \in j} \bar{p}_j v_{j2}(\nu) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)2}(\nu) \\ \vdots \\ D_K + R_K - \sum_{j \in j} \bar{p}_j v_{jK}(\nu) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)K}(\nu) \end{pmatrix} \quad (6.130)$$

Una vez definidos el vector de multiplicadores y la forma de calcular el valor de la función dual y un subgradiente en cada iteración, se procede al análisis de los métodos de actualización de multiplicadores con memoria basados en el método de los hiperplanos secantes.

Método de los hiperplanos secantes con límite máximo al número de hiperplanos

El problema dual relajado (paso 3b del *Algoritmo HPS-M*) en cada iteración ν , se plantea de la siguiente forma:

Maximizar $z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K \quad z$

sujeto a

$$\begin{aligned} z &\leq \phi(\lambda(i), \mu(i)) + \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i)) \\ &+ \sum_{k=1}^K \left(D_k + R_k - \sum_{j \in j} \bar{p}_j v_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\mu_k - \mu_k(i)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i &= 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n} \\
 \underline{\lambda}_k &\leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k \quad \forall k \\
 \underline{\mu}_k &\leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k \quad \forall k
 \end{aligned} \tag{6.131}$$

donde n es el número de elementos del conjunto dinámico para el modelado del problema dual, $\bar{n}$ es el número máximo de hiperplanos y $\phi(\lambda(i), \mu(i))$ se evalúa utilizando las ecuaciones (6.127), (6.121) y (6.126).

Método de los hiperplanos secantes con penalización y límite máximo al número de hiperplanos

El método de los hiperplanos secantes con penalización requiere de la definición de un vector $\Theta(\nu)$ que representa el centro de estabilidad y que se actualiza en cada iteración.

En el caso particular del modelo 1, el centro de estabilidad $\Theta(\nu)$ está formado por dos subvectores. El primer subvector $\Lambda(\nu)$ contiene las K primeras componentes del centro de estabilidad y está asociado al subvector λ del vector de multiplicadores (ecuación (6.96)). El segundo subvector $\Xi(\nu)$ contiene las K últimas componentes del centro de estabilidad y está asociado al subvector μ del vector de multiplicadores (ecuación (6.97)). Es decir:

$$\Theta(\nu) = \begin{pmatrix} \Lambda(\nu) \\ \Xi(\nu) \end{pmatrix} \tag{6.132}$$

siendo

$$\Lambda(\nu) = (\Lambda_1(\nu) \quad \Lambda_2(\nu) \cdots \Lambda_K(\nu))^T \tag{6.133}$$

$$\Xi(\nu) = (\Xi_1(\nu) \quad \Xi_2(\nu) \cdots \Xi_K(\nu))^T \tag{6.134}$$

El problema dual relajado (paso 3c del *Algoritmo HPS-PM*) en cada iteración ν , se plantea de la siguiente forma:

Maximizar $z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K$

$$z - \alpha(\nu) \left[\sum_{k=1}^K (\lambda_k - \Lambda_k(\nu))^2 + \sum_{k=1}^K (\mu_k - \Xi_k(\nu))^2 \right]$$

sujeito a

$$\begin{aligned}
 z &\leq \phi(\lambda(i), \mu(i)) + \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i)) \\
 &+ \sum_{k=1}^K \left(D_k + R_k - \sum_{j \in j} \bar{p}_j v_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\mu_k - \mu_k(i))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i &= 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n} \\
 \underline{\lambda}_k &\leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k \quad \forall k \\
 \underline{\mu}_k &\leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k \quad \forall k
 \end{aligned} \tag{6.135}$$

donde n es el número de elementos del conjunto dinámico para el modelado del problema dual, $\bar{n}$ es el número máximo de hiperplanos y $\phi(\lambda(i), \mu(i))$ se evalúa utilizando las ecuaciones (6.127), (6.121) y (6.126).

Método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos

El problema dual relajado (paso 3b del *Algoritmo HPS-CD*) en cada iteración ν , se plantea de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximizar}_{z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K} \quad z \\
 &\text{sujeto a} \\
 &z \leq \phi(\lambda(i), \mu(i)) + \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i)) \\
 &+ \sum_{k=1}^K \left(D_k + R_k - \sum_{j \in j} \bar{p}_j v_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\mu_k - \mu_k(i)) \\
 &\quad \quad \quad i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n} \\
 &\underline{\lambda}_k(\nu) \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k(\nu) \quad \forall k \\
 &\underline{\mu}_k(\nu) \leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k(\nu) \quad \forall k
 \end{aligned} \tag{6.136}$$

donde n es el número de elementos del conjunto dinámico para el modelado del problema dual, $\bar{n}$ es el número máximo de hiperplanos y $\phi(\lambda(i), \mu(i))$ se evalúa utilizando las ecuaciones (6.127), (6.121) y (6.126).

A las variables que optimizan en cada iteración el problema dual relajado (ecuaciones (6.131)) se les llama z^* , λ_k^* y μ_k^* , donde $k = 1, 2, \dots, K$. Una vez resuelto, en cada iteración, el problema dual relajado se procede a actualizar la región de factibilidad (paso 3c del *Algoritmo HPS-CD*) o, de otro modo, a actualizar los límites superior e inferior de cada componente del vector de multiplicadores λ y de cada componente del vector de multiplicadores μ . El procedimiento empleado para ello se describe a continuación.

Procedimiento de actualización de la región de factibilidad de los multiplicadores

Desde $k = 1, 2, \dots, K$ hacer:

1. Actualización de la región de factibilidad de los multiplicadores λ

- Si $\lambda_k^* = \bar{\lambda}_k(\nu)$, entonces:

$$\bar{\lambda}_k(\nu + 1) = \bar{\lambda}_k(\nu)(1 + a) \quad (6.137)$$

$$\underline{\lambda}_k(\nu + 1) = \bar{\lambda}_k(\nu)(1 - b) \quad b \leq 1 \quad (6.138)$$

- Si $\lambda_k^* = \underline{\lambda}_k(\nu)$, entonces:

$$\bar{\lambda}_k(\nu + 1) = \underline{\lambda}_k(\nu)(1 + c) \quad (6.139)$$

$$\underline{\lambda}_k(\nu + 1) = \underline{\lambda}_k(\nu)(1 - d) \quad d \leq 1 \quad (6.140)$$

- En otro caso

$$\bar{\lambda}_k(\nu + 1) = \bar{\lambda}_k(\nu) \quad (6.141)$$

$$\underline{\lambda}_k(\nu + 1) = \underline{\lambda}_k(\nu) \quad (6.142)$$

2. Actualización de la región de factibilidad de los multiplicadores μ

- Si $\mu_k^* = \bar{\mu}_k(\nu)$, entonces:

$$\bar{\mu}_k(\nu + 1) = \bar{\mu}_k(\nu)(1 + a) \quad (6.143)$$

$$\underline{\mu}_k(\nu + 1) = \bar{\mu}_k(\nu)(1 - b) \quad b \leq 1 \quad (6.144)$$

- Si $\mu_k^* = \underline{\mu}_k(\nu)$, entonces:

$$\bar{\mu}_k(\nu + 1) = \underline{\mu}_k(\nu)(1 + c) \quad (6.145)$$

$$\underline{\mu}_k(\nu + 1) = \underline{\mu}_k(\nu)(1 - d) \quad d \leq 1 \quad (6.146)$$

- En otro caso

$$\bar{\mu}_k(\nu + 1) = \bar{\mu}_k(\nu) \quad (6.147)$$

$$\underline{\mu}_k(\nu + 1) = \underline{\mu}_k(\nu) \quad (6.148)$$

Método de los hiperplanos secantes con penalización, control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos

Este método requiere la definición de un centro de estabilidad $\Theta(\nu)$ que se define, en el caso del modelo 1, de la forma indicada en las ecuaciones (6.132)-(6.134).

También hace falta la definición de una constante de penalización asociada a cada componente del vector de multiplicadores λ y una constante de penalización asociada a cada componente del

vector de multiplicadores μ . Estas constantes de penalización se emplean una vez transcurridas las $q - 1$ primeras iteraciones del algoritmo (*Algoritmo HPS-CDP*) y se actualizan en cada iteración (a partir de la iteración q).

A la constante de penalización asociada a la componente k del vector de multiplicadores λ en la iteración ν se le llama $\alpha_\lambda(\nu, k)$ y a la constante de penalización asociada a la componente k del vector de multiplicadores μ en la iteración ν se le llama $\alpha_\mu(\nu, k)$.

El problema dual relajado a resolver (paso 3c del *Algoritmo HPS-CDP*) en cada iteración ν , se plantea de distinta forma según si se han ejecutado las $q - 1$ primeras iteraciones o si aún el contador de iteraciones aún no ha alcanzado este valor.

Si $\nu \leq q - 1$ el problema dual relajado se plantea:

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximizar}_{z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K} \quad z \\
 &\text{sueto a} \\
 &z \leq \phi(\lambda(i), \mu(i)) + \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i)) \\
 &+ \sum_{k=1}^K \left(D_k + R_k - \sum_{j \in j} \bar{p}_j v_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\mu_k - \mu_k(i)) \\
 &\quad \quad \quad i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n} \\
 &\underline{\lambda}_k(\nu) \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k(\nu) \quad \forall k \\
 &\underline{\mu}_k(\nu) \leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k(\nu) \quad \forall k
 \end{aligned} \tag{6.149}$$

y en otro caso:

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximizar}_{z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K} \\
 &z - \sum_{k=1}^K \alpha_\lambda(\nu, k) (\lambda_k - \Lambda_k(\nu))^2 - \sum_{k=1}^K \alpha_\mu(\nu, k) (\mu_k - \Xi_k(\nu))^2 \\
 &\text{sueto a} \\
 &z \leq \phi(\lambda(i), \mu(i)) + \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i)) \\
 &+ \sum_{k=1}^K \left(D_k + R_k - \sum_{j \in j} \bar{p}_j v_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\mu_k - \mu_k(i)) \\
 &\quad \quad \quad i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n} \\
 &\underline{\lambda}_k(\nu) \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k(\nu) \quad \forall k \\
 &\underline{\mu}_k(\nu) \leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k(\nu) \quad \forall k
 \end{aligned} \tag{6.150}$$

donde n es el número de elementos del conjunto dinámico para el modelado del problema dual, $\bar{n}$ es el número máximo de hiperplanos y $\phi(\lambda(i), \mu(i))$ se evalúa utilizando las ecuaciones (6.127), (6.121) y (6.126).

Una vez resuelto el problema dual relajado (ecuaciones (6.149) o (6.150)), y siguiendo el *Algoritmo HPS-CDP*, se actualizan los límites superior e inferior de definición de los vectores de multiplicadores λ y μ (paso 3d del *Algoritmo HPS-CDP*) siguiendo el mismo procedimiento que se ha detallado para el método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos (página 244). A continuación, y si $\nu \geq q$ se actualizan las constantes de penalización $\alpha_\lambda(\nu, k)$ y $\alpha_\lambda(\nu, k)$ de la forma que se explica a continuación.

Procedimiento de actualización de las constantes de penalización

Para aquellos subperiodos k en que se hayan modificado los límites del intervalo de definición del multiplicador λ_k para la siguiente iteración, se anula la constante de penalización ya que no habrá que penalizar el alejamiento de λ_k respecto a la componente equivalente del centro de estabilidad $\Lambda_k(\nu)$. Es decir:

$$\alpha_\lambda(\nu + 1, k) = 0 \quad (6.151)$$

En caso contrario se incrementa la constante de penalización de la siguiente manera:

$$\alpha_\lambda(\nu + 1, k) = K_\lambda(\nu + 1 - q) \quad (6.152)$$

donde K_λ es un parámetro previamente seleccionado.

De forma equivalente, para aquellos subperiodos k en que se hayan modificado los límites del intervalo de definición del multiplicador μ_k para la siguiente iteración, se anula la constante de penalización ya que no habrá que penalizar el alejamiento de μ_k respecto a la componente equivalente del centro de estabilidad $\Xi_k(\nu)$. Esto es:

$$\alpha_\mu(\nu + 1, k) = 0 \quad (6.153)$$

Si los límites de definición del vector de multiplicadores μ no han variado para la siguiente iteración, entonces:

$$\alpha_\mu(\nu + 1, k) = K_\mu(\nu + 1 - q) \quad (6.154)$$

donde K_μ es un parámetro elegido a priori.

6.8.2 Modelo 2

El modelo 2 se presenta en el apartado 4.3.2. Las restricciones de carga consideradas son las restricciones de demanda (ecuaciones (4.41)) y las restricciones de reserva rodante modeladas a través de las ecuaciones (4.42)). Estas restricciones se vuelven a formular a continuación:

$$\sum_{j \in j} t_{jk} + \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k} = D_k \quad \forall k \quad (6.155)$$

$$\sum_{j \in j} (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} + \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \geq R_k \quad \forall k \quad (6.156)$$

El vector de multiplicadores θ , de dimensión igual al doble de subperiodos del horizonte temporal analizado (K), está formado por el subvector λ , asociado a las restricciones de demanda (ecuaciones (6.155)), y el subvector μ , asociado a las restricciones de reserva rodante (ecuaciones (6.156)). Esto es:

$$\theta = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \quad (6.157)$$

siendo

$$\lambda = (\lambda_1 \quad \lambda_2 \cdots \lambda_K)^T \quad (6.158)$$

$$\mu = (\mu_1 \quad \mu_2 \cdots \mu_K)^T \quad (6.159)$$

El subproblema asociado a cada central térmica j se plantea de la siguiente forma:

Minimizar _{(t_j, v_j, y_j, z_j)}

$$\sum_{k=1}^K [v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d)] - [\lambda_k(\nu) t_{jk} + \mu_k(\nu) (\bar{p}_j - t_{jk})] \quad (6.160)$$

sujeto a

$$\underline{p}_j v_{jk} \leq t_{jk} \leq \bar{p}_j v_{jk} \quad \forall j \quad \forall k \quad (6.161)$$

$$t_{jk} - t_{j,k-1} \leq r_j^s \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.162)$$

$$t_{j,k-1} - t_{jk} \leq r_j^b \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.163)$$

$$y_{j1} - z_{j1} = v_{j1} - v_{j0} \quad \forall j \quad (6.164)$$

$$y_{jk} - z_{jk} = v_{jk} - v_{j,k-1} \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.165)$$

$$(\tilde{s}_{j0} - T_j^f)(v_{j0} - v_{j1}) \geq 0 \quad \forall j \quad (6.166)$$

$$(\tilde{s}_{j,k-1} - T_j^f)(v_{j,k-1} - v_{jk}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.167)$$

$$(\tilde{s}_{j0} + T_j^p)(v_{j1} - v_{j0}) \geq 0 \quad \forall j \quad (6.168)$$

$$(\tilde{s}_{jk-1} + T_j^p)(v_{jk} - v_{jk-1}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.169)$$

El subproblema asociado a la cuenca hidráulica i se formula de la siguiente manera:

$$\text{Maximizar}_{(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)})} \sum_{l(i) \in l(i)} \sum_{k=1}^K \left[\lambda_k(\nu) p_{l(i)k} + \mu_k(\nu) (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \right] \quad (6.170)$$

sujeto a

$$p_{l(i)k} = \rho_{l(i)}(u_{l(i)k}, x_{l(i)k}) \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.171)$$

$$x_{l_i k+1} = x_{l_i k} - u_{l_i k} - s_{l_i k} + w_{l_i k} + \sum_{m(l(i)) \in m(l(i))} \left[u_{m(l(i)), k-\tau_{m(l(i))}} + s_{m(l(i)), k-\tau_{m(l(i))}} \right] \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.172)$$

$$\underline{u}_{l(i)} \leq u_{l(i)k} \leq \bar{u}_{l(i)vk} \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.173)$$

$$\underline{x}_{l(i)} \leq x_{l(i)k} \leq \bar{x}_{l(i)v} \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.174)$$

$$0 \leq s_{l(i)k} \leq \bar{x}_{l(i)} \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.175)$$

$$x_{l(i)1} = x_{l(i)}^0 \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad (6.176)$$

$$\underline{x}_{l(i)T} \leq x_{l(i)T+1} \leq \bar{x}_{l(i)T} \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad (6.177)$$

donde $\lambda_k(\nu)$ representa el valor del multiplicador asociado a la restricción de demanda en el subperiodo k y en la iteración ν y $\mu_k(\nu)$ representa el valor del multiplicador asociado a la restricción de reserva rodante en el subperiodo k y en la iteración ν .

El valor óptimo de la función objetivo del subproblema asociado a la central térmica j en cada iteración se calcula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \varphi_j^t(\nu) = & \sum_{k=1}^K \left[v_{jk}(\nu) a_j(t_{jk}(\nu)) + z_{jk}(\nu) c_j + y_{jk}(\nu) b(x_{jk}^d(\nu)) \right] \\ & - \sum_{k=1}^K \left[\lambda_k(\nu) t_{jk}(\nu) + \mu_k(\nu) (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk}(\nu) \right] \end{aligned} \quad (6.178)$$

donde $t_{jk}(\nu)$, $v_{jk}(\nu)$, $y_{jk}(\nu)$, $z_{jk}(\nu)$ contienen las variables óptimas de la resolución de los subproblemas térmicos en la iteración ν , t_{jk}^* , v_{jk}^* , y_{jk}^* y z_{jk}^* .

El valor de la función objetivo, cambiada de signo, en el maximizador del subproblema asociado a la cuenca hidráulica i en cada iteración ν se calcula de la siguiente manera:

$$\varphi_i^h(\nu) = - \sum_{k=1}^K \sum_{l(i) \in l(i)} \left[\lambda_k(\nu) t_{jk}(\nu) + \mu_k(\nu) (\bar{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k}(\nu)) \right] \quad (6.179)$$

donde $x_{l(i)}(\nu)$, $u_{l(i)}(\nu)$, $h_{l(i)}(\nu)$ y $s_{l(i)}(\nu)$ contienen las variables óptimas de la resolución de los subproblemas hidráulicos en la iteración ν , $x_{l(i)}^*$, $u_{l(i)}^*$, $h_{l(i)}^*$ y $s_{l(i)}^*$.

El valor de la función dual, en cada iteración ν , se calcula de la siguiente forma:

$$\phi(\lambda(\nu), \mu(\nu)) = \sum_{k=1}^K [\lambda_k(\nu) D_k + \mu_k(\nu) R_k] + \sum_{j \in J} \varphi_j^t(\nu) + \sum_{l_i \in l(i)} \varphi_i^h(\nu) \quad (6.180)$$

donde $\varphi_j^t(\nu)$ y $\varphi_i^h(\nu)$ se evalúan utilizando las ecuaciones (6.178) y (6.179) respetivamente.

El vector subgradiente $s(\nu)$ que se empleará por cualquiera de los procedimientos de actualización de multiplicadores que se presentan en este capítulo, se define:

$$s(\nu) = \begin{pmatrix} s_D(\nu) \\ s_R(\nu) \end{pmatrix} \quad (6.181)$$

siendo

$$s_D(\nu) = \begin{pmatrix} D_1 - \sum_{j \in J} t_{j1}(\nu) - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)1}(\nu) \\ D_2 - \sum_{j \in J} t_{j2}(\nu) - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)2}(\nu) \\ \vdots \\ D_K - \sum_{j \in J} t_{jK}(\nu) - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)K}(\nu) \end{pmatrix} \quad (6.182)$$

$$s_R(\nu) = \begin{pmatrix} R_1 - \sum_{j \in J} (\bar{p}_j - t_{j1}(\nu)) v_{j1}(\nu) - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)1} - p_{l(i)1}(\nu)) \\ R_2 - \sum_{j \in J} (\bar{p}_j - t_{j2}(\nu)) v_{j2}(\nu) - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)2} - p_{l(i)2}(\nu)) \\ \vdots \\ R_K - \sum_{j \in J} (\bar{p}_j - t_{jK}(\nu)) v_{jK}(\nu) - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)K} - p_{l(i)K}(\nu)) \end{pmatrix} \quad (6.183)$$

Una vez definidos el vector de multiplicadores y la forma de calcular el valor de la función dual y un subgradiente en cada iteración, se procede al análisis de los métodos de actualización de multiplicadores con memoria basados en el método de los hiperplanos secantes.

Método de los hiperplanos secantes con límite máximo al número de hiperplanos

El problema dual relajado (paso 3b del *Algoritmo HPS-M*) en cada iteración ν , se plantea de la siguiente forma:

$$\text{Maximizar}_{z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K} \quad z$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
 z \leq & \phi(\lambda(i), \mu(i)) + \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i)) \\
 & + \sum_{k=1}^K \left[R_k - \sum_{j \in j} (\bar{p}_j - t_{jk}(i)) v_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k}(i)) \right] (\mu_k - \mu_k(i)) \\
 & i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n} \\
 \underline{\lambda}_k \leq & \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k \quad \forall k \\
 \underline{\mu}_k \leq & \mu_k \leq \bar{\mu}_k \quad \forall k
 \end{aligned} \tag{6.184}$$

donde n es el número de elementos del conjunto dinámico para el modelado del problema dual, $\bar{n}$ es el número máximo de hiperplanos y $\phi(\lambda(i), \mu(i))$ se evalúa utilizando las ecuaciones (6.180), (6.178) y (6.179).

Método de los hiperplanos secantes con penalización y límite máximo al número de hiperplanos

El centro de estabilidad en cada iteración ν se define de la siguiente forma:

$$\Theta(\nu) = \begin{pmatrix} \Lambda(\nu) \\ \Xi(\nu) \end{pmatrix} \tag{6.185}$$

siendo

$$\Lambda(\nu) = (\Lambda_1(\nu) \quad \Lambda_2(\nu) \cdots \Lambda_K(\nu))^T \tag{6.186}$$

$$\Xi(\nu) = (\Xi_1(\nu) \quad \Xi_2(\nu) \cdots \Xi_K(\nu))^T \tag{6.187}$$

donde la componente $\Lambda_k(\nu)$ está asociada a la componente $\lambda_k(\nu)$ del vector de multiplicadores (ecuación (6.158)) y la componente $\Xi_k(\nu)$ está asociada a la componente $\mu_k(\nu)$ del vector de multiplicadores (ecuación (6.159)).

El problema dual relajado (paso 3c del *Algoritmo HPS-PM*) en cada iteración ν , se plantea de la siguiente forma:

Maximizar $z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K$

$$z - \alpha(\nu) \left[\sum_{k=1}^K (\lambda_k - \Lambda_k(\nu))^2 + \sum_{k=1}^K (\mu_k - \Xi_k(\nu))^2 \right]$$

sujeto a

$$z \leq \phi(\lambda(i), \mu(i)) + \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i))$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^K \left[R_k - \sum_{j \in j} (\bar{p}_j - t_{jk}(i)) v_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k}(i)) \right] (\mu_k - \mu_k(i)) \\
& \quad i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n} \\
& \underline{\lambda}_k \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k \quad \forall k \\
& \underline{\mu}_k \leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k \quad \forall k
\end{aligned} \tag{6.188}$$

donde n es el número de elementos del conjunto dinámico para el modelado del problema dual, $\bar{n}$ es el número máximo de hiperplanos y $\phi(\lambda(i), \mu(i))$ se evalúa utilizando las ecuaciones (6.180), (6.178) y (6.179).

Método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos

El problema dual relajado (paso 3b del *Algoritmo HPS-CD*) en cada iteración ν , se plantea de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
& \text{Maximizar}_{z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K} \quad z \\
& \text{sujeto a} \\
& z \leq \phi(\lambda(i), \mu(i)) + \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i)) \\
& + \sum_{k=1}^K \left[R_k - \sum_{j \in j} (\bar{p}_j - t_{jk}(i)) v_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k}(i)) \right] (\mu_k - \mu_k(i)) \\
& \quad i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n} \\
& \underline{\lambda}_k(\nu) \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k(\nu) \quad \forall k \\
& \underline{\mu}_k(\nu) \leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k(\nu) \quad \forall k
\end{aligned} \tag{6.189}$$

donde n es el número de elementos del conjunto dinámico para el modelado del problema dual, $\bar{n}$ es el número máximo de hiperplanos y $\phi(\lambda(i), \mu(i))$ se evalúa utilizando las ecuaciones (6.180), (6.178) y (6.179).

Una vez resuelto, en cada iteración, el problema dual relajado se procede a actualizar la región de factibilidad (paso 3c del *Algoritmo HPS-CD*) o, de otro modo, a actualizar los límites superior e inferior de cada componente del vector de multiplicadores λ y de cada componente del vector de multiplicadores μ . El procedimiento empleado para ello se describe en el apartado 6.8.1 (página 244).

Método de los hiperplanos secantes con penalización, control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos

El centro de estabilidad $\Theta(\nu)$ se define de la forma indicada en las ecuaciones (6.185)-(6.187).

El problema dual relajado a resolver (paso 3c del *Algoritmo HPS-CDP*) en cada iteración ν , se plantea de distinta forma según si se han ejecutado las $q - 1$ primeras iteraciones o si aún el contador de iteraciones aún no ha alcanzado este valor.

Si $\nu \leq q - 1$ el problema dual relajado se plantea:

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximizar}_{z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K} \quad z \\
 &\text{sujeto a} \\
 &z \leq \phi(\lambda(i), \mu(i)) + \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i)) \\
 &+ \sum_{k=1}^K \left[R_k - \sum_{j \in j} (\bar{p}_j - t_{jk}(i)) v_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k}(i)) \right] (\mu_k - \mu_k(i)) \\
 &\quad \quad \quad i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n} \\
 &\underline{\lambda}_k(\nu) \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k(\nu) \quad \forall k \\
 &\underline{\mu}_k(\nu) \leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k(\nu) \quad \forall k
 \end{aligned} \tag{6.190}$$

y en otro caso:

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximizar}_{z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K} \\
 &z - \sum_{k=1}^K \alpha_\lambda(\nu, k) (\lambda_k - \Lambda_k(\nu))^2 - \sum_{k=1}^K \alpha_\mu(\nu, k) (\mu_k - \Xi_k(\nu))^2 \\
 &\text{sujeto a} \\
 &z \leq \phi(\lambda(i), \mu(i)) + \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i)) \\
 &+ \sum_{k=1}^K \left[R_k - \sum_{j \in j} (\bar{p}_j - t_{jk}(i)) v_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k}(i)) \right] (\mu_k - \mu_k(i)) \\
 &\quad \quad \quad i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n} \\
 &\underline{\lambda}_k(\nu) \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k(\nu) \quad \forall k \\
 &\underline{\mu}_k(\nu) \leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k(\nu) \quad \forall k
 \end{aligned} \tag{6.191}$$

donde $\alpha_\lambda(\nu, k)$ es la constante de penalización asociada a la componente k del vector de multiplicadores λ en la iteración ν , $\alpha_\mu(\nu, k)$ es la constante de penalización asociada a la componente k del vector de multiplicadores μ en la iteración ν , n es el número de elementos del conjun-

to dinámico para el modelado del problema dual, $\bar{n}$ es el número máximo de hiperplanos y $\phi(\lambda(i), \mu(i))$ se evalúa utilizando las ecuaciones (6.180), (6.178) y (6.179).

El procedimiento de actualización de la región de factibilidad de los multiplicadores es el mismo que se emplea en el método de actualización de multiplicadores con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos. Se describe en el apartado 6.8.1 (página 244).

El procedimiento de actualización de las constantes de penalización $\alpha_\lambda(\nu, k)$ y $\alpha_\mu(\nu, k)$ se describe en el apartado 6.8.1 (página 247).

6.8.3 Modelo 3

El modelo 3 se presenta en el apartado 4.3.3. Las restricciones de carga consideradas son las restricciones de demanda (ecuaciones (4.78)) y las restricciones de reserva rodante modeladas a través de las ecuaciones (4.79)). Estas restricciones se vuelven a formular a continuación:

$$\sum_{j \in J} t_{jk} + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} p_{l(i)k} = D_k \quad \forall k \quad (6.192)$$

$$\sum_{j \in J} \left[(\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} w_{jk} + r_j^s v_{jk} (1 - w_{jk}) \right] + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \geq R_k \quad \forall k \quad (6.193)$$

El vector de multiplicadores θ , de dimensión igual al doble de subperiodos del horizonte temporal analizado (K), está formado por el subvector λ , asociado a las restricciones de demanda (ecuaciones (6.192)), y el subvector μ , asociado a las restricciones de reserva rodante (ecuaciones (6.193)). Esto es:

$$\theta = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \quad (6.194)$$

siendo

$$\lambda = (\lambda_1 \quad \lambda_2 \cdots \lambda_K)^\top \quad (6.195)$$

$$\mu = (\mu_1 \quad \mu_2 \cdots \mu_K)^\top \quad (6.196)$$

El subproblema asociado a cada central térmica j se plantea de la siguiente forma:

Minimizar (t_j, v_j, y_j, z_j)

$$\sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] - \sum_{k=1}^K \{ \lambda_k(\nu) t_{jk} + \mu_k(\nu) [(\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} w_{jk} + r_j^s v_{jk} (1 - w_{jk})] \} \quad (6.197)$$

sujeto a

$$\underline{p}_j v_{jk} \leq t_{jk} \leq \bar{p}_j v_{jk} \quad \forall j \quad \forall k \quad (6.198)$$

$$t_{jk} - t_{jk-1} \leq r_j^s \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.199)$$

$$t_{jk-1} - t_{jk} \leq r_j^b \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.200)$$

$$y_{j1} - z_{j1} = v_{j1} - v_{j0} \quad \forall j \quad (6.201)$$

$$y_{jk} - z_{jk} = v_{jk} - v_{jk-1} \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.202)$$

$$(\tilde{s}_{j0} - T_j^f)(v_{j0} - v_{j1}) \geq 0 \quad \forall j \quad (6.203)$$

$$(\tilde{s}_{jk-1} - T_j^f)(v_{jk-1} - v_{jk}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.204)$$

$$(\tilde{s}_{j0} + T_j^p)(v_{j1} - v_{j0}) \geq 0 \quad \forall j \quad (6.205)$$

$$(\tilde{s}_{jk-1} + T_j^p)(v_{jk} - v_{jk-1}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.206)$$

El subproblema asociado a la cuenca hidráulica i se formula de la siguiente manera:

$$\text{Maximizar}_{(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)})} \sum_{l(i) \in l(i)} \sum_{k=1}^K \left[\lambda_k(\nu) p_{l(i)k} + \mu_k(\nu) (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \right] \quad (6.207)$$

sujeto a

$$p_{l(i)k} = \rho_{l(i)}(u_{l(i)k}, x_{l(i)k}) \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.208)$$

$$x_{l_i k+1} = x_{l_i k} - u_{l_i k} - s_{l_i k} + w_{l_i k} + \sum_{m(l(i)) \in m(l(i))} \left[u_{m(l(i)), k - \tau_{m(l(i))}} + s_{m(l(i)), k - \tau_{m(l(i))}} \right] \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.209)$$

$$\underline{u}_{l(i)} \leq u_{l(i)k} \leq \bar{u}_{l(i)vk} \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.210)$$

$$\underline{x}_{l(i)} \leq x_{l(i)k} \leq \bar{x}_{l(i)v} \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.211)$$

$$0 \leq s_{l(i)k} \leq \bar{x}_{l(i)} \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.212)$$

$$x_{l(i)1} = x_{l(i)}^0 \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad (6.213)$$

$$\underline{x}_{l(i)T} \leq x_{l(i)T+1} \leq \bar{x}_{l(i)T} \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad (6.214)$$

donde $\lambda_k(\nu)$ representa el valor del multiplicador asociado a la restricción de demanda en el subperiodo k y en la iteración ν y $\mu_k(\nu)$ representa el valor del multiplicador asociado a la restricción de reserva rodante en el subperiodo k y en la iteración ν .

El valor óptimo de la función objetivo del subproblema asociado a la central térmica j en cada iteración se calcula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \varphi_j^t(\nu) = & \sum_{k=1}^K \left[v_{jk}(\nu) a_j(t_{jk}(\nu)) + z_{jk}(\nu) c_j + y_{jk}(\nu) b(x_{jk}^d(\nu)) \right] - \sum_{k=1}^K \{ \lambda_k(\nu) t_{jk}(\nu) \\ & + \mu_k(\nu) \left[(\bar{p}_j - t_{jk}(\nu)) v_{jk}(\nu) w_{jk}(\nu) + r_j^s v_{jk}(\nu) (1 - w_{jk}(\nu)) \right] \} \end{aligned} \quad (6.215)$$

donde $t_{jk}(\nu)$, $v_{jk}(\nu)$, $y_{jk}(\nu)$, $z_{jk}(\nu)$ y $x_{jk}^d(\nu)$ contienen las variables óptimas de la resolución de los subproblemas térmicos en la iteración ν , t_{jk}^* , v_{jk}^* , y_{jk}^* , z_{jk}^* y $x_{jk}^{d*}(\nu)$ y $w_{jk}(\nu)$ vale 1 si $\bar{p}_j - t_{jk}(\nu) \leq r_j^s$ (es decir, si el hueco de potencia hacia arriba es menor que la rampa de subida) y 0 en caso contrario.

El valor de la función objetivo, cambiada de signo, en el maximizador del subproblema asociado a la cuenca hidráulica i en cada iteración ν se calcula de la siguiente manera:

$$\varphi_i^h(\nu) = - \sum_{k=1}^K \sum_{l(i) \in l(i)} \left[\lambda_k(\nu) t_{jk}(\nu) + \mu_k(\nu) (\bar{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k}(\nu)) \right] \quad (6.216)$$

donde $x_{l(i)}(\nu)$, $u_{l(i)}(\nu)$, $h_{l(i)}(\nu)$ y $s_{l(i)}(\nu)$ contienen las variables óptimas de la resolución de los subproblemas hidráulicos en la iteración ν , $x_{l(i)}^*$, $u_{l(i)}^*$, $h_{l(i)}^*$ y $s_{l(i)}^*$.

El valor de la función dual, en cada iteración ν , se calcula de la siguiente forma:

$$\phi(\lambda(\nu), \mu(\nu)) = \sum_{k=1}^K [\lambda_k(\nu) D_k + \mu_k(\nu) R_k] + \sum_{j \in j} \varphi_j^t(\nu) + \sum_{l(i) \in l(i)} \varphi_i^h(\nu) \quad (6.217)$$

donde $\varphi_j^t(\nu)$ y $\varphi_i^h(\nu)$ se evalúan utilizando las ecuaciones (6.215) y (6.216) respetivamente.

El vector subgradiente $s(\nu)$ que se empleará por cualquiera de los procedimientos de actualización de multiplicadores que se presentan en este capítulo, se define:

$$s(\nu) = \begin{pmatrix} s_D(\nu) \\ s_R(\nu) \end{pmatrix} \quad (6.218)$$

siendo

$$s_D(\nu) = \begin{pmatrix} D_1 - \sum_{j \in j} t_{j1}(\nu) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)1}(\nu) \\ D_2 - \sum_{j \in j} t_{j2}(\nu) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)2}(\nu) \\ \vdots \\ D_K - \sum_{j \in j} t_{jK}(\nu) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)K}(\nu) \end{pmatrix} \quad (6.219)$$

$$s_R(\nu) = \begin{pmatrix} R_1 - \sum_{j \in J} \left[(\bar{p}_j - t_{j1}(\nu)) v_{j1}(\nu) w_{j1}(\nu) + r_j^s v_{j1}(\nu) (1 - w_{j1}(\nu)) \right] \\ \quad - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} (\bar{h}_{l(i)1} - p_{l(i)1}(\nu)) \\ R_2 - \sum_{j \in J} \left[(\bar{p}_j - t_{j2}(\nu)) v_{j2}(\nu) w_{j2}(\nu) + r_j^s v_{j2}(\nu) (1 - w_{j2}(\nu)) \right] \\ \quad - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} (\bar{h}_{l(i)2} - p_{l(i)2}(\nu)) \\ \vdots \\ R_K - \sum_{j \in J} \left[(\bar{p}_j - t_{jK}(\nu)) v_{jK}(\nu) w_{jK}(\nu) + r_j^s v_{jK}(\nu) (1 - w_{jK}(\nu)) \right] \\ \quad - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} (\bar{h}_{l(i)K} - p_{l(i)K}(\nu)) \end{pmatrix} \quad (6.220)$$

Una vez definidos el vector de multiplicadores y la forma de calcular el valor de la función dual y un subgradiente en cada iteración, se procede al análisis de los métodos de actualización de multiplicadores con memoria basados en el método de los hiperplanos secantes.

Método de los hiperplanos secantes con límite máximo al número de hiperplanos

El problema dual relajado (paso 3b del *Algoritmo HPS-M*) en cada iteración ν , se plantea de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar}_{z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K} \quad z \\ & \text{sujeto a} \\ & z \leq \phi(\lambda(i), \mu(i)) + \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in J} t_{jk}(i) - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i)) \\ & + \sum_{k=1}^K \left[R_k - \sum_{j \in J} \left[(\bar{p}_j - t_{jk}(i)) v_{jk}(i) w_{jk}(i) + r_j^s v_{jk}(i) (1 - w_{jk}(i)) \right] \right. \\ & \quad \left. - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} (\bar{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k}(i)) \right] (\mu_k - \mu_k(i)) \\ & \quad \quad \quad i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n} \\ & \underline{\lambda}_k \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k \quad \forall k \\ & \underline{\mu}_k \leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k \quad \forall k \end{aligned} \quad (6.221)$$

donde n es el número de elementos del conjunto dinámico para el modelado del problema dual, $\bar{n}$ es el número máximo de hiperplanos y $\phi(\lambda(i), \mu(i))$ se evalúa utilizando las ecuaciones (6.217), (6.215) y (6.216).

Método de los hiperplanos secantes con penalización y límite máximo al número de hiperplanos

El centro de estabilidad en cada iteración ν se define de la siguiente forma:

$$\Theta(\nu) = \begin{pmatrix} \Lambda(\nu) \\ \Xi(\nu) \end{pmatrix} \quad (6.222)$$

siendo

$$\Lambda(\nu) = (\Lambda_1(\nu) \quad \Lambda_2(\nu) \cdots \Lambda_K(\nu))^T \quad (6.223)$$

$$\Xi(\nu) = (\Xi_1(\nu) \quad \Xi_2(\nu) \cdots \Xi_K(\nu))^T \quad (6.224)$$

donde la componente $\Lambda_k(\nu)$ está asociada a la componente $\lambda_k(\nu)$ del vector de multiplicadores (ecuación (6.195)) y la componente $\Xi_k(\nu)$ está asociada a la componente $\mu_k(\nu)$ del vector de multiplicadores (ecuación (6.196)).

El problema dual relajado (paso 3c del *Algoritmo HPS-PM*) en cada iteración ν , se plantea de la siguiente forma:

Maximizar $z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K$

$$z - \alpha(\nu) \left[\sum_{k=1}^K (\lambda_k - \Lambda_k(\nu))^2 + \sum_{k=1}^K (\mu_k - \Xi_k(\nu))^2 \right]$$

sujeito a

$$\begin{aligned} z &\leq \phi(\lambda(i), \mu(i)) + \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i)) \\ &+ \sum_{k=1}^K \left[R_k - \sum_{j \in j} \left[(\bar{p}_j - t_{jk}(i)) v_{jk}(i) w_{jk}(i) + r_j^s v_{jk}(i) (1 - w_{jk}(i)) \right] \right. \\ &\left. - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} \left(\bar{h}_{l(i)1} - p_{l(i)k}(i) \right) \right] (\mu_k - \mu_k(i)) \end{aligned}$$

$$i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n}$$

$$\underline{\lambda}_k \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k \quad \forall k$$

$$\underline{\mu}_k \leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k \quad \forall k$$

$$(6.225)$$

donde n es el número de elementos del conjunto dinámico para el modelado del problema dual, $\bar{n}$ es el número máximo de hiperplanos y $\phi(\lambda(i), \mu(i))$ se evalúa utilizando las ecuaciones (6.217), (6.215) y (6.216).

Método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos

El problema dual relajado (paso 3b del *Algoritmo HPS-CD*) en cada iteración ν , se plantea de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximizar}_{z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K} \quad z \\
 &\text{sujeto a} \\
 &z \leq \phi(\lambda(i), \mu(i)) + \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i)) \\
 &+ \sum_{k=1}^K \left[R_k - \sum_{j \in j} \left[(\bar{p}_j - t_{jk}(i)) v_{jk}(i) w_{jk}(i) + r_j^s v_{jk}(i) (1 - w_{jk}(i)) \right] \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} \left(\bar{h}_{l(i)1} - p_{l(i)k}(i) \right) \right] (\mu_k - \mu_k(i)) \\
 &\quad \quad \quad i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n} \\
 &\underline{\lambda}_k(\nu) \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k(\nu) \quad \forall k \\
 &\underline{\mu}_k(\nu) \leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k(\nu) \quad \forall k
 \end{aligned} \tag{6.226}$$

donde n es el número de elementos del conjunto dinámico para el modelado del problema dual, $\bar{n}$ es el número máximo de hiperplanos y $\phi(\lambda(i), \mu(i))$ se evalúa utilizando las ecuaciones (6.217), (6.215) y (6.216).

Una vez resuelto, en cada iteración, el problema dual relajado se procede a actualizar la región de factibilidad (paso 3c del *Algoritmo HPS-CD*) o, de otro modo, a actualizar los límites superior e inferior de cada componente del vector de multiplicadores λ y de cada componente del vector de multiplicadores μ . El procedimiento empleado para ello se describe en el apartado 6.8.1 (página 244).

Método de los hiperplanos secantes con penalización, control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos

El centro de estabilidad $\Theta(\nu)$ se define de la forma indicada en las ecuaciones (6.222)-(??).

El problema dual relajado a resolver (paso 3c del *Algoritmo HPS-CDP*) en cada iteración ν , se plantea de distinta forma según si se han ejecutado las $q - 1$ primeras iteraciones o si aún el contador de iteraciones aún no ha alcanzado este valor.

Si $\nu \leq q - 1$ el problema dual relajado se plantea:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar}_{z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K} \quad z \\
 & \text{sujeto a} \\
 & z \leq \phi(\lambda(i), \mu(i)) + \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i)) \\
 & + \sum_{k=1}^K \left[R_k - \sum_{j \in j} \left[(\bar{p}_j - t_{jk}(i)) v_{jk}(i) w_{jk}(i) + r_j^s v_{jk}(i) (1 - w_{jk}(i)) \right] \right. \\
 & \left. - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} \left(\bar{h}_{l(i)1} - p_{l(i)k}(i) \right) \right] (\mu_k - \mu_k(i)) \\
 & i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n} \\
 & \underline{\lambda}_k(\nu) \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k(\nu) \quad \forall k \\
 & \underline{\mu}_k(\nu) \leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k(\nu) \quad \forall k
 \end{aligned} \tag{6.227}$$

y en otro caso:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar}_{z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K} \\
 & z - \sum_{k=1}^K \alpha_\lambda(\nu, k) (\lambda_k - \Lambda_k(\nu))^2 - \sum_{k=1}^K \alpha_\mu(\nu, k) (\mu_k - \Xi_k(\nu))^2 \\
 & \text{sujeto a} \\
 & z \leq \phi(\lambda(i), \mu(i)) + \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i)) \\
 & + \sum_{k=1}^K \left[R_k - \sum_{j \in j} \left[(\bar{p}_j - t_{jk}(i)) v_{jk}(i) w_{jk}(i) + r_j^s v_{jk}(i) (1 - w_{jk}(i)) \right] \right. \\
 & \left. - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} \left(\bar{h}_{l(i)1} - p_{l(i)k}(i) \right) \right] (\mu_k - \mu_k(i)) \\
 & i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n} \\
 & \underline{\lambda}_k(\nu) \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k(\nu) \quad \forall k \\
 & \underline{\mu}_k(\nu) \leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k(\nu) \quad \forall k
 \end{aligned} \tag{6.228}$$

donde $\alpha_\lambda(\nu, k)$ es la constante de penalización asociada a la componente k del vector de multiplicadores λ en la iteración ν , $\alpha_\mu(\nu, k)$ es la constante de penalización asociada a la componente k del vector de multiplicadores μ en la iteración ν , n es el número de elementos del conjunto dinámico para el modelado del problema dual, $\bar{n}$ es el número máximo de hiperplanos y $\phi(\lambda(i), \mu(i))$ se evalúa utilizando las ecuaciones (6.217), (6.215) y (6.216).

El procedimiento de actualización de la región de factibilidad de los multiplicadores es el mismo

que se emplea en el método de actualización de multiplicadores con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos. Se describe en el apartado 6.8.1 (página 244).

El procedimiento de actualización de las constantes de penalización $\alpha_\lambda(\nu, k)$ y $\alpha_\lambda(\nu, k)$ se describe en el apartado 6.8.1 (página 247).

6.8.4 Modelo 4

El modelo 4 se presenta en el apartado 4.3.4. Las restricciones de carga consideradas son las restricciones de demanda (ecuaciones (4.95)), las restricciones de reserva rodante en su forma más simple (ecuaciones (4.96)) y las restricciones de demanda mínima (ecuaciones (4.97)). Se vuelven a formular a continuación:

$$\sum_{j \in J} t_{jk} + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k} = D_k \quad \forall k \quad (6.229)$$

$$\sum_{j \in J} \bar{p}_j v_{jk} + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k} \geq D_k + R_k \quad \forall k \quad (6.230)$$

$$\sum_{j \in J} \underline{p}_j v_{jk} \leq D_k \quad \forall k \quad (6.231)$$

El vector de multiplicadores θ es de dimensión igual al tres veces el número de subperiodos del horizonte temporal analizado (K). Está formado por el subvector λ , asociado a las restricciones de demanda (ecuaciones (6.229)), el subvector μ , asociado a las restricciones de reserva rodante (ecuaciones (6.230)) y el subvector α , asociado a las restricciones de demanda mínima (ecuaciones (6.231)). Esto es:

$$\theta = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \alpha \end{pmatrix} \quad (6.232)$$

siendo

$$\lambda = (\lambda_1 \quad \lambda_2 \cdots \lambda_K)^T \quad (6.233)$$

$$\mu = (\mu_1 \quad \mu_2 \cdots \mu_K)^T \quad (6.234)$$

$$\alpha = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \cdots \alpha_K)^T \quad (6.235)$$

El subproblema asociado a cada central térmica j se plantea de la siguiente forma:

Minimizar $_{(t_j, v_j, y_j, z_j)}$

$$\sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] - \sum_{k=1}^K \left[\lambda_k(\nu) t_{jk} + \mu_k(\nu) \bar{p}_j v_{jk} - \alpha_k(\nu) \underline{p}_k v_{jk} \right] \quad (6.236)$$

sujeeto a

$$\underline{p}_j v_{jk} \leq t_{jk} \leq \bar{p}_j v_{jk} \quad \forall j \quad \forall k \quad (6.237)$$

$$t_{jk} - t_{j,k-1} \leq r_j^s \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.238)$$

$$t_{j,k-1} - t_{jk} \leq r_j^b \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.239)$$

$$y_{j1} - z_{j1} = v_{j1} - v_{j0} \quad \forall j \quad (6.240)$$

$$y_{jk} - z_{jk} = v_{jk} - v_{j,k-1} \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.241)$$

$$(\tilde{s}_{j0} - T_j^f)(v_{j0} - v_{j1}) \geq 0 \quad \forall j \quad (6.242)$$

$$(\tilde{s}_{j,k-1} - T_j^f)(v_{j,k-1} - v_{jk}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.243)$$

$$(\tilde{s}_{j0} + T_j^p)(v_{j1} - v_{j0}) \geq 0 \quad \forall j \quad (6.244)$$

$$(\tilde{s}_{j,k-1} + T_j^p)(v_{jk} - v_{j,k-1}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.245)$$

El subproblema asociado a la cuenca hidráulica i se formula de la siguiente manera:

$$\text{Maximizar}_{(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)})} \sum_{l(i) \in i} \sum_{k=1}^K (\lambda_k(\nu) + \mu_k(\nu)) p_{l(i)k} \quad (6.246)$$

sujeeto a

$$p_{l(i)k} = \rho_{l(i)}(u_{l(i)k}, x_{l(i)k}) \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.247)$$

$$x_{l_i k+1} = x_{l_i k} - u_{l_i k} - s_{l_i k} + w_{l_i k} + \sum_{m(l(i)) \in m(l(i))} \left[u_{m(l(i)), k-\tau_{m(l(i))}} + s_{m(l(i)), k-\tau_{m(l(i))}} \right] \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.248)$$

$$\underline{u}_{l(i)} \leq u_{l(i)k} \leq \bar{u}_{l(i)vk} \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.249)$$

$$\underline{x}_{l(i)} \leq x_{l(i)k} \leq \bar{x}_{l(i)v} \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.250)$$

$$0 \leq s_{l(i)k} \leq \bar{s}_{l(i)} \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.251)$$

$$x_{l(i)1} = x_{l(i)}^0 \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad (6.252)$$

$$\underline{x}_{l(i)T} \leq x_{l(i)T+1} \leq \bar{x}_{l(i)T} \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad (6.253)$$

donde $\lambda_k(\nu)$ representa el valor del multiplicador asociado a la restricción de demanda en el subperiodo k y en la iteración ν , $\mu_k(\nu)$ representa el valor del multiplicador asociado a la restricción de reserva rodante en el subperiodo k y en la iteración ν y $\alpha_k(\nu)$ representa el valor del multiplicador asociado a la restricción de demanda mínima en el subperiodo k y en la iteración ν .

El valor óptimo de la función objetivo del subproblema asociado a la central térmica j en cada iteración se calcula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \varphi_j^t(\nu) = & \sum_{k=1}^K \left[v_{jk}(\nu) a_j(t_{jk}(\nu)) + z_{jk}(\nu) c_j + y_{jk}(\nu) b(x_{jk}^d(\nu)) \right] \\ & - \sum_{k=1}^K \left[\lambda_k(\nu) t_{jk}(\nu) + \mu_k(\nu) \bar{p}_j v_{jk}(\nu) - \alpha_k(\nu) \underline{p}_j v_{jk}(\nu) \right] \end{aligned} \quad (6.254)$$

donde $t_{jk}(\nu)$, $v_{jk}(\nu)$, $y_{jk}(\nu)$, $z_{jk}(\nu)$ contienen las variables óptimas de la resolución de los subproblemas térmicos en la iteración ν , t_{jk}^* , v_{jk}^* , y_{jk}^* y z_{jk}^* .

El valor de la función objetivo, cambiada de signo, en el maximizador del subproblema asociado a la cuenca hidráulica i en cada iteración ν se calcula de la siguiente manera:

$$\varphi_i^h(\nu) = - \sum_{k=1}^K \sum_{l(i) \in l(i)} (\lambda_k(\nu) + \mu_k(\nu)) p_{l(i)k}(\nu) \quad (6.255)$$

donde $x_{l(i)}(\nu)$, $u_{l(i)}(\nu)$, $h_{l(i)}(\nu)$ y $s_{l(i)}(\nu)$ contienen las variables óptimas de la resolución de los subproblemas hidráulicos en la iteración ν , $x_{l(i)}^*$, $u_{l(i)}^*$, $h_{l(i)}^*$ y $s_{l(i)}^*$.

El valor de la función dual, en cada iteración ν , se calcula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \phi(\lambda(\nu), \mu(\nu), \alpha(\nu)) = & \sum_{k=1}^K [\lambda_k(\nu) D_k + \mu_k(\nu) (R_k + D_k) - \alpha_k(\nu) D_k] + \sum_{j \in j} \varphi_j^t(\nu) \\ & + \sum_{l_i \in l(i)} \varphi_i^h(\nu) \end{aligned} \quad (6.256)$$

donde $\varphi_j^t(\nu)$ y $\varphi_i^h(\nu)$ se evalúan utilizando las ecuaciones (6.254) y (6.255) respectivamente.

El vector subgradiente $s(\nu)$ que se empleará por cualquiera de los procedimientos de actualización de multiplicadores que se presentan en este capítulo, está formado por tres subvectores. El primer subvector $s_D(\nu)$ está asociado a las restricciones de demanda, el segundo subvector $s_R(\nu)$ está asociado a las restricciones de reserva rodante y el tercer subvector $s_M(\nu)$ está asociado a las restricciones de demanda mínima. Se define:

$$s(\nu) = \begin{pmatrix} s_D(\nu) \\ s_R(\nu) \\ s_M(\nu) \end{pmatrix} \quad (6.257)$$

siendo

$$s_D(\nu) = \begin{pmatrix} D_1 - \sum_{j \in J} t_{j1}(\nu) - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} p_{l(i)1}(\nu) \\ D_2 - \sum_{j \in J} t_{j2}(\nu) - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} p_{l(i)2}(\nu) \\ \vdots \\ D_K - \sum_{j \in J} t_{jK}(\nu) - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} p_{l(i)K}(\nu) \end{pmatrix} \quad (6.258)$$

$$s_R(\nu) = \begin{pmatrix} D_1 + R_1 - \sum_{j \in J} \bar{p}_j v_{j1}(\nu) - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} p_{l(i)1}(\nu) \\ D_2 + R_2 - \sum_{j \in J} \bar{p}_j v_{j2}(\nu) - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} p_{l(i)2}(\nu) \\ \vdots \\ D_K + R_K - \sum_{j \in J} \bar{p}_j v_{jK}(\nu) - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} p_{l(i)K}(\nu) \end{pmatrix} \quad (6.259)$$

$$s_M(\nu) = \begin{pmatrix} \sum_{j \in J} \underline{p}_j v_{j1}(\nu) - D_1 \\ \sum_{j \in J} \underline{p}_j v_{j2}(\nu) - D_2 \\ \vdots \\ \sum_{j \in J} \underline{p}_j v_{jK}(\nu) - D_K \end{pmatrix} \quad (6.260)$$

Una vez definidos el vector de multiplicadores y la forma de calcular el valor de la función dual y un subgradiente en cada iteración, se procede al análisis de los métodos de actualización de multiplicadores con memoria basados en el método de los hiperplanos secantes.

Método de los hiperplanos secantes con límite máximo al número de hiperplanos

El problema dual relajado (paso 3b del *Algoritmo HPS-M*) en cada iteración ν , se plantea de la siguiente forma:

Maximizar $z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K$ z

sujeto a

$$\begin{aligned} z &\leq \phi(\lambda(i), \mu(i), \alpha(i)) + \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in J} t_{jk}(i) - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i)) \\ &+ \sum_{k=1}^K \left[D_k + R_k - \sum_{j \in J} \bar{p}_j v_{jk} - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} (\bar{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k}) \right] (\mu_k - \mu_k(i)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^K \left(\sum_{j \in j} \bar{p}_j v_{jk} - D_k \right) (\alpha_k - \alpha_k(i)) \\
& i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n} \\
& \underline{\lambda}_k \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k \quad \forall k \\
& \underline{\mu}_k \leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k \quad \forall k \\
& \underline{\alpha}_k \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k \quad \forall k
\end{aligned} \tag{6.261}$$

donde n es el número de elementos del conjunto dinámico para el modelado del problema dual, $\bar{n}$ es el número máximo de hiperplanos y $\phi(\lambda(i), \mu(i), \alpha(i))$ se evalúa utilizando las ecuaciones (6.256), (6.254) y (6.255).

Método de los hiperplanos secantes con penalización y límite máximo al número de hiperplanos

El centro de estabilidad en cada iteración $\Theta(\nu)$ está formado por tres subvectores: el subvector $\Lambda(\nu)$ asociado al vector de multiplicadores λ (ecuación (6.233)), el subvector $\Xi(\nu)$ asociado al vector de multiplicadores μ (ecuación (6.234)) y el subvector $\Upsilon(\nu)$ asociado al vector de multiplicadores α (ecuación (6.235)). Se define de la siguiente forma:

$$\Theta(\nu) = \begin{pmatrix} \Lambda(\nu) \\ \Xi(\nu) \\ \Upsilon(\nu) \end{pmatrix} \tag{6.262}$$

siendo

$$\Lambda(\nu) = (\Lambda_1(\nu) \quad \Lambda_2(\nu) \cdots \Lambda_K(\nu))^T \tag{6.263}$$

$$\Xi(\nu) = (\Xi_1(\nu) \quad \Xi_2(\nu) \cdots \Xi_K(\nu))^T \tag{6.264}$$

$$\Upsilon(\nu) = (\Upsilon_1(\nu) \quad \Upsilon_2(\nu) \cdots \Upsilon_K(\nu))^T \tag{6.265}$$

El problema dual relajado (paso 3c del *Algoritmo HPS-PM*) en cada iteración ν , se plantea de la siguiente forma:

Maximizar $z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K$

$$z - \alpha(\nu) \left[\sum_{k=1}^K (\lambda_k - \Lambda_k(\nu))^2 + \sum_{k=1}^K (\mu_k - \Xi_k(\nu))^2 + \sum_{k=1}^K (\alpha_k - \Upsilon_k(\nu))^2 \right]$$

sujeto a

$$z \leq \phi(\lambda(i), \mu(i), \alpha(i)) + \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i))$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^K \left[D_k + R_k - \sum_{j \in J} \bar{p}_j v_{jk} - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k}) \right] (\mu_k - \mu_k(i)) \\
& + \sum_{k=1}^K \left(\sum_{j \in J} \bar{p}_j v_{jk} - D_k \right) (\alpha_k - \alpha_k(i)) \\
& i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n} \\
& \underline{\lambda}_k \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k \quad \forall k \\
& \underline{\mu}_k \leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k \quad \forall k \\
& \underline{\alpha}_k \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k \quad \forall k
\end{aligned} \tag{6.266}$$

donde n es el número de elementos del conjunto dinámico para el modelado del problema dual, $\bar{n}$ es el número máximo de hiperplanos y $\phi(\lambda(i), \mu(i), \alpha(i))$ se evalúa utilizando las ecuaciones (6.256), (6.254) y (6.255).

Método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos

El problema dual relajado (paso 3b del *Algoritmo HPS-CD*) en cada iteración ν , se plantea de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
& \text{Maximizar}_{z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K} \quad z \\
& \text{sujeto a} \\
& z \leq \phi(\lambda(i), \mu(i), \alpha(i)) + \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in J} t_{jk}(i) - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i)) \\
& + \sum_{k=1}^K \left[D_k + R_k - \sum_{j \in J} \bar{p}_j v_{jk} - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k}) \right] (\mu_k - \mu_k(i)) \\
& + \sum_{k=1}^K \left(\sum_{j \in J} \bar{p}_j v_{jk} - D_k \right) (\alpha_k - \alpha_k(i)) \\
& i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n} \\
& \underline{\lambda}_k(\nu) \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k(\nu) \quad \forall k \\
& \underline{\mu}_k(\nu) \leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k(\nu) \quad \forall k \\
& \underline{\alpha}_k \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k \quad \forall k
\end{aligned} \tag{6.267}$$

donde n es el número de elementos del conjunto dinámico para el modelado del problema dual, $\bar{n}$ es el número máximo de hiperplanos y $\phi(\lambda(i), \mu(i), \alpha(i))$ se evalúa utilizando las ecuaciones (6.256), (6.254) y (6.255).

Una vez resuelto, en cada iteración, el problema dual relajado se procede a actualizar la región de factibilidad (paso 3c del *Algoritmo HPS-CD*) o, de otro modo, a actualizar los límites superior e inferior de cada componente del vector de multiplicadores λ y de cada componente del vector de multiplicadores μ . El procedimiento empleado para ello se describe en el apartado 6.8.1 (página 244).

Método de los hiperplanos secantes con penalización, control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos

El centro de estabilidad $\Theta(\nu)$ se define de la forma indicada en las ecuaciones (6.262)-(6.265).

El problema dual relajado a resolver (paso 3c del *Algoritmo HPS-CDP*) en cada iteración ν , se plantea de distinta forma según si se han ejecutado las $q - 1$ primeras iteraciones o si aún el contador de iteraciones aún no ha alcanzado este valor.

Si $\nu \leq q - 1$ el problema dual relajado se plantea:

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximizar}_{z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K} \quad z \\
 &\text{sujeto a} \\
 &z \leq \phi(\lambda(i), \mu(i), \alpha(i)) + \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i)) \\
 &+ \sum_{k=1}^K \left[D_k + R_k - \sum_{j \in j} \bar{p}_j v_{jk} - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k}) \right] (\mu_k - \mu_k(i)) \\
 &+ \sum_{k=1}^K \left(\sum_{j \in j} \bar{p}_j v_{jk} - D_k \right) (\alpha_k - \alpha_k(i)) \\
 &\quad \quad \quad i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n} \\
 &\underline{\lambda}_k(\nu) \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k(\nu) \quad \forall k \\
 &\underline{\mu}_k(\nu) \leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k(\nu) \quad \forall k \\
 &\underline{\alpha}_k(\nu) \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k(\nu) \quad \forall k
 \end{aligned} \tag{6.268}$$

y en otro caso:

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximizar}_{z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K} \\
 &z - \sum_{k=1}^K \alpha_\lambda(\nu, k) (\lambda_k - \Lambda_k(\nu))^2 - \sum_{k=1}^K \alpha_\mu(\nu, k) (\mu_k - \Xi_k(\nu))^2 - \sum_{k=1}^K \alpha_\alpha(\nu, k) (\alpha_k - \Upsilon_k(\nu))^2 \\
 &\text{sujeto a} \\
 &z \leq \phi(\lambda(i), \mu(i), \alpha(i)) + \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^K \left[D_k + R_k - \sum_{j \in j} \bar{p}_j v_{jk} - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k}) \right] (\mu_k - \mu_k(i)) \\
& + \sum_{k=1}^K \left(\sum_{j \in j} \bar{p}_j v_{jk} - D_k \right) (\alpha_k - \alpha_k(i)) \\
& i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n} \\
& \underline{\lambda}_k(\nu) \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k(\nu) \quad \forall k \\
& \underline{\mu}_k(\nu) \leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k(\nu) \quad \forall k \\
& \underline{\alpha}_k(\nu) \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k(\nu) \quad \forall k
\end{aligned} \tag{6.269}$$

donde $\alpha_\lambda(\nu, k)$ es la constante de penalización asociada a la componente k del vector de multiplicadores λ en la iteración ν , $\alpha_\mu(\nu, k)$ es la constante de penalización asociada a la componente k del vector de multiplicadores μ en la iteración ν , $\alpha_\alpha(\nu, k)$ es la constante de penalización asociada a la componente k del vector de multiplicadores α en la iteración ν , n es el número de elementos del conjunto dinámico para el modelado del problema dual, $\bar{n}$ es el número máximo de hiperplanos y $\phi(\lambda(i), \mu(i), \alpha(i))$ se evalúa utilizando las ecuaciones (6.256), (6.254) y (6.255).

El procedimiento de actualización de la región de factibilidad de los multiplicadores se describe en el apartado 6.8.1 (página 244).

El procedimiento de actualización de las constantes de penalización se describe en el apartado 6.8.1 (página 247).

6.8.5 Modelo 5

El modelo 5 se presenta en el apartado 4.3.5. Las restricciones de carga consideradas son las restricciones de demanda (ecuaciones (4.113)), las restricciones de reserva rodante (ecuaciones (4.114)) y las restricciones de demanda mínima (ecuaciones (4.115)). Se vuelven a formular a continuación:

$$\sum_{j \in j} t_{jk} + \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k} = D_k \quad \forall k \tag{6.270}$$

$$\sum_{j \in j} (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} + \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \geq R_k \quad \forall k \tag{6.271}$$

$$\sum_{j \in j} \underline{p}_j v_{jk} \leq D_k \quad \forall k \tag{6.272}$$

El vector de multiplicadores θ es de dimensión igual al tres veces el número de subperiodos del horizonte temporal analizado (K). Está formado por el subvector λ , asociado a las restricciones

de demanda (ecuaciones (6.270)), el subvector μ , asociado a las restricciones de reserva rodante (ecuaciones (6.271)) y el subvector α , asociado a las restricciones de demanda mínima (ecuaciones (6.272)). Esto es:

$$\theta = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \alpha \end{pmatrix} \quad (6.273)$$

siendo

$$\lambda = (\lambda_1 \quad \lambda_2 \cdots \lambda_K)^T \quad (6.274)$$

$$\mu = (\mu_1 \quad \mu_2 \cdots \mu_K)^T \quad (6.275)$$

$$\alpha = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \cdots \alpha_K)^T \quad (6.276)$$

El subproblema asociado a cada central térmica j se plantea de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar}_{(t_j, v_j, y_j, z_j)} \quad & \sum_{k=1}^K [v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d)] \\ & - \sum_{k=1}^K [\lambda_k(\nu) t_{jk} + \mu_k(\nu) (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} - \alpha_k(\nu) \underline{p}_k v_{jk}] \end{aligned} \quad (6.277)$$

sujeto a

$$\underline{p}_j v_{jk} \leq t_{jk} \leq \bar{p}_j v_{jk} \quad \forall j \quad \forall k \quad (6.278)$$

$$t_{jk} - t_{j,k-1} \leq r_j^s \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.279)$$

$$t_{j,k-1} - t_{jk} \leq r_j^b \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.280)$$

$$y_{j1} - z_{j1} = v_{j1} - v_{j0} \quad \forall j \quad (6.281)$$

$$y_{jk} - z_{jk} = v_{jk} - v_{j,k-1} \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.282)$$

$$(\tilde{s}_{j0} - T_j^f)(v_{j0} - v_{j1}) \geq 0 \quad \forall j \quad (6.283)$$

$$(\tilde{s}_{j,k-1} - T_j^f)(v_{j,k-1} - v_{jk}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.284)$$

$$(\tilde{s}_{j0} + T_j^p)(v_{j1} - v_{j0}) \geq 0 \quad \forall j \quad (6.285)$$

$$(\tilde{s}_{j,k-1} + T_j^p)(v_{jk} - v_{j,k-1}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.286)$$

El subproblema asociado a la cuenca hidráulica i se formula de la siguiente manera:

$$\text{Maximizar}_{(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)})} \quad \sum_{l(i) \in i} \sum_{k=1}^K [\lambda_k(\nu) p_{l(i)k} + \mu_k(\nu) (\bar{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k})] \quad (6.287)$$

sujeto a

$$p_{l(i)k} = \rho_{l(i)}(u_{l(i)k}, x_{l(i)k}) \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.288)$$

$$x_{l_i k+1} = x_{l_i k} - u_{l_i k} - s_{l_i k} + w_{l_i k} + \sum_{m(l(i)) \in m(l(i))} \left[u_{m(l(i)), k-\tau_{m(l(i))}} + s_{m(l(i)), k-\tau_{m(l(i))}} \right] \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.289)$$

$$\underline{u}_{l(i)} \leq u_{l(i)k} \leq \overline{u}_{l(i)vk} \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.290)$$

$$\underline{x}_{l(i)} \leq x_{l(i)k} \leq \overline{x}_{l(i)v} \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.291)$$

$$0 \leq s_{l(i)k} \leq \overline{s}_{l(i)} \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.292)$$

$$x_{l(i)1} = x_{l(i)}^0 \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad (6.293)$$

$$\underline{x}_{l(i)T} \leq x_{l(i)T+1} \leq \overline{x}_{l(i)T} \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad (6.294)$$

donde $\lambda_k(\nu)$ representa el valor del multiplicador asociado a la restricción de demanda en el subperiodo k y en la iteración ν , $\mu_k(\nu)$ representa el valor del multiplicador asociado a la restricción de reserva rodante en el subperiodo k y en la iteración ν y $\alpha_k(\nu)$ representa el valor del multiplicador asociado a la restricción de demanda mínima en el subperiodo k y en la iteración ν .

El valor óptimo de la función objetivo del subproblema asociado a la central térmica j en cada iteración se calcula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \varphi_j^t(\nu) = & \sum_{k=1}^K \left[v_{jk}(\nu) a_j(t_{jk}(\nu)) + z_{jk}(\nu) c_j + y_{jk}(\nu) b(x_{jk}^d(\nu)) \right] \\ & - \sum_{k=1}^K \left[\lambda_k(\nu) t_{jk}(\nu) + \mu_k(\nu) (\overline{p}_j - t_{jk}) v_{jk}(\nu) - \alpha_k(\nu) \underline{p}_j v_{jk}(\nu) \right] \end{aligned} \quad (6.295)$$

donde $t_{jk}(\nu)$, $v_{jk}(\nu)$, $y_{jk}(\nu)$, $z_{jk}(\nu)$ contienen las variables óptimas de la resolución de los subproblemas térmicos en la iteración ν , t_{jk}^* , v_{jk}^* , y_{jk}^* y z_{jk}^* .

El valor de la función objetivo, cambiada de signo, en el maximizador del subproblema asociado a la cuenca hidráulica i en cada iteración ν se calcula de la siguiente manera:

$$\varphi_i^h(\nu) = - \sum_{k=1}^K \sum_{l(i) \in l(i)} \left[\lambda_k(\nu) p_{l(i)k}(\nu) + \mu_k(\nu) (\overline{h}_{l(i)k}(\nu) - p_{l(i)k}(\nu)) \right] \quad (6.296)$$

donde $x_{l(i)}(\nu)$, $u_{l(i)}(\nu)$, $h_{l(i)}(\nu)$ y $s_{l(i)}(\nu)$ contienen las variables óptimas de la resolución de los subproblemas hidráulicos en la iteración ν , $x_{l(i)}^*$, $u_{l(i)}^*$, $h_{l(i)}^*$ y $s_{l(i)}^*$.

El valor de la función dual, en cada iteración ν , se calcula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \phi(\lambda(\nu), \mu(\nu), \alpha(\nu)) = & \sum_{k=1}^K [\lambda_k(\nu) D_k + \mu_k(\nu) R_k - \alpha_k(\nu) D_k] + \sum_{j \in j} \varphi_j^t(\nu) \\ & + \sum_{l_i \in l(i)} \varphi_i^h(\nu) \end{aligned} \quad (6.297)$$

donde $\varphi_j^t(\nu)$ y $\varphi_i^h(\nu)$ se evalúan utilizando las ecuaciones (6.295) y (6.296) respectivamente.

El vector subgradiente $s(\nu)$ que se empleará por cualquiera de los procedimientos de actualización de multiplicadores que se presentan en este capítulo, se define:

$$s(\nu) = \begin{pmatrix} s_D(\nu) \\ s_R(\nu) \\ s_M(\nu) \end{pmatrix} \quad (6.298)$$

siendo

$$s_D(\nu) = \begin{pmatrix} D_1 - \sum_{j \in J} t_{j1}(\nu) - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} p_{l(i)1}(\nu) \\ D_2 - \sum_{j \in J} t_{j2}(\nu) - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} p_{l(i)2}(\nu) \\ \vdots \\ D_K - \sum_{j \in J} t_{jK}(\nu) - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} p_{l(i)K}(\nu) \end{pmatrix} \quad (6.299)$$

$$s_R(\nu) = \begin{pmatrix} R_1 - \sum_{j \in J} (\bar{p}_j - t_{j1}(\nu)) v_{j1}(\nu) - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} (\bar{h}_{l(i)1} - p_{l(i)1}(\nu)) \\ R_2 - \sum_{j \in J} (\bar{p}_j - t_{j2}(\nu)) v_{j2}(\nu) - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} (\bar{h}_{l(i)2} - p_{l(i)2}(\nu)) \\ \vdots \\ R_K - \sum_{j \in J} (\bar{p}_j - t_{jK}(\nu)) v_{jK}(\nu) - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} (\bar{h}_{l(i)K} - p_{l(i)K}(\nu)) \end{pmatrix} \quad (6.300)$$

$$s_M(\nu) = \begin{pmatrix} \sum_{j \in J} \underline{p}_j v_{j1}(\nu) - D_1 \\ \sum_{j \in J} \underline{p}_j v_{j2}(\nu) - D_2 \\ \vdots \\ \sum_{j \in J} \underline{p}_j v_{jK}(\nu) - D_K \end{pmatrix} \quad (6.301)$$

Una vez definidos el vector de multiplicadores y la forma de calcular el valor de la función dual y un subgradiente en cada iteración, se procede al análisis de los métodos de actualización de multiplicadores con memoria basados en el método de los hiperplanos secantes.

Método de los hiperplanos secantes con límite máximo al número de hiperplanos

El problema dual relajado (paso 3b del *Algoritmo HPS-M*) en cada iteración ν , se plantea de la siguiente forma:

$$\text{Maximizar}_{z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K} \quad \mathcal{Z}$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
 z \leq & \phi(\lambda(i), \mu(i), \alpha(i)) + \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i)) \\
 & + \sum_{k=1}^K \left[R_k - \sum_{j \in j} (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k}) \right] (\mu_k - \mu_k(i)) \\
 & + \sum_{k=1}^K \left(\sum_{j \in j} \bar{p}_j v_{jk} - D_k \right) (\alpha_k - \alpha_k(i)) \\
 & i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n} \\
 \underline{\lambda}_k \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k & \quad \forall k \\
 \underline{\mu}_k \leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k & \quad \forall k \\
 \underline{\alpha}_k \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k & \quad \forall k
 \end{aligned} \tag{6.302}$$

donde n es el número de elementos del conjunto dinámico para el modelado del problema dual, $\bar{n}$ es el número máximo de hiperplanos y $\phi(\lambda(i), \mu(i), \alpha(i))$ se evalúa utilizando las ecuaciones (6.297), (6.295) y (6.296).

Método de los hiperplanos secantes con penalización y límite máximo al número de hiperplanos

El centro de estabilidad en cada iteración $\Theta(\nu)$ está formado por tres subvectores: el subvector $\Lambda(\nu)$ asociado al vector de multiplicadores λ (ecuación (6.274)), el subvector $\Xi(\nu)$ asociado al vector de multiplicadores μ (ecuación (6.275)) y el subvector $\Upsilon(\nu)$ asociado al vector de multiplicadores α (ecuación (6.276)). Se define de la siguiente forma:

$$\Theta(\nu) = \begin{pmatrix} \Lambda(\nu) \\ \Xi(\nu) \\ \Upsilon(\nu) \end{pmatrix} \tag{6.303}$$

siendo

$$\Lambda(\nu) = (\Lambda_1(\nu) \quad \Lambda_2(\nu) \cdots \Lambda_K(\nu))^T \tag{6.304}$$

$$\Xi(\nu) = (\Xi_1(\nu) \quad \Xi_2(\nu) \cdots \Xi_K(\nu))^T \tag{6.305}$$

$$\Upsilon(\nu) = (\Upsilon_1(\nu) \quad \Upsilon_2(\nu) \cdots \Upsilon_K(\nu))^T \tag{6.306}$$

El problema dual relajado (paso 3c del *Algoritmo HPS-PM*) en cada iteración ν , se plantea de la siguiente forma:

$$\text{Maximizar}_{z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K}$$

$$\begin{aligned}
& z - \alpha(\nu) \left[\sum_{k=1}^K (\lambda_k - \Lambda_k(\nu))^2 + \sum_{k=1}^K (\mu_k - \Xi_k(\nu))^2 + \sum_{k=1}^K (\alpha_k - \Upsilon_k(\nu))^2 \right] \\
& \text{sujeto a} \\
& z \leq \phi(\lambda(i), \mu(i), \alpha(i)) + \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i)) \\
& + \sum_{k=1}^K \left[R_k - \sum_{j \in j} (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k}) \right] (\mu_k - \mu_k(i)) \\
& + \sum_{k=1}^K \left(\sum_{j \in j} \bar{p}_j v_{jk} - D_k \right) (\alpha_k - \alpha_k(i)) \\
& i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n} \\
& \underline{\lambda}_k \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k \quad \forall k \\
& \underline{\mu}_k \leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k \quad \forall k \\
& \underline{\alpha}_k \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k \quad \forall k
\end{aligned} \tag{6.307}$$

donde n es el número de elementos del conjunto dinámico para el modelado del problema dual, $\bar{n}$ es el número máximo de hiperplanos y $\phi(\lambda(i), \mu(i), \alpha(i))$ se evalúa utilizando las ecuaciones (6.297), (6.295) y (6.296).

Método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos

El problema dual relajado (paso 3b del *Algoritmo HPS-CD*) en cada iteración ν , se plantea de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
& \text{Maximizar}_{z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K} \quad z \\
& \text{sujeto a} \\
& z \leq \phi(\lambda(i), \mu(i), \alpha(i)) + \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i)) \\
& + \sum_{k=1}^K \left[R_k - \sum_{j \in j} (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k}) \right] (\mu_k - \mu_k(i)) \\
& + \sum_{k=1}^K \left(\sum_{j \in j} \bar{p}_j v_{jk} - D_k \right) (\alpha_k - \alpha_k(i)) \\
& i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n} \\
& \underline{\lambda}_k(\nu) \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k(\nu) \quad \forall k \\
& \underline{\mu}_k(\nu) \leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k(\nu) \quad \forall k \\
& \underline{\alpha}_k \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k \quad \forall k
\end{aligned} \tag{6.308}$$

donde n es el número de elementos del conjunto dinámico para el modelado del problema dual, $\bar{n}$ es el número máximo de hiperplanos y $\phi(\lambda(i), \mu(i), \alpha(i))$ se evalúa utilizando las ecuaciones (6.297), (6.295) y (6.296).

Una vez resuelto, en cada iteración, el problema dual relajado se procede a actualizar la región de factibilidad (paso 3c del *Algoritmo HPS-CD*) o, de otro modo, a actualizar los límites superior e inferior de cada componente del vector de multiplicadores λ y de cada componente del vector de multiplicadores μ . El procedimiento empleado se describe en el apartado 6.8.1 (página 244).

Método de los hiperplanos secantes con penalización, control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos

El centro de estabilidad $\Theta(\nu)$ se define de la forma indicada en la ecuaciones (6.303)-(6.306).

El problema dual relajado a resolver (paso 3c del *Algoritmo HPS-CDP*) en cada iteración ν , se plantea de distinta forma según si se han ejecutado las $q - 1$ primeras iteraciones o si aún el contador de iteraciones aún no ha alcanzado este valor.

Si $\nu \leq q - 1$ el problema dual relajado se plantea:

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximizar}_{z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K} \quad z \\
 &\text{sujeto a} \\
 &z \leq \phi(\lambda(i), \mu(i), \alpha(i)) + \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i)) \\
 &+ \sum_{k=1}^K \left[R_k - \sum_{j \in j} (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k}) \right] (\mu_k - \mu_k(i)) \\
 &+ \sum_{k=1}^K \left(\sum_{j \in j} \bar{p}_j v_{jk} - D_k \right) (\alpha_k - \alpha_k(i)) \\
 &\quad \quad \quad i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n} \\
 &\underline{\lambda}_k(\nu) \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k(\nu) \quad \forall k \\
 &\underline{\mu}_k(\nu) \leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k(\nu) \quad \forall k \\
 &\underline{\alpha}_k(\nu) \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k(\nu) \quad \forall k
 \end{aligned} \tag{6.309}$$

y en otro caso:

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximizar}_{z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K} \\
 &z - \sum_{k=1}^K \alpha_\lambda(\nu, k) (\lambda_k - \Lambda_k(\nu))^2 - \sum_{k=1}^K \alpha_\mu(\nu, k) (\mu_k - \Xi_k(\nu))^2 - \sum_{k=1}^K \alpha_\alpha(\nu, k) (\alpha_k - \Upsilon_k(\nu))^2
 \end{aligned}$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
 z \leq & \phi(\lambda(i), \mu(i), \alpha(i)) + \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i)) \\
 & + \sum_{k=1}^K \left[R_k - \sum_{j \in j} (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k}) \right] (\mu_k - \mu_k(i)) \\
 & + \sum_{k=1}^K \left(\sum_{j \in j} \bar{p}_j v_{jk} - D_k \right) (\alpha_k - \alpha_k(i)) \\
 & i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n} \\
 \underline{\lambda}_k(\nu) \leq & \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k(\nu) \quad \forall k \\
 \underline{\mu}_k(\nu) \leq & \mu_k \leq \bar{\mu}_k(\nu) \quad \forall k \\
 \underline{\alpha}_k(\nu) \leq & \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k(\nu) \quad \forall k
 \end{aligned} \tag{6.310}$$

donde $\alpha_\lambda(\nu, k)$ es la constante de penalización asociada a la componente k del vector de multiplicadores λ en la iteración ν , $\alpha_\mu(\nu, k)$ es la constante de penalización asociada a la componente k del vector de multiplicadores μ en la iteración ν , $\alpha_\alpha(\nu, k)$ es la constante de penalización asociada a la componente k del vector de multiplicadores α en la iteración ν , n es el número de elementos del conjunto dinámico para el modelado del problema dual, $\bar{n}$ es el número máximo de hiperplanos y $\phi(\lambda(i), \mu(i), \alpha(i))$ se evalúa utilizando las ecuaciones (6.297), (6.295) y (6.296).

El procedimientos de actualización de la región de factibilidad de los multiplicadores se describe en el apartado 6.8.1 (página 244).

El procedimiento de actualización de las constantes de penalización se describe en el apartado 6.8.1 (página 247).

6.8.6 Modelo 6

El modelo 6 se presenta en el apartado 4.3.6. Las restricciones de carga consideradas son las restricciones de demanda (ecuaciones (4.131)), las restricciones de reserva rodante modeladas a través de las ecuaciones (4.132)) y las restricciones de demanda mínima (4.133). Estas restricciones se vuelven a formular a continuación:

$$\sum_{j \in j} t_{jk} + \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k} = D_k \quad \forall k \tag{6.311}$$

$$\sum_{j \in j} \left[(\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} w_{jk} + r_j^s v_{jk} (1 - w_{jk}) \right] + \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k}) \geq R_k \quad \forall k \tag{6.312}$$

$$\sum_{j \in j} \underline{p}_j v_{jk} \leq D_k \quad \forall k \quad (6.313)$$

El vector de multiplicadores θ es de dimensión igual al tres veces el número de subperiodos del horizonte temporal analizado (K). Está formado por el subvector λ , asociado a las restricciones de demanda (ecuaciones (6.311)), el subvector μ , asociado a las restricciones de reserva rodante (ecuaciones (6.312)) y el subvector α , asociado a las restricciones de demanda mínima (ecuaciones (6.313)). Esto es:

$$\theta = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \alpha \end{pmatrix} \quad (6.314)$$

siendo

$$\lambda = (\lambda_1 \quad \lambda_2 \cdots \lambda_K)^\top \quad (6.315)$$

$$\mu = (\mu_1 \quad \mu_2 \cdots \mu_K)^\top \quad (6.316)$$

$$\alpha = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \cdots \alpha_K)^\top \quad (6.317)$$

El subproblema asociado a cada central térmica j se plantea de la siguiente forma:

Minimizar $_{(t_j, v_j, y_j, z_j)}$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] - \sum_{k=1}^K \{ \lambda_k(\nu) t_{jk} \\ & + \mu_k(\nu) \left[(\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} w_{jk} + r_j^s v_{jk} (1 - w_{jk}) \right] - \alpha_k \underline{p}_j v_{jk} \} \end{aligned} \quad (6.318)$$

sujeto a

$$\underline{p}_j v_{jk} \leq t_{jk} \leq \bar{p}_j v_{jk} \quad \forall j \quad \forall k \quad (6.319)$$

$$t_{jk} - t_{jk-1} \leq r_j^s \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.320)$$

$$t_{jk-1} - t_{jk} \leq r_j^b \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.321)$$

$$y_{j1} - z_{j1} = v_{j1} - v_{j0} \quad \forall j \quad (6.322)$$

$$y_{jk} - z_{jk} = v_{jk} - v_{jk-1} \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.323)$$

$$(\tilde{s}_{j0} - T_j^f) (v_{j0} - v_{j1}) \geq 0 \quad \forall j \quad (6.324)$$

$$(\tilde{s}_{jk-1} - T_j^f) (v_{jk-1} - v_{jk}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.325)$$

$$(\tilde{s}_{j0} + T_j^p) (v_{j1} - v_{j0}) \geq 0 \quad \forall j \quad (6.326)$$

$$(\tilde{s}_{jk-1} + T_j^p) (v_{jk} - v_{jk-1}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.327)$$

El subproblema asociado a la cuenca hidráulica i se formula de la siguiente manera:

$$\text{Maximizar}_{(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)})} \sum_{l(i) \in l(i)} \sum_{k=1}^K \left[\lambda_k(\nu) p_{l(i)k} + \mu_k(\nu) (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \right] \quad (6.328)$$

sujeito a

$$p_{l(i)k} = \rho_{l(i)}(u_{l(i)k}, x_{l(i)k}) \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.329)$$

$$x_{l_i k+1} = x_{l_i k} - u_{l_i k} - s_{l_i k} + w_{l_i k} + \sum_{m(l(i)) \in m(l(i))} \left[u_{m(l(i)), k-\tau_{m(l(i))}} + s_{m(l(i)), k-\tau_{m(l(i))}} \right] \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.330)$$

$$\underline{u}_{l(i)} \leq u_{l(i)k} \leq \bar{u}_{l(i)v} \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.331)$$

$$\underline{x}_{l(i)} \leq x_{l(i)k} \leq \bar{x}_{l(i)v} \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.332)$$

$$0 \leq s_{l(i)k} \leq \bar{x}_{l(i)} \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.333)$$

$$x_{l(i)1} = x_{l(i)}^0 \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad (6.334)$$

$$\underline{x}_{l(i)T} \leq x_{l(i)T+1} \leq \bar{x}_{l(i)T} \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad (6.335)$$

donde $\lambda_k(\nu)$ representa el valor del multiplicador asociado a la restricción de demanda en el subperiodo k y en la iteración ν , $\mu_k(\nu)$ representa el valor del multiplicador asociado a la restricción de reserva rodante en el subperiodo k y en la iteración ν y α_k representa el vector de multiplicadores asociado a la restricción de demanda mínima en el subperiodo k y en la iteración ν .

El valor óptimo de la función objetivo del subproblema asociado a la central térmica j en cada iteración se calcula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \varphi_j^t(\nu) = & \sum_{k=1}^K \left[v_{jk}(\nu) a_j(t_{jk}(\nu)) + z_{jk}(\nu) c_j + y_{jk}(\nu) b(x_{jk}^d(\nu)) \right] - \sum_{k=1}^K \{ \lambda_k(\nu) t_{jk}(\nu) \\ & + \mu_k(\nu) [(\bar{p}_j - t_{jk}(\nu)) v_{jk}(\nu) w_{jk}(\nu) + r_j^s v_{jk}(\nu) (1 - w_{jk}(\nu))] - \alpha_k(\nu) \underline{p}_j v_{jk}(\nu) \} \end{aligned} \quad (6.336)$$

donde $t_{jk}(\nu)$, $v_{jk}(\nu)$, $y_{jk}(\nu)$, $z_{jk}(\nu)$ y $x_{jk}^d(\nu)$ contienen las variables óptimas de la resolución de los subproblemas térmicos en la iteración ν , t_{jk}^* , v_{jk}^* , y_{jk}^* , z_{jk}^* y $x_{jk}^{d*}(\nu)$ y $w_{jk}(\nu)$ vale 1 si $\bar{p}_j - t_{jk}(\nu) \leq r_j^s$ (es decir, si el hueco de potencia hacia arriba es menor que la rampa de subida) y 0 en caso contrario.

El valor de la función objetivo, cambiada de signo, en el maximizador del subproblema asociado a la cuenca hidráulica i en cada iteración ν se calcula de la siguiente manera:

$$\varphi_i^h(\nu) = - \sum_{k=1}^K \sum_{l(i) \in l(i)} \left[\lambda_k(\nu) t_{jk}(\nu) + \mu_k(\nu) (\bar{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k}(\nu)) \right] \quad (6.337)$$

donde $x_{l(i)}(\nu)$, $u_{l(i)}(\nu)$, $h_{l(i)}(\nu)$ y $s_{l(i)}(\nu)$ contienen las variables óptimas de la resolución de los subproblemas hidráulicos en la iteración ν , $x_{l(i)}^*$, $u_{l(i)}^*$, $h_{l(i)}^*$ y $s_{l(i)}^*$.

El valor de la función dual, en cada iteración ν , se calcula de la siguiente forma:

$$\phi(\lambda(\nu), \mu(\nu)) = \sum_{k=1}^K [\lambda_k(\nu)D_k + \mu_k(\nu)R_k - \alpha_k D_k] + \sum_{j \in J} \varphi_j^t(\nu) + \sum_{l_i \in I(i)} \varphi_i^h(\nu) \quad (6.338)$$

donde $\varphi_j^t(\nu)$ y $\varphi_i^h(\nu)$ se evalúan utilizando las ecuaciones (6.336) y (6.337) respectivamente.

El vector subgradiente $s(\nu)$ que se empleará por cualquiera de los procedimientos de actualización de multiplicadores que se presentan en este capítulo, se define:

$$s(\nu) = \begin{pmatrix} s_D(\nu) \\ s_R(\nu) \\ s_M(\nu) \end{pmatrix} \quad (6.339)$$

siendo

$$s_D(\nu) = \begin{pmatrix} D_1 - \sum_{j \in J} t_{j1}(\nu) - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in I(i)} p_{l(i)1}(\nu) \\ D_2 - \sum_{j \in J} t_{j2}(\nu) - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in I(i)} p_{l(i)2}(\nu) \\ \vdots \\ D_K - \sum_{j \in J} t_{jK}(\nu) - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in I(i)} p_{l(i)K}(\nu) \end{pmatrix} \quad (6.340)$$

$$s_R(\nu) = \begin{pmatrix} R_1 - \sum_{j \in J} \left[(\bar{p}_j - t_{j1}(\nu)) v_{j1}(\nu) w_{j1}(\nu) + r_j^s v_{j1}(\nu) (1 - w_{j1}(\nu)) \right] \\ \quad - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in I(i)} (\bar{h}_{l(i)1} - p_{l(i)1}(\nu)) \\ R_2 - \sum_{j \in J} \left[(\bar{p}_j - t_{j2}(\nu)) v_{j2}(\nu) w_{j2}(\nu) + r_j^s v_{j2}(\nu) (1 - w_{j2}(\nu)) \right] \\ \quad - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in I(i)} (\bar{h}_{l(i)1} - p_{l(i)2}(\nu)) \\ \vdots \\ R_K - \sum_{j \in J} \left[(\bar{p}_j - t_{jK}(\nu)) v_{jK}(\nu) w_{jK}(\nu) + r_j^s v_{jK}(\nu) (1 - w_{jK}(\nu)) \right] \\ \quad - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in I(i)} (\bar{h}_{l(i)1} - p_{l(i)K}(\nu)) \end{pmatrix} \quad (6.341)$$

$$s_M(\nu) = \begin{pmatrix} \sum_{j \in j} \underline{p}_j v_{j1}(\nu) - D_1 \\ \sum_{j \in j} \underline{p}_j v_{j2}(\nu) - D_2 \\ \vdots \\ \sum_{j \in j} \underline{p}_j v_{jK}(\nu) - D_K \end{pmatrix} \quad (6.342)$$

Una vez definidos el vector de multiplicadores y la forma de calcular el valor de la función dual y un subgradiente en cada iteración, se procede al análisis de los métodos de actualización de multiplicadores con memoria basados en el método de los hiperplanos secantes.

Método de los hiperplanos secantes con límite máximo al número de hiperplanos

El problema dual relajado (paso 3b del *Algoritmo HPS-M*) en cada iteración ν , se plantea de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar}_{z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K} \quad \mathcal{Z} \\ & \text{sujeto a} \\ & z \leq \phi(\lambda(i), \mu(i)) + \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i)) \\ & + \sum_{k=1}^K \left[R_k - \sum_{j \in j} \left[(\bar{p}_j - t_{jk}(i)) v_{jk}(i) w_{jk}(i) + r_j^s v_{jk}(i) (1 - w_{jk}(i)) \right] \right. \\ & \left. - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} \left(\bar{h}_{l(i)1} - p_{l(i)k}(i) \right) \right] (\mu_k - \mu_k(i)) + \sum_{k=1}^K \left(\sum_{j \in j} \bar{p}_j v_{jk} - D_k \right) (\alpha_k - \alpha_k(i)) \\ & \quad \quad \quad i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n} \\ & \underline{\lambda}_k \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k \quad \forall k \\ & \underline{\mu}_k \leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k \quad \forall k \\ & \underline{\alpha}_k \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k \quad \forall k \end{aligned} \quad (6.343)$$

donde n es el número de elementos del conjunto dinámico para el modelado del problema dual, $\bar{n}$ es el número máximo de hiperplanos y $\phi(\lambda(i), \mu(i))$ se evalúa utilizando las ecuaciones (6.338), (6.336) y (6.337).

Método de los hiperplanos secantes con penalización y límite máximo al número de hiperplanos

El centro de estabilidad en cada iteración $\Theta(\nu)$ está formado por tres subvectores: el subvector $\Lambda(\nu)$ asociado al vector de multiplicadores λ (ecuación (6.315)), el subvector $\Xi(\nu)$ asociado

al vector de multiplicadores μ (ecuación (6.316)) y el subvector $\Upsilon(\nu)$ asociado al vector de multiplicadores α (ecuación (6.317)). Se define de la siguiente forma:

$$\Theta(\nu) = \begin{pmatrix} \Lambda(\nu) \\ \Xi(\nu) \\ \Upsilon(\nu) \end{pmatrix} \quad (6.344)$$

siendo

$$\Lambda(\nu) = (\Lambda_1(\nu) \quad \Lambda_2(\nu) \cdots \Lambda_K(\nu))^T \quad (6.345)$$

$$\Xi(\nu) = (\Xi_1(\nu) \quad \Xi_2(\nu) \cdots \Xi_K(\nu))^T \quad (6.346)$$

$$\Upsilon(\nu) = (\Upsilon_1(\nu) \quad \Upsilon_2(\nu) \cdots \Upsilon_K(\nu))^T \quad (6.347)$$

El problema dual relajado (paso 3c del *Algoritmo HPS-PM*) en cada iteración ν , se plantea de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar}_{z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K} \\ & z - \alpha(\nu) \left[\sum_{k=1}^K (\lambda_k - \Lambda_k(\nu))^2 + \sum_{k=1}^K (\mu_k - \Xi_k(\nu))^2 + \sum_{k=1}^K (\alpha_k - \Upsilon_k(\nu))^2 \right] \\ & \text{sujeto a} \\ & z \leq \phi(\lambda(i), \mu(i)) + \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i)) \\ & + \sum_{k=1}^K \left[R_k - \sum_{j \in j} \left[(\bar{p}_j - t_{jk}(i)) v_{jk}(i) w_{jk}(i) + r_j^s v_{jk}(i) (1 - w_{jk}(i)) \right] \right. \\ & \left. - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} \left(\bar{h}_{l(i)1} - p_{l(i)k}(i) \right) \right] (\mu_k - \mu_k(i)) + \sum_{k=1}^K \left(\sum_{j \in j} \bar{p}_j v_{jk} - D_k \right) (\alpha_k - \alpha_k(i)) \\ & \quad \quad \quad i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n} \\ & \underline{\lambda}_k \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k \quad \forall k \\ & \underline{\mu}_k \leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k \quad \forall k \\ & \underline{\alpha}_k \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k \quad \forall k \end{aligned} \quad (6.348)$$

donde n es el número de elementos del conjunto dinámico para el modelado del problema dual, $\bar{n}$ es el número máximo de hiperplanos y $\phi(\lambda(i), \mu(i))$ se evalúa utilizando las ecuaciones (6.338), (6.336) y (6.337).

Método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos

El problema dual relajado (paso 3b del *Algoritmo HPS-CD*) en cada iteración ν , se plantea de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximizar}_{z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K} \quad z \\
 &\text{sueto a} \\
 &z \leq \phi(\lambda(i), \mu(i)) + \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i)) \\
 &+ \sum_{k=1}^K \left[R_k - \sum_{j \in j} \left[(\bar{p}_j - t_{jk}(i)) v_{jk}(i) w_{jk}(i) + r_j^s v_{jk}(i) (1 - w_{jk}(i)) \right] \right. \\
 &\left. - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} \left(\bar{h}_{l(i)1} - p_{l(i)k}(i) \right) \right] (\mu_k - \mu_k(i)) + \sum_{k=1}^K \left(\sum_{j \in j} \bar{p}_j v_{jk} - D_k \right) (\alpha_k - \alpha_k(i)) \\
 &\quad \quad \quad i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n} \\
 &\underline{\lambda}_k(\nu) \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k(\nu) \quad \forall k \\
 &\underline{\mu}_k(\nu) \leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k(\nu) \quad \forall k \\
 &\underline{\alpha}_k(\nu) \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k(\nu) \quad \forall k
 \end{aligned} \tag{6.349}$$

donde n es el número de elementos del conjunto dinámico para el modelado del problema dual, $\bar{n}$ es el número máximo de hiperplanos y $\phi(\lambda(i), \mu(i))$ se evalúa utilizando las ecuaciones (6.338), (6.336) y (6.337).

Una vez resuelto, en cada iteración, el problema dual relajado se procede a actualizar la región de factibilidad (paso 3c del *Algoritmo HPS-CD*) o, de otro modo, a actualizar los límites superior e inferior de cada componente del vector de multiplicadores λ y de cada componente del vector de multiplicadores μ . El procedimiento empleado para ello se describe en el apartado 6.8.1 (página 244).

Método de los hiperplanos secantes con penalización, control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos

El centro de estabilidad $\Theta(\nu)$ se define de la forma indicada en la ecuaciones (6.344)-(6.347).

El problema dual relajado a resolver (paso 3c del *Algoritmo HPS-CDP*) en cada iteración ν , se plantea de distinta forma según si se han ejecutado las $q - 1$ primeras iteraciones o si aún el contador de iteraciones aún no ha alcanzado este valor.

Si $\nu \leq q - 1$ el problema dual relajado se plantea:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar}_{z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K} \quad z \\
 & \text{sujeto a} \\
 & z \leq \phi(\lambda(i), \mu(i)) + \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i)) \\
 & + \sum_{k=1}^K \left[R_k - \sum_{j \in j} \left[(\bar{p}_j - t_{jk}(i)) v_{jk}(i) w_{jk}(i) + r_j^s v_{jk}(i) (1 - w_{jk}(i)) \right] \right. \\
 & \left. - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} \left(\bar{h}_{l(i)1} - p_{l(i)k}(i) \right) \right] (\mu_k - \mu_k(i)) + \sum_{k=1}^K \left(\sum_{j \in j} \bar{p}_j v_{jk} - D_k \right) (\alpha_k - \alpha_k(i)) \\
 & \underline{\mu}_k(\nu) \leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k(\nu) \quad \forall k \\
 & \quad \quad \quad i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n} \\
 & \underline{\lambda}_k(\nu) \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k(\nu) \quad \forall k \\
 & \underline{\mu}_k(\nu) \leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k(\nu) \quad \forall k \\
 & \underline{\alpha}_k(\nu) \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k(\nu) \quad \forall k
 \end{aligned} \tag{6.350}$$

y en otro caso:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar}_{z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K} \\
 & z - \sum_{k=1}^K \alpha_\lambda(\nu, k) (\lambda_k - \Lambda_k(\nu))^2 - \sum_{k=1}^K \alpha_\mu(\nu, k) (\mu_k - \Xi_k(\nu))^2 - \sum_{k=1}^K \alpha_\alpha(\nu, k) (\alpha_k - \Upsilon_k(\nu))^2 \\
 & \text{sujeto a} \\
 & z \leq \phi(\lambda(i), \mu(i)) + \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i)) \\
 & + \sum_{k=1}^K \left[R_k - \sum_{j \in j} \left[(\bar{p}_j - t_{jk}(i)) v_{jk}(i) w_{jk}(i) + r_j^s v_{jk}(i) (1 - w_{jk}(i)) \right] \right. \\
 & \left. - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} \left(\bar{h}_{l(i)1} - p_{l(i)k}(i) \right) \right] (\mu_k - \mu_k(i)) + \sum_{k=1}^K \left(\sum_{j \in j} \bar{p}_j v_{jk} - D_k \right) (\alpha_k - \alpha_k(i)) \\
 & \quad \quad \quad i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n} \\
 & \underline{\lambda}_k(\nu) \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k(\nu) \quad \forall k \\
 & \underline{\mu}_k(\nu) \leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k(\nu) \quad \forall k \\
 & \underline{\alpha}_k(\nu) \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k(\nu) \quad \forall k
 \end{aligned} \tag{6.351}$$

donde $\alpha_\lambda(\nu, k)$ es la constante de penalización asociada a la componente k del vector de multiplicadores λ en la iteración ν , $\alpha_\mu(\nu, k)$ es la constante de penalización asociada a la componente k del vector de multiplicadores μ en la iteración ν , $\alpha_\alpha(\nu, k)$ es la constante de penalización

asociada a la componente k del vector de multiplicadores μ en la iteración ν , n es el número de elementos del conjunto dinámico para el modelado del problema dual, $\bar{n}$ es el número máximo de hiperplanos y $\phi(\lambda(i), \mu(i), \alpha(i))$ se evalúa utilizando las ecuaciones (6.338), (6.336) y (6.337).

El procedimiento de actualización de la región de factibilidad de los multiplicadores se describe en el apartado 6.8.1 (página 244).

El procedimiento de actualización de las constantes de penalización se describe en el apartado 6.8.1 (página 247).

6.8.7 Modelo 7

El modelo 7 se presenta en el apartado 4.3.7. Las restricciones de carga consideradas son las restricciones de demanda (ecuaciones (4.149)), las restricciones de reserva rodante (ecuaciones (4.150)), las restricciones de demanda mínima (ecuaciones (4.151)), las restricciones de regulación hacia arriba (4.152) y las restricciones de regulación hacia abajo (4.153). Se vuelven a formular a continuación:

$$\sum_{j \in J} t_{jk} + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} p_{l(i)k} = D_k \quad \forall k \quad (6.352)$$

$$\sum_{j \in J} (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \geq R_k \quad \forall k \quad (6.353)$$

$$\sum_{j \in J} \underline{p}_j v_{jk} \leq D_k \quad \forall k \quad (6.354)$$

$$\sum_{j \in J} (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \geq A_k \quad \forall k \quad (6.355)$$

$$\sum_{j \in J} (t_{jk} - \underline{p}_j) v_{jk} + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} (p_{l(i)k} - \underline{h}_{l(i)}) \geq B_k \quad \forall k \quad (6.356)$$

El vector de multiplicadores θ es de dimensión igual al cinco veces el número de subperiodos del horizonte temporal analizado (K). Está formado por el subvector λ , asociado a las restricciones de demanda (ecuaciones (6.352)), el subvector μ , asociado a las restricciones de reserva rodante (ecuaciones (6.353)), el subvector α , asociado a las restricciones de demanda mínima (ecuaciones (6.354)), el subvector β_k^a asociado a las restricciones de regulación hacia arriba (ecuaciones (6.355)) y el subvector β_k^b asociado a las restricciones de regulación hacia abajo (ecuaciones

(6.356)). Esto es:

$$\theta = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \alpha \\ \beta^a \\ \beta^b \end{pmatrix} \quad (6.357)$$

siendo

$$\lambda = (\lambda_1 \quad \lambda_2 \cdots \lambda_K)^\top \quad (6.358)$$

$$\mu = (\mu_1 \quad \mu_2 \cdots \mu_K)^\top \quad (6.359)$$

$$\alpha = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \cdots \alpha_K)^\top \quad (6.360)$$

$$\beta^a = (\beta_1^a \quad \beta_2^a \cdots \beta_K^a)^\top \quad (6.361)$$

$$\beta^b = (\beta_1^b \quad \beta_2^b \cdots \beta_K^b)^\top \quad (6.362)$$

El subproblema asociado a cada central térmica j se plantea de la siguiente forma:

Minimizar _{(t_j, v_j, y_j, z_j)}

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] - \sum_{k=1}^K \left[\lambda_k(\nu) t_{jk} + \mu_k(\nu) (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} \right. \\ & \quad \left. - \alpha_k(\nu) \underline{p}_k v_{jk} + \beta_k^a (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} + \beta_k^b (t_{jk} - \underline{p}_j) v_{jk} \right] \end{aligned} \quad (6.363)$$

sujeito a

$$\underline{p}_j v_{jk} \leq t_{jk} \leq \bar{p}_j v_{jk} \quad \forall j \quad \forall k \quad (6.364)$$

$$t_{jk} - t_{jk-1} \leq r_j^s \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.365)$$

$$t_{jk-1} - t_{jk} \leq r_j^b \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.366)$$

$$y_{j1} - z_{j1} = v_{j1} - v_{j0} \quad \forall j \quad (6.367)$$

$$y_{jk} - z_{jk} = v_{jk} - v_{jk-1} \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.368)$$

$$(\tilde{s}_{j0} - T_j^f) (v_{j0} - v_{j1}) \geq 0 \quad \forall j \quad (6.369)$$

$$(\tilde{s}_{jk-1} - T_j^f) (v_{jk-1} - v_{jk}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.370)$$

$$(\tilde{s}_{j0} + T_j^p) (v_{j1} - v_{j0}) \geq 0 \quad \forall j \quad (6.371)$$

$$(\tilde{s}_{jk-1} + T_j^p) (v_{jk} - v_{jk-1}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.372)$$

El subproblema asociado a la cuenca hidráulica i se formula de la siguiente manera:

$$\text{Maximizar}_{(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)})} \sum_{l(i) \in l(i)} \sum_{k=1}^K \left[\lambda_k(\nu) p_{l(i)k} + \mu_k(\nu) (\bar{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k}) \right]$$

$$+\beta_k^a \left(\bar{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k} \right) + \beta_k^b \left(p_{l(i)k} - \underline{h}_{l(i)k} \right) \Big] \quad (6.373)$$

sujeto a

$$p_{l(i)k} = \rho_{l(i)}(u_{l(i)k}, x_{l(i)k}) \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.374)$$

$$x_{l_i k+1} = x_{l_i k} - u_{l_i k} - s_{l_i k} + w_{l_i k} + \sum_{m(l(i)) \in m(l(i))} \left[u_{m(l(i)),k-\tau_{m(l(i))}} + s_{m(l(i)),k-\tau_{m(l(i))}} \right] \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.375)$$

$$\underline{u}_{l(i)} \leq u_{l(i)k} \leq \bar{u}_{l(i)v} \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.376)$$

$$\underline{x}_{l(i)} \leq x_{l(i)k} \leq \bar{x}_{l(i)v} \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.377)$$

$$0 \leq s_{l(i)k} \leq \bar{x}_{l(i)} \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.378)$$

$$x_{l(i)1} = x_{l(i)}^0 \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad (6.379)$$

$$\underline{x}_{l(i)T} \leq x_{l(i)T+1} \leq \bar{x}_{l(i)T} \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad (6.380)$$

donde $\lambda_k(\nu)$ representa el valor del multiplicador asociado a la restricción de demanda en el subperiodo k y en la iteración ν , $\mu_k(\nu)$ representa el valor del multiplicador asociado a la restricción de reserva rodante en el subperiodo k y en la iteración ν , $\alpha_k(\nu)$ representa el valor del multiplicador asociado a la restricción de demanda mínima en el subperiodo k y en la iteración ν , $\beta_k^a(\nu)$ representa el valor del multiplicador asociado a la restricción de regulación hacia arriba en el subperiodo k y en la iteración ν y $\beta_k^b(\nu)$ representa el valor del multiplicador asociado a la restricción de regulación hacia abajo en el subperiodo k y en la iteración ν .

El valor óptimo de la función objetivo del subproblema asociado a la central térmica j en cada iteración se calcula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \varphi_j^t(\nu) = & \sum_{k=1}^K \left[v_{jk}(\nu) a_j(t_{jk}(\nu)) + z_{jk}(\nu) c_j + y_{jk}(\nu) b(x_{jk}^d(\nu)) \right] \\ & - \sum_{k=1}^K \left[\lambda_k(\nu) t_{jk}(\nu) + \mu_k(\nu) \left(\bar{p}_j - t_{jk}(\nu) \right) v_{jk}(\nu) - \alpha_k(\nu) \underline{p}_j v_{jk}(\nu) \right. \\ & \left. + \beta_k^a \left(\bar{p}_j - t_{jk}(\nu) \right) v_{jk}(\nu) + \beta_k^b \left(t_{jk}(\nu) - \bar{p}_j \right) v_{jk}(\nu) \right] \end{aligned} \quad (6.381)$$

donde $t_{jk}(\nu)$, $v_{jk}(\nu)$, $y_{jk}(\nu)$, $z_{jk}(\nu)$ contienen las variables óptimas de la resolución de los subproblemas térmicos en la iteración ν , t_{jk}^* , v_{jk}^* , y_{jk}^* y z_{jk}^* .

El valor de la función objetivo, cambiada de signo, en el maximizador del subproblema asociado a la cuenca hidráulica i en cada iteración ν se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \varphi_i^h(\nu) = & - \sum_{k=1}^K \sum_{l(i) \in l(i)} \left[\lambda_k(\nu) p_{l(i)k}(\nu) + \mu_k(\nu) \left(\bar{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k}(\nu) \right) \right. \\ & \left. + \beta_k^a \left(\bar{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k}(\nu) \right) + \beta_k^b \left(p_{l(i)k}(\nu) - \underline{h}_{l(i)k} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.382)$$

donde $x_{l(i)}(\nu)$, $u_{l(i)}(\nu)$, $h_{l(i)}(\nu)$ y $s_{l(i)}(\nu)$ contienen las variables óptimas de la resolución de los subproblemas hidráulicos en la iteración ν , $x_{l(i)}^*$, $u_{l(i)}^*$, $h_{l(i)}^*$ y $s_{l(i)}^*$.

El valor de la función dual, en cada iteración ν , se calcula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \phi(\lambda(\nu), \mu(\nu), \alpha(\nu), \beta^a(\nu), \beta^b(\nu)) = & \sum_{k=1}^K [\lambda_k(\nu)D_k + \mu_k(\nu)R_k - \alpha_k(\nu)D_k + \beta_k^a(\nu)A_k \\ & + \beta_k^b(\nu)B_k] + \sum_{j \in J} \varphi_j^t(\nu) + \sum_{l_i \in l(i)} \varphi_i^h(\nu) \end{aligned} \quad (6.383)$$

donde $\varphi_j^t(\nu)$ y $\varphi_i^h(\nu)$ se evalúan utilizando las ecuaciones (6.381) y (6.382) respectivamente.

El vector subgradiente $s(\nu)$ que se empleará por cualquiera de los procedimientos de actualización de multiplicadores que se presentan en este capítulo, está formado por cinco subvectores. El primer subvector $s_D(\nu)$ está asociado a las restricciones de demanda, el segundo subvector $s_R(\nu)$ está asociado a las restricciones de reserva rodante, el tercer subvector $s_M(\nu)$ está asociado a las restricciones de demanda mínima, el cuarto subvector $s_A(\nu)$ está asociado a las restricciones de regulación hacia arriba y el quinto subvector $s_B(\nu)$ está asociado a las restricciones de regulación hacia abajo. Se define:

$$s(\nu) = \begin{pmatrix} s_D(\nu) \\ s_R(\nu) \\ s_M(\nu) \\ s_A(\nu) \\ s_B(\nu) \end{pmatrix} \quad (6.384)$$

siendo

$$s_D(\nu) = \begin{pmatrix} D_1 - \sum_{j \in J} t_{j1}(\nu) - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)1}(\nu) \\ D_2 - \sum_{j \in J} t_{j2}(\nu) - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)2}(\nu) \\ \vdots \\ D_K - \sum_{j \in J} t_{jK}(\nu) - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)K}(\nu) \end{pmatrix} \quad (6.385)$$

$$s_R(\nu) = \begin{pmatrix} D_1 + R_1 - \sum_{j \in J} \bar{p}_j v_{j1}(\nu) - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)1}(\nu) \\ D_2 + R_2 - \sum_{j \in J} \bar{p}_j v_{j2}(\nu) - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)2}(\nu) \\ \vdots \\ D_K + R_K - \sum_{j \in J} \bar{p}_j v_{jK}(\nu) - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)K}(\nu) \end{pmatrix} \quad (6.386)$$

$$s_M(\nu) = \begin{pmatrix} \sum_{j \in j} \underline{p}_j v_{j1}(\nu) - D_1 \\ \sum_{j \in j} \underline{p}_j v_{j2}(\nu) - D_2 \\ \vdots \\ \sum_{j \in j} \underline{p}_j v_{jK}(\nu) - D_K \end{pmatrix} \quad (6.387)$$

$$s_A(\nu) = \begin{pmatrix} A_1 - \sum_{j \in j} (\bar{p}_j - t_{j1}(\nu)) v_{j1}(\nu) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)1}(\nu)) \\ A_2 - \sum_{j \in j} (\bar{p}_j - t_{j2}(\nu)) v_{j2}(\nu) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)2}(\nu)) \\ \vdots \\ A_K - \sum_{j \in j} (\bar{p}_j - t_{jK}(\nu)) v_{jK}(\nu) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)K}(\nu)) \end{pmatrix} \quad (6.388)$$

$$s_B(\nu) = \begin{pmatrix} B_1 - \sum_{j \in j} (t_{j1}(\nu) - \underline{p}_j) v_{j1}(\nu) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (p_{l(i)1}(\nu) - \underline{h}_{l(i)}) \\ B_2 - \sum_{j \in j} (t_{j2}(\nu) - \underline{p}_j) v_{j2}(\nu) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (p_{l(i)2}(\nu) - \underline{h}_{l(i)}) \\ \vdots \\ B_K - \sum_{j \in j} (t_{jK}(\nu) - \underline{p}_j) v_{jK}(\nu) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (p_{l(i)K}(\nu) - \underline{h}_{l(i)}) \end{pmatrix} \quad (6.389)$$

Una vez definidos el vector de multiplicadores y la forma de calcular el valor de la función dual y un subgradiente en cada iteración, se procede al análisis de los métodos de actualización de multiplicadores con memoria basados en el método de los hiperplanos secantes.

Método de los hiperplanos secantes con límite máximo al número de hiperplanos

El problema dual relajado (paso 3b del *Algoritmo HPS-M*) en cada iteración ν , se plantea de la siguiente forma:

Maximizar $z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K, \beta_1^a, \beta_2^a, \dots, \beta_K^a, \beta_1^b, \beta_2^b, \dots, \beta_K^b$ z

sueto a

$$\begin{aligned} z &\leq \phi(\lambda(i), \mu(i), \alpha(i), \beta^a(i), \beta^b(i)) \\ &+ \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i)) \\ &+ \sum_{k=1}^K \left[R_k - \sum_{j \in j} (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k}) \right] (\mu_k - \mu_k(i)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^K \left(\sum_{j \in j} \bar{p}_j v_{jk} - D_k \right) (\alpha_k - \alpha_k(i)) \\
& + \sum_{k=1}^K \left[A_k - \sum_{j \in j} (\bar{p}_j - t_{jk}(i)) v_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)} - h_{l(i)2}(i)) \right] (\beta_k^a - \beta_k^a(i)) \\
& + \sum_{k=1}^K \left[B_k - \sum_{j \in j} (t_{jk}(i) - \underline{p}_j) v_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (h_{l(i)2}(i) - \underline{h}_{l(i)}) \right] (\beta_k^b - \beta_k^b(i)) \\
& \qquad \qquad \qquad i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\lambda}_k &\leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k & \forall k \\
\underline{\mu}_k &\leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k & \forall k \\
\underline{\alpha}_k &\leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k & \forall k \\
\underline{\beta}_k^a &\leq \beta_k^a \leq \bar{\beta}_k^a & \forall k \\
\underline{\beta}_k^b &\leq \beta_k^b \leq \bar{\beta}_k^b & \forall k
\end{aligned} \tag{6.390}$$

donde n es el número de elementos del conjunto dinámico para el modelado del problema dual, $\bar{n}$ es el número máximo de hiperplanos y $\phi(\lambda(i), \mu(i), \alpha(i), \beta^a(i), \beta^b(i))$ se evalúa utilizando las ecuaciones (6.383), (6.381) y (6.382).

Método de los hiperplanos secantes con penalización y límite máximo al número de hiperplanos

El centro de estabilidad en cada iteración $\Theta(\nu)$ está formado por cinco subvectores: el subvector $\Lambda(\nu)$ asociado al vector de multiplicadores λ (ecuación (6.358)), el subvector $\Xi(\nu)$ asociado al vector de multiplicadores μ (ecuación (6.359)), el subvector $\Upsilon(\nu)$ asociado al vector de multiplicadores α (ecuación (6.360)), el subvector $\chi^a(\nu)$ asociado al vector de multiplicadores β^a (ecuación (6.361)) y el subvector $\chi^b(\nu)$ asociado al vector de multiplicadores β^b (ecuación (6.362)). Es decir:

$$\Theta(\nu) = \begin{pmatrix} \Lambda(\nu) \\ \Xi(\nu) \\ \Upsilon(\nu) \\ \chi^a(\nu) \\ \chi^b(\nu) \end{pmatrix} \tag{6.391}$$

siendo

$$\Lambda(\nu) = (\Lambda_1(\nu) \quad \Lambda_2(\nu) \cdots \Lambda_K(\nu))^T \tag{6.392}$$

$$\Xi(\nu) = (\Xi_1(\nu) \quad \Xi_2(\nu) \cdots \Xi_K(\nu))^T \tag{6.393}$$

$$\Upsilon(\nu) = (\Upsilon_1(\nu) \quad \Upsilon_2(\nu) \cdots \Upsilon_K(\nu))^T \tag{6.394}$$

$$\chi^a(\nu) = (\chi_1^a(\nu) \quad \chi_2^a(\nu) \cdots \chi_K^a(\nu))^T \quad (6.395)$$

$$\chi^b(\nu) = (\chi_1^b(\nu) \quad \chi_2^b(\nu) \cdots \chi_K^b(\nu))^T \quad (6.396)$$

El problema dual relajado (paso 3c del *Algoritmo HPS-PM*) en cada iteración ν , se plantea de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar}_{z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K, \beta_1^a, \beta_2^a, \dots, \beta_K^a, \beta_1^b, \beta_2^b, \dots, \beta_K^b} \\ & z - \alpha(\nu) \left[\sum_{k=1}^K (\lambda_k - \Lambda_k(\nu))^2 + \sum_{k=1}^K (\mu_k - \Xi_k(\nu))^2 + \sum_{k=1}^K (\alpha_k - \Upsilon_k(\nu))^2 \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k=1}^K (\beta_k^a - \chi_k^a(\nu))^2 + \sum_{k=1}^K (\beta_k^b - \chi_k^b(\nu))^2 \right] \\ & \text{sujeto a} \\ & z \leq \phi(\lambda(i), \mu(i), \alpha(i), \beta^a(i), \beta^b(i)) \\ & + \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i)) \\ & + \sum_{k=1}^K \left[R_k - \sum_{j \in j} (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k}) \right] (\mu_k - \mu_k(i)) \\ & + \sum_{k=1}^K \left(\sum_{j \in j} \bar{p}_j v_{jk} - D_k \right) (\alpha_k - \alpha_k(i)) \\ & + \sum_{k=1}^K \left[A_k - \sum_{j \in j} (\bar{p}_j - t_{jk}(i)) v_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)} - h_{l(i)2}(i)) \right] (\beta_k^a - \beta_k^a(i)) \\ & + \sum_{k=1}^K \left[B_k - \sum_{j \in j} (t_{jk}(i) - \underline{p}_j) v_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (h_{l(i)2}(i) - \underline{h}_{l(i)}) \right] (\beta_k^b - \beta_k^b(i)) \\ & \quad \quad \quad i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n} \\ & \underline{\lambda}_k \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k \quad \forall k \\ & \underline{\mu}_k \leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k \quad \forall k \\ & \underline{\alpha}_k \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k \quad \forall k \\ & \underline{\beta}_k^a \leq \beta_k^a \leq \bar{\beta}_k^a \quad \forall k \\ & \underline{\beta}_k^b \leq \beta_k^b \leq \bar{\beta}_k^b \quad \forall k \end{aligned} \quad (6.397)$$

donde n es el número de elementos del conjunto dinámico para el modelado del problema dual, $\bar{n}$ es el número máximo de hiperplanos y $\phi(\lambda(i), \mu(i), \alpha(i), \beta^a(i), \beta^b(i))$ se evalúa utilizando las ecuaciones (6.383), (6.381) y (6.382).

Método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos

El problema dual relajado (paso 3b del *Algoritmo HPS-CD*) en cada iteración ν , se plantea de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar}_{z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K, \beta_1^a, \beta_2^a, \dots, \beta_K^a, \beta_1^b, \beta_2^b, \dots, \beta_K^b} \quad z \\
 & \text{sujeto a} \\
 & z \leq \phi(\lambda(i), \mu(i), \alpha(i), \beta^a(i), \beta^b(i)) \\
 & + \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i)) \\
 & + \sum_{k=1}^K \left[R_k - \sum_{j \in j} (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k}) \right] (\mu_k - \mu_k(i)) \\
 & + \sum_{k=1}^K \left(\sum_{j \in j} \bar{p}_j v_{jk} - D_k \right) (\alpha_k - \alpha_k(i)) \\
 & + \sum_{k=1}^K \left[A_k - \sum_{j \in j} (\bar{p}_j - t_{jk}(i)) v_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)} - h_{l(i)2}(i)) \right] (\beta_k^a - \beta_k^a(i)) \\
 & + \sum_{k=1}^K \left[B_k - \sum_{j \in j} (t_{jk}(i) - \underline{p}_j) v_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (h_{l(i)2}(i) - \underline{h}_{l(i)}) \right] (\beta_k^b - \beta_k^b(i)) \\
 & \quad \quad \quad i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n} \\
 & \underline{\lambda}_k(\nu) \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k(\nu) \quad \forall k \\
 & \underline{\mu}_k(\nu) \leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k(\nu) \quad \forall k \\
 & \underline{\alpha}_k(\nu) \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k(\nu) \quad \forall k \\
 & \underline{\beta}_k^a(\nu) \leq \beta_k^a \leq \bar{\beta}_k^a(\nu) \quad \forall k \\
 & \underline{\beta}_k^b(\nu) \leq \beta_k^b \leq \bar{\beta}_k^b(\nu) \quad \forall k
 \end{aligned} \tag{6.398}$$

donde n es el número de elementos del conjunto dinámico para el modelado del problema dual, $\bar{n}$ es el número máximo de hiperplanos y $\phi(\lambda(i), \mu(i), \alpha(i), \beta^a(i), \beta^b(i))$ se evalúa utilizando las ecuaciones 6.383, 6.381 y 6.382.

Una vez resuelto, en cada iteración, el problema dual relajado se procede a actualizar la región de factibilidad (paso 3c del *Algoritmo HPS-CD*) o, de otro modo, a actualizar los límites superior e inferior de cada componente del vector de multiplicadores λ y de cada componente del vector de multiplicadores μ . El procedimiento empleado para ello se describe en el apartado 6.8.1 (página 244).

Método de los hiperplanos secantes con penalización, control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos

El centro de estabilidad $\Theta(\nu)$ se define de la forma indicada en las ecuaciones (6.391)-(6.396)

El problema dual relajado a resolver (paso 3c del *Algoritmo HPS-CDP*) en cada iteración ν , se plantea de distinta forma según si se han ejecutado las $q - 1$ primeras iteraciones o si aún el contador de iteraciones aún no ha alcanzado este valor.

Si $\nu \leq q - 1$ el problema dual relajado se plantea:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar}_{z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K, \beta_1^a, \beta_2^a, \dots, \beta_K^a, \beta_1^b, \beta_2^b, \dots, \beta_K^b} z \\
 & \text{sueto a} \\
 & z \leq \phi(\lambda(i), \mu(i), \alpha(i), \beta^a(i), \beta^b(i)) \\
 & + \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i)) \\
 & + \sum_{k=1}^K \left[R_k - \sum_{j \in j} (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k}) \right] (\mu_k - \mu_k(i)) \\
 & + \sum_{k=1}^K \left(\sum_{j \in j} \bar{p}_j v_{jk} - D_k \right) (\alpha_k - \alpha_k(i)) \\
 & + \sum_{k=1}^K \left[A_k - \sum_{j \in j} (\bar{p}_j - t_{jk}(i)) v_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)} - h_{l(i)2}(i)) \right] (\beta_k^a - \beta_k^a(i)) \\
 & + \sum_{k=1}^K \left[B_k - \sum_{j \in j} (t_{jk}(i) - \underline{p}_j) v_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (h_{l(i)2}(i) - \underline{h}_{l(i)}) \right] (\beta_k^b - \beta_k^b(i)) \\
 & i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n} \\
 & \underline{\lambda}_k(\nu) \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k(\nu) \quad \forall k \\
 & \underline{\mu}_k(\nu) \leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k(\nu) \quad \forall k \\
 & \underline{\alpha}_k(\nu) \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k(\nu) \quad \forall k \\
 & \underline{\beta}_k^a(\nu) \leq \beta_k^a \leq \bar{\beta}_k^a(\nu) \quad \forall k \\
 & \underline{\beta}_k^b(\nu) \leq \beta_k^b \leq \bar{\beta}_k^b(\nu) \quad \forall k
 \end{aligned} \tag{6.399}$$

y en otro caso:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar}_{z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K, \beta_1^a, \beta_2^a, \dots, \beta_K^a, \beta_1^b, \beta_2^b, \dots, \beta_K^b} \\
 & z - \sum_{k=1}^K \alpha_\lambda(\nu, k) (\lambda_k - \Lambda_k(\nu))^2 - \sum_{k=1}^K \alpha_\mu(\nu, k) (\mu_k - \Xi_k(\nu))^2 - \sum_{k=1}^K \alpha_\alpha(\nu, k) (\alpha_k - \Upsilon_k(\nu))^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=1}^K \alpha_{\beta^a}(\nu, k) (\beta_k^a - \chi_k^a(\nu))^2 - \sum_{k=1}^K \alpha_{\beta^b}(\nu, k) (\beta_k^b - \chi_k^b(\nu))^2 \\
& \text{sujeto a} \\
& z \leq \phi(\lambda(i), \mu(i), \alpha(i), \beta^a(i), \beta^b(i)) \\
& + \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i)) \\
& + \sum_{k=1}^K \left[R_k - \sum_{j \in j} (\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k}) \right] (\mu_k - \mu_k(i)) \\
& + \sum_{k=1}^K \left(\sum_{j \in j} \bar{p}_j v_{jk} - D_k \right) (\alpha_k - \alpha_k(i)) \\
& + \sum_{k=1}^K \left[A_k - \sum_{j \in j} (\bar{p}_j - t_{jk}(i)) v_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)} - h_{l(i)2}(i)) \right] (\beta_k^a - \beta_k^a(i)) \\
& + \sum_{k=1}^K \left[B_k - \sum_{j \in j} (t_{jk}(i) - \underline{p}_j) v_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (h_{l(i)2}(i) - \underline{h}_{l(i)}) \right] (\beta_k^b - \beta_k^b(i)) \\
& \qquad \qquad \qquad i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n} \\
& \underline{\lambda}_k(\nu) \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k(\nu) \quad \forall k \\
& \underline{\mu}_k(\nu) \leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k(\nu) \quad \forall k \\
& \underline{\alpha}_k(\nu) \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k(\nu) \quad \forall k \\
& \underline{\beta}_k^a(\nu) \leq \beta_k^a \leq \bar{\beta}_k^a(\nu) \quad \forall k \\
& \underline{\beta}_k^b(\nu) \leq \beta_k^b \leq \bar{\beta}_k^b(\nu) \quad \forall k
\end{aligned} \tag{6.400}$$

donde $\alpha_\lambda(\nu, k)$ es la constante de penalización asociada a la componente k del vector de multiplicadores λ en la iteración ν , $\alpha_\mu(\nu, k)$ es la constante de penalización asociada a la componente k del vector de multiplicadores μ en la iteración ν , $\alpha_\alpha(\nu, k)$ es la constante de penalización asociada a la componente k del vector de multiplicadores α en la iteración ν , n es el número de elementos del conjunto dinámico para el modelado del problema dual, $\bar{n}$ es el número máximo de hiperplanos y $\phi(\lambda(i), \mu(i), \alpha(i), \beta^a(i), \beta^b(i))$ se evalúa utilizando las ecuaciones (6.383), (6.381) y (6.382).

El procedimientos de actualización de la región de factibilidad de los multiplicadores se describe en el apartado 6.8.1 (página 244).

El procedimiento de actualización de las constantes de penalización se describe en el apartado 6.8.1 (página 247).

6.8.8 Modelo 8

El modelo 8 se presenta en el apartado 4.3.6. Las restricciones de carga consideradas son las restricciones de demanda (ecuaciones (4.169)), las restricciones de reserva rodante modeladas a través de las ecuaciones (4.170)), las restricciones de demanda mínima (4.171), las restricciones de regulación hacia arriba (4.172) y as restricciones de regulación hacia abajo (4.173) . Estas restricciones se vuelven a formular a continuación:

$$\sum_{j \in J} t_{jk} + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} p_{l(i)k} = D_k \quad \forall k \quad (6.401)$$

$$\sum_{j \in J} \left[(\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} w_{jk} + r_j^s v_{jk} (1 - w_{jk}) \right] + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \geq R_k \quad \forall k \quad (6.402)$$

$$\sum_{j \in J} \underline{p}_j v_{jk} \leq D_k \quad \forall k \quad (6.403)$$

$$\sum_{j \in J} \left[(\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} u_{jk}^s + r_j^s v_{jk} (1 - u_{jk}^s) \right] + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}) \geq A_k \quad \forall k \quad (6.404)$$

$$\sum_{j \in J} \left[(t_{jk} - \underline{p}_j) v_{jk} u_{jk}^b + r_j^b v_{jk} (1 - u_{jk}^b) \right] + \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} (p_{l(i)k} - \underline{h}_{l(i)}) \geq B_k \quad \forall k \quad (6.405)$$

El vector de multiplicadores θ es de dimensión igual al cinco veces el número de subperiodos del horizonte temporal analizado (K). Está formado por el subvector λ , asociado a las restricciones de demanda (ecuaciones (6.401)), el subvector μ , asociado a las restricciones de reserva rodante (ecuaciones (6.402)), el subvector α , asociado a las restricciones de demanda mínima (ecuaciones (6.403)), el subvector β_k^a asociado a las restricciones de regulación hacia arriba (ecuaciones (6.404)) y el subvector β_k^b asociado a las restricciones de regulación hacia arriba (ecuaciones (6.405)). Esto es:

$$\theta = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \alpha \\ \beta^a \\ \beta^b \end{pmatrix} \quad (6.406)$$

siendo

$$\lambda = (\lambda_1 \quad \lambda_2 \cdots \lambda_K)^\top \quad (6.407)$$

$$\mu = (\mu_1 \quad \mu_2 \cdots \mu_K)^\top \quad (6.408)$$

$$\alpha = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \cdots \alpha_K)^\top \quad (6.409)$$

$$\beta^a = (\beta_1^a \quad \beta_2^a \cdots \beta_K^a)^\top \quad (6.410)$$

$$\beta^b = (\beta_1^b \quad \beta_2^b \cdots \beta_K^b)^\top \quad (6.411)$$

El subproblema asociado a cada central térmica j se plantea de la siguiente forma:

Minimizar _{(t_j, v_j, y_j, z_j)}

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^K \left[v_{jk} a_j(t_{jk}) + z_{jk} c_j + y_{jk} b(x_{jk}^d) \right] - \left[\sum_{k=1}^K \lambda_k(\nu) t_{jk} \right. \\ & + \sum_{k=1}^K \mu_k(\nu) \left[(\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} w_{jk} + r_j^s v_{jk} (1 - w_{jk}) \right] - \sum_{k=1}^K \alpha_k(\nu) \underline{p}_j v_{jk} \\ & - \sum_{k=1}^K \beta_k^a(\nu) \left[(\bar{p}_j - t_{jk}) v_{jk} u_{jk}^s + r_j^s v_{jk} (1 - u_{jk}^s) \right] \\ & \left. - \sum_{k=1}^K \beta_k^b(\nu) \left[(t_{jk} - \underline{p}_j) v_{jk} u_{jk}^b + r_j^b v_{jk} (1 - u_{jk}^b) \right] \right] \end{aligned} \quad (6.412)$$

sujeto a

$$\underline{p}_j v_{jk} \leq t_{jk} \leq \bar{p}_j v_{jk} \quad \forall j \quad \forall k \quad (6.413)$$

$$t_{jk} - t_{jk-1} \leq r_j^s \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.414)$$

$$t_{jk-1} - t_{jk} \leq r_j^b \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.415)$$

$$y_{j1} - z_{j1} = v_{j1} - v_{j0} \quad \forall j \quad (6.416)$$

$$y_{jk} - z_{jk} = v_{jk} - v_{jk-1} \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.417)$$

$$(\tilde{s}_{j0} - T_j^f)(v_{j0} - v_{j1}) \geq 0 \quad \forall j \quad (6.418)$$

$$(\tilde{s}_{jk-1} - T_j^f)(v_{jk-1} - v_{jk}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.419)$$

$$(\tilde{s}_{j0} + T_j^p)(v_{j1} - v_{j0}) \geq 0 \quad \forall j \quad (6.420)$$

$$(\tilde{s}_{jk-1} + T_j^p)(v_{jk} - v_{jk-1}) \geq 0 \quad \forall j \quad k = 2, \dots, T \quad (6.421)$$

El subproblema asociado a la cuenca hidráulica i se formula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar}_{(x_{l(i)}, u_{l(i)}, h_{l(i)}, s_{l(i)})} \sum_{l(i) \in i} \sum_{k=1}^K \left[\lambda_k(\nu) p_{l(i)k} + \mu_k(\nu) (\bar{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k}) \right. \\ & \left. + \beta_k^a (\bar{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k}) + \beta_k^b (p_{l(i)k} - \underline{h}_{l(i)k}) \right] \end{aligned} \quad (6.422)$$

sujeto a

$$p_{l(i)k} = \rho_{l(i)}(u_{l(i)k}, x_{l(i)k}) \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.423)$$

$$\begin{aligned} & x_{l_i k+1} = x_{l_i k} - u_{l_i k} - s_{l_i k} + w_{l_i k} + \\ & \sum_{m(l(i)) \in m(l(i))} \left[u_{m(l(i)), k-\tau_{m(l(i))}} + s_{m(l(i)), k-\tau_{m(l(i))}} \right] \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \end{aligned} \quad (6.424)$$

$$\underline{u}_{l(i)} \leq u_{l(i)k} \leq \overline{u}_{l(i)vk} \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.425)$$

$$\underline{x}_{l(i)} \leq x_{l(i)k} \leq \overline{x}_{l(i)v} \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.426)$$

$$0 \leq s_{l(i)k} \leq \overline{x}_{l(i)} \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (6.427)$$

$$x_{l(i)1} = x_{l(i)}^0 \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad (6.428)$$

$$\underline{x}_{l(i)T} \leq x_{l(i)T+1} \leq \overline{x}_{l(i)T} \quad \forall l_i \in i \quad \forall i \quad (6.429)$$

donde $\lambda_k(\nu)$ representa el valor del multiplicador asociado a la restricción de demanda en el subperiodo k y en la iteración ν , $\mu_k(\nu)$ representa el valor del multiplicador asociado a la restricción de reserva rodante en el subperiodo k y en la iteración ν , α_k representa el valor del multiplicador asociado a la restricción de demanda mínima en el subperiodo k y en la iteración ν , β_k^a representa el vector de multiplicadores asociado a la restricción de regulación hacia arriba en el subperiodo k y en la iteración ν y β_k^b representa el vector de multiplicadores asociado a la restricción de regulación hacia abajo en el subperiodo k y en la iteración ν .

El valor óptimo de la función objetivo del subproblema asociado a la central térmica j en cada iteración se calcula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \varphi_j^t(\nu) = & \sum_{k=1}^K \left[v_{jk}(\nu) a_j(t_{jk}(\nu)) + z_{jk}(\nu) c_j + y_{jk}(\nu) b(x_{jk}^d(\nu)) \right] - \left[\sum_{k=1}^K \lambda_k(\nu) t_{jk}(\nu) \right. \\ & + \sum_{k=1}^K \mu_k(\nu) \left[(\overline{p}_j - t_{jk}(\nu)) v_{jk}(\nu) w_{jk}(\nu) + r_j^s v_{jk}(\nu) (1 - w_{jk}(\nu)) \right] \\ & - \sum_{k=1}^K \alpha_k(\nu) \underline{p}_j v_{jk}(\nu) - \sum_{k=1}^K \beta_k^a(\nu) \left[(\overline{p}_j - t_{jk}(\nu)) v_{jk}(\nu) u_{jk}^s(\nu) + r_j^s v_{jk}(\nu) (1 - u_{jk}^s(\nu)) \right] \\ & \left. - \sum_{k=1}^K \beta_k^b(\nu) \left[(t_{jk}(\nu) - \underline{p}_j) v_{jk}(\nu) u_{jk}^b(\nu) + r_j^b v_{jk}(\nu) (1 - u_{jk}^b(\nu)) \right] \right] \quad (6.430) \end{aligned}$$

donde $t_{jk}(\nu)$, $v_{jk}(\nu)$, $y_{jk}(\nu)$, $z_{jk}(\nu)$ y $x_{jk}^d(\nu)$ contienen las variables óptimas de la resolución de los subproblemas térmicos en la iteración ν , t_{jk}^* , v_{jk}^* , y_{jk}^* , z_{jk}^* y $x_{jk}^{d*}(\nu)$, $w_{jk}(\nu)$ vale 1 si $\overline{p}_j - t_{jk}(\nu) \leq r_j^s$ (es decir, si el hueco de potencia hacia arriba es menor que la rampa de subida) y 0 en caso contrario, $u_{jk}^s(\nu)$ vale 1 si $\overline{p}_j - t_{jk}(\nu) \leq r_j^s$ (y 0 en caso contrario) y $u_{jk}^b(\nu)$ vale 1 si $t_{jk}(\nu) - \underline{p}_j \leq r_j^b$ (y 0 en caso contrario).

El valor de la función objetivo, cambiada de signo, en el maximizador del subproblema asociado a la cuenca hidráulica i en cada iteración ν se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \varphi_i^h(\nu) = & - \sum_{k=1}^K \sum_{l(i) \in i(i)} \left[\lambda_k(\nu) p_{l(i)k}(\nu) + \mu_k(\nu) (\overline{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k}(\nu)) \right. \\ & \left. + \beta_k^a (\overline{h}_{l(i)k} - p_{l(i)k}(\nu)) + \beta_k^b (p_{l(i)k}(\nu) - \underline{h}_{l(i)k}) \right] \quad (6.431) \end{aligned}$$

donde $x_{l(i)}(\nu)$, $u_{l(i)}(\nu)$, $h_{l(i)}(\nu)$ y $s_{l(i)}(\nu)$ contienen las variables óptimas de la resolución de los subproblemas hidráulicos en la iteración ν , $x_{l(i)}^*$, $u_{l(i)}^*$, $h_{l(i)}^*$ y $s_{l(i)}^*$.

El valor de la función dual, en cada iteración ν , se calcula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \phi(\lambda(\nu), \mu(\nu), \alpha(\nu), \beta^a(\nu), \beta^b(\nu)) = & \sum_{k=1}^K [\lambda_k(\nu)D_k + \mu_k(\nu)R_k - \alpha_k(\nu)D_k + \beta_k^a(\nu)A_k \\ & + \beta_k^b(\nu)B_k] + \sum_{j \in \mathcal{J}} \varphi_j^t(\nu) + \sum_{l_i \in \mathcal{L}(i)} \varphi_i^h(\nu) \end{aligned} \quad (6.432)$$

donde $\varphi_j^t(\nu)$ y $\varphi_i^h(\nu)$ se evalúan utilizando las ecuaciones (6.430) y (6.431) respectivamente.

El vector subgradiente $s(\nu)$ que se empleará por cualquiera de los procedimientos de actualización de multiplicadores que se presentan en este capítulo, se define:

$$s(\nu) = \begin{pmatrix} s_D(\nu) \\ s_R(\nu) \\ s_M(\nu) \\ s_A(\nu) \\ s_B(\nu) \end{pmatrix} \quad (6.433)$$

siendo

$$s_D(\nu) = \begin{pmatrix} D_1 - \sum_{j \in \mathcal{J}} t_{j1}(\nu) - \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{l(i) \in \mathcal{L}(i)} p_{l(i)1}(\nu) \\ D_2 - \sum_{j \in \mathcal{J}} t_{j2}(\nu) - \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{l(i) \in \mathcal{L}(i)} p_{l(i)2}(\nu) \\ \vdots \\ D_K - \sum_{j \in \mathcal{J}} t_{jK}(\nu) - \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{l(i) \in \mathcal{L}(i)} p_{l(i)K}(\nu) \end{pmatrix} \quad (6.434)$$

$$s_R(\nu) = \begin{pmatrix} R_1 - \sum_{j \in \mathcal{J}} \left[(\bar{p}_j - t_{j1}(\nu)) v_{j1}(\nu) w_{j1}(\nu) + r_j^s v_{j1}(\nu) (1 - w_{j1}(\nu)) \right] \\ \quad - \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{l(i) \in \mathcal{L}(i)} (\bar{h}_{l(i)1} - p_{l(i)1}(\nu)) \\ R_2 - \sum_{j \in \mathcal{J}} \left[(\bar{p}_j - t_{j2}(\nu)) v_{j2}(\nu) w_{j2}(\nu) + r_j^s v_{j2}(\nu) (1 - w_{j2}(\nu)) \right] \\ \quad - \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{l(i) \in \mathcal{L}(i)} (\bar{h}_{l(i)1} - p_{l(i)2}(\nu)) \\ \vdots \\ R_K - \sum_{j \in \mathcal{J}} \left[(\bar{p}_j - t_{jK}(\nu)) v_{jK}(\nu) w_{jK}(\nu) + r_j^s v_{jK}(\nu) (1 - w_{jK}(\nu)) \right] \\ \quad - \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{l(i) \in \mathcal{L}(i)} (\bar{h}_{l(i)1} - p_{l(i)K}(\nu)) \end{pmatrix} \quad (6.435)$$

$$s_M(\nu) = \begin{pmatrix} \sum_{j \in J} \underline{p}_j v_{j1}(\nu) - D_1 \\ \sum_{j \in J} \underline{p}_j v_{j2}(\nu) - D_2 \\ \vdots \\ \sum_{j \in J} \underline{p}_j v_{jK}(\nu) - D_K \end{pmatrix} \quad (6.436)$$

$$s_A(\nu) = \begin{pmatrix} A_1 - \sum_{j \in J} \left[(\bar{p}_j - t_{j1}(\nu)) v_{j1}(\nu) u_{j1}^s(\nu) + r_j^s v_{j1}(\nu) (1 - u_{j1}^s(\nu)) \right] \\ \quad - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} (\bar{h}_{l(i)1} - p_{l(i)1}(\nu)) \\ A_2 - \sum_{j \in J} \left[(\bar{p}_j - t_{j2}(\nu)) v_{j2}(\nu) u_{j2}^s(\nu) + r_j^s v_{j2}(\nu) (1 - u_{j2}^s(\nu)) \right] \\ \quad - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} (\bar{h}_{l(i)2} - p_{l(i)2}(\nu)) \\ \vdots \\ A_K - \sum_{j \in J} \left[(\bar{p}_j - t_{jK}(\nu)) v_{jK}(\nu) u_{jK}^s(\nu) + r_j^s v_{jK}(\nu) (1 - u_{jK}^s(\nu)) \right] \\ \quad - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} (\bar{h}_{l(i)1} - p_{l(i)K}(\nu)) \end{pmatrix} \quad (6.437)$$

$$s_B(\nu) = \begin{pmatrix} B_1 - \sum_{j \in J} \left[(t_{j1}(\nu) - \underline{p}_j) v_{j1}(\nu) u_{j1}^b(\nu) + r_j^b v_{j1}(\nu) (1 - u_{j1}^b(\nu)) \right] \\ \quad - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} (\bar{h}_{l(i)1} - p_{l(i)1}(\nu)) \\ B_2 - \sum_{j \in J} \left[(t_{j2}(\nu) - \underline{p}_j) v_{j2}(\nu) u_{j2}^b(\nu) + r_j^b v_{j2}(\nu) (1 - u_{j2}^b(\nu)) \right] \\ \quad - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} (\bar{h}_{l(i)2} - p_{l(i)2}(\nu)) \\ \vdots \\ B_K - \sum_{j \in J} \left[(t_{jK}(\nu) - \underline{p}_j) v_{jK}(\nu) u_{jK}^b(\nu) + r_j^b v_{jK}(\nu) (1 - u_{jK}^b(\nu)) \right] \\ \quad - \sum_{i \in I} \sum_{l(i) \in L(i)} (\bar{h}_{l(i)1} - p_{l(i)K}(\nu)) \end{pmatrix} \quad (6.438)$$

Una vez definidos el vector de multiplicadores y la forma de calcular el valor de la función dual y un subgradiente en cada iteración, se procede al análisis de los métodos de actualización de multiplicadores con memoria basados en el método de los hiperplanos secantes.

Método de los hiperplanos secantes con límite máximo al número de hiperplanos

El problema dual relajado (paso 3b del *Algoritmo HPS-M*) en cada iteración ν , se plantea de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar}_{z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K, \beta_1^a, \beta_2^a, \dots, \beta_K^a, \beta_1^b, \beta_2^b, \dots, \beta_K^b} z \\
 & \text{sujeto a} \\
 & z \leq \phi(\lambda(i), \mu(i), \alpha(i), \beta^a(i), \beta^b(i)) \\
 & + \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i)) \\
 & + \sum_{k=1}^K \left[R_k - \sum_{j \in j} \left[(\bar{p}_j - t_{jk}(i)) v_{jk}(i) w_{jk}(i) + r_j^s v_{jk}(i) (1 - w_{jk}(i)) \right] \right. \\
 & \left. - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}(i)) \right] (\mu_k - \mu_k(i)) + \sum_{k=1}^K \left(\sum_{j \in j} \bar{p}_j v_{jk} - D_k \right) (\alpha_k - \alpha_k(i)) \\
 & + \sum_{k=1}^K \left[A_k - \sum_{j \in j} \left[(\bar{p}_j - t_{jk}(i)) v_{jk}(i) u_{jk}^s(i) + r_j^s v_{jk}(i) (1 - u_{jk}^s(i)) \right] \right. \\
 & \left. - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}(i)) \right] (\beta_k^a - \beta_k^a(i)) \\
 & + \sum_{k=1}^K \left[B_k - \sum_{j \in j} \left[(t_{jk}(i) - \underline{p}_j) v_{jk}(i) u_{jk}^b(i) + r_j^b v_{jk}(i) (1 - u_{jk}^b(i)) \right] \right. \\
 & \left. - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} (\bar{h}_{l(i)1} - p_{l(i)k}(i)) \right] (\beta_k^b - \beta_k^b(i)) \\
 & i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n} \\
 & \underline{\lambda}_k \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k \quad \forall k \\
 & \underline{\mu}_k \leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k \quad \forall k \\
 & \underline{\alpha}_k \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k \quad \forall k \\
 & \underline{\beta}_k^a \leq \beta_k^a \leq \bar{\beta}_k^a \quad \forall k \\
 & \underline{\beta}_k^b \leq \beta_k^b \leq \bar{\beta}_k^b \quad \forall k
 \end{aligned} \tag{6.439}$$

donde n es el número de elementos del conjunto dinámico para el modelado del problema dual, $\bar{n}$ es el número máximo de hiperplanos y $\phi(\lambda(i), \mu(i))$ se evalúa utilizando las ecuaciones (6.432), (6.430) y (6.431).

Método de los hiperplanos secantes con penalización y límite máximo al número de hiperplanos

El centro de estabilidad en cada iteración $\Theta(\nu)$ está formado por cinco subvectores: el subvector $\Lambda(\nu)$ asociado al vector de multiplicadores λ (ecuación (6.407)), el subvector $\Xi(\nu)$ asociado al vector de multiplicadores μ (ecuación (6.408)), el subvector $\Upsilon(\nu)$ asociado al vector de multiplicadores α (ecuación (6.409)), el subvector $\chi^a(\nu)$ asociado al vector de multiplicadores β^a (ecuación (6.410)) y el subvector $\chi^b(\nu)$ asociado al vector de multiplicadores β^b (ecuación (6.411)). Es decir:

$$\Theta(\nu) = \begin{pmatrix} \Lambda(\nu) \\ \Xi(\nu) \\ \Upsilon(\nu) \\ \chi^a(\nu) \\ \chi^b(\nu) \end{pmatrix} \quad (6.440)$$

siendo

$$\Lambda(\nu) = (\Lambda_1(\nu) \quad \Lambda_2(\nu) \cdots \Lambda_K(\nu))^T \quad (6.441)$$

$$\Xi(\nu) = (\Xi_1(\nu) \quad \Xi_2(\nu) \cdots \Xi_K(\nu))^T \quad (6.442)$$

$$\Upsilon(\nu) = (\Upsilon_1(\nu) \quad \Upsilon_2(\nu) \cdots \Upsilon_K(\nu))^T \quad (6.443)$$

$$\chi^a(\nu) = (\chi_1^a(\nu) \quad \chi_2^a(\nu) \cdots \chi_K^a(\nu))^T \quad (6.444)$$

$$\chi^b(\nu) = (\chi_1^b(\nu) \quad \chi_2^b(\nu) \cdots \chi_K^b(\nu))^T \quad (6.445)$$

El problema dual relajado (paso 3c del *Algoritmo HPS-PM*) en cada iteración ν , se plantea de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar}_{z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K, \beta_1^a, \beta_2^a, \dots, \beta_K^a, \beta_1^b, \beta_2^b, \dots, \beta_K^b} \\ &z - \alpha(\nu) \left[\sum_{k=1}^K (\lambda_k - \Lambda_k(\nu))^2 + \sum_{k=1}^K (\mu_k - \Xi_k(\nu))^2 + \sum_{k=1}^K (\alpha_k - \Upsilon_k(\nu))^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^K (\beta_k^a - \chi_k^a(\nu))^2 + \sum_{k=1}^K (\beta_k^b - \chi_k^b(\nu))^2 \right] \end{aligned}$$

sujeito a

$$\begin{aligned} &z \leq \phi(\lambda(i), \mu(i), \alpha(i), \beta^a(i), \beta^b(i)) \\ &+ \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i)) \\ &+ \sum_{k=1}^K \left[R_k - \sum_{j \in j} \left[(\bar{p}_j - t_{jk}(i)) v_{jk}(i) w_{jk}(i) + r_j^s v_{jk}(i) (1 - w_{jk}(i)) \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{l(i) \in \mathcal{L}(i)} \left(\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}(i) \right) \left(\mu_k - \mu_k(i) \right) + \sum_{k=1}^K \left(\sum_{j \in \mathcal{J}} \bar{p}_j v_{jk} - D_k \right) (\alpha_k - \alpha_k(i)) \\
& + \sum_{k=1}^K \left[A_k - \sum_{j \in \mathcal{J}} \left[(\bar{p}_j - t_{jk}(i)) v_{jk}(i) u_{jk}^s(i) + r_j^s v_{jk}(i) (1 - u_{jk}^s(i)) \right] \right. \\
& - \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{l(i) \in \mathcal{L}(i)} \left(\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}(i) \right) \left(\beta_k^a - \beta_k^a(i) \right) \\
& + \sum_{k=1}^K \left[B_k - \sum_{j \in \mathcal{J}} \left[(t_{jk}(i) - \underline{p}_j) v_{jk}(i) u_{jk}^b(i) + r_j^b v_{jk}(i) (1 - u_{jk}^b(i)) \right] \right. \\
& \left. - \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{l(i) \in \mathcal{L}(i)} \left(\bar{h}_{l(i)1} - p_{l(i)k}(i) \right) \left(\beta_k^b - \beta_k^b(i) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\lambda}_k &\leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k & \forall k \\
\underline{\mu}_k &\leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k & \forall k \\
\underline{\alpha}_k &\leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k & \forall k \\
\underline{\beta}_k^a &\leq \beta_k^a \leq \bar{\beta}_k^a & \forall k \\
\underline{\beta}_k^b &\leq \beta_k^b \leq \bar{\beta}_k^b & \forall k
\end{aligned} \tag{6.446}$$

donde n es el número de elementos del conjunto dinámico para el modelado del problema dual, $\bar{n}$ es el número máximo de hiperplanos y $\phi(\lambda(i), \mu(i))$ se evalúa utilizando las ecuaciones (6.432), (6.430) y (6.431).

Método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos

El problema dual relajado (paso 3b del *Algoritmo HPS-CD*) en cada iteración ν , se plantea de la siguiente forma:

$$\text{Maximizar}_{z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K, \beta_1^a, \beta_2^a, \dots, \beta_K^a, \beta_1^b, \beta_2^b, \dots, \beta_K^b} \quad \mathcal{Z}$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
z &\leq \phi(\lambda(i), \mu(i), \alpha(i), \beta^a(i), \beta^b(i)) \\
& + \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in \mathcal{J}} t_{jk}(i) - \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{l(i) \in \mathcal{L}(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i)) \\
& + \sum_{k=1}^K \left[R_k - \sum_{j \in \mathcal{J}} \left[(\bar{p}_j - t_{jk}(i)) v_{jk}(i) w_{jk}(i) + r_j^s v_{jk}(i) (1 - w_{jk}(i)) \right] \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{l(i) \in \mathcal{L}(i)} \left(\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}(i) \right) \left(\mu_k - \mu_k(i) \right) + \sum_{k=1}^K \left(\sum_{j \in \mathcal{J}} \bar{p}_j v_{jk} - D_k \right) (\alpha_k - \alpha_k(i)) \\
& + \sum_{k=1}^K \left[A_k - \sum_{j \in \mathcal{J}} \left[(\bar{p}_j - t_{jk}(i)) v_{jk}(i) u_{jk}^s(i) + r_j^s v_{jk}(i) (1 - u_{jk}^s(i)) \right] \right. \\
& - \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{l(i) \in \mathcal{L}(i)} \left(\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}(i) \right) \left(\beta_k^a - \beta_k^a(i) \right) \\
& + \sum_{k=1}^K \left[B_k - \sum_{j \in \mathcal{J}} \left[(t_{jk}(i) - \underline{p}_j) v_{jk}(i) u_{jk}^b(i) + r_j^b v_{jk}(i) (1 - u_{jk}^b(i)) \right] \right. \\
& \left. - \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{l(i) \in \mathcal{L}(i)} \left(\bar{h}_{l(i)1} - p_{l(i)k}(i) \right) \left(\beta_k^b - \beta_k^b(i) \right) \right] \\
& \qquad \qquad \qquad i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\lambda}_k(\nu) &\leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k(\nu) & \forall k \\
\underline{\mu}_k(\nu) &\leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k(\nu) & \forall k \\
\underline{\alpha}_k(\nu) &\leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k(\nu) & \forall k \\
\underline{\beta}_k^a(\nu) &\leq \beta_k^a \leq \bar{\beta}_k^a(\nu) & \forall k \\
\underline{\beta}_k^b(\nu) &\leq \beta_k^b \leq \bar{\beta}_k^b(\nu) & \forall k
\end{aligned} \tag{6.447}$$

donde n es el número de elementos del conjunto dinámico para el modelado del problema dual, $\bar{n}$ es el número máximo de hiperplanos y $\phi(\lambda(i), \mu(i))$ se evalúa utilizando las ecuaciones (6.432), (6.430) y (6.431).

Una vez resuelto, en cada iteración, el problema dual relajado se procede a actualizar la región de factibilidad (paso 3c del *Algoritmo HPS-CD*) o, de otro modo, a actualizar los límites superior e inferior de cada componente de los vectores de multiplicadores λ , μ , α , β_k^a y β_k^b . El procedimiento empleado para ello se describe en el apartado 6.8.1 (página 244).

Método de los hiperplanos secantes con penalización, control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos

El centro de estabilidad $\Theta(\nu)$ se define de la forma indicada en la ecuaciones (6.440)-(6.445).

El problema dual relajado a resolver (paso 3c del *Algoritmo HPS-CDP*) en cada iteración ν , se plantea de distinta forma según si se han ejecutado las $q - 1$ primeras iteraciones o si aún el contador de iteraciones aún no ha alcanzado este valor.

Si $\nu \leq q - 1$ el problema dual relajado se plantea:

$$\text{Maximizar}_{z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K, \beta_1^a, \beta_2^a, \dots, \beta_K^a, \beta_1^b, \beta_2^b, \dots, \beta_K^b} \quad \mathcal{Z}$$

sueto a

$$\begin{aligned}
 z &\leq \phi(\lambda(i), \mu(i), \alpha(i), \beta^a(i), \beta^b(i)) \\
 &+ \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i)) \\
 &+ \sum_{k=1}^K \left[R_k - \sum_{j \in j} \left[(\bar{p}_j - t_{jk}(i)) v_{jk}(i) w_{jk}(i) + r_j^s v_{jk}(i) (1 - w_{jk}(i)) \right] \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} \left(\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}(i) \right) \right] (\mu_k - \mu_k(i)) + \sum_{k=1}^K \left(\sum_{j \in j} \bar{p}_j v_{jk} - D_k \right) (\alpha_k - \alpha_k(i)) \\
 &+ \sum_{k=1}^K \left[A_k - \sum_{j \in j} \left[(\bar{p}_j - t_{jk}(i)) v_{jk}(i) u_{jk}^s(i) + r_j^s v_{jk}(i) (1 - u_{jk}^s(i)) \right] \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} \left(\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}(i) \right) \right] (\beta_k^a - \beta_k^a(i)) \\
 &+ \sum_{k=1}^K \left[B_k - \sum_{j \in j} \left[(t_{jk}(i) - \underline{p}_j) v_{jk}(i) u_{jk}^b(i) + r_j^b v_{jk}(i) (1 - u_{jk}^b(i)) \right] \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} \left(\bar{h}_{l(i)1} - p_{l(i)k}(i) \right) \right] (\beta_k^b - \beta_k^b(i))
 \end{aligned}$$

$$i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\lambda}_k(\nu) &\leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k(\nu) & \forall k \\
 \underline{\mu}_k(\nu) &\leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k(\nu) & \forall k \\
 \underline{\alpha}_k(\nu) &\leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k(\nu) & \forall k \\
 \underline{\beta}_k^a(\nu) &\leq \beta_k^a \leq \bar{\beta}_k^a(\nu) & \forall k \\
 \underline{\beta}_k^b(\nu) &\leq \beta_k^b \leq \bar{\beta}_k^b(\nu) & \forall k
 \end{aligned} \tag{6.448}$$

y en otro caso:

Maximizar $z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta_1^a, \beta_2^a, \dots, \beta_K^a, \beta_1^b, \beta_2^b, \dots, \beta_K^b$

$$\begin{aligned}
 z &- \sum_{k=1}^K \alpha_\lambda(\nu, k) (\lambda_k - \Lambda_k(\nu))^2 - \sum_{k=1}^K \alpha_\mu(\nu, k) (\mu_k - \Xi_k(\nu))^2 - \sum_{k=1}^K \alpha_\alpha(\nu, k) (\alpha_k - \Upsilon_k(\nu))^2 \\
 &- \sum_{k=1}^K \alpha_{\beta^a}(\nu, k) (\beta_k^a - \chi_k^a(\nu))^2 - \sum_{k=1}^K \alpha_{\beta^b}(\nu, k) (\beta_k^b - \chi_k^b(\nu))^2
 \end{aligned}$$

sueto a

$$\begin{aligned}
 z &\leq \phi(\lambda(i), \mu(i), \alpha(i), \beta^a(i), \beta^b(i)) \\
 &+ \sum_{k=1}^K \left(D_k - \sum_{j \in j} t_{jk}(i) - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k}(i) \right) (\lambda_k - \lambda_k(i))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^K \left[R_k - \sum_{j \in j} \left[\left(\bar{p}_j - t_{jk}(i) \right) v_{jk}(i) w_{jk}(i) + r_j^s v_{jk}(i) (1 - w_{jk}(i)) \right] \right. \\
& \left. - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} \left(\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}(i) \right) \right] (\mu_k - \mu_k(i)) + \sum_{k=1}^K \left(\sum_{j \in j} \bar{p}_j v_{jk} - D_k \right) (\alpha_k - \alpha_k(i)) \\
& + \sum_{k=1}^K \left[A_k - \sum_{j \in j} \left[\left(\bar{p}_j - t_{jk}(i) \right) v_{jk}(i) u_{jk}^s(i) + r_j^s v_{jk}(i) (1 - u_{jk}^s(i)) \right] \right. \\
& \left. - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} \left(\bar{h}_{l(i)} - p_{l(i)k}(i) \right) \right] (\beta_k^a - \beta_k^a(i)) \\
& + \sum_{k=1}^K \left[B_k - \sum_{j \in j} \left[\left(t_{jk}(i) - \underline{p}_j \right) v_{jk}(i) u_{jk}^b(i) + r_j^b v_{jk}(i) (1 - u_{jk}^b(i)) \right] \right. \\
& \left. - \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} \left(\bar{h}_{l(i)1} - p_{l(i)k}(i) \right) \right] (\beta_k^b - \beta_k^b(i))
\end{aligned}$$

$$i = 1, \dots, n, \quad n \leq \bar{n}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\lambda}_k(\nu) &\leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k(\nu) & \forall k \\
\underline{\mu}_k(\nu) &\leq \mu_k \leq \bar{\mu}_k(\nu) & \forall k \\
\underline{\alpha}_k(\nu) &\leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k(\nu) & \forall k \\
\underline{\beta}_k^a(\nu) &\leq \beta_k^a \leq \bar{\beta}_k^a(\nu) & \forall k \\
\underline{\beta}_k^b(\nu) &\leq \beta_k^b \leq \bar{\beta}_k^b(\nu) & \forall k
\end{aligned} \tag{6.449}$$

donde $\alpha_\lambda(\nu, k)$ es la constante de penalización asociada a la componente k del vector de multiplicadores λ en la iteración ν , $\alpha_\mu(\nu, k)$ es la constante de penalización asociada a la componente k del vector de multiplicadores μ en la iteración ν , $\alpha_\alpha(\nu, k)$ es la constante de penalización asociada a la componente k del vector de multiplicadores μ en la iteración ν , n es el número de elementos del conjunto dinámico para el modelado del problema dual, $\bar{n}$ es el número máximo de hiperplanos y $\phi(\lambda(i), \mu(i), \alpha(i))$ se evalúa utilizando las ecuaciones (6.338), (6.336) y (6.337).

El procedimiento de actualización de la región de factibilidad de los multiplicadores se describe en el apartado 6.8.1 (página 244).

El procedimiento de actualización de las constantes de penalización se describe en el apartado 6.8.1 (página 247).

Capítulo 7

Solución del problema primal

7.1 Introducción

En este capítulo se detalla el algoritmo empleado para resolver el problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo mediante técnicas de relajación lagrangiana. Como ya se ha indicado (capítulo 4), el método de la relajación lagrangiana se basa en la resolución del problema dual del problema original (o problema primal). Sin embargo, dada la no-convexidad del problema primal, la solución óptima del problema dual no coincide con la solución óptima del problema primal sino que es una cota inferior. Por eso, a partir de la solución del problema dual hace falta aplicar algún procedimiento heurístico que obtenga una solución primal factible suficientemente buena.

El problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo mediante técnicas de relajación lagrangiana se resuelve en tres fases [131], [35], [130], [48], [49], [50], [47], [85], [68] (apartado 4.2.3). En la primera fase se resuelve el problema dual. En la segunda fase se obtiene una solución del problema dual que cumpla las restricciones globales de desigualdad del problema primal. En la tercera fase se consigue una solución factible y cuasi-óptima para el problema primal.

Tradicionalmente, el criterio de parada de la fase primera (solución del problema dual) ha sido la estabilización del coste del problema dual, o bien la ejecución de un número, fijado a priori, de iteraciones. En el algoritmo desarrollado en este trabajo de investigación, en la fase primera se consigue la estabilización tanto del valor de la función objetivo como de los valores de las variables (o multiplicadores de Lagrange) del problema dual. Ello se consigue descomponiendo la fase primera en dos etapas sucesivas.

La estabilización de los multiplicadores en la resolución del problema dual constituye una de las aportaciones de este trabajo de investigación y es lo que permite que el método propuesto pueda

ser empleado como herramienta para el operador del mercado y/o el operador del sistema de un sistema de energía eléctrica liberalizado o desregulado.

El algoritmo que se propone en esta tesis para resolver el problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo se presentó en el apartado 4.2.3 y se repite aquí para mayor claridad. Consta de cuatro etapas. El algoritmo es el siguiente:

Fase 1

Etapas 1 Se resuelve el problema dual utilizando el método de reconstrucción del problema dual mediante hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad (apartado 6.7.4) hasta que converja el valor de la función dual.

Etapas 2 Se refina la solución obtenida en la *Etapas 1* utilizando técnicas de subgradiente (apartado 6.6.1) hasta alcanzar la convergencia en los multiplicadores de Lagrange.

Fase 2

Etapas 3 Se obtiene, a partir de la solución de la *Etapas 2* y mediante un proceso iterativo, una solución del problema dual que cumple las restricciones globales de desigualdad del problema primal.

Fase 3

Etapas 4 Se obtiene, a partir de la solución de la *Etapas 3* y mediante la ejecución de un despacho económico multiperiodo, una solución cuasi-óptima primal factible.

Este capítulo se estructura como sigue. El apartado 7.2 trata de la *Fase 1* del algoritmo anterior. El apartado 7.3 explica la forma de conseguir una solución primal factible a partir de la solución del problema dual. El apartado 7.3.1 detalla el procedimiento empleado para conseguir una solución dual que cumpla las restricciones de desigualdad del problema primal (*Fase 2*). El apartado 7.3.2 se refiere a la *Fase 3* (último paso para la obtención de una solución primal factible).

7.2 *Fase 1: Solución del problema dual*

La clave del buen funcionamiento de un algoritmo de coordinación hidrotérmica en el corto plazo mediante técnicas de relajación lagrangiana está en el procedimiento de resolución del problema dual empleado. La fase de resolución del problema dual es la que garantiza que la solución del problema primal sea una solución cuasi-óptima. Por otra parte, el proceso de resolución del problema dual es más complejo que los procesos que se llevan a cabo en la fases 2 y 3 (o bien, etapas 3 y 4). Todo esto quiere decir que tanto la eficiencia computacional como la calidad de la solución encontrada en la *Fase 1* determinan la eficiencia global y la calidad de la solución

primal conseguida por método.

La función dual del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo (ecuaciones (4.7)-(4.9)) es cóncava [9] y presenta una estructura tipo “meseta” en torno al óptimo, es decir que ante variaciones relativamente significativas en los valores de los multiplicadores (variables del problema dual), el valor de la función objetivo apenas se modifica.

Tradicionalmente los métodos de resolución del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo mediante técnicas de relajación lagrangiana utilizan como criterio de parada en la resolución del problema dual, la estabilización del valor de la función objetivo o bien la ejecución de un número fijo de iteraciones. Conseguir estabilidad en las variables duales (multiplicadores) tiene un coste computacional demasiado elevado que, en los sistemas de energía eléctricos centralizados o regulados, no está justificado con la mejora conseguida en el valor de la función objetivo del problema dual y con la posible mejora en el coste de la solución final primal factible.

Por otra parte, una de las ventajas de la resolución del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo mediante técnicas de relajación lagrangiana es que las variables del problema dual (multiplicadores de Lagrange) tienen un significado económico claro (apartados 4.3 y 4.4). Esto permite que el método propuesto pueda ser la herramienta que utilice el operador del mercado y/o el operador del sistema de un sistema de energía eléctrica desregulado o liberalizado. En este caso la solución de la *Fase 1* no debería finalizar hasta que no se alcance la convergencia en todos los elementos significativos del problema: el valor de la función objetivo y el valor de las variables (o multiplicadores).

En entornos desregulados, es importante conseguir la estabilidad en los valores de los multiplicadores ya que son éstos los que determinan qué generadores se acoplarán (aquellos que con el nivel de remuneración establecido a través de los multiplicadores sean capaces de, al menos, recuperar costes) y cuáles no lo harán. Por ello no se puede finalizar la fase de solución del problema dual (*Fase 1*) hasta que no hayan convergido no sólo la función objetivo sino también los multiplicadores. Parar la ejecución de la *Fase 1* antes de la estabilización de los multiplicadores supondría favorecer el acoplamiento de unos generadores frente a otros. Un mercado de energía no debe permitir estas desigualdades sino que debe ser ecuánime y transparente a todos (generadores y consumidores).

Dada la poca utilidad práctica que tiene perseguir la convergencia de los multiplicadores en entornos centralizados y la “juventud” de los entornos liberalizados (y por tanto la poca experiencia en ellos), no se ha encontrado ninguna referencia en la literatura que se preocupe de la estabilización de los multiplicadores en los procedimientos de resolución del problema de la

coordinación hidrotérmica en el corto plazo.

El algoritmo propuesto en este documento resuelve el problema dual del problema de la coordinación hidrotérmica en dos etapas sucesivas. En la primera etapa se consigue de forma eficiente una solución al problema dual próxima a la solución óptima. Al final de esta etapa el valor de la función objetivo del problema dual ha convergido. En la segunda etapa se refina la solución obtenida en la etapa anterior alcanzándose la estabilidad de los multiplicadores.

En la *Etapa 1* se resuelve el problema dual utilizando el método de reconstrucción del problema dual mediante hiperplanos secantes con control de dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos. Este método de actualización de multiplicadores se explica en detalle en el apartado 6.7.4. Se encuadra dentro de los métodos de actualización de multiplicadores con memoria que se describen en el capítulo 6. Se ha escogido este método por ser el que resuelve de forma más eficiente el problema dual atendiendo no sólo al tiempo de cálculo sino también atendiendo a la calidad de la solución encontrada (capítulo 8). La *Etapa 1* finaliza cuando converge el valor de la función dual. El criterio de convergencia, como se explica en el apartado 6.7.4, es el acercamiento entre la solución del problema dual aproximado, lineal a tramos, y la solución del problema dual.

En la *Etapa 2*, partiendo de la solución de la *Etapa 1* (valor del vector de multiplicadores en la última iteración), se resuelve el problema dual utilizando el método del subgradiente en la actualización de los multiplicadores.

El método del subgradiente (o método del subgradiente tradicional como se le llama en el apartado 6.6.1 para distinguirlo del método del subgradiente modificado, apartado 6.6.2) es un método de actualización de multiplicadores sin memoria (capítulo 6), esto es, en cada iteración se utiliza sólo la información resultante de la resolución del problema primal relajado de la iteración actual. Como consecuencia del escaso uso de la información disponible, el método del subgradiente necesita de la ejecución de muchas iteraciones para alcanzar la convergencia en el valor de la función objetivo del problema dual. Por ello, el método del subgradiente, como método único para resolver el problema dual, presenta una convergencia muy lenta y resulta ineficiente computacionalmente. Sin embargo, si se parte de una solución próxima a la óptima (y la solución de la *Etapa 1* está próxima a la solución óptima del problema dual) el método del subgradiente converge de forma eficiente.

El método del subgradiente se basa en la actualización de los multiplicadores de forma proporcional a los incumplimientos de las restricciones dualizadas. Al aplicar el método del subgradiente en la *Etapa 2* del algoritmo propuesto, a medida que avanza el proceso disminuyen los incumplimientos en las restricciones dualizadas y los multiplicadores se estabilizan. Así, se suprime el

comportamiento oscilante que se observa en la evolución de los multiplicadores en las últimas iteraciones de la *Etapa 1* a pesar de la convergencia en el valor de la función dual. Esto se consigue en poco tiempo de cálculo dada la eficiencia del método del subgradiente si se parte de una solución próxima a la óptima.

De esta forma, en la *Etapa 1* se consigue convergencia en el valor de la función dual de forma eficiente actualizando los multiplicadores empleando el método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos (apartado 6.7.4). Dada la estructura tipo “meseta” de la función dual, a pesar de la convergencia en el valor de esta función, los multiplicadores (o variables duales) aún no han convergido al final de esta etapa. En la *Etapa 2*, y dado que se parte de una solución próxima a la óptima, se estabilizan los multiplicadores. El método de actualización de multiplicadores empleado en esta segunda etapa es el método del subgradiente, que se comporta de forma eficiente ya que se parte de una solución próxima a la óptima. Gracias al empleo del método del subgradiente se disminuyen los incumplimientos en las restricciones globales (o restricciones dualizadas) con lo que se estabilizan los multiplicadores y se obtiene una solución que se acerca a la factibilidad del problema primal.

El algoritmo detallado de la *Fase 1* es el siguiente:

Algoritmo Fase 1

- Paso 1 Definición de la región de factibilidad o dominio de definición inicial del vector de multiplicadores. El vector de multiplicadores para la primera iteración se hace igual al vector límite inferior (o límite superior) del dominio de definición para la primera iteración o cualquier valor intermedio. Se inicializa el contador de iteraciones, ν , a 1 y el número de elementos del conjunto dinámico para el modelado del problema dual, n , a 0.
- Paso 2 Resolución del problema primal relajado (PPR), esto es, resolución de un subproblema por cada central térmica y un subproblema por cada cuanca hidráulica.
- Paso 3 3a Actualización del conjunto dinámico para el modelado del problema dual.

Si el contador de iteraciones es menor o igual que $\bar{n}$ (siendo $\bar{n}$ el número máximo de hiperplanos permitido), se añade el hiperplano secante a la función dual para el valor del vector de multiplicadores de la iteración actual. A continuación se incrementa en 1 el número de elementos del conjunto dinámico, n , (apartados 6.7.2 y 6.7.4) y se va al paso 3b.

Si el contador de iteraciones es mayor que $\bar{n}$, se calculan los residuos de los hiperplanos que forman parte del conjunto dinámico de la iteración precedente (utilizando la

ecuación (6.42)). A continuación se actualiza el conjunto dinámico partiendo del conjunto dinámico de la iteración anterior, eliminando el hiperplano no activo de mayor residuo y añadiendo el hiperplano secante a la función dual para el valor del vector de multiplicadores de la iteración en curso.

3b Resolución del problema dual relajado (PDR) que se plantea:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar}_{z, \theta \in C(\nu)} \quad z \\ &\text{sujeto a} \\ &z \leq \phi(i) + \langle s(i), \theta - \theta(i) \rangle \quad i = 1, \dots, n \quad n \leq \bar{n} \end{aligned} \quad (7.1)$$

siendo n el número de elementos (o hiperplanos) del conjunto dinámico para el modelado del problema dual y $C(\nu)$ la región de factibilidad (o los intervalos de definición de los multiplicadores) en cada iteración.

3c Actualización de la región de factibilidad de los multiplicadores:

Para cada componente j del vector de multiplicadores θ^* que optimiza el PDR del paso 3b, hacer

- si $\theta_j^* = \bar{\theta}_j(\nu)$, entonces:

$$\bar{\theta}_j(\nu + 1) = \bar{\theta}_j(\nu)(1 + a) \quad (7.2)$$

$$\underline{\theta}_j(\nu + 1) = \bar{\theta}_j(\nu)(1 - b) \quad b \leq 1; \quad (7.3)$$

- si $\theta_j^* = \underline{\theta}_j(\nu)$, entonces

$$\bar{\theta}_j(\nu + 1) = \underline{\theta}_j(\nu)(1 + c) \quad (7.4)$$

$$\underline{\theta}_j(\nu + 1) = \underline{\theta}_j(\nu)(1 - d) \quad d \leq 1; \quad (7.5)$$

- en otro caso

$$\bar{\theta}_j(\nu + 1) = \bar{\theta}_j(\nu) \quad (7.6)$$

$$\underline{\theta}_j(\nu + 1) = \underline{\theta}_j(\nu). \quad (7.7)$$

Paso 4 Se actualiza el valor del vector de multiplicadores con el valor que maximiza el problema dual relajado del paso 3b, i.e. $\theta(\nu + 1) = \theta^*$.

Si $\frac{z - \phi(\theta(\nu))}{\phi(\theta(\nu))} \leq \varepsilon$, entonces almacena el número de iteraciones ejecutadas en ν_{e1} ($\nu_{e1} = \nu$), se incrementa el contador de iteraciones ($\nu \leftarrow \nu + 1$) y se va al paso 5.

En caso contrario, se incrementa el contador de iteraciones ($\nu \leftarrow \nu + 1$) y se va al paso 2.

Paso 5 Resolución del problema primal relajado (PPR), esto es, resolución de un subproblema por cada central térmica y un subproblema por cada cuenca hidráulica.

Paso 6 Actualización del vector de multiplicadores de la siguiente forma:

$$\theta(\nu + 1) = \theta(\nu) + k(\nu) \frac{s(\nu)}{|s(\nu)|} \quad (7.8)$$

$$\text{siendo } k(\nu) = \frac{1}{m+n(\nu-\nu_{e1})} \quad (7.9)$$

Paso 7 Si, comenzando a contar desde el paso 5, se ha ejecutado un número mínimo de iteraciones y para todas las componentes j del vector de multiplicadores se cumple:

$$\frac{\theta_j(\nu) - \theta_j(\nu - 1)}{\theta_j(\nu)} \leq \sigma \quad (7.10)$$

(donde σ es un parámetro definido a priori), entonces finaliza la *Fase 1*.

En caso contrario se incrementa el contador de iteraciones ($\nu \leftarrow \nu + 1$) y se va al paso 5.

Los pasos 1-4 constituyen la *Etapa 1*. Los pasos 3 y 4 definen el procedimiento de actualización de multiplicadores empleado en la *Etapa 1*, método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos (apartado 6.7.4).

Los pasos 5-7 constituyen la *Etapa 2*. La *Etapa 2* finaliza cuando se han estabilizado todos los multiplicadores. El criterio de convergencia se indica en el paso 7 (ecuación (7.10)).

Es importante destacar que gracias a la utilización del método del subgradiente en la *Etapa 2* para mejorar la solución obtenida en la *Etapa 1*, la solución que resulta (al finalizar la *Etapa 2*) se acerca más a una solución primal factible que la solución de la *Etapa 1*. El motivo es que lo que guía la actualización de los multiplicadores al emplear el método del subgradiente es precisamente la disminución de los incumplimientos en las restricciones globales del problema primal.

Resulta pues conveniente ejecutar una segunda etapa de refinamiento de la solución del problema dual utilizando el método del subgradiente por dos motivos:

- Por una parte se consigue estabilizar los multiplicadores de forma eficiente computacionalmente. Ejecutar más iteraciones de resolución del problema dual empleando el método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos, en lugar de las iteraciones del método del subgradiente de la *Etapa 2* del algoritmo propuesto, es mucho más costoso computacionalmente.
- Por otra parte se consigue una solución que se acerca más a la factibilidad del problema primal (que es el objetivo final perseguido) ya que el criterio que guía la actualización de los multiplicadores en la *Etapa 2* es la disminución de los incumplimientos en las restricciones globales.

Por ello, si comparamos un algoritmo de coordinación hidrotérmica en el corto plazo como el presentado en el apartado 4.2.3, y repetido en el apartado 7.1, con otro algoritmo en el que en la *Fase 1* no se alcance la convergencia en los multiplicadores (es decir con otro algoritmo en el que se resuelva el problema dual en una sola etapa empleando el mismo método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos en la actualización de multiplicadores), entonces con este último algoritmo la solución que se obtiene al finalizar la *Fase 1* presenta más infactibilidades que la solución que se obtiene en la *Fase 1* (o *Etapa 2*) del primer algoritmo. Ello quiere decir que probablemente se requieran más iteraciones en la *Fase 2*, encargada de obtener una solución factible en las restricciones globales de desigualdad, en el caso de que no se haya ejecutado la etapa encaminada a conseguir la estabilización de los multiplicadores.

Todo esto implica que el pequeño aumento de tiempo de cálculo en la resolución de la *Fase 1* de un algoritmo como el presentado (con respecto al tiempo de cálculo de la *Fase 1* de un algoritmo que resuelve el problema dual en una sola etapa) puede compensarse con la probable disminución del tiempo requerido para encontrar una solución factible en las restricciones globales de desigualdad (por ser el número y la cuantía de las infactibilidades menor).

Concluyendo, la introducción de una segunda etapa de refinamiento de la solución del problema dual utilizando el método del subgradiente presenta la gran ventaja de que se consiguen estabilizar los multiplicadores con un aumento prácticamente despreciable del tiempo total de cálculo. Esto implica que los multiplicadores que resultan al finalizar la *Etapa 2* son aquellos con los que se alcanza la convergencia del problema dual y esto quiere decir que la información que proporcionan (su significado económico) se puede emplear de forma transparente y con garantía de optimalidad tanto para la elaboración de tarifas en sistemas de energía eléctrica centralizados como para ayudar al operador del mercado y/o el operador del sistema de un entorno desregulado de forma que el mercado del sector eléctrico sea ecuatoriano con todos los generadores y consumidores.

7.3 Obtención de una solución primal factible

Dada la no convexidad del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo, la solución óptima del problema primal no coincide con la solución óptima del problema dual. Por ello una vez resuelto el problema dual hacen falta aplicar heurísticos para encontrar una solución primal factible.

Antes de detallar el procedimiento heurístico a aplicar para conseguir una solución primal factible es importante observar la relación que existe en el problema de la coordinación hidrotérmica

en el corto plazo, entre las variables enteras del problema primal (aquellas que definen los acoplamientos/desacoplamientos de las centrales térmicas) y las restricciones globales de desigualdad incluidas en la formulación del problema (restricciones de reserva rodante y en ocasiones además restricciones de demanda mínima y/o restricciones de regulación).

Por otra parte, las únicas restricciones globales de igualdad que intervienen en el problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo son las restricciones de demanda. En la formulación de las restricciones de demanda sólo intervienen variables continuas (potencia producida por las centrales hidráulicas y térmicas).

El procedimiento heurístico para encontrar una solución primal factible, a partir de la solución del problema dual, puede descomponerse en dos etapas:

- En primer lugar se busca una solución del problema dual que cumpla las restricciones globales de desigualdad. Esto es equivalente a buscar un conjunto factible de variables enteras (variables de acoplamiento de las centrales térmicas). Este es el procedimiento que se lleva a cabo en la *Fase 2*.
- A continuación, fijadas las variables enteras al valor que adquieren tales variables al finalizar la *Fase 2*, se busca el conjunto factible de variables continuas que optimiza el coste de producción. Esto es, se reparte la producción, para satisfacer la demanda, entre las centrales térmicas acopladas y las centrales hidráulicas de forma óptima. Para ello se ejecuta un algoritmo de despacho económico multiperiodo [129]. Este es el procedimiento que se lleva a cabo en la *Fase 3*.

Es importante indicar que la misión principal de los algoritmos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo es determinar la política óptima de arranque y parada de los grupo térmicos de forma que se satisfaga la demanda y se cumplan las restricciones del sistema a mínimo coste. Quiere ello decir que la salida principal del algoritmo son las variables de acoplamiento (o de arranque y parada) de los grupos térmicos.

La determinación de las potencias producidas por cada central térmica o hidráulica (i.e. la salida del algoritmo de despacho económico que se lleva a cabo en la *Fase 3*) tiene un papel secundario ya que probablemente no coincidirán con las potencias finales producidas. La salida del despacho económico (i.e. el calculo, una vez fijadas las variables de acoplamiento, de las potencias producidas por las centrales térmicas e hidráulicas para satisfacer la demanda de forma óptima) sirve para estimar el coste. Sin embargo, es el control en tiempo real, en el que además de las restricciones que modelan el funcionamiento del equipo generador y las restricciones de demanda se tienen en cuenta las restricciones de red, el que determina las producciones de las

centrales térmicas e hidráulicas. Por ello, muchas referencias de la literatura [18], [1], [6], [7], [104], [98] no ejecutan un algoritmo de despacho económico sino que dan por concluida la tarea cuando encuentran un conjunto factible de variables de acoplamiento.

7.3.1 *Fase 2: Obtención de un conjunto factible de variables de acoplamiento*

La *Fase 2* constituye el procedimiento mediante el cual se busca un conjunto de variables primales enteras (i.e. un conjunto de variables de acoplamiento de las centrales térmicas) de forma que se cumplan las restricciones globales de desigualdad. La misión de la *Fase 2* es modificar los acoplamientos de las centrales térmicas, respecto a los acoplamientos que resultan al finalizar la *Fase 1*, de forma que se satisfagan las restricciones de desigualdad en todos los subperiodos del horizonte temporal analizado.

Las restricciones de desigualdad tradicionalmente consideradas en los modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo son las restricciones de reserva rodante. Existen dos procedimientos generales para conseguir factibilidad en reserva rodante en la *Fase 2* de un algoritmo de coordinación hidrotérmica mediante relajación lagrangiana en fases (capítulo 2).

El primer procedimiento y más utilizado [131], [35], [85], [18], [1], [119], [110] consiste en buscar una solución factible en reserva rodante empleando de nuevo (al igual que en la *Fase 1*) el problema dual. El procedimiento a seguir consiste en aumentar los multiplicadores asociados a las restricciones de reserva rodante (y, a veces, también los multiplicadores asociados a las restricciones de demanda) en los subperiodos de infactibilidad y resolver de nuevo el problema primal relajado. Al aumentar el valor de los multiplicadores en algunos subperiodos probablemente aumentará el número de centrales acopladas en tales subperiodos y, es posible que, debido a las ligaduras temporales (como los mínimos tiempos de funcionamiento y parada) en otros subperiodos se desacoplen centrales. Con la nueva solución del problema primal relajado se evalúa si se cumplen las restricciones de reserva rodante en todos los subperiodos. En los subperiodos en que no se cumplan se aumentan de nuevo los multiplicadores. El proceso continua hasta que se encuentre un valor del vector de multiplicadores con el que se cumplen las restricciones de reserva rodante en todos los subperiodos del horizonte temporal analizado.

Típicamente, las referencias que emplean este procedimiento en la búsqueda de una solución factible en reserva rodante sólo modifican, en el proceso iterativo que se lleva a cabo en la *Fase 2* los multiplicadores asociados a las restricciones de reserva rodante, fijándose los multiplicadores asociados a las restricciones de demanda a los valores que adquieren en la solución de la *Fase 1* [131], [35], [85], [18].

En [131], en cada iteración del algoritmo de la *Fase 2* se modifica sólo el multiplicador asociado

a la restricción de reserva rodante de mayor infactibilidad. El procedimiento empleado, en cada iteración, incrementa la componente del multiplicador μ asociado al subperiodo de mayor infactibilidad en la mínima cantidad posible para conseguir factibilidad en ese subperiodo en la restricción de reserva rodante. Con el valor de este multiplicador modificado y manteniendo constantes los demás multiplicadores, se ejecuta otra iteración, resolviéndose el problema primal relajado e incrementando en la mínima cantidad posible el multiplicador asociado a la restricción de reserva rodante de mayor infactibilidad. El proceso continúa hasta que de la resolución del problema primal relajado se obtiene una solución que cumple todas las restricciones de reserva rodante. Este procedimiento, que presenta cierta analogía con los métodos de optimización de descenso por coordenadas, permite modificar cada componente en la mínima cantidad posible con el objetivo de conseguir factibilidad en las restricciones de reserva rodante (al final de la *Fase 2*) con un vector de multiplicadores μ que se aproxime lo más posible al vector de multiplicadores μ con el que finaliza la *Fase 1*.

En [35], en cada iteración del algoritmo de la *Fase 2* se modifican todos los multiplicadores asociados a restricciones de reserva rodante en que se producen infactibilidades de forma proporcional a los incumplimientos, manteniéndose constantes los multiplicadores asociados a las restricciones de reserva rodante factibles. Con los nuevos valores de los multiplicadores se resuelve el problema primal relajado. El proceso continúa hasta que, de la resolución del problema primal relajado, se obtiene una solución que cumple todas las restricciones de reserva rodante. Es un procedimiento más simple que el anterior y por ello el tiempo de cálculo de cada iteración es muy reducido. Esta es la ventaja de este método. El inconveniente es que, si el tamaño del paso a multiplicar por los incumplimientos es grande, es posible que se incrementen demasiado algunas componentes de vector de multiplicadores μ de forma que se obtenga una solución que se aleje de la solución de la *Fase 1* y por tanto resulte poco económica (o al menos, menos económica que la solución conseguida al emplear el procedimiento propuesto en [131]). Si el tamaño del paso es pequeño, es posible que sean necesarias muchas iteraciones para alcanzar la factibilidad en reserva rodante y el tiempo de cálculo total sea más elevado que el tiempo de cálculo al aplicar el procedimiento presentado en [131].

Otras referencias [1], [119], [110] modifican, en el proceso iterativo que se lleva a cabo en la *Fase 2*, no sólo los multiplicadores asociados a las restricciones de reserva rodante sino también los asociados a las restricciones de demanda.

El segundo procedimiento para obtener soluciones factibles en las restricciones globales de desigualdad a partir de la solución de la *Fase 1* consiste en, partiendo de la solución de la *Fase 1*, acoplar centrales en los periodos que no se cumpla la reserva rodante siguiendo reglas heurísticas basadas en la experiencia y en el conocimiento particular del sistema de energía eléctrica consi-

derado. Este método ha sido desarrollado por el grupo de Luh [44], [47], [130], [48], [49], [50], [78]. Este procedimiento se analiza en el capítulo 2.

El método que se ha empleado en la *Fase 2* del algoritmo propuesto sigue el procedimiento, por otra parte más habitual, utilizado en [35]. Esto es, para conseguir una solución que cumpla las restricciones globales de desigualdad¹ se modifican (incrementándose) los multiplicadores asociados a las restricciones globales de desigualdad no factibles y se mantienen constantes los multiplicadores asociados a las restricciones globales de desigualdad factibles. Los multiplicadores asociados a las restricciones de demanda (o restricciones globales de igualdad) se mantienen constantes, e igual al valor que adquieren en la solución de la *Fase 1*, a lo largo de todo el proceso de la *Fase 2*. Así, en cada iteración de la *Fase 2* se incrementan los multiplicadores asociados a las restricciones globales de desigualdad no factibles, manteniéndose constantes los demás multiplicadores. Con los nuevos valores de los multiplicadores se resuelve el problema primal relajado. El proceso finaliza cuando, de la resolución del problema primal relajado, se obtiene una solución que cumple todas las restricciones globales de desigualdad.

En el algoritmo que se propone en este trabajo de investigación, gracias a la aplicación de la etapa de refinamiento de la solución del problema dual (*Etapa 2*), la solución de la *Fase 1* (o *Etapa 2*) cumple las restricciones de reserva rodante en la mayoría de los periodos. Por ello, el vector de multiplicadores μ al final de esta fase se aproxima mucho al vector de multiplicadores μ al final de la *Fase 1* y un procedimiento como el utilizado en [35] obtiene una solución factible en reserva rodante de forma muy eficiente computacionalmente. Dada pues, la proximidad a la factibilidad de la solución final de la *Fase 1* (o *Etapa 2*) del algoritmo propuesto, no hace falta ningún procedimiento sofisticado del tipo propuesto en [131]. El uso de un procedimiento como este sólo aumenta el tiempo de cálculo de la *Fase 2* sin mejora de la calidad de la solución conseguida.

A continuación se explica en detalle el procedimiento empleado en la *Fase 2*. Para mayor claridad, se supone, en primer lugar, que únicamente se incluyen como restricciones globales de desigualdad en la formulación del problema primal, las restricciones de reserva rodante en cada subperiodo del horizonte temporal analizado. Se formulan estas restricciones en la forma general presentada en el capítulo 3 (apartado 3.5), esto es:

$$\sum_{j \in J} r_{jk}^t + \sum_{i \in I} \sum_{l_i \in l(i)} r_{l(i)k}^h \geq R_k \quad \forall k \quad (7.11)$$

donde r_{jk}^t representa la contribución a la reserva rodante de la central térmica j en el subperiodo

¹Recuérdese que en esta tesis no sólo se han considerado las restricciones de reserva rodante, sino que se han incluido además otras restricciones globales de desigualdad. En la literatura habitualmente sólo se incluyen restricciones de demanda y de reserva rodante.

k , $r_{l(i)k}^h$ representa la contribución a la reserva rodante de la central hidráulica l de la cuenca i en el subperiodo k y R_k es la reserva rodante (en MW) que se debe mantener en el subperiodo k .

En cada iteración de la *Fase 2* del algoritmo propuesto se analiza si se cumplen las restricciones de reserva rodante en todos los subperiodos del horizonte temporal analizado. Si es así finaliza el proceso y se fijan las variables de acoplamiento de las centrales térmicas.

En caso contrario se modifican los multiplicadores asociados a los subperiodos en que se producen infactibilidades en reserva rodante y se mantienen constantes los multiplicadores asociados a los subperiodos en que se cumplen las restricciones de reserva rodante.

Sea k un subperiodo en el que no se cumple la restricción de reserva rodante, el multiplicador μ_k asociado a esta restricción se incrementa de forma proporcional a la cantidad mínima de reserva que hace falta para cumplir la restricción de reserva rodante en este subperiodo k . Esto es, de forma proporcional al incumplimiento que se calcula de la siguiente forma:

$$R_k - \sum_{j \in J} r_{jk}^t - \sum_{i \in I} \sum_{l_i \in l(i)} r_{l(i)k}^h \quad (7.12)$$

El proceso a seguir, en este caso en que las únicas restricciones globales de desigualdad son las restricciones de reserva rodante, se describe a continuación. El indicador de iteraciones ν sigue la cuenta comenzada al principio de la *Fase 1*.

1. Se resuelve el problema primal relajado.
2. Si

$$\sum_{j \in J} r_{jk}^t + \sum_{i \in I} \sum_{l_i \in l(i)} r_{l(i)k}^h \geq R_k \quad \forall k \quad (7.13)$$

(donde k hace referencia cada subperiodo k del horizonte temporal analizado) entonces finaliza la *Fase 2*. En caso contrario continúa el proceso.

3. Desde $k = 1$ hasta K (donde K es el número total de subperiodos del horizonte temporal analizado), hacer:

- Si

$$\sum_{j \in J} r_{jk}^t + \sum_{i \in I} \sum_{l_i \in l(i)} r_{l(i)k}^h \geq R_k \quad (7.14)$$

entonces el multiplicador asociado a la restricción de reserva rodante en el subperiodo k , μ_k , se mantiene igual al valor de la iteración anterior, es decir:

$$\mu_k(\nu + 1) = \mu_k(\nu) \quad (7.15)$$

- Si por el contrario

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} r_{jk}^t + \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{l(i) \in \mathcal{L}(i)} r_{l(i)k}^h < R_k \quad (7.16)$$

entonces se incrementa el multiplicador asociado a la restricción de reserva rodante en el subperiodo k , μ_k , de forma proporcional al incumplimiento, es decir:

$$\mu_k(\nu + 1) = \mu_k(\nu) + k(\nu) \left(R_k - \sum_{j \in \mathcal{J}} r_{jk}^t - \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{l(i) \in \mathcal{L}(i)} r_{l(i)k}^h \right) \quad (7.17)$$

donde $k(\nu)$ es el tamaño del paso elegido (que puede ser constante o depender del contador de iteraciones)

Con el nuevo valor del vector de multiplicadores μ (y manteniendo el valor del vector de multiplicadores asociado a las restricciones de demanda que soluciona la *Fase 1*) se ejecuta otra iteración (resolviendo de nuevo el problema primal relajado).

Para generalizar este procedimiento al caso de incluir más restricciones de desigualdad (apartado 4.3) conviene recordar la formulación general de estas restricciones empleada (capítulo 4):

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} g_j(\mathcal{X}_j) + \sum_{i \in \mathcal{I}} g_i(\mathcal{Y}_i) \geq G \quad (7.18)$$

donde $\mathcal{X}_j$ representa el vector de variables asociadas a la central térmica j y $\mathcal{Y}_i$ representa el vector de variables asociadas a la cuenca hidráulica i . Los vectores $g_j(\mathcal{X}_j)$, $g_i(\mathcal{Y}_i)$ y G son de dimensión igual al número total de restricciones globales de desigualdad (que será un múltiplo del número total de subperiodos del horizonte temporal analizado).

En lo que sigue se llama M al número total de restricciones globales de desigualdad y se denota como $g_j^m(\mathcal{X}_j)$, $g_i^m(\mathcal{Y}_i)$ y G^m a la componente m de los vectores $g_j(\mathcal{X}_j)$, $g_i(\mathcal{Y}_i)$ y G respectivamente, de forma que la restricción global de desigualdad que ocupa la posición m se formula de la siguiente forma:

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} g_j^m(\mathcal{X}_j) + \sum_{i \in \mathcal{I}} g_i^m(\mathcal{Y}_i) \geq G^m \quad (7.19)$$

Nótese que el superíndice m no indica subperiodo del horizonte temporal analizado sino que hace referencia a cada componente m del vector de restricciones de desigualdad consideradas. Sólo en el caso de que únicamente se incluyan, como restricciones globales de desigualdad, las restricciones de reserva rodante, el superíndice m indica subperiodo del horizonte temporal analizado y la dimensión M de los vectores $g_j(\mathcal{X}_j)$, $g_i(\mathcal{Y}_i)$ y G coincide con el número total de subperiodos del horizonte temporal analizado K .

Atendiendo a la formulación general del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo presentada en el capítulo 4 (apartado 4.2), en la descripción del algortimo general de la *Fase 2* (que puede incluir todas o algunas de las restricciones de carga de desigualdad presentadas en el capítulo 3) se denota como μ al vector de multiplicadores asociado a las restricciones globales de desigualdad ².

Al primer paso del algoritmo de la *Fase 2* se le llama “Paso 8” para continuar con la numeración comenzada en el apartado 7.2. Este algoritmo se describe a continuación:

Algoritmo Fase 2

Paso 8 Se resuelve el problema primal relajado.

Paso 9 Si

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} g_j^m(\mathcal{X}_j) + \sum_{i \in \mathcal{I}} g_i^m(\mathcal{Y}_i) \geq G^m \quad \forall m, \quad m = 1, \dots, M \quad (7.20)$$

donde m es el superíndice que hace referencia a las restricciones globales de desigualdad y M el número total de ellas, entonces finaliza la *Fase 2*. Queda definido un conjunto factible de variables enteras del problema primal con los valores que adquieren las variables en la resolución del problema primal relajado (paso 8) de la iteración en curso. En caso contrario se va al Paso 10.

Paso 10 Desde $m = 1$ hasta M , hacer:

- Si

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} g_j^m(\mathcal{X}_j) + \sum_{i \in \mathcal{I}} g_i^m(\mathcal{Y}_i) \geq G^m \quad (7.21)$$

entonces el multiplicador μ_m asociado a la restricción global definida en la ecuación anterior y que ocupa la posición m en el vector de restricciones globales de desigualdad, se mantiene igual al valor de la iteración anterior, es decir:

$$\mu_m(\nu + 1) = \mu_m(\nu) \quad (7.22)$$

- Si por el contrario

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} g_j^m(\mathcal{X}_j) + \sum_{i \in \mathcal{I}} g_i^m(\mathcal{Y}_i) < G^m \quad (7.23)$$

²Nótese que cuando se hace referencia a los modelos particulares presentados en el apartado 4.3, μ hace referencia al vector de multiplicadores asociado a las restricciones de reserva rodante. Sin embargo, cuando se hace referencia a la formulación general, que sólo distinguen entre restricciones globales de igualdad y restricciones globales de desigualdad, μ representa el vector de multiplicadores asociado a las restricciones globales de desigualdad.

entonces se incrementa el multiplicador μ_m asociado a la restricción global de desigualdad que ocupa la posición m de forma proporcional a la potencia mínima necesaria³ para que se cumpla la restricción, esto es, de forma proporcional al incumplimiento. Es decir:

$$\mu_m(\nu + 1) = \mu_m(\nu) + k(\nu) \left(G^m - \sum_{j \in \mathcal{J}} g_j^m(\mathcal{X}_j) - \sum_{i \in \mathcal{I}} g_i^m(\mathcal{Y}_i) \right) \quad (7.24)$$

donde $k(\nu)$ es el tamaño del paso que puede ser constante o depender del contador de iteraciones ν .

Paso 11 Se asigna al vector de multiplicadores asociado a las restricciones globales de igualdad (o restricciones de demanda) el mismo valor de la iteración anterior, que coincide con el valor con el que se solucionó la *Fase 1*. Es decir $\lambda(\nu + 1) = \lambda(\nu)$. A continuación se actualiza el contador de iteraciones ($\nu \leftarrow \nu + 1$) y se va al Paso 8.

En los casos de estudio que se incluyen en el capítulo 8 se ha utilizado un tamaño del $k(\nu)$ constante por obtenerse mejores resultados que al emplear el siguiente tamaño:

$$k(\nu) = \frac{1}{a + b \times \nu} \quad (7.25)$$

siendo a y b parámetros elegidos a priori.

Nótese que la actualización de los multiplicadores asociados a las restricciones globales de desigualdad infactibles se hace de forma proporcional a los incumplimientos pero que, en sentido estricto, no se puede hablar de actualización de tipo subgradiente ya que sólo se actualizan de forma proporcional a los incumplimientos las componentes del vector de multiplicadores asociadas a restricciones infactibles.

Con el algoritmo anterior si el tamaño del paso elegido $k(\nu)$ es demasiado grande puede ocurrir que en pocas iteraciones se alcance una solución factible en las restricciones globales de desigualdad, y por tanto concluya la *Fase 2*, pero que el valor del vector de los multiplicadores asociados a las restricciones globales de desigualdad μ adquiera, en algunas de sus componentes, valores mucho mayores que los necesarios para alcanzar la factibilidad.

Si, en el proceso que se lleva a cabo en la *Fase 2*, se incrementa en exceso el vector de multiplicadores μ , respecto al vector de multiplicadores con el que finaliza la *Fase 1*, entonces en la solución del problema primal relajado de la última iteración de la *Fase 2* se habrán acoplado más centrales de las necesarias para resolver el problema de forma económica. Quiere ello decir que

³Nótese que todas las restricciones de desigualdad se formulan atendiendo a potencias. De otro modo, cada componente de los vectores $g_j(\mathcal{X}_j)$, $g_i(\mathcal{Y}_i)$ y G tiene dimensiones de potencia.

si, en la *Fase 2*, el tamaño del paso es demasiado elevado es posible que el coste del problema dual en la última iteración de la *Fase 2*, sea significativamente mayor que el coste de la solución del problema dual de la *Fase 1*. En este caso la solución de la *Fase 2* originará una solución al problema primal, tras la resolución del despacho económico, poco económica.

Para evitar acoplamientos innecesarios, originados por incrementos excesivos en el vector de multiplicadores μ , durante la *Fase 2*, y así reducir el coste de la solución de la *Fase 2* y, en consecuencia, de la solución primal factible final, se puede modificar el algoritmo añadiendo una etapa de post-procesamiento de la solución de la *Fase 2*.

Así, una vez obtenida la solución de la *Fase 2*, según el algoritmo anterior, y antes de fijar las variables de acoplamiento para resolver el algoritmo de despacho económico de la *Fase 3*, se ejecuta un proceso iterativo en el que se disminuyen los multiplicadores asociados a las restricciones globales de desigualdad. En cada iteración, con el nuevo valor del vector de multiplicadores μ , y sin modificar el valor de los multiplicadores λ , se resuelve el problema primal relajado. Si la solución del problema primal relajado cumple todas las restricciones globales de desigualdad se ejecuta otra iteración disminuyéndose de nuevo el vector de multiplicadores. Si por el contrario, se produce alguna infactibilidad en alguna de las restricciones globales de desigualdad, entonces finaliza esta etapa de post-procesamiento. El vector de multiplicadores μ resultado de esta etapa es aquel con el que se ejecutó la penúltima iteración. Entonces, se fijan las variables de acoplamiento de las centrales térmicas a la solución del problema primal relajado que se ejecutó con el vector de multiplicadores de la penúltima iteración de la etapa de post-procesamiento. Estas variables de acoplamiento constituyen un conjunto factible de las variables enteras del problema primal. Con estos valores de las variables de acoplamiento, y mediante la ejecución de un despacho económico (*Fase 3*) se obtiene una solución cuasi óptima del problema primal.

En la etapa de post-procesamiento de la solución de la *Fase 2* se modifican los multiplicadores μ asociados a las restricciones globales de desigualdad empleando técnicas de subgradiente. La actualización de multiplicadores se lleva a cabo de la siguiente forma:

$$\mu(\nu + 1) = \mu(\nu) + k' \left(G - \sum_{j \in J} \mathcal{Y}_j - \sum_{i \in I} g_i(\mathcal{Y}_i) \right) \quad (7.26)$$

Nótese que la expresión anterior es vectorial, es decir que se modifican todos los multiplicadores μ . Además, dado que se cumplen todas las restricciones globales de desigualdad $G - \sum_{j \in J} g_j^m(\mathcal{X}_j) - \sum_{i \in I} g_i(\mathcal{Y}_i)$ es un vector cuyas componentes son todas negativas. Esto quiere decir que se disminuyen todas las componentes de los multiplicadores μ . El tamaño del paso elegido k' puede ser constante o dependiente del contador de iteraciones.

En la implantación informática que se ha llevado a cabo no se ha incluido esta etapa de post-

procesamiento de la *Fase 2*. El motivo es que, gracias a la incorporación de la *Etapa 2* de refinamiento de la solución del problema dual, la solución que se obtiene al final de la *Fase 1* se acerca mucho a la factibilidad. Ello implica que la *Fase 2* converge de forma muy rápida obteniéndose una solución cuyo coste se aproxima mucho a la solución de la *Fase 1*. El grado de aproximación entre la solución de la *Fase 1* y la solución de la *Fase 2* es una medida de la calidad de la solución encontrada. No obstante la incorporación de esta etapa de post-procesamiento de la solución de la *Fase 3* es inmediata y no requiere ninguna consideración adicional.

7.3.2 *Fase 3: Despacho económico multiperiodo*

La última fase de la resolución del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo mediante técnicas de relajación lagrangiana es la ejecución de un despacho económico multiperiodo [129].

Tras la ejecución de la *Fase 2* se obtiene un conjunto factible de variables enteras del problema primal (variables de acoplamiento de las centrales térmicas). Para obtener una solución primal factible hay que conseguir una solución que cumpla las restricciones globales de igualdad o restricciones de demanda. Para ello se lleva a cabo un procedimiento de despacho económico multiperiodo con el que se optimiza la producción de las centrales acopladas para suministrar la demanda de energía eléctrica.

Existen dos posibilidades de implementación de la *Fase 3*. Estas dos posibilidades son:

- Despacho económico hidrotérmico multiperiodo.
- Despacho económico térmico multiperiodo.

La implementación de la *Fase 2* mediante un despacho económico hidrotérmico multiperiodo es la opción que produce mejores resultados pero también es la más costosa computacionalmente. Consiste en determinar la producción de las centrales térmicas acopladas y de las centrales hidráulicas para satisfacer la demanda en cada subperiodo del horizonte temporal analizado de forma que se minimice el coste total y se cumplan las restricciones que modelan el funcionamiento del equipo de generación térmico e hidráulico.

La segunda opción consiste en fijar las producciones de las centrales hidráulicas al valor que adquieren al final de la *Fase 2* y determinar la producción de las centrales térmicas acopladas de forma que se suministre la demanda a coste mínimo y cumpliéndose las restricciones que modelan el funcionamiento del equipo térmico. Esta opción es menos costosa computacionalmente.

Tanto si se emplea un despacho económico hidrotérmico como si se emplea el despacho sólo

térmico, para la formulación de ambos problemas hace falta la definición de un nuevo conjunto $-j'(k)$ que contenga las centrales térmicas acopladas en cada subperiodo del horizonte temporal analizado. Las centrales acopladas en la *Fase 3* son aquellas cuya variable v_{jk} (donde j es el subíndice que hace referencia a las centrales térmicas disponibles y k es el subíndice que hace referencia a cada subperiodo del horizonte temporal analizado) al final de la *Fase 2* adquiere el valor de 1. Al subíndice que hace referencia a las centrales térmicas acopladas en cada subperiodo se le denota $j'(k)$

Las restricciones de rampa de subida y bajada de carga de las centrales térmicas se formulan, en el procedimiento de despacho económico multiperiodo (hidrotérmico o sólo térmico) que tiene lugar en la *Fase 3*, sólo si la central térmica considerada está acoplada en dos subperiodos consecutivos. De otro modo, sólo si cierta central j (donde j es el subíndice que hace referencia a las centrales térmicas disponibles) está acoplada en los subperiodos k y $k+1$ (y por tanto $v_{jk} = 1$ y $v_{jk+1} = 1$, donde v_{jk} es la variable de acoplamiento de la central j en el subperiodo k) se aplican las restricciones de rampa máxima de subida de carga y de rampa máxima de bajada de carga que se formulan a continuación:

$$t_{jk+1} - t_{jk} \leq r_j^s \quad \forall(j, k) | v_{jk} = 1, \quad v_{jk+1} = 1 \quad j \in -j, k = 1, \dots, T-1 \quad (7.27)$$

$$t_{jk} - t_{jk+1} \leq r_j^b \quad \forall(j, k) | v_{jk} = 1, \quad v_{jk+1} = 1 \quad j \in -j, k = 1, \dots, T-1 \quad (7.28)$$

donde $-j$ es el conjunto de todas las centrales térmicas disponibles.

A continuación se formulan los problemas de despacho económico hidrotérmico multiperiodo y de despacho económico térmico multiperiodo.

Despacho económico hidrotérmico multiperiodo

El problema del despacho económico hidrotérmico multiperiodo se plantea como un problema de optimización en variables continuas en el que se minimizan los costes de producción para satisfacer la demanda en cada subperiodo del horizonte temporal analizado y para cumplir las restricciones del equipo de generación térmico y del equipo de generación hidráulico.

El problema del despacho económico se formula a continuación.

$$\text{Minimizar}_{(t,x,u,h,s)} \quad \sum_{k=1}^K \sum_{j'(k) \in -j'(k)} a_{j'(k)}(t_{j'(k)k}) \quad (7.29)$$

sujeto a

$$p_{j'(k)} \leq t_{j'(k)k} \leq \bar{p}_{j'(k)} \quad \forall j'(k) \quad \forall k \quad (7.30)$$

$$t_{jk+1} - t_{jk} \leq r_j^s \quad \forall(j, k) | v_{jk} = 1, \quad v_{jk+1} = 1 \quad j \in -j, k = 1, \dots, T-1 \quad (7.31)$$

$$t_{jk} - t_{j,k+1} \leq r_j^b \quad \forall (j, k) | v_{jk} = 1, \quad v_{j,k+1} = 1 \quad j \in -_j, k = 1, \dots, T-1 \quad (7.32)$$

$$p_{l(i)k} = \rho_{l(i)}(u_{l(i)k}, x_{l(i)k}) \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (7.33)$$

$$x_{l(i)k+1} = x_{l(i)k} - u_{l(i)k}l_k - s_{l(i)k} + w_{l(i)k} + \sum_{m(l(i)) \in m(l(i))} \left[u_{m(l(i)),k-\tau_{m(l(i))}}l_k + s_{m(l(i)),k-\tau_{m(l(i))}} \right] \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (7.34)$$

$$\underline{u}_{l(i)} \leq u_{l(i)k} \leq \bar{u}_{l(i)vk} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (7.35)$$

$$\underline{x}_{l(i)} \leq x_{l(i)k} \leq \bar{x}_{l(i)v} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (7.36)$$

$$0 \leq s_{l(i)k} \leq \bar{x}_{l(i)} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad \forall k \quad (7.37)$$

$$x_{l(i)1} = x_{l(i)}^0 \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad (7.38)$$

$$\underline{x}_{l(i)T} \leq x_{l(i)T+1} \leq \bar{x}_{l(i)T} \quad \forall l(i) \in i \quad \forall i \quad (7.39)$$

$$\sum_{j'(k) \in j'(k)} t_{j'(k)k} + \sum_{i \in i} \sum_{l(i) \in l(i)} h_{l(i)k} = D_k \quad \forall k \quad (7.40)$$

Despacho económico térmico multiperiodo

Si se escoge esta opción para implementar la *Fase 3* del algoritmo de coordinación hidrotérmica en el corto plazo mediante técnicas de relajación lagrangiana, las producciones de las centrales hidráulicas se fijan al valor que adquieren al finalizar la *Fase 2*. Sólo resta optimizar la producción de las centrales térmicas acopladas de forma que se suministre la demanda con la producción hidráulica (que es fija) y con la producción térmica. Esto debe hacerse de forma que se respeten las restricciones de las centrales térmicas.

El primer paso de esta *Fase 3* consiste en calcular la demanda que queda por satisfacer con el equipo hidráulico, esto es, la diferencia entre la demanda y la producción total hidráulica en cada subperiodo del horizonte temporal analizado. Esta es la demanda térmica D_k^t en cada subperiodo k . Se calcula de la siguiente forma:

$$D_k^t = D_k - \sum_{l(i) \in l(i)} p_{l(i)k} \quad (7.41)$$

Una vez calculada la demanda a satisfacer con el equipo térmico se plantea un problema de despacho económico sólo térmico. Este problema se formula de la siguiente forma:

$$\text{Minimizar}_{(t)} \quad \sum_{k=1}^K \sum_{j'(k) \in j'(k)} a_{j'(k)}(t_{j'(k)k}) \quad (7.42)$$

sujeto a

$$\underline{p}_{j'(k)} \leq t_{j'(k)k} \leq \bar{p}_{j'(k)} \quad \forall j'(k) \quad \forall k \quad (7.43)$$

$$t_{j,k+1} - t_{jk} \leq r_j^s \quad \forall (j, k) | v_{jk} = 1, \quad v_{j,k+1} = 1 \quad j \in -_j, k = 1, \dots, T-1 \quad (7.44)$$

$$t_{jk} - t_{j,k+1} \leq r_j^b \quad \forall (j,k) | v_{jk} = 1, \quad v_{j,k+1} = 1 \quad j \in \mathcal{J}, k = 1, \dots, T-1 \quad (7.45)$$

$$\sum_{j'(k) \in \mathcal{J}'(k)} t_{j'(k)k} = D_k^t \quad \forall k \quad (7.46)$$

Capítulo 8

Resultados computacionales

8.1 Introducción

En este capítulo se presentan algunos de los resultados computacionales fruto de este trabajo de investigación. En todos los casos de estudio que se presentan en este capítulo el equipo de generación se basa en el equipo de generación del sistema eléctrico peninsular español. Se incluyen 70 centrales térmicas y 30 centrales hidráulicas en una sola cuenca.

El modelo de coordinación hidrotérmica en el corto plazo que se ha implementado es el modelo 1 (apartado 4.3.1), esto es, únicamente se incluyen las restricciones de demanda (ecuaciones (4.41)) y las restricciones de reserva rodante en su forma más simple (ecuaciones (4.42)) en todos los subperiodos del horizonte temporal analizado.

Como ya se ha indicado (apartado 4.3), en los sistemas de energía eléctrica donde los mínimos técnicos de las centrales térmicas sean elevados puede hacerse necesaria la inclusión de las restricciones de demanda mínima (ecuaciones 4.31) para evitar que la solución resulte infactible por ser la suma de la potencia de mínimo técnico de todas las centrales acopladas mayor que la demanda en algunos subperiodos.

El sistema de generación peninsular español se caracteriza por la alta potencia de mínimo técnico de muchas de sus centrales. Por ello y al no incluirse las restricciones de demanda mínima en el planteamiento del problema primal del modelo que se ha implementado (modelo 1), el problema del despacho económico (*Fase 3* del algoritmo) que se resuelve una vez definidas las variables de acoplamiento de las centrales térmicas, ha resultado ser infactible en la mayoría de las simulaciones ejecutadas con datos de demanda de energía eléctrica real. Por ello se han reducido la potencias mínimas de los datos originales de las centrales térmicas del sistema de generación peninsular español de forma que los datos del equipo de generación térmica que se incluyen en el apéndice A son datos reales del sistema eléctrico peninsular español salvo en lo

que se refiere a los mínimos técnicos, donde los datos que se muestran son la mitad de la potencia mínima real.

No obstante, la inclusión de las restricciones de demanda mínima en la implantación informática que se ha llevado a cabo no supone ninguna complejidad adicional. A lo largo de los capítulos 4, 5, 6 y 7 se han detallado las modificaciones que la inclusión de las restricciones de demanda mínima (y otras restricciones de carga) provoca en el planteamiento y resolución de los subproblemas térmicos, en el procedimiento de actualización de multiplicadores y en el procedimiento de obtención de una solución primal factible a partir de la solución del problema dual.

Respecto al procedimiento de despacho económico (*Fase 3*) que se lleva a cabo una vez definidos los acoplamientos de las centrales térmicas, se ha implementado un despacho económico sólo térmico (apartado 7.3.2). Se ha empleado el optimizador comercial MINOS 5.4 [90] para su resolución. El motivo por el que no se ha empleado un despacho hidrotérmico ha sido el elevado tiempo de cálculo de la *Fase 3* (o despacho económico) con los recursos disponibles.

Este capítulo se estructura en dos partes. En la primera (apartado 8.2) se comparan algunos de los métodos de actualización de multiplicadores presentados en el capítulo 6. En esta primera parte se resuelve el problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo resolviendo el problema dual en una sola etapa. Se prescinde de la etapa de refinamiento de la solución del problema dual (apartado 4.2.3 y capítulo 7) para que la comparación de métodos de actualización de multiplicadores no se vea afectada por las desiguales mejoras que esta segunda etapa de la *Fase 1* pueda provocar en la solución final del problema.

Los métodos de actualización de multiplicadores que se comparan en el apartado 8.2 son los siguientes:

- Método de los hiperplanos secantes con límite máximo al número de hiperplanos o método HPS-M (apartado 6.7.2).
- Método de los hiperplanos secantes con penalización y límite máximo al número de hiperplanos o método HPS-PM (apartado 6.7.3).
- Método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos o método HPS-CD (apartado 6.7.4)

Las comparaciones se han efectuado para dos casos de estudio. En ambos, como ya se ha indicado, el equipo generador es el mismo y está compuesto por 70 centrales térmicas y 30 centrales hidráulicas en una sola cuenca. En el primer caso de estudio (apartado 8.2.1) el horizonte temporal es de 1 día dividido en subperiodos horarios. Concretamente, se ha utilizado

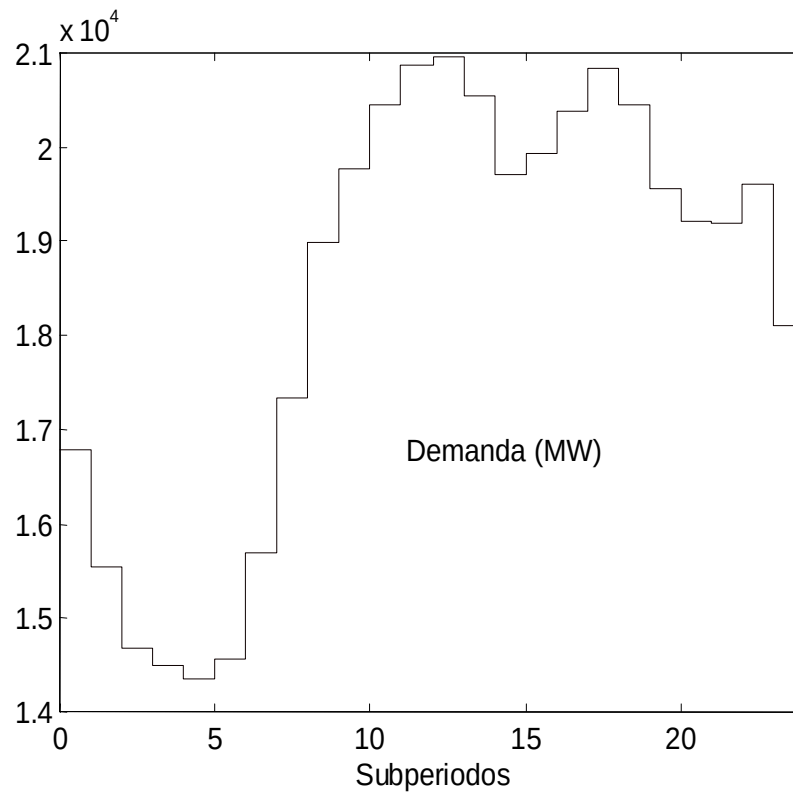


Figura 8.1: Curva de demanda horaria del 10 de junio de 1998

la curva de demanda del pasado día 10 de junio de 1998. En el segundo caso de estudio (apartado 8.2.2) el horizonte temporal es de 2 días divididos en subperiodos horarios. Se ha utilizado la curva de demanda de los días 19 y 20 de agosto de 1998.

En la segunda parte de este capítulo se presentan los resultados computacionales que se obtienen con el algoritmo que se propone en este trabajo de investigación, resolviendo el problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo en cuatro etapas (apartado 4.2.3 y capítulo 7) y empleando el *método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos* (apartado 6.7.4) en la *Etapa 1* del algoritmo. De nuevo, se analizan dos casos de estudio siendo el equipo generador en ambos el mismo (70 centrales térmicas y 30 centrales hidráulicas) y el horizonte temporal de 24 horas para el primer caso (apartado 8.3.1) y de 48 horas para el segundo (apartado 8.3.2). En el primer caso la curva de demanda de energía eléctrica es la correspondiente al día 10 de junio de 1998, mientras que en el segundo la curva horaria de demanda es la de los días 19 y 20 de agosto de 1998.

La figura 8.1 muestra la curva de demanda que se ha empleado en las simulaciones cuyo horizonte temporal ha sido de un día dividido en subperiodos horarios. Esta curva corresponde a la demanda de energía eléctrica del día 10 de junio de 1998.

La figura 8.2 muestra la curva de demanda que se ha empleado en las simulaciones cuyo horizonte

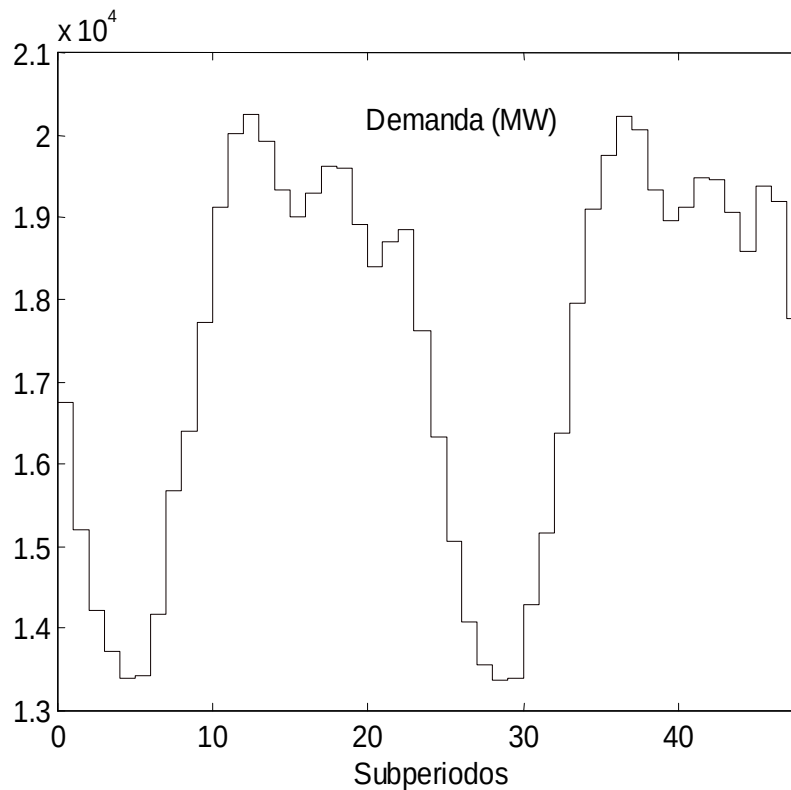


Figura 8.2: Curva de demanda horaria de los días 19 y 20 de agosto de 1998

temporal ha sido de dos días divididos en subperiodos horarios. Esta curva corresponde a la demanda de energía eléctrica de los días 19 y 20 de agosto de 1998.

Todas las simulaciones cuyo horizonte temporal es de 24 horas se han ejecutado en una estación de trabajo Silicon Graphics con un procesador R10000 y 192 MB de memoria RAM. Las simulaciones correspondientes a horizontes temporales de 48 horas no pudieron ser ejecutadas en esta misma estación por ser la memoria RAM disponible insuficiente para la finalización con éxito del procedimiento de despacho económico (o *Fase 3*) empleando el optimizador comercial MINOS 5.4 [90]. Por ello, todos los casos de estudio con horizonte temporal de dos días se han ejecutado en una estación de trabajo Silicon Graphics con un procesador R10000 y 500 MB de memoria RAM.

8.2 Comparación de diversos métodos de actualización de multiplicadores

En este apartado se comparan tres de los métodos de actualización de multiplicadores que se presentan en el capítulo 6. Estos métodos son los siguientes:

- Método de los hiperplanos secantes con límite máximo al número de hiperplanos o método HPS-M (apartado 6.7.2).
- Método de los hiperplanos secantes con penalización y límite máximo al número de hiperplanos o método HPS-PM (apartado 6.7.3).
- Método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos o método HPS-CD (apartado 6.7.4)

La comparación se lleva a cabo en dos casos de estudio. En ambos el equipo de generación se basa en el sistema eléctrico peninsular español y consta de 70 centrales térmicas y 30 centrales hidráulicas en una sola cuenca. En el primero (apartado 8.2.1) el horizonte temporal analizado es de 24 horas. La curva horaria de demanda es la correspondiente al 10 de junio de 1998. En el segundo caso (apartado 8.2.1) el horizonte temporal es de 48 horas, siendo la curva horaria de demanda la correspondiente a los días 19 y 20 de agosto de 1998. En ambos casos la reserva rodante es el 10 % de la demanda en cada subperiodo del horizonte temporal analizado. En el apéndice A se incluyen los datos del equipo generador así como la demanda (MW) y reserva rodante (MW) para los dos casos de estudio.

Como ya se ha indicado, en las simulaciones analizadas en este apartado se ha resuelto el problema dual en una sola etapa utilizando, en cada simulación, cada uno de los métodos objeto de este estudio. No se ha empleado por tanto la etapa de refinamiento de la solución del problema dual, o *Etapa 2* de la *Fase 1* (apartado 4.2.3 y capítulo 7) ya que se ha comprobado que esta etapa de estabilización de los multiplicadores y mejora de la solución del problema dual produce desiguales ventajas en los distintos métodos analizados si se emplean los mismos parámetros.

Por ello, para que la comparación de métodos sea justa, se ha ejecutado un algoritmo de coordinación hidrotérmica en el corto plazo siguiendo el procedimiento habitual que aparece en la literatura [131], [35], [130], [48], [49], [50], [47], [85], [68]. Esto es, en primer lugar se resuelve el problema dual utilizando cada uno de los métodos de actualización de multiplicadores que se comparan en este apartado (*Fase 1*). A continuación, se lleva a cabo un proceso iterativo en el que se incrementan los multiplicadores asociados a las restricciones de reserva rodante que resultan infactibles hasta conseguir una solución del problema dual que cumpla todas las restricciones de reserva rodante (*Fase 2*). Por último se fijan las variables de acoplamiento de las centrales térmicas y las producciones de las centrales hidráulicas al valor que adquieren dichas variables en la solución de la fase segunda, y se ejecuta un procedimiento de despacho económico térmico con el que quedan determinadas las potencias óptimas a producir por cada una de las centrales térmicas acopladas en cada subperiodo del horizonte temporal analizado (*Fase 3*). De otro modo, el procedimiento que se ejecuta en estos casos de estudio contiene las etapas 1, 3 y

4 del algoritmo que se presenta en el apartado 4.2.3 y se detalla en el capítulo 7.

Se han ejecutado, para la comparación que se lleva a cabo en este apartado, las siguientes simulaciones:

- Horizonte temporal de 24 horas
 - Caso CM24_HPS
En ete caso se emplea el método de los hiperplanos secantes con límite máximo al número de hiperplanos en la resolución del problema dual de la *Fase 1*.
 - Caso CM24_HPSP
En ete caso se emplea el método de los hiperplanos secantes con penalización y límite máximo al número de hiperplanos en la resolución del problema dual de la *Fase 1*.
 - Caso CM24_HPSCD
En ete caso se emplea el método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos en la resolución del problema dual de la *Fase 1*.
- Horizonte temporal de 48 horas
 - Caso CM48_HPS
En ete caso se emplea el método de los hiperplanos secantes con límite máximo al número de hiperplanos en la resolución del problema dual de la *Fase 1*.
 - Caso CM48_HPSP
En ete caso se emplea el método de los hiperplanos secantes con penalización y límite máximo al número de hiperplanos en la resolución del problema dual de la *Fase 1*.
 - Caso CM48_HPSCD
En ete caso se emplea el método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos en la resolución del problema dual de la *Fase 1*.

Para cada una de estas simulaciones se proporcionan los siguientes resultados:

- Resultados correspondiente a la *Fase 1* (solución del problema dual):
 - Número de iteraciones.
 - Valor de la función dual (ϕ) al finalizar esta fase.

- Valor de la variable z que aparece en la formulación del problema dual relajado de cada uno de los métodos de actualización de multiplicadores comparados al finalizar esta fase. Esta variable coincide con la función objetivo del problema dual relajado al emplearse el método de los hiperplanos secantes con límite máximo al número de hiperplanos y el método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos.
- Índice de calidad en la resolución del problema dual (apartados 6.7.2, 6.7.3 y 6.7.4). Este índice de calidad se evalúa a través de la distancia relativa entre el valor de la función dual y el valor de la variable z (que aparece en la formulación del problema dual relajado) o, de otro modo, a través de la distancia relativa entre el valor de la función dual y el valor de la función dual linealizada a tramos.
- Tiempo de cálculo.
- Resultados correspondiente a la *Fase 2* (obtención de una solución solución del problema dual factible en reserva rodante):
 - Número de iteraciones.
 - Valor de la función dual (ϕ) al finalizar esta fase.
 - Tiempo de cálculo.
- Resultados correspondiente a la *Fase 3* (despacho económico o bien, obtención de una solución primal factible cuasi-óptima):
 - Coste del problema primal.
 - Tiempo de cálculo.
- Resultados globales:
 - Cota superior del agujero de dualidad. Esto es una medida de la calidad de la solución del problema primal encontrada. Es la distancia relativa (en tanto por ciento) entre la mejor solución del problema dual encontrada y la solución primal factible obtenida tras la ejecución del despacho económico. Este es uno de los parámetros más importante a considerar en la comparación de métodos.
 - Tiempo de cálculo.

Además se incluyen gráficas que muestran, para cada uno de los métodos de actualización de multiplicadores comparados, la evolución del valor de la función dual (ϕ) y del valor de la variable z (problema dual relajado) en la *Fase 1*, así como gráficas que indican la evolución del valor de la función dual (ϕ) en las fases primera y segunda.

8.2.1 Caso estudio 1: Comparación de métodos de actualización de multiplicadores con un horizonte temporal de 24 horas

Como ya se ha indicado, en este apartado se comparan tres de los métodos de actualización de multiplicadores que se presentan en el capítulo 6: el método de los hiperplanos secantes con límite máximo al número de hiperplanos, el método de los hiperplanos secantes con penalización y límite máximo al número de hiperplanos y el método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos.

La curva de demanda horaria (figura 8.1) corresponde al día 10 de junio de 1998. La reserva rodante es del 10 % de la demanda en cada subperiodo.

A continuación se presentan los resultados que se obtienen con cada uno de los métodos y se comparan los mismos.

Método de los hiperplanos secantes con límite máximo al número de hiperplanos (método HPS-M)

A continuación se indican los resultados que se obtienen cuando se aplica el método de los hiperplanos secantes y límite máximo al número de hiperplanos en la resolución del problema dual (*Fase 1*). A esta simulación se le denomina CM24_HPS.

- Resultados de la *Fase 1*
 - Número de iteraciones: 850
 - Valor de la función dual ϕ : 401810788.10 Pta
 - Valor de la función dual linealizada z : 404588270.49 Pta
 - Índice de calidad: 0.691 %
 - Tiempo de cálculo: 216.18 s
- Resultados de la *Fase 2*
 - Número de iteraciones: 243 (iteraciones 851-1093)
 - Valor de la función dual ϕ : 402129646.37 Pta
 - Tiempo de cálculo: 18.14 s
- Resultados de la *Fase 3*
 - Coste del problema primal (f): 404231376.35 Pta
 - Tiempo de cálculo: 10.96s

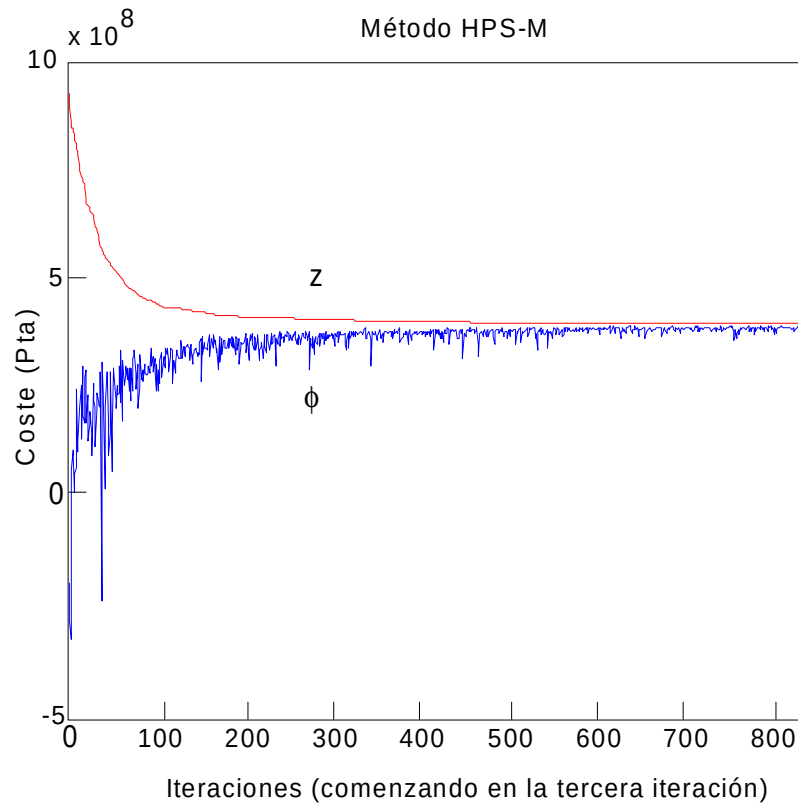


Figura 8.3: Evolución de la fase 1 en el caso CM24_HPS

- Resultados globales
 - Cota superior del agujero de dualidad 0.523 %
 - Tiempo de cálculo: 245.28 s

La figura 8.3 muestra la evolución del valor de la función dual (ϕ) y del valor de la función dual linealizada a tramos (z) en la *Fase 1*. El método de los hiperplanos secantes es muy oscilante, además los saltos de las oscilaciones son muy grandes en las primeras iteraciones. Por este motivo, para poder utilizar una escala en el eje vertical con la que se pueda apreciar la variación de los valores de ϕ y z a medida que aumenta el contador de iteraciones, la figura 8.3 incluye la evolución de estas variables desde la tercera iteración.

La figura 8.4 muestra la evolución del valor de la función dual (ϕ) a lo largo de las dos primeras fases del algoritmo de resolución del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo. La línea discontinua indica la separación entre la *Fase 1* y la *Fase 2*.

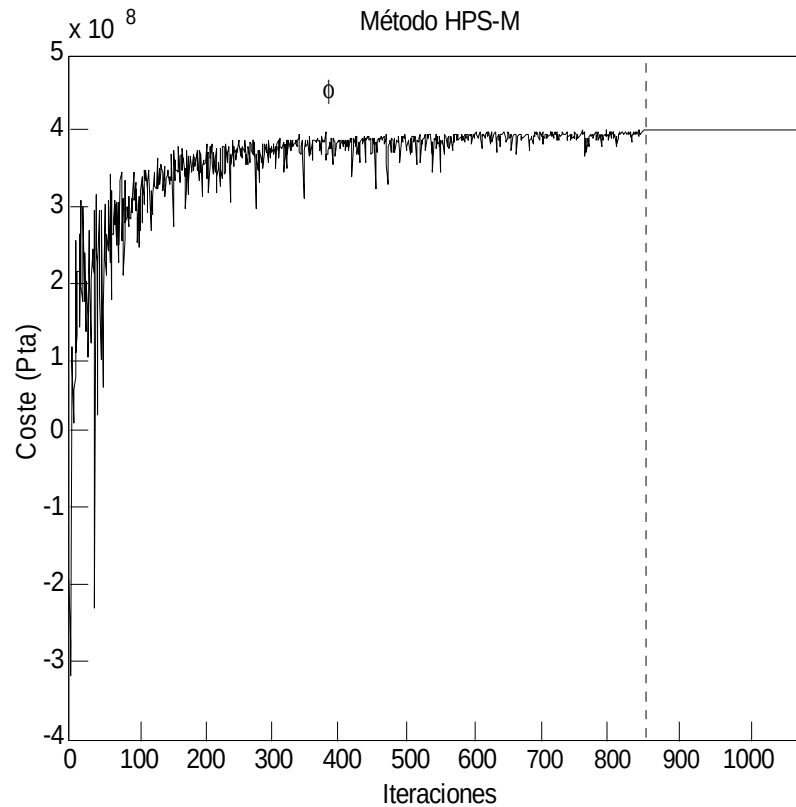


Figura 8.4: Evolución del valor de la función dual en el caso CM24_HPS

Método de los hiperplanos secantes con penalización y límite máximo al número de hiperplanos (método HPS-PM)

A continuación se indican los resultados que se obtienen cuando se aplica el método de los hiperplanos secantes con penalización y límite máximo al número de hiperplanos en la resolución del problema dual (*Fase 1*). A esta simulación se le denomina CM24_HPSP.

- Resultados de la *Fase 1*
 - Número de iteraciones: 382
 - Valor de la función dual ϕ : 401642572.74 Pta
 - Valor de la variable z : 404039877.94 Pta
 - Índice de calidad: 0.597 %
 - Tiempo de cálculo: 97.60 s
- Resultados de la *Fase 2*
 - Número de iteraciones: 466 (iteraciones 383-848)
 - Valor de la función dual ϕ : 401753522.17 Pta

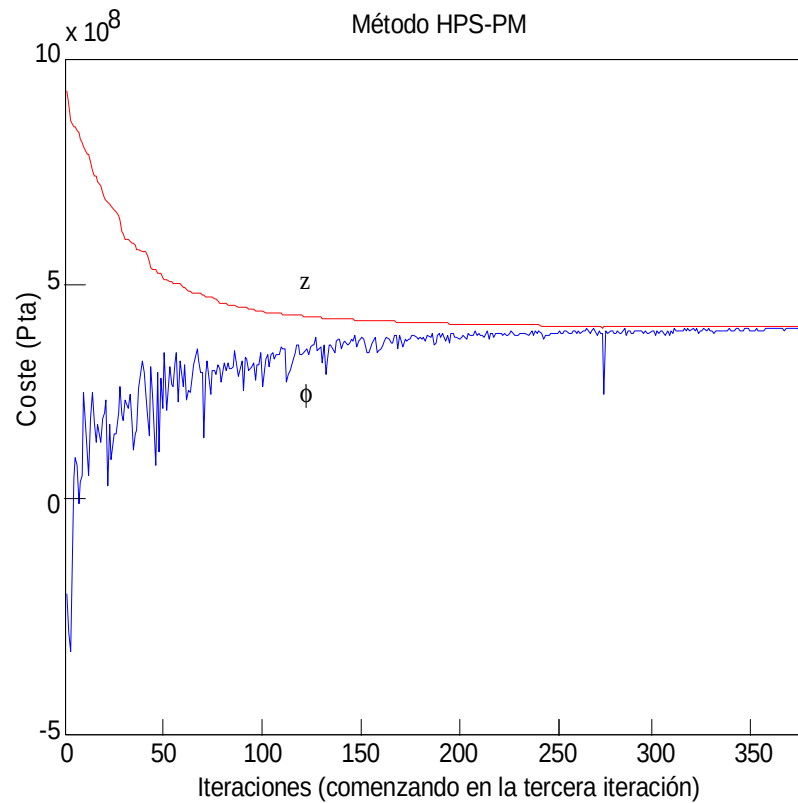


Figura 8.5: Evolución de la fase 1 en el caso CM24_HPSP

- Tiempo de cálculo: 35.188 s
- Resultados de la *Fase 3*
 - Coste del problema primal (f): 403810461.72 Pta
 - Tiempo de cálculo: 10.41 s
- Resultados globales
 - Cota superior del agujero de dualidad 0.520 %
 - Tiempo de cálculo: 143.20 s

La figura 8.5 muestra la evolución del valor de la función dual (ϕ) y del valor de la función dual linealizada a tramos (z) en la *Fase 1*. Aunque el método de los hiperplanos secantes con penalización resulta menos oscilante que el método de los hiperplanos secantes, los saltos son grandes en las primeras iteraciones. Por este motivo, al igual que en la figura 8.3, la figura 8.5 incluye la evolución de las variables ϕ y z comenzando en la tercera iteración.

La figura 8.6 muestra la evolución del valor de la función dual (ϕ) a lo largo de las dos primeras fases del algoritmo de resolución del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo. La línea discontinua indica la separación entre la *Fase 1* y la *Fase 2*.

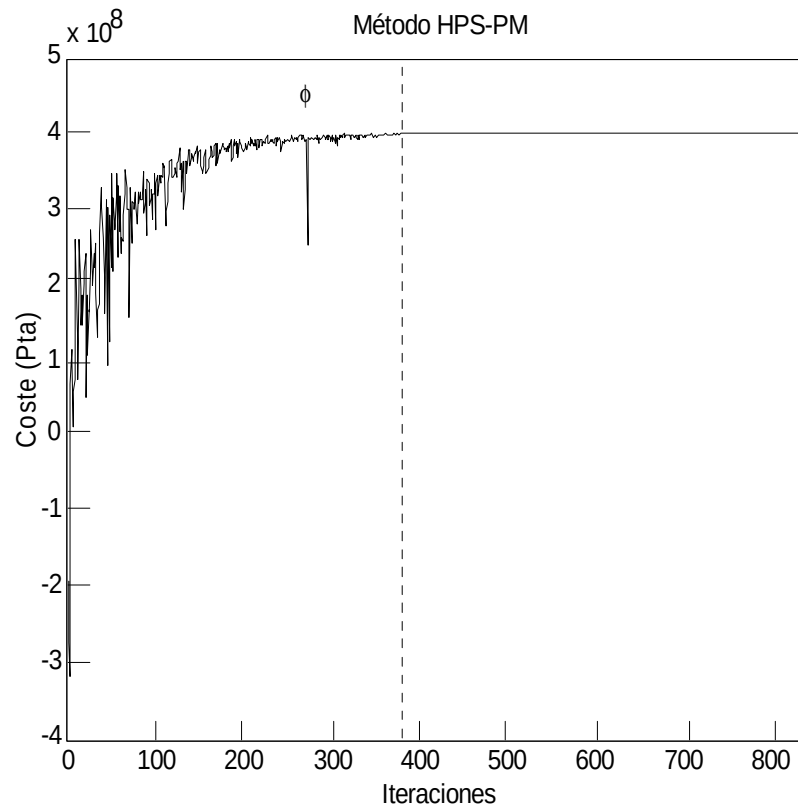


Figura 8.6: Evolución del valor de la función dual en el caso CM24_HPSP

Método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos (método HPS-CD)

A continuación se indican los resultados que se obtienen cuando se aplica el método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos en la resolución del problema dual (*Fase 1*). A esta simulación se le denomina CM24_HPSCD.

- Resultados de la *Fase 1*
 - Número de iteraciones: 314
 - Valor de la función dual ϕ : 402490626.35 Pta
 - Valor de la función dual linealizada z : 404173140.76 Pta
 - Índice de calidad: 0.418 %
 - Tiempo de cálculo: 81.11 s
- Resultados de la *Fase 2*
 - Número de iteraciones: 173 (iteraciones 315-487)

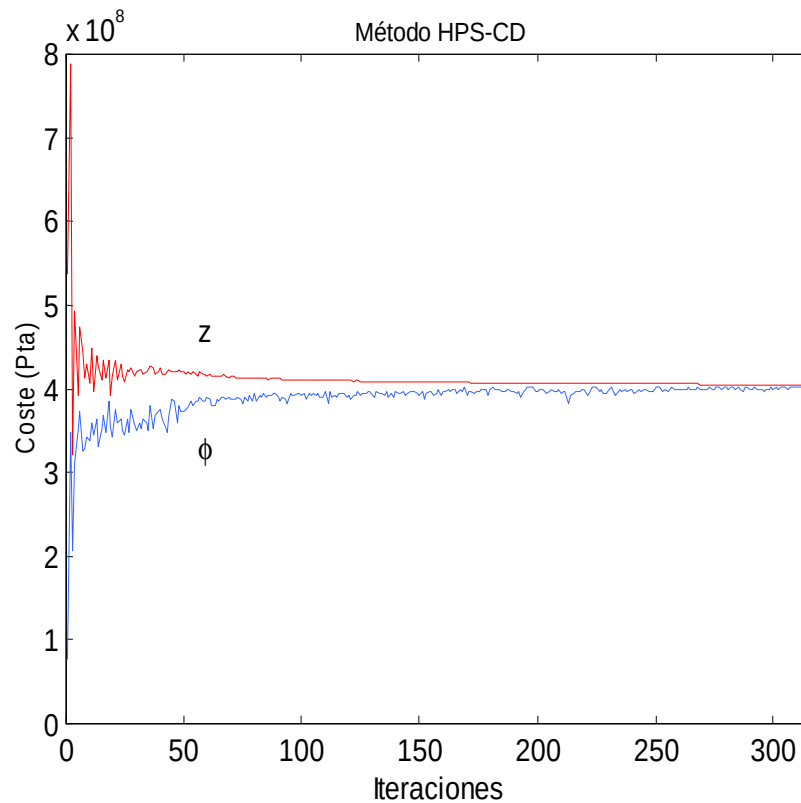


Figura 8.7: Evolución de la fase 1 en el caso CM24_HPSCD

– Valor de la función dual ϕ : 402757828.63 Pta

– Tiempo de cálculo: 12.93 s

• Resultados de la *Fase 3*

– Coste del problema primal (f): 404404625.4288 Pta

– Tiempo de cálculo: 10.12 s

• Resultados globales

– Cota superior del agujero de dualidad 0.409 %

– Tiempo de cálculo: 104.16 s

La figura 8.7 muestra la evolución del valor de la función dual (ϕ) y del valor de la función dual linealizada a tramos (z) en la *Fase 1*.

La figura 8.8 muestra la evolución del valor de la función dual (ϕ) a lo largo de las dos primeras fases del algoritmo de resolución del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo.

La línea discontinua indica la separación entre la *Fase 1* y la *Fase 2*.

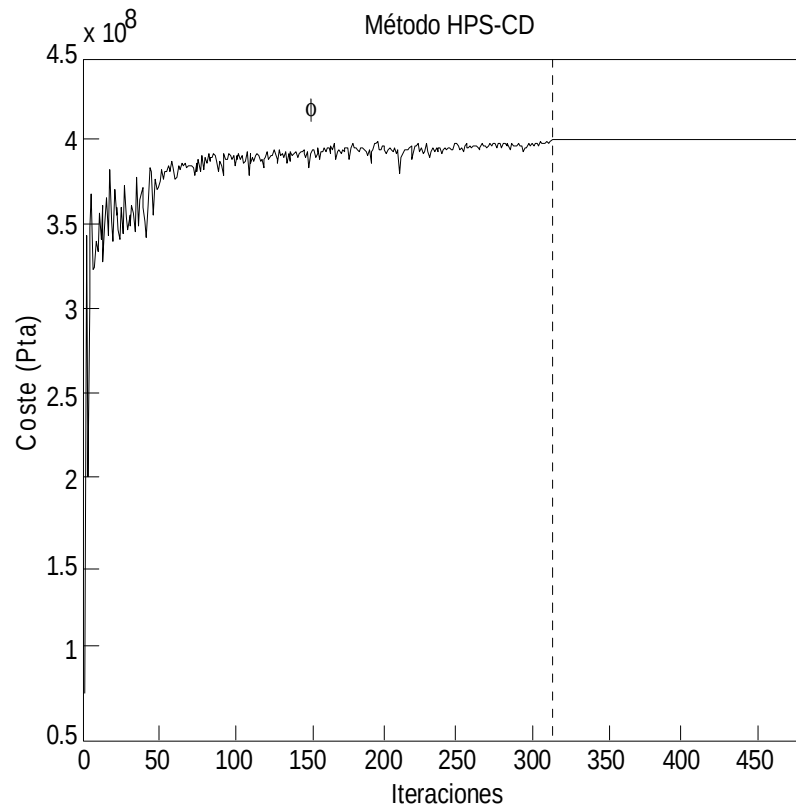


Figura 8.8: Evolución del valor de la función dual en el caso CM24_HPSCD

Análisis de los resultados

Comparando los resultados correspondientes a la *Fase 1* de las tres simulaciones ejecutadas CM24_HPS, CM24_HPSP y CM24_HPSCD puede comprobarse que el método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos alcanza una solución al problema dual mejor (de mayor valor) y en menos tiempo de cálculo. La calidad de la solución obtenida, medida a través de la distancia relativa entre el valor de la función dual ϕ y el valor de la variable z , es mejor al emplear este método, que es el que se propone en este trabajo de investigación. El número de iteraciones de la *Fase 1* también es menor al emplear este método.

Analizando las figuras 8.4, 8.6 y 8.8 puede observarse que el método de los hiperplanos secantes con límite máximo al número de hiperplanos es muy oscilante. Con el método de los hiperplanos secantes con penalización y límite máximo al número de hiperplanos se disminuye la inestabilidad del método anterior. No obstante, el método que presenta un comportamiento más estable es el método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos. Nótese que las escalas horizontal y vertical de las figuras 8.4, 8.6 y 8.8 son distintas. Las escalas verticales de las figuras correspondientes al método de los hiperplanos secantes con límite máximo al número de hiperplanos (figura 8.4) y al método

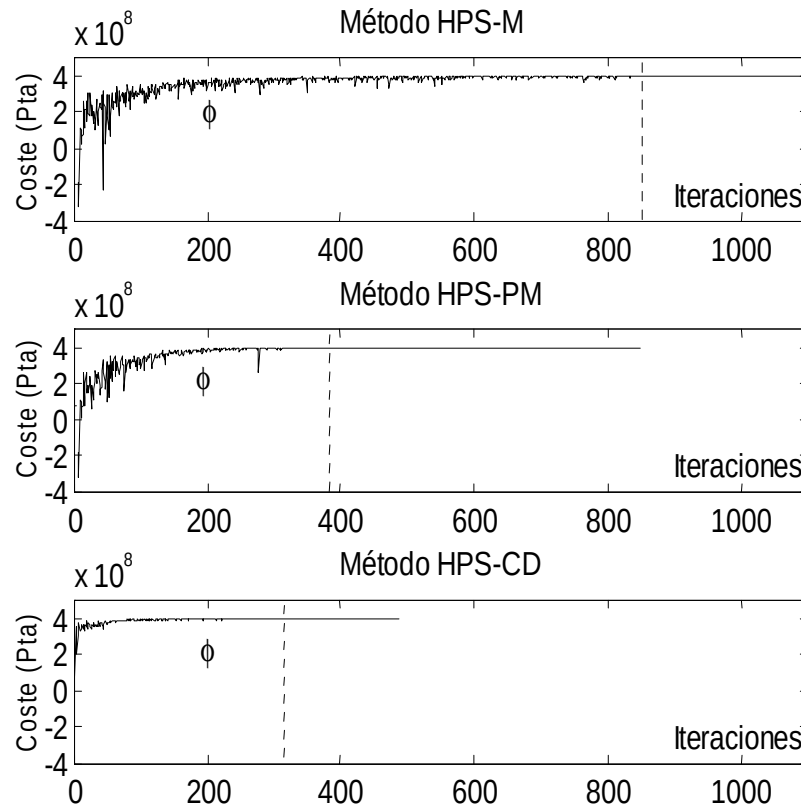


Figura 8.9: Evolución del valor de la función dual en las tres simulaciones analizadas (horizonte temporal: 24 horas)

de los hiperplanos secantes con penalización y límite máximo al número de hiperplanos (figura 8.6) son iguales siendo su rango de variación mucho mayor que el rango de variación de la escala vertical correspondiente al método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos (figura 8.8). En la figura 8.9 se repiten los resultados presentados en las figuras 8.4, 8.6 y 8.8 (evolución del valor de la función dual en las tres simulaciones comparadas) pero se utilizan las mismas escalas en los ejes horizontal y vertical con el objetivo de comparar el comportamiento oscilante de los tres métodos.

Si analizamos los resultados globales de las tres simulaciones puede observarse que la cota superior del agujero de dualidad es menor al emplear el método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos en la resolución del problema dual. Quiere ello decir que la calidad de la solución obtenida es mejor. Además, el tiempo de cálculo total también es menor al emplear el método de actualización de multiplicadores que se propone en este trabajo de investigación. El tiempo de ejecución al emplear el método de los hiperplanos secantes con penalización y límite máximo al número de hiperplanos es del orden de un 37.48 % mayor que el tiempo de cálculo al emplear el método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos. El tiempo de ejecución al emplear el método de los hiperplanos secantes

con límite máximo al número de hiperplanos es del orden de un 135.45 % mayor que el tiempo de cálculo al emplear el método de actualización de multiplicadores propuesto.

Del análisis de estos resultados puede concluirse que el método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos es el más estable y más eficiente tanto desde el pnto de vista de la calidad de la solución obtenida como desde el punto de vista del tiempo de cálculo necesario para su ejecución.

El método de los hiperplanos secantes con límite máximo al número de hiperplanos es el más oscilante y en consecuencia el menos eficiente computacionalmente tanto desde el punto de vista de la calidad de la solución encontrada como desde el punto de vista del tiempo de cálculo.

El método de los hiperplanos secantes con penalización y límite máximo al número de hiperplanos se encuentra en una situación intermedia: es menos eficiente y más oscilante que el método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos pero, más eficiente y más estable que el método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos.

Antes de concluir este apartado queda por señalar que un porcentaje muy elevado del tiempo de cálculo (del orden del 90 % al emplear el método de los hiperplanos secantes con límite máximo al número de hiperplanos y el método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos y del orden del 85 % al emplear el método de los hiperplanos secantes con penalización y límite máximo al número de hiperplanos) se emplea en la resolución del subproblema asociado a la compleja cuenca hidráulica considerada. Para la resolución de este subproblema, que presenta estructura de red, se ha empleado el optimizador de propósito general MINOS 5.4 [90]. El empleo de un optimizador que explote la estructura de red (como el optimizador comercial CPLEX) reduciría de forma importante los tiempos de cálculo.

8.2.2 Caso estudio 2: Comparación de métodos de actualización de multiplicadores con un horizonte temporal de 48 horas

En este apartado se lleva a cabo un análisis similar al efectuado en el apartado 8.2.1. El horizonte temporal del problema de coordinación hidrotérmica resuelto es de 48 horas. La curva de demanda horaria (figura 8.2) corresponde a los días 19 y 20 de agosto de 1998. La reserva rodante en cada subperiodo del horizonte temporal analizado es del 10 % de la demanda en dicho subperiodo.

A continuación se presentan los resultados que se obtienen con cada uno de los métodos y se comparan los mismos.

Método de los hiperplanos secantes con límite máximo al número de hiperplanos (método HPS-M)

Al resolver el problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo empleando el método de los hiperplanos secantes y límite máximo al número de hiperplanos en la resolución del problema dual (*Fase 1*) se obtienen los resultados que se indican a continuación. A esta simulación se le denomina CM48_HPS.

- Resultados de la *Fase 1*
 - Número de iteraciones: 1938
 - Valor de la función dual ϕ : 831918804.76 Pta
 - Valor de la función dual linealizada z : 833770747.20 Pta
 - Índice de calidad: 0.223 %
 - Tiempo de cálculo: 2319.75 s
- Resultados de la *Fase 2*
 - Número de iteraciones: 757 (iteraciones 1939-2695)
 - Valor de la función dual ϕ : 814099259.13 Pta
 - Tiempo de cálculo: 143.29 s
- Resultados de la *Fase 3*
 - Coste del problema primal (f): 856121385.98011 Pta
 - Tiempo de cálculo: 83.65 s
- Resultados globales
 - Cota superior del agujero de dualidad 2.909 %
 - Tiempo de cálculo: 2548.69 s

La figura 8.10 muestra la evolución del valor de la función dual (ϕ) y del valor de la función dual linealizada a tramos (z) en la *Fase 1*. De nuevo, para poder apreciar la variación de las variables ϕ y z a medida que avanza el proceso iterativo, la figura 8.10 incluye la evolución de dichas variables comenzando en la iteración tercera.

La figura 8.11 muestra la evolución del valor de la función dual (ϕ) a lo largo de las dos primeras fases del algoritmo de resolución del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo. La línea discontinua indica la separación entre la *Fase 1* y la *Fase 2*.

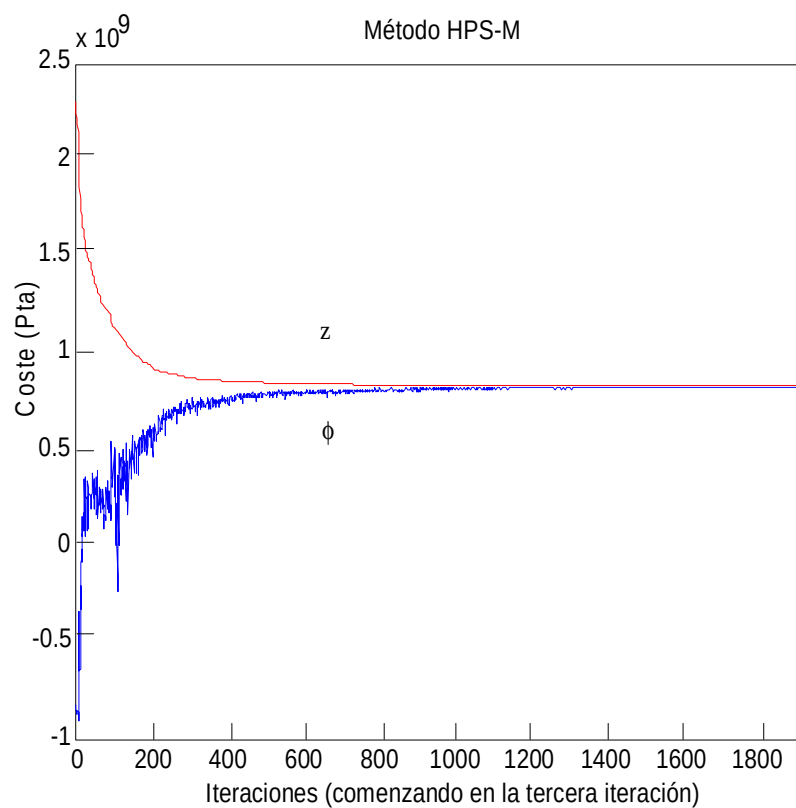


Figura 8.10: Evolución de la fase 1 en el caso CM48_HPS

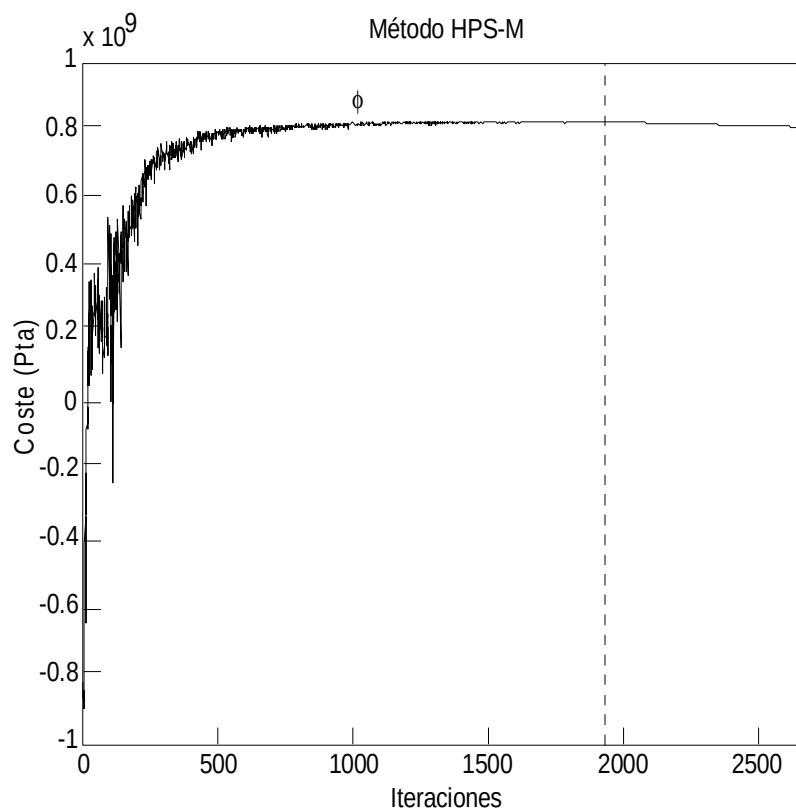


Figura 8.11: Evolución del valor de la función dual en el caso CM48_HPS

Método de los hiperplanos secantes con penalización y límite máximo al número de hiperplanos (método HPS-PM)

A continuación se indican los resultados que se obtienen cuando se aplica el método de los hiperplanos secantes con penalización y límite máximo al número de hiperplanos en la resolución del problema dual (*Fase 1*). A esta simulación se le denomina CM48_HPSP.

- Resultados de la *Fase 1*
 - Número de iteraciones: 1576
 - Valor de la función dual ϕ : 831923257.95 Pta
 - Valor de la variable z : 833573517.26 Pta
 - Índice de calidad: 0.198 %
 - Tiempo de cálculo: 1926.11 s
- Resultados de la *Fase 2*
 - Número de iteraciones: 777 (iteraciones 1577-2354)
 - Valor de la función dual ϕ : 814078052.90 Pta
 - Tiempo de cálculo: 140.29 s
- Resultados de la *Fase 3*
 - Coste del problema primal (f): 856280368.33 Pta
 - Tiempo de cálculo: 95.14 s
- Resultados globales
 - Cota superior del agujero de dualidad 2.928 %
 - Tiempo de cálculo: 2161.54 s

La figura 8.12 muestra la evolución del valor de la función dual (ϕ) y del valor de la función dual linealizada a tramos (z) en la *Fase 1*. De nuevo, por los motivos ya indicados, la figura 8.12 incluye la evolución de las variables ϕ y z comenzando en la tercera iteración.

La figura 8.13 muestra la evolución del valor de la función dual (ϕ) a lo largo de las dos primeras fases del algoritmo de resolución del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo. La línea discontinua indica la separación entre la *Fase 1* y la *Fase 2*.

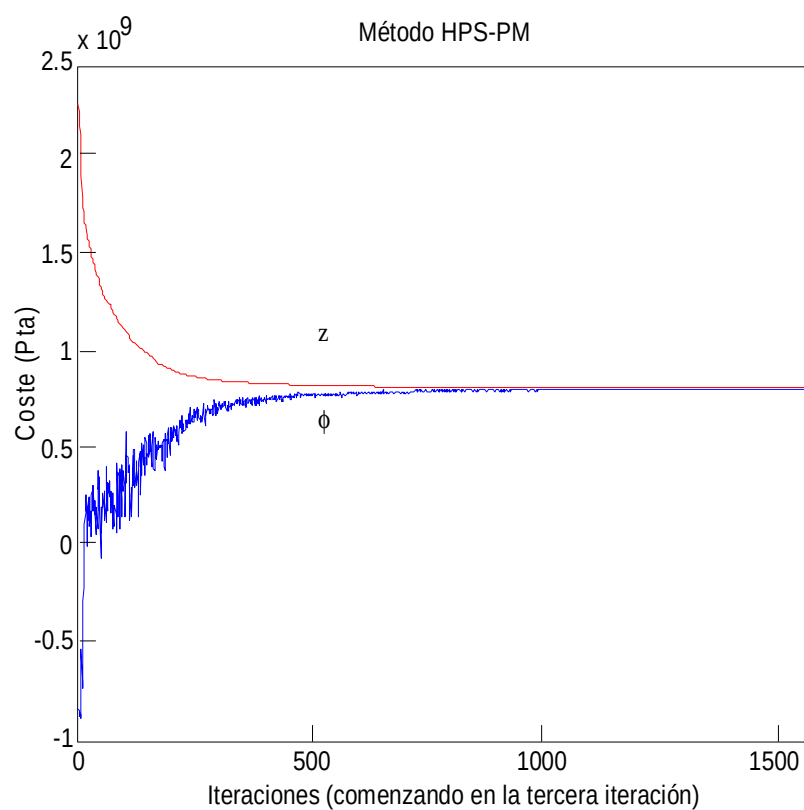


Figura 8.12: Evolución de la fase 1 en el caso CM48_HPSP

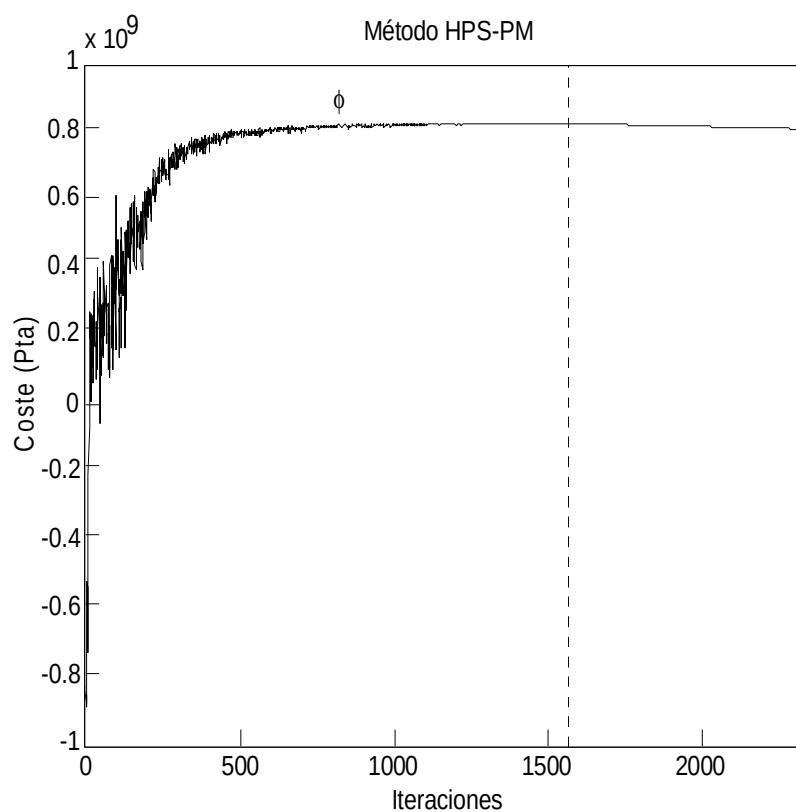


Figura 8.13: Evolución del valor de la función dual en el caso CM48_HPSP

Método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos (método HPS-CD)

A continuación se indican los resultados que se obtienen cuando se aplica el método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos en la resolución del problema dual (*Fase 1*). A esta simulación se le denomina CM48_HPSCD.

- Resultados de la *Fase 1*
 - Número de iteraciones: 1473
 - Valor de la función dual ϕ : 832110975.07 Pta
 - Valor de la función dual linealizada z : 833653288.82Pta
 - Índice de calidad: 0.185 %
 - Tiempo de cálculo: 1701.15 s
- Resultados de la *Fase 2*
 - Número de iteraciones: 775 (iteraciones 1474-2248)
 - Valor de la función dual ϕ : 814329060.72 Pta
 - Tiempo de cálculo: 144.45 s
- Resultados de la *Fase 3*
 - Coste del problema primal (f): 856006064.43 Pta
 - Tiempo de cálculo: 100.17 s
- Resultados globales
 - Cota superior del agujero de dualidad 2.871 %
 - Tiempo de cálculo: 1945.77 s

La figura 8.14 muestra la evolución del valor de la función dual (ϕ) y del valor de la función dual linealizada a tramos (z) en la *Fase 1*.

La figura 8.15 muestra la evolución del valor de la función dual (ϕ) a lo largo de las dos primeras fases del algoritmo de resolución del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo. La línea discontinua indica la separación entre la *Fase 1* y la *Fase 2*.

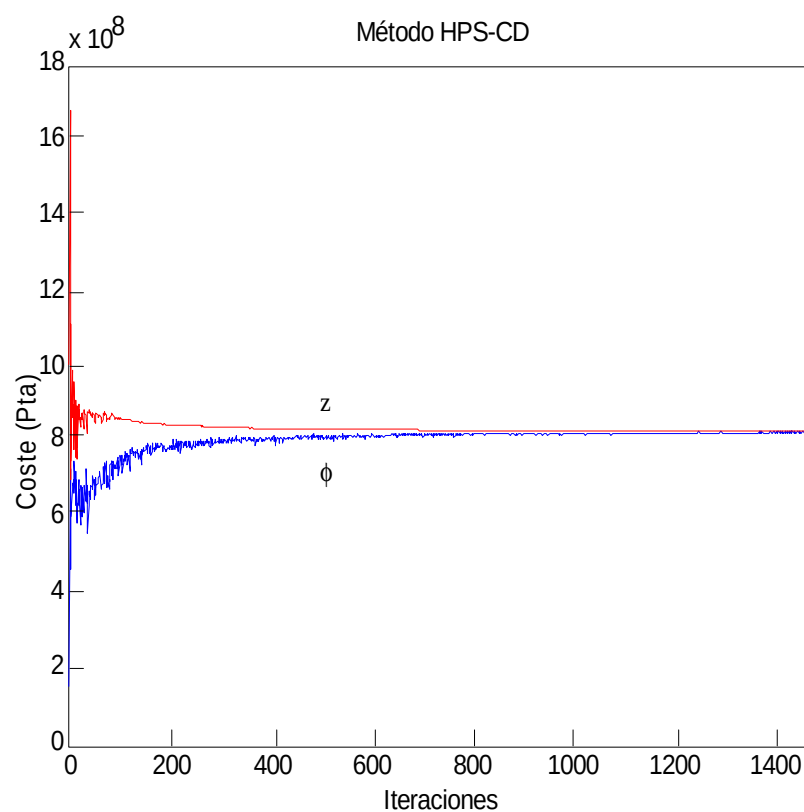


Figura 8.14: Evolución de la fase 1 en el caso CM48_HPSCD

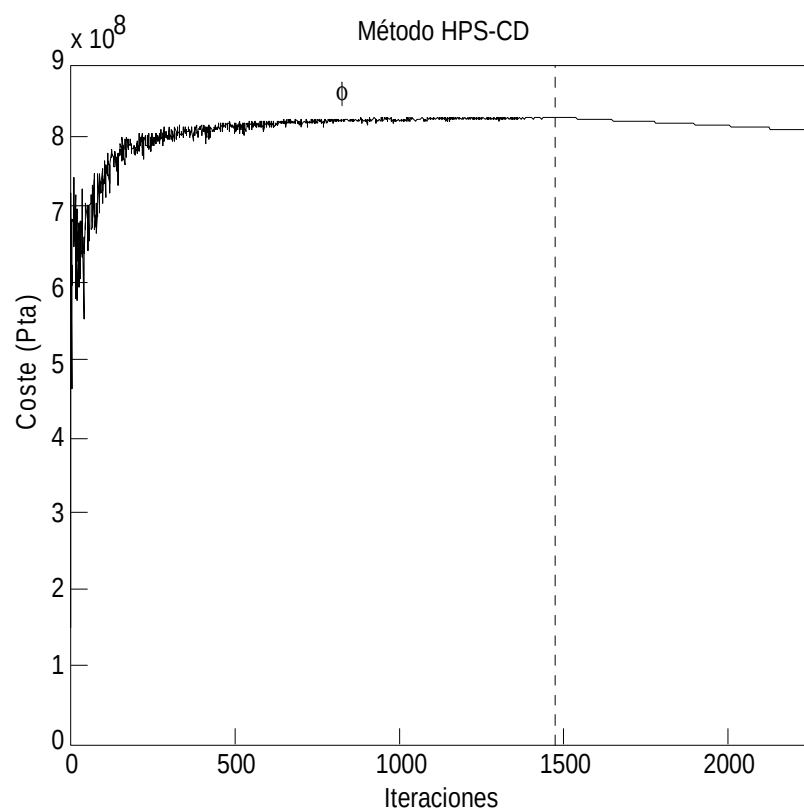


Figura 8.15: Evolución del valor de la función dual en el caso CM48_HPSCD

Análisis de los resultados

Del análisis de los resultados de este apartado pueden extraerse las mismas conclusiones deducidas en el apartado 8.2.1. Esto es:

- El método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos es el más eficiente computacionalmente tanto por la calidad de la solución obtenida como por el número de iteraciones necesarias para ello.
- La figura 8.16 muestra la evolución de la función dual ϕ en las tres simulaciones comparadas utilizando la misma escala en los ejes horizontal y vertical. Puede comprobarse que el método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos es el más estable. El método de los hiperplanos secantes con límite máximo al número de hiperplanos es el más oscilante.
- El método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos obtiene una solución al problema dual (*Fase 1*) de mejor calidad (medida a través de la distancia relativa entre los valores de ϕ y z), de mayor valor y en menos tiempo de cálculo.
- Con el método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos se obtiene una cota superior del agujero de dualidad menor.
- El tiempo de cálculo al emplear el método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos es menor.

En todos los métodos analizados el tiempo de cálculo se reduciría de forma importante si se empleara un optimizador que aprovechara la estructura de red del subproblema asociado a la compleja cuenca hidráulica.

8.3 Resultados computacionales del algoritmo de coordinación hidrotérmica en el corto plazo propuesto

En este apartado se presentan los resultados computacionales que se obtienen al aplicar el algoritmo que se propone en este trabajo de investigación (apartado 4.2.3 y capítulo 7) a la resolución dos problemas de coordinación hidrotérmica en el corto plazo. En ambos, el equipo generador, basado en el sistema eléctrico peninsular español, es el mismo. Incluye 70 centrales térmicas y 30 centrales hidráulicas en una sola cuenca. En el primer caso de estudio de este

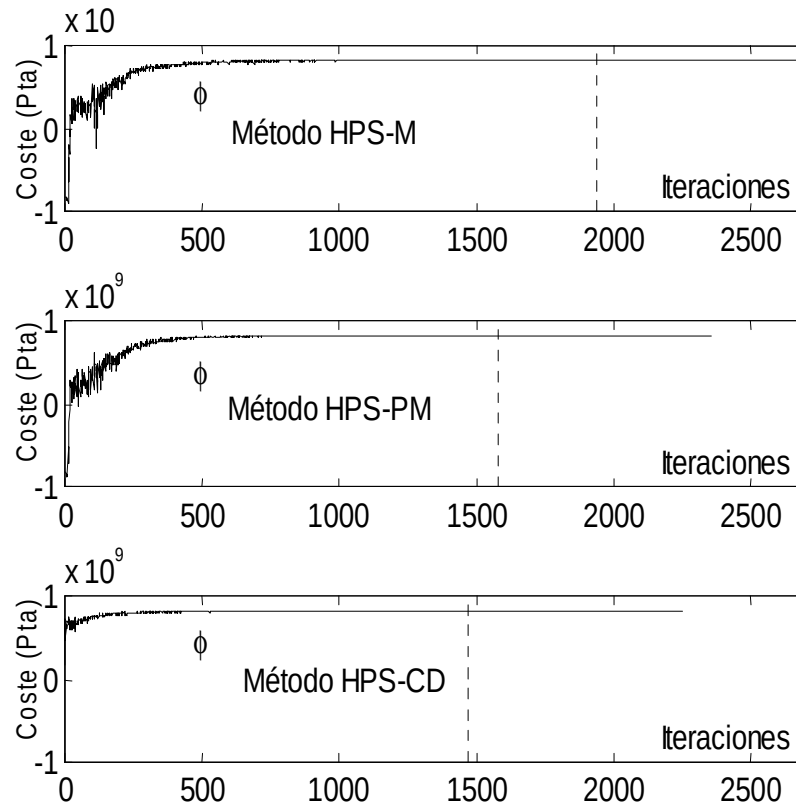


Figura 8.16: Evolución del valor de la función dual en las tres simulaciones analizadas (horizonte temporal: 48 horas)

apartado el horizonte temporal es de 1 día dividido en subperiodos horarios. La curva de demanda empleada se muestra en la figura 8.1 y corresponde al día 10 de junio de 1998. La reserva rodante en cada subperiodo es el 10% de la demanda en ese subperiodo. A este primer caso de estudio se le denomina HPS_CD24.

En el segundo caso de estudio analizado en este apartado, el horizonte temporal es de dos días divididos en subperiodos horarios. La curva de demanda se muestra en la figura 8.2 y corresponde a los días 19 y 20 de agosto de 1998. De nuevo, la reserva rodante en cada subperiodo es el 10% de la demanda en ese subperiodo. Al segundo caso de estudio se le denomina HPS_CD48

8.3.1 Caso estudio 3: Resultados computacionales del algoritmo propuesto al resolver un problema de coordinación hidrotérmica de horizonte temporal 24 horas

En este apartado se presentan los resultados que se obtienen al aplicar el algoritmo de coordinación hidrotérmica en el corto plazo que se propone en este trabajo de investigación (apartado 4.2.3 y capítulo 7) a un sistema de energía eléctrica que consta de 70 centrales térmicas y 30 centrales hidráulicas en una única cuenca. El horizonte temporal es de un día dividido en subperiodos horarios. A este caso se le denomina HPS_CD24.

La figura 8.1 representa la curva horaria de demanda. Los subperiodos 12 y 13 son los subperiodos de mayor demanda con una carga, respectivamente de 20867 MW y 20953 MW. La demanda mínima (14350 MW) se alcanza en el subperiodo 5.

Los parámetros empleados en la variación de la región de factibilidad (apartado 6.7.4 y ecuaciones (6.65), (6.66), (6.68) y (6.69)) han sido los siguientes: $a = 2.0$, $b = 0.2$, $c = 0.2$ y $d = 0.8$.

Los parámetros m y n del tamaño del paso empleado en la actualización de multiplicadores de tipo subgradiente que se lleva a cabo en la *Etapa 2* (paso 6 del *Algoritmo Fase 1*, apartado 7.2) son: $m = 0.0005$ y $n = 0.00025$. El número mínimo de iteraciones a ejecutar en esta segunda etapa de la resolución del problema dual (*Fase 1*) ha sido 100. El parámetro σ utilizado en la definición del criterio de convergencia esta etapa (paso 7 del *Algoritmo Fase 1*, apartado 7.2) ha sido 0.1.

Respecto a la *Etapa 3*, la constante empleada en la actualización de los multiplicadores μ asociados los subperiodos en que no se cumplen las restricciones de reserva rodante (paso 10 del *Algoritmo Fase 2*, apartado 7.3.1) ha sido 0.001.

Los resultados de carácter más general obtenidos han sido los siguientes:

- Resultados de la *Etapa 1*
 - Número de iteraciones: 314
 - Valor de la función dual ϕ : 402490626.35 Pta
 - Valor de la función dual linealizada z : 404173140.76 Pta
 - Índice de calidad: 0.418%
 - Tiempo de cálculo: 82.56 s
- Resultados de la *Etapa 2*
 - Número de iteraciones: 100 (iteraciones 315-414)
 - Valor de la función dual ϕ : 403512423.57 Pta
 - Tiempo de cálculo: 12.99 s
- Resultados de la *Etapa 3*
 - Número de iteraciones: 7 (iteraciones 415-421)
 - Valor de la función dual ϕ : 403513179.62 Pta
 - Tiempo de cálculo: 0.54 s
- Resultados de la *Etapa 4*

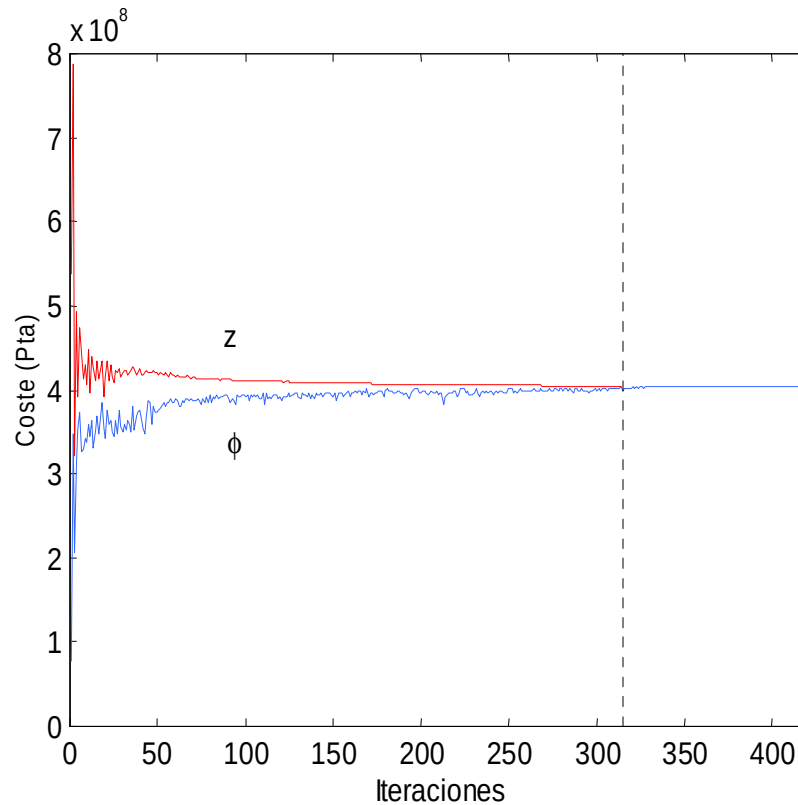


Figura 8.17: Evolución de la función dual y de la función dual linealizada (caso HPS_CD24)

- Coste del problema primal (f): 403599705.70 Pta
- Tiempo de cálculo: 10.65 s
- Resultados globales
 - Cota superior del agujero de dualidad 0.0214 %
 - Tiempo de cálculo: 106.74 s

Los resultados de la *Etapas 1* coinciden con los resultados de la *Fase 1* de la simulación analizada en el caso de estudio 1 (apartado 8.2.1) que emplea el mismo método de actualización de multiplicadores (caso CM24_HPSCD) ya que los datos y los parámetros empleados han sido los mismos.

La figura 8.17 muestra la evolución de la variable z (o valor de la función objetivo del problema dual linealizado a tramos o problema dual relajado) de la *Etapas 1* así como el valor de la función dual ϕ en las etapas 1, 2 y 3. Las líneas discontinuas indican la separación entre las etapas 1, 2 y 3.

A continuación se presentan gráficamente algunos de los resultados que se obtienen tras la ejecución de cada una de las etapas analizando las características más notables. Después se presentan

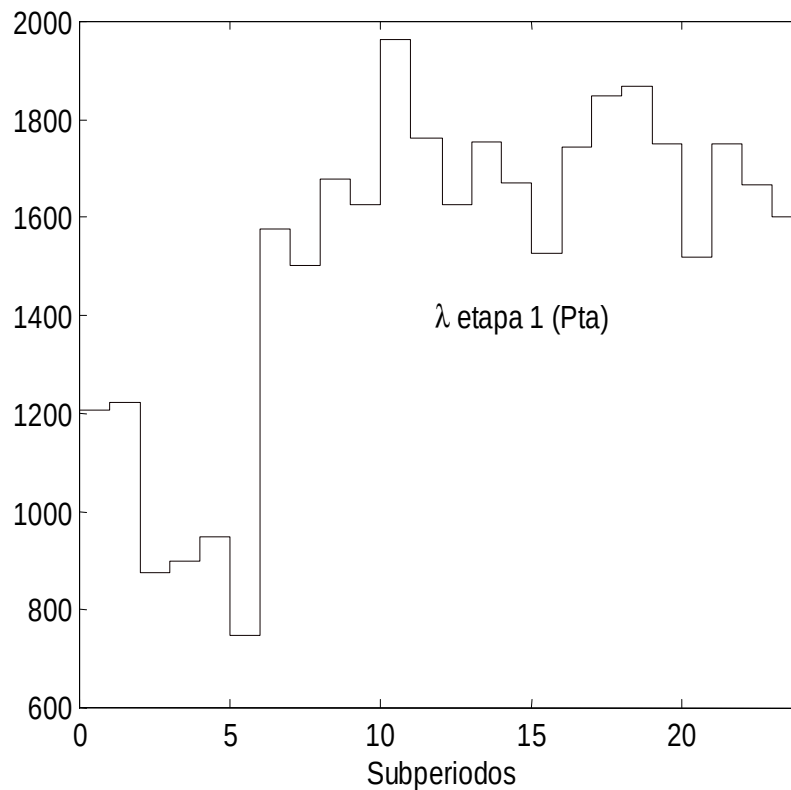


Figura 8.18: Multiplicadores λ al final de la etapa 1 (caso HPS_CD24)

las gráficas que indican la evolución de los multiplicadores, para analizar la estabilización de los multiplicadores que se produce en la *Etapa 2*. Se concluye este apartado recopilando las ventajas del algoritmo en 4 etapas que se propone en este trabajo de investigación frente al algoritmo tradicional empleado en la literatura de 3 fases o 3 etapas [131], [35], [130], [48], [49], [50], [47], [85], [68].

Etapa 1

En primer lugar se presentan los valores de los multiplicadores λ y μ al final de la *Etapa 1*.

La figura 8.18 muestra el valor del vector de multiplicadores λ al final de esta etapa. El valor mínimo se corresponde con el subperiodo 6 y es igual a 747.54 Pta/MWh. El valor máximo ocurre en el subperiodo 11 y vale 1961.28 Pta/MWh.

La figura 8.19 refleja el valor del vector de multiplicadores μ al final de la etapa 1. Como es habitual en el problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo, en la mayoría de los subperiodos el multiplicador μ adquiere el valor nulo. El valor máximo, en la simulación considerada y al final de la primera etapa, ocurre en el subperiodo 13 y es igual a 4576.6 Pta/MW-h.

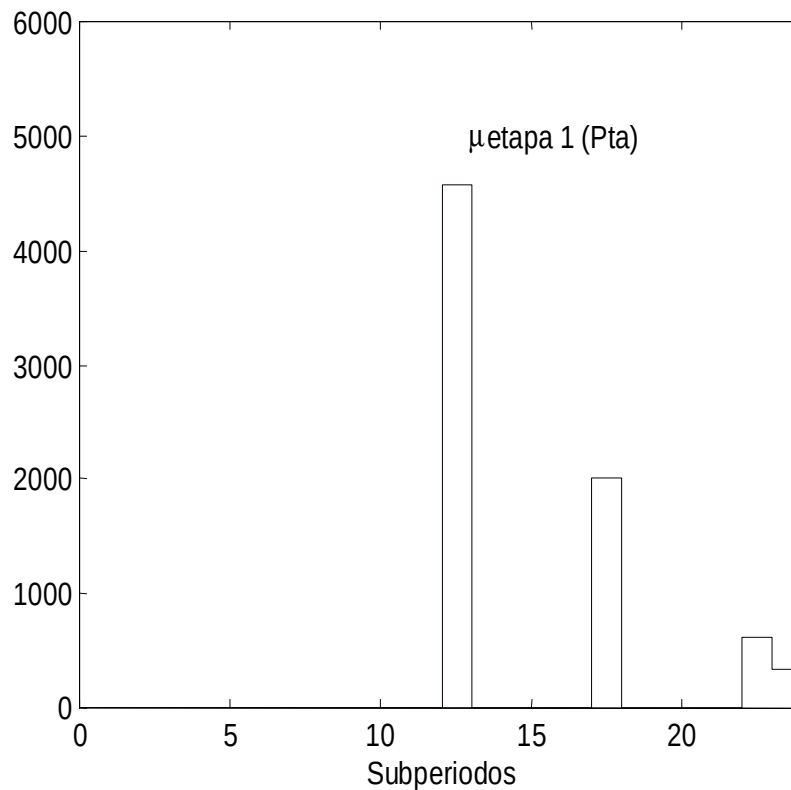


Figura 8.19: Multiplicadores μ al final de la etapa 1 (caso HPS_CD24)

La figura 8.20 incluye dos gráficas. La gráfica superior es la curva horaria de demanda. La gráfica inferior muestra el valor del vector de multiplicadores λ multiplicado por 8. El objetivo de esta figura es permitir la comparación de las formas de la curva de demanda y el vector de multiplicadores. De forma muy general, el vector de multiplicadores λ sigue a la curva de demanda. Sin embargo, como se observará más adelante, tras la ejecución de la *Etapa 2* la analogía entre estas curvas se hace mucho más evidente.

La figura 8.21 muestra la producción total térmica, el valor del vector de multiplicadores λ y el valor del vector de multiplicadores μ al final de la *Etapa 1*. La figura 8.22 incluye la producción total hidráulica, el valor del vector de multiplicadores λ y el valor del vector de multiplicadores μ al final de la *Etapa 1*. Tanto la producción térmica como la producción hidráulica siguen las señales económicas que representan los vectores de multiplicadores.

La figura 8.23 incluye las curvas de demanda, producción total térmica y producción total hidráulica.

Para finalizar la presentación de resultados relativos a la *Etapa 1* se presentan las figuras 8.24 y 8.25. En la figura 8.24, la gráfica superior representa la potencia mínima que debe acoplarse en cada subperiodo del horizonte temporal analizado (la suma de la demanda y la reserva rodante), mientras que la gráfica inferior muestra el exceso de potencia acoplada en cada subperiodo del

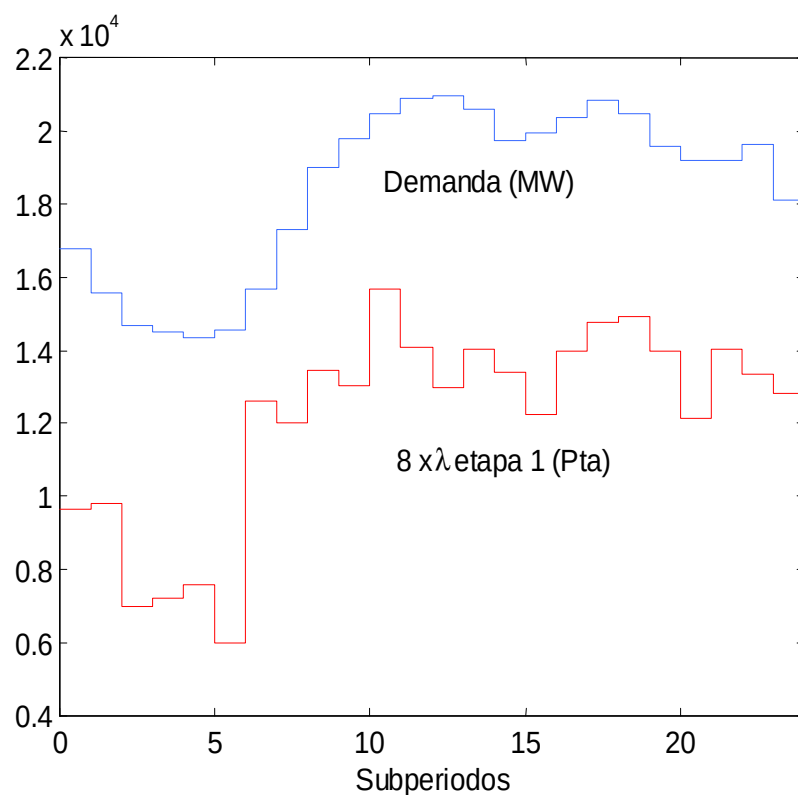


Figura 8.20: Demanda y multiplicadores λ (multiplicados por 8) al final de la etapa 1 (caso HPS_CD24)

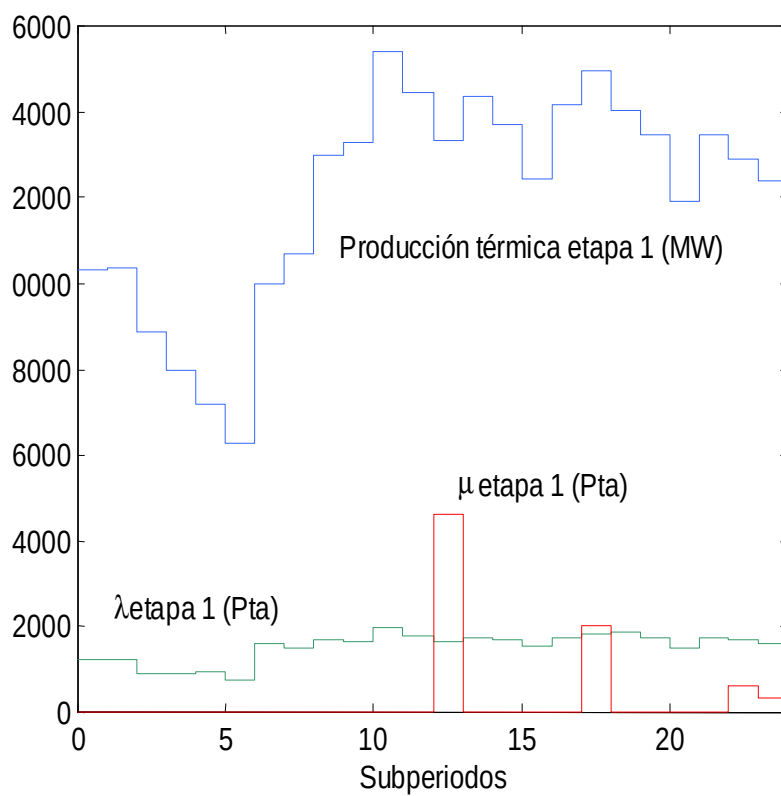


Figura 8.21: Producción térmica, λ y μ al final de la etapa 1 (caso HPS_CD24)

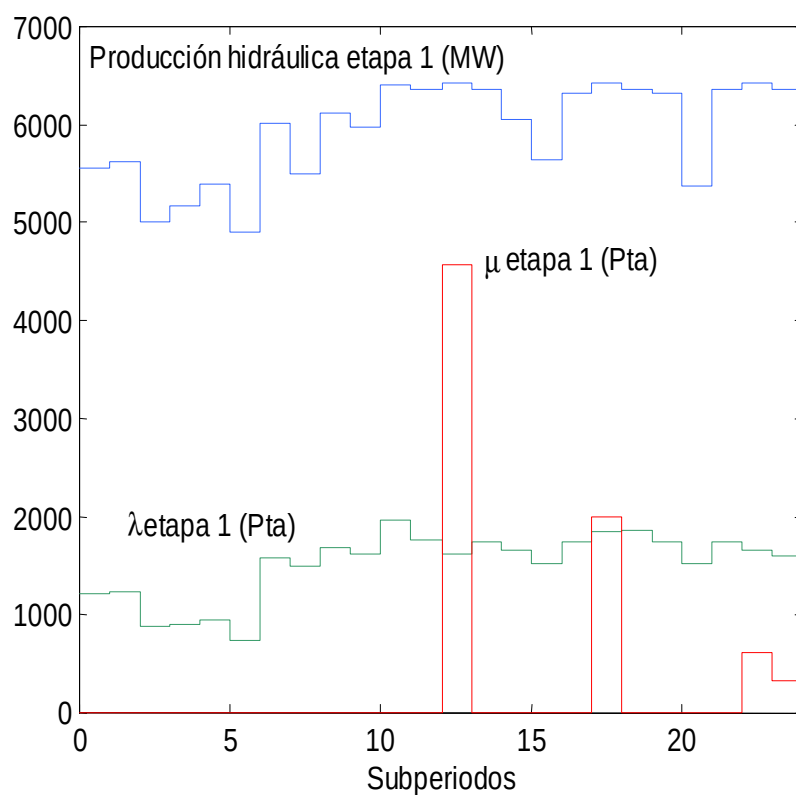


Figura 8.22: Producción hidráulica, λ y μ al final de la etapa 1 (caso HPS_CD24)

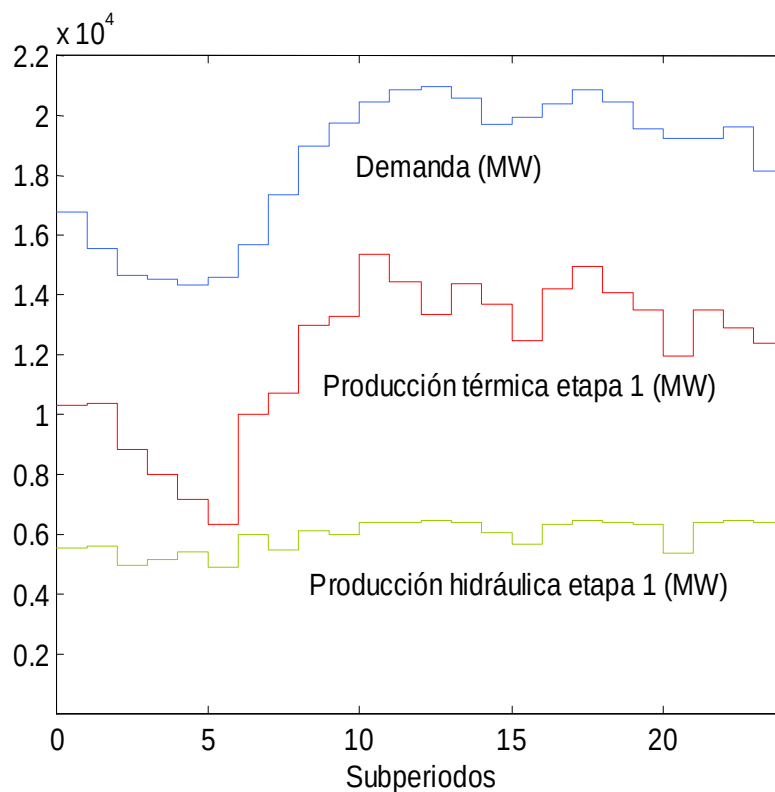


Figura 8.23: Demanda, producción térmica y producción hidráulica al final de la etapa 1 (caso HPS_CD24)

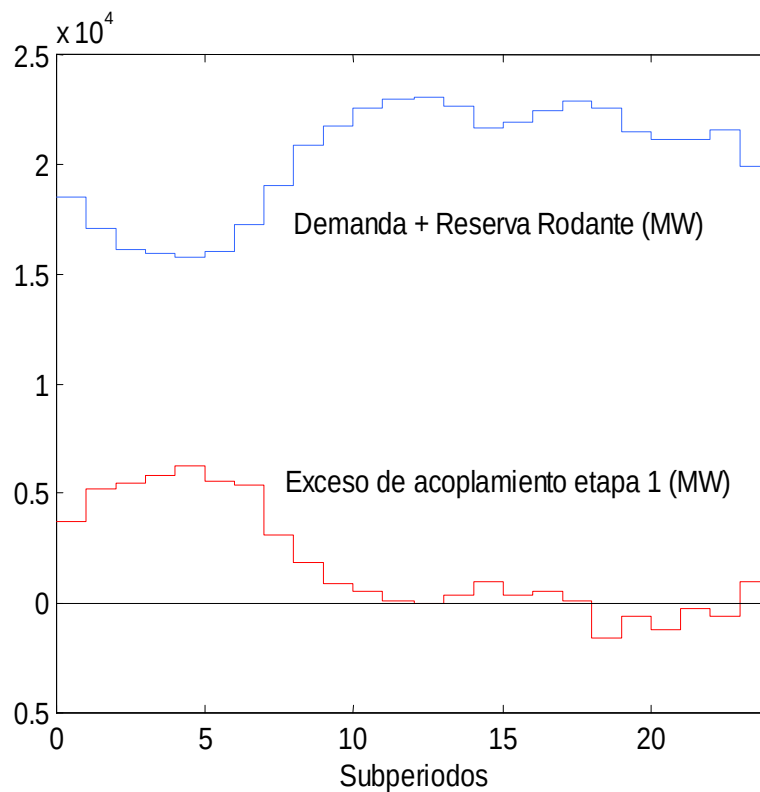


Figura 8.24: Demanda y exceso de potencia acoplada al final de la etapa 1 (caso HPS_CD24)

horizonte temporal analizado.

La figura 8.25 incluye la curva de demanda (gráfica superior) y el exceso de producción (gráfica inferior) en cada subperiodo del horizonte temporal analizado. Como es de esperar, la solución del problema dual no es factible para el problema primal.

Etapa 2

Para el análisis de la *Etapa 2* se presentan los mismos resultados incluidos en la *Etapa 1*

Las figuras 8.26 y 8.27 muestran, respectivamente, los vectores de multiplicadores λ y μ al final de la *Etapa 2*. Puede comprobarse que las escalas verticales se han reducido o, dicho de otro modo, que para ambos vectores los rangos de variación han disminuido.

El valor mínimo del multiplicador λ ha aumentado respecto al valor mínimo de este multiplicador en la etapa anterior, mientras que el valor máximo ha disminuido respecto al valor de la etapa anterior. El valor máximo del multiplicador λ al final de la *Etapa 2* es igual a 1780.60 Pta/MWh y ocurre en el subperiodo 12. El valor mínimo del multiplicador λ se corresponde con el subperiodo 5 y es igual a 987.13 Pta/MWh. Respecto al vector de multiplicadores μ , el valor máximo está asociado al subperiodo 13 y es igual a 4555.2 Pta/MW-h.

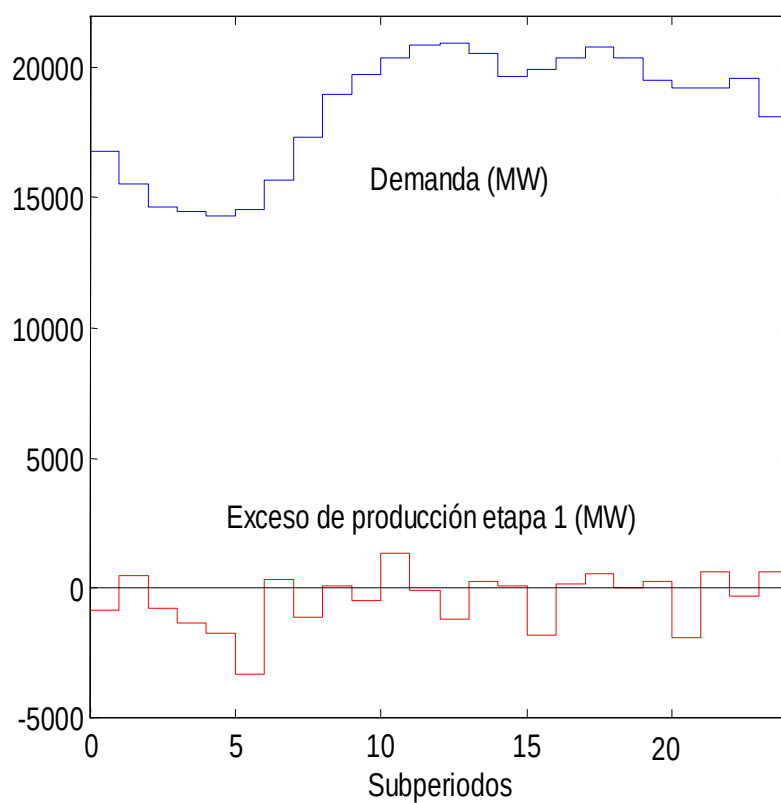


Figura 8.25: Demanda y exceso de potencia producida al final de la etapa 1 (caso HPS_CD24)

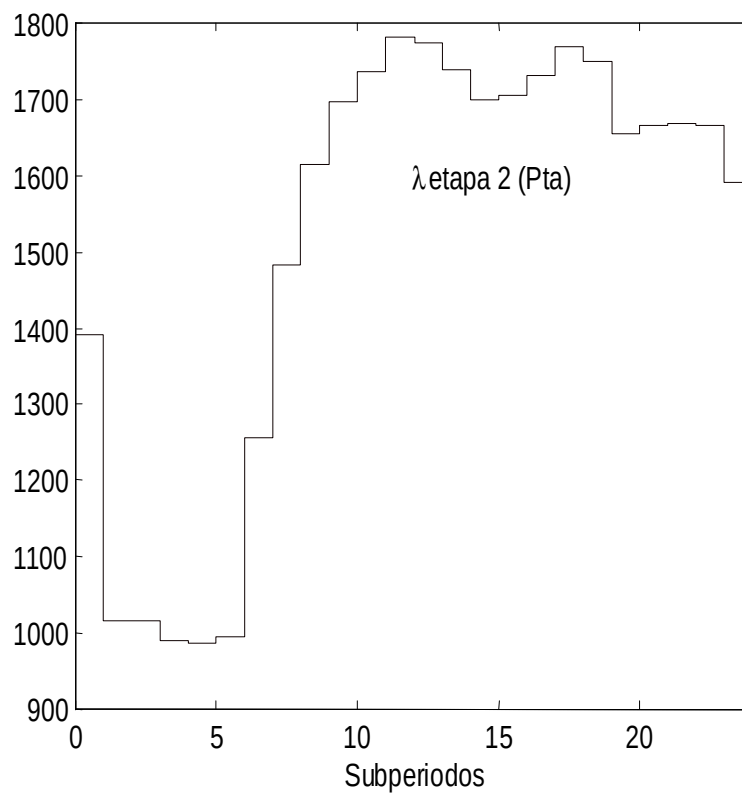


Figura 8.26: Multiplicadores λ al final de la etapa 2 (caso HPS_CD24)

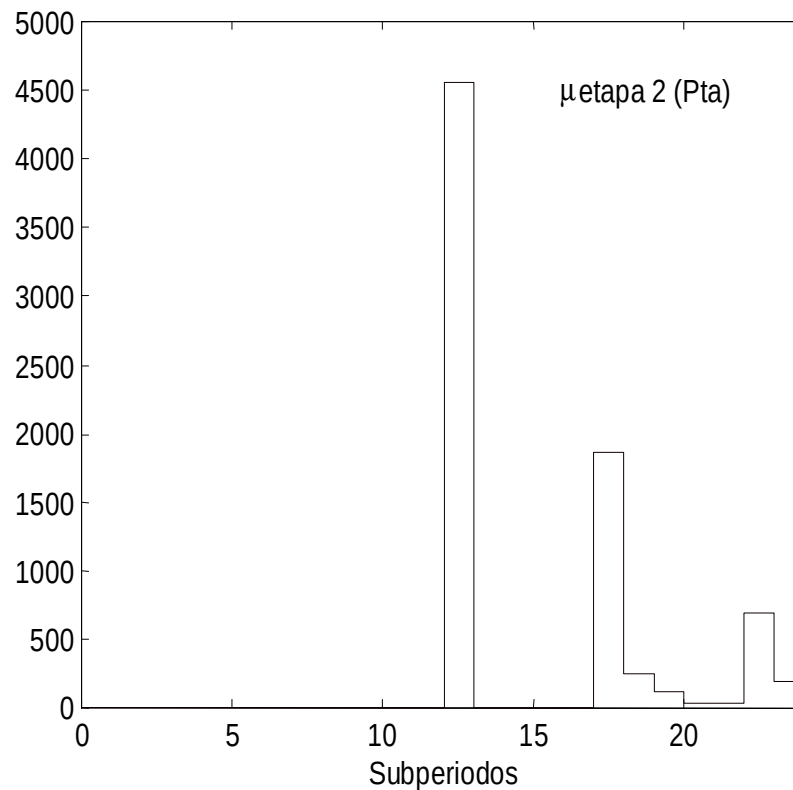


Figura 8.27: Multiplicadores μ al final de la etapa 2 (caso HPS_CD24)

Si comparamos estos resultados con los que se obtienen al final de la etapa anterior puede comprobarse que no sólo se han acercado los multiplicadores máximo y mínimo sino que además estos valores máximos y mínimos están ligados a subperiodos más acordes con la curva de demanda que los subperiodos en que los multiplicadores adquirirían sus valores extremos en la etapa anterior. Todo esto es consecuencia de la estabilización de los multiplicadores de esta segunda etapa.

Cabe hacer notar que el subperiodo 13 es el subperiodo de máxima carga con una demanda de 20953 MW seguido del subperiodo 12 con una demanda de 20867 MW mientras que el subperiodo de carga mínima es el quinto con una demanda de 14350 MW. Aunque el subperiodo en el que el multiplicador λ adquiere su máximo valor es el subperiodo 12 (1780.60 Pta/MWh), está seguido muy de cerca por el subperiodo 13 en el que el multiplicador λ es igual a 1773.92 Pta/MWh. Además, es en el subperiodo de demanda máxima (subperiodo 13) en el que el vector de multiplicadores μ alcanza su valor máximo. Por otra parte el valor mínimo del vector de multiplicadores λ está asociado al subperiodo de demanda mínima (subperiodo 5). El valor mínimo del vector de multiplicadores μ es igual a cero y ocurre en muchos subperiodos del horizonte temporal analizado.

En la figura 8.28 puede observarse la curva horaria de demanda junto con el valor del vector

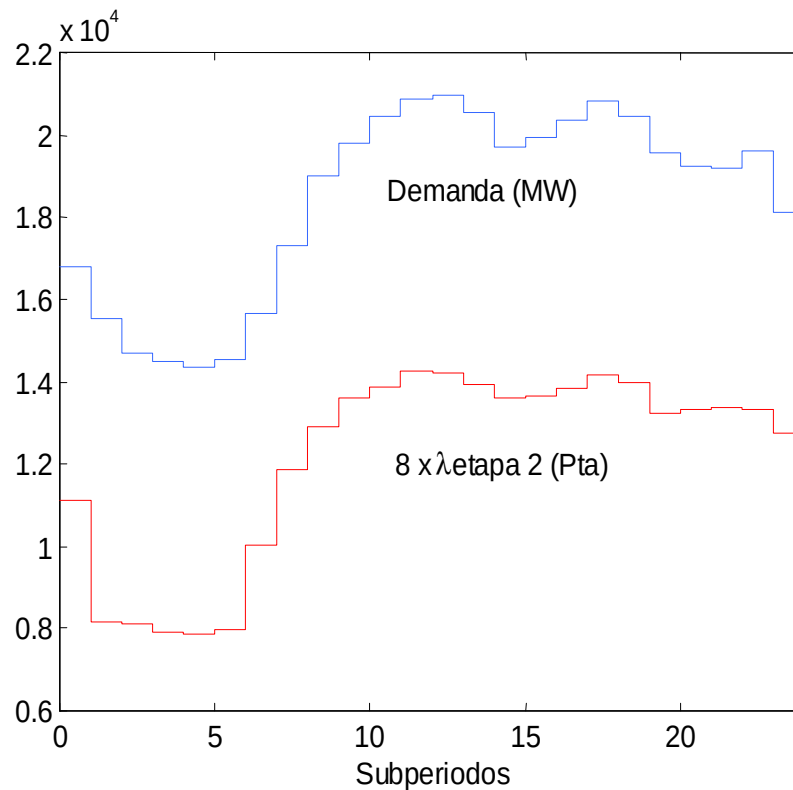


Figura 8.28: Demanda y multiplicadores λ (multiplicados por 8) al final de la etapa 2 (caso HPS_CD24)

de multiplicadores λ al final de la etapa 2. Se ha multiplicado por 8 el valor del vector de multiplicadores λ para poder comparar la forma de ambas curvas. Puede observarse que la curva del vector de multiplicadores λ sigue la forma de la curva de demanda. Si se compara esta figura con la figura 8.20 puede comprobarse que la analogía entre las curvas de demanda y de λ se hace mucho más patente tras la ejecución de la *Etapa 2*. De nuevo, esto es consecuencia de la estabilización de multiplicadores conseguida en esta etapa.

Las figura 8.29 y 8.30 incluyen, respectivamente, la producción total térmica y la producción total hidráulica junto con los vectores de multiplicadores λ y μ al final de la *Etapa 2*. Tanto las centrales térmicas como las centrales hidráulicas definen su producción atendiendo, entre otros factores (restricciones técnicas y costes), a las señales económicas que representan los multiplicadores.

La figura 8.31 incluye la demanda, la producción térmica y la producción hidráulica en cada subperiodo del horizonte temporal analizado. Nótese que la producción hidráulica es bastante estable en los subperiodos de mayor demanda.

La figura 8.32 incluye la curva potencia mínima que se debe acoplar junto con la curva de exceso de potencia acoplada en cada subperiodo del horizonte temporal analizado.

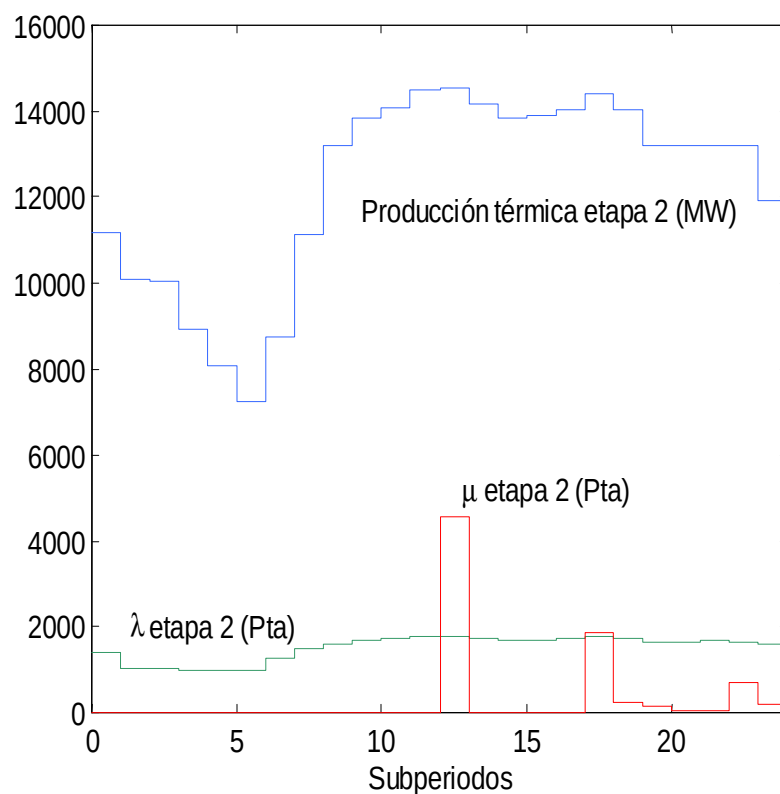


Figura 8.29: Producción térmica, λ y μ al final de la etapa 2 (caso HPS_CD24)

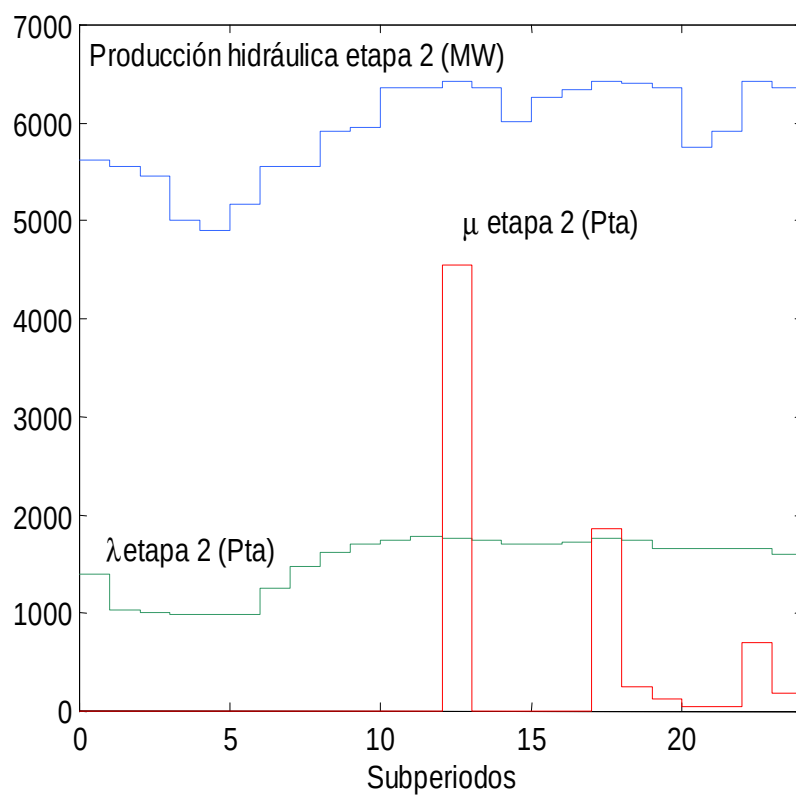


Figura 8.30: Producción hidráulica, λ y μ al final de la etapa 2 (caso HPS_CD24)

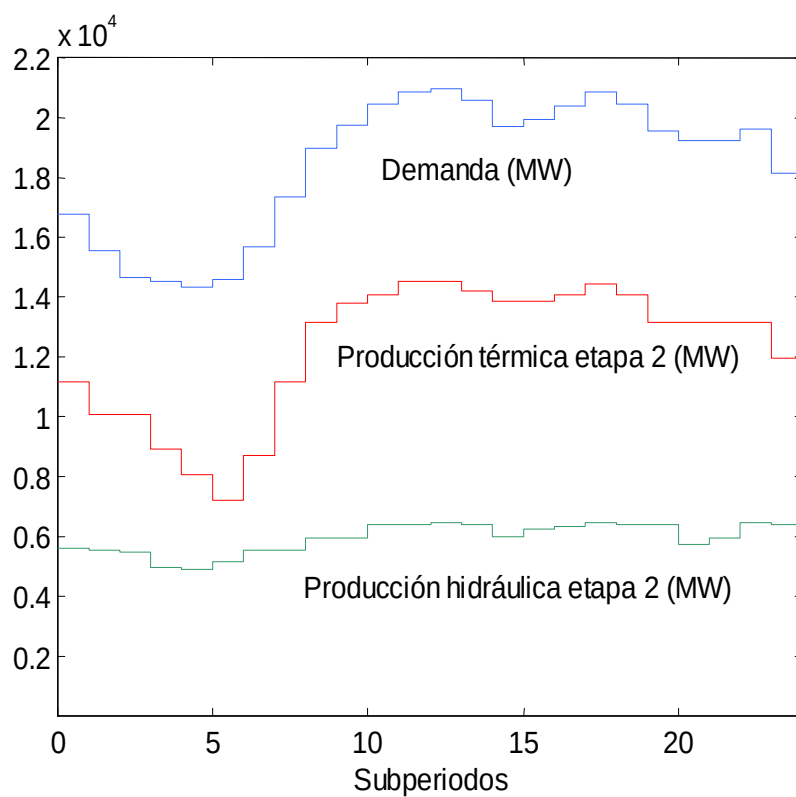


Figura 8.31: Demanda, producción térmica y producción hidráulica al final de la etapa 2 (caso HPS_CD24)

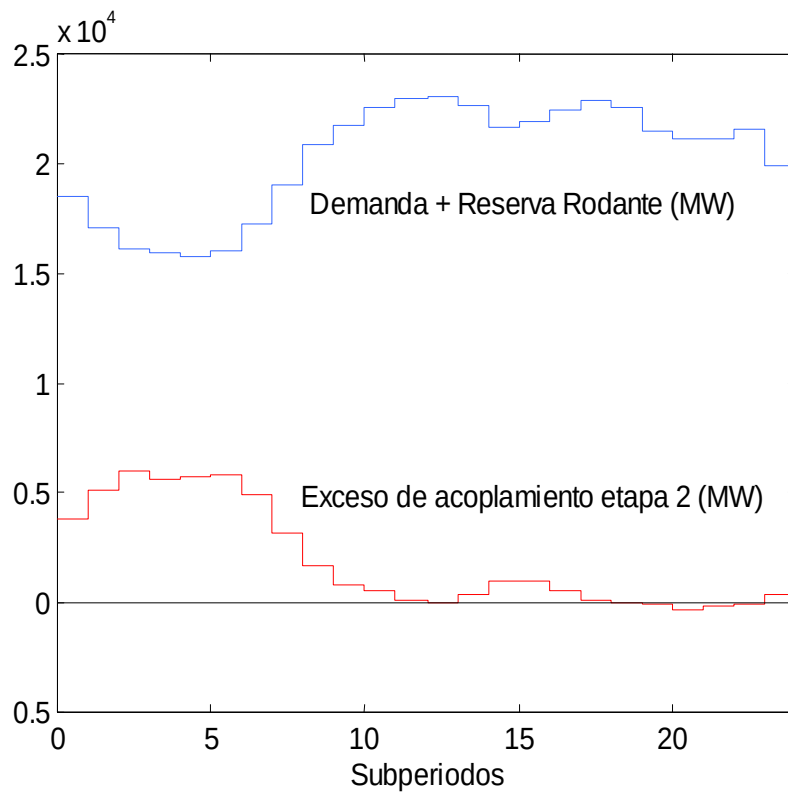


Figura 8.32: Demanda y exceso de potencia acoplada al final de la etapa 2 (caso HPS_CD24)

Puede observarse (figura 8.32) que al final de esta etapa hay muy pocos subperiodos que no cumplan las restricciones de reserva rodante, siendo además el defecto de potencia acoplada en los periodos de infactibilidad pequeño. Quiere ello decir que la ejecución de la *Etapa 2*, además de conseguir estabilizar los multiplicadores y mejorar la solución del problema dual¹, acerca la solución del problema dual a la factibilidad del problema primal. Esto implica que el número de iteraciones necesarias para conseguir una solución factible en reserva rodante (*Fase 2*) se reduce respecto al número de iteraciones necesarias para conseguir este mismo fin en un procedimiento carente de la etapa de estabilización de multiplicadores (o *Etapa 2*). Esto puede comprobarse tras la comparación de los resultados de la ejecución analizada en este apartado con los resultados que se obtienen de la simulación CM24_HPSCD (apartado 8.2.1). Esto quiere decir que el pequeño incremento del tiempo de cálculo que la inclusión de la *Etapa 2* conlleva puede en parte verse compensado con la disminución del tiempo de cálculo de la ejecución de la fase de búsqueda de una solución factible en reserva rodante (*Fase 2*).

La figura 8.33 muestra las curvas de demanda y de exceso de producción en cada subperiodo del horizonte temporal analizado. Comparándola con la figura 8.25 puede de nuevo comprobarse el acercamiento a la factibilidad del problema primal de la solución del problema dual obtenida tras la ejecución de esta *Etapa 2*.

Etapa 3

La figura 8.34 muestra el valor del vector de multiplicadores μ al final de la *Etapa 3*. Hay que destacar que dada la gran proximidad de la solución de la etapa anterior a la factibilidad en las restricciones en reserva rodante del problema primal, el valor del vector de multiplicadores μ al final de la *Etapa 3* sólo se diferencia del valor de este vector de multiplicadores al final de la *Etapa 2* en los subperiodos 20, 21, 22 y 23. En estos subperiodos los multiplicadores μ se han incrementado respectivamente en 0.4414 Pta/MW-h, 2.1302 Pta/MW-h, 0.9182 Pta/MW-h y 0.4505 Pta/MW-h. El máximo valor del vector de multiplicadores sigue estando ligado al subperiodo 13 y sigue siendo igual a 455.52 Pta/MW-h.

No se incluye curva del vector de multiplicadores λ al final de esta etapa porque en ella los multiplicadores λ permanecen constantes e iguales a los valores que adquieren al final de la *Etapa 2*. Por esta razón, tampoco se incluye ninguna figura que contenga la curva de demanda junto con la curva del vector de multiplicadores λ .

La figura 8.35 incluye la producción total térmica, el vector de multiplicadores λ y el vector de multiplicadores μ al final de esta etapa mientras que la figura 8.36 incluye la producción total

¹Nótese que el valor de la función dual ϕ al final de la *Etapa 2* es mayor que el valor de la misma al final de la *Etapa 1*.

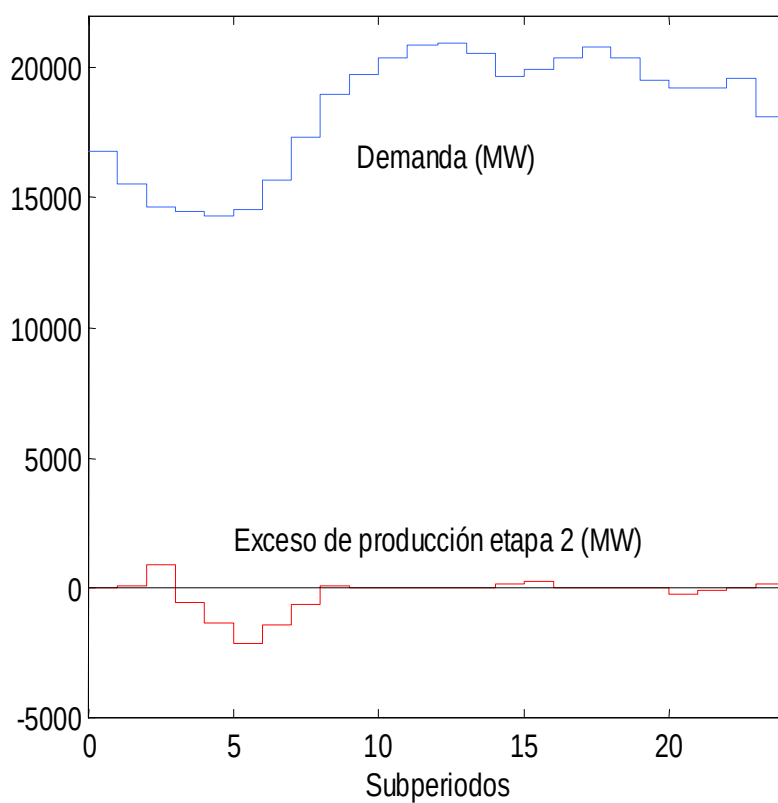


Figura 8.33: Demanda y exceso de potencia producida al final de la etapa 2 (caso HPS_CD24)

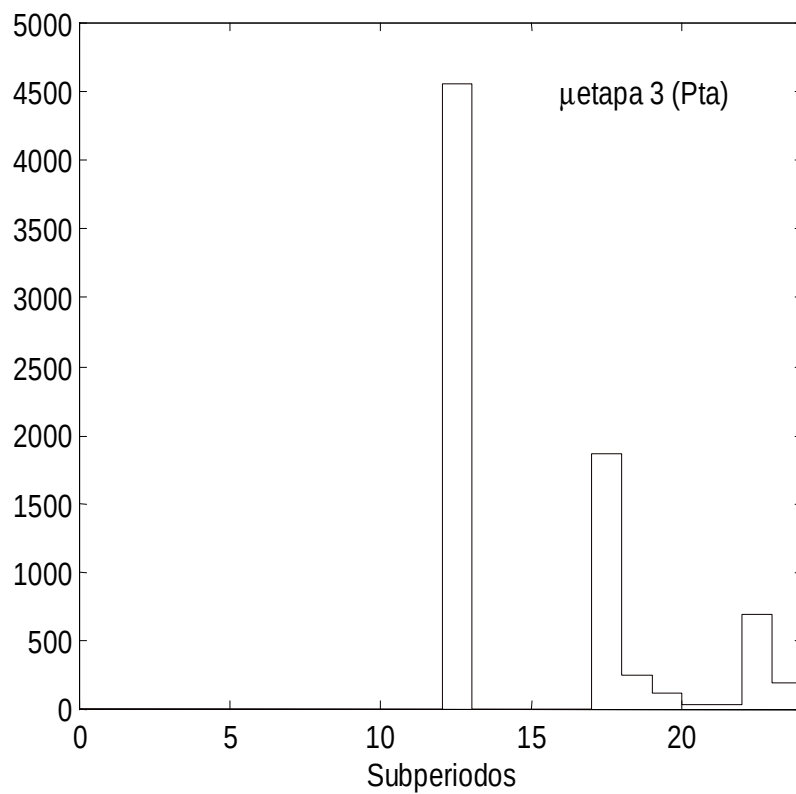


Figura 8.34: Multiplicadores μ al final de la etapa 3 (caso HPS_CD24)

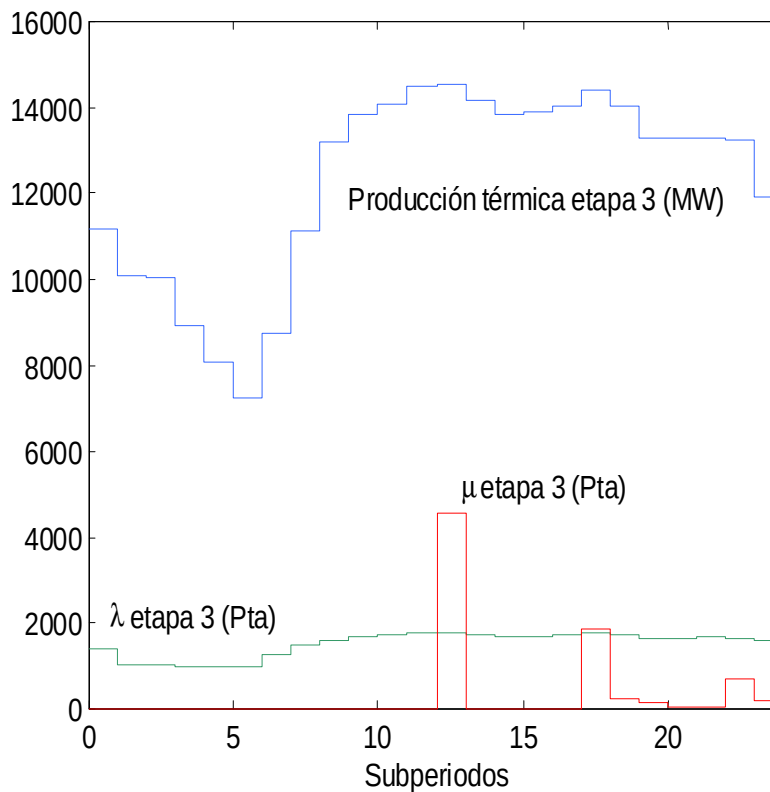


Figura 8.35: Producción térmica, λ y μ al final de la etapa 3 (caso HPS_CD24)

hidráulica, el vector de multiplicadores λ y el vector de multiplicadores μ al final de la misma.

La figura 8.37 incluye las curvas de demanda, producción térmica y producción hidráulica al final de la *Etapa 2*

La figura 8.38 incluye la curva de la potencia mínima a acoplar junto con la curva que representa el exceso de potencia acoplada al final de la *Etapa 3*. Dado que nunca hay defecto de potencia acoplada, la solución de esta etapa es factible en las restricciones de reserva rodante del problema primal.

La figura 8.39 muestra las curvas de demanda y el exceso de producción en cada subperiodo del horizonte temporal analizado. Puede observarse que aún no se cumplen las restricciones de demanda. Para conseguir una solución que cumpla estas restricciones hace falta la ejecución de un procedimiento de despacho económico (*Etapa 4*).

Evolución de los multiplicadores

A continuación se presentan gráficas que presentan la evolución de los multiplicadores. Como podrá observarse en las siguientes figuras, a pesar de que al alcanzarse la solución en la *Etapa 1* el valor de la función dual se ha estabilizado, los valores de los multiplicadores aún están lejos

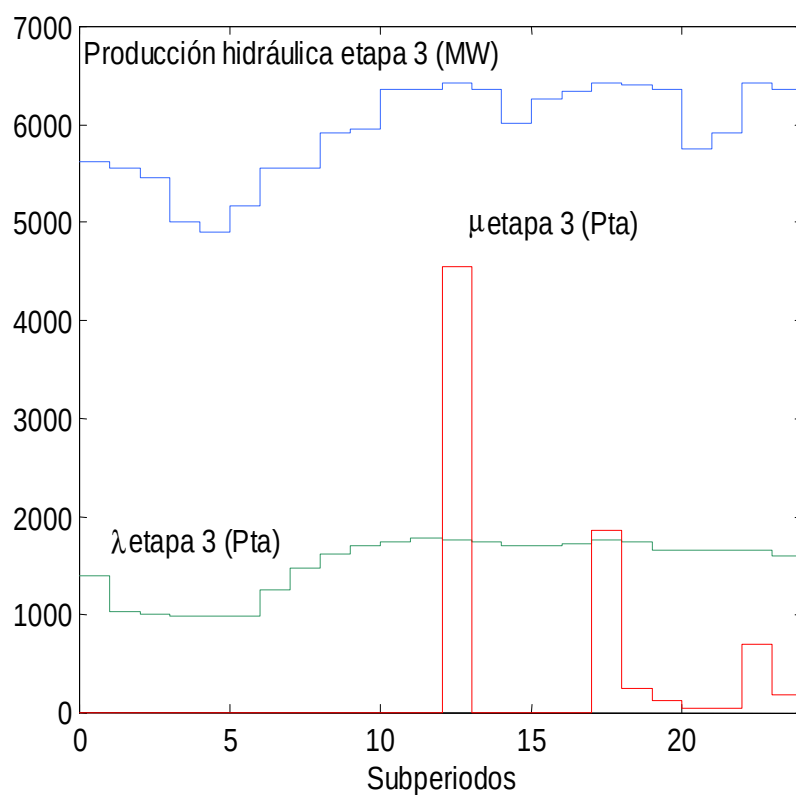


Figura 8.36: Producción hidráulica, λ y μ al final de la etapa 3 (caso HPS_CD24)

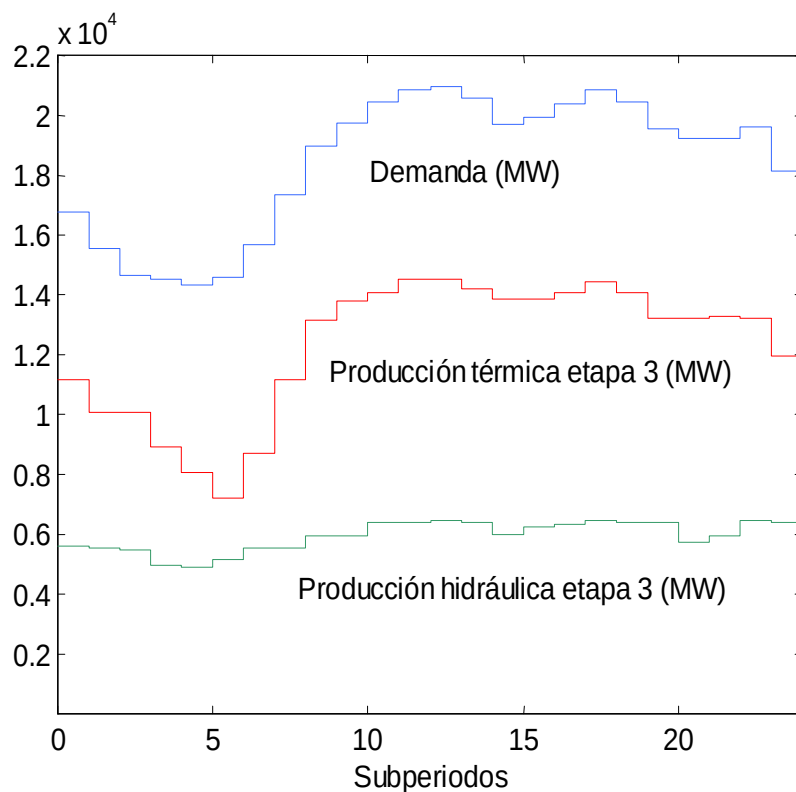


Figura 8.37: Demanda, producción térmica y producción hidráulica al final de la etapa 3 (caso HPS_CD24)

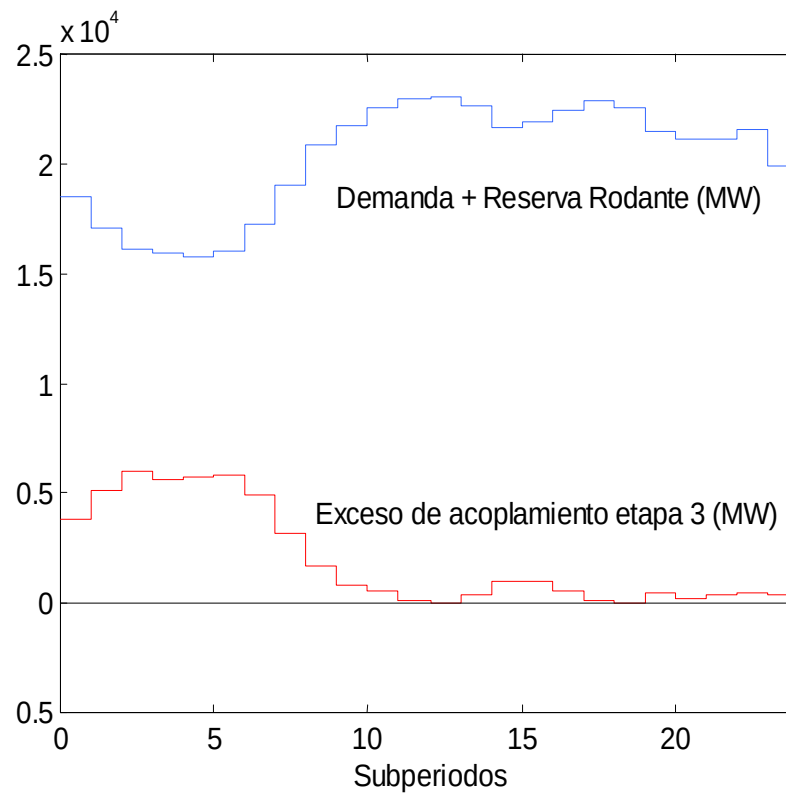


Figura 8.38: Demanda y exceso de potencia acoplada al final de la etapa 3 (caso HPS_CD24)

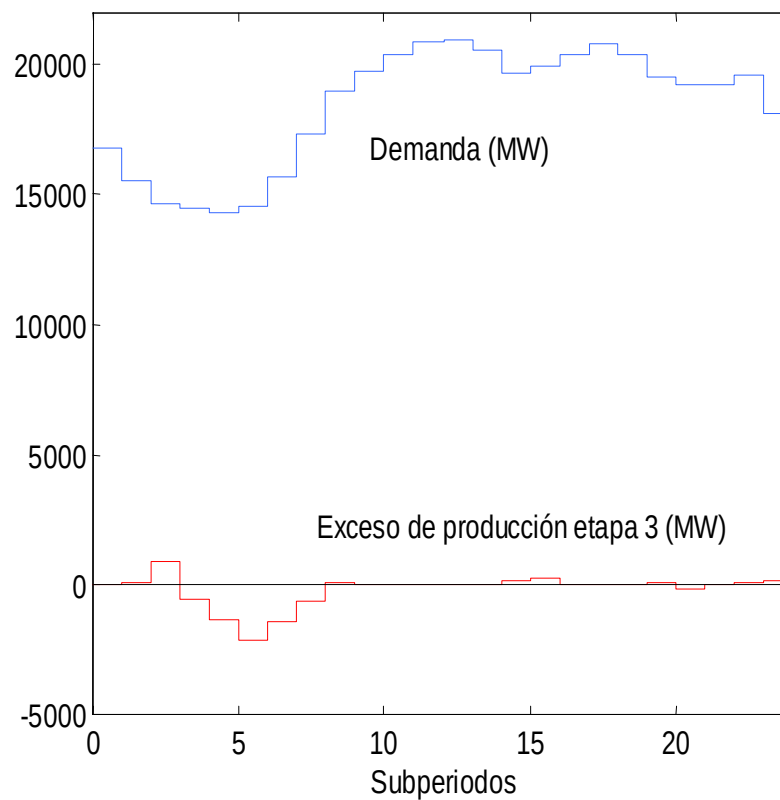


Figura 8.39: Demanda y exceso de potencia producida al final de la etapa 3 (caso HPS_CD24)

de la convergencia. Esto es consecuencia de la estructura tipo “meseta” que presenta la función dual del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo. La inclusión de la *Etapa 2* en la fase de solución del problema dual (*Fase 1*) permite la estabilización de los multiplicadores de forma muy eficiente (ya que el tiempo de cálculo es pequeño).

En primer lugar se presentan las figuras que representan la evolución de los multiplicadores λ durante las etapas 1 y 2 (figuras 8.40-8.45). No se incluye la *Etapa 3* ya que los multiplicadores λ permanecen constantes en ella. La línea discontinua indica la separación entre la *Etapa 1* y la *Etapa 2*. Como puede observarse, a pesar de la convergencia en el valor de la función dual al finalizar la *Etapa 1* (figura 8.17), el comportamiento de los multiplicadores es aún bastante oscilante.

Las figuras 8.46-8.51 muestra la evolución de los multiplicadores λ durante la *Etapa 2*. Al finalizar esta etapa los multiplicadores λ se han estabilizado.

Las figuras 8.52-8.57 muestran la evolución de los multiplicadores μ en las etapas 1, 2 y 3. Las líneas discontinuas indican la separación entre etapas. Como puede observarse el comportamiento de los multiplicadores μ que no se mantienen a cero desde el comienzo del proceso es bastante oscilante. Las figuras 8.58-8.60 presentan la evolución de los multiplicadores μ durante las etapas 2 y 3 en aquellos subperiodos en que no se mantienen constantes e iguales a cero.

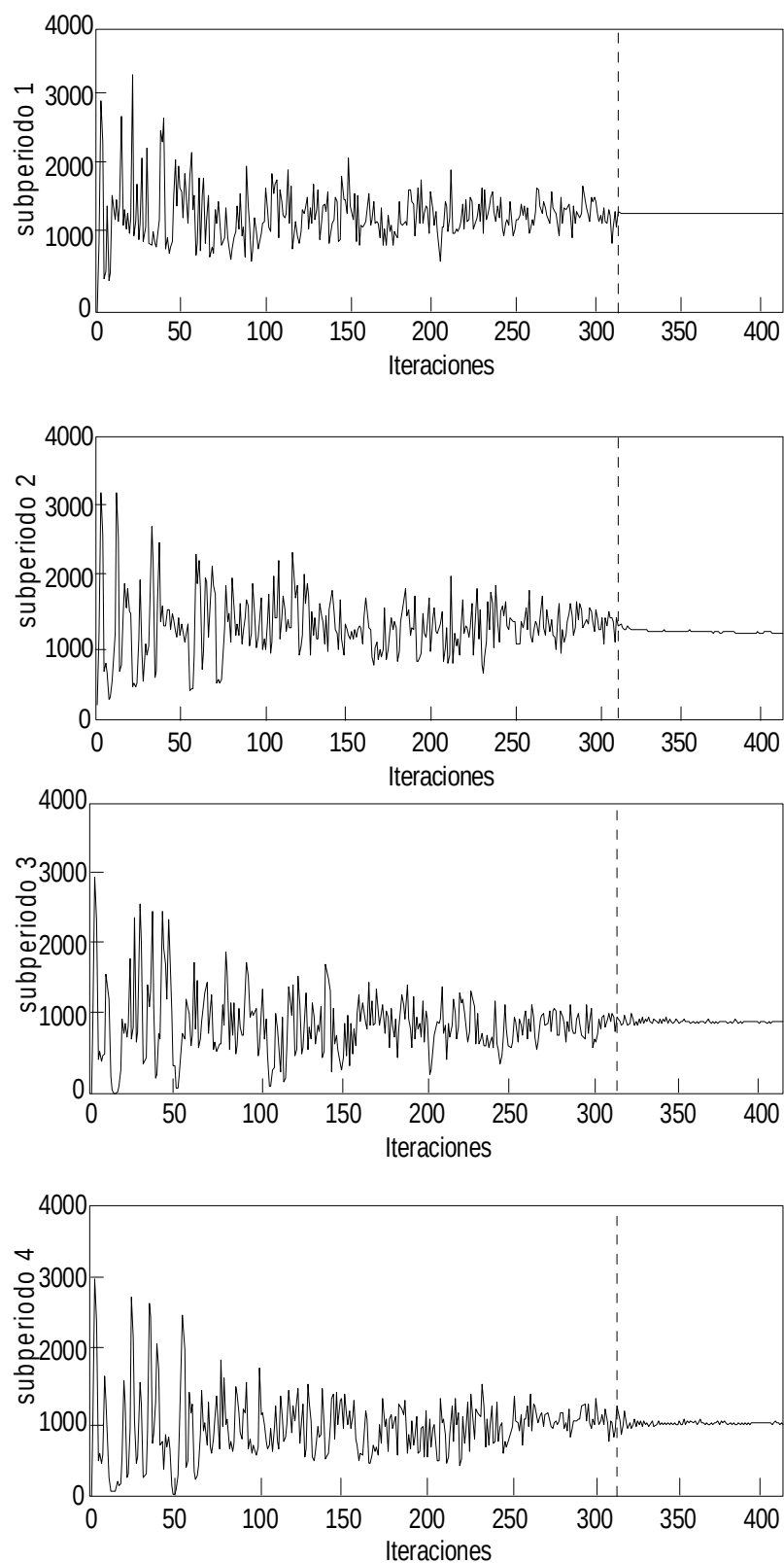


Figura 8.40: Evolución de los multiplicadores λ asociados a los subperíodos 1-4 (caso HPS_CD24)

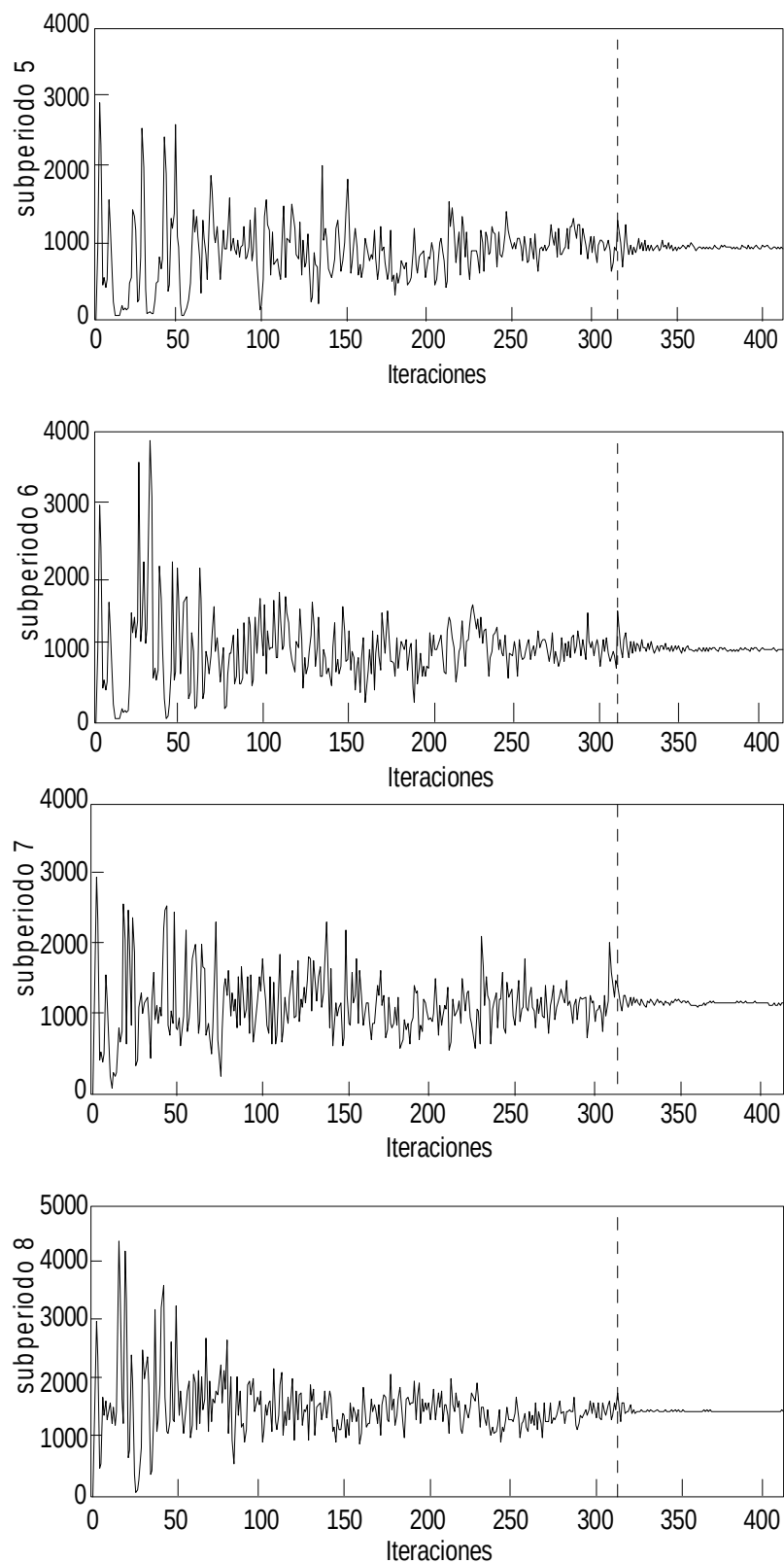


Figura 8.41: Evolución de los multiplicadores λ asociados a los subperiodos 5-8 (caso HPS_CD24)

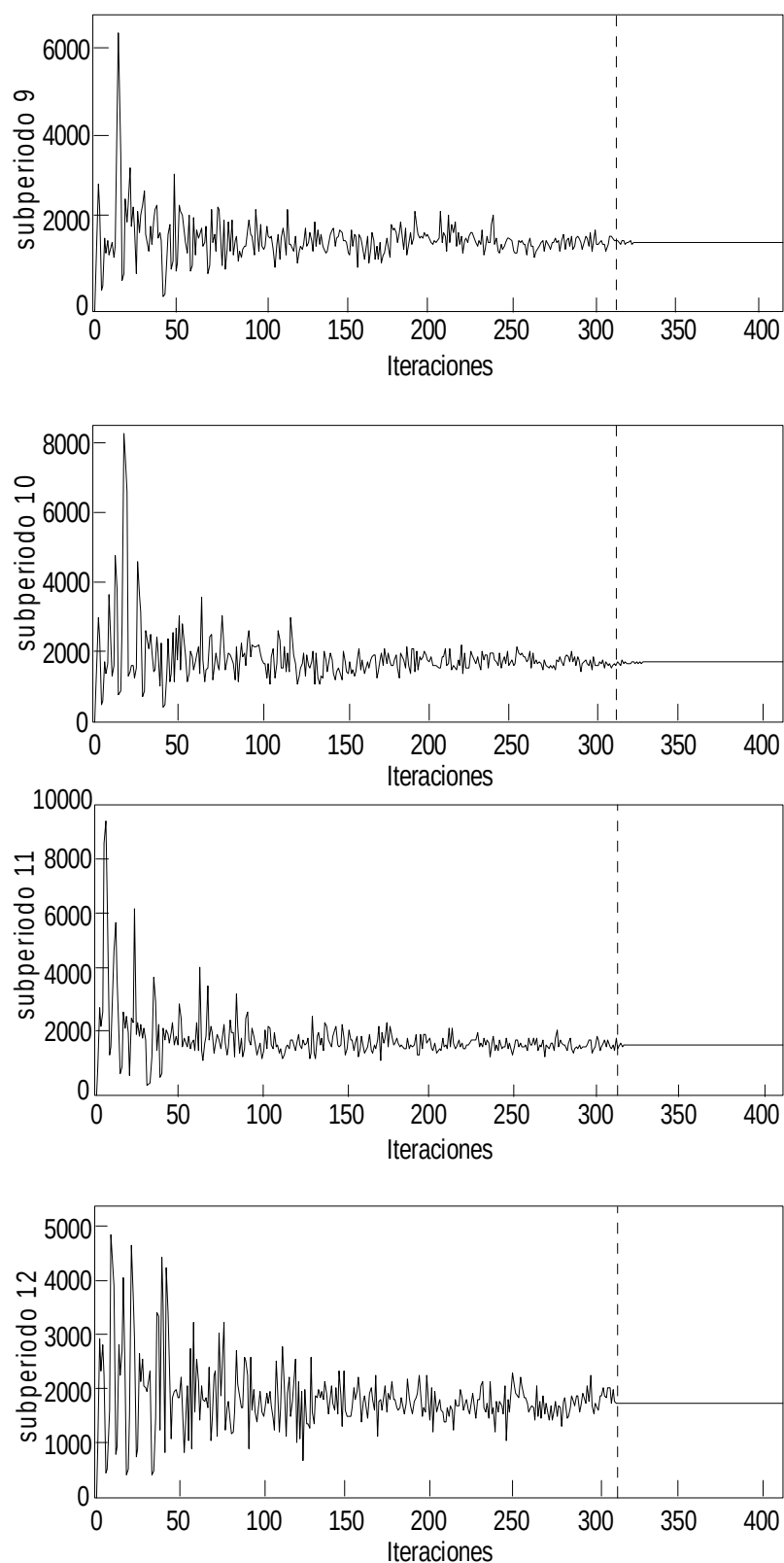


Figura 8.42: Evolución de los multiplicadores λ asociados a los subperiodos 9-12 (caso HPS_CD24)

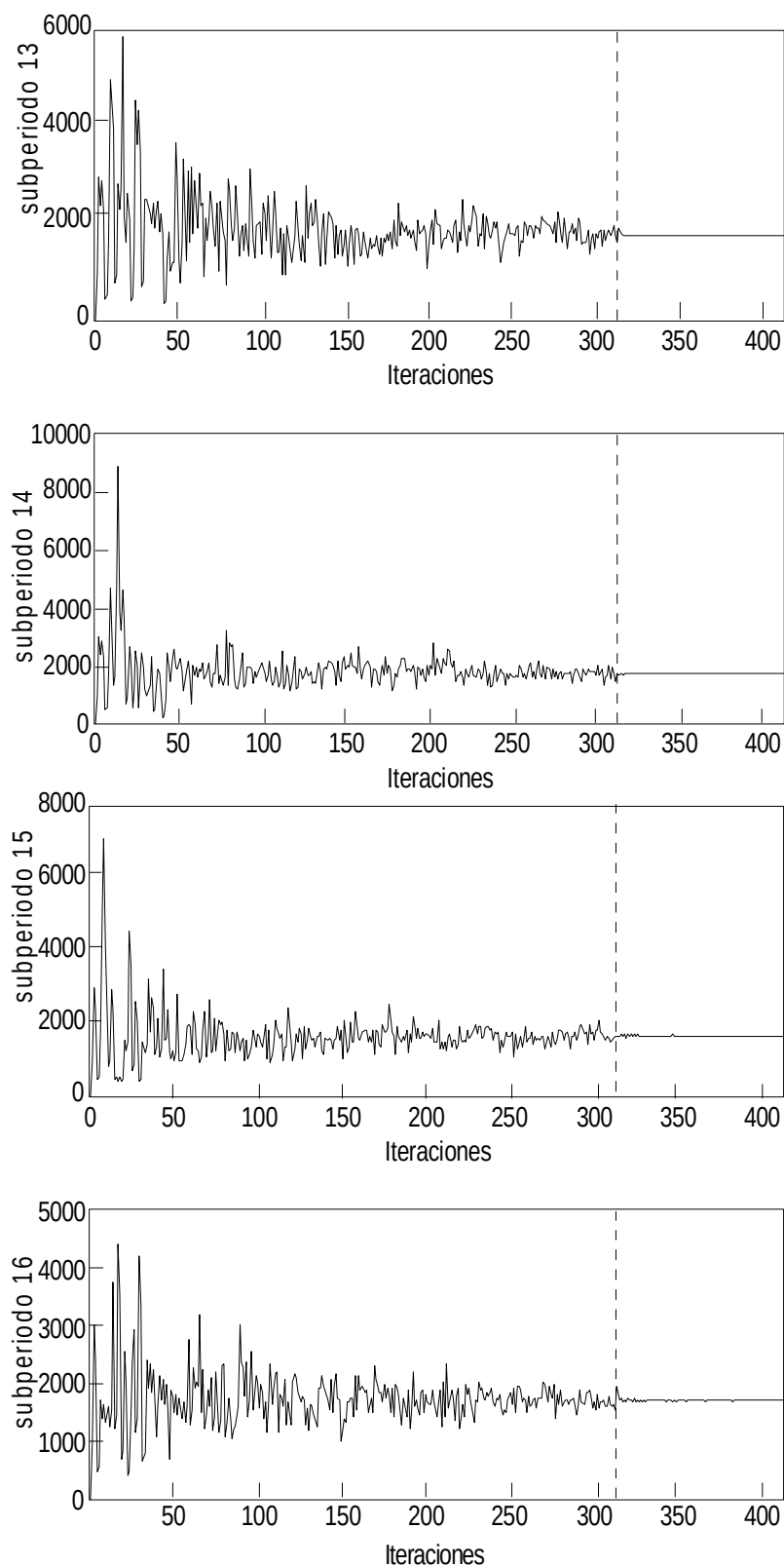


Figura 8.43: Evolución de los multiplicadores λ asociados a los subperiodos 13-16 (caso HPS_CD24)

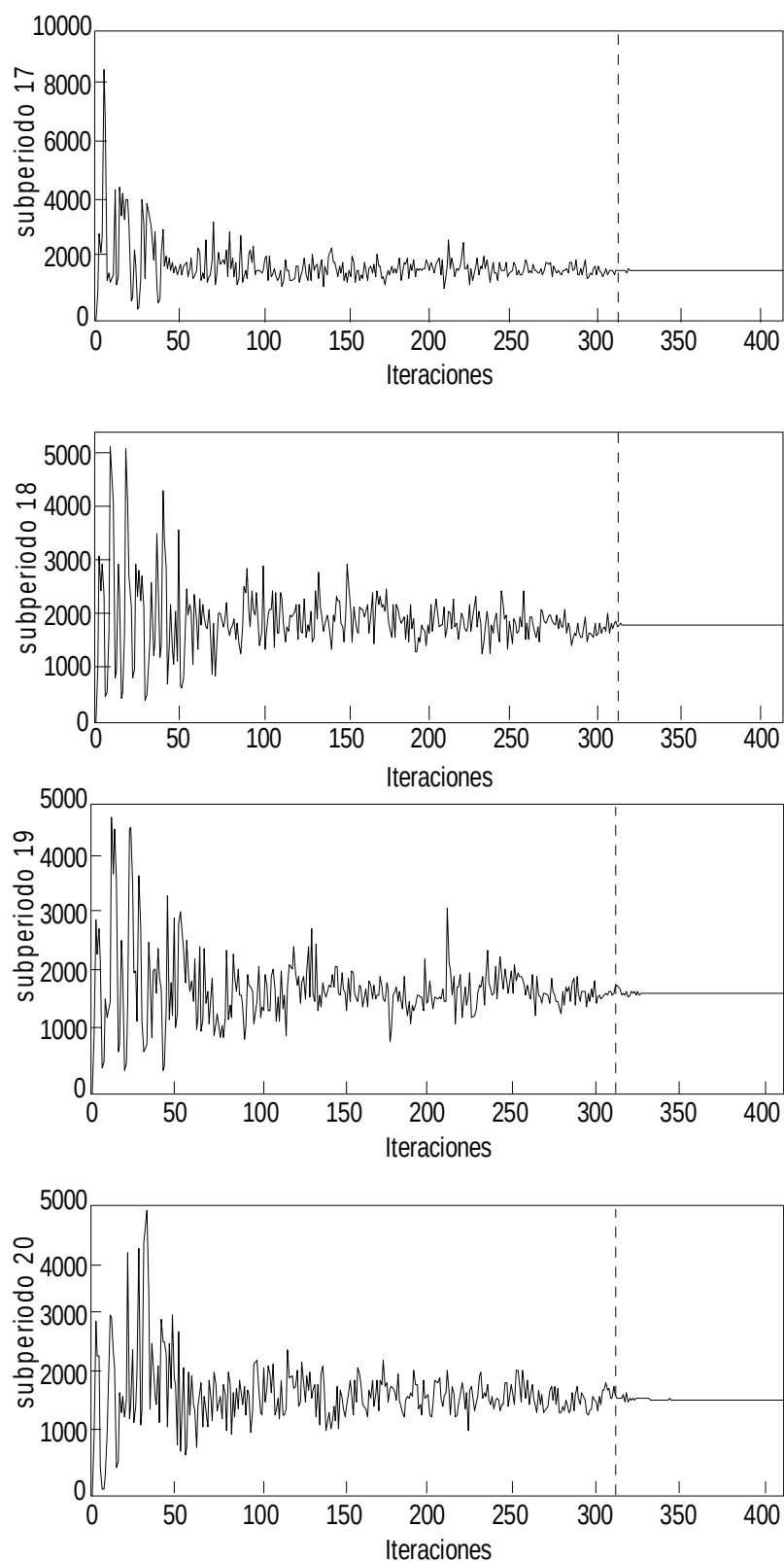


Figura 8.44: Evolución de los multiplicadores λ asociados a los subperiodos 17-20 (caso HPS_CD24)

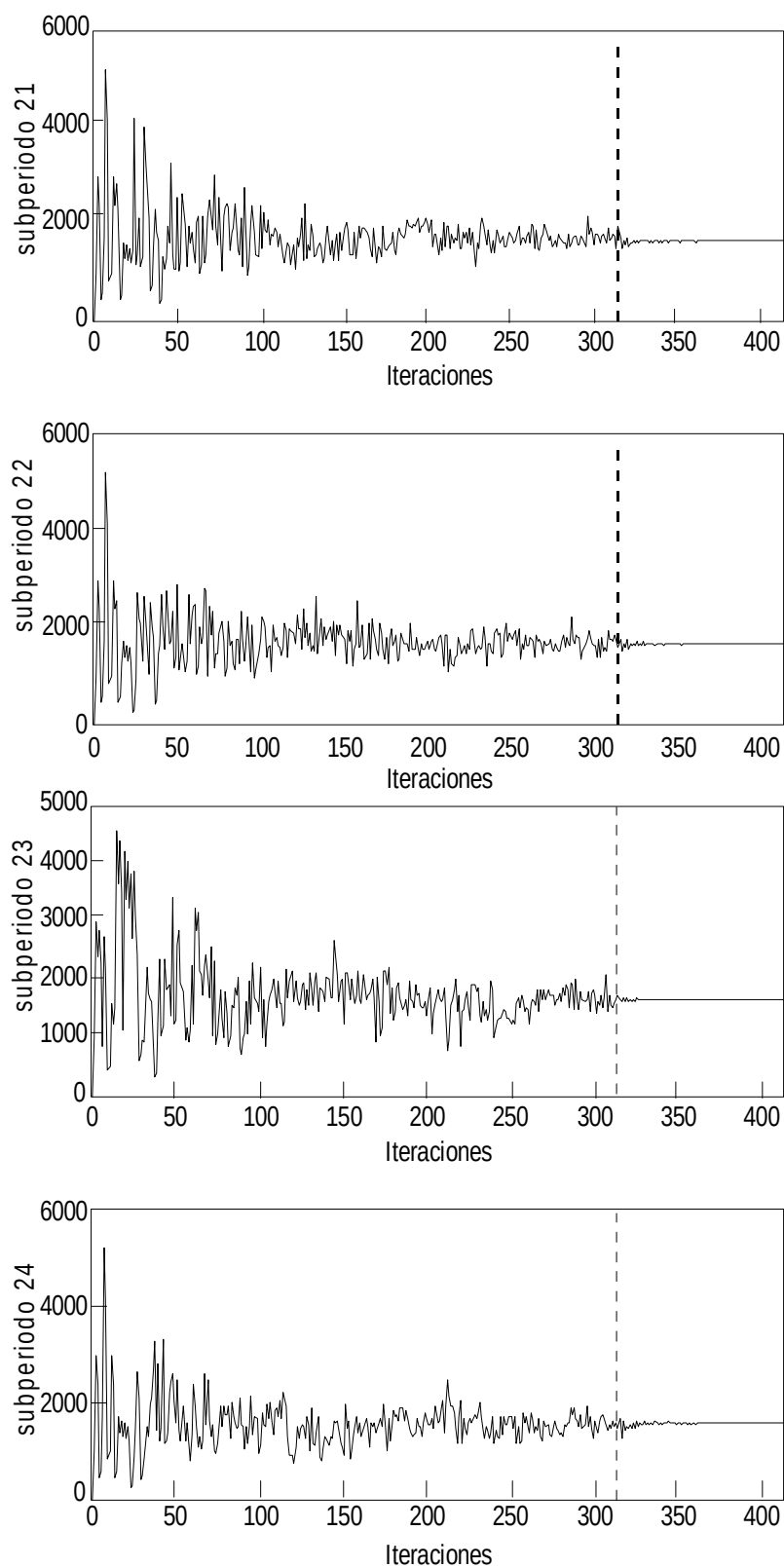


Figura 8.45: Evolución de los multiplicadores λ asociados a los subperiodos 21-24 (caso HPS_CD24)

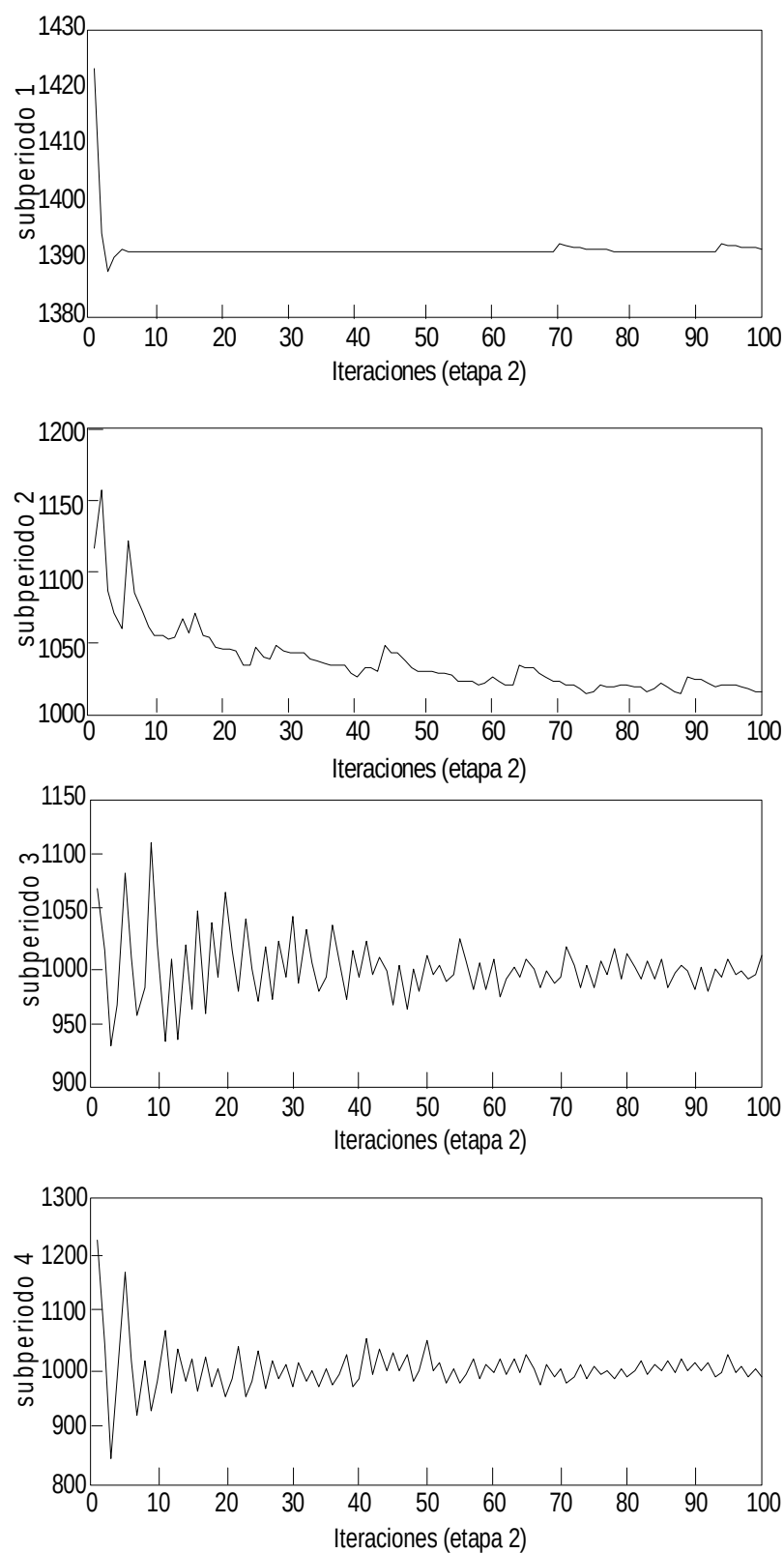


Figura 8.46: Evolución de los multiplicadores λ asociados a los subperiodos 1-4 durante la etapa 2 (caso HPS_CD24)

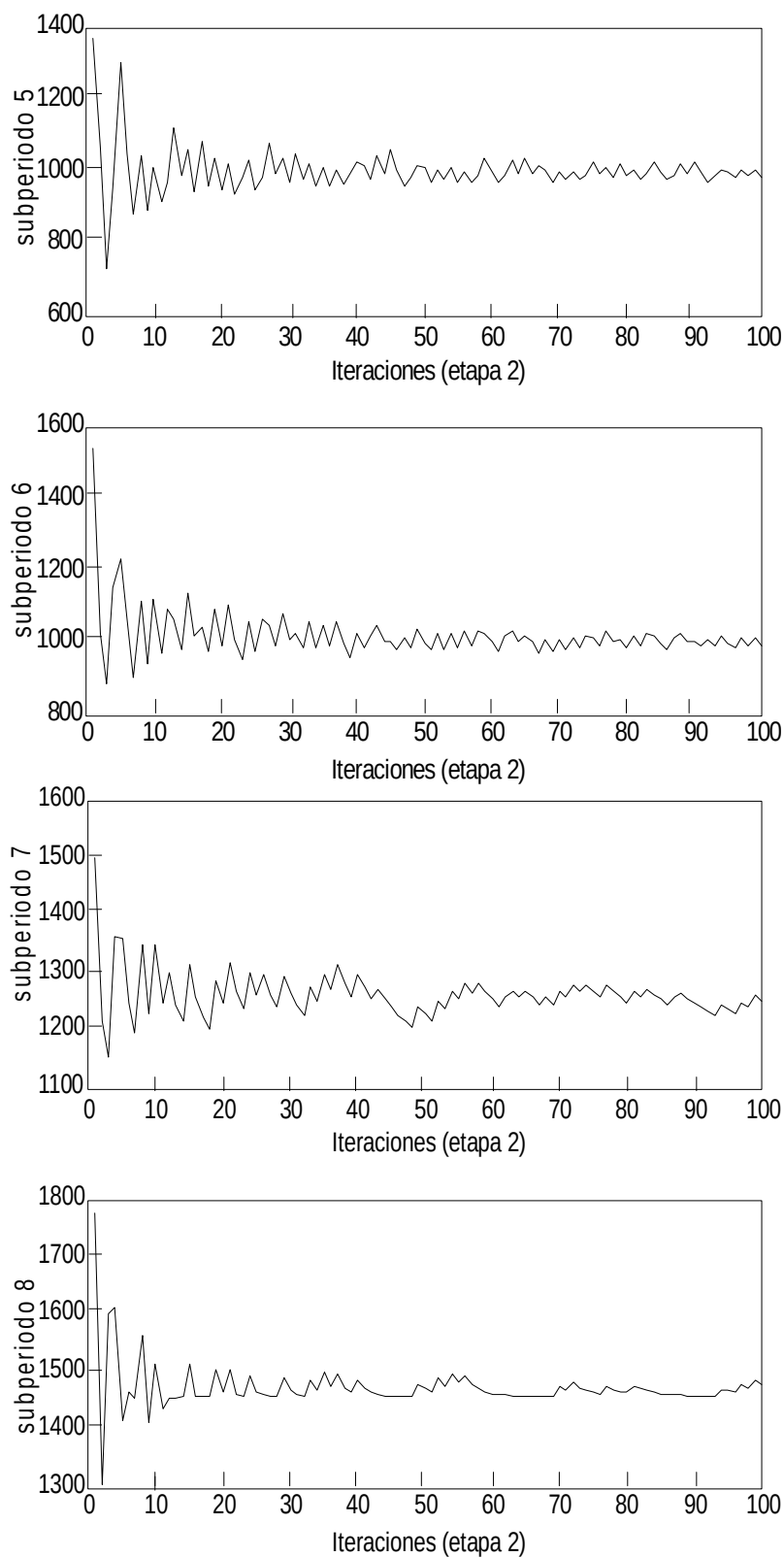


Figura 8.47: Evolución de los multiplicadores λ asociados a los subperiodos 5-8 durante la etapa 2 (caso HPS_CD24)

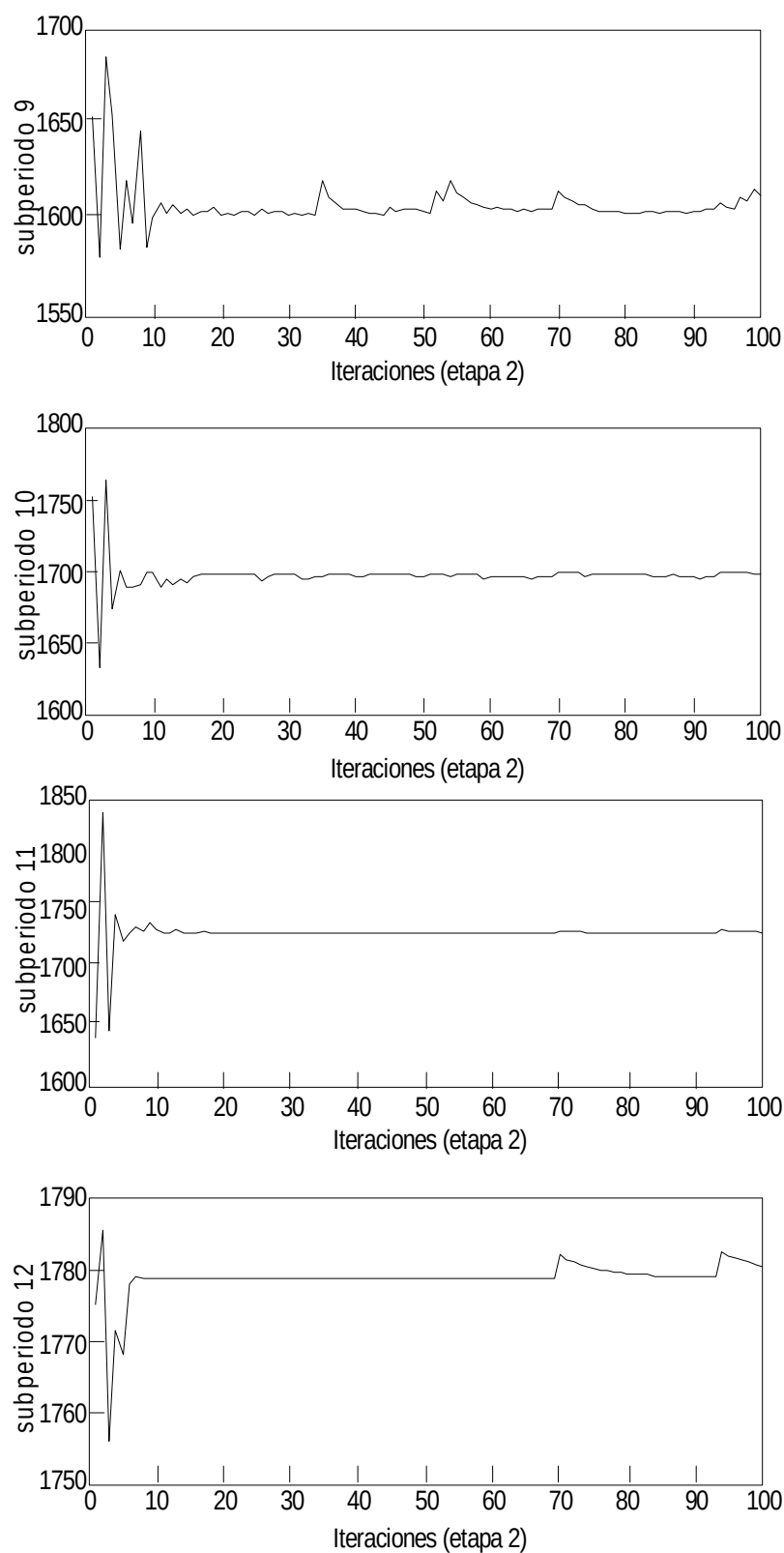


Figura 8.48: Evolución de los multiplicadores λ asociados a los subperíodos 9-12 durante la etapa 2 (caso HPS_CD24)

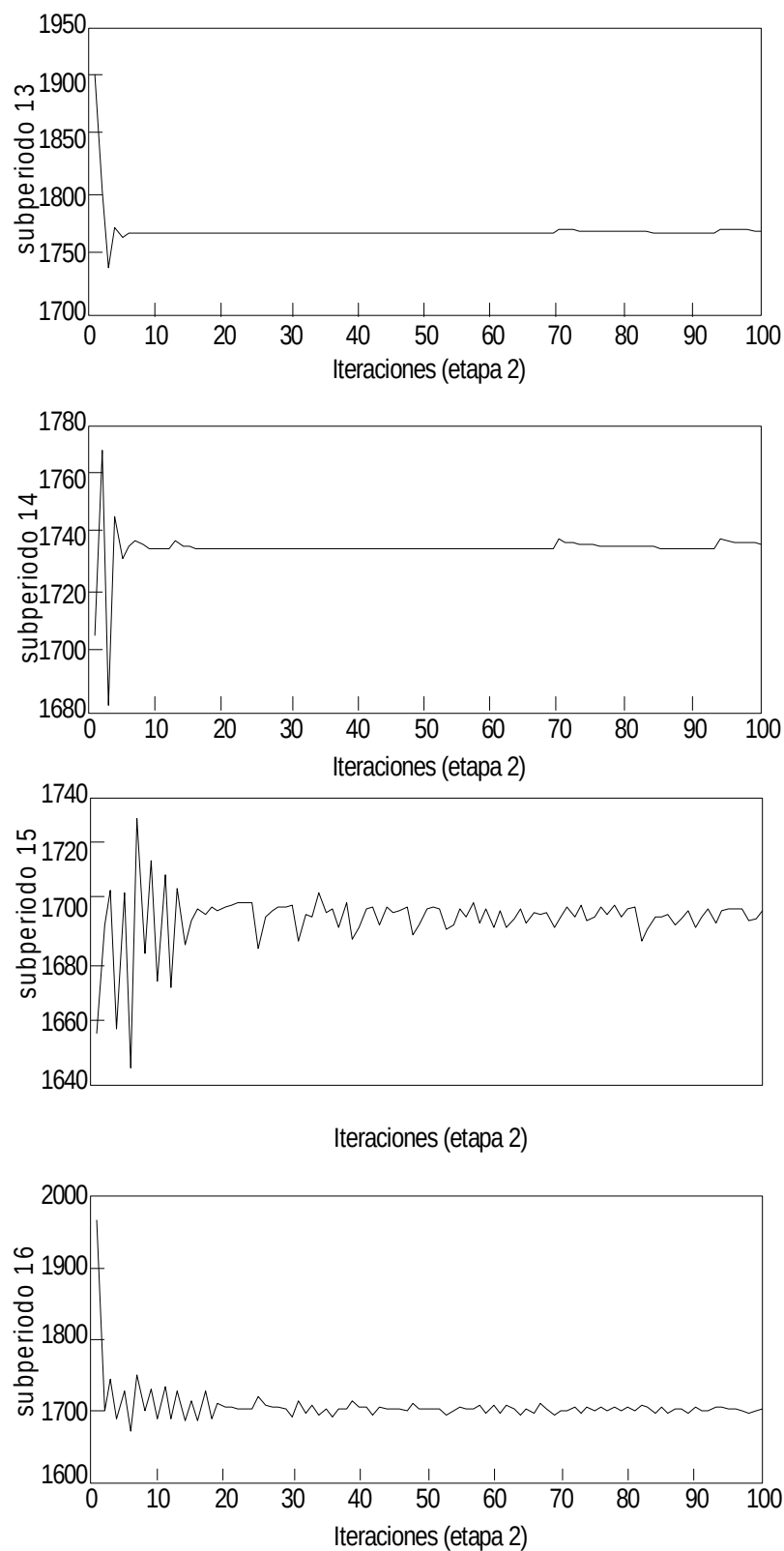


Figura 8.49: Evolución de los multiplicadores λ asociados a los subperiodos 13-16 durante la etapa 2 (caso HPS_CD24)

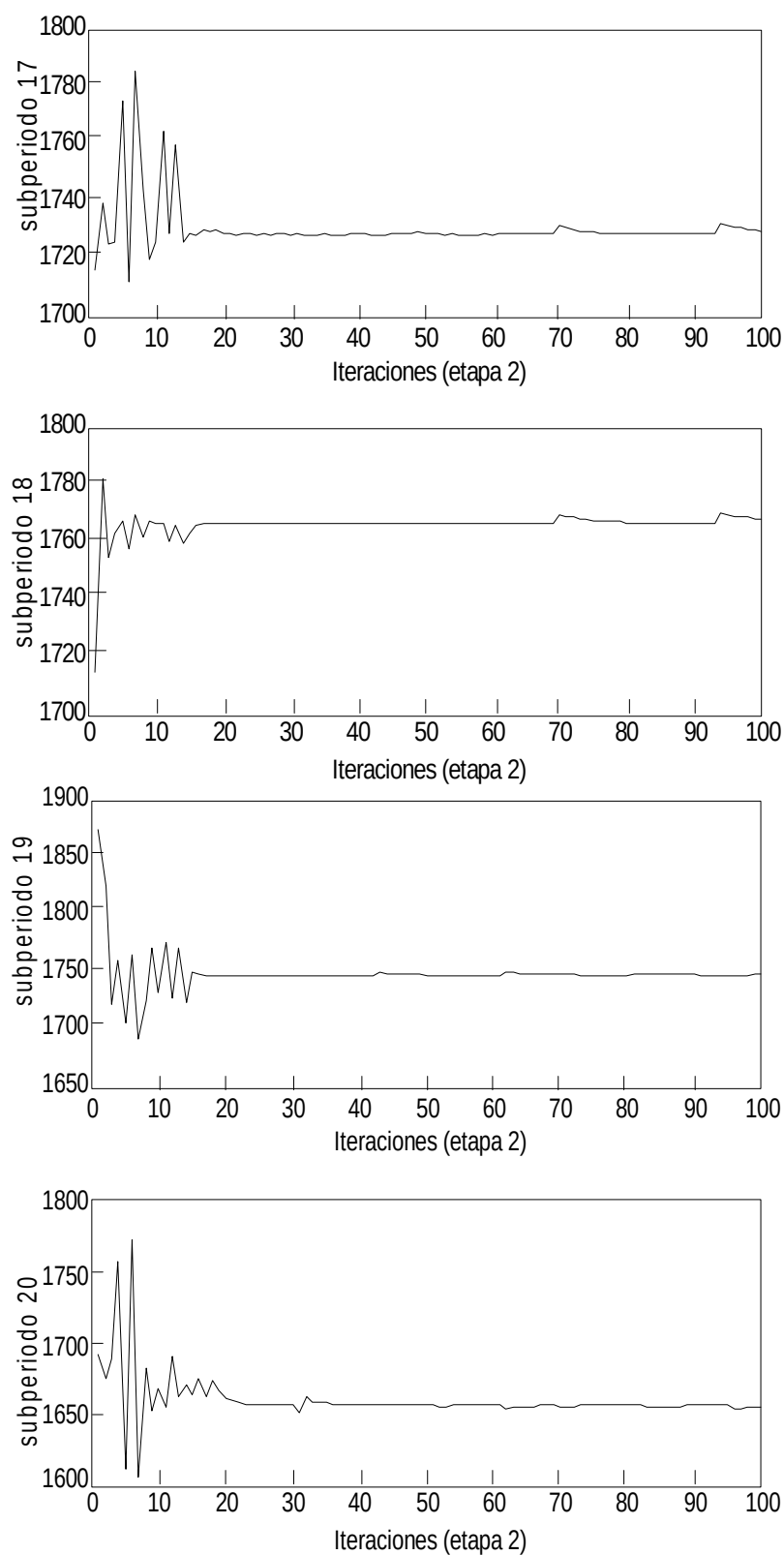


Figura 8.50: Evolución de los multiplicadores λ asociados a los subperiodos 17-20 durante la etapa 2 (caso HPS_CD24)

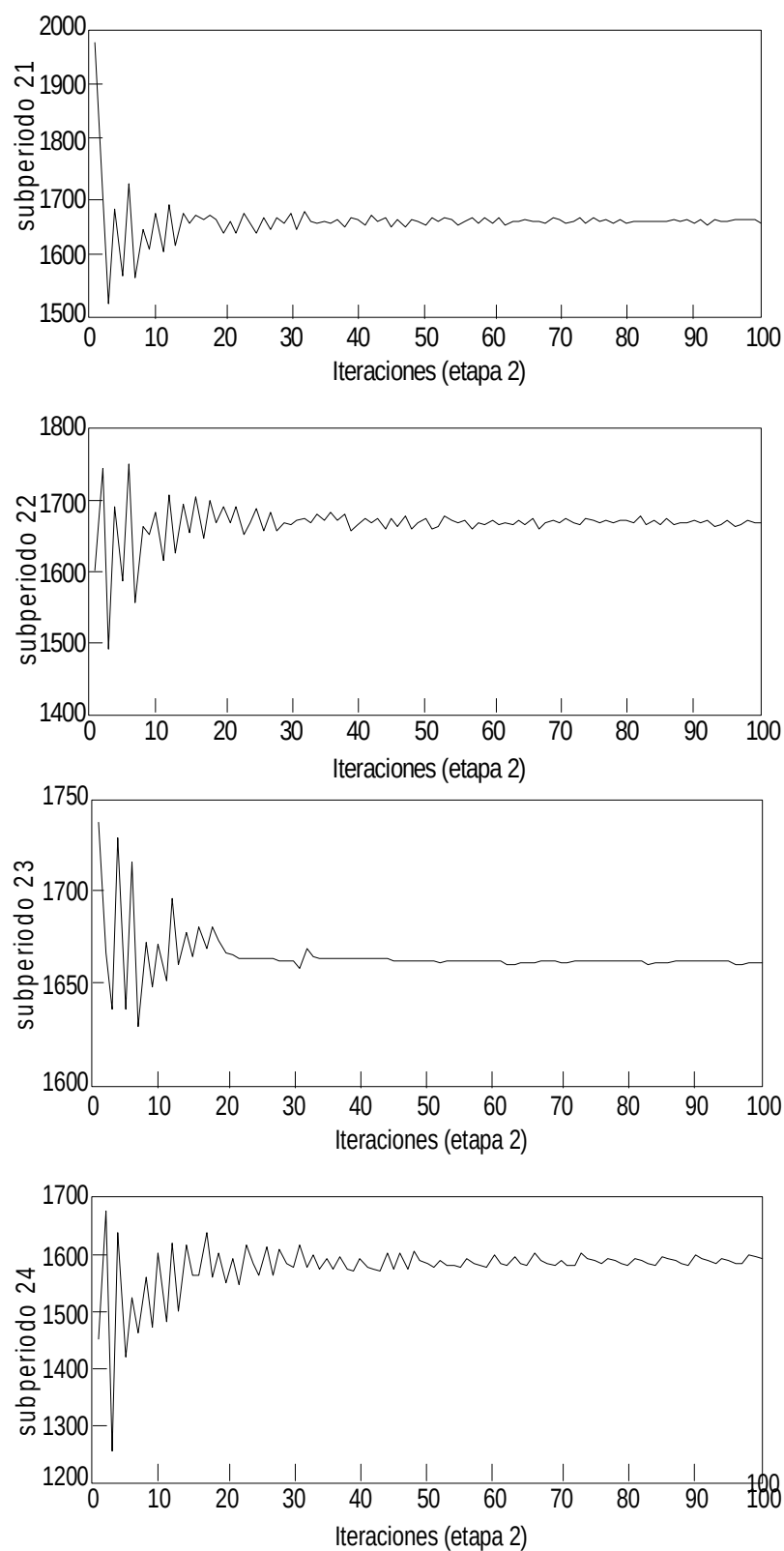
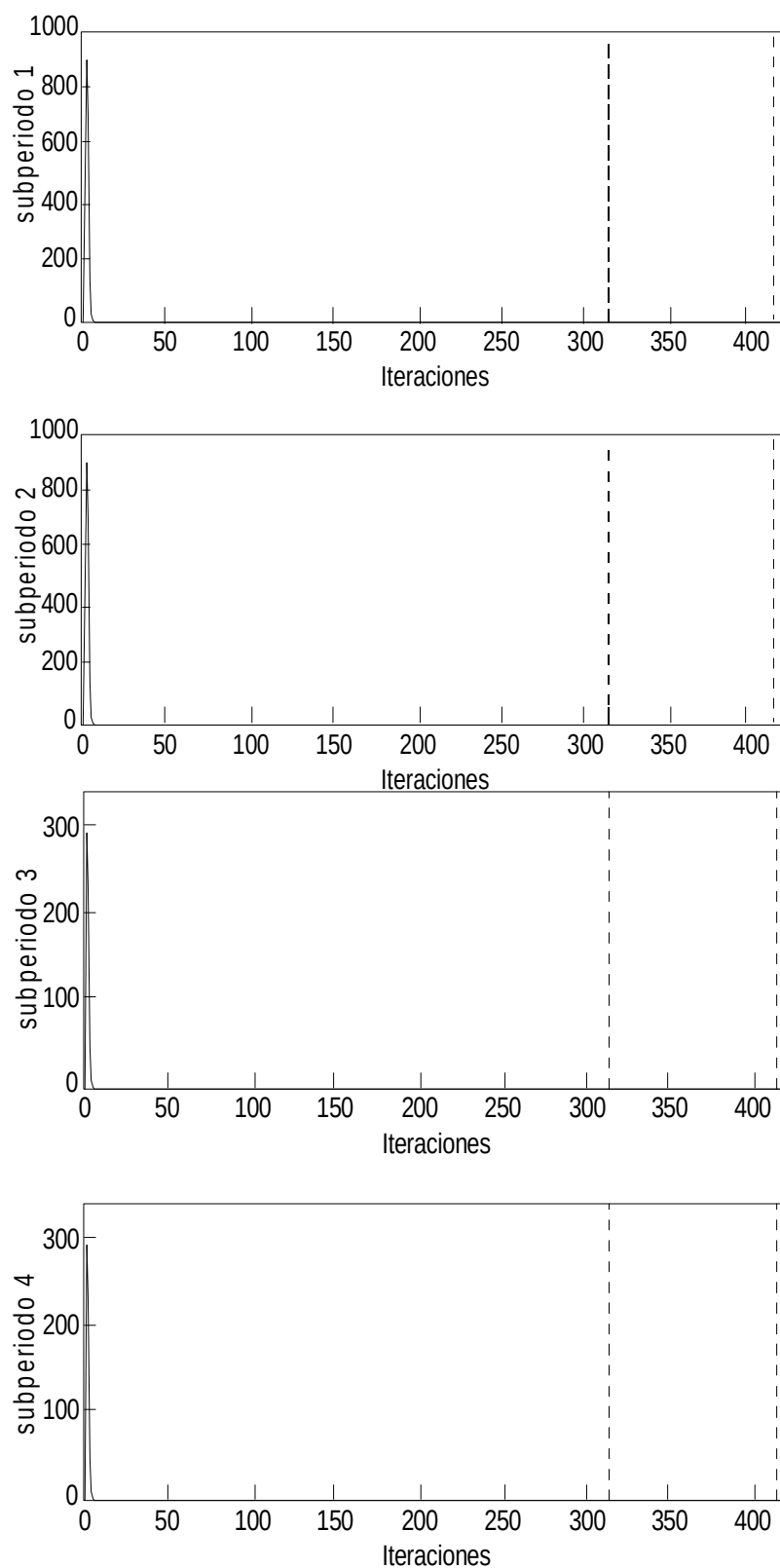


Figura 8.51: Evolución de los multiplicadores λ asociados a los subperiodos 21-24 durante la etapa 2 (caso HPS_CD24)

Figura 8.52: Evolución de los multiplicadores μ asociados a los subperiodos 1-4 (caso HPS_CD24)

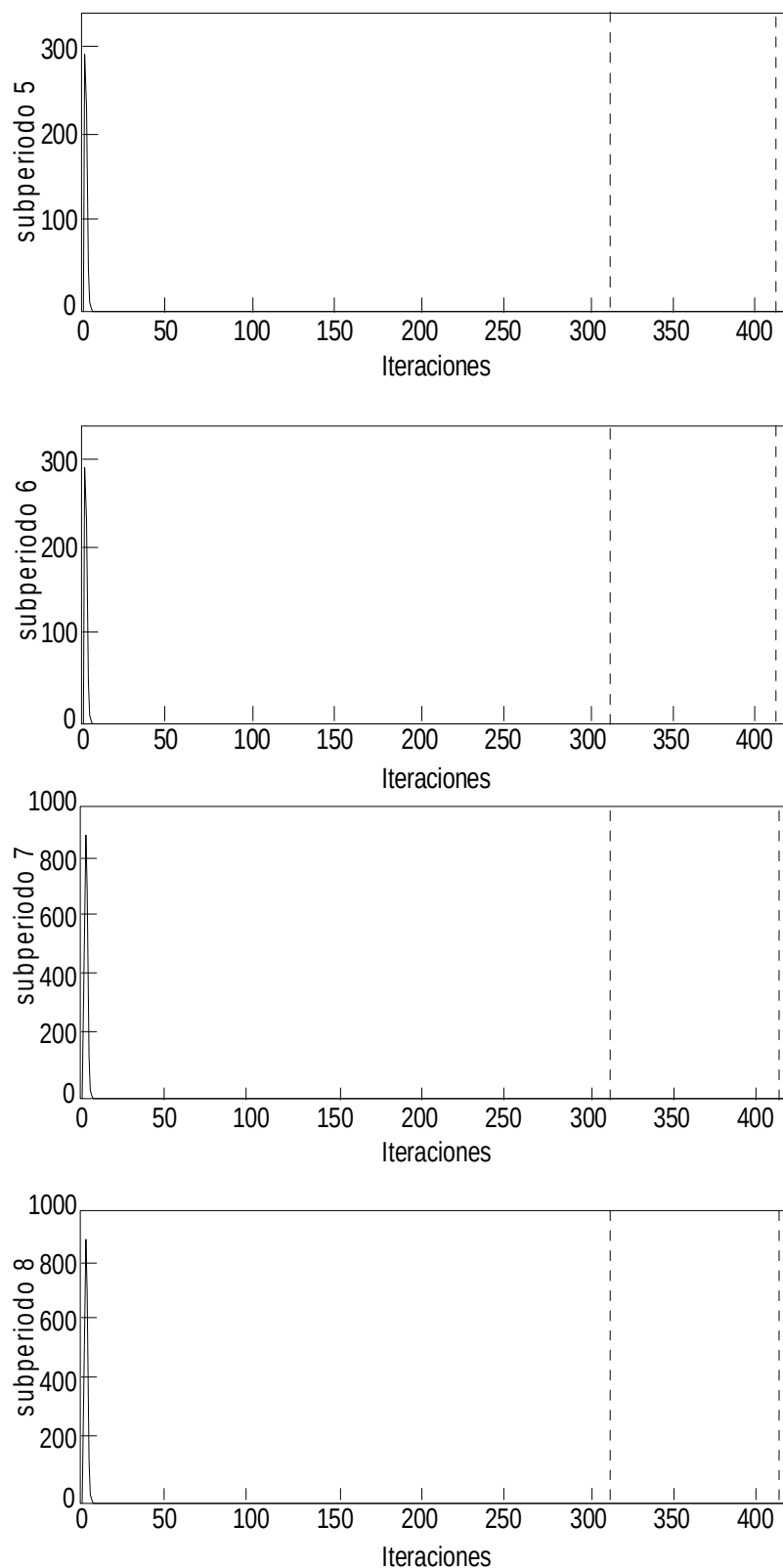


Figura 8.53: Evolución de los multiplicadores μ asociados a los subperiodos 5-8 (caso HPS_CD24)

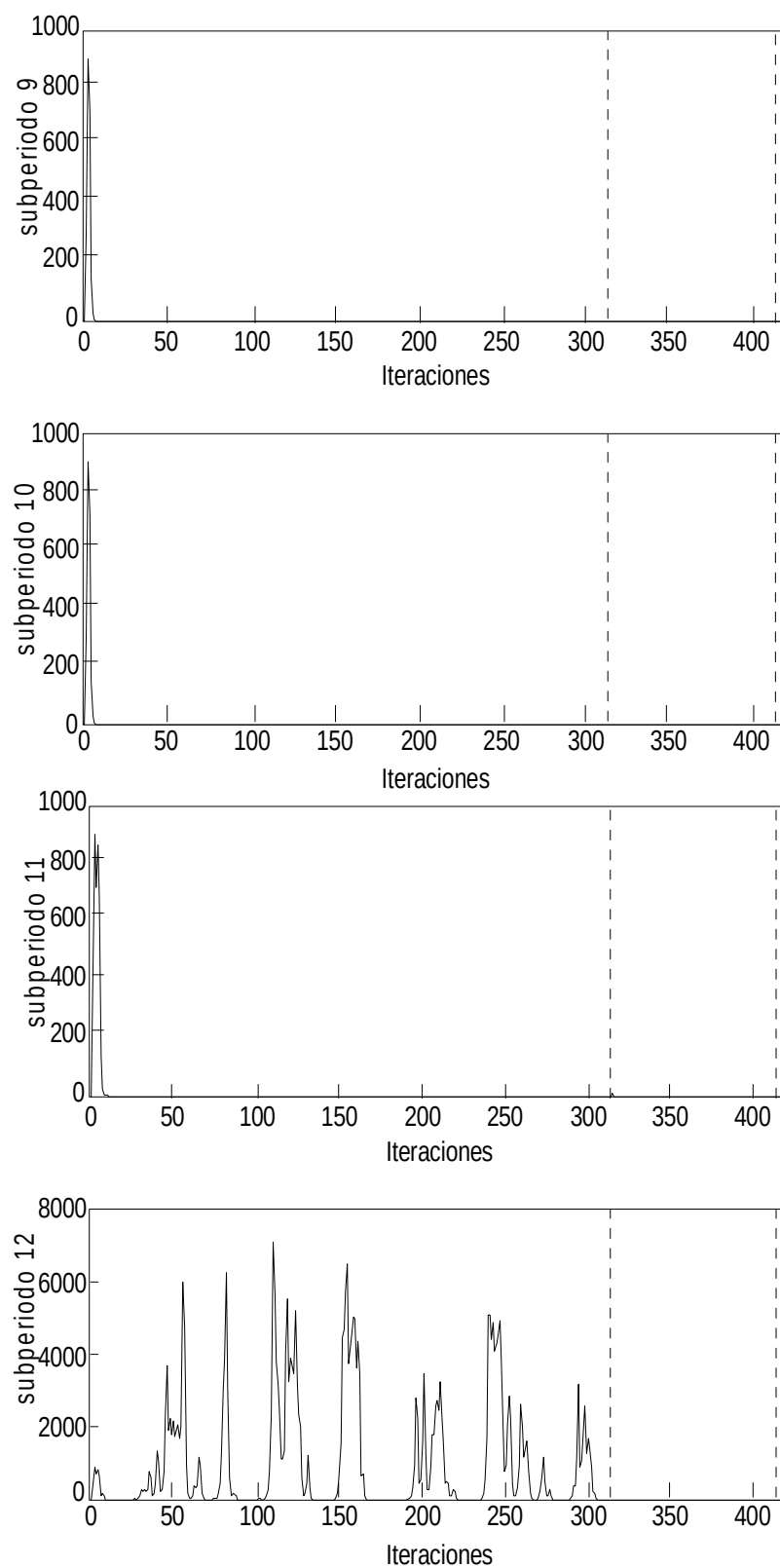


Figura 8.54: Evolución de los multiplicadores μ asociados a los subperiodos 9-12 (caso HPS_CD24)

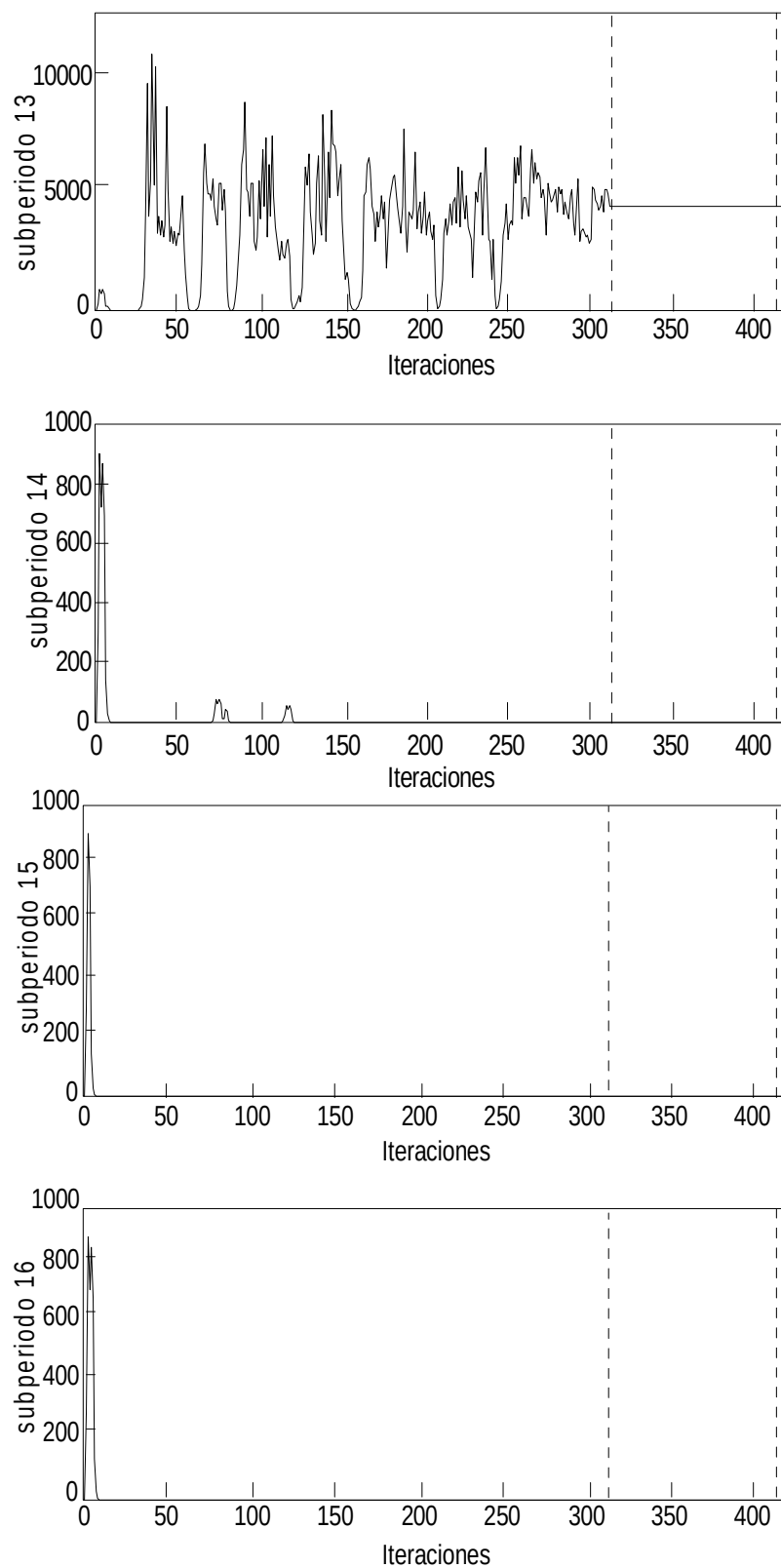


Figura 8.55: Evolución de los multiplicadores μ asociados a los subperiodos 13-16 (caso HPS_CD24)

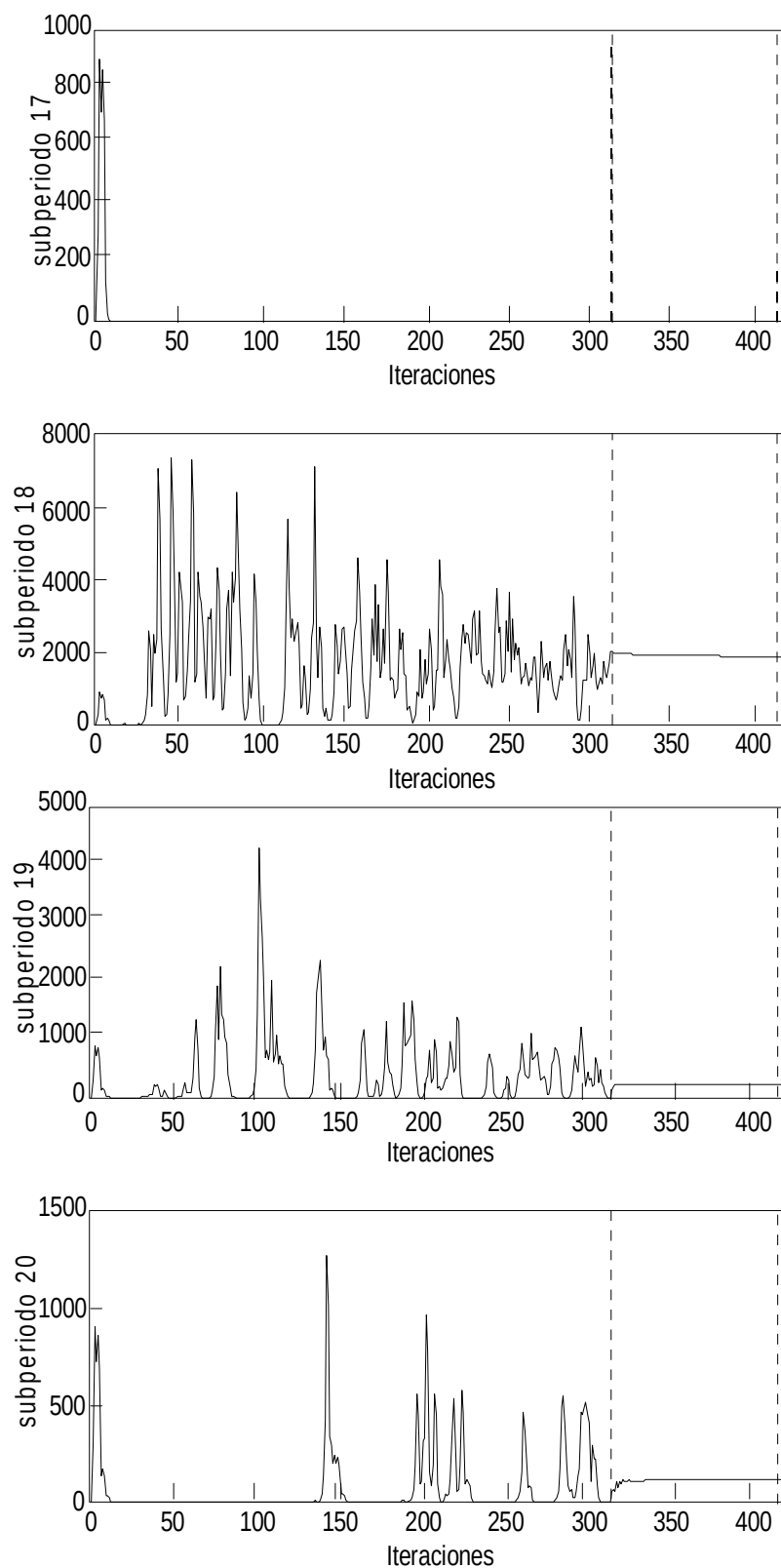


Figura 8.56: Evolución de los multiplicadores μ asociados a los subperiodos 17-20 (caso HPS_CD24)

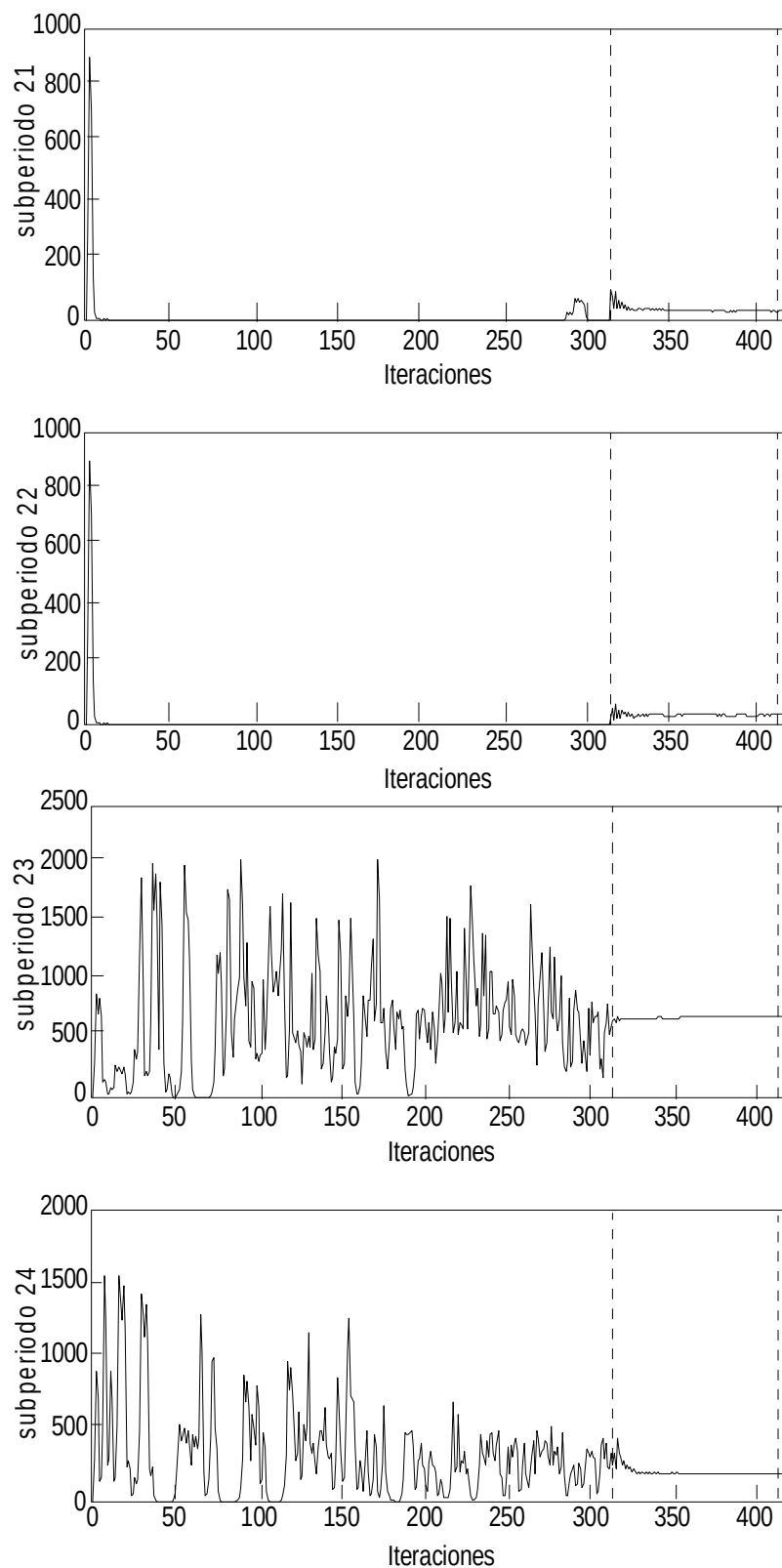


Figura 8.57: Evolución de los multiplicadores μ asociados a los subperiodos 20-24 (caso HPS_CD24)

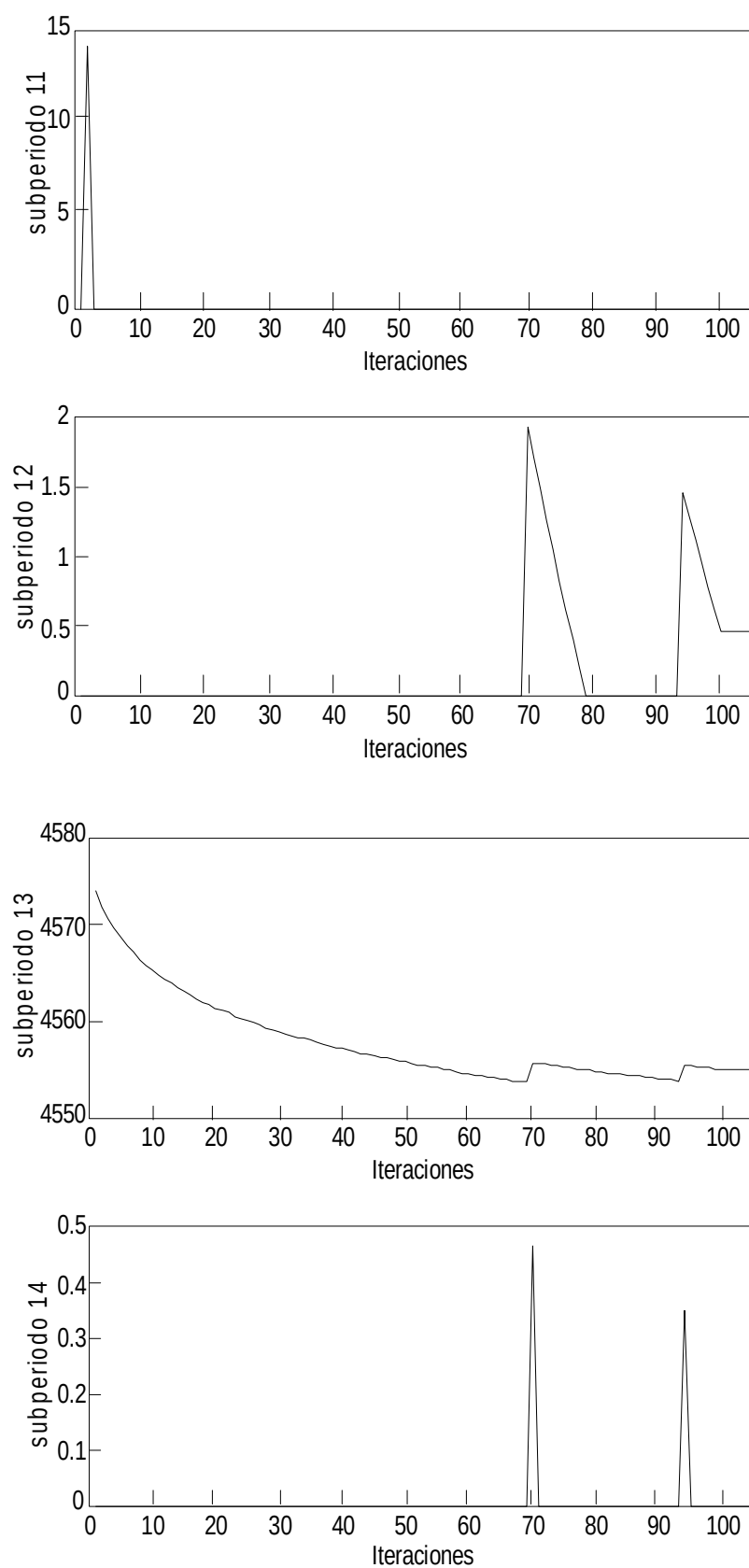


Figura 8.58: Evolución de los multiplicadores μ asociados a los subperiodos 11-14 (caso HPS_CD24) durante las etapas 2 y 3

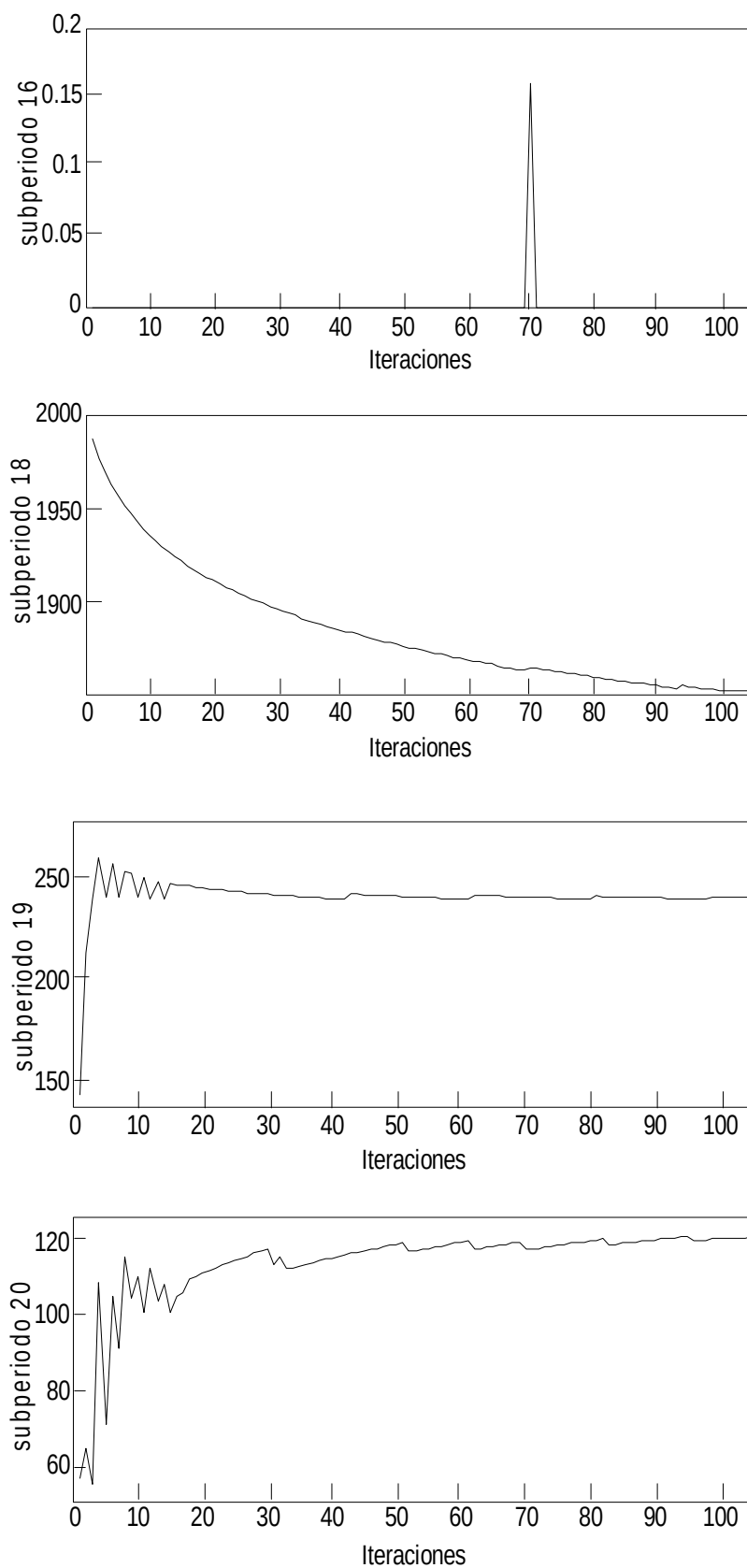


Figura 8.59: Evolución de los multiplicadores μ asociados a los subperiodos 16, 18-20 (caso HPS_CD24) durante las etapas 2 y 3

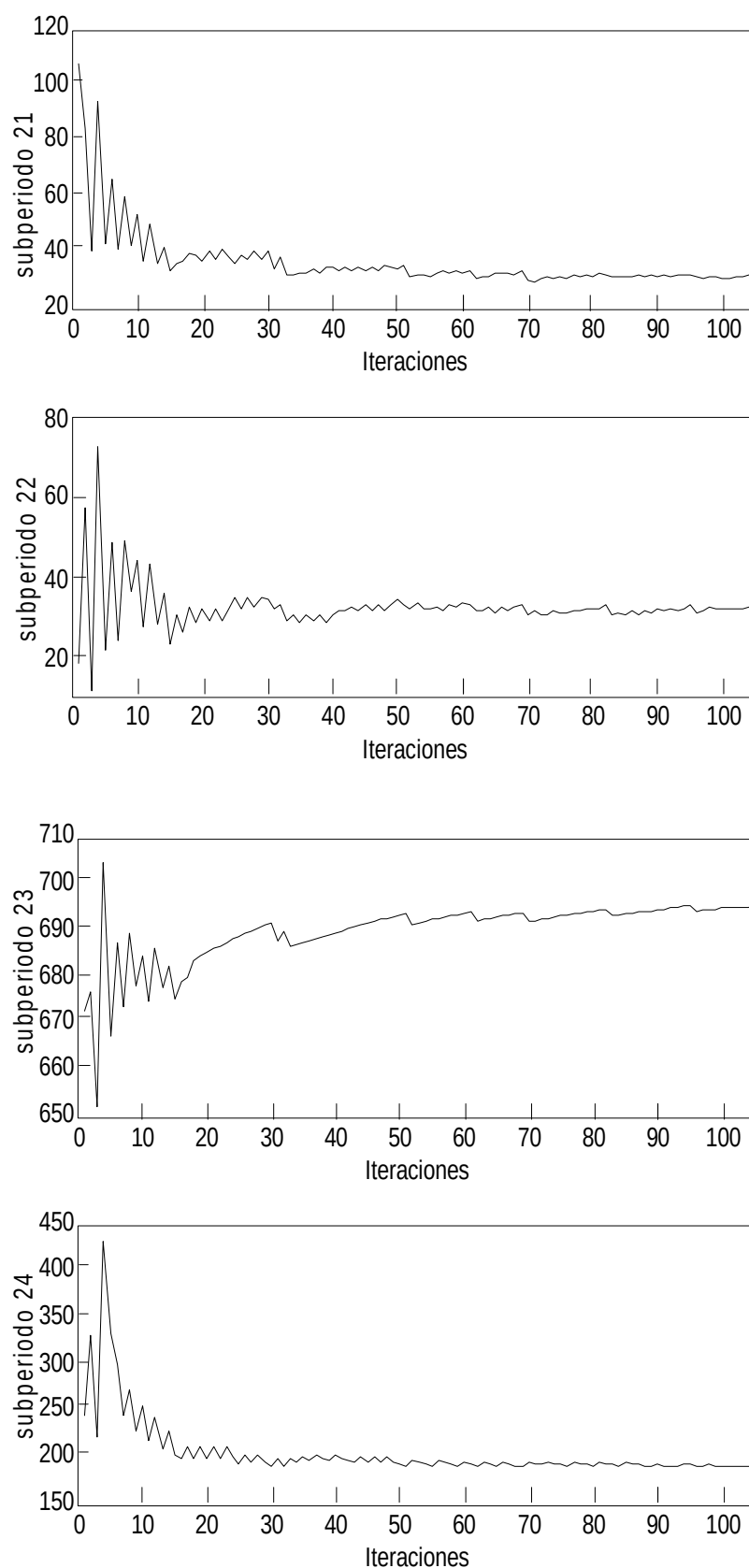


Figura 8.60: Evolución de los multiplicadores μ asociados a los subperiodos 21-24 (caso HPS_CD24) durante las etapas 2 y 3

Análisis de los resultados

Si comparamos los resultados de esta simulación (caso HPS_CD24) con los resultados obtenidos en la simulación CM24_HPSCD (apartado 8.2.1) puede observarse que la inclusión de la etapa de refinamiento de la solución del problema dual (*Etapa 2*) tiene los siguientes efectos en la resolución del problema:

- el máximo valor de la función dual encontrado aumenta en un 0.187 % (desde 402757828.63, simulación CM24_HPSCD, hasta 403513179.62, simulación HPS_CD24);
- la cota superior del agujero de dualidad disminuye, pasa de ser igual a 0.409 % en la simulación CM24_HPSCD a ser igual a 0.0214 % en la simulación HPS_CD24;
- el incremento del tiempo de cálculo es despreciable ya que el tiempo de cálculo de la fase de búsqueda de una solución factible en reserva rodante en la simulación CM24_HPSCD (*Fase 2*) es muy similar al tiempo de cálculo de la etapa de refinamiento de la solución del problema dual en la simulación HPS_CD24 (*Etapa 2*) y el tiempo de cálculo de la etapa de búsqueda de una solución factible en reserva rodante en la simulación HPS_CD24 (*Etapa 3*) es muy pequeño;
- el coste del problema primal disminuye en un 0.199 %

Recopilando, las ventajas que la inclusión de la *Etapa 2* produce son las siguientes:

- a) Se consigue la estabilización de los multiplicadores. De otro modo, se alcanza la convergencia en la resolución del problema dual no sólo en el valor de la función objetivo del problema dual sino también en las variables del mismo (multiplicadores de Lagrange).
- b) La curva que representa el valor de los multiplicadores λ en cada subperiodo del horizonte temporal analizado sigue de forma muy precisa la curva de la demanda horaria.
- c) Se consigue una solución al problema dual mejor y, potencialmente una solución al problema primal de menor coste y una cota superior al agujero de dualidad menor. En estas simulaciones (CM24_HPSCD y HPS_CD24) ha quedado probada la mejora del coste del problema primal y de la cota superior del agujero de dualidad.
- d) La producción hidráulica al final de la *Etapa 2* oscila menos que al final de la *Etapa 1*, se hace más estable y recorta las puntas de demanda. También la producción térmica se hace más estable como consecuencia de la estabilización de los vectores de multiplicadores.

Las ventajas indicadas en los puntos a) y b) anteriores permiten que el algoritmo que se propone en esta tesis pueda ser la herramienta que empleen el operador del mercado y/o el operador del sistema de un sistema de energía eléctrica liberalizado ya que los multiplicadores se generan según un procedimiento transparente, con el que se alcanza la convergencia tanto en el valor de la función objetivo como en el valor de las variables duales, que trata por igual a todos los participantes en el mercado.

8.3.2 Caso estudio 4: Resultados computacionales del algoritmo propuesto al resolver un problema de coordinación hidrotérmica de horizonte temporal 48 horas

En este apartado se presentan los resultados que se obtienen al aplicar el algoritmo de coordinación hidrotérmica en el corto plazo (capítulo 7) al sistema de energía eléctrica basado en el sistema de generación peninsular español objeto del análisis de este estudio. Dicho sistema consta de 70 centrales térmicas y 30 centrales hidráulicas en una sola cuenca.

El horizonte temporal es de 48 horas. La figura 8.2 representa la demanda horaria, correspondiente a los días 19 y 20 de agosto de 1998. La reserva rodante es el 10 % de la demanda en cada subperiodo del horizonte temporal analizado.

La demanda alcanza su valor máximo, 20241 MW, en el subperiodo 13. Las demandas en los subperiodos anterior y posterior a éste son: 20021 MW, en el subperiodo 12, y 19931 MW, en el subperiodo 14. En el subperiodo 37 se produce otra punta en la curva de demanda con 20221 MW. Las demandas en los subperiodos anterior y posterior son de: 19760 MW, en el subperiodo 36, y 20057 MW, en el subperiodo 38.

La demanda alcanza su valor mínimo en el subperiodo 29 con una carga de 13384 MW. Las demandas en los subperiodos anterior y posterior son de: 13569 MW, en el subperiodo 28, y 13388 MW, en el subperiodo 30. En el subperiodo 5 se produce otro valle en la curva de demanda con una carga de 13394 MW. Las demandas en los subperiodos anterior y posterior son de: 13723 MW, en el subperiodo 4, y 13422 MW, en el subperiodo 6.

A la simulación que se analiza en este apartado se le denomina HPS_CD48. Los parámetros empleados en ella son los siguientes:

- Parámetros de la *Etapa 1*, empleados en la variación dinámica de la región de factibilidad:
 $a = 2.0$, $b = 0.2$, $c = 0.2$ y $d = 0.8$.
- Parámetros empleados en la *Etapa 2*
 - Relacionados con el tamaño del paso de la actualización tipo subgradiente: $m = 0.002$

y $n = 0.0008$.

– Relacionados con el criterio de convergencia: $\sigma = 0.5$ y número mínimo de iteraciones igual a 250.

- Parámetros de la *Etapa 3*: constante empleada en la actualización de los multiplicadores asociados a los subperiodos de infactibilidad en reserva rodante igual a 0.01.

Los resultados de carácter más general son los siguientes:

- Resultados de la *Etapa 1*
 - Número de iteraciones: 1473
 - Valor de la función dual ϕ : 832110975.07 Pta
 - Valor de la función dual linealizada z : 833653288.82 Pta
 - Índice de calidad: 0.185 %
 - Tiempo de cálculo: 1682.115 s
- Resultados de la *Etapa 2*
 - Número de iteraciones: 505 (iteraciones 1474-1978)
 - Valor de la función dual ϕ : 832788521.65 Pta
 - Tiempo de cálculo: 158.84 s
- Resultados de la *Etapa 3*
 - Número de iteraciones: 749 (iteraciones 1979-2727)
 - Valor de la función dual ϕ : 815027750.96 Pta
 - Tiempo de cálculo: 133.98 s
- Resultados de la *Etapa 4*
 - Coste del problema primal (f): 855977677.66 Pta
 - Tiempo de cálculo: 82.22 s
- Resultados globales
 - Cota superior del agujero de dualidad 2.78 %
 - Tiempo de cálculo: 2057.15 s

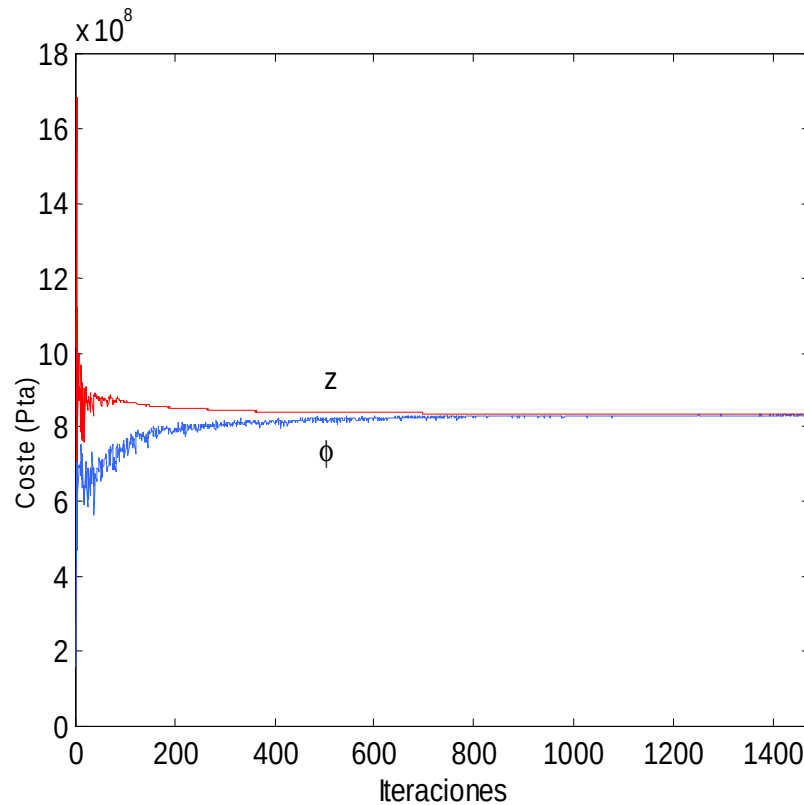


Figura 8.61: Evolución de la función dual y de la función dual linealizada (caso HPS_CD48) durante la etapa 1

Los resultados de la *Etapa 1* coinciden con los resultados de la *Fase 1* de la simulación analizada en el caso de estudio 2 (apartado 8.2.2) que emplea el mismo método de actualización de multiplicadores (caso CM48_HPSCD) ya que los datos y los parámetros empleados han sido los mismos.

La figura 8.61 muestra la evolución del valor de la función dual ϕ y de la variable z (o valor de la función objetivo del problema dual linealizado a tramos o problema dual relajado) durante la *Etapa 1*.

La figura 8.62 presenta la evolución del valor de la función dual a lo largo de las etapas 1, 2 y 3. Las líneas discontinuas indican la separación entre etapas. El valor de la función dual aumenta durante la *Etapa 2* o etapa de refinamiento de la solución del problema dual y disminuye en la *Etapa 3* o etapa de búsqueda de una solución factible en reserva rodante. El descenso del valor de la función dual durante la etapa de búsqueda de factibilidad es el comportamiento más habitual en la resolución de problemas de coordinación hidrotérmica en el corto plazo mediante técnicas de relajación lagrangiana. El aumento del valor de la función dual en la *Etapa 2* es consecuencia del refinamiento en la consecución de la solución al problema dual que se lleva a cabo en esta etapa.

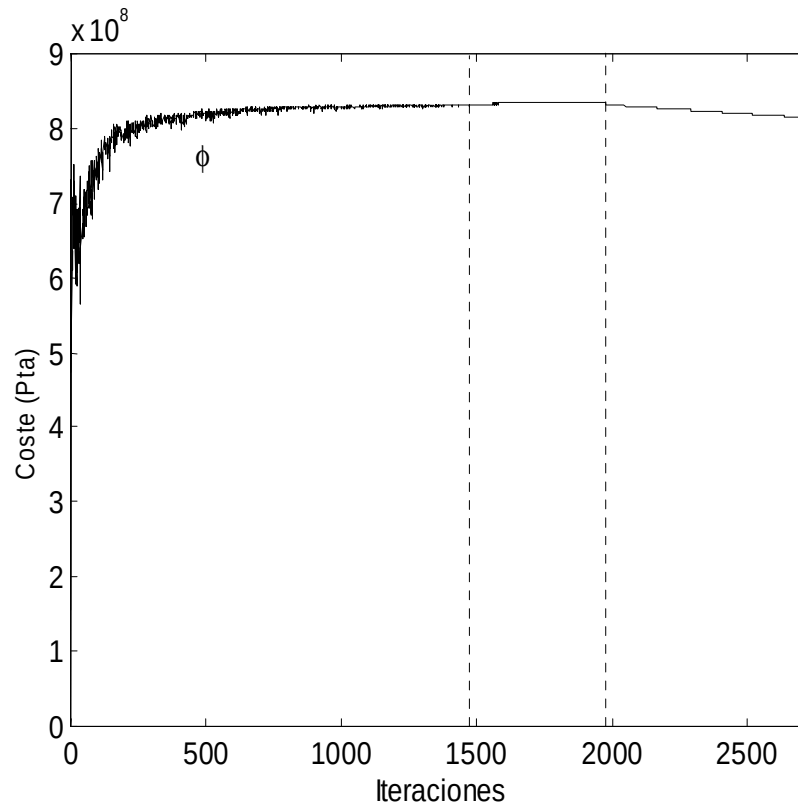


Figura 8.62: Evolución de la función dual durante las etapas 1, 2 y 3 (caso HPS_CD48)

A continuación se presentan gráficamente algunos de los resultados que se obtienen tras la ejecución de cada una de las etapas del algoritmo. La presentación de estos resultados es análoga a la desarrollada en el apartado 8.3.2. Después se incluyen las gráficas que muestran la evolución de algunos de los multiplicadores a lo largo de las etapas 1, 2 y 3. Por último, se analizan los resultados obtenidos.

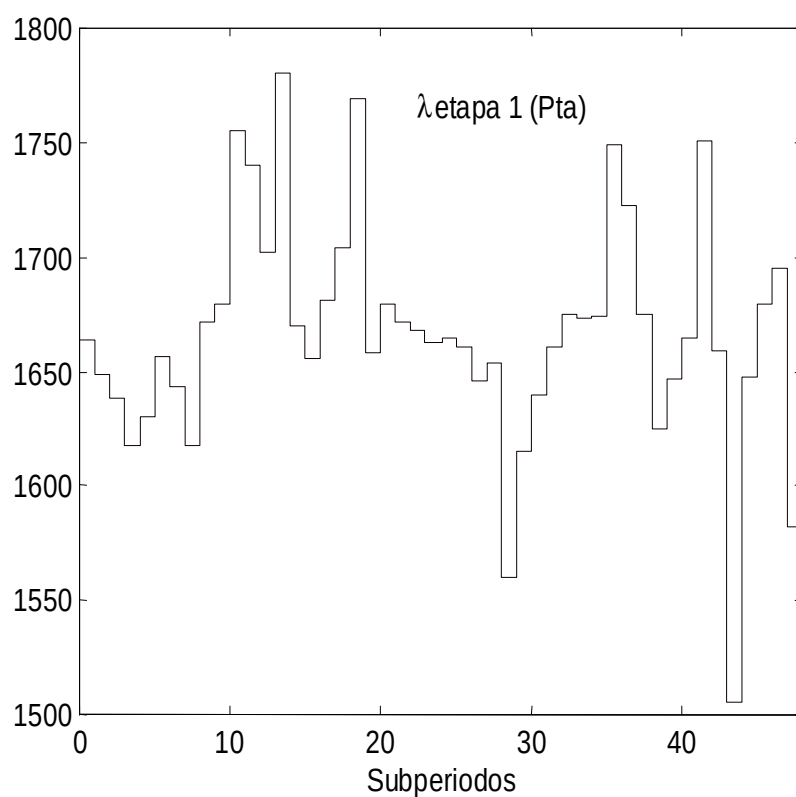
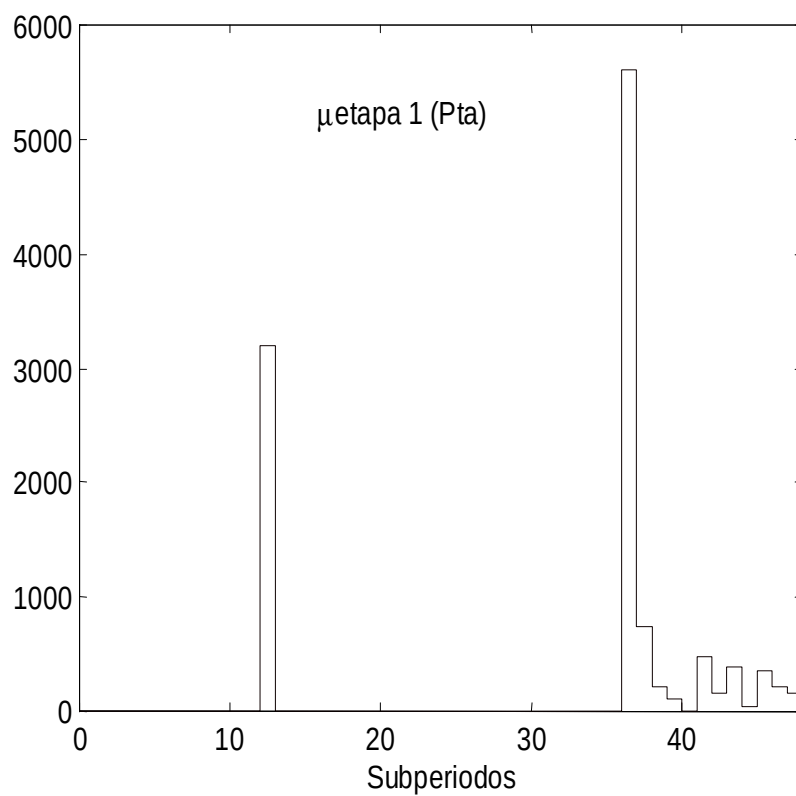
Etapas 1

En primer lugar se presentan los valores de los multiplicadores λ y μ al final de esta etapa.

La figura 8.63 muestra el valor del vector de multiplicadores λ al final de esta etapa. El valor mínimo se corresponde con el subperiodo 44 y es igual a 1505.70 Pta/MWh. El valor máximo ocurre en el subperiodo 14 y vale 1780.94 Pta/MWh.

La figura 8.64 refleja el valor del vector de multiplicadores μ al final de la *Etapas 1*. El valor máximo al final de la primera etapa, ocurre en el subperiodo 37 y es igual a 5620.36 Pta/MW-h. De nuevo y como es habitual en el problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo, en la mayoría de los subperiodos el multiplicador μ adquiere el valor nulo.

La figura 8.65 incluye la curva horaria de demanda y la curva que representa el valor de los

Figura 8.63: Multiplicadores λ al final de la etapa 1 (caso HPS_CD48)Figura 8.64: Multiplicadores μ al final de la etapa 1 (caso HPS_CD48)

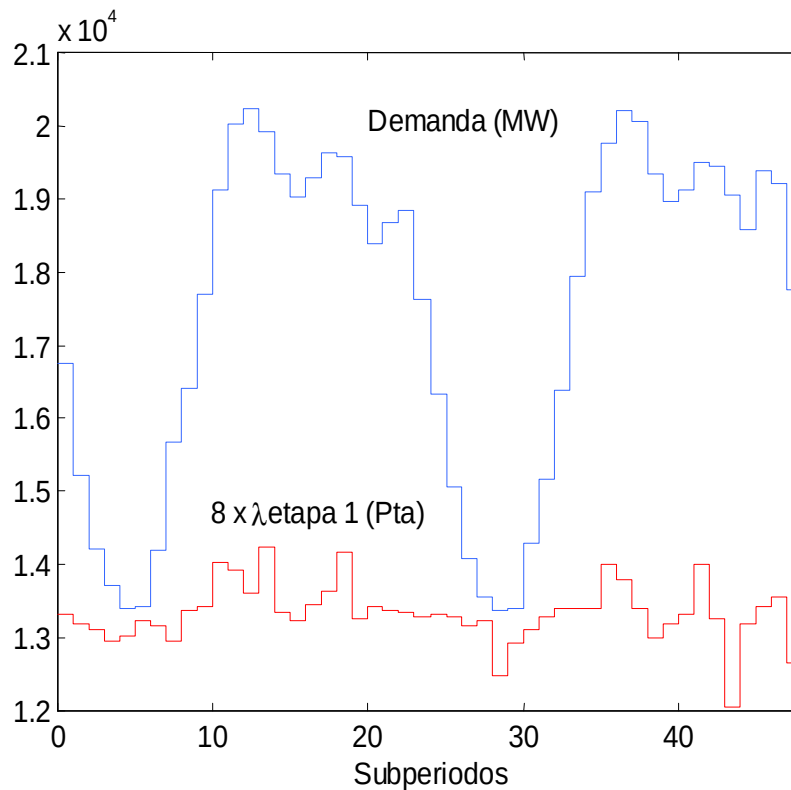


Figura 8.65: Demanda y multiplicadores λ (multiplicados por 8) al final de la etapa 1 (caso HPS_CD48)

multiplicadores λ en cada subperiodo del horizonte temporal analizado al final de esta etapa. Se ha multiplicado el vector de multiplicadores λ por 8 para poder comparar la forma de ambas gráficas. La curva de multiplicadores λ sigue a la tendencia general de la curva horaria de demanda. Sin embargo, como se observará más adelante, tras la ejecución de la *Etapa 2* la analogía entre estas curvas se hace mucho más evidente.

La figura 8.66 muestra la producción total térmica, el valor del vector de multiplicadores λ y el valor del vector de multiplicadores μ al final de la *Etapa 1*. La figura 8.67 incluye la producción total hidráulica, el valor del vector de multiplicadores λ y el valor del vector de multiplicadores μ al final de esta etapa. Tanto la producción térmica como la producción hidráulica siguen las señales económicas que representan los vectores de multiplicadores.

La figura 8.68 incluye las curvas de demanda, producción total térmica y producción total hidráulica.

Para finalizar la presentación de resultados relativos a la *Etapa 1* se presentan las figuras 8.69 y 8.70. En la figura 8.69, la gráfica superior representa la potencia mínima que debe acoplarse en cada subperiodo del horizonte temporal analizado (la suma de la demanda y la reserva rodante), mientras que la gráfica inferior muestra el exceso de potencia acoplada en cada subperiodo del

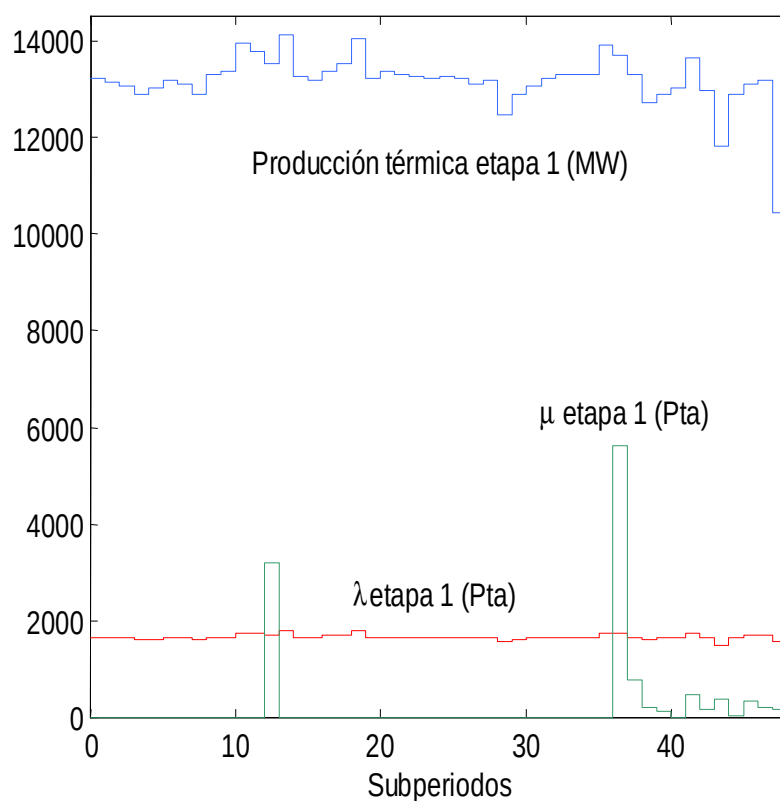


Figura 8.66: Producción térmica, λ y μ al final de la etapa 1 (caso HPS_CD48)

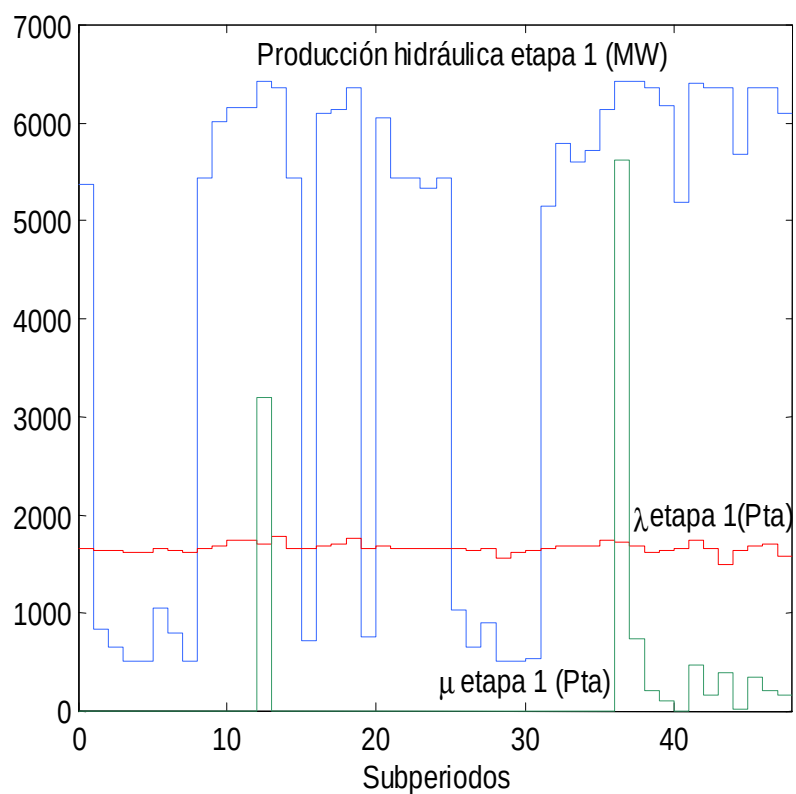


Figura 8.67: Producción hidráulica, λ y μ al final de la etapa 1 (caso HPS_CD48)

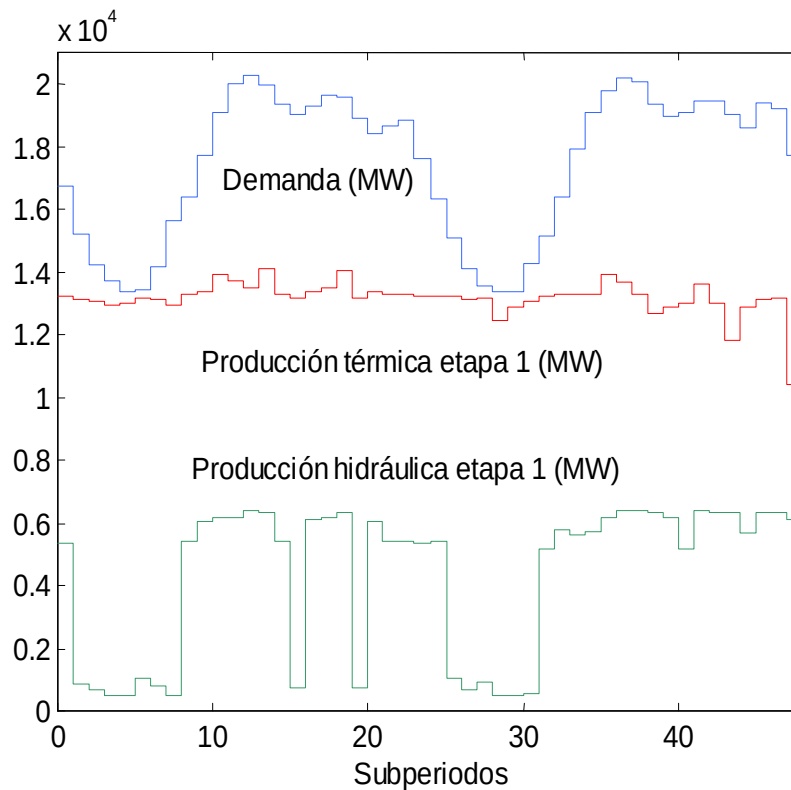


Figura 8.68: Demanda, producción térmica y producción hidráulica al final de la etapa 1 (caso HPS_CD48)

horizonte temporal analizado.

La figura 8.70 incluye la curva de demanda (gráfica superior) y el exceso de producción (gráfica inferior) en cada subperiodo del horizonte temporal analizado. Como es de esperar, la solución del problema dual no es factible para el problema primal.

Etapa 2

Para el análisis de la *Etapa 2* se presentan los mismos resultados incluidos en la *Etapa 1*

La figuras 8.71 y 8.72 muestran, respectivamente, los vectores de multiplicadores λ y μ al final de la *Etapa 2*. Puede comprobarse que las escalas verticales se han reducido o, dicho de otro modo, que para ambos vectores los rangos de variación han disminuido.

El valor mínimo del multiplicador λ ha aumentado respecto al valor mínimo de este multiplicador en la etapa anterior, mientras que el valor máximo ha disminuido respecto al valor de la etapa anterior. El valor máximo del multiplicador λ al final de la *Etapa 2* es igual a 1743.47 Pta/MWh y ocurre en el subperiodo 13, que es el subperiodo de máxima demanda. En el subperiodo 37, en el que se produce otra punta de demanda, el valor del multiplicador λ es igual 1739.15 Pta/MWh,

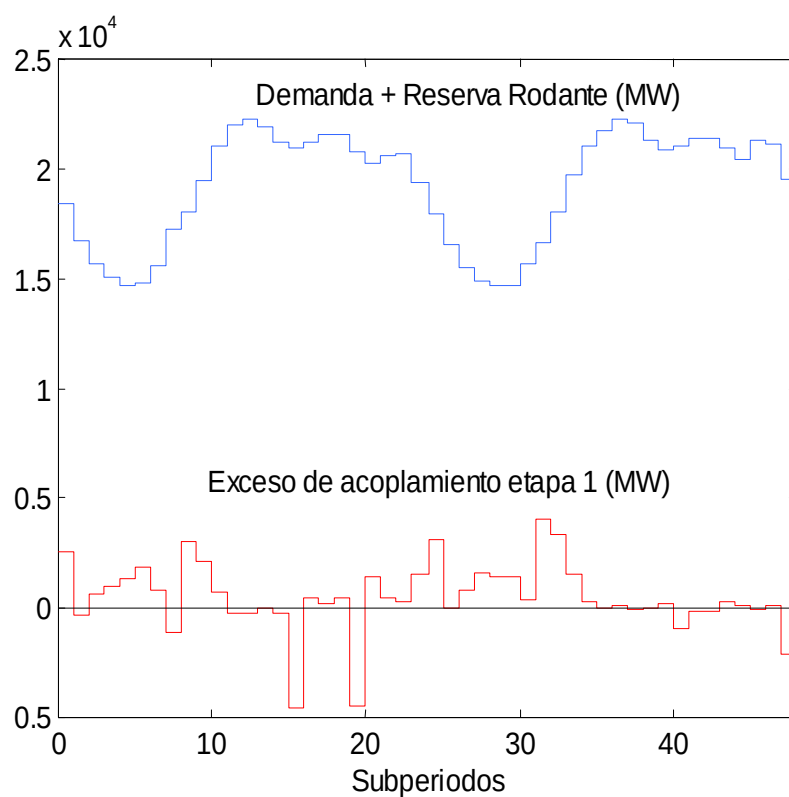


Figura 8.69: Demanda y exceso de potencia acoplada al final de la etapa 1 (caso HPS_CD48)

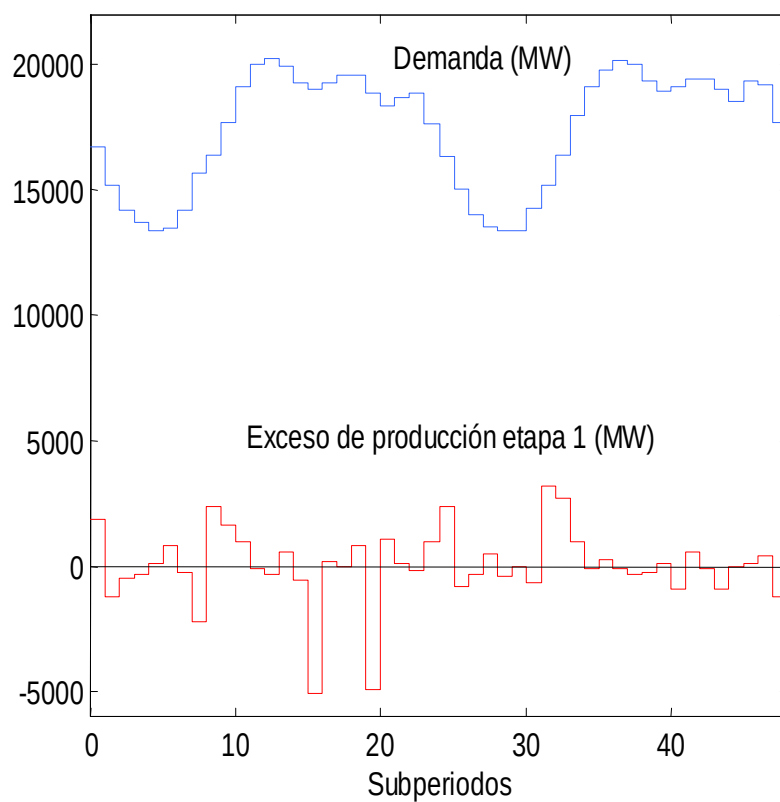


Figura 8.70: Demanda y exceso de potencia producida al final de la etapa 1 (caso HPS_CD48)

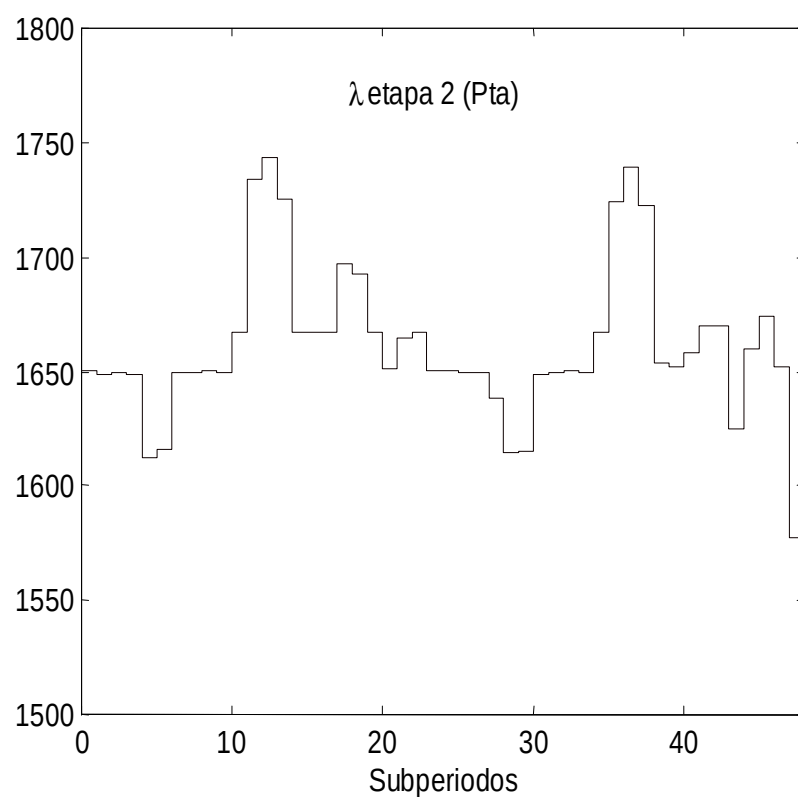


Figura 8.71: Multiplicadores λ al final de la etapa 2 (caso HPS_CD48)

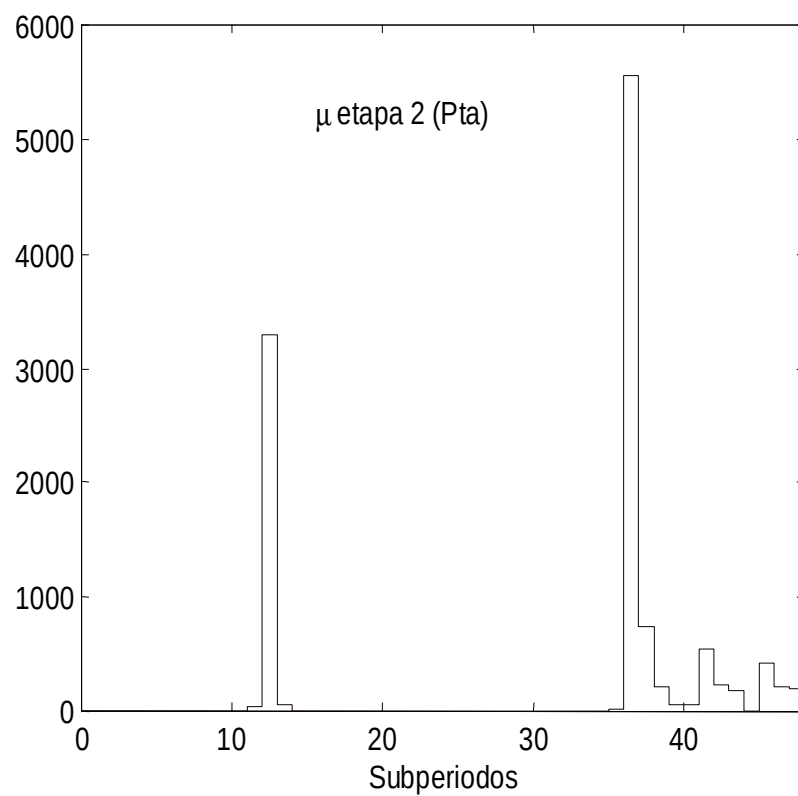


Figura 8.72: Multiplicadores μ al final de la etapa 2 (caso HPS_CD48)

este es el siguiente valor mayor de la curva horaria de los multiplicadores λ .

El valor mínimo del multiplicador λ se corresponde con el subperiodo 48 y es igual a 1577.56 Pta/MWh. Es importante destacar que aunque el subperiodo 48 no representa ninguno de los dos valles de la curva de demanda, en este subperiodo se produce una disminución importante de la demanda y dado que el multiplicador λ en el subperiodo 47 adquiere un valor próximo al valor medio, hace falta una disminución apreciable en la remuneración a la producción (que es el significado económico de los multiplicadores λ) en el subperiodo 48 para que disminuya (la producción) en este subperiodo. No obstante, los dos siguientes valores menores del vector de multiplicadores λ ocurren en los dos valles de demanda. En el subperiodo 5, el multiplicador λ adquiere el valor de 1612.60 Pta/MWh, mientras que en el subperiodo 29 el multiplicador λ vale 1614.46 Pta/MWh.

Por otra parte el vector de multiplicadores μ adquiere sus valores máximos en las dos puntas de demanda. En el subperiodo 13, μ es igual a 3294.60 Pta/MW-h y en el subperiodo 37 adquiere el valor de 5554.81 Pta/MW-h. De nuevo, el valor mínimo del vector de multiplicadores μ es igual a cero y ocurre en muchos subperiodos del horizonte temporal analizado.

Si comparamos estos resultados con los que se obtienen al final de la etapa anterior puede comprobarse que no sólo se han acercado los multiplicadores máximo y mínimo sino que además los valores mayores y menores de los multiplicadores λ y μ están ligados a las puntas y los valles de la curva de demanda horaria. Todo esto es consecuencia de la estabilización de los multiplicadores de esta segunda etapa.

En la figura 8.73 puede observarse la curva horaria de demanda junto con el valor del vector de multiplicadores λ (multiplicado por 8) al final de la *Etapa 2*. Puede observarse que la curva del vector de multiplicadores λ sigue la forma de la curva de demanda. Si se compara esta figura con la figura 8.65 puede comprobarse que la analogía entre las curvas de demanda y de λ se hace mucho más patente tras la ejecución de la *Etapa 2*. De nuevo, esto es consecuencia de la estabilización de multiplicadores conseguida en esta etapa.

Las figura 8.74 y 8.75 incluyen, respectivamente, la producción total térmica y la producción total hidráulica junto con los vectores de multiplicadores λ y μ al final de la *Etapa 2*. Tanto las centrales térmicas como las centrales hidráulicas definen su producción atendiendo, entre otros factores (restricciones técnicas y costes), a las señales económicas que representan los multiplicadores.

La figura 8.76 incluye la demanda, la producción térmica y la producción hidráulica en cada subperiodo del horizonte temporal analizado. Si se compara esta figura con la figura 8.68 puede observarse, tras la ejecución de la *Etapa 2*, la producción hidráulica se hace más estable de forma

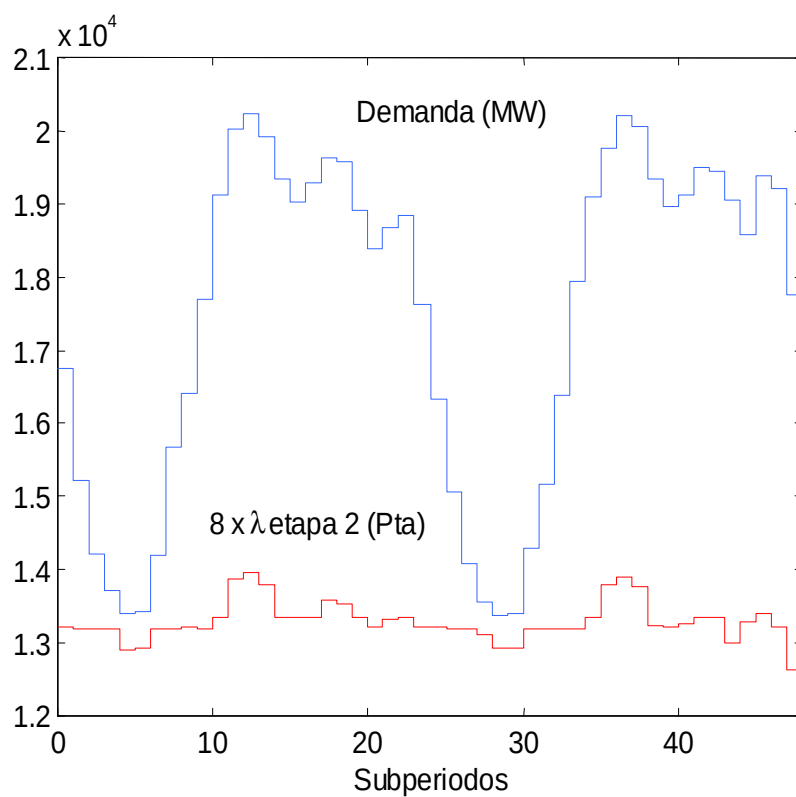


Figura 8.73: Demanda y multiplicadores λ (multiplicados por 8) al final de la etapa 2 (caso HPS_CD48)

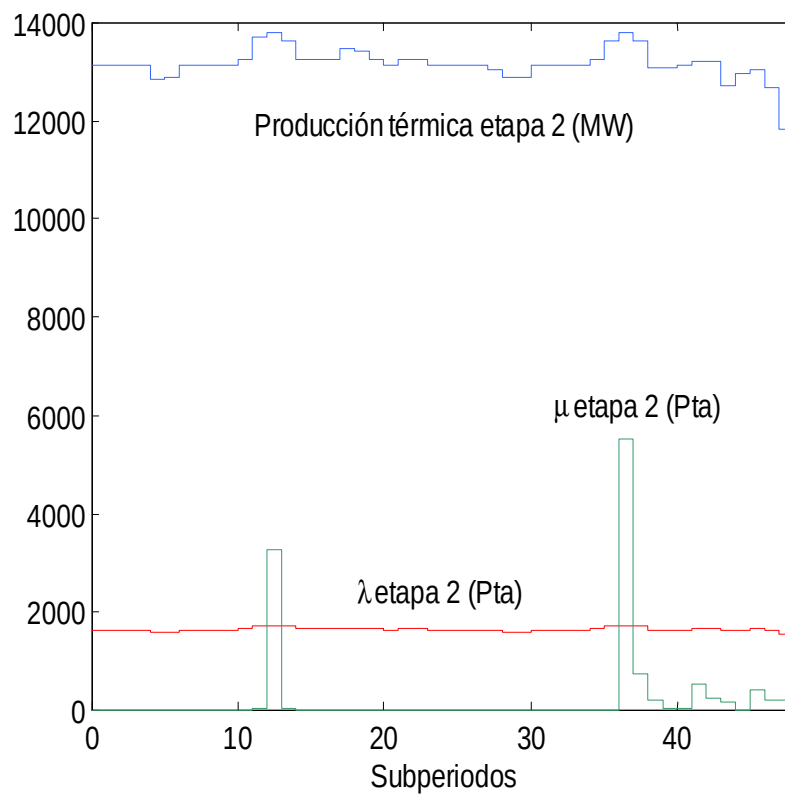


Figura 8.74: Producción térmica, λ y μ al final de la etapa 2 (caso HPS_CD48)

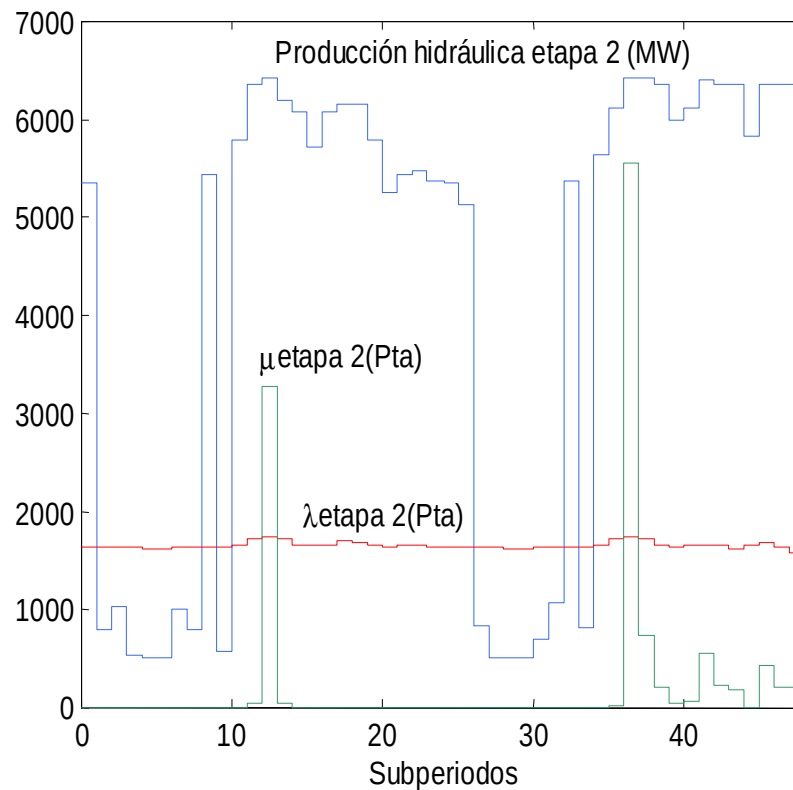


Figura 8.75: Producción hidráulica, λ y μ al final de la etapa 2 (caso HPS_CD48)

que se mantiene bastante constante y en torno al máximo en los periodos de demanda alta y al mínimo en los valles de demanda. Es decir que, como es de esperar, la energía hidráulica se ocupa de recortar las puntas de la curva de demanda y, en consecuencia, la curva horaria de producción térmica es bastante estable. La estabilización de las curvas de producción térmica e hidráulica es otra de las consecuencias de la inclusión de la etapa de refinamiento de la solución del problema dual o etapa de estabilización de los multiplicadores.

La figura 8.77 incluye la curva potencia mínima que se debe acoplar junto con la curva de exceso de potencia acoplada en cada subperiodo del horizonte temporal analizado. La figura 8.78 muestra las curvas de demanda y de exceso de producción en cada subperiodo del horizonte temporal analizado.

Etapas 3

La figura 8.79 muestra el valor del vector de multiplicadores μ al final de la *Etapas 3*. Los valores máximos de este vector de multiplicadores siguen estando ligados a las puntas de demanda. En el subperiodo 13 el multiplicador μ es igual a 3296.94 Pta/MW-h y en el subperiodo 37 μ adquiere el valor de 5554.81 Pta/MW-h.

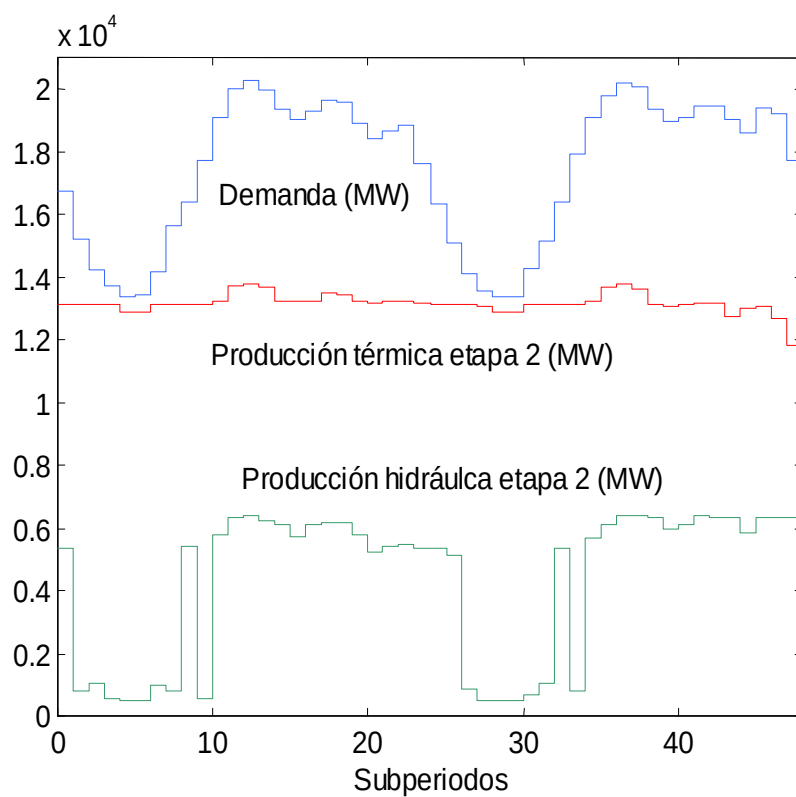


Figura 8.76: Demanda, producción térmica y producción hidráulica al final de la etapa 2 (caso HPS_CD48)

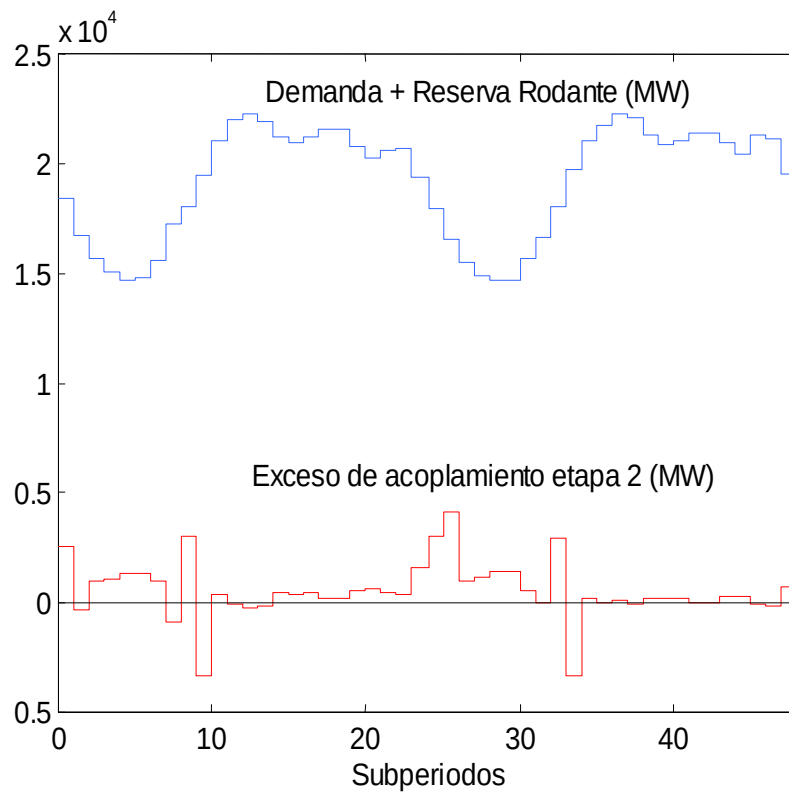


Figura 8.77: Demanda y exceso de potencia acoplada al final de la etapa 2 (caso HPS_CD48)

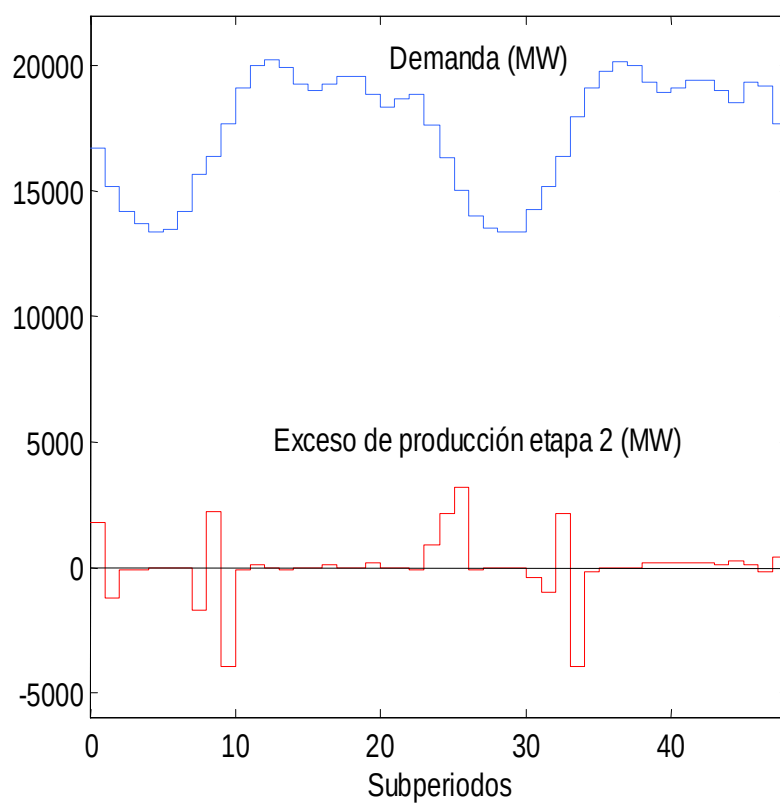


Figura 8.78: Demanda y exceso de potencia producida al final de la etapa 2 (caso HPS_CD48)

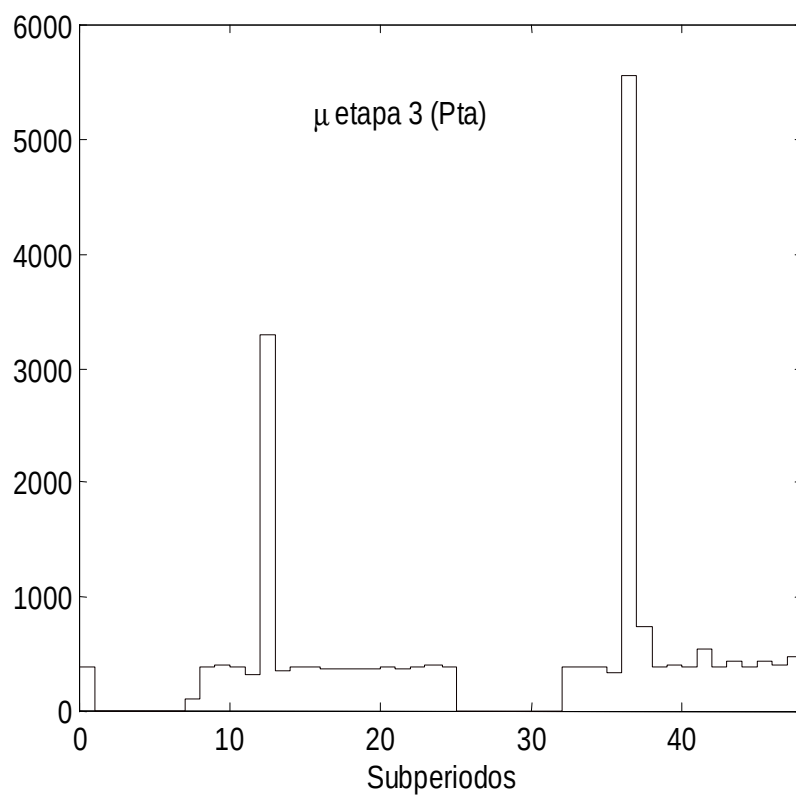


Figura 8.79: Multiplicadores μ al final de la etapa 3 (caso HPS_CD48)

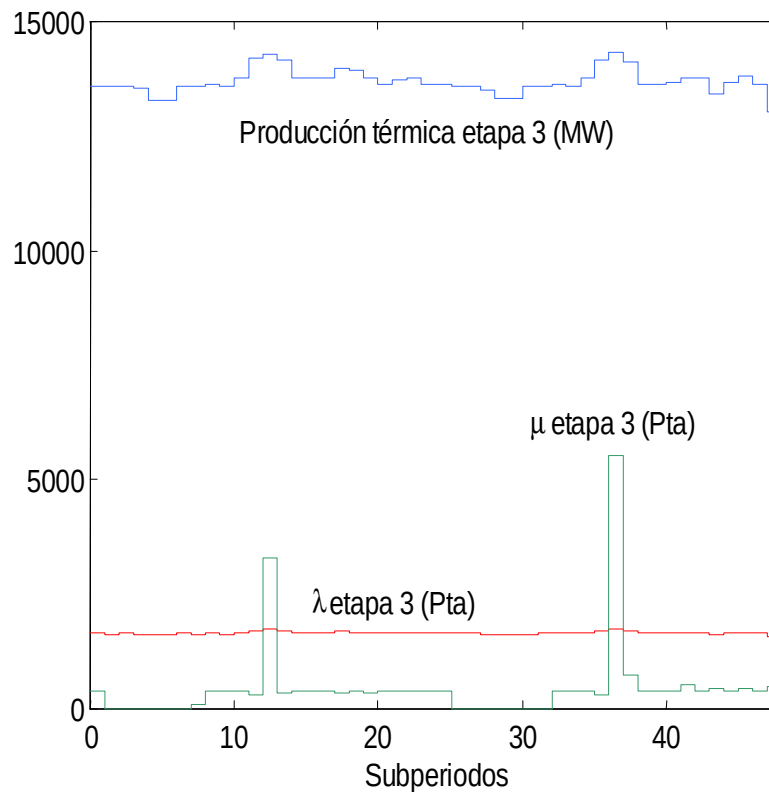


Figura 8.80: Producción térmica, λ y μ al final de la etapa 3 (caso HPS_CD48)

No se incluye curva del vector de multiplicadores λ al final de esta etapa porque en ella los multiplicadores λ permanecen constantes e iguales a los valores que adquieren al final de la *Etapa 2*. Por esta razón, tampoco se incluye ninguna figura que contenga la curva de demanda junto con la curva del vector de multiplicadores λ .

La figura 8.80 incluye la producción total térmica, el vector de multiplicadores λ y el vector de multiplicadores μ al final de esta etapa mientras que la figura 8.81 incluye la producción total hidráulica, el vector de multiplicadores λ y el vector de multiplicadores μ al final de la misma.

La figura 8.82 incluye las curvas de demanda, producción térmica y producción hidráulica al final de la *Etapa 3*. Puede observarse una mejora en la curva de producción hidráulica con respecto a la presentada al final de la *Etapa 2* (figura 8.76).

La figura 8.83 incluye la curva de la potencia mínima a acoplar junto con la curva que representa el exceso de potencia acoplada al final de la *Etapa 3*. Dado que nunca hay defecto de potencia acoplada, la solución de esta etapa es factible en las restricciones de reserva rodante del problema primal.

La figura 8.84 muestra las curvas de demanda y el exceso de producción en cada subperiodo del horizonte temporal analizado. Puede observarse que aún no se cumplen las restricciones de

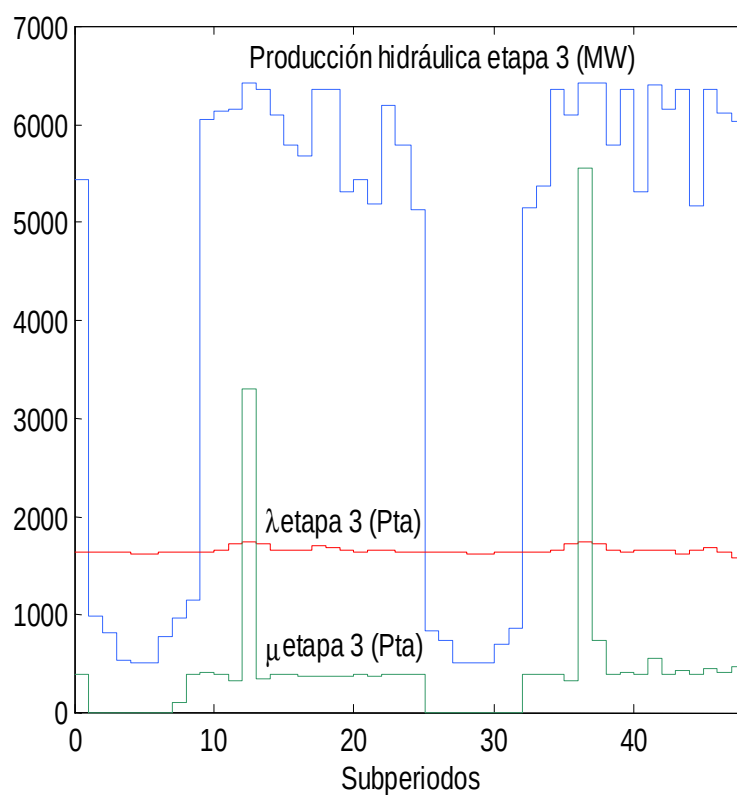


Figura 8.81: Producción hidráulica, λ y μ al final de la etapa 3 (caso HPS_CD48)

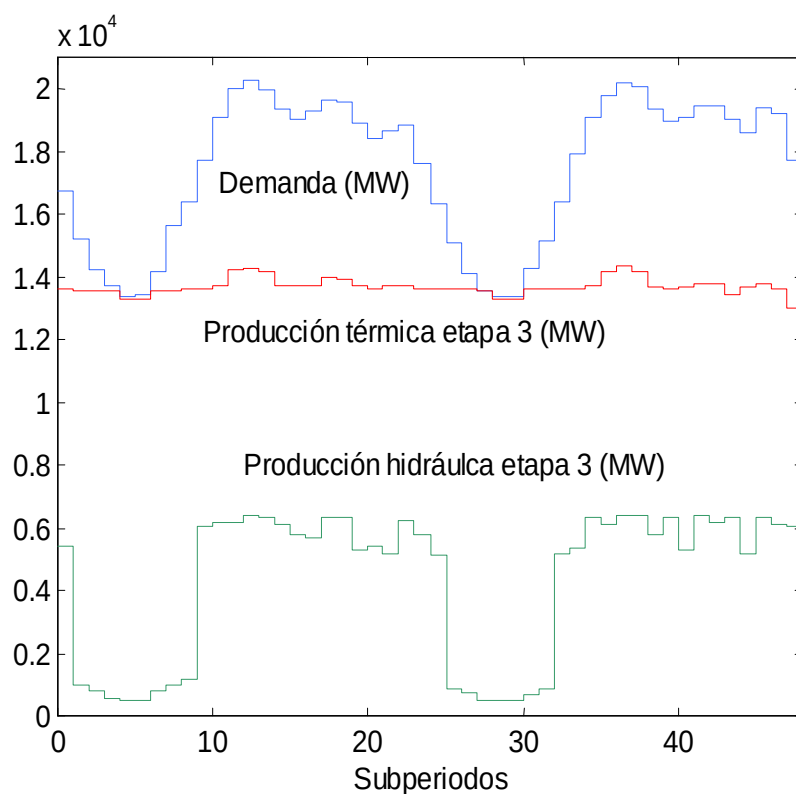


Figura 8.82: Demanda, producción térmica y producción hidráulica al final de la etapa 3 (caso HPS_CD48)

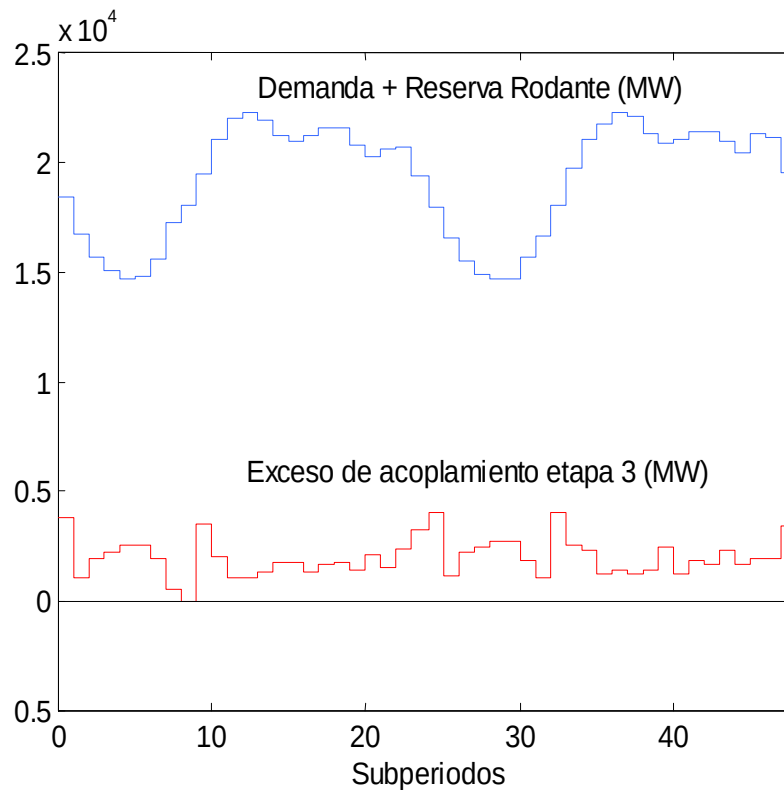


Figura 8.83: Demanda y exceso de potencia acoplada al final de la etapa 3 (caso HPS_CD48)

demanda. Para conseguir una solución que cumpla estas restricciones hace falta la ejecución de un procedimiento de despacho económico (*Etapa 4*).

Evolución de los multiplicadores

A continuación se presentan gráficas que presentan la evolución de algunos de los multiplicadores. Igual que ocurre en el caso de estudio presentado en el apartado 8.3.1, a pesar de que al alcanzarse la solución en la *Etapa 1* el valor de la función dual se ha estabilizado, los valores de los multiplicadores aún están lejos de la convergencia. Esto es consecuencia de la estructura tipo “meseta” que presenta la función dual del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo. La inclusión de la *Etapa 2* en la fase de solución del problema dual (*Fase 1*) permite la estabilización de los multiplicadores de forma muy eficiente (ya que el tiempo de cálculo es pequeño).

La figura 8.85 presenta la evolución de los multiplicadores λ asociados a los subperiodos 3, 8, 27 y 37 durante las etapas 1 y 2. No se incluye la *Etapa 3* ya que los multiplicadores λ permanecen constantes en ella. La línea discontinua indica la separación entre la *Etapa 1* y la *Etapa 2*. Como puede observarse, a pesar de la convergencia en el valor de la función dual al finalizar la *Etapa 1* (figura 8.61), el comportamiento de los multiplicadores es aún bastante oscilante. La figura

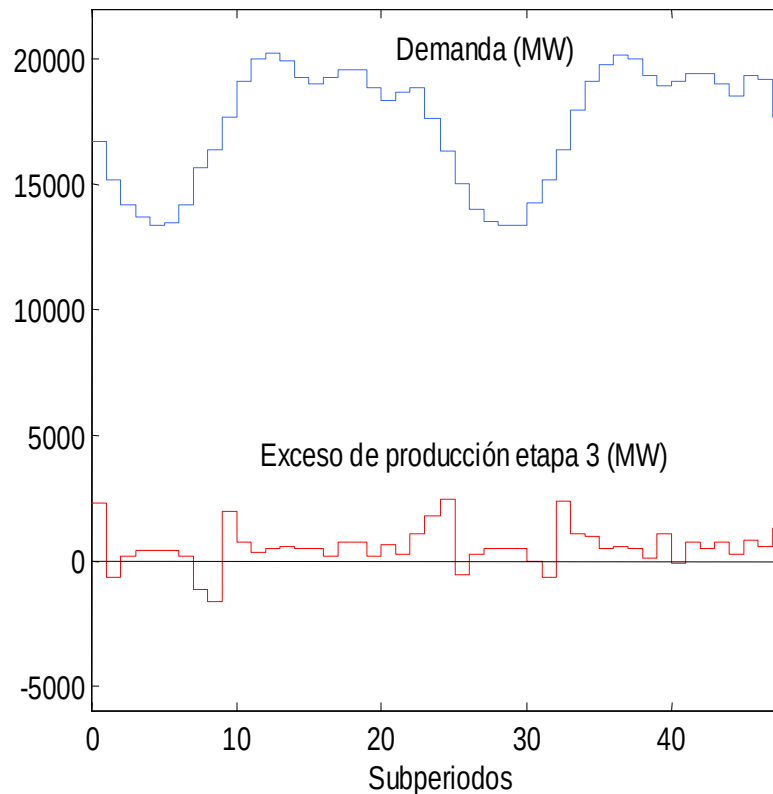


Figura 8.84: Demanda y exceso de potencia producida al final de la etapa 3 (caso HPS_CD48)

8.86 muestra la evolución de estos mismos multiplicadores durante la *Etapa 2*. Al finalizar esta etapa los multiplicadores λ se han estabilizado.

La figura 8.87 muestra la evolución de los multiplicadores μ asociados a los subperiodos 8, 18, 37 y 43 durante las etapas 1, 2 y 3. Las líneas discontinuas indican la separación entre etapas. Como puede observarse el comportamiento de los multiplicadores μ que no se mantienen a cero desde el comienzo del proceso, es bastante oscilante. La figura 8.88 muestra la evolución de estos mismos multiplicadores durante las etapas 2 y 3.

Análisis de los resultados

El análisis de los resultados obtenidos corrobora las conclusiones deducidas del estudio del caso 3 (apartado 8.3.1). Las ventajas que la inclusión de la *Etapa 2* produce son las siguientes:

- Se consigue la estabilización de los multiplicadores. De otro modo, se alcanza la convergencia en la resolución del problema dual no sólo en el valor de su función objetivo sino también en sus variables (multiplicadores de Lagrange).
- La curva que representa el valor de los multiplicadores λ en cada subperiodo del horizonte temporal analizado sigue de forma muy precisa la curva de la demanda horaria.

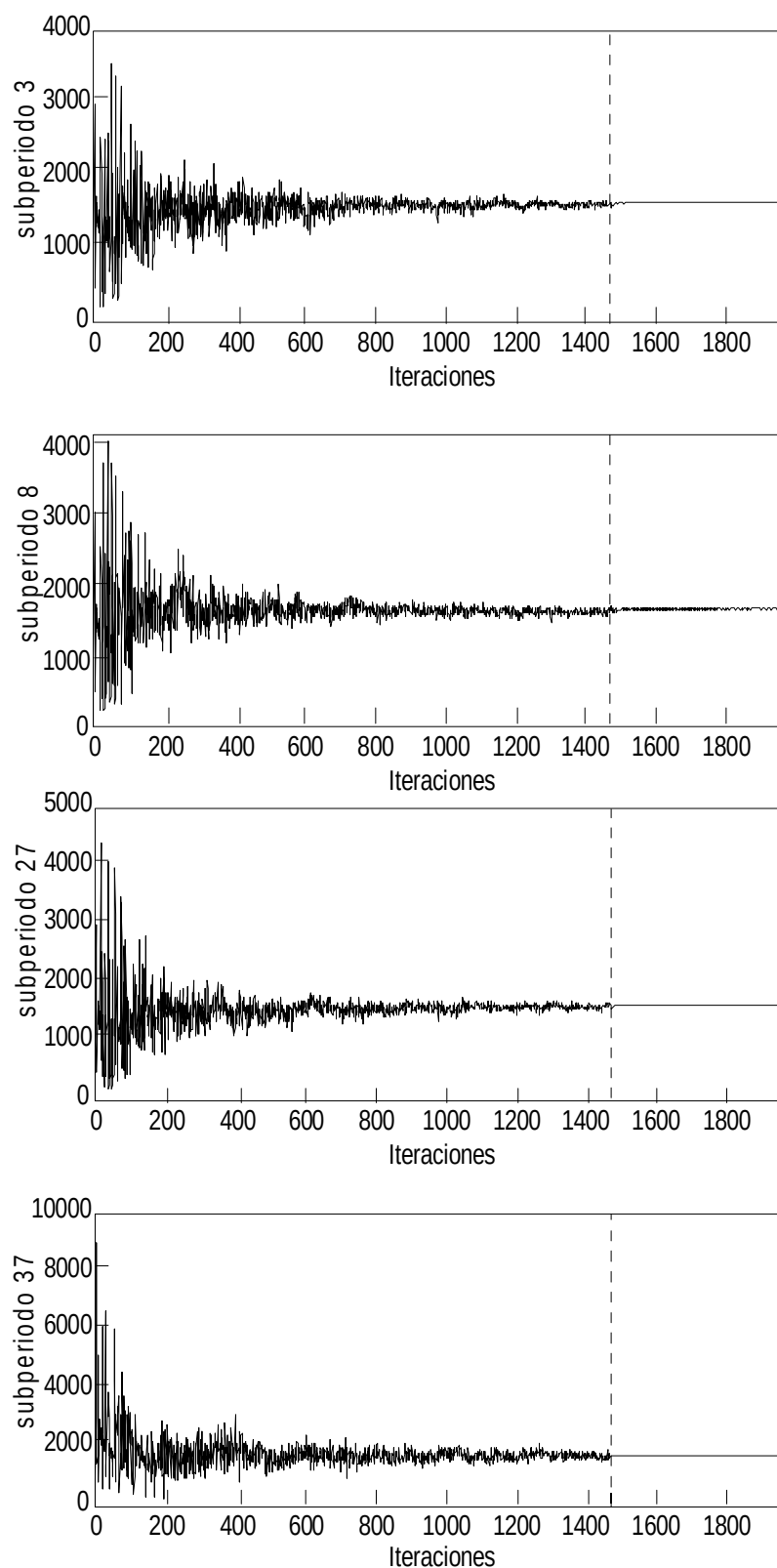


Figura 8.85: Evolución de los multiplicadores λ asociados a los subperíodos 3, 8, 27 y 37 (caso HPS_CD48)

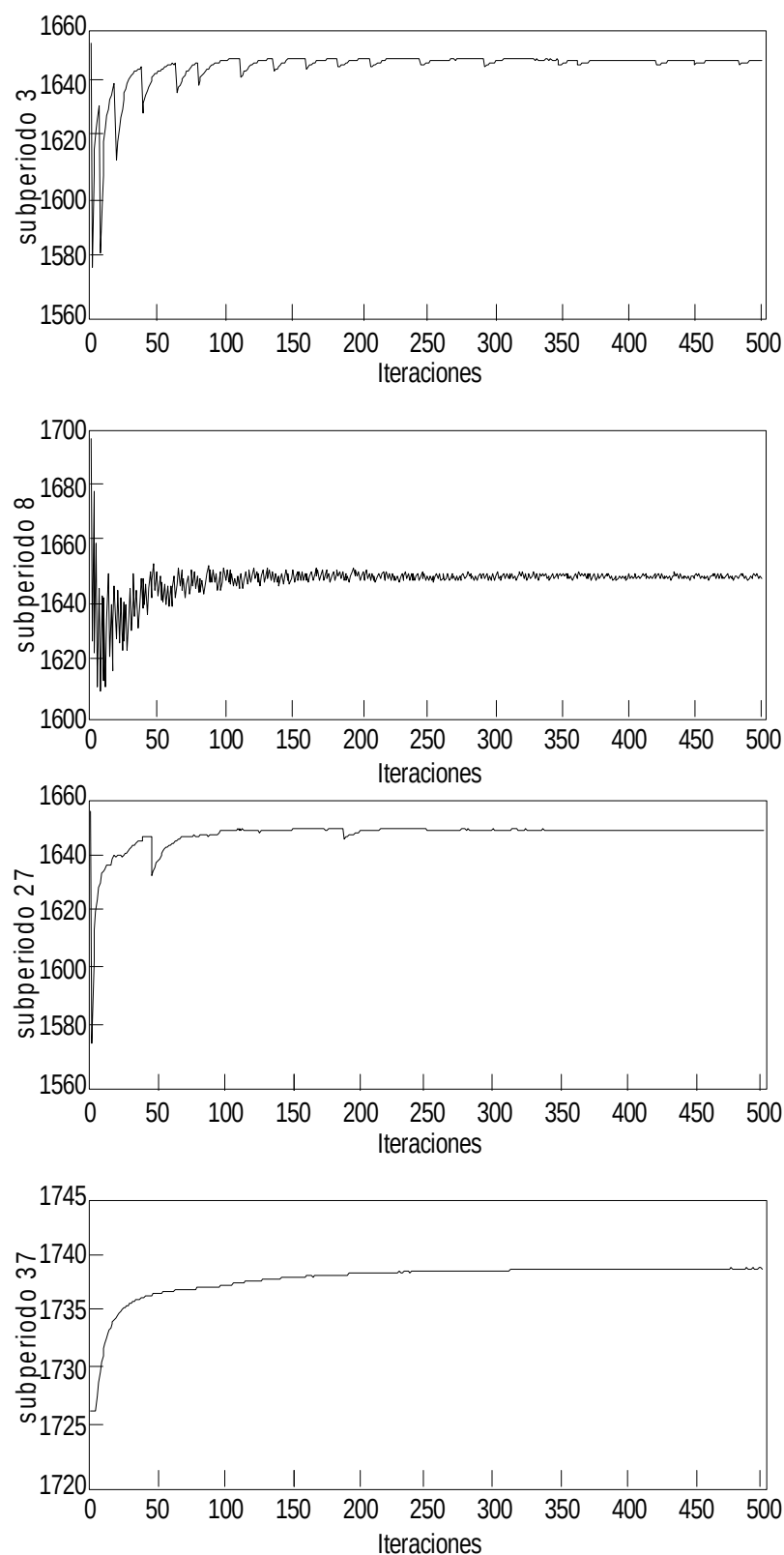


Figura 8.86: Evolución durante la etapa 2 de los multiplicadores λ asociados a los subperiodos 3, 8, 27 y 37 (caso HPS_CD48)

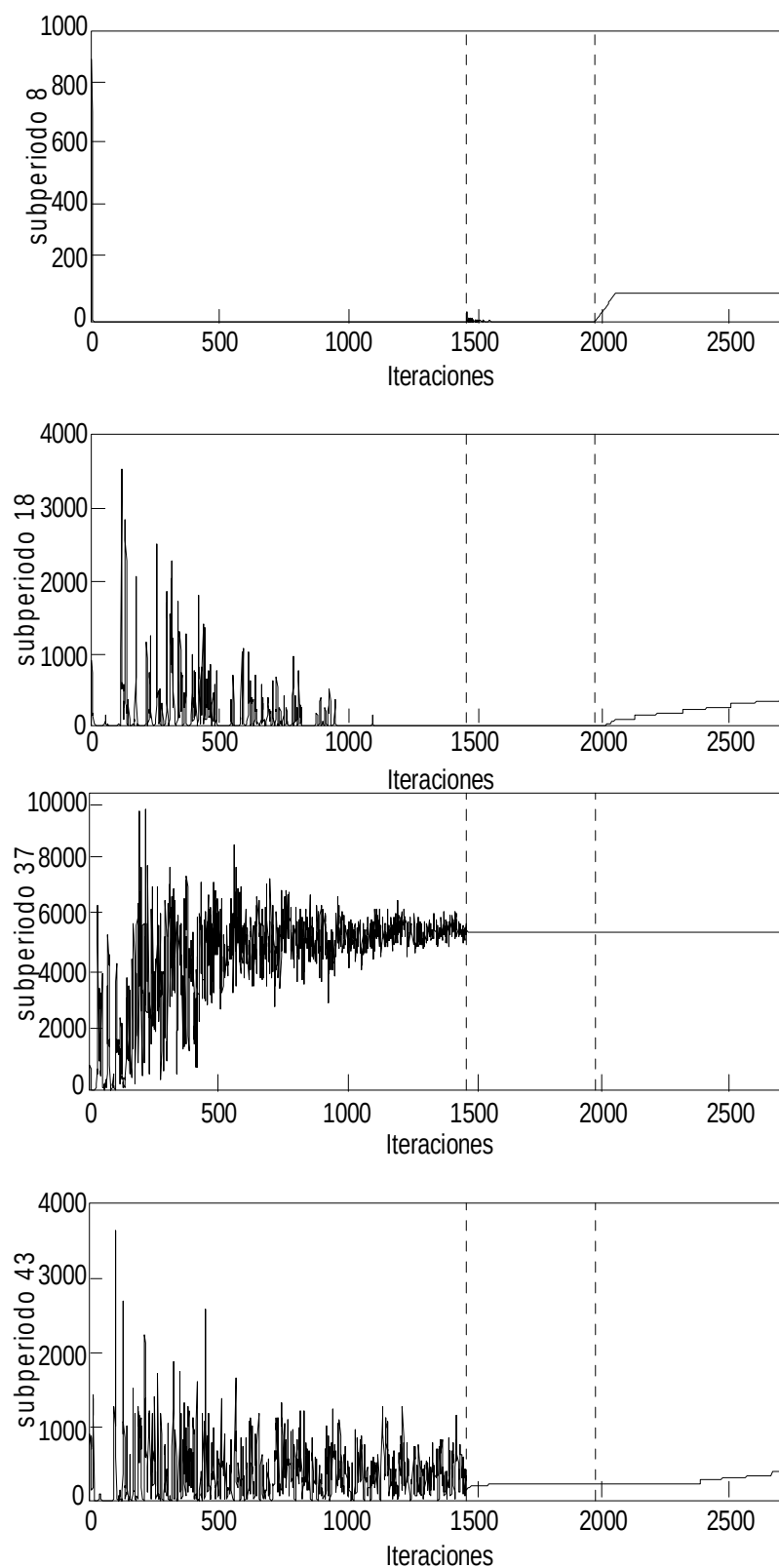


Figura 8.87: Evolución de los multiplicadores μ asociados a los subperiodos 8, 18, 37 y 43 (caso HPS_CD48)

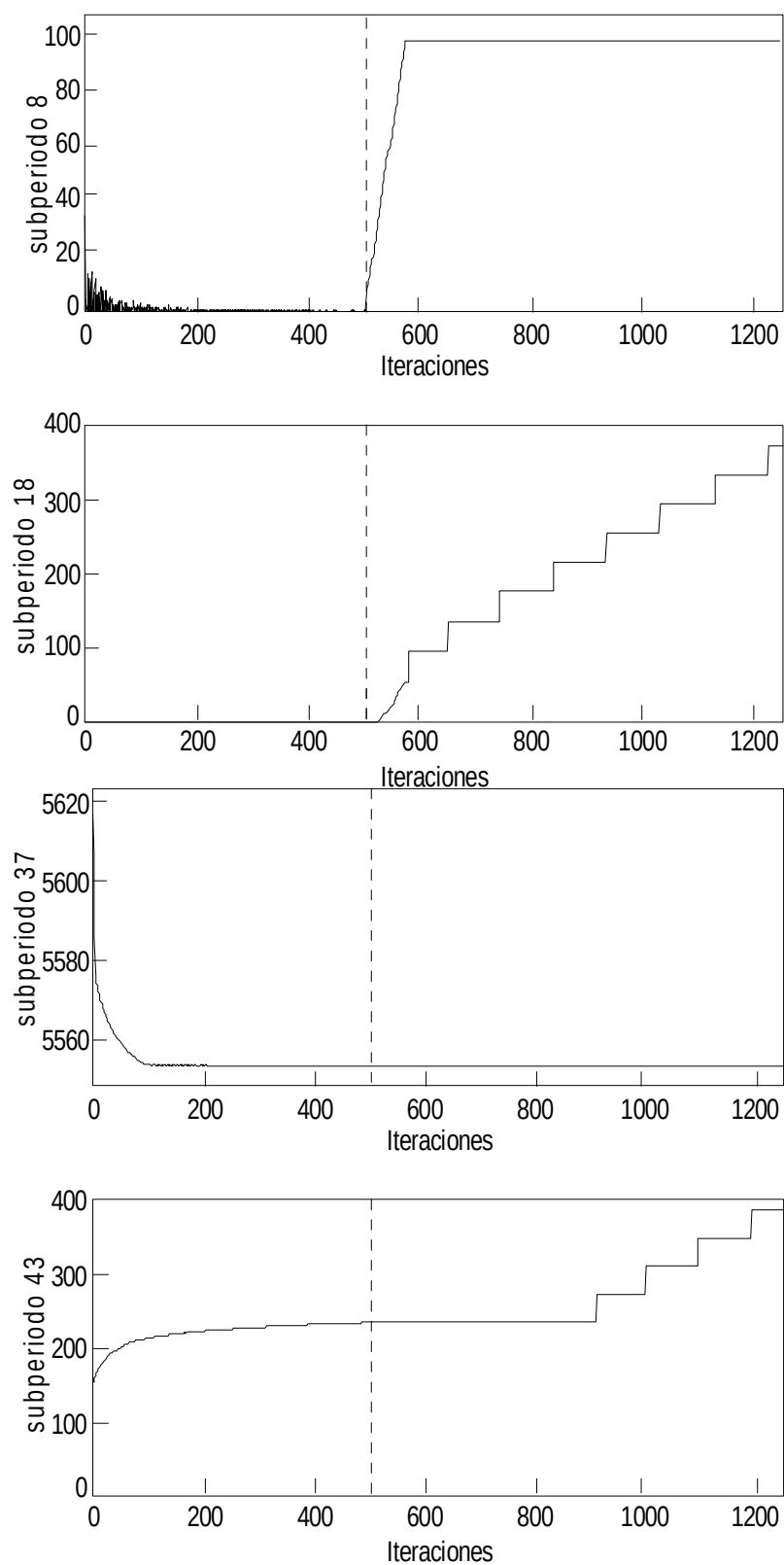


Figura 8.88: Evolución durante las etapas 2 y 3 de los multiplicadores μ asociados a los subperíodos 8, 18, 37 y 43 (caso HPS_CD48)

- c) Se consigue una solución al problema dual mejor y, potencialmente una solución al problema primal de menor coste y una cota superior al agujero de dualidad menor.
- d) La producción hidráulica al final de la *Etapa 2* se hace más estable y recorta las puntas de demanda. También la producción térmica se hace más estable.

Las ventajas indicadas en los puntos a) y b) anteriores permiten que el algoritmo que se propone en esta tesis pueda ser la herramienta que empleen el operador del mercado y/o el operador del sistema de un sistema de energía eléctrica liberalizado ya que los multiplicadores se generan según un procedimiento transparente que trata por igual a todos los participantes en el mercado.

Capítulo 9

Conclusiones, aportaciones y líneas de futuros desarrollos

9.1 Resumen y conclusiones

En esta tesis se propone un método novedoso de coordinación hidrotérmica en el corto plazo mediante técnicas de relajación lagrangiana.

El método propuesto presenta dos características diferenciales frente a otros procedimientos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo mediante relajación lagrangiana que aparecen en la literatura:

- Aplicando el método de la relajación lagrangiana, el problema de la coordinación hidrotérmica se resuelve en tres fases. En la primera fase se obtiene una solución al problema dual. En la segunda fase se consigue una solución del problema dual que cumple las restricciones globales de desigualdad. La tercera fase es un procedimiento de despacho económico. Los modelos que aparecen en la literatura finalizan la ejecución de la primera fase bien cuando se han ejecutado un número preseleccionado de iteraciones o bien cuando el valor de la función objetivo del problema dual se ha estabilizado. Sin embargo, dada la estructura tipo “meseta” del problema dual, las variables duales aún no han convergido cuando el valor de la función objetivo sí lo ha hecho. En el modelo que se propone en esta tesis se descompone la fase de solución del problema dual en dos etapas. En la primera se alcanza la convergencia en el valor de la función objetivo del problema dual y en la segunda se alcanza la convergencia en las variables duales. Esto permite que el modelo propuesto pueda ser empleado tanto por el operador del mercado como por el operador del sistema de los modernos sistemas de energía eléctrica liberalizados. Además, la introducción de la etapa de refinamiento de la solución del problema dual provoca un aumento de la solución

del problema dual y una disminución de la cota superior del agujero de dualidad.

- En la primera etapa de resolución del problema dual se emplea un procedimiento original de actualización de multiplicadores (*método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos*). Este método ha resultado ser computacionalmente eficiente superando el comportamiento de otros métodos que aparecen en la literatura y otros métodos, también originales, de este trabajo de investigación.

9.2 Aportaciones de la tesis y tareas realizadas

Las principales aportaciones de la tesis son:

- Desarrollo de un modelo de coordinación hidrotérmica en el corto plazo mediante técnicas de relajación lagrangiana que consigue convergencia en el problema dual tanto a nivel de la función objetivo, que es lo habitual en la literatura, como a nivel de las variables duales o multiplicadores de Lagrange (capítulos 4 y 7).

Al conseguirse la estabilización de los multiplicadores de Lagrange, el procedimiento propuesto puede ser empleado tanto por el operador del mercado como por el operador del sistema de los incipientes sistemas de energía eléctrica liberalizados. Se ha analizado la aplicabilidad del modelo tanto en los tradicionales entornos centralizados como en los nuevos sistemas desregulados.

- Desarrollo de un procedimiento novedoso de actualización de multiplicadores (*método de los hiperplanos secantes con control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos*) y aplicación al problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo (capítulo 6).

Este método supera el funcionamiento tanto de otros métodos que aparecen en la literatura como de otros métodos también originales de este trabajo de investigación.

- Desarrollo del *método de los hiperplanos secantes con penalización, control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos* y aplicación al problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo (capítulo 6).

Este método combina el método de actualización de multiplicadores a que se hace referencia en el punto anterior (que es el que se propone en esta tesis ya que ha resultado ser el más eficiente) con el método de los hiperplanos secantes con penalización.

- Desarrollo y aplicación al problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo del *método de los hiperplanos secantes con límite máximo al número de hiperplanos* (capítulo 6).

El método de los hiperplanos secantes es un procedimiento general de optimización de funciones no diferenciables. No se ha encontrado ninguna referencia en la literatura de la aplicación de este método a la resolución del problema dual del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo. Se ha modificado el método general de los hiperplanos secantes para mantener acotada la complejidad del problema. El procedimiento empleado para ello ha resultado ser eficiente.

- Desarrollo del *método de los hiperplanos secantes con penalización y límite máximo al número de hiperplanos* y aplicación al problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo (capítulo 6).

El método de los hiperplanos secantes con penalización es una modificación al método de los hiperplanos secantes que se emplea en la optimización general de funciones no diferenciables y que aparece en la literatura de los sistemas de energía eléctrica aplicado a la resolución del problema dual del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo. Se ha modificado este método para mantener acotada la complejidad computacional del problema utilizando la misma idea que se emplea en el método de los hiperplanos secantes con límite máximo al número de hiperplanos y en el método de los hiperplanos secantes con penalización, control dinámico de la región de factibilidad y límite máximo al número de hiperplanos

- Formulación, análisis detallado, estudio del significado económico de los multiplicadores y desarrollo teórico completo de ocho modelos de coordinación hidrotérmica en el corto plazo (capítulos 4, 5, 6 y 7).

Estos ocho modelos se diferencian entre sí en el tipo de restricciones globales dualizadas. Todos estos modelos son de utilidad en los sistemas de energía eléctrica centralizados. La elección de uno u otro, en estos tradicionales entornos regulados, depende del grado de detalle al que se quiera llegar en el estudio.

Respecto a la utilidad de estos ocho modelos en los sistemas liberalizados, los modelos que sólo incluyen restricciones de reserva rodante y demanda (modelos 1, 2 y 3) pueden ser utilizados por el operador del mercado de un sistema liberalizado. Si en el sistema eléctrico analizado los mínimos técnicos de las centrales térmicas son elevados, en opinión de la autora, el modelo que utilice el operador del mercado debe además incluir restricciones de demanda mínima (modelos 4, 5 y 6) con el objetivo de discriminar centrales del mismo coste y potencia máxima pero con distinta limitación de mínimo técnico. Los modelos

más completos, que incluyen restricciones de demanda, reserva rodante, demanda mínima y regulación hacia arriba y hacia abajo (modelos 7 y 8) resultan de utilidad para el operador del sistema de los entornos desregulados.

El desarrollo teórico de estos ocho modelos es completo analizándose para cada uno de ellos:

- el significado económico de los multiplicadores,
- métodos de resolución de los subproblemas térmicos mediante técnicas de programación dinámica y,
- la aplicación de los métodos de actualización de multiplicadores que se describen en el capítulo 6.

Otras tareas realizadas han sido las siguientes:

- Revisión bibliográfica de métodos de resolución de los problemas de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo, de la programación horaria de centrales térmicas y del despacho hidráulico (capítulo 1).
- Revisión bibliográfica de métodos de resolución del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo y la programación horaria de centrales térmicas mediante técnicas de relajación lagrangiana (capítulo 2).

Esta revisión bibliográfica ha sido extensa y detallada. Se han clasificado las referencias de la literatura atendiendo al procedimiento de resolución.

- Revisión bibliográfica de métodos de optimización no diferenciable y métodos de actualización de multiplicadores empleados en la resolución del problema dual del problema de la coordinación hidrotérmica en el corto plazo (capítulo 6).
- Implantación informática del método de coordinación hidrotérmica en el corto plazo mediante técnicas de relajación lagrangiana que se propone en esta tesis y análisis de los resultados obtenidos en casos de estudio de tamaño realista basados en el sistema eléctrico peninsular español (capítulo 8).
- Implantación informática de varios métodos de actualización de multiplicadores y comparación de los resultados obtenidos tras la ejecución de varios casos de estudio de tamaño realista basados en el sistema eléctrico peninsular español (capítulo 8).

9.3 Sugerencias para futuros desarrollos

Las líneas de futuros desarrollos que quedan abiertas tras esta tesis son:

- Aplicación de técnicas de computación paralela.

Dado que el problema primal relajado se descompone de forma natural en un subproblema por cada central térmica y un subproblema por cada cuenca hidráulica, se pueden aplicar técnicas de computación paralela de forma natural. El uso de estas técnicas mejoraría el tiempo de cálculo.

- Resolución de los subproblemas hidráulicos mediante optimizadores que aprovechen la estructura de red de estos subproblemas.

El subproblema asociado a cada cuenca hidráulica presenta estructura de red. Sin embargo, para su resolución se ha empleado el optimizador comercial de propósito general MINOS 5.4. El tiempo de cálculo empleado en la resolución de estos subproblemas es del orden del 90 % del tiempo de ejecución total. El uso de un optimizador, como CPLEX [133], que explotara la estructura de red de los subproblemas hidráulicos mejoraría de forma sustancial el tiempo total de ejecución.

- Mejora del tratamiento de las restricciones de rampas máximas de subida y bajada de carga en los subproblemas térmicos.

Los subproblemas térmicos del problema primal relajado se han resuelto empleando técnicas de programación dinámica. En el capítulo 5 se presentan dos modelos de programación dinámica para resolver estos subproblemas. Estos modelos consideran las restricciones de rampa de forma “miope”, es decir ligando sólo los subperiodos consecutivos. En el capítulo 5 se indican posibles líneas de investigación para considerar las restricciones de rampa de forma global.

Apéndice A

Datos y resultados de los casos de estudio

A.1 Datos de demanda y del equipo generador

A.1.1 Demanda horaria

Demanda horaria del 10 de junio de 1998

NUMERO DE HORAS

024

DEMANDA (MW)	RESERVA RODANTE (MW)

016793.000	01679.300

015543.000	01554.300

014669.000	01466.900

014501.000	01450.100

014350.000	01435.000

014551.000	01455.100

015688.000	01568.800

017328.000	01732.800

018998.000	01899.800

019774.000	01977.400

020453.000	02045.300

020867.000	02086.700

020953.000	02095.300

020550.000	02055.000

019708.000	01970.800

019924.000	01992.400

020381.000	02038.100

020846.000	02084.600

020455.000	02045.500

019557.000	01955.700

019216.000	01921.600

019198.000	01919.800

019612.000	01961.200

018111.000	01811.100

Demanda horaria de los días 19 y 29 de agosto de 1998

NUMERO DE HORAS 19 y 20 agosto 1998

048

DEMANDA(MW) RESERVA RODANTE(MW)

16742.000	1674.200
15212.000	1521.200
14220.000	1422.000
13723.000	1372.300
13394.000	1339.400
13422.000	1342.200
14183.000	1418.300
15671.000	1567.100
16407.000	1640.700
17706.000	1770.600
19120.000	1912.000
20021.000	2002.100
20241.000	2024.100
19931.000	1993.100
19326.000	1932.600
19015.000	1901.500
19294.000	1929.400
19619.000	1961.900
19586.000	1958.600
18918.000	1891.800
18391.000	1839.100
18690.000	1869.000
18844.000	1884.400
17632.000	1763.200
16330.000	1633.000
15059.000	1505.900
14073.000	1407.300
13569.000	1356.900
13384.000	1338.400
13388.000	1338.800
14288.000	1428.800
15160.000	1516.000
16389.000	1638.900
17939.000	1793.900
19107.000	1910.700
19760.000	1976.000
20221.000	2022.100
20057.000	2005.700
19342.000	1934.200
18955.000	1895.500
19114.000	1911.400
19484.000	1948.400
19451.000	1945.100
19046.000	1904.600
18581.000	1858.100
19391.000	1939.100
19193.000	1919.300
17763.000	1776.300

A.1.2 Datos del equipo generador

Equipo de generación térmica

NUMERO DE TERMICAS													
70													
TERMICAS													
*SO	No	NOMBRE	PMAX	PMIN	A1	A2	A3	C	D	F	Rs	Rb	MIN
*TMF TMP													
*													
*													
*													
*													

9	01	Abo-o 1	0325.80	089.05	001.300	1745.0	121591.	5446153.	20.00	0.7350	144.0	144.0	0.0 001 001
9	02	Abo-o 2	0513.14	117.55	000.670	1724.0	142733.	8626821.	20.00	0.7350	180.0	180.0	0.0 001 001
-5	03	Aceca 1 (F)	0297.92	046.35	000.560	2049.0	40363.	1159344.	20.00	2.0560	242.0	242.0	0.0 001 001
-2	04	Aceca 2 (F)	0297.92	046.35	000.560	2049.0	40363.	1159344.	20.00	2.0560	242.0	242.0	0.0 001 001
-4	05	Algeciras 1 (F)	0200.00	031.35	000.820	1969.0	57437.	1455752.	20.00	1.2200	138.0	138.0	0.0 001 001
-2	06	Algeciras 2 (F)	0509.01	031.35	000.710	1701.0	150070.	3200808.	20.00	1.2200	300.0	300.0	0.0 001 001
1	07	ALMARAZ 1	0888.72	443.60	000.000	1000.0	0.	2914194.	99.00	1.	120.0	120.0	0.0 170 001
1	08	ALMARAZ 2	0888.72	443.60	000.000	1000.0	0.	2914194.	99.00	1.	120.0	120.0	0.0 170 001
2	09	Anllares	0330.75	079.25	000.880	1864.0	93450.	7043750.	20.00	0.6220	168.0	168.0	0.0 001 001
1	10	ASCO I	0888.15	442.16	000.000	1000.0	0.	2912315.	99.00	1.	120.0	120.0	0.0 170 001
1	11	ASCO II	0888.15	442.16	000.000	1000.0	0.	2912315.	99.00	1.	120.0	120.0	0.0 170 001
2	12	Barrios	0522.50	085.50	000.100	2029.0	115837.	5522987.	20.00	0.9510	356.0	356.0	0.0 001 001
-2	13	Besos 2 (F)	0285.00	034.20	000.910	1913.0	61259.	1803597.	20.00	1.3030	180.0	180.0	0.0 001 001
-2	14	Castellon 1 (G)	0517.32	066.85	000.300	2042.0	100894.	2451637.	20.00	1.6770	392.0	392.0	0.0 001 001
2	15	Castellon 2 (G)	0517.32	066.85	000.300	2042.0	100894.	2451637.	20.00	1.6770	392.0	392.0	0.0 001 001
1	16	COFRENTES	0945.45	455.53	000.000	1000.0	0.	3100206.	99.00	1.	120.0	120.0	0.0 170 001
2	17	Compostilla 1	0131.13	030.22	013.160	-213.0	160730.	3267956.	20.00	0.6200	070.0	070.0	0.0 001 001
2	18	Compostilla 2	0131.13	032.08	002.030	0190.0	64534.	3225090.	20.00	0.6200	065.0	065.0	0.0 001 001
2	19	Compostilla 3	0311.85	074.65	002.140	1106.0	202574.	6734233.	20.00	0.6200	160.0	160.0	0.0 001 001
2	20	Compostilla 4	0330.75	081.75	002.490	1030.0	185463.	6907227.	20.00	0.6200	165.0	165.0	0.0 001 001
2	21	Compostilla 5	0330.75	081.75	001.690	1332.0	164434.	6907227.	20.00	0.6200	165.0	165.0	0.0 001 001
-9	22	Escombreras 3 (F)	0274.55	047.50	000.000	2380.0	32000.	0628593.	20.00	2.0780	096.0	096.0	0.0 001 001
-2	23	Escombreras 4 (F)	0274.55	047.50	000.640	2019.0	69474.	1074505.	20.00	2.0780	178.0	178.0	0.0 001 001
2	24	Escucha	0141.60	035.40	002.650	1942.0	68064.	3771370.	20.00	0.6070	074.0	074.0	0.0 001 001
-3	25	Foix (F)	0496.60	038.20	000.510	1872.0	103819.	3131582.	20.00	1.3280	235.0	235.0	0.0 001 001
-7	26	Guardo 1	0133.94	033.94	000.690	2520.0	22714.	2870456.	20.00	0.7080	074.0	074.0	0.0 001 001
2	27	Guardo 2	0330.75	070.90	000.960	1858.0	88924.	6322696.	20.00	0.7080	191.0	191.0	0.0 001 001
1	28	J.CABRERA	0152.80	075.92	000.000	1000.0	0.	0501043.	99.00	1.	040.0	040.0	0.0 170 001
-4	29	Lada 3	0144.15	034.41	008.150	0528.0	135203.	3009552.	20.00	0.7390	060.0	060.0	0.0 001 001
2	30	Lada 4	0330.75	085.05	001.650	1476.0	179304.	5941907.	20.00	0.7390	161.0	161.0	0.0 001 001
2	31	Litoral	0522.50	085.50	000.480	1864.0	100532.	5440091.	20.00	0.9770	276.0	276.0	0.0 001 001
2	32	Meirama	0519.75	123.80	001.300	1709.0	301548.	9999999.	20.00	0.7100	276.0	276.0	0.0 001 001
-2	33	Narcea 1	0060.45	016.27	-09.580	2401.0	27629.	1364325.	20.00	0.6820	024.0	024.0	0.0 001 001
-3	34	Narcea 2	0143.22	037.66	013.500	-663.0	178234.	3050325.	20.00	0.6820	064.0	064.0	0.0 001 001
2	35	Narcea 3	0330.75	100.65	001.180	1710.0	115704.	6006173.	20.00	0.6820	121.0	121.0	0.0 001 001
-2	36	Pasajes	0202.23	049.61	001.990	1875.0	56816.	2096997.	20.00	1.0160	105.0	105.0	0.0 001 001
2	37	Puentes 1	0330.75	108.70	003.090	1405.0	213279.	6398451.	20.00	0.6160	111.0	111.0	0.0 001 001
2	38	Puentes 2	0330.75	108.70	003.090	1405.0	213279.	6398451.	20.00	0.6160	111.0	111.0	0.0 001 001
2	39	Puentes 3	0330.75	108.70	003.090	1405.0	213279.	6398451.	20.00	0.6160	111.0	111.0	0.0 001 001
2	40	Puentes 4	0330.75	108.70	003.090	1405.0	213279.	6398451.	20.00	0.6160	111.0	111.0	0.0 001 001
2	41	Puertollano	0199.10	036.20	002.370	1511.0	121064.	4180708.	20.00	0.7300	131.0	131.0	0.0 001 001
2	42	P.Nuevo	0283.08	067.90	000.400	2224.0	47797.	5083092.	20.00	0.7550	150.0	150.0	0.0 001 001
2	43	Robla 1	0251.10	063.25	001.890	1536.0	101589.	4524810.	20.00	0.7430	060.0	060.0	0.0 001 001
2	44	Robla 2	0330.75	100.65	001.840	1403.0	166427.	5524829.	20.00	0.7430	121.0	121.0	0.0 001 001
-4	45	Sabon	0332.50	043.70	001.470	1618.0	120095.	2532752.	20.00	1.8430	235.0	235.0	0.0 001 001
-3	46	Santurce 1	0358.40	066.50	000.240	1989.0	109896.	1443773.	20.00	1.8350	222.0	222.0	0.0 001 001

*SO	No	NOMBRE	PMAX	PMIN	A1	A2	A3	C	D	F	Rs	Rb	MIN	TMF	TMP
*															
*			MW	MW	Te/h	Te/h	Te/h	Te	Te	Pta/Te	MW	MW	GWH	h	h
*					/MW2	/MW									
*															

-2	47	Santurce 2	0517.29	066.85	000.180	2124.0	99450.	2266055.	20.00	1.8350	300.0	300.0	0.0	001	001
2	48	Serch	0141.60	035.40	005.080	1118.0	96248.	3534072.	20.00	0.6440	075.0	075.0	0.0	001	001
-5	49	SotoRibera 1	0062.85	020.92	016.330	1374.0	47399.	1224070.	20.00	0.7200	015.0	015.0	0.0	001	001
2	50	SotoRibera 2	0236.22	071.60	000.000	2425.0	14807.	4226747.	20.00	0.7200	069.0	069.0	0.0	001	001
2	51	SotoRibera 3	0330.75	081.25	001.400	1409.0	136476.	6024431.	20.00	0.7200	165.0	165.0	0.0	001	001
-4	52	S.Adrian 3(F)	0325.50	046.50	000.550	2094.0	73451.	1239037.	20.00	2.0050	235.0	235.0	0.0	001	001
2	53	Teruel 1	0330.75	099.25	001.980	1553.0	135658.	6541614.	20.00	0.7080	132.0	132.0	0.0	001	001
2	54	Teruel 2	0330.75	099.25	001.980	1553.0	135658.	6541614.	20.00	0.7080	132.0	132.0	0.0	001	001
2	55	Teruel 3	0330.75	099.25	001.980	1553.0	135658.	6541614.	20.00	0.7080	132.0	132.0	0.0	001	001
1	56	TRILLO	1018.03	491.35	000.000	1000.0	0.	3275283.	99.00	1.	120.0	120.0	0.0	170	001
1	57	VANDELLOS	0958.82	462.22	000.000	1000.0	0.	3144047.	99.00	1.	120.0	120.0	0.0	170	001
9	58	S.M.Garona	430.00	215.00	0.	1000.0	0.	1440500.	99.00	1.	430.0	430.0	0.0	001	001
-2	59	Escatron	80.00	020.00	0.	2299.0	20057.	8193762.	20.00	0.1980	40.0	40.0	0.0	001	001
-2	60	Escombreras 5	272.00	047.00	0.630	2020.0	68566.	1074505.	20.00	2.0780	178.0	178.0	0.0	001	001
-2	61	S.Adrian 1(F)	329.00	047.00	0.550	2094.0	73451.	1239037.	20.00	2.0050	235.0	235.0	0.0	001	001
-2	62	S.Adrian 2(F)	329.00	047.00	0.550	2204.0	73451.	1211839.	20.00	2.0050	235.0	235.0	0.0	001	001
-2	63	Elcogas (GICC-P)	310.00	075.00	0.450	2006.0	93919.	7504813.	20.00	0.3430	150.0	150.0	0.0	001	001
-2	64	Escombreras 1	65.00	009.50	0.	2780.0	15000.	0311543.	20.00	2.0780	46.0	46.0	0.0	001	001
-2	65	Escombreras 2	65.00	009.50	0.	2780.0	15000.	0310343.	20.00	2.0780	46.0	46.0	0.0	001	001
-2	66	Badalona II 1	162.00	028.50	0.	2480.0	30000.	0650124.	20.00	2.0540	105.0	105.0	0.0	001	001
-2	67	Badalona II 2	162.00	028.50	0.	2480.0	30000.	0650124.	20.00	2.0540	105.0	105.0	0.0	001	001
-2	68	Colon 1	66.00	015.00	0.	2780.0	15000.	0388349.	20.00	1.5750	36.0	36.0	0.0	001	001
-2	69	Colon 2	140.00	015.00	0.	2480.0	30000.	0809718.	20.00	1.5750	100.0	100.0	0.0	001	001
-2	70	Colon 3	150.00	020.00	0.	2480.0	30000.	0835390.	20.00	1.5750	110.0	110.0	0.0	001	001

Equipo de generación hidráulica

NUMERO DE GRUPOS

30

GRUPOS HIDRAULICOS	PO(MW)	umax(m3/s)	ro	umin(m3/s)	ro2
(MW/m3/s)		(MW/m3/s)			
01 *****	0.0	0000.00	00.0000	000.000	00.0000
02 LAS ONDINAS	0.0	0059.50	01.2101	000.000	00.0000
03 PE>ADRADA	0.0	0051.00	00.7250	000.000	00.0000
04 STA. MARINA	0.0	0035.20	00.5681	000.000	00.0000
05 BARCENA	0.0	0100.00	00.7200	000.000	00.0000
06 CORNATEL	0.0	0115.00	01.1304	000.000	00.0000
07 QUEREÑO	0.0	0138.00	00.2608	000.000	00.0000
08 SOBRADELO	0.0	0160.00	00.2400	000.000	00.0000
09 SANTIAGO SIL	0.0	0160.00	00.0843	000.000	00.0000
10 PRADA	0.0	0024.00	02.6667	000.000	00.0000
11 SANTIAGO JARES	0.0	0024.00	02.0833	000.000	00.0000
12 PORTO	0.0	0008.86	01.9864	000.000	00.0000
13 S.SEBASTIAN	0.0	0015.40	01.1688	000.000	00.0000
14 S. AGUSTIN	0.0	0020.48	02.8320	000.000	00.0000
15 CONSO	0.0	0136.60	01.8885	000.000	00.0000
16 PUENTE BIBEY	0.0	0082.72	02.8259	000.000	00.0000
17 SAN CRISTOBAL	0.0	0010.00	01.1000	000.000	00.0000
18 PONTENOVO	0.0	0012.00	03.0000	000.000	00.0000
19 SAN MARTIN	0.0	0066.00	00.1742	000.000	00.0000
20 MONTEFURADO	0.0	0135.00	00.2814	000.000	00.0000

GRUPOS HIDRAULICOS (MW/m3/s)	PO(MW)	umax(m3/s) (MW/m3/s)	ro	umin(m3/s)	ro2
21 SEQUEIROS/CLODIO	0.0	0237.50	00.1418	000.000	00.0000
22 SAN ESTEBAN	0.0	0300.00	00.8450	000.000	00.0000
23 SAN PEDRO	0.0	0225.00	00.1400	000.000	00.0000
24 BELESAR	0.0	0216.00	01.0416	000.000	00.0000
25 OS PEARES	0.0	0195.00	00.7435	000.000	00.0000
26 VELLE	0.0	0500.00	00.1000	000.000	00.0000
27 CASTRELLO	0.0	0585.00	00.1914	000.000	00.0000
28 ALBORELLAS	0.0	0049.00	01.2081	000.000	00.0000
29 FRIEIRA	0.0	0540.00	00.2222	000.000	00.0000
30 HIDRAULICA	0.0	4200.00	01.0000	000.000	00.0000

EMBALSES	EV	V1 (Hm3)	VM (Hm3)	Vm (Hm3)	VfM (HM3)	Vfm (HM3)	SMAX (Hm3)
01 ROZAS	03	0040.740	0099.90	000.00	0041.8800	0035.4000	0000.00
02 MATALAVILLA	03	0040.460	0099.10	000.00	0041.5200	0035.3680	0000.00
03 ONDINAS	04	0040.230	0099.38	000.00	0041.2700	0035.3000	0000.00
04 *****	05	0000.000	0000.00	000.00	0000.0000	0000.0000	0000.00
05 BARCENA	06	0169.000	0281.60	000.00	0170.8000	0164.2000	0000.00
06 CAMPAÑANA	07	0004.632	0007.72	000.00	0005.5584	0001.0056	0000.00
07 PEÑARRUBIA	08	0004.512	0007.52	000.00	0005.4144	0001.0096	0000.00
08 PUMARES	09	0000.426	0000.71	000.00	0000.6112	0000.2408	0000.00
09 SANTIAGO	19	0000.510	0000.85	000.00	0000.6120	0000.3080	0000.00
10 PRADA	11	0073.200	0122.00	000.00	0074.8400	0068.5600	0000.00
11 STA. EULALIA	19	0003.792	0006.32	000.00	0005.5504	0001.0336	0000.00
12 VALDESIRGAS	13	0001.200	0002.00	000.00	0001.8400	0000.5600	0000.00
13 S. SEBASTIAN	14	0022.680	0037.80	000.00	0023.2160	0015.1440	0000.00
14 PIAS	16	0002.610	0004.35	000.00	0004.1320	0001.1880	0000.00
15 EDRA DA	16	0283.800	0473.00	000.00	0285.5600	0274.0400	0000.00
16 BAO	20	0126.000	0210.00	000.00	0128.2000	0117.8000	0000.00
17 CHANDREJA	18	0031.500	0052.50	000.00	0033.8000	0023.2000	0000.00
18 GUISTOLAS	20	0001.662	0002.77	000.00	0001.7944	0000.8296	0000.00
19 S. MARTIN	21	0002.526	0004.21	000.00	0003.0312	0001.0208	0000.00
20 MONTEFURADO	21	0004.758	0007.93	000.00	0005.7096	0001.0064	0000.00
21 SEQUEIROS	22	0003.660	0006.10	000.00	0005.3920	0002.0280	0000.00
22 S. ESTEBAN	23	0116.800	0194.80	000.00	0118.1600	0108.4000	0000.00
23 S. PEDRO	26	0001.500	0002.50	000.00	0002.0000	0000.9000	0000.00
24 BELESAR	25	0363.600	0606.00	000.00	0364.3200	0354.8800	0000.00
25 PEARES	26	0089.700	0149.50	000.00	0090.6400	0081.7600	0000.00
26 VELLE	27	0004.002	0006.67	000.00	0004.8024	0001.0016	0000.00
27 CASTRELLO	29	0024.500	0040.84	000.00	0025.4000	0015.6000	0000.00
28 ALBARELLOS	29	0001.200	0002.00	000.00	0001.8400	0000.5600	0000.00
29 FRIEIRA	00	0010.080	0016.80	000.00	0011.0960	0005.0640	0000.00
30 HIDRAULICA	00	2000.000	3000.00	000.00	3000.0000	1500.8000	0000.00

APORTACIONES (Hm3) ES UNA MATRIZ DE DIMENSION EMBALSESxHORAS:

Se han supuesto nulas todas las aportaciones (en todos los embalses y horas)

A.1.3 Resultados de una de las simulaciones ejecutadas (caso HPS_CD24)

A continuación se presentan las producciones de las centrales térmicas así como los valores de las variables asociadas a las centrales hidráulicas obtenidos en la simulación HPS_CD24 (apartado 8.3.1).

Producciones de las centrales térmicas

CENTRAL 1	CENTRAL 2	CENTRAL 3	CENTRAL 4	HORA
89.050	127.656	0.000	0.000	1
89.050	117.550	0.000	0.000	2
89.050	117.550	0.000	0.000	3
89.050	117.550	0.000	0.000	4
89.050	117.550	0.000	0.000	5
89.050	117.550	0.000	0.000	6
89.050	117.550	0.000	0.000	7
94.188	198.425	0.000	0.000	8
167.514	340.698	0.000	0.000	9
217.572	437.827	0.000	0.000	10
231.810	465.451	0.000	0.000	11
254.337	509.161	0.000	0.000	12
256.248	512.869	0.000	0.000	13
238.096	477.649	0.000	0.000	14
207.917	419.093	0.000	0.000	15
205.238	413.894	0.000	0.000	16
232.453	466.701	0.000	0.000	17
252.554	505.703	0.000	0.000	18
248.639	498.106	0.000	0.000	19
194.979	393.989	0.000	0.000	20
215.989	434.755	0.000	0.000	21
202.648	408.869	0.000	0.000	22
194.679	393.407	0.000	0.000	23
0.000	303.136	0.000	0.000	24

CENTRAL 5	CENTRAL 6	CENTRAL 7	CENTRAL 8	HORA
0.000	0.000	888.720	888.720	1
0.000	0.000	888.720	888.720	2
0.000	0.000	798.305	768.720	3
0.000	0.000	851.255	888.720	4
0.000	0.000	888.720	888.720	5
0.000	0.000	853.772	888.720	6
0.000	0.000	888.720	888.720	7
0.000	0.000	888.720	888.720	8
0.000	0.000	888.720	888.720	9
0.000	0.000	888.720	888.720	10
0.000	0.000	888.720	888.720	11
0.000	0.000	888.720	888.720	12
0.000	0.000	888.720	888.720	13
0.000	0.000	888.720	888.720	14
0.000	0.000	888.720	888.720	15
0.000	0.000	888.720	888.720	16
0.000	0.000	888.720	888.720	17
0.000	0.000	888.720	888.720	18
0.000	0.000	888.720	888.720	19
0.000	0.000	888.720	888.720	20
0.000	0.000	888.720	888.720	21
0.000	0.000	888.720	888.720	22
0.000	0.000	888.720	888.720	23
0.000	0.000	888.720	888.720	24

CENTRAL 9	CENTRAL 10	CENTRAL 11	CENTRAL 12	HORA
213.260	888.150	888.150	85.500	1
79.250	888.150	888.150	85.500	2
79.250	768.150	888.150	85.500	3
79.250	888.150	888.150	85.500	4
79.250	888.150	768.150	85.500	5
79.250	768.150	888.150	85.500	6
79.250	888.150	888.150	85.500	7
247.250	888.150	888.150	85.500	8
330.750	888.150	888.150	85.500	9
330.750	888.150	888.150	85.500	10
330.750	888.150	888.150	85.500	11
330.750	888.150	888.150	85.500	12
330.750	888.150	888.150	85.500	13
330.750	888.150	888.150	85.500	14
330.750	888.150	888.150	85.500	15
330.750	888.150	888.150	85.500	16
330.750	888.150	888.150	85.500	17
330.750	888.150	888.150	85.500	18
330.750	888.150	888.150	85.500	19
330.750	888.150	888.150	0.000	20
330.750	888.150	888.150	0.000	21
330.750	888.150	888.150	0.000	22
330.750	888.150	888.150	0.000	23
330.750	888.150	888.150	0.000	24

CENTRAL 13	CENTRAL 14	CENTRAL 15	CENTRAL 16	HORA
0.000	0.000	0.000	945.450	1
0.000	0.000	0.000	945.450	2
0.000	0.000	0.000	825.450	3
0.000	0.000	0.000	705.450	4
0.000	0.000	0.000	705.450	5
0.000	0.000	0.000	825.450	6
0.000	0.000	0.000	945.450	7
0.000	0.000	0.000	945.450	8
0.000	0.000	0.000	945.450	9
0.000	0.000	0.000	945.450	10
0.000	0.000	0.000	945.450	11
0.000	0.000	0.000	945.450	12
0.000	0.000	0.000	945.450	13
0.000	0.000	0.000	945.450	14
0.000	0.000	0.000	945.450	15
0.000	0.000	0.000	945.450	16
0.000	0.000	0.000	945.450	17
0.000	0.000	0.000	945.450	18
0.000	0.000	0.000	945.450	19
0.000	0.000	0.000	945.450	20
0.000	0.000	0.000	945.450	21
0.000	0.000	0.000	945.450	22
0.000	0.000	0.000	945.450	23
0.000	0.000	0.000	945.450	24

CENTRAL 17	CENTRAL 18	CENTRAL 19	CENTRAL 20	HORA
93.448	131.130	266.486	244.289	1
69.373	131.130	118.435	117.049	2
69.373	131.130	118.435	117.049	3
69.373	131.130	118.435	117.049	4
69.373	131.130	118.435	117.049	5
69.373	131.130	118.435	117.049	6
72.760	131.130	139.264	134.949	7
97.720	131.130	292.753	266.864	8
106.307	131.130	311.850	312.247	9
112.169	131.130	311.850	330.750	10
113.836	131.130	311.850	330.750	11
116.474	131.130	311.850	330.750	12
116.698	131.130	311.850	330.750	13
114.572	131.130	311.850	330.750	14
111.038	131.130	311.850	330.750	15
110.724	131.130	311.850	330.750	16
113.912	131.130	311.850	330.750	17
116.265	131.130	311.850	330.750	18
115.807	131.130	311.850	330.750	19
109.523	131.130	311.850	329.246	20
111.983	131.130	311.850	330.750	21
110.421	131.130	311.850	330.750	22
109.488	131.130	311.850	329.060	23
104.040	131.130	311.850	300.265	24

CENTRAL 21	CENTRAL 22	CENTRAL 23	CENTRAL 24	HORA
259.344	0.000	0.000	66.543	1
94.344	0.000	0.000	35.400	2
83.107	0.000	0.000	35.400	3
83.107	0.000	0.000	35.400	4
83.107	0.000	0.000	35.400	5
83.107	0.000	0.000	35.400	6
124.161	0.000	0.000	35.400	7
289.161	0.000	0.000	88.208	8
330.750	0.000	0.000	131.764	9
330.750	0.000	0.000	141.600	10
330.750	0.000	0.000	141.600	11
330.750	0.000	0.000	141.600	12
330.750	0.000	0.000	141.600	13
330.750	0.000	0.000	141.600	14
330.750	0.000	0.000	141.600	15
330.750	0.000	0.000	141.600	16
330.750	0.000	0.000	141.600	17
330.750	0.000	0.000	141.600	18
330.750	0.000	0.000	141.600	19
330.750	0.000	0.000	141.600	20
330.750	0.000	0.000	141.600	21
330.750	0.000	0.000	141.600	22
330.750	0.000	0.000	141.600	23
330.750	0.000	0.000	120.265	24

CENTRAL 25	CENTRAL 26	CENTRAL 27	CENTRAL 28	HORA
0.000	0.000	70.900	152.800	1
0.000	0.000	70.900	152.800	2
0.000	0.000	70.900	112.800	3
0.000	0.000	70.900	112.800	4
0.000	0.000	70.900	152.800	5
0.000	0.000	70.900	112.800	6
0.000	0.000	70.900	152.800	7
0.000	0.000	108.216	152.800	8
0.000	0.000	211.297	152.800	9
0.000	0.000	281.671	152.800	10
0.000	0.000	301.685	152.800	11
0.000	0.000	330.750	152.800	12
0.000	0.000	330.750	152.800	13
0.000	0.000	310.523	152.800	14
0.000	0.000	268.098	152.800	15
0.000	0.000	264.331	152.800	16
0.000	0.000	302.591	152.800	17
0.000	0.000	330.750	152.800	18
0.000	0.000	325.345	152.800	19
0.000	0.000	249.908	152.800	20
0.000	0.000	279.445	152.800	21
0.000	0.000	260.690	152.800	22
0.000	0.000	249.487	152.800	23
0.000	0.000	184.083	152.800	24

CENTRAL 29	CENTRAL 30	CENTRAL 31	CENTRAL 32	HORA
0.000	123.879	85.500	123.800	1
0.000	85.050	85.500	123.800	2
0.000	85.050	85.500	123.800	3
0.000	85.050	85.500	123.800	4
0.000	85.050	85.500	123.800	5
0.000	85.050	85.500	123.800	6
0.000	85.050	85.500	123.800	7
0.000	152.460	85.500	134.983	8
0.000	209.919	85.500	210.890	9
0.000	249.146	85.500	262.712	10
0.000	260.302	85.500	277.450	11
0.000	277.955	85.500	300.771	12
0.000	279.453	85.500	302.749	13
0.000	265.228	85.500	283.958	14
0.000	241.580	85.500	252.717	15
0.000	239.480	85.500	249.943	16
0.000	260.807	85.500	278.117	17
0.000	276.558	85.500	298.926	18
0.000	273.490	85.500	0.000	19
0.000	231.441	85.500	0.000	20
0.000	247.905	85.500	0.000	21
0.000	237.451	85.500	0.000	22
0.000	231.206	85.500	0.000	23
0.000	0.000	0.000	0.000	24

CENTRAL 33	CENTRAL 34	CENTRAL 35	CENTRAL 36	HORA
0.000	0.000	140.817	0.000	1
0.000	0.000	100.650	0.000	2
0.000	0.000	100.650	0.000	3
0.000	0.000	100.650	0.000	4
0.000	0.000	100.650	0.000	5
0.000	0.000	100.650	0.000	6
0.000	0.000	100.650	0.000	7
0.000	0.000	184.122	0.000	8
0.000	0.000	271.182	0.000	9
0.000	0.000	330.618	0.000	10
0.000	0.000	330.750	0.000	11
0.000	0.000	330.750	0.000	12
0.000	0.000	330.750	0.000	13
0.000	0.000	330.750	0.000	14
0.000	0.000	319.154	0.000	15
0.000	0.000	315.973	0.000	16
0.000	0.000	330.750	0.000	17
0.000	0.000	330.750	0.000	18
0.000	0.000	330.750	0.000	19
0.000	0.000	303.792	0.000	20
0.000	0.000	328.738	0.000	21
0.000	0.000	312.898	0.000	22
0.000	0.000	303.436	0.000	23
0.000	0.000	248.197	0.000	24

CENTRAL 37	CENTRAL 38	CENTRAL 39	CENTRAL 40	HORA
138.535	138.535	138.535	138.535	1
108.700	108.700	108.700	108.700	2
108.700	108.700	108.700	108.700	3
108.700	108.700	108.700	108.700	4
108.700	108.700	108.700	108.700	5
108.700	108.700	108.700	108.700	6
108.700	108.700	108.700	108.700	7
156.845	156.845	156.845	156.845	8
193.653	193.653	193.653	193.653	9
218.782	218.782	218.782	218.782	10
225.929	225.929	225.929	225.929	11
237.237	237.237	237.237	237.237	12
238.196	238.196	238.196	238.196	13
229.084	229.084	229.084	229.084	14
213.935	213.935	213.935	213.935	15
212.590	212.590	212.590	212.590	16
226.252	226.252	226.252	226.252	17
236.342	236.342	236.342	236.342	18
234.377	234.377	234.377	234.377	19
207.440	207.440	207.440	207.440	20
217.987	217.987	217.987	217.987	21
211.290	211.290	211.290	211.290	22
207.289	207.289	207.289	207.289	23
183.935	183.935	183.935	183.935	24

CENTRAL 42	CENTRAL 42	CENTRAL 43	CENTRAL 44	HORA
83.763	67.900	89.591	128.167	1
36.200	67.900	63.250	100.650	2
36.200	67.900	63.250	100.650	3
36.200	67.900	63.250	100.650	4
36.200	67.900	63.250	100.650	5
36.200	67.900	63.250	100.650	6
36.200	67.900	63.250	100.650	7
103.907	67.900	114.408	153.659	8
144.403	67.900	164.301	204.907	9
172.050	67.900	198.362	239.894	10
179.912	76.892	208.049	249.844	11
192.354	148.167	223.378	265.589	12
193.409	154.214	224.678	266.925	13
183.384	96.782	212.327	254.238	14
166.717	67.900	191.793	233.146	15
165.237	67.900	189.969	231.273	16
180.268	78.930	208.488	250.294	17
191.369	142.527	222.165	264.343	18
189.207	130.140	219.501	261.607	19
159.572	67.900	182.989	224.103	20
171.175	67.900	197.285	238.787	21
163.807	67.900	188.207	229.463	22
159.406	67.900	182.785	223.893	23
0.000	67.900	151.129	0.000	24

CENTRAL 45	CENTRAL 46	CENTRAL 47	CENTRAL 48	HORA
0.000	0.000	0.000	102.838	1
0.000	0.000	0.000	42.795	2
0.000	0.000	0.000	42.795	3
0.000	0.000	0.000	42.795	4
0.000	0.000	0.000	42.795	5
0.000	0.000	0.000	42.795	6
0.000	0.000	0.000	51.242	7
0.000	0.000	0.000	113.491	8
0.000	0.000	0.000	134.907	9
0.000	0.000	0.000	141.600	10
0.000	0.000	0.000	141.600	11
0.000	0.000	0.000	141.600	12
0.000	0.000	0.000	141.600	13
0.000	0.000	0.000	141.600	14
0.000	0.000	0.000	141.600	15
0.000	0.000	0.000	141.600	16
0.000	0.000	0.000	141.600	17
0.000	0.000	0.000	141.600	18
0.000	0.000	0.000	141.600	19
0.000	0.000	0.000	141.600	20
0.000	0.000	0.000	141.600	21
0.000	0.000	0.000	141.600	22
0.000	0.000	0.000	141.600	23
0.000	0.000	0.000	129.253	24

CENTRAL 49	CENTRAL 50	CENTRAL 51	CENTRAL 52	HORA
0.000	71.600	187.692	0.000	1
0.000	71.600	81.250	0.000	2
0.000	71.600	81.250	0.000	3
0.000	71.600	81.250	0.000	4
0.000	71.600	81.250	0.000	5
0.000	71.600	81.250	0.000	6
0.000	71.600	81.250	0.000	7
0.000	71.600	222.266	0.000	8
0.000	71.600	291.772	0.000	9
0.000	71.600	330.750	0.000	10
0.000	140.600	330.750	0.000	11
0.000	209.600	330.750	0.000	12
0.000	209.600	330.750	0.000	13
0.000	140.600	330.750	0.000	14
0.000	71.600	330.072	0.000	15
0.000	71.600	327.532	0.000	16
0.000	85.401	330.750	0.000	17
0.000	154.401	330.750	0.000	18
0.000	140.600	330.750	0.000	19
0.000	71.600	317.807	0.000	20
0.000	71.600	330.750	0.000	21
0.000	71.600	325.077	0.000	22
0.000	71.600	317.523	0.000	23
0.000	71.600	273.422	0.000	24

CENTRAL 53	CENTRAL 54	CENTRAL 55	CENTRAL 56	HORA
104.628	104.628	104.628	1.018.030	1
99.250	99.250	99.250	1.015.845	2
99.250	99.250	99.250	895.845	3
99.250	99.250	99.250	1.015.845	4
99.250	99.250	99.250	895.845	5
99.250	99.250	99.250	898.030	6
99.250	99.250	99.250	1.018.030	7
129.489	129.489	129.489	1.018.030	8
179.467	179.467	179.467	1.018.030	9
213.588	213.588	213.588	1.018.030	10
223.292	223.292	223.292	1.018.030	11
238.647	238.647	238.647	1.018.030	12
239.949	239.949	239.949	1.018.030	13
227.577	227.577	227.577	1.018.030	14
207.007	207.007	207.007	1.018.030	15
205.181	205.181	205.181	1.018.030	16
223.731	223.731	223.731	1.018.030	17
237.432	237.432	237.432	1.018.030	18
234.763	234.763	234.763	1.018.030	19
198.188	198.188	198.188	1.018.030	20
212.509	212.509	212.509	1.018.030	21
203.415	203.415	203.415	1.018.030	22
197.983	197.983	197.983	1.018.030	23
166.272	166.272	166.272	1.018.030	24

CENTRAL 57	CENTRAL 58	CENTRAL 59	CENTRAL 60	HORA
958.820	430.000	80.000	0.000	1
901.152	430.000	80.000	0.000	2
958.820	215.000	80.000	0.000	3
958.820	215.000	80.000	0.000	4
838.820	430.000	80.000	0.000	5
958.820	215.000	80.000	0.000	6
958.820	430.000	80.000	0.000	7
958.820	430.000	80.000	0.000	8
958.820	430.000	80.000	0.000	9
958.820	430.000	80.000	0.000	10
958.820	430.000	80.000	0.000	11
958.820	430.000	80.000	0.000	12
958.820	430.000	80.000	0.000	13
958.820	430.000	80.000	0.000	14
958.820	430.000	80.000	0.000	15
958.820	430.000	80.000	0.000	16
958.820	430.000	80.000	0.000	17
958.820	430.000	80.000	0.000	18
958.820	430.000	80.000	0.000	19
958.820	430.000	80.000	0.000	20
958.820	430.000	80.000	0.000	21
958.820	430.000	80.000	0.000	22
958.820	430.000	80.000	0.000	23
958.820	430.000	80.000	0.000	24

CENTRAL 61	CENTRAL 62	CENTRAL 63	CENTRAL 64	HORA
0.000	0.000	310.000	0.000	1
0.000	0.000	310.000	0.000	2
0.000	0.000	310.000	0.000	3
0.000	0.000	310.000	0.000	4
0.000	0.000	310.000	0.000	5
0.000	0.000	310.000	0.000	6
0.000	0.000	310.000	0.000	7
0.000	0.000	310.000	0.000	8
0.000	0.000	310.000	0.000	9
0.000	0.000	310.000	0.000	10
0.000	0.000	310.000	0.000	11
0.000	0.000	310.000	0.000	12
0.000	0.000	310.000	0.000	13
0.000	0.000	310.000	0.000	14
0.000	0.000	310.000	0.000	15
0.000	0.000	310.000	0.000	16
0.000	0.000	310.000	0.000	17
0.000	0.000	310.000	0.000	18
0.000	0.000	310.000	0.000	19
0.000	0.000	310.000	0.000	20
0.000	0.000	310.000	0.000	21
0.000	0.000	310.000	0.000	22
0.000	0.000	310.000	0.000	23
0.000	0.000	310.000	0.000	24

CENTRAL 65	CENTRAL 66	CENTRAL 67	CENTRAL 68	HORA
0.000	0.000	0.000	0.000	1
0.000	0.000	0.000	0.000	2
0.000	0.000	0.000	0.000	3
0.000	0.000	0.000	0.000	4
0.000	0.000	0.000	0.000	5
0.000	0.000	0.000	0.000	6
0.000	0.000	0.000	0.000	7
0.000	0.000	0.000	0.000	8
0.000	0.000	0.000	0.000	9
0.000	0.000	0.000	0.000	10
0.000	0.000	0.000	0.000	11
0.000	0.000	0.000	0.000	12
0.000	0.000	0.000	0.000	13
0.000	0.000	0.000	0.000	14
0.000	0.000	0.000	0.000	15
0.000	0.000	0.000	0.000	16
0.000	0.000	0.000	0.000	17
0.000	0.000	0.000	0.000	18
0.000	0.000	0.000	0.000	19
0.000	0.000	0.000	0.000	20
0.000	0.000	0.000	0.000	21
0.000	0.000	0.000	0.000	22
0.000	0.000	0.000	0.000	23
0.000	0.000	0.000	0.000	24

CENTRAL 69	CENTRAL 70	HORA
0.000	0.000	1
0.000	0.000	2
0.000	0.000	3
0.000	0.000	4
0.000	0.000	5
0.000	0.000	6
0.000	0.000	7
0.000	0.000	8
0.000	0.000	9
0.000	0.000	10
0.000	0.000	11
0.000	0.000	12
0.000	0.000	13
0.000	0.000	14
0.000	0.000	15
0.000	0.000	16
0.000	0.000	17
0.000	0.000	18
0.000	0.000	19
0.000	0.000	20
0.000	0.000	21
0.000	0.000	22
0.000	0.000	23
0.000	0.000	24

Valores finales de las variables hidráulicas

CENTRAL 1

Volumen	Potencia hidraulica	Volumen turbinado	Volumen vertido	Hora
40.740	0.000	0.000	0.000	1
40.740	0.000	0.000	0.000	2
40.740	0.000	0.000	0.000	3
40.740	0.000	0.000	0.000	4
40.740	0.000	0.000	0.000	5
40.740	0.000	0.000	0.000	6
40.740	0.000	0.000	0.000	7
40.740	0.000	0.000	0.000	8
40.740	0.000	0.000	0.000	9
40.740	0.000	0.000	0.000	10
40.740	0.000	0.000	0.000	11
40.740	0.000	0.000	0.000	12
40.740	0.000	0.000	0.000	13
40.740	0.000	0.000	0.000	14
40.740	0.000	0.000	0.000	15
40.740	0.000	0.000	0.000	16
40.740	0.000	0.000	0.000	17
40.740	0.000	0.000	0.000	18
40.740	0.000	0.000	0.000	19
40.740	0.000	0.000	0.000	20
40.740	0.000	0.000	0.000	21
40.740	0.000	0.000	0.000	22
40.740	0.000	0.000	0.000	23
40.740	0.000	0.000	0.000	24

CENTRAL 2

Volumen	Potencia hidraulica	Volumen turbinado	Volumen vertido	Hora
40.246	72.001	59.500	0.000	1
40.234	3.859	3.189	0.000	2
40.234	0.000	0.000	0.000	3
40.234	0.000	0.000	0.000	4
40.234	0.000	0.000	0.000	5
40.234	0.000	0.000	0.000	6
40.020	72.001	59.500	0.000	7
39.806	72.001	59.500	0.000	8
39.592	72.001	59.500	0.000	9
39.378	72.001	59.500	0.000	10
39.163	72.001	59.500	0.000	11
38.949	72.001	59.500	0.000	12
38.735	72.001	59.500	0.000	13
38.521	72.001	59.500	0.000	14
38.307	72.001	59.500	0.000	15
38.092	72.001	59.500	0.000	16
37.878	72.001	59.500	0.000	17
37.664	72.001	59.500	0.000	18
37.450	72.001	59.500	0.000	19
37.236	72.001	59.500	0.000	20
37.021	72.001	59.500	0.000	21
36.807	72.001	59.500	0.000	22
36.593	72.001	59.500	0.000	23
36.379	72.001	59.500	0.000	24

CENTRAL 3

Volumen	Potencia hidraulica	Volumen turbinado	Volumen vertido	Hora
40.317	25.520	35.200	0.000	1
40.202	25.520	35.200	0.000	2
40.076	25.520	35.200	0.000	3
39.949	25.520	35.200	0.000	4
39.822	25.520	35.200	0.000	5
39.695	25.520	35.200	0.000	6
39.783	25.520	35.200	0.000	7
39.870	25.520	35.200	0.000	8
39.958	25.520	35.200	0.000	9
40.045	25.520	35.200	0.000	10
40.133	25.520	35.200	0.000	11
40.220	25.520	35.200	0.000	12
40.308	25.520	35.200	0.000	13
40.395	25.520	35.200	0.000	14
40.483	25.520	35.200	0.000	15
40.570	25.520	35.200	0.000	16
40.658	25.520	35.200	0.000	17
40.745	25.520	35.200	0.000	18
40.833	25.520	35.200	0.000	19
40.920	25.520	35.200	0.000	20
41.008	25.520	35.200	0.000	21
41.095	25.520	35.200	0.000	22
41.183	25.520	35.200	0.000	23
41.270	25.520	35.200	0.000	24

CENTRAL 4

Volumen	Potencia hidraulica	Volumen turbinado	Volumen vertido	Hora
0.000	19.997	35.200	0.000	1
0.000	19.997	35.200	0.000	2
0.000	19.997	35.200	0.000	3
0.000	19.997	35.200	0.000	4
0.000	19.997	35.200	0.000	5
0.000	19.997	35.200	0.000	6
0.000	19.997	35.200	0.000	7
0.000	19.997	35.200	0.000	8
0.000	19.997	35.200	0.000	9
0.000	19.997	35.200	0.000	10
0.000	19.997	35.200	0.000	11
0.000	19.997	35.200	0.000	12
0.000	19.997	35.200	0.000	13
0.000	19.997	35.200	0.000	14
0.000	19.997	35.200	0.000	15
0.000	19.997	35.200	0.000	16
0.000	19.997	35.200	0.000	17
0.000	19.997	35.200	0.000	18
0.000	19.997	35.200	0.000	19
0.000	19.997	35.200	0.000	20
0.000	19.997	35.200	0.000	21
0.000	19.997	35.200	0.000	22
0.000	19.997	35.200	0.000	23
0.000	19.997	35.200	0.000	24

CENTRAL 5

Volumen	Potencia hidraulica	Volumen turbinado	Volumen vertido	Hora
168.767	72.000	100.000	0.000	1
168.533	72.000	100.000	0.000	2
168.401	51.920	72.111	0.000	3
168.527	0.000	0.000	0.000	4
168.654	0.000	0.000	0.000	5
168.781	0.000	0.000	0.000	6
168.547	72.000	100.000	0.000	7
168.314	72.000	100.000	0.000	8
168.081	72.000	100.000	0.000	9
167.848	72.000	100.000	0.000	10
167.614	72.000	100.000	0.000	11
167.381	72.000	100.000	0.000	12
167.148	72.000	100.000	0.000	13
166.914	72.000	100.000	0.000	14
166.681	72.000	100.000	0.000	15
166.448	72.000	100.000	0.000	16
166.215	72.000	100.000	0.000	17
165.981	72.000	100.000	0.000	18
165.748	72.000	100.000	0.000	19
165.515	72.000	100.000	0.000	20
165.282	72.000	100.000	0.000	21
165.048	72.000	100.000	0.000	22
164.815	72.000	100.000	0.000	23
164.582	72.000	100.000	0.000	24

CENTRAL 6

Volumen	Potencia hidraulica	Volumen turbinado	Volumen vertido	Hora
4.992	0.000	0.000	0.000	1
5.352	0.000	0.000	0.000	2
5.612	0.000	0.000	0.000	3
5.612	0.000	0.000	0.000	4
5.612	0.000	0.000	0.000	5
5.612	0.000	0.000	0.000	6
5.972	0.000	0.000	0.000	7
6.332	0.000	0.000	0.000	8
6.368	101.485	89.778	0.000	9
6.314	129.996	115.000	0.000	10
6.260	129.996	115.000	0.000	11
6.206	129.996	115.000	0.000	12
6.152	129.996	115.000	0.000	13
6.098	129.996	115.000	0.000	14
6.044	129.996	115.000	0.000	15
5.990	129.996	115.000	0.000	16
5.936	129.996	115.000	0.000	17
5.882	129.996	115.000	0.000	18
5.828	129.996	115.000	0.000	19
5.774	129.996	115.000	0.000	20
5.720	129.996	115.000	0.000	21
5.666	129.996	115.000	0.000	22
5.612	129.996	115.000	0.000	23
5.558	129.996	115.000	0.000	24

CENTRAL 7

Volumen	Potencia hidraulica	Volumen turbinado	Volumen vertido	Hora
4.512	0.000	0.000	0.000	1
4.512	0.000	0.000	0.000	2
4.512	0.000	0.000	0.000	3
4.512	0.000	0.000	0.000	4
4.512	0.000	0.000	0.000	5
4.512	0.000	0.000	0.000	6
4.512	0.000	0.000	0.000	7
4.512	0.000	0.000	0.000	8
4.835	0.000	0.000	0.000	9
5.249	0.000	0.000	0.000	10
5.166	35.990	138.000	0.000	11
5.084	35.990	138.000	0.000	12
5.001	35.990	138.000	0.000	13
4.918	35.990	138.000	0.000	14
5.332	0.000	0.000	0.000	15
5.321	30.803	118.111	0.000	16
5.238	35.990	138.000	0.000	17
5.155	35.990	138.000	0.000	18
5.072	35.990	138.000	0.000	19
4.990	35.990	138.000	0.000	20
5.404	0.000	0.000	0.000	21
5.580	17.213	66.000	0.000	22
5.497	35.990	138.000	0.000	23
5.414	35.990	138.000	0.000	24

CENTRAL 8

Volumen	Potencia hidraulica	Volumen turbinado	Volumen vertido	Hora
0.426	0.000	0.000	0.000	1
0.426	0.000	0.000	0.000	2
0.426	0.000	0.000	0.000	3
0.426	0.000	0.000	0.000	4
0.426	0.000	0.000	0.000	5
0.426	0.000	0.000	0.000	6
0.426	0.000	0.000	0.000	7
0.426	0.000	0.000	0.000	8
0.426	0.000	0.000	0.000	9
0.426	0.000	0.000	0.000	10
0.347	38.400	160.000	0.000	11
0.268	38.400	160.000	0.000	12
0.188	38.400	160.000	0.000	13
0.109	38.400	160.000	0.000	14
0.109	0.000	0.000	0.000	15
0.534	0.000	0.000	0.000	16
0.710	21.413	89.222	0.000	17
0.631	38.400	160.000	0.000	18
0.552	38.400	160.000	0.000	19
0.472	38.400	160.000	0.000	20
0.472	0.000	0.000	0.000	21
0.710	0.000	0.000	0.000	22
0.631	38.400	160.000	0.000	23
0.611	34.427	143.444	0.000	24

CENTRAL 9

Volumen	Potencia hidraulica	Volumen turbinado	Volumen vertido	Hora
0.510	0.000	0.000	0.000	1
0.510	0.000	0.000	0.000	2
0.510	0.000	0.000	0.000	3
0.510	0.000	0.000	0.000	4
0.510	0.000	0.000	0.000	5
0.510	0.000	0.000	0.000	6
0.510	0.000	0.000	0.000	7
0.510	0.000	0.000	0.000	8
0.510	0.000	0.000	0.000	9
0.510	0.000	0.000	0.000	10
0.510	13.488	160.000	0.000	11
0.510	13.488	160.000	0.000	12
0.510	13.488	160.000	0.000	13
0.510	13.488	160.000	0.000	14
0.510	0.000	0.000	0.000	15
0.510	0.000	0.000	0.000	16
0.672	3.737	44.333	0.000	17
0.672	13.488	160.000	0.000	18
0.672	13.488	160.000	0.000	19
0.672	13.488	160.000	0.000	20
0.672	0.000	0.000	0.000	21
0.672	0.000	0.000	0.000	22
0.672	13.488	160.000	0.000	23
0.612	13.488	160.000	0.000	24

CENTRAL 10

Volumen	Potencia hidraulica	Volumen turbinado	Volumen vertido	Hora
73.114	64.001	24.000	0.000	1
73.027	64.001	24.000	0.000	2
72.941	64.001	24.000	0.000	3
72.854	64.001	24.000	0.000	4
72.768	64.001	24.000	0.000	5
72.682	64.001	24.000	0.000	6
72.595	64.001	24.000	0.000	7
72.509	64.001	24.000	0.000	8
72.422	64.001	24.000	0.000	9
72.336	64.001	24.000	0.000	10
72.250	64.001	24.000	0.000	11
72.163	64.001	24.000	0.000	12
72.077	64.001	24.000	0.000	13
71.990	64.001	24.000	0.000	14
71.904	64.001	24.000	0.000	15
71.818	64.001	24.000	0.000	16
71.731	64.001	24.000	0.000	17
71.645	64.001	24.000	0.000	18
71.558	64.001	24.000	0.000	19
71.472	64.001	24.000	0.000	20
71.386	64.001	24.000	0.000	21
71.299	64.001	24.000	0.000	22
71.213	64.001	24.000	0.000	23
71.126	64.001	24.000	0.000	24

CENTRAL 11

Volumen	Potencia hidraulica	Volumen turbinado	Volumen vertido	Hora
3.878	0.000	0.000	0.000	1
3.965	0.000	0.000	0.000	2
4.051	0.000	0.000	0.000	3
4.138	0.000	0.000	0.000	4
4.224	0.000	0.000	0.000	5
4.310	0.000	0.000	0.000	6
4.397	0.000	0.000	0.000	7
4.483	0.000	0.000	0.000	8
4.570	0.000	0.000	0.000	9
4.656	0.000	0.000	0.000	10
4.656	49.999	24.000	0.000	11
4.656	49.999	24.000	0.000	12
4.656	49.999	24.000	0.000	13
4.656	49.999	24.000	0.000	14
4.742	0.000	0.000	0.000	15
4.829	0.000	0.000	0.000	16
4.829	49.999	24.000	0.000	17
4.829	49.999	24.000	0.000	18
4.829	49.999	24.000	0.000	19
4.829	49.999	24.000	0.000	20
4.915	0.000	0.000	0.000	21
5.002	0.000	0.000	0.000	22
5.002	49.999	24.000	0.000	23
5.002	49.999	24.000	0.000	24

CENTRAL 12

Volumen	Potencia hidraulica	Volumen turbinado	Volumen vertido	Hora
1.168	17.600	8.860	0.000	1
1.136	17.600	8.860	0.000	2
1.134	1.148	0.578	0.000	3
1.134	0.000	0.000	0.000	4
1.134	0.000	0.000	0.000	5
1.134	0.000	0.000	0.000	6
1.102	17.600	8.860	0.000	7
1.070	17.600	8.860	0.000	8
1.038	17.600	8.860	0.000	9
1.007	17.600	8.860	0.000	10
0.975	17.600	8.860	0.000	11
0.943	17.600	8.860	0.000	12
0.911	17.600	8.860	0.000	13
0.879	17.600	8.860	0.000	14
0.847	17.600	8.860	0.000	15
0.815	17.600	8.860	0.000	16
0.783	17.600	8.860	0.000	17
0.751	17.600	8.860	0.000	18
0.719	17.600	8.860	0.000	19
0.688	17.600	8.860	0.000	20
0.656	17.600	8.860	0.000	21
0.624	17.600	8.860	0.000	22
0.592	17.600	8.860	0.000	23
0.560	17.600	8.860	0.000	24

CENTRAL 13

Volumen	Potencia hidraulica	Volumen turbinado	Volumen vertido	Hora
22.656	18.000	15.400	0.000	1
22.633	18.000	15.400	0.000	2
22.580	18.000	15.400	0.000	3
22.524	18.000	15.400	0.000	4
22.469	18.000	15.400	0.000	5
22.413	18.000	15.400	0.000	6
22.390	18.000	15.400	0.000	7
22.366	18.000	15.400	0.000	8
22.343	18.000	15.400	0.000	9
22.319	18.000	15.400	0.000	10
22.296	18.000	15.400	0.000	11
22.272	18.000	15.400	0.000	12
22.248	18.000	15.400	0.000	13
22.225	18.000	15.400	0.000	14
22.201	18.000	15.400	0.000	15
22.178	18.000	15.400	0.000	16
22.154	18.000	15.400	0.000	17
22.131	18.000	15.400	0.000	18
22.107	18.000	15.400	0.000	19
22.084	18.000	15.400	0.000	20
22.060	18.000	15.400	0.000	21
22.037	18.000	15.400	0.000	22
22.013	18.000	15.400	0.000	23
21.989	18.000	15.400	0.000	24

CENTRAL 14

Volumen	Potencia hidraulica	Volumen turbinado	Volumen vertido	Hora
2.592	57.999	20.480	0.000	1
2.573	57.999	20.480	0.000	2
2.625	3.373	1.191	0.000	3
2.680	0.000	0.000	0.000	4
2.735	0.000	0.000	0.000	5
2.791	0.000	0.000	0.000	6
2.773	57.999	20.480	0.000	7
2.754	57.999	20.480	0.000	8
2.736	57.999	20.480	0.000	9
2.718	57.999	20.480	0.000	10
2.699	57.999	20.480	0.000	11
2.681	57.999	20.480	0.000	12
2.663	57.999	20.480	0.000	13
2.645	57.999	20.480	0.000	14
2.626	57.999	20.480	0.000	15
2.608	57.999	20.480	0.000	16
2.590	57.999	20.480	0.000	17
2.571	57.999	20.480	0.000	18
2.553	57.999	20.480	0.000	19
2.535	57.999	20.480	0.000	20
2.517	57.999	20.480	0.000	21
2.498	57.999	20.480	0.000	22
2.480	57.999	20.480	0.000	23
2.462	57.999	20.480	0.000	24

CENTRAL 15

Volumen	Potencia hidraulica	Volumen turbinado	Volumen vertido	Hora
283.800	0.000	0.000	0.000	1
283.800	0.000	0.000	0.000	2
283.800	0.000	0.000	0.000	3
283.800	0.000	0.000	0.000	4
283.800	0.000	0.000	0.000	5
283.800	0.000	0.000	0.000	6
283.800	0.000	0.000	0.000	7
283.800	0.000	0.000	0.000	8
283.308	257.969	136.600	0.000	9
282.816	257.969	136.600	0.000	10
282.325	257.969	136.600	0.000	11
281.833	257.969	136.600	0.000	12
281.341	257.969	136.600	0.000	13
280.849	257.969	136.600	0.000	14
280.358	257.969	136.600	0.000	15
279.866	257.969	136.600	0.000	16
279.374	257.969	136.600	0.000	17
278.882	257.969	136.600	0.000	18
278.391	257.969	136.600	0.000	19
277.899	257.969	136.600	0.000	20
277.407	257.969	136.600	0.000	21
276.915	257.969	136.600	0.000	22
276.424	257.969	136.600	0.000	23
275.932	257.969	136.600	0.000	24

CENTRAL 16

Volumen	Potencia hidraulica	Volumen turbinado	Volumen vertido	Hora
125.776	233.758	82.720	0.000	1
125.552	233.758	82.720	0.000	2
125.258	233.758	82.720	0.000	3
124.961	233.758	82.720	0.000	4
124.663	233.758	82.720	0.000	5
124.365	233.758	82.720	0.000	6
124.141	233.758	82.720	0.000	7
123.917	233.758	82.720	0.000	8
124.185	233.758	82.720	0.000	9
124.452	233.758	82.720	0.000	10
124.720	233.758	82.720	0.000	11
124.988	233.758	82.720	0.000	12
125.255	233.758	82.720	0.000	13
125.523	233.758	82.720	0.000	14
125.791	233.758	82.720	0.000	15
126.058	233.758	82.720	0.000	16
126.326	233.758	82.720	0.000	17
126.594	233.758	82.720	0.000	18
126.862	233.758	82.720	0.000	19
127.129	233.758	82.720	0.000	20
127.397	233.758	82.720	0.000	21
127.665	233.758	82.720	0.000	22
127.932	233.758	82.720	0.000	23
128.200	233.758	82.720	0.000	24

CENTRAL 17

Volumen	Potencia hidraulica	Volumen turbinado	Volumen vertido	Hora
31.464	11.000	10.000	0.000	1
31.428	11.000	10.000	0.000	2
31.392	11.000	10.000	0.000	3
31.356	11.000	10.000	0.000	4
31.320	11.000	10.000	0.000	5
31.284	11.000	10.000	0.000	6
31.248	11.000	10.000	0.000	7
31.212	11.000	10.000	0.000	8
31.176	11.000	10.000	0.000	9
31.140	11.000	10.000	0.000	10
31.104	11.000	10.000	0.000	11
31.068	11.000	10.000	0.000	12
31.032	11.000	10.000	0.000	13
30.996	11.000	10.000	0.000	14
30.960	11.000	10.000	0.000	15
30.924	11.000	10.000	0.000	16
30.888	11.000	10.000	0.000	17
30.852	11.000	10.000	0.000	18
30.816	11.000	10.000	0.000	19
30.780	11.000	10.000	0.000	20
30.744	11.000	10.000	0.000	21
30.708	11.000	10.000	0.000	22
30.672	11.000	10.000	0.000	23
30.636	11.000	10.000	0.000	24

CENTRAL 18

Volumen	Potencia hidraulica	Volumen turbinado	Volumen vertido	Hora
1.655	36.000	12.000	0.000	1
1.648	36.000	12.000	0.000	2
1.640	36.000	12.000	0.000	3
1.633	36.000	12.000	0.000	4
1.626	36.000	12.000	0.000	5
1.619	36.000	12.000	0.000	6
1.612	36.000	12.000	0.000	7
1.604	36.000	12.000	0.000	8
1.597	36.000	12.000	0.000	9
1.590	36.000	12.000	0.000	10
1.583	36.000	12.000	0.000	11
1.576	36.000	12.000	0.000	12
1.568	36.000	12.000	0.000	13
1.561	36.000	12.000	0.000	14
1.554	36.000	12.000	0.000	15
1.547	36.000	12.000	0.000	16
1.540	36.000	12.000	0.000	17
1.532	36.000	12.000	0.000	18
1.525	36.000	12.000	0.000	19
1.518	36.000	12.000	0.000	20
1.511	36.000	12.000	0.000	21
1.504	36.000	12.000	0.000	22
1.496	36.000	12.000	0.000	23
1.489	36.000	12.000	0.000	24

CENTRAL 19

Volumen	Potencia hidraulica	Volumen turbinado	Volumen vertido	Hora
2.288	11.497	66.000	0.000	1
2.051	11.497	66.000	0.000	2
1.813	11.497	66.000	0.000	3
1.576	11.497	66.000	0.000	4
1.338	11.497	66.000	0.000	5
1.100	11.497	66.000	0.000	6
0.863	11.497	66.000	0.000	7
0.625	11.497	66.000	0.000	8
0.388	11.497	66.000	0.000	9
0.150	11.497	66.000	0.000	10
0.575	11.497	66.000	0.000	11
1.000	11.497	66.000	0.000	12
1.424	11.497	66.000	0.000	13
1.849	11.497	66.000	0.000	14
1.612	11.497	66.000	0.000	15
1.374	11.497	66.000	0.000	16
1.382	11.497	66.000	0.000	17
1.807	11.497	66.000	0.000	18
2.232	11.497	66.000	0.000	19
2.657	11.497	66.000	0.000	20
2.419	11.497	66.000	0.000	21
2.182	11.497	66.000	0.000	22
2.606	11.497	66.000	0.000	23
3.031	11.497	66.000	0.000	24

CENTRAL 20

Volumen	Potencia hidraulica	Volumen turbinado	Volumen vertido	Hora
4.613	37.989	135.000	0.000	1
4.468	37.989	135.000	0.000	2
4.323	37.989	135.000	0.000	3
4.178	37.989	135.000	0.000	4
4.033	37.989	135.000	0.000	5
3.888	37.989	135.000	0.000	6
3.743	37.989	135.000	0.000	7
3.598	37.989	135.000	0.000	8
3.453	37.989	135.000	0.000	9
3.308	37.989	135.000	0.000	10
3.163	37.989	135.000	0.000	11
3.018	37.989	135.000	0.000	12
2.873	37.989	135.000	0.000	13
2.728	37.989	135.000	0.000	14
2.583	37.989	135.000	0.000	15
2.438	37.989	135.000	0.000	16
2.293	37.989	135.000	0.000	17
2.148	37.989	135.000	0.000	18
2.003	37.989	135.000	0.000	19
1.858	37.989	135.000	0.000	20
1.713	37.989	135.000	0.000	21
1.568	37.989	135.000	0.000	22
1.423	37.989	135.000	0.000	23
1.278	37.989	135.000	0.000	24

CENTRAL 21

Volumen	Potencia hidraulica	Volumen turbinado	Volumen vertido	Hora
3.529	33.677	237.500	0.000	1
3.397	33.677	237.500	0.000	2
3.266	33.678	237.500	0.000	3
3.801	7.421	52.333	0.000	4
4.525	0.000	0.000	0.000	5
4.393	33.678	237.500	0.000	6
4.262	33.677	237.500	0.000	7
4.130	33.678	237.500	0.000	8
3.999	33.678	237.500	0.000	9
3.868	33.678	237.500	0.000	10
3.736	33.677	237.500	0.000	11
3.605	33.677	237.500	0.000	12
3.473	33.678	237.500	0.000	13
3.342	33.678	237.500	0.000	14
3.211	33.678	237.500	0.000	15
3.079	33.678	237.500	0.000	16
2.948	33.678	237.500	0.000	17
2.816	33.678	237.500	0.000	18
2.685	33.678	237.500	0.000	19
2.554	33.678	237.500	0.000	20
2.422	33.678	237.500	0.000	21
2.291	33.678	237.500	0.000	22
2.159	33.678	237.500	0.000	23
2.028	33.678	237.500	0.000	24

CENTRAL 22

Volumen	Potencia hidraulica	Volumen turbinado	Volumen vertido	Hora
116.575	253.500	300.000	0.000	1
116.350	253.500	300.000	0.000	2
116.125	253.500	300.000	0.000	3
116.313	0.000	0.000	0.000	4
116.313	0.000	0.000	0.000	5
117.048	28.167	33.333	0.000	6
117.093	190.125	225.000	0.000	7
117.138	190.125	225.000	0.000	8
117.183	190.125	225.000	0.000	9
117.228	190.125	225.000	0.000	10
117.003	253.500	300.000	0.000	11
116.778	253.500	300.000	0.000	12
116.553	253.500	300.000	0.000	13
116.328	253.500	300.000	0.000	14
116.303	206.556	244.444	0.000	15
116.078	253.500	300.000	0.000	16
115.853	253.500	300.000	0.000	17
115.628	253.500	300.000	0.000	18
115.403	253.500	300.000	0.000	19
115.178	253.500	300.000	0.000	20
116.033	0.000	0.000	0.000	21
116.308	136.139	161.111	0.000	22
116.083	253.500	300.000	0.000	23
115.858	253.500	300.000	0.000	24

CENTRAL 23

Volumen	Potencia hidraulica	Volumen turbinado	Volumen vertido	Hora
1.770	31.500	225.000	0.000	1
2.040	31.500	225.000	0.000	2
2.310	31.500	225.000	0.000	3
1.500	31.500	225.000	0.000	4
0.690	31.500	225.000	0.000	5
0.000	31.500	225.000	0.000	6
0.000	31.500	225.000	0.000	7
0.000	31.500	225.000	0.000	8
0.000	31.500	225.000	0.000	9
0.000	31.500	225.000	0.000	10
0.270	31.500	225.000	0.000	11
0.540	31.500	225.000	0.000	12
0.810	31.500	225.000	0.000	13
1.080	31.500	225.000	0.000	14
1.150	31.500	225.000	0.000	15
1.420	31.500	225.000	0.000	16
1.690	31.500	225.000	0.000	17
1.960	31.500	225.000	0.000	18
2.230	31.500	225.000	0.000	19
2.500	31.500	225.000	0.000	20
1.690	31.500	225.000	0.000	21
1.460	31.500	225.000	0.000	22
1.730	31.500	225.000	0.000	23
2.000	31.500	225.000	0.000	24

CENTRAL 24

Volumen	Potencia hidraulica	Volumen turbinado	Volumen vertido	Hora
363.600	0.000	0.000	0.000	1
363.600	0.000	0.000	0.000	2
363.600	0.000	0.000	0.000	3
363.600	0.000	0.000	0.000	4
363.600	0.000	0.000	0.000	5
363.600	0.000	0.000	0.000	6
363.600	0.000	0.000	0.000	7
363.600	0.000	0.000	0.000	8
363.600	0.000	0.000	0.000	9
363.600	0.000	0.000	0.000	10
362.822	224.986	216.000	0.000	11
362.045	224.986	216.000	0.000	12
361.267	224.986	216.000	0.000	13
360.490	224.986	216.000	0.000	14
360.323	48.145	46.222	0.000	15
359.546	224.986	216.000	0.000	16
358.768	224.986	216.000	0.000	17
357.990	224.986	216.000	0.000	18
357.213	224.986	216.000	0.000	19
356.435	224.986	216.000	0.000	20
356.435	0.000	0.000	0.000	21
356.435	0.000	0.000	0.000	22
355.658	224.986	216.000	0.000	23
354.880	224.986	216.000	0.000	24

CENTRAL 25

Volumen	Potencia hidraulica	Volumen turbinado	Volumen vertido	Hora
88.998	144.983	195.000	0.000	1
88.296	144.983	195.000	0.000	2
87.594	144.983	195.000	0.000	3
86.892	144.983	195.000	0.000	4
86.378	106.155	142.778	0.000	5
85.676	144.983	195.000	0.000	6
84.974	144.983	195.000	0.000	7
84.272	144.983	195.000	0.000	8
83.570	144.983	195.000	0.000	9
82.868	144.983	195.000	0.000	10
82.944	144.983	195.000	0.000	11
83.019	144.983	195.000	0.000	12
83.095	144.983	195.000	0.000	13
83.170	144.983	195.000	0.000	14
82.635	144.983	195.000	0.000	15
82.710	144.983	195.000	0.000	16
82.786	144.983	195.000	0.000	17
82.862	144.983	195.000	0.000	18
82.937	144.983	195.000	0.000	19
83.013	144.983	195.000	0.000	20
82.311	144.983	195.000	0.000	21
81.609	144.983	195.000	0.000	22
81.684	144.983	195.000	0.000	23
81.760	144.983	195.000	0.000	24

CENTRAL 26

Volumen	Potencia hidraulica	Volumen turbinado	Volumen vertido	Hora
3.714	50.000	500.000	0.000	1
3.426	50.000	500.000	0.000	2
3.138	50.000	500.000	0.000	3
4.650	0.000	0.000	0.000	4
5.974	0.000	0.000	0.000	5
6.186	36.122	361.222	0.000	6
5.898	50.000	500.000	0.000	7
5.610	50.000	500.000	0.000	8
5.322	50.000	500.000	0.000	9
5.034	50.000	500.000	0.000	10
4.746	50.000	500.000	0.000	11
4.458	50.000	500.000	0.000	12
4.170	50.000	500.000	0.000	13
3.882	50.000	500.000	0.000	14
3.594	50.000	500.000	0.000	15
3.306	50.000	500.000	0.000	16
3.018	50.000	500.000	0.000	17
2.730	50.000	500.000	0.000	18
2.442	50.000	500.000	0.000	19
2.154	50.000	500.000	0.000	20
1.866	50.000	500.000	0.000	21
1.578	50.000	500.000	0.000	22
1.290	50.000	500.000	0.000	23
1.002	50.000	500.000	0.000	24

CENTRAL 27

Volumen	Potencia hidraulica	Volumen turbinado	Volumen vertido	Hora
24.194	111.969	585.000	0.000	1
23.888	111.969	585.000	0.000	2
23.582	111.969	585.000	0.000	3
22.882	37.217	194.444	0.000	4
22.882	0.000	0.000	0.000	5
22.076	111.969	585.000	0.000	6
21.770	111.969	585.000	0.000	7
21.464	111.969	585.000	0.000	8
21.158	111.969	585.000	0.000	9
20.852	111.969	585.000	0.000	10
20.546	111.969	585.000	0.000	11
20.240	111.969	585.000	0.000	12
19.934	111.969	585.000	0.000	13
19.628	111.969	585.000	0.000	14
19.322	111.969	585.000	0.000	15
19.016	111.969	585.000	0.000	16
18.710	111.969	585.000	0.000	17
18.404	111.969	585.000	0.000	18
18.098	111.969	585.000	0.000	19
17.792	111.969	585.000	0.000	20
17.486	111.969	585.000	0.000	21
17.180	111.969	585.000	0.000	22
16.874	111.969	585.000	0.000	23
16.568	111.969	585.000	0.000	24

CENTRAL 28

Volumen	Potencia hidraulica	Volumen turbinado	Volumen vertido	Hora
1.200	0.000	0.000	0.000	1
1.200	0.000	0.000	0.000	2
1.200	0.000	0.000	0.000	3
1.200	0.000	0.000	0.000	4
1.200	0.000	0.000	0.000	5
1.200	0.000	0.000	0.000	6
1.200	0.000	0.000	0.000	7
1.200	0.000	0.000	0.000	8
1.200	0.000	0.000	0.000	9
1.200	0.000	0.000	0.000	10
1.200	0.000	0.000	0.000	11
1.200	0.000	0.000	0.000	12
1.024	59.197	49.000	0.000	13
1.024	0.000	0.000	0.000	14
1.024	0.000	0.000	0.000	15
1.024	0.000	0.000	0.000	16
1.024	0.000	0.000	0.000	17
0.847	59.197	49.000	0.000	18
0.736	37.183	30.778	0.000	19
0.736	0.000	0.000	0.000	20
0.736	0.000	0.000	0.000	21
0.736	0.000	0.000	0.000	22
0.560	59.197	49.000	0.000	23
0.560	0.000	0.000	0.000	24

CENTRAL 29

Volumen	Potencia hidraulica	Volumen turbinado	Volumen vertido	Hora
10.242	119.988	540.000	0.000	1
10.404	119.988	540.000	0.000	2
10.566	119.988	540.000	0.000	3
9.322	119.988	540.000	0.000	4
7.378	119.988	540.000	0.000	5
7.540	119.988	540.000	0.000	6
7.702	119.988	540.000	0.000	7
7.864	119.988	540.000	0.000	8
8.026	119.988	540.000	0.000	9
8.188	119.988	540.000	0.000	10
8.350	119.988	540.000	0.000	11
8.512	119.988	540.000	0.000	12
8.850	119.988	540.000	0.000	13
9.012	119.988	540.000	0.000	14
9.174	119.988	540.000	0.000	15
9.336	119.988	540.000	0.000	16
9.498	119.988	540.000	0.000	17
9.837	119.988	540.000	0.000	18
10.110	119.988	540.000	0.000	19
10.272	119.988	540.000	0.000	20
10.434	119.988	540.000	0.000	21
10.596	119.988	540.000	0.000	22
10.934	119.988	540.000	0.000	23
11.096	119.988	540.000	0.000	24

CENTRAL 30

Volumen	Potencia hidraulica	Volumen turbinado	Volumen vertido	Hora
1984.880	4200.000	4200.000	0.000	1
1969.760	4200.000	4200.000	0.000	2
1954.640	4200.000	4200.000	0.000	3
1939.520	4200.000	4200.000	0.000	4
1924.400	4200.000	4200.000	0.000	5
1909.280	4200.000	4200.000	0.000	6
1894.160	4200.000	4200.000	0.000	7
1879.040	4200.000	4200.000	0.000	8
1863.920	4200.000	4200.000	0.000	9
1848.800	4200.000	4200.000	0.000	10
1833.680	4200.000	4200.000	0.000	11
1818.560	4200.000	4200.000	0.000	12
1803.440	4200.000	4200.000	0.000	13
1788.320	4200.000	4200.000	0.000	14
1773.200	4200.000	4200.000	0.000	15
1758.080	4200.000	4200.000	0.000	16
1742.960	4200.000	4200.000	0.000	17
1727.840	4200.000	4200.000	0.000	18
1712.720	4200.000	4200.000	0.000	19
1697.600	4200.000	4200.000	0.000	20
1682.480	4200.000	4200.000	0.000	21
1667.360	4200.000	4200.000	0.000	22
1652.240	4200.000	4200.000	0.000	23
1637.120	4200.000	4200.000	0.000	24

Apéndice B

Artículo aceptado y pendiente de publicación en IEEE Transactions on Power Systems

A continuación se adjunta un artículo aceptado y pendiente de publicación en *IEEE Transactions on Power Systems*.

MENU

IMPRIMIR

SALIR

SHORT-TERM HYDRO-THERMAL COORDINATION BY LAGRANGIAN RELAXATION: SOLUTION OF THE DUAL PROBLEM

N. Jiménez Redondo
E.T.S. Ingenieros Industriales
Universidad de Málaga
Málaga, Spain

A. J. Conejo
E.T.S. Ingenieros Industriales
Universidad de Castilla - La Mancha
Ciudad Real, Spain

Abstract - This paper addresses the short-term hydro-thermal coordination problem. This problem is large-scale, combinatorial and nonlinear. It is usually solved using a Lagrangian Relaxation approach. In the framework of the Lagrangian Relaxation, this paper provides a novel, non-oscillating and efficient multiplier updating procedure. This procedure advantageously compares with previously reported procedures such as subgradient and bundle methods. A realistic large-scale case study is used to illustrate the behavior of the proposed procedure.

Keywords: Short-term Hydro-thermal Coordination, Large-scale Optimization, Lagrangian Relaxation, Multiplier Updating.

1 Introduction

This paper addresses the short-term hydro-thermal coordination problem. This problem is solved to determine the start-up and shut-down schedule of thermal plants, as well as the power output of thermal and hydro plants during a short-term planning horizon. The objective is to meet customer demand with appropriate levels of spinning reserve so that total operating costs are minimized.

This is a large-scale mixed-integer nonlinear problem. As recognized in the technical literature, the Lagrangian Relaxation (LR) technique is the most promising procedure to solve the short-term hydro-thermal coordination problem [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. Dynamic programming requires discretization and drastic simplifying assumptions to make the problem computationally tractable [9]. Mixed integer linear programming requires linearization and the solution of large-scale mixed-integer linear problems which is not a trivial task [10, 11, 12].

The LR procedure decomposes the original problem in one

subproblem per thermal plant and one subproblem per hydroelectric system. This decomposition allows a precise modeling of the generation system resulting in a very accurate solution technique.

Instead of solving the original problem, the LR technique solves its dual problem. The difference between the objective function optimal values for the primal and dual problems is called the duality gap. In most practical cases the duality gap is below 0.1%. As a byproduct of the solution of the dual problem a solution for the primal problem is obtained. However, more often than not, this primal solution is infeasible. Heuristic procedures are required to get a feasible primal solution.

The LR technique consists of the three phases below:

Phase 1. To solve the dual problem.

Phase 2. To obtain a primal feasible solution.

Phase 3. To exactly dispatch committed generation to meet the demand.

Phase 2 is easily accomplished as stated in most previous LR works [2, 4]. Heuristic techniques are successfully applied to obtain a primal feasible solution, i.e. a primal feasible set of commitment decisions. *Phase 3* is a multi-period economic dispatch whose solution is well stated in the technical literature [13].

However, *Phase 1* requires the solution of a non-differentiable maximization problem which is not an easy task. The procedures reported in the literature to solve this type of problems are either oscillating or computationally inefficient, or both, oscillating and computationally inefficient.

This paper focuses on *Phase 1*. It provides a solution technique which is non-oscillating, computationally efficient and which does not rely on "messy" heuristics.

The most commonly used technique to address *Phase 1* is the subgradient [2, 4, 5, 6] which is computationally inefficient, and produces oscillating solutions which makes it complicated to define appropriate stopping criteria. The cutting plane technique [14], under mild assumptions, converges to the optimum but makes it very slowly. The recently proposed primal bundle method [15, 16] is a cutting

PE-333-PWRS-0-12-1997 A paper recommended and approved by the IEEE Power System Analysis, Computing and Economics Committee of the IEEE Power Engineering Society for publication in the IEEE Transactions on Power Systems. Manuscript submitted July 1, 1997; made available for printing December 12, 1997.

plane method whose objective function has been penalized to control the path to the optimum. This penalty technique is complicated and requires careful tune-up of penalty parameters to be efficient. The required tune-up is problem-dependent and difficult to implement. The dual bundle method [16, 17] exhibits the same type of problems as the primal bundle method. However, it is a less elaborated procedure than the primal one. It is close to the subgradient method, and therefore it is prone to oscillations. The technique proposed in this paper is a cutting plane method which incorporates adaptive control over the feasible region. This is easily accomplished because the feasibility region is simple: just bounds on multipliers. This adaptive control can be performed without involved parameter tune-up, resulting in a non-oscillating, computationally efficient algorithm.

In the framework of de-regulated electric energy markets, the LR technique has a well known and simple yet elegant economic interpretation (see, for instance, [18]) which is described below. Hourly energy price proposals are specified by the market operator for the planning horizon (e.g. the 168 hours of one week). Each generator schedules independently its production along the planning horizon to maximize its benefit. Analogously, each hydroelectric system is scheduled so that its benefit is maximum. After the submission of production proposals by all generators the power balance equation is evaluated in each hour. Excess of committed power will occur in some hours, whereas deficit will occur in some other hours. Hourly prices are updated by the market operator and the previous procedure repeated until the demand is satisfied. The above mechanism constitutes a competitive energy market. Similarly, a spinning reserve market can be established.

The price updating or multiplier updating is in fact a solution procedure for the dual problem. If multipliers are updated proportionally to the power mismatch, the subgradient technique is obtained. If the updating procedure keeps track of the information of all steps to reconstruct total cost as a function of multiplier values, the cutting plane method is obtained. By proper modification of the objective function of the problem to be solved when using the cutting plane technique, the bundle method is derived. And finally, by proper adaptive modification of the feasibility region of the problem to be solved when using the cutting plane technique, the method proposed in this paper is derived.

This paper is organized as follows. Section 2 gives a formulation of the short-term hydro-thermal coordination problem. Section 3 provides a novel approach to update the multipliers in the framework of a LR solution procedure. This updating procedure is compared with previous procedures. Section 4 includes two case studies. The first one is designed to compare the behavior of the different procedures to update multipliers, the second one is a large-scale case study based on the electric energy system of mainland Spain. Section 5 provides conclusions.

2 Problem formulation

The short-term hydro-thermal coordination problem can

be formulated as follows:

Minimize_(x,y)

$$f(x) = \sum_i f_i(x_i) \quad (1)$$

subject to

$$s_i(x_i) \leq 0 \quad \forall i \quad (2)$$

$$s_j(y_j) \leq 0 \quad \forall j \quad (3)$$

$$g(x, y) = G - \sum_i g_i(x_i) - \sum_j g_j(y_j) \leq 0 \quad (4)$$

$$h(x, y) = H - \sum_i h_i(x_i) - \sum_j h_j(y_j) = 0 \quad (5)$$

where $(x, y) = (x_i, y_j; \forall i, \forall j)$, variables x_i are the variables related to thermal plant i , and y_j are the variables related to the hydroelectric system j . G , $g_i(x_i)$, $g_j(y_j)$, H , $h_i(x_i)$ and $h_j(y_j)$ are vectors of dimension equal to the number of subperiods in the planning horizon.

Equation (1) is the production cost to be minimized, equations (2) are the constraints related to every thermal unit, equations (3) are the constraints related to every hydroelectric system, equation (4) enforces spinning reserve constraints, and equation (5) enforces demand constraints. It should be noted that time is embedded in the above formulation.

Equations (4) and (5) are global constraints which couple together thermal-related and hydro-related variables.

Problem (1)-(5) is denominated the primal problem (PP).

Global constraints are incorporated in the objective function of the primal problem through Lagrangian multipliers to obtain the Lagrangian function:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda, \mu) =$$

$$\sum_i f_i(x_i) + \lambda^T \left[H - \sum_i h_i(x_i) - \sum_j h_j(y_j) \right] + \mu^T \left[G - \sum_i g_i(x_i) - \sum_j g_j(y_j) \right] \quad (6)$$

where λ and μ are vectors of dimension equal to the number of subperiods in the planning horizon. The dual problem (DP) of the original primal problem (1)-(5) has the form

$$\text{Maximize}_{(\lambda, \mu)} \quad \phi(\lambda, \mu) \quad (7)$$

$$\text{subject to} \quad \mu \geq 0 \quad (8)$$

where

$$\phi(\theta) = \phi(\lambda, \mu) = \lambda^T H + \mu^T G + d(\lambda, \mu), \quad (9)$$

where $\theta = (\lambda, \mu)$, and $d(\lambda, \mu)$ is the solution of the decomposed primal problem (DPP) stated below

Minimize_(x,y)

$$\sum_i \left[f_i(x_i) - \lambda^T h_i(x_i) - \mu^T g_i(x_i) \right] - \sum_j \left[\lambda^T h_j(y_j) + \mu^T g_j(y_j) \right] \quad (10)$$

subject to

$$s_i(x_i) \leq 0 \quad \forall i \quad (11)$$

$$s_j(y_j) \leq 0 \quad \forall j. \quad (12)$$

The above problem decomposes in one subproblem per thermal unit and one subproblem per hydroelectric system.

The subproblem associated to thermal unit i is

$$\text{Minimize}_{x_i} \quad f_i(x_i) - \lambda^T h_i(x_i) - \mu^T g_i(x_i) \quad (13)$$

$$\text{subject to} \quad s_i(x_i) \leq 0, \quad (14)$$

and the subproblem associated to hydroelectric system j is

$$\text{Maximize}_{y_j} \quad \lambda^T h_j(y_j) + \mu^T g_j(y_j) \quad (15)$$

$$\text{subject to} \quad s_j(y_j) \leq 0. \quad (16)$$

The Lagrangian Relaxation procedure to solve the dual problem works as follows:

1. Initialize multiplier vector $\theta = (\lambda, \mu)$.
2. Solve the decomposed primal problem by solving 1 subproblem per thermal plant (13)-(14) and 1 subproblem per hydroelectric system (15)-(16).
3. Update the multiplier vector using any of the procedures stated below (Section 3).
4. If the convergence criterion is satisfied, stop. Otherwise go to 2. Convergence criteria are stated below (Section 3).

3 Multiplier updating

The column vector of constraint mismatches at iteration ν constitutes a subgradient as stated in [14], i.e.

$$s^{(\nu)} = \text{column}[h(x^{(\nu)}, y^{(\nu)}), g(x^{(\nu)}, y^{(\nu)})] \quad (17)$$

is a subgradient vector which is used below.

3.1 Subgradient method (SG)

The multiplier vector is updated as stated below [19].

$$\theta^{(\nu+1)} = \theta^{(\nu)} + k^{(\nu)} \frac{s^{(\nu)}}{|s^{(\nu)}|} \quad (18)$$

where

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} k^{(\nu)} \rightarrow 0 \quad \text{and} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} k^{(\nu)} \rightarrow \infty \quad (19)$$

The SG method is simple to implement and its computational burden is small. However, it progresses slowly to the optimum in an oscillating fashion. This is a consequence of the non-differentiability of the dual function. Furthermore, the oscillating behavior makes it very difficult to devise an appropriate stopping criterion. It is typically stopped after a pre-specified number of iterations.

An elaborated subgradient procedure which is more efficient than the original subgradient method is reported in

[20]. However, it retains the same drawbacks as the original subgradient procedure.

3.2 Cutting plane method (CP)

The updated multiplier vector is obtained solving the linear programming problem below.

$$\text{Maximize}_{z, \theta \in C} \quad z \quad (20)$$

$$\text{subject to} \quad z \leq \phi^{(k)} + s^{(k)T}(\theta - \theta^{(k)}) \quad (21)$$

$$k = 1, \dots, \nu$$

where C is a convex and compact set. It is made up of the ranges of variation of the multipliers, i.e. $C = \{\theta, \underline{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta}\}$.

It should be noted that equation (21) represents a half-space (hyperplane) on the multiplier space.

It should also be noted that the number of constraints of the problem above grows with the number of iterations.

The above problem (20)-(21) is a relaxed dual problem which gets closer to the actual dual problem as the number of iterations grows.

The CP method achieves a dual optimum by "reconstructing" the dual function. It reconstructs the region of interest as well as other regions of no interest. This reconstruction is computationally expensive and therefore the CP method computational burden is high.

This algorithm is typically stopped when the multiplier vector difference between two consecutive iterations is below a pre-specified threshold.

3.3 Bundle method (BD)

The updated multiplier vector is obtained solving the relaxed dual quadratic programming problem below.

$$\text{Maximize}_{z, \theta \in C} \quad z - \alpha^{(k)} \|\theta - \Theta^{(k)}\|^2 \quad (22)$$

$$\text{subject to} \quad z \leq \phi^{(k)} + s^{(k)T}(\theta - \theta^{(k)}) \quad (23)$$

$$k = 1, \dots, \nu$$

where α is a penalty parameter and Θ , the "center of gravity", is a vector of multipliers centered in the feasibility region so that oscillations are avoided [15].

It should be noted that the number of constraints of the problem above grows with the number of iterations.

The BD method is a CP method in which the ascent procedure is constrained by an objective function penalty. The target is to center the CP method in the region of interest. However, in order to do this, it is necessary to carefully tune-up the penalty and other parameters [15, 16]. This tune-up is problem dependent and hard to achieve.

This algorithm is typically stopped when the multiplier vector difference between two consecutive iterations is below a pre-specified threshold.

3.4 Dynamically constrained cutting plane method (DC-CP)

The updated multiplier vector is obtained solving the re-

laxed dual linear programming problem below.

$$\text{Maximize}_{z, \theta \in C^{(k)}} z \quad (24)$$

$$\text{subject to } z \leq \phi^{(k)} + s^{(k)T}(\theta - g^{(k)}) \quad (25)$$

$$k = 1, \dots, n; n \leq \bar{n}$$

where $\bar{n}$ is the maximum number of constraints considered when solving the problem above, and $C^{(k)}$ is a dynamically updated set defining the feasibility region for the multipliers.

When the number of iterations is larger than the specified maximum number of constraints, the excess constraints are eliminated as stated below.

At iteration ν the difference between every hyperplane evaluated at the current multiplier vector and the actual value of the objective function for the current multiplier vector (residual) is computed as

$$\epsilon_i = \phi^{(i)} + s^{(i)T}(\theta^{(\nu)} - g^{(i)}) - \phi^{(\nu)} \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (26)$$

As soon as n is larger than $\bar{n}$, the "most distant" hyperplanes are not considered, so that the number of hyperplanes is kept constant and equal to $\bar{n}$. It should be noted that the residual ϵ_i is always positive because the cutting plane reconstruction of the dual function overestimates the actual dual function. This technique to limit the number of hyperplanes considered has proved to be computationally effective.

The dynamic updating of the set $C^{(\nu)}$, the feasibility region of the multipliers, is performed as stated below. Let $\theta_i^{(\nu)}$ be the i component of the multiplier vector at iteration ν .

If $\theta_i^{(\nu)} = \bar{\theta}_i^{(\nu)}$ then

$$\bar{\theta}_i^{(\nu+1)} = \bar{\theta}_i^{(\nu)}(1 + a), \text{ and}$$

$$\underline{\theta}_i^{(\nu+1)} = \underline{\theta}_i^{(\nu)}(1 - b).$$

Else if $\theta_i^{(\nu)} = \underline{\theta}_i^{(\nu)}$ then

$$\bar{\theta}_i^{(\nu+1)} = \underline{\theta}_i^{(\nu)}(1 + c), \text{ and}$$

$$\underline{\theta}_i^{(\nu+1)} = \underline{\theta}_i^{(\nu)}(1 - d).$$

Overlining indicates upper bound and underlining stands for lower bound. The parameters a , b , c and d allow to enlarge and shrink the feasibility region of the multiplier vector, i.e. the convex and compact set C . This is efficiently accomplished because the above updating procedure is simple.

The DC-CP method is a CP method in which the ascent procedure is dynamically constrained by enlarging and shrinking the feasibility region on a coordinate bases. This is possible because the feasibility region is simple: bounds on every multiplier. Through this enlarging/shrinking procedure it is possible to center the algorithm in the area

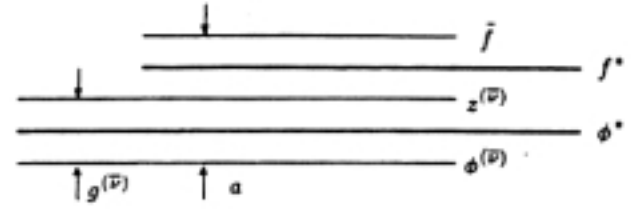


Figure 1: Upper and lower bounds for the primal and dual optima, and upper bound for the duality gap.

of interest which results in high efficiency. The enlarging/shrinking procedure is not problem-dependent and involves straightforward heuristics (see the simple updating procedure above).

This algorithm is typically stopped when the multiplier vector difference between two consecutive iterations is below a pre-specified threshold. A small enough difference between an upper bound and a lower bound of the dual optimum is also an appropriate stopping criterion (see Subsection 3.5).

3.5 Duality gap

When using the CP method or the DC-CP method, at every iteration, the objective function value of the relaxed dual problem (problem (20)-(21) or problem (24)-(25)) constitutes an upper bound of the optimal dual cost value. This is so because the piecewise linear reconstruction of the dual function overestimates the actual dual function. On the other hand, the objective function value of the dual problem (evaluated through the decomposed primal problem using equation (9)) provides at every iteration a lower bound of the optimal dual cost value. This can be mathematically stated as follows:

$$z^{(\nu)} \geq \phi^* \geq \phi^{(\nu)} \quad (27)$$

where $z^{(\nu)}$ is the objective function value of the relaxed dual problem at iteration ν , ϕ^* is the optimal dual cost value, and $\phi^{(\nu)} = \lambda^{(\nu)T}H + \mu^{(\nu)T}G + d(\lambda^{(\nu)}, \mu^{(\nu)})$ is the objective function value of the dual problem at iteration ν .

The size of the per unit gap $g^{(\nu)} = (z^{(\nu)} - \phi^{(\nu)})/\phi^{(\nu)}$ is an appropriate per unit cost criterion to stop the search for the dual optimum. Phase 2 converts heuristically the typically primal infeasible solution provided by the dual problem to a primal reserve feasible solution. This typically originates a decrement in the objective function value, so that

$$\bar{\phi} \leq \phi^{(\bar{\nu})} \quad (28)$$

where $\bar{\phi}$ is the objective function value for the primal reserve feasible solution (Phase 2), and $\phi^{(\bar{\nu})}$ the objective function value of the dual problem at the last iteration

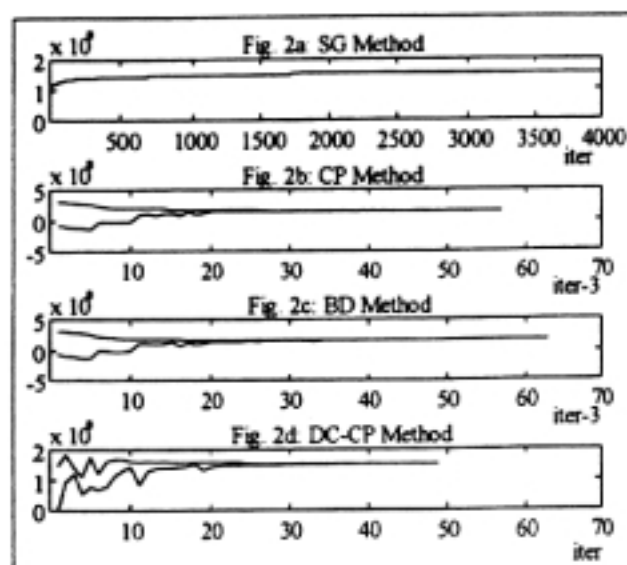


Figure 2: Phase I for the testing example

of Phase I which is iteration $\bar{\nu}$. Once $\bar{\phi}$ is known, the unit commitment variables are set to fixed values, and a demand adjusted primal feasible solution can be obtained through an economic dispatch procedure (Phase 3). If $\bar{f}$ is the objective function value of the demand adjusted primal feasible solution, a per unit upper bound of the duality gap value is given by $\alpha = (\bar{f} - \phi^{(\bar{\nu})})/\phi^{(\bar{\nu})}$, because $\bar{f}$ is an upper bound for the primal optimum and $\phi^{(\bar{\nu})}$ is a lower bound for the dual optimum. In most practical cases the duality gap is below 0.1%. Figure 1 shows upper and lower bounds for the primal and dual optima, the actual duality gap, and an upper bound for it.

Model	DPC [MPta]	$g^{(\bar{\nu})}$ [%]	Number iterations Phase I	Total CPU time [p.u.]
SG	151.002	-	4000	49.609
CP	150.853	0.087	59	1.378
BD	150.880	0.085	65	1.378
DC-CP	150.882	0.079	49	1.000

Table 1: Cost, gap, number of iterations and CPU time in per unit (normalizing factor: 6.322 seconds) for the testing example

4 Case Studies

Two case studies are analyzed. The first one is a six period testing example whose purpose is to compare the convergence properties of the four methods of solution for the dual problem described in Section 3. The planning horizon for the second case is 48 periods. This is a realistic

large-scale case study.

In both case studies the generating system is based on the electric energy system of mainland Spain. It consists of 60 thermal plants and 30 hydraulic plants in one complex hydroelectric system.

Total cost is the sum of production cost, start-up cost and shut-down cost for all thermal units in all periods. The production cost of every thermal plant is considered a quadratic function of the output power. The start-up and shut-down costs of every thermal plant are considered constant. Ramp rate limits, minimum up time and minimum down time constraints are enforced. Hydro power of each hydroelectric unit is modeled as a piecewise linear function of water discharge.

Although the number of constraints of the relaxed dual problem for the CP and BD methods reported in the literature grows with the number of iterations, for the sake of comparison the CP and BD methods implemented maintain a pre-specified maximum number of constraints. The procedure used to keep limited the number of constraints is explained in Subsection 3.4.

The reported CPU time refers to a SUN ULTRASPARC 2 workstation with 128 MB of RAM.

Testing Example

Model	DPC [MPta]	PPC [MPta]	$g^{(\bar{\nu})}$ [%]
CP	1215.851	1215.374	0.105
BD	1215.809	1214.454	0.112
DC-CP	1215.973	1214.671	0.094

Table 2: Costs and gaps for the large-scale case study

Figure 2 shows the results of Phase I. Figure 2a is a plot of the cost of the dual problem when the SG method is used to solve Phase I. Figures 2b, 2c and 2d include a plot of the cost of the dual problem and a plot of the variable z used in the relaxed dual problem for the CP, BD and DC-CP methods respectively. It should be noted that vertical axis scales are different for the three plots of Figure 2, and that the horizontal axis scale of plot of Figure 2a is different from the horizontal axis scales of the other plots of Figure 2. The above axis scale differences are introduced to enhance clarity. For CP and BD methods the solution oscillates largely in the first few iterations. In order to better appreciate the evolution of these methods, figures 1b and 1c include the cost of the dual problem and the value of z starting from iteration number 3. The solutions of the dual problem for all the methods implemented are reserve feasible primal solutions and therefore, Phase 2 is skipped. Table 1 shows, for the four methods of solution of Phase I described in Section 3, the cost of the dual problem (DPC) in millions of pesetas (Pta, 1 US\$ $\approx$ 145 Pta), the size of the gap $g^{(\bar{\nu})}$ (except for the SG method where it is not defined) where $\bar{\nu}$ is the last iteration of Phase I (Subsection 3.5), the number of iterations needed to solve

Phase 1 and the required CPU time normalized with respect to the total CPU time in seconds required by the DC-CP method. Total CPU time for the DC-CP method is 6.322 seconds.

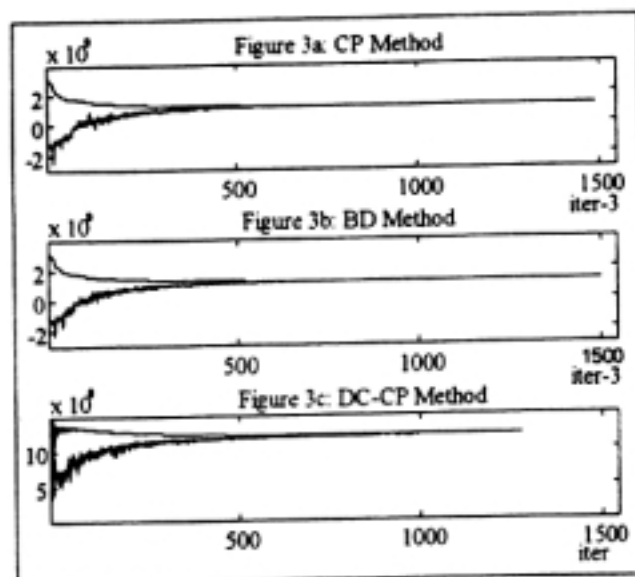


Figure 3: Phase 1 for the large-scale case study

The SG method shows slow convergence. The number of iterations needed to solve Phase 1 is much larger than the number of iterations required by any of the other three methods. In terms of CPU time the SG method is the most inefficient method to solve Phase 1 and therefore it will not be used in the realistic large-scale case study presented below. If good initial values for the multipliers are available and careful tune-up of the subgradient step size is performed, the SG method may show better computational behaviour than the one shown in the previous testing example.

Large-Scale Case Study

Figures 3a, 3b and 3c show respectively the results when the CP, BD and DC-CP methods are used to solve Phase 1. These figures provide similar information than the one provided by figures 2b, 2c and 2d respectively. It should be noted that vertical axis scales are different for the plots of Figure 3. Figures 3a and 3b include the evolution of cost starting from iteration number 3. Table 2 presents the cost of the dual problem (DPC) and the cost of the primal reserve feasible solution (PPC), both in millions of pesetas (Pta), and the size of the gap $g^{(P)}$. Table 3 shows the number of iterations to solve Phase 1 and the required normalized CPU time. Total CPU time for the DC-CP method is 11088 seconds. Most of this time (around 90 % for the CP and DC-CP methods and 78 % for the BD method) is used to solve complex hydro subproblems.

From the above results, it can be concluded that the DC-CP method is a very competitive method of solution for the dual problem.

5 Conclusions

The objective of the short-term hydro-thermal coordination problem is to determine the scheduling and production of every hydro and thermal plant of an electric energy system so that the customer demand is supplied at minimum cost and a certain level of security, and all constraints related to the thermal and hydro subsystems are satisfied.

The most effective approach to solve this problem is Lagrangian Relaxation. This approach requires the solution of the dual problem of the original short-term hydro-thermal coordination problem.

This paper focuses on the updating procedure of Lagrangian multipliers which is the mechanism to solve the dual problem. A novel, non-oscillating, and computationally efficient procedure is presented. It outperforms previous approaches such as subgradient and bundle methods. Extensive computational results based on the electric energy system of mainland Spain are presented.

Model	Number iterations Phase 1	CPU time [p.u.] Phase 1	CPU time [p.u.] Phase 2	Total CPU time [p.u.]
CP	1492	1.188	0.001	1.191
BD	1503	1.431	0.002	1.436
DC-CP	1280	0.995	0.002	1.000

Table 3: Number of iterations to solve the dual problem and required CPU time for Phase 1 and Phase 2, in per unit (normalizing factor: 11088 seconds), for the large-scale case study

Acknowledgments

The work reported in this paper has been partly supported by the Ministerio de Educación y Cultura of Spain, project DGICYT PB95-0472, by Red Eléctrica de España, REE, and by the Vicerrectorado de Investigación of the Universidad de Málaga. The authors are grateful to Prof. A. de la Calle for support and help.

References

- [1] J. A. Muckstadt, S. A. Koenig. *An Application of Lagrangian Relaxation to Scheduling in Power Generation Systems*. Operation Research. Vol. 25, No. 3, pp. 387-403. May/June 1977.
- [2] A. Merlin, R. Sandrin. *A New Method for Unit Commitment at Electricité de France*. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems. Vol. PAS-102, No. 5, pp. 1218-1225. May 1983.
- [3] D. P. Bertsekas, G. S. Lauer, N. R. Sandell Jr., T. A. Posbergh. *Optimal Short-Term Scheduling of Large*

- Scale Power Systems. IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. 28, No. 1, pp. 1-11. January 1983.
- [4] F. Zhuang, F. D. Galiana. *Toward a More Rigorous and Practical Unit Commitment by Lagrangian Relaxation*. IEEE Transactions on Power Systems. Vol. 3, No. 2, pp. 763-773. May 1988.
 - [5] H. Yan, P. B. Luh, X. Guan, P. M. Rogan. *Scheduling of Hydrothermal Power Systems*. IEEE Transactions on Power Systems. Vol. 8, No. 3, pp. 1135-1365. August 1993.
 - [6] V. M. Mendes, L. A. F. M. Ferreira, P. Roldão, R. Pestana. *Optimal Short-Term Scheduling in Large Hydrothermal Power Systems*. Proceedings of the Eleventh Power Systems Computation Conference, PSCC'93. Vol. II, pp. 1297-1303. Avignon, France, August-September 1993.
 - [7] M. V. Rakić, Z. M. Marcović. *Short Term Operation and Power Exchange Planning of Hydro-Thermal Power Systems*. IEEE Transactions on Power Systems. Vol. 9, No. 1, pp. 359-365. February 1994.
 - [8] S. J. Wang, S. M. Shahidehpour, D. S. Kirschen, S. Mokhtari, G. S. Irisarri. *Short-Term Generation Scheduling with Transmission and Environmental Constraints using an Augmented Lagrangian Relaxation*. IEEE Transactions on Power Systems. Vol. 10, No. 3, pp. 1294-1301. August 1995.
 - [9] W. J. Hobbs, G. Hermon, S. Warner, G. B. Sheblé. *An Enhanced Dynamic Programming Approach for Unit Commitment*. IEEE Transactions on Power Systems. Vol. 3, No. 3, pp. 1201-1205. August 1988.
 - [10] T. S. Dillon, K. W. Edwin, H. D. Kochs, R. J. Tand. *Integer Programming Approach to the Problem of Optimal Unit Commitment with Probabilistic Reserve Determination*. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems. Vol. PAS-97, No. 6, pp. 2154-2166. November/December 1978.
 - [11] H. Brännlund, D. Sjelvgren, J. Bubenko. *Short Term Generation Scheduling with Security Constraints*. IEEE Transactions on Power Systems. Vol. 1, No. 3, pp. 310-316. October 1988.
 - [12] J. Medina Palomo, A. Conejo, N. Jiménez Redondo, F. Pérez Thoden, J. González. *An LP Based Decomposition Approach to Solve the Medium-Term Hydro-Thermal Coordination Problem*. Proceedings of the Twelfth Power Systems Computation Conference, PSCC'96, Vol. I, pp. 397-405. Dresden, Germany, August 1996.
 - [13] A. J. Wood, B. F. Wollenberg. *Power Generation. Operation and Control*. Second Edition. John Wiley and Sons. New York, 1996.
 - [14] M. S. Bazaraa, H. O. Sherali, C. M. Shetty. *Non-linear Programming: Theory and Algorithms*. Second Edition. John Wiley and Sons. New York, 1993.
 - [15] F. Pellegrino, A. Renaud, T. Socroun. *Bundle and Augmented Lagrangian Methods for Short-Term Unit Commitment*. Proceedings of the Twelfth Power Systems Computation Conference, PSCC'96, Vol. II, pp. 730-739. Dresden, Germany, August 1996.
 - [16] J. B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal. *Convex Analysis and Minimization Algorithms*. Vol. I and II. Springer-Verlag. Berlin, 1996.
 - [17] P. B. Luh, D. Zhang, R. N. Tomastik. *An Algorithm for Solving the Dual Problem of Hydrothermal Scheduling*. IEEE Power Winter Meeting, Paper PE-601-PWRS-0-01-1997. New York, 1997.
 - [18] X. Guan, R. Baldick, W. H. E. Liu. *Integrating Power System Scheduling and Optimal Power Flow*. Proceedings of the Twelfth Power Systems Computation Conference, PSCC'96, Vol. II, pp. 717-723. Dresden, Germany, August 1996.
 - [19] B. T. Polyak. *Introduction to Optimization*. Optimization Software, Inc. New York, 1987.
 - [20] C. A. Kaskavelis, M. C. Caramanis. *Efficient Lagrangian Relaxation Algorithms for Real-Life-Size Job-Shop Scheduling Problems*. Unpublished manuscript. Department of Manufacturing Engineering, Boston University, Boston MA 02215, 1996.

Biography

N. Jiménez Redondo (S96) received the Ingeniero Industrial Eléctrico degree from the Universidad P. Comillas, Madrid, Spain in 1991. She was a research assistant at the Universidad P. Comillas from January 1992 to October 1993. She is currently a lecturer at the Universidad de Málaga, where she is working toward her Ph.D. in operations planning of hydro-thermal electric energy systems. Her research interests include operations and planning of electric energy systems, and optimization theory.

A. J. Conejo (S86, M91) received the B.S. degree from the Universidad P. Comillas, Madrid, Spain, in 1983, the M.S. degree from MIT, Cambridge, Massachusetts, in 1987, and the Ph.D. degree from the Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, in 1990, all in Electrical Engineering. He was a visiting engineer at MIT, Cambridge, Massachusetts, and a visiting lecturer at the Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden. He is currently a professor at the Universidad de Castilla - La Mancha, Ciudad Real, Spain. His research interests include control, operations, planning and economics of electric energy systems, as well as optimization theory and its applications.

MENU

IMPRIMIR

SALIR

Bibliografía

- [1] K. Aoki, T. Satoh, M. Itoh, T. Ichimori, K. Masegi. *Unit commitment in a large-scale power system including fuel constrained thermal and pumped-storage hydro*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. PWRS-2, No. 4, pp. 1077-1084, November 87.
- [2] J. M. Arroyo, A. J. Conejo, N. Jiménez Redondo. *A genetic algorithm approach to solve the unit commitment problem*. Proceedings of the Intelligent System Applicatrion to Power Systems Conference, ISAP'97, Seoul, Republic of Korea, July 1997.
- [3] J. M. Arroyo, A. J. Conejo, N. Jiménez Redondo. *Aplicación de algoritmos genéticos a la programación horaria de centrales térmicas. Contrastación mediante la relajación lagrangiana*. Actas de las V Jornadas Hispano-Lusas de Ingeniería Eléctrica, Vol. II, pp. 991-998, Julio 1997.
- [4] C. J. Baldwin, K. M. Dale, R. F. Dittrich. *A study of economic shutdown of generating units in daily dispatch*. AIEE Transactions, Vol. 78, Part III, pp.1272-1284. 1959.
- [5] L. F. B. Baptistella, J. C. Geromel. *Decomposition approach to problem of unit commitment schedule for hydrothermal systems*. IEE Proceedings, Vol. 127, Part D, No. 6, pp. 250-258, November 1980.
- [6] J. Batut, A. Renaud, P. Sandrin. *New software for the generation rescheduling in the future EDF national control center*. Proceedings of the Tenth Power Systems Computation Conference (PSCC'90), pp.1163-1170, Graz, Austria, August 1990
- [7] J. Batut, A. Renaud. *Daily generation scheduling optimization with transmission constraints: a new class of algorithms*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 7, No. 3, pp. 982-989, August 1992.
- [8] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali. *On the choice of step size in subgradient optimization*. North-Holland Publishing Company European Journal of Operations Research 7, pp. 389-388, 1981.
- [9] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, C. M. Shetty. *Nonlinear Programming. Theory and algorithms. Second Edition*. John wiley and Sons, New York,1993.
- [10] R. E. Bellman. *Dynamic programming*. Princeton University Press, Princeton, 1957.
- [11] D. P. Bertsekas, G. S. Lauer, N. R. Sandell Jr., T. A. Posbergh. *Optimal short-term scheduling of large-scale power systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-28, No. 1, pp. 1-11, January 1983.
- [12] H. Blondel, A. Renaud. *Decomposition par le prix et lagrangien augmente: une association efficace pour le traitement des problemes de production*. E.D.F. Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches. Serie C Mathematiques, Informatique No. 4, pp. 23-43, 1991

- [13] F. Bonnans, J. Ch. Gilbert, C. Lemaréchal, C. Sagastizábal. *Optimisation Numérique, aspects théoriques et pratiques*. Colección "Mathématiques et applications", SMAI-Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [14] S. P. Bradley, A. C. Hax, T. L. Magnanti. *Applied Mathematical Programming*. Addison-Wesley Publishing Company. Reading, Massachusetts, 1977.
- [15] H. Brännlund, J. A. Bubenko, D. Sjelvgren, N. Andersson. *Optimal short term operations planning of a large hydrothermal power system based on nonlinear network flow concepts*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 1, No. 4, pp. 77-82, November 1986.
- [16] H. Brännlund, J. A. Bubenko. *Short term generation scheduling with security constraints*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 3, No. 1, pp. 310-316, February 1988.
- [17] A. I. Cohen, M. Yoshimura. *A branch & bound algorithm for unit commitment*. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-102, No. 2, pp. 444-451, February 1983.
- [18] A. I. Cohen, S. H. Wan. *A method for solving the fuel constrained unit commitment problem*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. PWRS-2, No. 3, pp. 608-614, August 1987.
- [19] A. I. Cohen. *Modeling unit ramp limitations in unit commitment*. Proceedings of the Tenth Power systems and Computing Conference (PSCC'90) pp.1107-1114, Graz, Austria, August, 1990.
- [20] A. I. Cohen, G. Ostrowski. *Scheduling of units with multiple operating modes in unit commitment*. Proceedings of the 1995 IEEE Power Industry Computer Applications Conference (PICA'95), pp. 494-500, Salt Lake city, May 1995.
- [21] G. Cohen. *Auxiliary problem principle and decomposition of optimization problems*. Journal of Optimization Theory and Applications. Vol. 32, No. 3, pp. 277-305, November 1980.
- [22] G. Cohen. *Decomposition coordination methods in large scale optimization problems. The nondifferentiable case and the use of augmented lagrangians*. Advances in large scale systems. Theory and applications. Vol. 1, pp. 203-266. JAI Press Inc, Greenwich, CT, USA, 1984.
- [23] A. J. Conejo, N. Jiménez Redondo, J. M. Arroyo. *Coordinación hidráulico-térmica a corto plazo mediante relajación lagrangiana y su aplicación al sistema de generación peninsular español*. Preparado para Red Eléctrica de España, REE. Informa técnico IE-95-02. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, Universidad de Málaga, Enero 1996.
- [24] A. J. Conejo, J. M. Arroyo. *Modelado de centrales térmicas*. Departamento de Ingeniería Eléctrica, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, Universidad de Málaga, Septiembre 1996.
- [25] A. J. Conejo, N. Jiménez Redondo, J. M. Arroyo. *Modelo de programación semanal mediante relajación lagrangiana y su aplicación al sistema de generación peninsular español*. Preparado para Red Eléctrica de España, REE. Informes técnicos GSEE-1997-01 y GSEE-1997-02. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, Universidad de Málaga, Julio 1997.
- [26] A. J. Conejo, N. Jiménez Redondo. *Solving the dual problem resulting from addressing a large-scale nonlinear combinatorial problem through Lagrange relaxation*. Joint International Meeting Euro XV-Informs XXXIV, Barcelona, España, Julio 1997.

- [27] A. J. Conejo. *Técnicas de optimización con aplicaciones al control, la explotación y la planificación de los sistemas de energía eléctrica*. Departamento de Ingeniería Eléctrica, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, Universidad de Castilla - La Mancha, Diciembre 1997.
- [28] A. J. Conejo, J. M. Arroyo, N. Jiménez Redondo, F. J. Prieto. *Lagrangian relaxation applications to electric power operations and planning problems*. Capítulo del libro *Modern heuristic techniques in power systems*. Kluwer, U.K., 1998. Aprobado para publicación.
- [29] J.P. Chancelier, A. Renaud. *Daily generation scheduling: decomposition methods to solve the hydraulic problems* Proceedings of the Eleventh Power Systems Computation Conference, PSCC'94, pp.1305-1312, 1994.
- [30] T. S. Dillon, K. W. Edwin, H. D. Kochs, R. J. Tand. *Integer programming approach to the problem of optimal unit commitment with probabilistic reserve determination*. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-97, No. 6, pp. 2154-2166, November/December 1978.
- [31] J. C. Dodu, T. Eve, M. Minoux. *Implementation of a proximal algorithm for linearly constrained nonsmooth optimization problems and computational results*. Numerical Algorithms, Vol. 6, pp. 245-273, 1994.
- [32] K. Ea, M. Monti. *Daily operational planning of the EDF plant mix. Proposal for a new method*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. PWRS-1, No. 3, pp. 251-257, August 1986.
- [33] H. Everett. *Generalized Lagrange multiplier method for solving problems of optimum allocation of resources*. Operations Research, Vol. 11, pp. 399-417, 1963.
- [34] P. E. C. Franco, M. F. Carvalho, S. Soares. *A network flow model for short-term hydro-dominated hydrothermal scheduling problems*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 9, No. 2, pp. 1016-1022, May 1994.
- [35] L. A. F. M. Ferreira, T. Andersson, C. F. Imparato, T. E. Miller, C. K. Pang, A. Svoboda, A. F. Vojdani. *Short-term resource scheduling in multi-area hydrothermal power systems*. International Journal of Electrical Power and Energy Systems, Vol. 11, No. 3, pp. 200-212, July 1989.
- [36] L. A. F. M. Ferreira. *On the duality gap for thermal unit commitment problems*. Proceedings of the 1993 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, ISCAS'93, Vol. 4, pp. 2204-2207, Chicago, May 1993.
- [37] L. A. F. M. Ferreira. *On the convergence of the classic hydro-thermal coordination algorithm*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 9, No. 2, pp. 1002-1008, May 1994.
- [38] M. L. Fisher. *The lagrangian relaxation method for solving integer programming problems*. Management Science, Vol. 27, No. 1, pp.1-18, January 1981.
- [39] M. L. Fisher. *An application oriented guide to lagrangian relaxation*. Interfaces, Vol. 15, No. 2, pp.10-21, March/April 1985.
- [40] L. L. Garver. *Power generation scheduling by integer programming. Development of theory*. AIEE Transactions, Vol. 81, pp.730-735, 1962.
- [41] A. M. Geoffrion. *Generalized Benders decomposition*. Journal of Optimization Theory and Application, Vol. 10, pp. 237-269, 1972.

- [42] A. M. Geoffrion. *Lagrangian relaxation for integer programming*. Mathematical Programming Study, Vol. 2, pp. 82-114, 1974.
- [43] C. Greif, R. B. Johnson, C. Li, A. J. Svoboda, K. A. Uemura. *Short-term scheduling of electric power systems under minimum load conditions* Paper PE-168-PWRS-0-1-1998. Approved for publication in the IEEE Transaction on Power Systems.
- [44] X. Guan, P. B. Luh, H. Yan, J. A. Amalfi. *Short-term scheduling of thermal power systems*. Proceedings of the 17th 1991 IEEE Power Industry Computer Applications Conference (PICA'91) pp. 120-126. Baltimore, WA, May 1991.
- [45] X. Guan, P. L. Luh, H. Yan, J. A. Amalfi. *Scheduling of units with multiple operating modes in unit commitment* Proceedings of the 17th 1991 IEEE Power Industry Computer Applications Conference (PICA'91). Baltimore, WA, May 1991.
- [46] X. Guan, P. B. Luh, H. Yan, J. A. Amalfi. *An optimization based method for unit commitment*. International Journal of Electrical Power & Energy Systems. Vol. 14, No. 1, pp. 9-17, February 1992.
- [47] X. Guan, P. B. Luh, H. Yan, J. A. Amalfi. *An optimization based method for unit commitment*. International Journal of Electrical Power and Energy Systems, Vol. 14, No. 1, pp. 9-17, February 1992.
- [48] X. Guan, P. B. Luh, H. Yan, P. M. Rogan. *Optimization-based scheduling of hydrothermal power systems with pumped storage units*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 9, No. 2, pp. 1023-1031, May 1994.
- [49] X. Guan, P. B. Luh, L. Zhang. *Nonlinear Approximation method in lagrangian relaxation-based algorithms for hydrothermal scheduling*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 10, No. 2, pp. 772-778, May 1995.
- [50] X. Guan, E. Ni, R. Li, P. B. Luh. *An optimization-based algorithm for scheduling hydrothermal power systems with cascaded reservoirs and discrete hydro constraints*. Paper no. PE-400-PWRS-0-02-1997. Approved for publication in the IEEE Transaction on Power Systems. Presented at the 1997 PES IEEE Winter Meeting.
- [51] H. Habibollahzadeh, J. A. Bubenko. *Application of decomposition techniques to short-term operation planning of hydrothermal power system*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. PWRS-1, No. 1, pp. 41-47, February 1986.
- [52] H. Habibollahzadeh, D. Frances, U. Sui. *A new generation scheduling at Ontario Hydro*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 5, No. 1, pp. 65-73, February 1990.
- [53] F. J. Heredia, N. Nabona. *Optimum short-term hydrothermal scheduling with spinning reserve through network flow*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 10, No. 3, pp. 1642-1651, August 1995.
- [54] J. B. Hiriart-Urruty, C. Lemarechal. *Convex analysis and minimization algorithms*. Vol I y II. Springer-Verlag, Berlin 1996.
- [55] W. J. Hobbs, G. Hermon, S. Warner, G. B. Sheblé. *An enhanced dynamic programming approach for unit commitment*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. PWRS-3, pp. 1201-1205, August 1988.
- [56] J. H. Holland. *Adaptation in natural and artificial systems*. University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan, 1975.

- [57] S. Hunt, G. Shuttleworth. *Competition and choice in electricity*. John Wiley & Sons, Chichester 1996.
- [58] C. A. Kaskavelis, M. C. Caramanis. *Efficient lagrange relaxation algorithms for real-life-size job-shop scheduling problems*. Unpublished manuscript. Department of Manufacturing Engineering, Boston University, Boston MA 02215, 1996.
- [59] S. A. Kazarlis, A. G. Bakirtzis, V. Petridis. *A genetic algorithm solution to the unit commitment problem*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 11, No. 1, pp. 83-92, February 1996.
- [60] J. E. Kelley. *The cutting-plane method for solving convex programs*. J. Soc. Indust. Appl. Math., Vol. 8, No. 4, pp. 703-712. December 1960.
- [61] R.H. Kerr, J. L. Scheidt, A. J. Fontana, J. K. Wiley. *Unit commitment*. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-85, pp. 417-421, 1966.
- [62] K. C. Kiwiel. *Proximity control in bundle methods for convex nondifferentiable minimization*. Mathematical Programming, Vol. 46, pp. 105-122, 1990.
- [63] N. Jiménez Redondo, A. J. Conejo, J. M. Arroyo. *Programación horaria de centrales térmicas mediante algoritmos genéticos*. Actas de las IV Jornadas Luso-Espanholas de Engenharia Electrotécnica, Porto, Portugal, Julio 1995.
- [64] N. Jiménez Redondo, A. J. Conejo, J. M. Arroyo. *Programación horaria de centrales térmicas mediante algoritmos genéticos de punto interior*. Informática y Automática, Vol. 29, No. 1, pp. 39-52, Marzo 1996.
- [65] N. Jiménez Redondo, A. J. Conejo. *Coordinación hidrotérmica en el corto plazo mediante técnicas de relajación lagrangiana*. Actas de la VI Reunión Nacional de Grupos de Investigación en Ingeniería Eléctrica, Gran Canaria, España, Enero 1996.
- [66] N. Jiménez Redondo, A. J. Conejo, J. M. Arroyo. *Coordinación hidrotérmica en el corto plazo*. Departamentos de Tecnología Electrónica e Ingeniería Eléctrica, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, Universidad de Málaga, Septiembre 1996.
- [67] N. Jiménez Redondo, A. J. Conejo, J. M. Arroyo. *Coordinación hidrotérmica en el corto plazo mediante relajación lagrangiana: solución del problema dual*. Actas de las V Jornadas Hispano-Lusas de Ingeniería Eléctrica, Vol. II, pp. 951-958, Julio 1997.
- [68] N. Jiménez-Redondo, A. J. Conejo. *Short-term hydro-thermal coordination by lagrangian relaxation: solution of the dual problem* Paper PE-333-PWRS-0-12-1997. Approved for publication in the IEEE Transaction on Power Systems. Presented at the 1998 PES IEEE Winter Meeting.
- [69] N. Jiménez-Redondo, A. J. Conejo. Discusión artículo: “ P. L. Luh, D. Zhang, R. N. Tomastik *An algorithm for solving the dual problem of hydrothermal scheduling*” IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 13, No. 2, pp. 593-600, May 1998.
- [70] L. S. Lasdon. *Duality and decomposition in mathematical programming* IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics, pp. 86-100, July 1968.
- [71] G. S. Lauer, N. R. Sandell, D. P. Bertsekas, T. A. Posbergh *Solution of large-scale optimal unit commitment problems*. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-101, No. 1, pp. 79-86, January 1982.

- [72] K. D. Le, J. T. Day, B. L. Cooper, E. W. Gibbons. *A global optimization method for scheduling thermal generation, hydro generation and economy purchases*. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-102, No. 7, pp. 1986-1993, July 1983.
- [73] F. N. Lee. *Short-term unit commitment. A new method*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. PWRS-3, No. 2, pp. 421-428, May 1988
- [74] F. N. Lee. *The application of commitment utilization factor (CUF) to thermal unit commitment*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 6, No. 2, pp. 691-698, May 1991
- [75] F. N. Lee, Q. Feng. *Multi-area unit commitment*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 7, No. 2, pp. 591-599, May 1992.
- [76] C. Lemaréchal, C. Sagastizábal. *Variable metric bundle methods: from conceptual to implementable forms*. Mathematical Programming, Vol. 76, pp. 393-410, 1997.
- [77] D. G. Luenberger. *Linear and nonlinear programming*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1989.
- [78] P. L. Luh, D. Zhang, R. N. Tomastik. *An algorithm for solving the dual problem of hydrothermal scheduling*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 13, No. 2, pp. 593-600, May 1998.
- [79] G. X. Luo, H. Habibollahzadeh, A. Semlyen. *Short-term hydro-thermal dispatch. Detailed model and solutions*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 4, No. 4, pp. 1452-1462, October 1989.
- [80] T. T. Maifeld, G. B. Sheblé. *Genetic-based unit commitment algorithm*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 11, No. 3, pp. 1359-1370, August 1996.
- [81] C. Mataix. *Mecánica de fluidos y máquinas hidráulicas* Ediciones del Castillo, Madrid, 1986.
- [82] J. Medina, A. J. Conejo, F. Pérez-Thoden, J. González del Santo. *Medium-term hydro-thermal coordination problem via hydro and thermal subsystem decomposition*. TOP, Vol. 2, No. 1, pp. 133-150.
- [83] J. Medina, A. J. Conejo, N. Jiménez Redondo, F. Pérez-Thoden, J. González del Santo. *Decomposition approach to solve the medium-term hydro-thermal coordination problem*. Proceedings of the Twelveth Power Systems Computation Conference, PSCC'96, Vol. I, pp. 397-405, Dresden, Germany, August 1996.
- [84] J. Medina Palomo. *Two different algorithms to solve a medium term hydro-thermal coordination problem: decomposition and interior-point methods*. Tesis doctoral. E. T. S. de Ingenieros Industriales, ICAI, Universidad Pontificia de Comillas. Madrid, 1997.
- [85] V. M. F. Mendes, L. A. F. M. Ferreira, P. Roldao, R. Pestana. *Optimal short-term scheduling in large hydrothermal power systems*. Proceedings of the Eleventh Power Systems Computation Conference, PSCC'94, pp.1297-1303,1994.
- [86] A. Merlin, P. Sandrin. *A New Method for unit commitment at Electricité de France*. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-102, No. 5, pp. 1218-1225, May 1983.
- [87] V. J. Moreno Capitán. *Modelado detallado de sistemas hidroeléctricos para estudios de coordinación hidrotérmica* Proyecto de fin de carrera. E. T. S. de Ingenieros Industriales, Universidad de Málaga, Málaga, 1996.

- [88] J. A. Muckstadt, R. C. Wilson. *An application of mixed integer programming duality to scheduling thermal generating system*. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-87, pp. 1968-1977, 1968.
- [89] J. A. Muckstadt, S. A. Koenig. *An application of Lagrangian Relaxation to scheduling in power-generation systems*. Operations Research, Vol. 25, No.3, pp. 387-403, May-June 1977.
- [90] B.A. Murtagh, M. A. Saunders. *MINOS 5.4 User's guide*. System Optimization Laboratory, Department of Operations Research, Stanford University, 1983, (Revised 1987, 1993).
- [91] G. L. Nemhauser, A. H. G. Rinnooy Kan, M. J. Todd (Editors). *Handbooks in Operations Reserch and Management Science. Volume 1: Optimization*. Elsevier Science Publishers B. V., 1989.
- [92] S. A. Neumann, B. M. Perry, J. M. Scudder, L.R. Larson, B. F. Will, M. L. Danberg. *A unit commitment and transaction evaluation program for northern states power*. Proceedings of the 1985 IEEE Power Industry Computer Applications Conference (PICA'85), pp. 304-308, 1985.
- [93] R. Nieva, A. Inda, I. Guillen. *Lagrangian reduction of search-range for large scale unit commitment*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. PWRS-2, No. 2, pp. 465-473, May 1987.
- [94] Z. Ouyang, S. M. Shahidehpour. *Heuristic multiarea unit commitment with economic dispatch*. IEE Proceedings, Part C, Vol. 138, No. 3, pp. 242-252, May 1991.
- [95] Z. Ouyang, S. M. Shahidehpour. *An intelligent dynamic programming for unit commitment application*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 6, No. 3, pp. 1203-1216, August 1991.
- [96] C. K. Pang, H. C. Chen. *Optimal short-term unit commitment*. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-95, No. 4, pp. 1336-1346, July/August 1976.
- [97] C. K. Pang, G. B. Sheblé, F. Albuyeh. *Evaluation of dynamic programming based methods and multiple area representation for thermal unit commitments*. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-100, No. 3, pp. 1212-1218, March 1981.
- [98] F. Pellegrino, A. Renaud, T. Socroun. *Bundle and augmented lagrangian methods for short-term unit commitment*. Proceedings of the Twelfth Power Systems Computation Conference, PSCC'96. Vol. II, pp.730-739. Dresden, Germany, August, 1996.
- [99] W. L. Peterson, S. R. Brammer. *A capacity based lagrangian relaxation unit commitment with ramp rate constraints*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 10, No. 2, pp. 1077-1084, May 1995.
- [100] B. T. Polyak. *Introduction to Optimization*. Optimization Software, Inc. Publications Division, New York, 1987.
- [101] M. V. Rakic, M. L. Markvic, Z. M. Markovic. *Short-term operation planning of combined power systems*. Proceedings of the Tenth Power systems and Computing Conference (PSCC'90) pp.1155-1162. Graz, Austria, August, 1990.
- [102] M. V. Rakic, Z. M. Markovic. *Short-term operation and power exchange planning of hydro-thermal power systems*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 9, No. 1, pp. 359-365, February 1994.

- [103] S. S. Rao. *Optimization Theory and Applications*. Second Edition. Willey Eastern Limited. New Delhi, 1984.
- [104] A. Renaud. *Daily generation management at Electricité de France: from planning towards real time*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 38, No. 7, pp. 1080-1093, July 1993.
- [105] M. Rivier Abbad. *Modelo probabilista de explotación de un sistema eléctrico: contribución a la teoría marginalista*. Tesis doctoral. E. T. S. de Ingenieros Industriales, ICAI, Universidad Pontificia de Comillas. Madrid, 1998.
- [106] S. Ruzic, N. Rajakovic. *A new approach for solving extended unit commitment problem*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 6, No. 2, pp. 269-278, February 1991.
- [107] S. Ruzic, N. Rajakovic, A. Vuckovic. *A flexible approach to short-term hydro-thermal coordination. Part I: Problem formulation and general solution procedure*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 11, No. 3, pp. 1564-1571, August 1996.
- [108] S. Ruzic, N. Rajakovic, A. Vuckovic. *A flexible approach to short-term hydro-thermal coordination. Part II: Dual problem solution procedure*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 11, No. 3, pp. 1572-1578, August 1996.
- [109] S. Ruzic. *Lagrangian relaxation technique in power systems operation planning: multipliers updating problem*. Proceedings of the 1995 IEEE/KTH Stockholm Power Tech Conference, pp. 61-66. Stockholm, Sweden. June 1995.
- [110] S. M. Shahidehpour, S. K. Tong. *An overview of power generation scheduling in the optimal operation of a large scale power system*. Electric Machines and Power Systems, Vol. 19, pp. 731-762, 1991.
- [111] J. J. Shaw, R. F. Gendron, D. P. Bertsekas. *Optimal scheduling of large hydrothermal power systems*. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-104, No. 2, pp. 286-294, February 1985.
- [112] G. B. Sheblé, G. N. Fahd. *Unit commitment literature synopsis*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 9, No. 1, pp. 128-135, February 1994.
- [113] G. B. Sheblé, L. L. Grigsby. *Decision analysis solution of the unit commitment problem*. Electric Power Systems Research, Vol. 10, No. 11, pp. 85-93, November 1986.
- [114] R. R. Shoults, S. K. Chang, S. Helmick, W. M. Grady. *A practical approach to unit commitment, economic dispatch and savings allocation for multiple-area pool operation with import/export constraints*. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-99, No. 2, pp. 625-633, March 1980.
- [115] W. L. Snyder Jr., H. D. Powell Jr., J. C. Rayburn. *Dynamic programming approach to unit commitment*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. PWRS-2, No. 2, pp. 339-350, May 1987.
- [116] E. Spedicato (Editor). *Algorithms for Continuous Optimization. The State of the Art*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
- [117] C. C. Su, Y. Y. Hsu. *Fuzzy dynamic programming: an application to unit commitment*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 6, No. 3, pp. 1231-1237, August 1991.

- [118] S. K. Tong, S. M. Shahidehpour. *Combination of lagrangian relaxation and linear programming approaches for fuel constrained unit commitment problem*. Proceedings of IEE, Vol. 136, Part C, No. 3, pp. 162-174, May 1989.
- [119] S. K. Tong, S. M. Shahidehpour. *An innovative approach to generation scheduling in large-scale hydro-thermal power systems with fuel constrained units*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 5, No. 2, pp. 665-673, May 1990.
- [120] A. Turgeon. *Optimal scheduling of thermal generating units*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-23, No. 6, pp. 1000-1005, December 1978.
- [121] P. P. J. van den Bosch, G. Honderd. *A solution of the unit commitment problem via decomposition and dynamic programming*. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-104, No. 7, pp. 1684-1690, 1895.
- [122] H. P. Van Meteren *Scheduling of generation and allocation of fuel using dynamic and linear programming*. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-103, No. 7, pp. 1562-1568, July 1984.
- [123] H. P. Van Meteren, B. M. Perry, J. L. Farah, M. G. Kamienny, J. E. Enjamio, W. T. Wynne. *Extensive unit commitment function including fuel allocation and security area constraints*. Proceedings of the 1985 IEEE Power Industry Computer Applications Conference (PICA'85), pp. 309-314, 1985.
- [124] F. E. Villaseca, B. Fardanesh. *Fast Thermal Generation Rescheduling*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 2, No. 1, pp. 65-71, February 1987.
- [125] S. Virmani, E. C. Adrian, K. Imhof, S. Mukherjee. *Implementation of a Lagrangian Relaxation based unit commitment problem*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 4, No. 4, pp. 1373-1380, October 1989.
- [126] J. G. Waight, F. Albuyeh, A. Bose. *Scheduling of generation and reserve margin using dynamic and linear programming*. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-100, No. 5, pp. 2226-2230, May 1981.
- [127] C. Wang, S. M. Shahidehpour. *Optimal generation scheduling with ramping costs*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 10, No. 1, pp. 60-67, February 1995.
- [128] C. Wang, S. M. Shahidehpour, D. S. Kirschen, S. Mokhari, G. D. Irisarri. *Short-term generation scheduling with transmission and environmental constraints using an augmented lagrangian relaxation*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 10, No. 3, pp. 1294-1301, August 1995.
- [129] A. J. Wood, B. F. Wollenberg. *Power Generation, Operation and Control. Second Edition*. John Wiley and Sons, New York, 1996.
- [130] H. Yan, P. B. Luh, X. Guan, P. M. Rogan. *Scheduling of hydrothermal power systems*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 8, No. 3, pp. 1358-1365, August 1993.
- [131] F. Zhuang, F. D. Galiana. *Towards a more rigorous and practical unit commitment by lagrangian relaxation*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 8, No. 2, pp. 1077-1084, November 87.
- [132] F. Zhuang. *Optimal generation unit commitment in thermal electric power systems* PhD Thesis. Department of Electrical Engineering, McGill University, Montreal, 1988.
- [133] *Using the CPLEX callable library*. Version 4.0. 1989-1995 CPLEX Optimization, Inc.