UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA, DE LAS CIENCIAS SOCIALES Y DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES

TESIS DOCTORAL

ESTUDIO DEL INFINITO ACTUAL COMO IDENTIDAD CARDINAL EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA DE 13 A 16 AÑOS

Juan Antonio Prieto Sánchez

MÁLAGA, 2015

UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

AUTOR: Juan Antonio Prieto Sánchez

http://orcid.org/0000-0001-9607-0190

EDITA: Publicaciones y Divulgación Científica. Universidad de Málaga

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA, DE LAS CIENCIAS SOCIALES Y DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES

TESIS DOCTORAL

ESTUDIO DEL INFINITO ACTUAL COMO IDENTIDAD CARDINAL EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA DE 13 A 16 AÑOS

Tesis Doctoral que presenta

Juan Antonio Prieto Sánchez

Realizada bajo la dirección del

Dra. Dª. Catalina Fernández Escalona

MÁLAGA, 2015

UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

DEPARTAMENTO DIDÁCTICA DE LA
MATEMÁTICA, DE LAS CIENCIAS SOCIALES Y
DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES

Catalina Fernández Escalona, doctora por la Universidad de Málaga, profesora titular adscrita al Área de Conocimiento de Didáctica de la Matemática y perteneciente al Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Málaga, como directora de la tesis doctoral presentado por el licenciado Juan Antonio Prieto Sánchez, **"Estudio del infinito actual como identidad cardinal en estudiantes de Educación Secundaria de 13 a 16 años".**

Hago constar que dicho trabajo aborda, plantea y constata un problema de investigación con una calidad de un máximo nivel y rigor científicos, tanto en sus planteamientos e hipótesis como en la metodología.
Me complace informar que reúne las condiciones científicas requeridas en la normativa vigente, por lo cual, autorizo presentación, lectura y defensa pública.

Málaga a 28 de octubre de 2015.

Fdo. Dra. Dª Catalina Fernández Escalona
Directora de la Tesis Doctoral

Nihon
He divisado, desde las páginas de Russell, la doctrina de
los conjuntos, la Mengenlebre, que postula y explora
los vastos números que no alcanzaría un hombre inmortal aunque
agotara sus eternidades contando, y cuyas dinastías imaginarias
tienen como cifras las letras del alfabeto hebreo.
En ese delicado laberinto no me fue dado penetrar. (...)
J. L. Borges

Al infinito no se enfrenta el pensamiento con el arma, experimentada pero burda, de la recopilación, sino mediante una estrategia sutil e indirecta que desde el inicio vincula al conjunto potencialmente (sólo potencialmente por el momento) infinito con otro de tal sino; de manera tal que el vínculo mismo revela que lo inacabado es realmente inacabable, y así que el infinito en potencia es infinito en acto.
V. Gómez Pin

A mi mujer, Ana Sonia

y a mi hijo Juan Manuel.

AGRADECIMIENTOS

Gracias a mi directora de tesis, que desde el primer momento mostró interés por este proyecto y total confianza. Sin su apoyo y recomendaciones este trabajo no habría sido acabado.

Gracias a Guillermina Walldegg (qepd), Mónica Torres, Virginia Montoro, Carmen Azcárate, Sabrina Garbin, Mª Carmen Penalva, Myriam Codes, José Luis Belmonte y Javier Claros, por sus aportes y recomendaciones que en la lejanía han contribuido a mejorar este trabajo.

Gracias a mi compañero de la UCA, José Mª Cardeñoso, que ha mejorado esta tesis con sus consejos y asesoramientos formales.

Gracias a los compañeros del grupo Pensamiento Numérico Algebraico (PNA), perteneciente a la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Los distintos encuentros del Grupo PNA, desde Granada (2011) hasta la última en Albacete (2015), con sus debates y sus acertados comentarios han propiciado la optimización de este trabajo.

Gracias a mis profesores de la Universidad de Málaga, Alfonso Ortiz Comas (qepd) y José Luis González Marí, por inducirme su amor por la didáctica de la matemática.

Gracias a todos mis maestros y profesores, Dª Pastora Gil (qepd), Dª Maribel Díaz, D. Serafín Galán, Dª Mª Jesús Gutiérrez, Dª Lolina Maeso, Dª Loli Valero, D. Emilio Velasco, que supieron inculcarme, a lo largo de toda mi vida académica, el gusto por las matemáticas. Sin duda, tengo algo de cada uno de ellos y ellas en mi personalidad docente.

Gracias a mis compañeros de trabajo por tener la paciencia de soportarme en los momentos críticos de este camino largo de investigación.

Gracias a Patricia del Carmen Cuenca y Emilia Luna, mis compañeras literarias, por sus revisiones en todo o parte del trabajo. A Mª Carmen Asencio, mi compañera tecnóloga, por su ayuda y asesoramiento informático. A Narcisa Canas y María del Mar De Torres por sus muestras incesantes de ánimos y apoyos.

Gracias a las directoras de mi centro, Colegio "Huerta de la Cruz", y a todas las Hijas de la Caridad por ofrecerme toda clase de facilidades para poder realizar este trabajo.

Gracias a todos mis alumnos y alumnas de Educación Secundaria a quienes les dedico los resultados de esta investigación. Sin ellos este trabajo habría sido totalmente estéril.

Gracias a mi familia: mi hermana, ejemplo de lucha y de superación; mi padre, ejemplo de creatividad, resolutor de problemas, todo cerebro; mi madre la cual me inculcó la importancia del esfuerzo y de la constancia, "quien la sigue la consigue". Sin duda, quien hoy soy, os lo debo a vosotros.

Gracias a mi mujer, Ana Sonia, y a mi hijo, Juan Manuel, por sobrellevar mis ausencias al no estar con ellos el tiempo que se merecían. Sin duda alguna, los más perjudicados todo este tiempo.

Obviamente, después de tantos apoyos, sugerencias, consejos y críticas constructivas; todos los errores, falta de claridad, ausencias e imperfecciones, que pueda presentar esta memoria, son atribuibles solo y exclusivamente al autor de la misma.

Octubre 2015

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

Siglas y Abreviaturas

APOE: Teoría Acción-Proceso-Objeto-Esquema
BTO: Bachillerato
CINVESTAV-IPN: Centro de Investigación y de Estudio Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
CSIC: Consejo Superior de Investigaciones Científica
EI: Educación Infantil
EPO: Educación Primaria Obligatoria
ERIC: Education Resources Information Center
ESO: Educación Secundaria Obligatoria
LOPD: Ley Orgánica de Protección de Datos
MATHDI: Mathematics Didactics Database, Mathematics Education
PERT: Planned Evaluation and Review Technique
PMA: Pensamiento Matemático Avanzado
PME: Pensamiento Matemático Elemental
TESEO: Base de datos de Tesis Doctorales Españolas
TIC: Tecnología de la Información y de la Comunicación
UNESCO: United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization
UNI: Educación Universitaria
UMA: Universidad de Málaga
UGR: Universidad de Granada
UCA: Universidad de Cádiz
Exp.: Experiencias
Cap.: Capítulo
Apdo.: Apartado
Vol. Volumen
Vols. Volúmenes
No. Número

PRESENTACIÓN

El trabajo de investigación que presentamos es la Memoria de Tesis Doctoral realizadas por Juan Antonio Prieto Sánchez dirigida por la Dra. Catalina Fernández Escalona del Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Málaga.

La presente Memoria consta de ocho capítulos que a continuación detallamos de forma resumida. El primer capítulo, trata el problema de investigación: su origen, la elección del tipo de infinito. Se indaga en las capacidades, habilidades y estrategias cognitivas que manifiestan los alumnos y alumnas de 13 a 16 años de edad de Educación Secundaria, ante tareas que requieren la comparación de conjuntos para identificar el infinito actual como identidad cardinal. El marco conceptual detallando las definiciones de los diferentes conceptos que usamos a lo largo de todo el trabajo. Referenciamos trabajos e investigaciones de interés en nuestra investigación y cómo abordaremos el problema de investigación planteado. Mostramos algunas ideas relativas al aprendizaje de las matemáticas, que están en la base de esta investigación para una mejor compresión e interpretación del presente trabajo. Y por último, perfilamos las metas generales y particulares de la misma que se encuadran dentro de sus objetivos y la formulación de las hipótesis.

Para todo ello, nos proponemos elaborar y contrastar empíricamente dos experiencias: la primera con la ayuda de la experiencia física que pretende simular el modelo de comparación de inclusión de conjuntos, relación parte/todo y la comparación adoptada por Bolzano; mientras que en la segunda experiencia tratamos de un modelo que describa y explique la evolución de dicho tipo de conocimiento mediante la comparación de conjuntos, relación uno-a-uno, elegida por Cantor basada en la biyección entre ellos. Ambas se aplicarán en el segundo ciclo de Educación Secundaria.

Por tanto, el capítulo II, es el marco metodológico elegido de acuerdo con la naturaleza y los objetivos de la investigación, la situación de las hipótesis en relación con el proceso de investigación, las características científicas del trabajo y del método utilizado, así como las principales fuentes de información y documentación consultadas.

En el capítulo III, se realiza un estudio teórico, donde se trata de encontrar la realización del análisis didáctico del infinito actual como identidad cardinal, que establecerá el marco interpretativo y el desarrollo conceptual de las dos formas de comparar conjuntos numéricos, para su aceptación o no, en estudiantes de secundarias. Entendemos el análisis didáctico de las matemáticas como el análisis de los contenidos de esta, que depende de la organización de su enseñanza por el sistema educativo y que tiene varios componentes. Desde el punto de vista teórico, es necesario indagar en los modelos de construcción y elaboración de las comparaciones de los conjuntos finitos-infinitos; en el origen y evolución del infinito desde una postura fenomenológica, epistemológica-histórica, cognitiva y enseñanza-curriculum, para poder crear un marco interpretativo de las comparaciones de conjuntos y de la conceptualización del infinito actual.

En el capítulo IV, presentamos un resumen del trabajo de investigación que se realizó en la última fase de la Memoria de Tercer Ciclo, Prieto (2004) que será el estudio exploratorio del presente trabajo. En éste se analizaron las respuestas mediantes unas tareas de razonamiento del infinito como identidad cardinal en series numéricas con el criterio de comparación uno-a-uno, elegida por Cantor basada en la biyección entre conjuntos. El fin primordial de esa investigación, de acuerdo con el marco metodológico y el esquema general que se propuso entonces, era indagar en determinados aspectos del conocimiento del número infinito en los estudiantes de Educación Secundaria. En concreto se seleccionó una muestra reducida de 22 estudiantes. Para ello se construyó un primer modelo teórico evolutivo susceptible de comparación empírica, la cual se realizó y los resultados lo adjuntamos en este capítulo IV.

El capítulo V, con la ayuda del estudio teórico realizado en el análisis didáctico, muestra un trabajo empírico del infinito actual siguiendo el modelo de inclusión, como método de comparación de conjuntos, de Bolzano. La relación de inclusión en Bolzano enfatiza la relación parte-todo y establece una comparación dentro del propio conjunto. El objetivo en este será corroborar con una experiencia física, espejos paralelos, lo que Waldegg (2005, citado en Fuenlabrada & Armella, 2008) argumenta sobre el criterio de Bolzano que es más "intuitivo" porque es más cercano a experiencias concretas (finitas) y además "menos paradójico". La prueba que consideramos adecuada es la entrevista clínica semiestructurada. Nos facilita la tarea del análisis de respuestas, la categorización y las conclusiones en este capítulo la investigación narrativa con la redacción de los microrrelatos.

Con la investigación previa desarrollada en el capítulo IV estudio exploratorio permitió, establecer un modelo evolutivo primogénito tanto en el nivel educativo estudiado como en los distintos niveles del modelo. Las respuestas a las tareas analizadas en ese estudio mostraron existencia de regularidades y la posibilidad de clasificarlas con una cierta evolución de las distintas categorías. Se trató, a partir de ello, realizar una ampliación a ese estudio perfeccionando el modelo teórico susceptible de comparación empírica de competencias en el cardinal infinito que resumimos en el capítulo VI.

El capítulo VII expone el diseño y los resultados del estudio empírico cualitativo, que en su parte fundamental tiene un carácter transversal (grupos diferentes de sujetos de distintas edades, 13, 14, 15 y 16 años, y niveles escolares correspondientes a esas edades) y se ha realizado con un enfoque actual. La información que se quiere obtener se refiere a la categorización de los estudiantes según el rendimiento obtenido en las tareas asociadas al modelo evolutivo teórico señaladas en el capítulo anterior. Como la pretensión general del estudio empírico es validar un modelo evolutivo sobre un conocimiento concreto: el infinito actual como identidad cardinal, la prueba que consideramos adecuada, de nuevo, es la entrevista clínica semiestructurada, con los mismos alumnos y alumnas que participaron en el estudio empírico del capítulo V.

Por último, en el capítulo VIII, conclusiones, mostramos los aspectos fundamentales del trabajo, haciendo referencia a los objetivos, general y específicos, hipótesis y metodología, exponiendo los estudios en los que nos hemos basado para la confirmación de las hipótesis. Exponemos las conclusiones generales y logros más relevantes y las perspectivas futuras, dejando vías abiertas para la realización de investigaciones que aporten nuevos conocimientos a los logros conseguidos. Y finalmente, adjuntamos análisis de los resultados del trabajo sobre diversos aspectos relacionados con la enseñanza aprendizaje del infinito actual como identidad cardinal.

CAPÍTULO I

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1. Introducción

El trabajo de investigación que presentamos sobre dos formas de abordar el infinito actual mediante la comparación de conjuntos numéricos en alumnos y alumnas de educación secundaria, lo podemos enmarcar, en el ámbito de la Didáctica de la Matemática, en la línea de Pensamiento Numérico.

Castro (1994), detalla la línea de Pensamiento Numérico de la siguiente forma:

> Línea de estudio e investigación en Didáctica de la Matemática que se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de conceptos numéricos en el Sistema Educativo y en el medio social. El Pensamiento Numérico estudia los diferentes procesos cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significados utilizando diferentes estructuras numéricas. (p.8)

Y concreta, la misma autora, los intereses que persigue el Pensamiento Numérico en los siguientes puntos:

- La elaboración, codificación y comunicación de sistemas simbólicos con los que expresar los conceptos y relaciones de una estructura numérica.
- La organización, sistematización y desarrollo de diferentes actividades cognitivas que surgen y encuentran un modo de actuación en el marco de una estructura numérica.
- Los modos de abordar, interpretar y, en su caso, responder a una variedad de fenómenos y cuestiones que admiten ser analizados mediante conceptos y procedimientos que forman parte de una estructura numérica. (p.8)

Nuestro trabajo estará centrado en el concepto matemático del infinito, es un aspecto que revierte gran dificultad. Para Hilbert citado en D'Amore (1996): "¡El infinito! Ningún otro problema ha turbado tan profundamente el espíritu humano: ninguna idea ha estimulado tan profundamente su intelecto; y sin embargo ningún otro concepto tiene mayor necesidad de clarificación que el del infinito" (p.345), y que llega a ser de gran importancia para la construcción matemática y didáctica de otros conceptos. Mencionemos una frase dada por Dalessert citada también en D'Amore (1996): "La enseñanza de la matemática debe perseguir dos objetivos que son propios de ella: el sentido de rigor lógico y la noción del infinito" (p.345).

La elección del infinito actual en nuestro problema de investigación es básicamente por dos motivos:

- El infinito potencial puede presentar un obstáculo para la aceptación del infinito actual, Turégano (1996). De esa forma estudiar éste último involucra trabajar paralelamente con el infinito potencial. Como veremos en nuestros trabajos empíricos, las respuestas de algunos de los alumnos y alumnas a las tareas proporcionadas, hacen referencia al potencial para reconocer el actual.
- Para Fischbein (1982, citado en Garbin & Azcárate, 2002), la noción potencial del infinito es el que expresa a la interpretación natural intuitiva del infinito, en cambio el actual no es congruente con una interpretación intuitiva. Desde el comienzo de la investigación para nosotros, ha sido un reto usar este tipo de infinito en estudiantes de educación secundaria, donde el pensamiento matemático en los primeros cursos de esta etapa es elemental (PME) y de los cursos superiores corresponde a una transición entre el elemental y el avanzado (PMA).

Abordaremos el infinito actual como identidad cardinal. De las posibles formas de trabajarlo, utilizaremos comparaciones entre conjuntos. Es posible compararlo de dos formas, la reconocida por Bolzano donde hay una inclusión en el mismo conjunto estudiado, o la de Cantor, donde la comparación se hace con respecto a otro conjunto estableciendo una relación biyectiva entre ellos.

Las actividades para indagar en los alumnos y alumnas el tópico estudiado han sido construidas para favorecer la inducción de éstas. Para Garbín & Azcárate (2002):

> (…) hemos dejado explícito lo que ha favorecido la inducción de esta tarea durante las entrevistas realizadas en la investigación. Subrayamos la importancia de esta tarea en la actividad matemática, como ayuda para desarrollar un pensamiento coherente en el estudiante, de manera particular cuando está presente la noción de *infinito actual* en los problemas implicados en la tarea. (p.100)

En ella, trataremos de esclarecer la relación existente entre la interpretación y construcción del conocimiento del infinito actual en los alumnos y alumnas. La creación por el propio estudiante de los conjuntos finitos e infinitos, la relación que establecerán para la comparación de éstos conjuntos y la interpretación coherente que darán para la aceptación o no del cardinal infinito, independientemente de la naturaleza de sus términos, remite inmediatamente a consideraciones de tipo psicológico, epistemológico y didáctico.

Por todo ello, es necesario seguir una metodología teórica de investigación que resuma todos los campos en cuestión, y que además posibilite la contrastación empírica. En el ámbito de la Educación Matemática el método seguido se denomina Análisis Didáctico:

> Denominamos Análisis Didáctico de un tópico o contenido especifico en Educación Matemática al procedimiento metodológico global que integra y relaciona, siguiendo un proceso secuenciado y de acuerdo con los criterios de la meta-análisis cualitativa, informaciones relacionadas con el objeto de estudio y procedentes de fuentes diversas en torno a diferentes áreas de investigación en Educación Matemática. (González, 1995,

p.59)

Empezamos el capítulo con el marco matemático conceptual, para seguir con los antecedentes del trabajo realizado y se caracteriza formalmente el problema de investigación. Finalmente, se plantean los objetivos y las hipótesis de la investigación.

2. Marco matemático-conceptual

En el período de investigación, segundo curso de doctorado, se hace un estudio de la definición del tópico matemático elegido en el diccionario de filosofía de Ferrater Mora. Con el aporte epistemológico de Ferrater se realiza un trabajo teórico de síntesis del infinito, proporcionándonos una visión filosófica-histórica. Era necesario, a partir de aquí, dar una versión matemática y para ello elegimos la obra *"Los Principios de la Matemática"* de B. Russell. En el capítulo XIII, encontramos lo que sería para nosotros, la pieza clave para iniciar la investigación. En él expone de una forma muy breve la teoría de lo finito e infinito, (ver anexo I).

A modo de resumen nos comenta que un conjunto[1] finito de términos es aquel que si le sustraemos o sumamos uno o varios términos, el conjunto formado no es igual[2] al original. En cambio, si originalmente tenemos un conjunto infinito de términos y le sustraemos o sumamos uno o varios términos, el conjunto final es igual al original.

Se trata ahora de cómo comparar los conjuntos para verificar si es o no finito.

Sea el conjunto finito A formado por un número natural de elementos. Si los elementos de A se pueden emparejar uno a uno con los elementos del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, es decir que puede ponerse en correspondencia biunívoca, sin que por ello sobre ningún elemento en los conjuntos, diremos que A es un conjunto finito. El elemento n coincide con el número de elementos de A llamado su cardinal (cardinalidad, potencia).

[1] Russell habla, evidentemente, de *clase*. Nosotros lo particularizamos sólo a *conjunto*.
[2] En términos de *clase*, en vez de iguales serán *semejantes*.

En caso contrario, *A* es infinito[3], es decir:

Un conjunto *A* es infinito es un conjunto que no se puede poner en correspondencia biunívoca con ningún conjunto de la forma *{1, 2,…, n}*, para ningún número natural n por grande que sea (criterio optado por Cantor para comparar conjuntos).

O bien:

Un conjunto *A* es infinito si tiene un subconjunto propio, distinto al propio *A*, con el que se puede poner en correspondencia biunívoca (criterio de inclusión de Bolzano).

En estos casos, se dice que *A* tiene cardinal infinito.

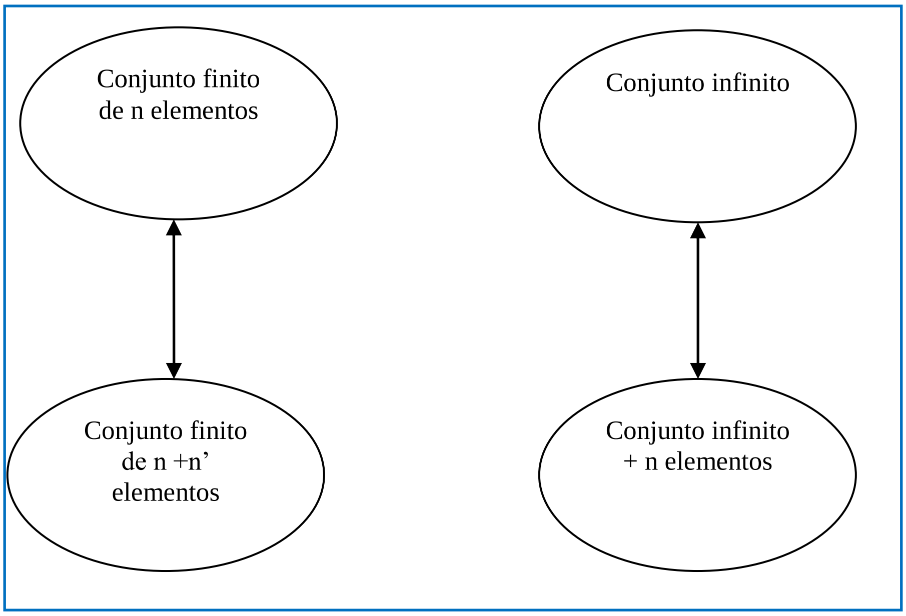


Figura I. 1. Criterio de comparación elegido por Cantor

[3] Proposición históricamente por Dedekind: Un conjunto es infinito cuando no es finito.

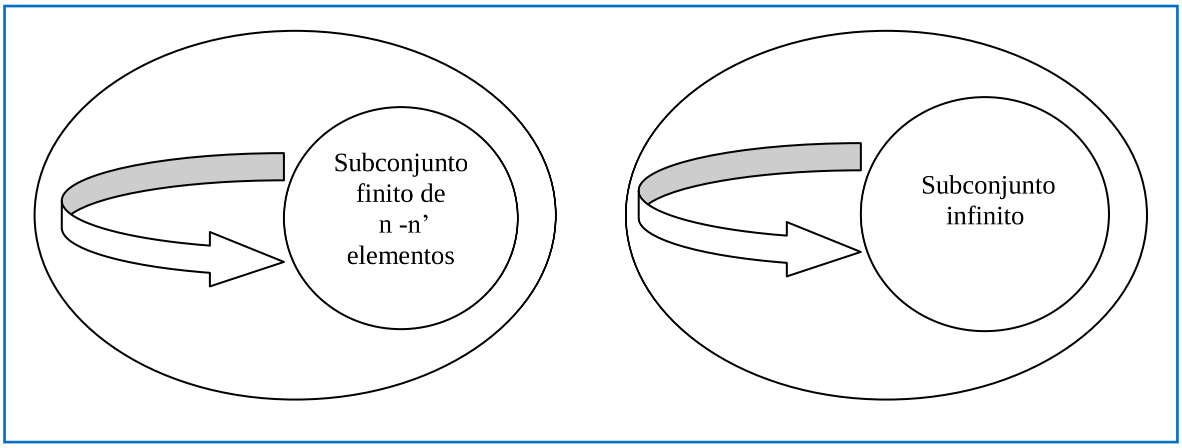


Figura I. 2. Criterio de inclusión de Bolzano

2.1 Definiciones conceptuales

Secuencia numérica

La entendemos, como:

"(…) una progresión dada por la relación generatriz de Bolzano, es decir, es una progresión en el sentido de Bertrand Russell" (Fernández, 2001, p.22).

Una progresión de Russell es una serie discreta que tienen términos consecutivos, comienzo pero no fin, y que además es conexa. Una serie es conexa si dos términos cualesquiera de la misma presentan la relación generatriz. La definición completa es:

> Sea *R* cualquier relación asimétrica biunívoca, y sea *u* una clase tal que todo término de *u* tenga la relación $\check{R}$ con algún otro que también pertenezca a la clase *u*. Exista, por lo menos, un término de la clase *u*, que no tenga relación $\check{R}$ con ningún término de *u*. Sea *s* cualquier clase a la que pertenezca por lo menos uno de los términos de *u* que no tenga la relación $\check{R}$ con ningún término de *u*, y a la que pertenezca también todo término de *u* que tenga la relación $\check{R}$ con algún término que pertenezca tanto a *u* como a *s* y sea *u* tal que esté contenido totalmente en cualquier clase *s* que satisfaga las condiciones anteriores. Entonces *u*, considerado en cuanto ordenado por la relación *R*, es una progresión. (Russell, 1903/1995, p. 384)

Clase

Llamamos clase a una familia de conjuntos o colección de conjuntos u otros objetos matemáticos que no es esencialmente un conjunto. Es decir, el concepto de clase pretende agrupar todos los conjuntos u objetos matemáticos que tienen una cierta propiedad en común.

Cardinal finito e infinito

Entendemos cardinal o número cardinal como una generalización de los números naturales para contar el número de elementos de cualquier conjunto ya sea finito o infinito.

Mientras que el cardinal de un conjunto finito es un número natural ordinario, el correspondiente a un conjunto infinito es un número transfinito en término de Cantor.

Se diferencias de los números ordinales que no sólo nos indica el número de elementos de un conjunto sino también las distintas maneras de poder ordenarlos.

Equipotencia entre conjuntos y criterios de comparación

El concepto de cardinalidad se sustenta en el concepto de equipotencia, y éste en el de relación biunívoca o de biyectividad.

Una relación biunívoca entre dos conjuntos A y B es un criterio por el cual se empareja cada elemento de A con un elemento de B, de tal forma que todos los elementos de B sean pareja de un, y sólo de uno, elemento de A.

De ahí, diremos que dos conjuntos A y B tienen el mismo número de elementos o que tienen la misma cardinalidad o en definitiva son equipotentes, si existe una función f biyectiva definida de A en B. Esta es la postura adoptada por Cantor para comparar conjuntos.

Pero, por otro lado, si un conjunto A que sea equipotente con un subconjunto de la forma:

$$\{1, 2, 3, ..., n\} \subseteq \mathbb{N}$$

entonces, diremos que A tiene n elementos o que su cardinal es n y se denota:

$$Card(A) = A = n$$

De esta definición se puede formar también la idea de conjunto finito y conjunto infinito, método tomado por Bolzano para comparar conjuntos.

El método de inclusión de Bolzano:

- Un conjunto no vacío A es finito si para algún entero positivo n, A es equipotente a $\{1, 2, 3, 4, 5, ..., n\}$, de lo contrario A es infinito.
- O bien, un conjunto A es infinito si existe un subconjunto propio B de A equipotente a A, en cualquier otro caso A es finito.

Infinito potencial-Infinito actual

Entendemos como infinito potencial lo que no tiene fin, lo que siempre, en término temporal; continúa, en término espacial. Asociada a la ausencia total de frontera o de límites, falta total de conclusión, como proceso que se repite, o progresa, indefinidamente.

En cambio, el infinito actual lo asociamos a la idea de totalidad, a la idea de completez, el de unidad.

Mientras que la primera connotación lo asociamos como un proceso la segunda, la consideramos como alcanzado y con los límites adquiridos.[4]

Razonamiento inductivo

Entendemos por razonamiento inductivo numérico de la misma manera que Ortiz (1997): “Razonamiento en el que intervienen: procesos mentales, lógicos o aritméticos, implícitos en la realización de inferencias o generalizaciones inductivas en series

[4] La primera distinción entre estos infinitos, la propuso Aristóteles y es el infinito actual el único infinito de las matemáticas transfinitas contemporáneas, incluyendo la definición fundacional de los conjuntos infinitos de Dedekind (León, 2014).

numéricas; los conceptos y propiedades del número que se utilizan en dichos procesos" (p.20).

3. *Antecedentes*

Los antecedentes de este trabajo los buscamos en distintos campos teóricos, y así, tenemos:

- *Epistemología matemática*.

  Lo hemos centrado en las teorías de Bolzano y Cantor. Como el objeto del estudio está en las comparaciones entre conjuntos y la aceptación o no del infinito cardinal, hemos incluido el logicismo de Russell.

- *Educación Matemática*.

  Nos hemos basado en la extensa bibliografía y el estudio realizada por D'Amore (1996). Según este autor se puede diferenciar dos direcciones de investigación entorno al infinito matemático en lo que se refiere a la educación matemática:

  - La primera, denominada por él, didáctica A, acogería todas aquellas investigaciones con tendencia a hacer más simples, atractivas, fáciles aquellos conceptos que fueron difíciles y por tanto, no captables por el estudiante. Ejemplo de ello, lo forman las investigaciones del Análisis, A.H.A. (1994, citado en D'Amore, 1996).
  - La segunda, denominada didáctica B: últimos decenios de investigación en didáctica, recogería las investigaciones que se ponen del lado del estudiante y pretendiendo examinar cuáles son los motivos que hacen que esa problemática del infinito sea tan difícil de entender. En esta dirección de investigación, se sirve de experiencias, de investigaciones

empíricas, de prueba en el aula, de entrevistas, etc. Para profundizar en esta corriente de investigación D'Amore & Frabboni (1996).

Por otro lado, y específicamente, con investigaciones del infinito actual de Garbín & Azcárate(2002), Turégano (1996), los trabajos realizados con comparación de conjuntos de Penalva (1996) (2001), Waldegg(1996), y Fuenlabrada & Armella(2008).

- *Otros antecedentes.*

  En distintos campos de conocimiento:

  - Psicogénesis del concepto y el de su historia, Piaget & García (1982) y Fuenlabrada & Armella(2008).
  - Modelo evolutivo del conocimiento, Ortiz (1997), Fernández (2001) y Prieto (2004).
  - Intuición, Lestón (2008) y Belmonte (2009).
  - Fenomenología, Codes(2009) y Claros(2010), (2013).

3.1 Trabajos e investigaciones previas

Atendiendo a las búsquedas bibliográficas realizadas con relación al tema de investigación, podemos señalar una serie de antecedentes de interés para nuestro trabajo, en cuanto a que, todos ellos tratan temas numéricos de manera empírica.

Hemos tenido en cuenta, en la selección de los mismos, dos aspectos básicos: tipos de investigaciones realizadas sobre el concepto del infinito, su naturaleza e interpretación desde educación Primaria hasta los primeros cursos universitarios, incluso estudios realizados a profesores de matemáticas; y los instrumentos de observación y experimentación utilizados

Queremos destacar que no hemos encontrado ningún estudio previo sistemático sobre el tópico elegido, al menos no con el apartado metodológico y conceptual que hemos desarrollado.

Sí hemos encontrado algunas descripciones cuantitativas, que usan cuestionario pasado de una manera colectiva a alumnos y alumnas secundaria y bachillerato, relativos al estudio del infinito y de tipo cualitativo con desarrollo de entrevistas a alumnos y alumnas de estas edades

A continuación detallamos, cronológicamente, esas investigaciones por su cercanía a alguna fase de nuestro estudio. La descripción resumida que acompaña esa descripción, son de los propios autores y autoras que aparecen en resúmenes y abtracts de las distintas bases consultadas.

Tesis Doctorales

TÍTULO	**ESTUDIO SOBRE LA COMPRENSION DEL CONCEPTO DE NÚMERO CARDINAL DE UN CONJUNTO INFINITO**
AUTOR	PENALVA MARTÍNEZ, Mª del CARMEN
Tipo de documento	Tesis Doctoral
Director de Tesis	GAULIN, CLAUDE
Fecha de Lectura	01/01/1996
Resumen	El estudio tiene como marco general el campo del desarrollo cognitivo y el de la investigación educativa, centrándose en el papel que las concepciones individuales juegan en relación al concepto de numero cardinal de un conjunto infinito (concepto publico versus concepto personal).los objetivos de la investigación son: "Estudiar las concepciones y dificultades de comprensión que algunos estudiantes de distinta formación matemática tienen asociadas al concepto de numero cardinal de un conjunto infinito o" e "indagar sobre la evolución de las concepciones asociadas al concepto de numero cardinal de un conjunto infinito en la interacción que se produce en una situación de enseñanza y elaborar el concepto personal de estudiantes seleccionados". Los datos obtenidos se presentan como un abanico de recomendaciones que favorecen el estudio de conceptos matemáticos en general y la comprensión de conjuntos infinitos en particular.

TÍTULO	RAZONAMIENTO INDUCTIVO NUMERICO. UN ESTUDIO EN EDUCACIÓN PRIMARIA
AUTOR	ORTIZ COMAS, ALFONSO
Tipo de documento	Tesis Doctoral
Director de Tesis	RICO ROMERO, LUIS
Fecha de Lectura	01/01/1998
Resumen	El razonamiento inductivo tiene especial importancia en la construcción matemática de la aritmética tanto a nivel formal como intuitivo. Uno de los objetivos de esta investigación es destacar la importancia del razonamiento inductivo en los procesos de enseñanza aprendizaje de la Matemática en Educación Primaria. Para ello se realiza un Análisis Didáctico de la Inducción consistente en un estudio epistemológico con una revisión histórica del concepto en diferentes campos del saber, entre ellos la propia Matemática, y un estudio curricular histórico sobre la base de un análisis de libros de textos editados en España en el presente siglo. Asimismo, se realiza un estudio de la fundamentación inductiva de la aritmética del número natural tanto a nivel epistemológico y matemático, como psicológico. Entendiendo por Razonamiento Inductivo Numérico, razonamiento en el que intervienen procesos mentales, lógicos o aritméticos, implícitos en la realización de inferencias o generalizaciones inductivas en series numéricas así como los conceptos y propiedades del número que se utilizan en dichos procesos, se lleva a cabo un estudio empírico para explicar y describir desde un punto de vista del desarrollo cognitivo, la evolución del Razonamiento Inductivo Numérico en los escolares de Educación Primaria. Se construye un modelo teórico evolutivo que se contrasta empíricamente mediante un estudio de carácter descriptivo, a partir de una muestra amplia, y un estudio empírico cualitativo basado en entrevistas clínicas.

TÍTULO	INFINITO ACTUAL; INCONSISTENCIAS E INCOHERENCIAS DE ESTUDIANTES DE 16-17 AÑOS
AUTOR	GARBIN DALL'ALBA, SABRINA
Tipo de documento	Tesis Doctoral
Director de Tesis	AZCARATE GIMENEZ, CARMEN
Fecha de Lectura	30/06/2000
Resumen	Esta investigación se centra en identificar las inconsistencias y representar, categorizar y analizar las situaciones de coherencia que manifiestan los alumnos en relación con sus esquemas conceptuales asociados al concepto de infinito actual, que se contextualizan en problemas expresados en lenguajes matemáticos diferentes: verbal, geométrico, gráfico, algebraico y analítico. Conceptualmente nos hemos centrado en el dominio cognitivo del

	llamado Pensamiento Matemático Avanzado y transición del Pensamiento Matemático Elemental al Avanzado, complementando principalmente con las teorías de las inconsistencias, y de las representaciones semióticas. Metodológicamente nuestra investigación se enmarca en un estudio cualitativo. El análisis de datos es inductivo y el foco de investigación tiene un carácter exploratorio, descriptivo e interpretativo. Participaron en el estudio 80 estudiantes de 16-17 años. A partir de los esquemas conceptuales de los alumnos, asociados al concepto de infinito actual, se construyó un instrumento que permitió mostrar aquellos estudiantes que expresan respuestas coherentes y/o incoherentes con los problemas planteados y que modela lo que hemos llamado líneas de coherencia: finitista (o de evasión de infinitud), actual potencial. Estas líneas permitieron establecer cinco categorías de coherencia y a partir de los diferentes análisis: identificar las inconsistencias de los alumnos según la clasificación de Tirosh (1990); dotar de diferencia a los términos inconsistencia e incoherencia; mostrar la conveniencia de establecer esta distinción; clasificar a los estudiantes según estos términos; proponer y describir lo que entendemos por tarea de conexión y reflexionar sobre su posible importancia en desarrollar un pensamiento coherente en el estudiante.

TÍTULO	**RELACIONES LOGICAS-ORDINALES ENTRE LOS TERMINOS DE LA SECUENCIA NUMERICA EN NIÑOS DE TRES A SEIS AÑOS**
AUTOR	FERNANDEZ ESCALONA, CATALINA
Tipo de documento	Tesis Doctoral
Director de Tesis	ORTIZ COMAS, ALFONSO
Fecha de Lectura	17/12/2001
Resumen	En el trabajo de investigación se indagan las capacidades, habilidades y estrategias cognitivas que manifiestan los niños de 3 a 6 años de edad, ante tareas que requieren del conocimiento lógico ordinal de la secuencia numérica básica o de los números para contar. Considerando las construcciones matemáticas y lógicas del numero natural (logicismo, convencionalismo, epistemología genética, fenomenología, etc.), las investigaciones en Educación matemática y las investigaciones psicológicas basadas en el constructivismo y en las teorías del procesamiento de la información, se construye un marco conceptual para definir el problema de investigación.

TÍTULO	**MODELOS INTUITIVOS Y ESQUEMA CONCEPTUAL DEL INFINITO EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA, SECUNDARIA OBLIGATORIA,BACHILLERATO Y UNIVERSIDAD**
AUTOR	BELMONTE MARTINEZ, JOSE LUIS
Tipo de documento	Tesis Doctoral
Director de Tesis	SIERRA VÁZQUEZ, MODESTO
Fecha de Lectura	21/04/2009
Resumen	El presente estudio consiste en el análisis de la evolución del concepto de infinito desde el último curso de educación primaria al primero de enseñanza universitaria, partiendo de una categorización sistemática del estado del arte, mediante la introducción de un patrón de evolución nivelar (PEN) como elemento cuantificador. Dicho análisis se ha basado, por una parte, en la detección de modelos intuitivos ya consolidados que operan frente a la adquisición de nuevos conocimientos, prestando especial atención a la sensibilidad de tales modelos frente a variaciones contextuales o de representación; por otra parte, se ha elaborado un esquema conceptual para cada uno de los niveles considerados, esquema conceptual nivelar (ECN), a partir de elementos propios o característicos -metafóricos, simbólicos, preformales- y diferenciadores -finitistas e infinitistas, obstaculizadores, contradictorios-. Se incluye, asimismo, un análisis pormenorizado del lenguaje utilizado por los sujetos de la muestra con el fin de poner de manifiesto el papel articulador de los elementos metafóricos entre el entorno cotidiano, y finito, y la abstracción que supone este concepto.

TÍTULO	**ANÁLISIS DE LA COMPRENSIÓN DE LOS CONCEPTOS DE SERIE NUMÉRICA Y SU CONVERGENCIA EN ESTUDIANTES DE PRIMER CURSO DE UNIVERSIDAD UTILIZANDO UN ENTORNO COMPUTACIONAL**
AUTOR	CODES VALCARCE, MIRIAM
Tipo de documento	Tesis Doctoral
Director de Tesis	SIERRA VÁZQUEZ, MODESTO
Fecha de Lectura	15/03/2010
Resumen	El principal objetivo de esta investigación es analizar la comprensión del tópico serie numérica y su convergencia en alumnos de primer curso de universidad. Este análisis se realizará a partir del paradigma de investigación de la teoría APOS desarrollada por Ed. Dubinsky y su grupo de investigación RUMEC.

TÍTULO	**LÍMITE FINITO DE UNA SUCESIÓN: FENÓMENOS QUE ORGANIZA**
AUTOR	CLAROS MELLADO, FRANCISCO JAVIER
Tipo de documento	Tesis Doctoral
Director de Tesis	CORIAT BENARROCH, MOISÉS
Fecha de Lectura	15/07/2010
Resumen	En esta tesis se afirma que el limite finito de una sucesión organiza, en el sentido de Freudenthal, dos fenómenos denominados: fenómeno de aproximación simple intuitiva (a.s.i) y fenómeno de retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones (i.v.s.). Se ha realizado un estudio con libros de texto de un periodo comprendido entre 1933-2005 y se ha observado la presencia de los fenómenos señalados anteriormente en estos. Por otro lado se ha realizado un estudio con alumnos, analizando las respuestas de estos a un cuestionario relativo al límite finito de una sucesión, y se ha observado la presencia de estos dos fenómenos en dichas respuestas.

TÍTULO	**EL INFINITO EN EL AULA DE MATEMÁTICA. UN ESTUDIO DE SUS REPRESENTACIONES SOCIALES DESDE LA SOCIOEPISTEMOLOGÍA**
AUTOR	LESTÓN, PATRICIA
Tipo de documento	Tesis Doctoral
Director de Tesis	CRESPO CRESPO, CECILIA
Fecha de Lectura	13/01/2011
Resumen	El presente trabajo reporta una investigación acerca del infinito y su presencia en el discurso matemático escolar. Se realiza desde el marco teórico de la socioepistemología, que entiende la construcción del conocimiento matemático como el resultado de acciones situadas en un escenario particular que se analizan de manera sistémica. El concepto en que se centra esta investigación es el infinito, cuya naturaleza y tratamiento es muy especial en el aula, ya que no es discutido ni definido explícitamente como elemento matemático en la escuela, pero cuya presencia es indiscutible. Los estudiantes se enfrentan a diversos obstáculos en la construcción de este concepto y de los que se relacionan con él. Sin embargo, en las Instituciones de Formación Docente, sí existe el infinito como concepto que se construye desde el trabajo de Cantor con conjuntos infinitos y números transfinitos. Desde un estudio socioepistemológico de la evolución de este concepto se lograron detectar los procesos, significados y preguntas que provocaron el surgimiento de esta noción. La finalización de esa parte de la investigación permite identificar prácticas sociales, prácticas de referencia y contextos de significación para los dos infinitos que se detectaron: uno vinculado con el álgebra y el otro con el análisis. Las

	indagaciones realizadas con los estudiantes del Profesorado y de la escuela media, llevaron a comprender que el concepto que se consideró como centro de esta investigación se encuentra muy atado a otros conceptos que le dan un 2 contexto para construir significado. Y esos contextos son lo que se necesita recuperar para la escuela y las instituciones de formación docente.

Artículos en Revistas, Informes, Ponencias o Conferencias

TÍTULO	**Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual**
AUTOR	Guillermina Waldegg
Tipo de documento	Artículo de revista
AÑO	1996
Resumen	El establecimiento de una biyección y una de sus partes propias es el obstáculo más difícil de superar para la compresión de los conjuntos infinitos. Una vez identificado como obstáculo epistemológico en el desarrollo histórico, se planteó la conveniencia de determinar su naturaleza en el dominio didáctico. Para medir la coherencia de las respuestas de los estudiantes ante situaciones vinculadas a los conjuntos infinitos se planteó la necesidad de realizar un estudio basado en las concepciones de los estudiantes. En este trabajo damos cuenta de los resultados obtenidos a partir de las respuestas de los estudiantes; en ellas, se puede apreciar que existe la resistencia a la instrucción, característica de los obstáculos didácticos. Se mostró también que, en todo caso, es el contexto de la pregunta, y no de la enseñanza, lo que determina el comportamiento de los alumnos.

TÍTULO	**Intuición del infinito en estudiantes de primero de B. U. P.**
AUTOR	Pilar Turégano Moratalla
Tipo de documento	Artículo de revista
AÑO	1996
Resumen	Se presenta los resultados de una investigación acerca de las intuiciones e imágenes del concepto de infinito que s exponen en manifiesto en los estudiantes cuando se enfrentan, en distintos contextos figurativos, a situaciones matemáticas que involucran el infinito.

TÍTULO	**El infinito: una historia de conflictos, de sorpresas, de dudas. Un campo fértil para la investigación en didáctica de la matemática**
AUTOR	Bruno D'Amore
Tipo de documento	Artículo de revista
AÑO	1996
Resumen	En un primer punto se comenta algunos aspectos de la historia de las matemáticas del infinito. Un segundo punto sobre algunas líneas de

	investigación sobre la didáctica del infinito matemático. Y por último, un tercer punto se constituye una bibliografía sobre el tema:"El infinito en la educación Matemática".

TÍTULO	**Reflexiones sobre las dificultades que conlleva la noción de infinito en aprendizaje de la matemática**
AUTOR	Virginia Montoro, Nora Scheuer
Tipo de documento	Artículo de revista
AÑO	1999
Resumen:	El presente trabajo consiste en una reflexión sobre la problemática que presentan los conceptos que se nutren de la noción de infinito matemático en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Se presenta un breve panorama de la evolución del concepto de infinito a lo largo de la historia y se describen las dificultades de conceptualización de los alumnos en sus primeros contactos con esta noción

TÍTULO	**¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos**
AUTOR	S. Garbin
Tipo de documento	Artículo
AÑO	2005
Resumen	Las ideas, resultados y reflexiones que desarrollamos, son producto de estudiosy parte de investigaciones (Garbin 2000, 2003, 2005 y Garbin y Azcárate, 2001) que han pretendido contribuir con el debate de la problemática del infinito matemático en su dualidad potencial-actual (Fischbein, Tirosh y Hess (1979), Sierspinska (1987), Tall (1980), Tirosh, (1991), Moreno y Waldegg (1991), Tsamir y Tirosh, (1994), D¿Amore (1997), Tall (2001), Fischbein, 2001), desde la específica, que genera la influencia de las representaciones y distintos lenguajes matemáticos sobre las percepciones del infinito y razonamientos matemáticos asociados, y en las inconsistencias e incoherencias de las respuestas de los alumnos a problemas que están presentes procesos infinitos. Este escrito fue desarrollado como curso corto en la Relme 18 (Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa realizada en Chiapas, México, Julio 2004).

TÍTULO	**Ideas del infinito, percepciones y conexiones en distintos contextos: el caso de estudiantes con conocimientos previos de cálculo**
AUTOR	S. Garbin
Tipo de documento	Artículo
AÑO	2005
Resumen	En este artículo presentamos una investigación que surge de un especial interés por estudiar y explorar el caso del infinito, en su dualidad

	potencial-actual, en un nivel donde ya se han introducido conceptos formales del cálculo diferencial e integral, y donde empiezan a aparecer interconexiones y confusiones entre la «imagen formal» e «imagen informal» de estos conceptos. El estudio pretende contribuir con el debate de la problemática del infinito e infinitos a nivel universitario. Se enmarca en un estudio cualitativo; el análisis de datos es inductivo y el foco de investigación es de carácter exploratorio, descriptivo e interpretativo. Participaron en el estudio 89 estudiantes con edades comprendidas entre 17 y 25 años.

TÍTULO	**Implicaciones didácticas de las dificultades en el aprendizaje de conjuntos infinitos: representaciones de conjuntos numéricos en textos matemáticos escolares**
AUTOR	M.C. Penalva
Tipo de documento	Artículo de revista
AÑO	2001
Resumen	El trabajo que se muestra a continuación está basado, principalmente, en la investigación desarrollada para la elaboración de la Tesis Doctoral, presentada en la Universidad de Valencia en 1996, titulada Estudio sobre la comprensión del concepto de número cardinal de un conjunto infinito, y también en el análisis de las implicaciones didácticas de resultados obtenidos en la Tesis, centrados en el estudio de materiales curriculares. La reflexión sobre el infinito actual ha sido el eje organizador de la investigación.

TÍTULO	**Esquemas conceptuales e incoherencias en relación con el infinito actual**
AUTOR	S. Garbin, C. Azcárate
Tipo de documento	Artículo de revista
AÑO	2000
Resumen	Este artículo describe una investigación cualitativa cuyo interés se centró principalmente en dos puntos: a) Acercarse a los esquemas conceptuales de los estudiantes, asociados al concepto de infinito actual, mediante problemas expresados en lenguajes matemáticos diferentes: verbal, geométrico, gráfico, algebraico y numérico. b) Diseñar un instrumento que permita analizar la coherencia en las respuestas de los estudiantes a los problemas planteados en el cuestionario. A partir de las respuestas de los estudiantes y del análisis cualitativo se establecieron tres líneas de coherencia que hemos llamado: finitista, actual y potencial, las cuales permiten identificar a aquellos alumnos que no mantienen respuestas coherentes en los problemas planteados en el estudio y categorizar posteriormente las inconsistencias que se presentan.

	Este artículo es un resumen de la tesis de maestría, "Esquemas conceptuales e incoherencias de estudiantes de bachillerato en relación con el concepto de infinito actual contextualizado en problemas expresado en diferentes lenguajes matemáticos: verbal, geométrico, gráfico, algebraico y numérico. Estudio exploratorio."
TÍTULO	**El concepto de infinito actual: Una investigación acerca de las incoherencias que se evidencian en alumnos de bachillerato**
AUTOR	S. Garbin, C. Azcárate
Tipo de documento	Artículo de revista
AÑO	2001
Resumen	Se presenta un trabajo de investigación sobre el concepto de infinito actual, realizado por alumnos de segundo de Bachillerato. Se expone la descripción de las limitaciones y se explotan las oportunidades de comunicación que ofrecen los registros de representación presentes en los enunciados de los problemas planteados a los estudiantes. Además se diseña un instrumento que permita mostrar la coherencia en las respuestas de los estudiantes a los problemas. A continuación se describen y distinguen los términos inconsistencias e incoherencias para describir y clasificar los estudiantes según estas variables. Finalmente, se describe el concepto de tarea de conexión y se reflexiona sobre su importancia en la actividad matemática.

TÍTULO	**Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años**
AUTOR	S. Garbin, C. Azcárate
Tipo de documento	Artículo de revista
AÑO	2002
Resumen	En este artículo presentamos algunos resultados, reflexiones y aportaciones de un trabajo de investigación (Garbin, 2000) que se centra en identificar las inconsistencias y representar, categorizar y analizar las situaciones de coherencia que manifiestan los alumnos en relación con sus esquemas conceptuales asociados al concepto de infinito actual, el cual se contextualizan en problemas expresados en lenguajes matemáticos diferentes: verbal, geométrico, gráfico, algebraico y analítico. Metodológicamente la investigación se enmarca en un estudio cualitativo. El análisis de datos es inductivo y el foco de investigación tiene un carácter exploratorio, descriptivo e interpretativo. Participaron en el estudio 80 estudiantes de 16-17 años.

TÍTULO	**Otros hallazgos sobre los obstáculos en la comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor**
AUTOR	G. Arrigo, B. D'Amore
Tipo de documento	Artículo de revista
AÑO	2004

Resumen	En este artículo estudiamos los obstáculos epistemológicos y didácticos encontrados en estudiantes italianos y suizos (de edad comprendida entre 17 y 19 años) en el estudio del teorema de Cantor, que afirma el hecho que la infinidad de los números reales comprendidos entre 0 y 1 es mayor que la infinidad del conjunto de los números racionales. El enfoque está centrado en los obstáculos didácticos, creados casi siempre por los mismos profesores en los niveles escolares precedentes, cuando presentan modelos intuitivos que crean falsas concepciones, a veces insuperables.

TÍTULO	**Al infinito y más acá: concepciones de estudiantes universitarios**
AUTOR	V. Montoro
Tipo de documento	Artículo de revista
AÑO	2005
Resumen	Estudia las concepciones de alumnos universitarios sobre el infinito matemático, mediante un cuestionario escrito individual. Los participantes fueron 120 estudiantes ingresantes y avanzados de distintas carreras. Educación Física, Biología, Matemática. La aplicación del Análisis Factorial de Correspondencia mostró que la formación matemática resultó la variable de mayor peso para la compresión de este concepto, seguida por el avance de la carrera. La mayoría de los alumnos ingresantes y de Educación Física no aceptaron las colecciones infinitas, en algunos casos identificando los infinitos con mucho. En cambio, los alumnos avanzados y los alumnos de matemáticas tendieron a aceptar las colecciones infinitas y a distinguirlas de todo. La distinción entre infinito y todo apareció como el mayor desafío para estudiantes de distintas condiciones. Se argumenta que en el aprendizaje del infinito intervienen procesos representacionales de suspensión y redescripción, que requieren en este caso de la participación en contextos educativos que propicien un alto grado de reflexión y explicación matemáticas, lo cual no es habituales en la educación universitaria.

TÍTULO	**El paso del infinito potencial al infinito "como un todo" para aprender la construcción de los conjuntos infinitos**
AUTOR	C.M. Valdivé
Tipo de documento	Artículo de revista
AÑO	2005
Resumen	La experiencia del docente de matemática en los diferentes niveles del sistema educativo venezolano, así como la incorporación de estos profesores a grupos de investigación, nos hacen repensar el papel crucial que éstos representan en la relación teoría-praxis-investigación en tema tan neurálgico como lo es la enseñanza y aprendizaje de los conjuntos infinitos, puesto que involucra el ¿corazón de la matemática?: el infinito (Valdivé, 2003; Garbin y Azcárate, 1999, Arrigo y D'Amore, 1998). Concepto que ha tenido una larga y dramática historia en la filosofía y en

	la matemática (Fischbein, 1998; Ortiz, 1994) pero que a su vez es la noción que más la ha enriquecido. Por tal razón se presenta esta experiencia de carácter fenomenológico (Carr y Kemmis, 1988), la cual tuvo como objetivo describir, analizar e interpretar las acciones de 15 profesores de matemática, correspondientes al programa de Postgrado Especialización en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Valle del Momboy, que funciona en la ciudad de Valera, estado Trujillo, los cuales utilizaron la investigación-acción-técnica (Habermas, 1971; Lokpez, 2001). La experiencia estuvo orientada hacia el estudio del docente como investigador, capaz de analizar reflexivamente su entorno, identificar sus necesidades y buscar estrategias de solución sobre situaciones en Educación Matemática, surgidos de problemas cotidianos en el aula de clases: la construcción de los conjuntos infinitos a la luz la teoría cantoriana. Los resultados se enfocaron en 2 dimensiones: a) El papel del profesor y sus modelos mentales, b) La ideología del profesor en las prácticas escolares.

TÍTULO	**¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos**
AUTOR	S. Garbin
Tipo de documento	Artículo de revista
AÑO	2005
Resumen	Las ideas, resultados y reflexiones que desarrollamos, son producto de estudios y parte de investigaciones (Garbin 2000, 2003, 2005 y Garbin y Azcárate, 2001) que han pretendido contribuir con el debate de la problemática del infinito matemático en su dualidad potencial-actual (Fischbein, Tirosh y Hess (1979), Sierspinska (1987), Tall (1980), Tirosh, (1991), Moreno y Waldegg (1991), Tsamir y Tirosh, (1994), D'Amore (1997), Tall (2001), Fischbein, 2001), desde la específica, que genera la influencia de las representaciones y distintos lenguajes matemáticos sobre las percepciones del infinito y razonamientos matemáticos asociados, y en las inconsistencias e incoherencias de las respuestas de los alumnos a problemas que están presentes procesos infinitos.

TÍTULO	**Ideas del infinito, percepciones y conexiones en distintos contextos: el caso de estudiantes con conocimientos previos de cálculo**
AUTOR	S. Garbin
Tipo de documento	Artículo de revista
AÑO	2005
Resumen	En este artículo presentamos una investigación que surge de un especial interés por estudiar y explorar el caso del infinito, en su dualidad potencial-actual, en un nivel donde ya se han introducido conceptos formales del cálculo diferencial e integral, y donde empiezan a aparecer interconexiones y confusiones entre la «imagen formal» e «imagen

	informal» de estos conceptos. El estudio pretende contribuir con el debate de la problemática del infinito e infinitos a nivel universitario. Se enmarca en un estudio cualitativo; el análisis de datos es inductivo y el foco de investigación es de carácter exploratorio, descriptivo e interpretativo. Participaron en el estudio 89 estudiantes con edades comprendidas entre 17 y 25 años.

TÍTULO	**El “sentido del infinito”**
AUTOR	B. D’Amore, G. Arrigo, M. Bonila, M.I. Fandiño, A, Piatti, J. Rodríguez, S. Sbaragli
Tipo de documento	Artículo de revista
AÑO	2006
Resumen	Entendemos por “estimación” «el resultado de un proceso (consciente o inconsciente) que tiende a determinar el valor desconocido de una cantidad o de una magnitud» (Pellegrino, 1999) ¿Qué sucede si tal valor desconocido es infinito? ¿Existe un “sentido del infinito”, así como existe un “sentido del número”? Si existe, ¿cómo se configura? Si no existe, ¿por qué? ¿Se logra dar un sentido intuitivo a la diferencia entre el infinito numerable y el continuo? En esta investigación se dan respuestas a estas y a otras preguntas, analizando el comportamiento de diversos sujetos, desde adolescentes hasta adultos, desde matemáticos expertos hasta personas de cultura no específica en matemática. La investigación, efectuada en Colombia, Italia y Suiza, ofrece un vasto panorama con pocas diferencias relevantes entre los diferentes países.

TÍTULO	**El concepto de infinito en la escuela: ordenando lo inconmensurable**
AUTOR	E.M. Fedriani, A.F. Tenorio
Tipo de documento	Artículo de revista
AÑO	2007
Resumen	Enseñar lo infinito en el aula no es fácil. Por eso, este artículo trata de las dificultades que los alumnos tienen para entender este concepto matemático tan complejo. Explicaremos cómo es enseñado actualmente (concretamente, en el caso de la Comunidad Autónoma Andaluza) y también recogeremos algunas sugerencias para facilitar su aprendizaje.

TÍTULO	**Un paseo por lo infinito. El infinito en matemáticas**
AUTOR	I. Castro, J. Pérez
Tipo de documento	Artículo de revista
AÑO	2007
Resumen	El concepto de *infinito* siempre ha fascinado a los mejores pensadores de la Humanidad. Por un lado, hay muchos aspectos que percibimos de la realidad que se nos aparecen como indicios razonables de fenómenos infinitos: el tiempo parece prolongarse hacia atrás y

	adelante *indefinidamente*; cualquier intervalo, espacial o temporal, parece poder dividirse *indefinidamente*; la percepción del espacio que nos rodea parece indicarnos que éste es *ilimitado*, etc. Por otro lado, la introducción de conjuntos o procesos infinitos ha sido la causa principal de la aparición de paradojas en Matemáticas, aunque la historia muestra que su consideración es inevitable. Más aún, para algunos historiadores la evolución de las Matemáticas puede entenderse como un enriquecimiento progresivo del universo matemático para incluir más y más *infinitos*. En esta charla realizaremos un breve recorrido por la historia de la evolución de las distintas nociones de *infinito*, analizando diversas concepciones surgidas en la realidad física (infinitos espaciales y temporales) y deteniéndonos algo más en los intentos de control y uso de esta noción en Matemáticas.

TÍTULO	**El infinito matemático: la escuela, Cantor y Bolzano**
AUTOR	P. Lestón, C. Crespo
Tipo de documento	Artículo de revista
AÑO	2010
Resumen	El infinito matemático fue caracterizado y formalizado en la obra de Bolzano y Cantor en el siglo XIX. En su época esas ideas provocaron negación e incluso rechazo en parte de la comunidad matemática. En este trabajo, se presenta el análisis de parte de los trabajos de Cantor y Bolzano, buscando obtener algunas ideas que permitan organizar un instrumento de indagación para comprender la manera en que los estudiantes de los últimos años de la carrera de profesorado de matemática entienden las caracterizaciones del infinito dadas por Bolzano y Cantor y su naturaleza, y la presencia y problemática del infinito matemático en el aula

TÍTULO	**Matemáticas del más allá: el infinito**
AUTOR	E.M. Fedriani, A.F. Tenorio
Tipo de documento	Artículo de revista
AÑO	2010
Resumen	El infinito constituye una materia importante y fascinante. De hecho, a lo largo de la historia muchos grandes pensadores han sido seducidos por las intrincadas y paradójicas sutilezas del infinito. No obstante, debe tenerse en cuenta que no existe un único concepto de infinito; en su lugar, es el nombre de una idea que depende del contexto en el que se usa. Casi todos tienen una idea intuitiva de qué es el infinito, pero rara vez coincide con la de los demás.

TÍTULO	**El infinito y niñ@s talento en matemáticas: Una mirada desde APOE**
AUTOR	S. R. Fuentes, A, Oktaç
Tipo de	Artículo de revista

documento	
AÑO	2011
Resumen	Tomando la teoría APOE presentamos cómo "niñ@s talento en matemáticas" comprenden el infinito al abordar la paradoja de las pelotas de tenis. Con base en una descomposición genética de dicha paradoja, hemos realizado entrevistas didácticas a niñ@s colombianos y mexicanos que son considerados dentro de sus comunidades como talentosos en matemáticas. En este trabajo discutiremos algunos aspectos teóricos relacionados con las construcciones y mecanismos mentales relacionados con el infinito; así como la manera como dicho concepto puede ser construido por esta población. Este análisis nos muestra en general, que los niñ@s participantes cuentan con herramientas matemáticas para abordar el problema, pero sólo como un algoritmo ya que no logran relacionar estas ideas con el contexto del problema, por presentarse "contradictorio" con la realidad.

TÍTULO	**El infinito en matemáticas**
AUTOR	R. S. Salat
Tipo de documento	Artículo de revista
AÑO	2011
Resumen	En este trabajo se presenta la evolución del concepto de infinito y algunas relaciones con otros desarrollos de las matemáticas. También presento el hecho de que de varios axiomas intuitivos podemos obtener proposiciones que ya no nos resultan tan evidentes; esto se sustenta con datos experimentales. Discuto la relación entre la igualdad 0.999...=1 y el concepto de infinito; y la posibilidad de usar el concepto de infinitesimal en Cálculo. A partir de esta información, presento algunas consideraciones de importancia para la didáctica de las matemáticas.

TÍTULO	**Colecciones infinitas. Ideas de estudiantes de escuelas secundarias**
AUTOR	M.T. Juan, V. Montoro, N. Scheuer
Tipo de documento	Artículo de revista
AÑO	2012
Resumen	Con el objeto de indagar las concepciones de alumnos de secundaria respecto a aspectos básicos del infinito, realizamos el análisis de las respuestas a un cuestionario escrito, solicitadas a 195 estudiantes. Hemos utilizado métodos estadísticos multivariados: un Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples (AFCM) y, posteriormente, una Clasificación Jerárquica. Los resultados nos permiten determinar cinco clases de estudiantes, según son sus modos de respuestas, que podemos identificar globalmente con las siguientes ideas: *posibilidad de obtener colecciones infinitas e infinito distinguido de todo; duda e inseguridad en la respuesta; infinito asociado a muy numeroso, junto con infinito no es posible y en infinito está todo.*

TÍTULO	**Interacciones en el aula de secundaria acerca de la dualidad infinito actual infinito potencial en un contexto geométrico**
AUTOR	A. M. Mántica, A. L. Carbó
Tipo de documento	Artículo de revista
AÑO	2013
Resumen	Se analiza la actividad realizada por alumnos de segundo año de una escuela secundaria de Santa Fe en la que se presenta el conflicto entre el infinito actual y el potencial. En el estudio realizado de los registros de los artefactos escritos y las grabaciones, pudo apreciarse que los estudiantes intuyen la existencia de un conjunto de infinitos elementos pero acotado. Se estudian los diálogos de los estudiantes, los cuales permiten apreciar la resistencia de muchos de ellos a aceptar la idea de que un conjunto acotado puede tener infinitos elementos. Se evidencia, además, que la noción de unidad de medida es tan fuerte que no permite a los estudiantes considerar sus partes. Se advierte que las nociones intuitivas son un obstáculo para aceptar los conceptos formales

TÍTULO	**El infinito potencial y actual: descripción de caminos cognitivos para su construcción en un contexto de paradojas**
AUTOR	S. Roa-Fuentes, A. Oktac
Tipo de documento	Artículo de revista
AÑO	2014
Resumen	En este artículo se propone una descomposición genética genérica del infinito y dos descomposiciones genéticas particulares: una para la paradoja de las pelotas de tenis y otra para la paradoja del Hotel de Hilbert. Estos análisis toman como fundamento la construcción de procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes relacionados con el infinito potencial y actual, respectivamente. Además, se presenta un análisis de las características de los procesos inmersos en cada situación y la complejidad que implica coordinarlos con el conjunto de los números naturales para construir procesos iterativos infinitos. Se estudia la dificultad que enfrenta un individuo al coordinar procesos de diferente naturaleza, convergentes y divergentes, para construir el infinito como un proceso.

4. El problema de investigación

Nuestro trabajo está centrado en el segundo ciclo de Educación Secundaria, el cual abarca las edades 13, 14, 15 y 16 años. El origen del problema de investigación lo podemos situar en el razonamiento para el reconocimiento y aceptación o no, del infinito actual como identidad cardinal tras comparar conjuntos numéricos finitos e infinitos así como las estrategias que utilizan para ello.

Nos planteamos dos métodos de comparación de estos dos conjuntos, la de Bolzano y la de Cantor, y dos formas de estudiarlas en los alumnos y alumnas. Mientras el método de inclusión de Bolzano lo utilizaremos como soporte de una experiencia física, la comparativa empleada por Cantor la estableceremos en un modelo evolutivo de competencias[5] (ya utilizada con anterioridad con el mismo problema de investigación en Prieto (2004)).

Según Ortiz 1997, en el currículo de matemáticas el método deductivo no se trabaja hasta educación secundaria y, por tanto, la mayor parte del aprendizaje de la Matemática está acondicionada a los argumentos inductivos utilizados por los alumnos y alumnas. Así, si el estudiante no utiliza la inducción como procedimiento, difícilmente podrá asimilar y acomodar en sus experiencias anteriores los saberes que se le intentan transmitir.

No obstante si estudiamos el curriculum de educación secundaria, en el área de las matemáticas, no se hace mención explícita del término infinito ni cuándo ni cómo enseñar a los alumnos y alumnas de esta etapa.

Con una muestra de alumnos y alumnas que abarque el segundo ciclo de Educación Secundaria considerados anteriormente, y, a través de un estudio transversal, pretendemos construir y validar modelos que expliquen, describan y justifiquen el desarrollo del conocimiento en la comparación entre conjuntos numéricos finitos e infinitos y de ahí a la aceptación o no del infinito actual como identidad cardinal.

[5] Entendemos competencias a las capacidades con diferentes conocimientos, habilidades, pensamientos, carácter y valores de una forma integral y en las diferentes interacciones, para poder comprender un tópico dado.

Nos proponemos probar que las diferentes estrategias realizadas por éstos se pueden organizar en modelos de desarrollo para explicar la evolución de competencias en el cardinal infinito.

Podemos centrar nuestro problema de investigación como sigue:

"El problema de investigación está enmarcado en el estudio de la naturaleza y evolución de competencias básicas del conocimiento del infinito actual como identidad cardinal en escolares de edades comprendidas 13 a 16 años."

Consideramos que hay varios puntos a tratar, según el tipo de comparación de los conjuntos planteados.

Para el estudio en el modelo de inclusión de Bolzano bajo una experiencia física que trate de modelar el tópico estudiado:

1. La propia naturaleza del infinito de ser inconmensurable e invariante.
2. La comparación entre conjuntos finitos e infinitos, cuáles son las estrategias utilizadas por los alumnos y alumnas para la aceptación o no del infinito como identidad cardinal.

Para el estudio con el modelo aceptado por Cantor bajo un modelo evolutivo de competencias:

1. La propia naturaleza de las secuencias numéricas.
2. La construcción de éstas series a partir de su término general.
3. La evolución y tendencia de éstas.
4. La comparación entre series numéricas finitas e infinitas, cuáles son las estrategias utilizadas por los alumnos y alumnas para la aceptación o no del infinito como identidad cardinal.

5. Supuestos sobre el aprendizaje de las matemáticas en esta investigación

A continuación mostramos algunas ideas relativas al aprendizaje de las matemáticas, que están en la base de esta investigación. Se trata con ello, una mejor compresión e interpretación del presente trabajo.

5.1 Supuestos generales

Los enmarcamos de la misma forma que lo hiciera Ortiz (1997):

- El desarrollo del curriculum ha de adaptarse a las posibilidades conceptuales, cognitivas, sociales y culturales de los alumnos y alumnas.
- El estudiante presenta una mente en desarrollo: las relaciones que un estudiante pueda establecer están condicionadas por su sistema conceptual y por la variedad de opciones que le posibilitan sus esquemas cognitivos.
- Los conceptos están determinados por los referentes que se utilizan en su interpretación y, por tanto, depende de los sistemas conceptuales.
- El conocimiento no siempre es acumulativo: el avance del conocimiento no siempre consiste en acumular nuevos conceptos en un sistema conceptual determinado sino, principalmente, en la modificación y evolución del mismo.
- El conocimiento matemático se construye, no se aprende. En esta construcción es tan importante la información recibida como los aportes del sujeto. Nuestra posición constructivista no es, por supuesto, radical ya que estamos dentro de un constructivismo psicológico (Piaget, 1985; Piaget y Morf, 1970) y matemático (Poincaré, 1963; Polya, 1966)
- Lo que un estudiante es capaz de construir en matemáticas está mediatizado por el aprendizaje recibido.
- Desde una perspectiva ética, todo planteamiento en Didáctica de la Matemática, debe preservar la autonomía intelectual de los alumnos y alumnas (Kamii, 1982); esto

significa una adaptación a sus sistemas conceptuales, creencias socioculturales y cognición.

- Psicológicamente nuestros planteamientos están en un paradigma mediacional: entre el estímulo y la respuesta hay procesos intermedios.
- Las teorías y modelos sobre cómo pensamos y aprendemos están determinadas por los instrumentos, conceptos científicos y por las intenciones que prevalecen en su construcción. Los cambios paradigmáticos provocan cambios científicos que modifican el enfoque, alcance y los logros de nuevas teorías.
- El aprendizaje de las matemáticas no escapa a las consideraciones anteriores.

Estos planteamientos están dentro de un constructivismo psicológico, matemático y didáctico, postulando que el aprendizaje en matemáticas está condicionado por:

a) esquemas y estructuras mentales subyacentes al propio saber y que el conocimiento de su desarrollo debe ser útil para una mejor adaptación curricular de la matemática elemental;

b) los conceptos que dispone un niño condiciona lo que puede aprender o construir sobre los mismos;

c) la enseñanza recibida determina la manera de entender y acceder al saber. (pp. 17-18)

5.2 Supuestos de partida

Como supuestos iniciales de nuestro trabajo, hemos planteado lo siguiente:

Para el objeto estudio, realizado bajo el modelo de inclusión de Bolzano en una experiencia física:

a) Realizar el estudio de esta investigación en el alumnado de secundaria, de los 13 años a 16 años.

b) Realizar pruebas con conjuntos de elementos físicos finitos e infinitos con la ayuda de espejos paralelos.

c) Las pruebas se realizaran mediante comparación de inclusión, relación parte-todo, en el propio conjunto. Primero en finitos y, en segundo lugar, con conjuntos infinitos.

Para el mismo objeto estudio, pero realizado con un modelo evolutivo de competencias fundamentado en la comparación de conjuntos mediante el criterio uno-a-uno, comparación elegida por Cantor basada en la biyección:

a) Realizar el estudio de esta investigación en el alumnado de secundaria, a partir de los 13 años.

b) Realizar las pruebas con series numéricas finitas e infinitas en concreto con las siguientes:

b1.- Todas con cota inferior 0

b2.- Pueden o no, tener cota superior.

b3.- Tomar como series básica las siguientes:

b31.- Como divergentes:

$$a_n = n + k \qquad \text{y} \qquad a_n = k.n$$

Existen investigaciones (Ortiz, 1997) que justifica que este tipo de series pueden ser dominadas por los alumnos y las alumnas a partir de los 12 años.

b32.- Como convergentes:

$$a_n = \frac{kn+1}{n} = \frac{1}{n} + k, \quad a_n = \frac{1}{n+k} \quad \text{y} \quad a_n = \frac{n}{n+k} = 1 - \frac{k}{n+k}$$

Desde un punto de vista evolutivo se justifica mediante el Estudio Exploratorio (capítulo IV) que estos tipos de series presentan más dificultad que las anteriores.

c) Las pruebas se realizaran por comparación entre series numéricas finitas e infinitas.

6. Objetivos de la investigación

Como ya hemos indicado, esta investigación está en la línea de Pensamiento numérico; en este sentido, las metas generales y particulares de la misma, se encuadran dentro de sus objetivos.

6.1 Objetivo general

Planteamos el objetivo general de este estudio en los siguientes términos:

"Analizar la naturaleza y evolución de competencias lógicas del infinito actual como identidad cardinal en los alumnos y alumnas de la ESO (13 a 16 años)"

6.2 Objetivos específicos

El objetivo general anterior se concreta en los siguientes objetivos específicos:

O1. Delimitar el conocimiento del infinito actual dentro del marco general de las matemáticas.

O2. Delimitar el infinito actual dentro de todos los posibles contextos: comparación de conjuntos.

O3. Delimitar el infinito actual en la transmisión escolar.

O4. Analizar y categorizar las respuestas de los alumnos y alumnas, al establecer como criterio de comparación la relación parte/todo, comparación elegida por Bolzano basada en las relaciones de inclusión, bajo una experiencia física.

O5. Establecer un modelo teórico evolutivo de competencia del infinito actual como identidad cardinal mediante la comparación de series numéricas y comprobar, con alumnos y alumnas de Educación Secundaria (13-16 años), la utilidad y eficacia del modelo para describir su comportamiento real.

O6. Caracterizar cada uno de los diferentes estados de desarrollo en términos de estrategias y procedimientos relativos al conocimiento.

O7. Comprobar que la relación de biyección elegida en el modelo evolutivo denota un cambio de pensamiento frente a la relación de inclusión adoptada en la experiencia física.

6.3 Objetivos complementarios

C1. Introducir el método de comparación con la relación de inclusión, con la ayuda de la experiencia física, como iniciación al aprendizaje del infinito.

C2. Iniciar una línea de trabajo en Pensamiento Numérico en Educación Secundaria, dentro de la línea de investigación seguida por Ortiz Comas y Fernández Escalona cuyo nivel de concreción se dan en "Razonamiento Inductivo Numérico" y “Competencias Ordinales”.

C3. Corroborar que las metodologías cualitativas iniciadas en Ortiz(1997) y Fernández(2001) son efectivas en este tipo de investigaciones.

C4. Comprobar la utilidad del análisis didáctico para fundamentar y contextualizar investigaciones en Educación Matemática.

7. Hipótesis

Las hipótesis se han formulado sobre la base de los siguientes puntos:

- Los objetivos de la investigación.
- El planteamiento del problema de investigación.
- El marco metodológico y los diseños empíricos que se expondrán en los capítulos correspondientes.
- El análisis de la series numérica finitas e infinitas.
- Los resultados del estudio exploratorio y de los estudios empíricos que veremos más adelante.

- Nuestra experiencia y conocimientos en Didáctica de la Matemática.

H1. Existen corrientes epistemológicas que priman el aspecto comparativo para entender el infinito actual frente a otras corrientes que priman el carácter inclusivo de los conjuntos.

H2. Existen tareas con esquemas lógicos comparativos subyacentes para evaluar las competencias del infinito en el campo de las series numéricas.

H3. Es posible tomar un modelo físico experimental como tarea para examinar el razonamiento en la cardinalidad de conjuntos infinitos.

H4. Es posible determinar pruebas para alumnos y alumnas de 13 a 16 años que formen parte de un diseño experimental cualitativo, constituidas por una serie de tareas que podemos ordenar de menor a mayor dificultad dependiendo de los esquemas lógicos de la comparación del número finito e infinito implicados en cada una de ellas.

H5. Las diferentes estrategias utilizadas por los alumnos y alumnas de 13 a 16 años en la comparación de series finitas e infinitas, se pueden organizar en un modelo teórico de desarrollo que explica y describe la evolución del conocimiento de la cardinalidad infinita.

H6. Los escolares aceptan más ampliamente el infinito actual como identidad cardinal mediante el método de inclusión Bolzano bajo una experiencia física que mediante comparación de conjuntos en el sentido cantoriano.

CAPÍTULO II

MARCO METODOLÓGICO

1. Introducción

Con el trabajo de investigación que presentamos se pretende indagar en las capacidades, habilidades y estrategias cognitivas que manifiestan los alumnos y alumnas de 13 a 16 años de edad de Educación Secundaria, ante tareas que requieren la comparación de conjuntos para identificar el infinito actual como identidad cardinal. Para ello, nos proponemos elaborar y contrastar empíricamente dos experiencias: la primera con la ayuda de la experiencia física que pretende simular el modelo de comparación de inclusión, relación parte/todo, adoptada por Bolzano; el segundo, un modelo que describa y explique la evolución de dicho tipo de conocimiento mediante la comparación de conjuntos, relación uno-a-uno, elegida por Cantor basada en la biyección entre ellos, las dos en el segundo ciclo de Educación Secundaria.

La finalidad es ampliar el conocimiento sobre desarrollo cognitivo en el campo numérico del infinito actual como identidad cardinal, disponer así de nuevos elementos que permitan resolver los problemas de la práctica escolar en dicho campo y mejorar la planificación y el desarrollo de los procesos de enseñanza-aprendizaje en matemáticas.

De acuerdo con la naturaleza de la investigación, será necesario experimentar con estudios cualitativos en los que se usa la entrevista clínica semiestructurada como principal medio de recogida de información.

En este capítulo presentamos, en sucesivos apartados, el marco metodológico elegido de acuerdo con la naturaleza y los objetivos de la investigación, la situación de las hipótesis en relación con el proceso de investigación, las características científicas del trabajo y del método utilizado, así como las principales fuentes de información y documentación consultadas.

2. Racionalidad del estudio

Desde la perspectiva de la investigación en Didáctica de la Matemática, una finalidad básica en los estudios sobre desarrollo cognitivo consiste en describir el desarrollo de los conceptos matemáticos en los escolares, así como explicar los procesos mediante los que estos conceptos se adquieren y aplican (Carpenter, 1980, citado en Fernández, 2001).

Para afrontar este tipo de estudios se suelen utilizar, fundamentalmente, dos modelos explicativos: el modelo orgánico u organicista, representado por Piaget y sus seguidores; y el modelo mecánico, que se considera una extensión del conductismo (Bermejo y Lago, 1994, citados en Fernández, 2001). Nuestro trabajo se sitúa en el primero de ellos, es decir, en el modelo organicista.

Para obtener datos empíricos útiles y fiables en un estudio de desarrollo cognitivo de 13 a 16 años, hemos considerado importante trabajar con métodos cualitativo, entrevista clínica individualizada como técnica adecuada de recogida de información (Claparède, 1976; Vinh-Bang, 1966; Inhelder, Sinclair y Bovet, 1974, citados en Fernández, 2001).

Por otra parte, disponemos de dos tipos de estudios para describir el desarrollo cognitivo: longitudinales y transversales. Pensamos que con carácter previo a un estudio longitudinal o de desarrollo cognitivo individual, es necesario disponer de unas pautas generales de desarrollo a contrastar posteriormente; es decir, de un conjunto de regularidades que pongan de manifiesto los aspectos básicos del comportamiento de grupos de sujetos de distintas edades. Con tal fin hemos decidido realizar un estudio transversal que ponga en evidencia las competencias del infinito actual como identidad cardinal en grupos de escolares de los cuatro cursos de Educación Secundaria y que permita detectar, en el mismo instante y ante las mismas pruebas, la existencia de niveles de desarrollo diferenciados (sujeto epistémico).

Consideramos, igualmente, que los comportamientos de los sujetos tienen connotaciones que manifiestan la naturaleza de las nociones aprendidas y el contexto didáctico en el que se han adquirido. En este sentido somos conscientes de la influencia de múltiples factores sobre la situación real del conocimiento. Esta complejidad aconseja construir un marco teórico para establecer un modelo manejable y que permita interpretar y justificar racionalmente los resultados obtenidos.

De acuerdo con lo anterior y con el problema expuesto en el capítulo I, hemos de decir que la investigación que presentamos es:

- De naturaleza propia organicista.
- Explicada mediante un esquema global integrador de los diferentes factores.
- Su objeto no son las estructuras sino los procesos de razonamiento, a los que nos aproximamos desde un enfoque transversal.
- El sustento del estudio, son las entrevistas clínicas individualizadas con un material concreto como base de la conversación entre investigador y el estudiante.

Se trata, por tanto, de estudios de carácter evolutivo, con enfoque transversal, sobre competencias generales estrechamente vinculadas al conocimiento del infinito actual como identidad cardinal.

Al ser un trabajo en la línea de desarrollo cognitivo pretendemos estudiar:

- Las variaciones con la edad de las competencias del infinito actual como identidad cardinal en alumnos y alumnas de 13 a 16 años de Educación

Secundaria.

- Los diferentes “Estados” y “Niveles”[6] que aparecen en relación con los cambios que se producen en dichas competencias.
- Las características generales de dicha evolución.

Y al mismo tiempo pretendemos obtener:

- Regularidades o pautas que se pueden presentar en las actuaciones de los alumnos y alumnas sobre el conocimiento matemático tratado.
- Una caracterización de los Estados y Niveles mediante competencias y habilidades.
- Los cambios que se producen en las competencias y habilidades de los sujetos en el paso de unos estados/niveles a otros.

3. Metodología

Una vez planteado el problema es necesario encontrar un método adecuado para resolverlo. De acuerdo con Fernández (1995), "Un método engloba a una diversidad de diseños" (p.53). Por otro lado la misma autora, "El método no es un algoritmo, mecánico y ritualizado; por el contrario, implica un proceso consciente, falible y altamente personalizado" (p. 57).

En nuestro caso, utilizaremos métodos empíricos cualitativos de acuerdo con las necesidades concretas del trabajo en cada momento. En los subapartados que siguen exponemos de forma secuenciada y comentada las diferentes técnicas y tipos de metodologías que se emplearan, los tipos de estudios que se realizaran, el tratamiento de los datos empíricos y el esquema general de la investigación.

[6] Hemos llamado Estados en la categorización de las respuestas dadas de los estudiantes cuando el criterio de comparación es la de Bolzano, para diferenciarlas de los Niveles que serán para la categorización en el Modelo evolutivo de competencias donde el criterio elegido es la de Cantor.

3.1 Procedimientos y técnicas metodológicas

En un principio y con objeto de analizar los antecedentes para delimitar y definir el problema de investigación, así como la forma de abordarlo, hemos realizado un estudio pormenorizado de aquellos trabajos que han tocado en algún momento temas relacionados con el nuestro en cuanto a aspectos metodológicos y técnicos como en otros aspectos conceptuales numéricos en estudiantes de Educación Secundaria (ver el apdo. 3.1 del cap. I). Queremos destacar que no hemos encontrado ningún estudio previo sistemático sobre el tópico elegido, al menos no con los aparatos metodológicos y conceptuales que hemos desarrollado.

En estos trabajos encontramos una justificación metodológica a la hora de proceder con estudios empíricos. Manifiestan que las entrevistas clínicas individualizadas, y sobre la base de un material concreto, son pruebas adecuadas para esos tipos de estudios, que han de ser, por tanto, cualitativos y con una muestra reducida de alumnos y alumnas (Bliss, 1987, Blanco y Prieto 2000 citados en Fernández, 2001).

Para realizar un estudio transversal sobre el infinito actual como identidad cardinal vimos la necesidad de disponer por un lado de una experiencia física en la cual se identificara una categorización de las distintas estrategias que utilizan los estudiantes, y por otro, de un modelo teórico contrastable empíricamente. Para construir todo ello hemos retomado el Análisis Didáctico como método no empírico en Educación Matemática. De acuerdo con Fernández, A. (1985):

> Existen preguntas que no necesitan datos observables, pues su resolución conlleva reflexión y establecer relaciones entre conceptos, lo que hace que el análisis didáctico pueda ser facilitador de respuestas a dilemas eminentemente didácticos, previos a cualquier otro tipo de investigación. (p. 62)

Para González (1995), “el análisis didáctico se basa en el meta-análisis cualitativo en torno al tópico en estudio y su finalidad es la formulación de teorías que expliquen los fenómenos observados en diferentes investigaciones” (p. 59). La aplicación del Análisis Didáctico a nuestro problema de investigación se esquematiza en la figura II.1; el desarrollo completo de ese estudio se expone en el capítulo III de este trabajo.

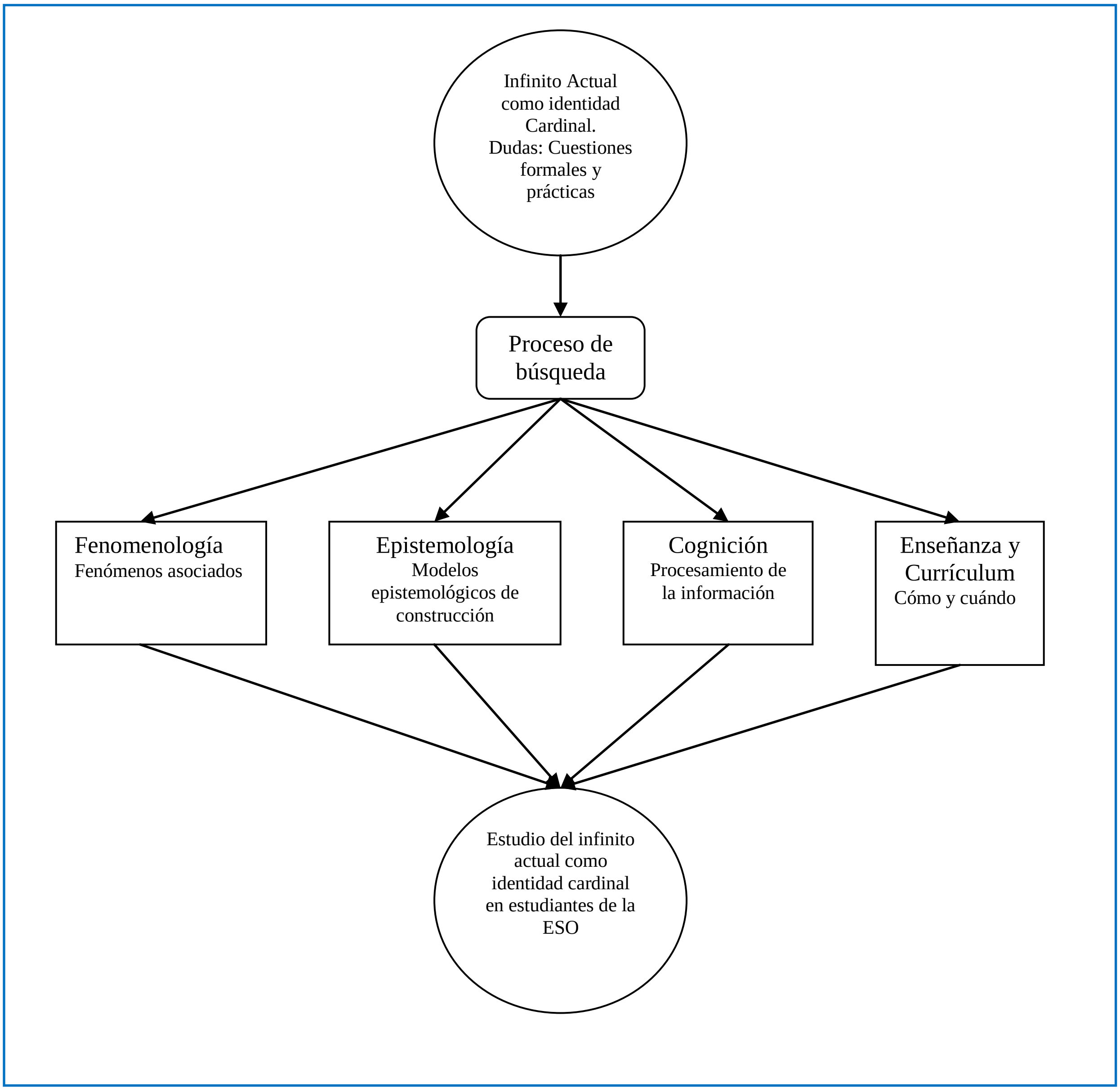


Figura II. 1 Esquema del análisis didáctico en nuestra investigación

Ahora bien, la categorización de respuestas de los estudiantes en la experiencia física simulando el modelo de inclusión de Bolzano y el modelo evolutivo de competencia con el modelo cantoriano, no se han construido únicamente con el Análisis Didáctico sino que se han realizado, por un lado una prueba piloto en lo que se refiere a la primera experiencia, y un estudio empírico exploratorio para la segunda que se expone en el capítulo IV de esta memoria. Los resultados, obtenidos mediante un procedimiento sistemático que también se explica en los capítulos IV y V, han servido para orientar y determinar los estados y niveles evolutivos.

Las contrastaciones empírica de todo ello se realizarán mediante dos estudios empíricos cualitativos. Para realizar dichos estudios serán necesario las construcciones de pruebas adaptadas a la experiencia física y al modelo; por tanto tenemos que determinar las pruebas y seguidamente realizar dos estudios empíricos cualitativos en base a ellas.

Para la preparación de dichas pruebas es necesario determinar tareas de competencias de acuerdo con los esquemas lógicos matemáticos que aparecen en cada uno de los estados de la experiencia física y de los niveles del modelo teórico (Berthoud y Ackermann, 1986; Lagos, 1992; Ortiz, 1997, citados en Fernández, 2001). Los conjuntos de tareas que conforman las pruebas se muestran en el capítulo V y en el anexo VI de esta memoria.

Con los datos recogidos mediante las aplicaciones de dichas pruebas, se realizarán los estudios empíricos cualitativos que se sitúan en un nivel interpretativo. En las dos pruebas, se emplearán las entrevistas clínicas semiestructuradas para la recogida de datos. Se pretende comprobar, con los estudiantes de 13 a 16 años de Educación Secundaria, la utilidad y eficacia de la experiencia física como agente modelo de la perspectiva adoptada por Bolzano para la identificación del infinito actual y del modelo evolutivo de competencias del número infinito en la perspectiva cantoriana del mismo tópico matemático. El diseño de este estudio se expone en los capítulos V y VI de este Informe.

En definitiva, utilizaremos una metodología mixta que se puede resumir en el siguiente proceso secuenciado:

a) Para definir el problema de investigación y argumentar la metodología seguida, hemos de utilizar un procedimiento de búsqueda y análisis de trabajos que tienen relación con el tópico estudiado y con las edades de los alumnos y alumnas que estamos considerando.

b) Para la categorización de respuestas en la experiencia física, hemos realizado una prueba piloto para verificar la validación del proceso en tanto al modelo de inclusión en la comparación de conjuntos. El análisis de respuestas y su categorización en Estados hemos empleado la investigación narrativa en microrrelatos, creando un patrón evolutivo.

c) Para determinar un modelo evolutivo previo de competencias del infinito en alumnos y alumnas de 13 a 16 años de Educación Secundaria, utilizaremos dos investigaciones concretas en Didáctica de la Matemática en los que se construye un modelo evolutivo (Ortiz, 1997; Fernández, 2001). Junto a ello, hemos realizado un Estudio Exploratorio cuantitativo previo, expuesto en capítulo IV, que justifique las características evolutivas en los estudiantes en cuanto a la forma de razonar en los procesos finitos e infinitos, así como identificar el infinito actual como identidad cardinal; lo cuál será determinante para explicitar los niveles que componen el modelo evolutivo que pretendemos.

d) Para la contrastación empírica del patrón y del modelo teórico de desarrollo hemos seguido metodologías empíricas cualitativas.

3.2 Tipos de estudio

En una gran parte del desarrollo de la investigación, se han de trabajar paralelamente los aspectos teóricos y prácticos. De ahí que a lo largo de todo el trabajo, se hayan de realizar los tres tipos de estudios siguientes:

- *Estudios teóricos*. Para estudiar y analizar la naturaleza del infinito actual como identidad cardinal en los estudiantes y, consecuentemente, establecer unos estados y niveles de conocimiento, realizamos un estudio teórico que hemos resumido en el capítulo III, Análisis Didáctico.
- *Estudios teórico-prácticos*, con el fin de buscar los métodos e instrumentos científicos de investigación y análisis de evidencia empírica más adecuados para observar en los alumnos y alumnas su competencia en el infinito actual como identidad cardinal. A tal fin se han de revisar los métodos e instrumentos utilizados en las investigaciones consultadas y, en general, en toda la bibliografía utilizada, básicamente, en Educación Matemática y Cognición.
- *Estudios prácticos de campo*, consistentes en distintas pruebas y actividades con alumnos y alumnas y que han culminado con la construcción de un instrumento de observación empírica adecuado al problema de investigación. Dicha construcción se ha realizado paulatinamente sobre la base de los resultados de los distintos estudios reseñados en este apartado.

3.3 Tratamiento de los datos empíricos

En la fase empírica de la investigación los datos que se obtendrán son de naturaleza cualitativa y, por consiguiente, están contenidos en expresiones verbales, (Fernández, 2001). Son dos los tratamientos distintos según el trabajo empírico realizado con los alumnos y alumnas:

Para la categorización de las distintas respuestas de los alumnos y alumnas en la experiencia física realizada, hemos utilizado por un lado la prueba piloto que se realizó previamente en esta etapa de la investigación y en el estudio empírico, la investigación narrativa, expuestos en el capítulo V :

- Realización de una prueba piloto en el que se confirme la existencia de regularidades en el comportamiento real y efectivo de los alumnos y alumnas al enfrentarse a la tarea de comparación en un mismo conjunto finito y posteriormente a un mismo conjunto infinito.
- Probar que alumnos y alumnas del mismo curso de Educación Secundaria pueden manifestar competencias en el infinito actual como identidad cardinal distintas según los distintos estados progresivos.

Para el modelo evolutivo competencia del infinito actual como identidad cardinal mediante la comparación de series numéricas, el procedimiento será el siguiente:

- Para agrupar las respuestas verbales del estudio exploratorio, nos basaremos en un proceso de codificación y clasificación de respuestas en cada una de las tareas presentadas, atendiendo a dos parámetros claros que se dan en cada una de ellas (Fernández, 2001):
    - Construcción del instrumento secuencial.
    - Uso del instrumento construido para localizar competencias del infinito actual como identidad cardinal.
- Para el caso del estudio empírico cualitativo, agruparemos las respuestas basándonos en el proceso de codificación y clasificación determinado por el procedimiento sistemático seguido por la prueba que se presenta en el capítulo VII.

4. *Articulación de las hipótesis en el proceso metodológico*

En el apartado anterior hemos expuesto un marco metodológico global. En este apartado vamos a especificar el proceso seguido para obtener las evidencias que justifican o confirman, en su caso, la bondad de cada una de las hipótesis.

H1. Existen corrientes epistemológicas que priman el aspecto comparativo para entender el infinito actual frente a otras corrientes que priman el carácter inclusivo de los conjuntos.

El procedimiento seguido para la confirmación de esta hipótesis es totalmente reflexivo a partir de información de tipo documental, y se lleva a cabo dentro del proceso de análisis didáctico, en concreto, cuando se analiza la relación entre Epistemología y Cognición (apdo. 5.4) y cuando se considera la Enseñanza y Currículum (apdo. 6). Los resultados y conclusiones del capítulo III basados en el análisis epistemológico aportan evidencias que sostienen H1.

H2. Existen tareas con esquemas lógicos comparativos subyacentes para evaluar las competencias del infinito en el campo de las series numéricas.

De la misma manera que con la hipótesis anterior, la confirmación de esta hipótesis se lleva a cabo dentro del proceso de análisis didáctico, concretamente, cuando se analiza Enseñanza y Currículum.

H3. Es posible tomar un modelo físico experimental como tarea para examinar el razonamiento en la cardinalidad de conjuntos infinitos.

Podemos diferenciar, metodológicamente, dos etapas para el proceso de validación de esta hipótesis:

Primera etapa, (cronológicamente coincide con la tercera etapa para la validación de las hipótesis H5 y H6), se realiza un análisis didáctico, en concreto en lo que respecta al análisis epistemológico y cognitivo, para obtener un marco referencial y explicativo en el cual se intenta modelar mediante una experiencia física la comparación de conjuntos finitos e infinitos para razonar en la cardinalidad de éstos. Se pretende con ello, utilizar el modelo de inclusión de Bolzano para afirmar la equipotencialidad de conjuntos numéricos infinitos, pero en conjuntos físicos. Se construye el modelo físico y se comprueba en un grupo reducido de alumnos y alumnas (en concreto con dos de 3º de ESO) para poder realizar mejoría en su estructura, así como evitar posibles aberraciones ópticas que entorpecerían el proceso. Se crean dos actividades relacionadas con las cardinalidades finitas e infinitas y la primera categorización teórica, en estados (patrón evolutivo), con respecto a las respuestas de los alumnos y alumnas de menos a más evolucionada.

Segunda etapa, se sitúa hacia la evaluación empírica de éste.

Este proceso seguido se aproxima a lo que se conoce como P.E.R.T. (Planned Evaluation and Review Technique) (Bisquerra, 1989, citado en Fernández, 2001), dentro del campo de la metodología educativa, que para este caso podemos resumir en dos pasos:

PRIMER PASO: Construcción del patrón. Construcción de un patrón evolutivo de competencias, como consecuencia de los siguientes elementos básicos.

- Realización de un análisis didáctico que fundamenta el significado del patrón y su estructuración, así como la racionalidad del mismo.

- Realización de un prueba piloto en el que se confirma la existencia de regularidades en el comportamiento real y efectivo de los alumnos y alumnas al enfrentarse a tareas exclusivamente de comparación de conjuntos finitos e infinitos. Este estudio pone en evidencia que el razonamiento de los alumnos y alumnas, utilizando para ello diferentes tipos de estrategias, pueden escalonarse desde el punto de vista evolutivo de menor a mayor complejidad.

SEGUNDO PASO: Confirmar la bondad del patrón. Se realizan entrevistas clínicas semiestructuradas para desarrollar un estudio cualitativo con los siguientes propósitos:

- Los alumnos y alumnas se pueden organizar y categorizar en estados evolutivos, asociados cada uno de ellos a un estado del patrón teórico, atendiendo a las distintas estrategias que utilizan. En cada estado se darían las características propias del estado del patrón asociado.

A continuación comentamos el proceso para las hipótesis H4 y H5:

H4. Es posible determinar pruebas para alumnos y alumnas de 13 a 16 años que formen parte de un diseño experimental cualitativo, constituidas por una serie de tareas que podemos ordenar de menor a mayor dificultad dependiendo de los esquemas lógicos de la comparación del número finito e infinito implicados en cada una de ellas.

H5. Las diferentes estrategias utilizadas por los alumnos y alumnas de 13 a 16 años en la comparación de series finitas e infinitas, se pueden organizar en un modelo teórico de desarrollo que explica y describe la evolución del conocimiento del infinito.

En el proceso de validación de las hipótesis H4 y H5 debemos distinguir cuatro etapas desde el punto de vista metodológico:

Primera etapa, a partir de un primer estudio teórico, nos planteamos la consecución de una investigación sobre el infinito actual en estudiantes de secundaria, mediante la comparación de conjuntos y así llegar, mediante una serie de tareas, a una escala evolutiva. Para este fin era necesario tener unas pautas a contrastar empíricamente, por lo que hubo que realizar una prueba piloto para obtener información de las habilidades y estrategias utilizadas por los alumnos y las alumnas como indicadores de esas pautas.

Con un marco teórico referencial reducido y con la ayuda de los modelos teóricos de Ortiz (1997) y Fernández (2001), se construye el primer modelo teórico evolutivo.

Segunda etapa, se orienta hacia la evaluación empírica de este primer modelo, mediante la construcción de una serie de tareas asociadas a los distintos niveles del modelo y a la propia evolución del razonamiento de los alumnos y alumnas.

Tercera etapa, de acuerdo con los resultados obtenidos se realiza un análisis didáctico (segundo estudio teórico) para obtener un marco referencial y explicativo en el que se construye y justifica el modelo anterior. Se adapta las tareas que realizarán los alumnos y alumnas a las TIC.

Cuarta etapa, se ubica hacia la evaluación empírica del modelo.

Dentro del campo de la metodología educativa, el proceso seguido se aproxima a lo que se conoce como P.E.R.T. (Planned Evaluation and Review Technique) (Bisquerra, 1989, citado en Fernández, 2001), que en nuestro caso podemos resumir en tres pasos:

PRIMER PASO: Construcción del modelo. Construcción de un modelo evolutivo de competencias, como consecuencia de los siguientes elementos básicos.

- Realización de un análisis didáctico que fundamenta el significado del modelo y su estructuración así como la racionalidad del mismo.
- Realización de un estudio exploratorio en el que se confirma la existencia de regularidades en el comportamiento real y efectivo de los alumnos y alumnas al enfrentarse a tareas exclusivamente de comparación de conjuntos finitos e infinitos. Este estudio pone en evidencia que el razonamiento de los alumnos y alumnas, utilizando para ello diferentes tipos de estrategias, pueden escalonarse desde el punto de vista evolutivo de menor a mayor complejidad.
- Los conocimientos sobre modelos evolutivos en el ámbito de la educación matemática, que sirven de referentes para la construcción de uno nuevo (Ortiz, 1997) y (Fernández, 2001).

SEGUNDO PASO: Construcción de una prueba asociada al modelo. Se lleva a cabo en este punto lo siguiente.

- Determinación de tareas asociadas a los estados del modelo evolutivo, en las que, en cada una de ellas, se dan los esquemas lógicos matemáticos propios del nivel al que corresponda. Según nuestro modelo evolutivo, estas tareas representan una serie acumulativa en cuanto al orden creciente de dificultad de los esquemas lógicos-matemáticos implicados.

TERCER PASO: Confirmar la bondad del modelo. Se realizan entrevistas clínicas semiestructuradas para desarrollar un estudio cualitativo con los siguientes propósitos:

- Los alumnos y alumnas que superan una tarea asociada a un nivel dado del modelo evolutivo, superan también, todas las tareas de los niveles anteriores.
- Probar que alumnos y alumnas del mismo curso de Educación Secundaria pueden manifestar competencias lógicas distintas según los niveles del modelo evolutivo.
- Los alumnos y alumnas se pueden organizar y categorizar en niveles evolutivos, asociados cada uno de ellos a un nivel del modelo teórico. En cada nivel se darían las características propias del nivel del modelo asociado.

Finalmente H6:

H6. Los escolares aceptan más ampliamente el infinito actual como identidad cardinal mediante el método de inclusión Bolzano bajo una experiencia física que mediante comparación de conjuntos en el sentido cantoriano.

Tras la validación de las anteriores hipótesis y su análisis conjunta, se contrasta ésta.

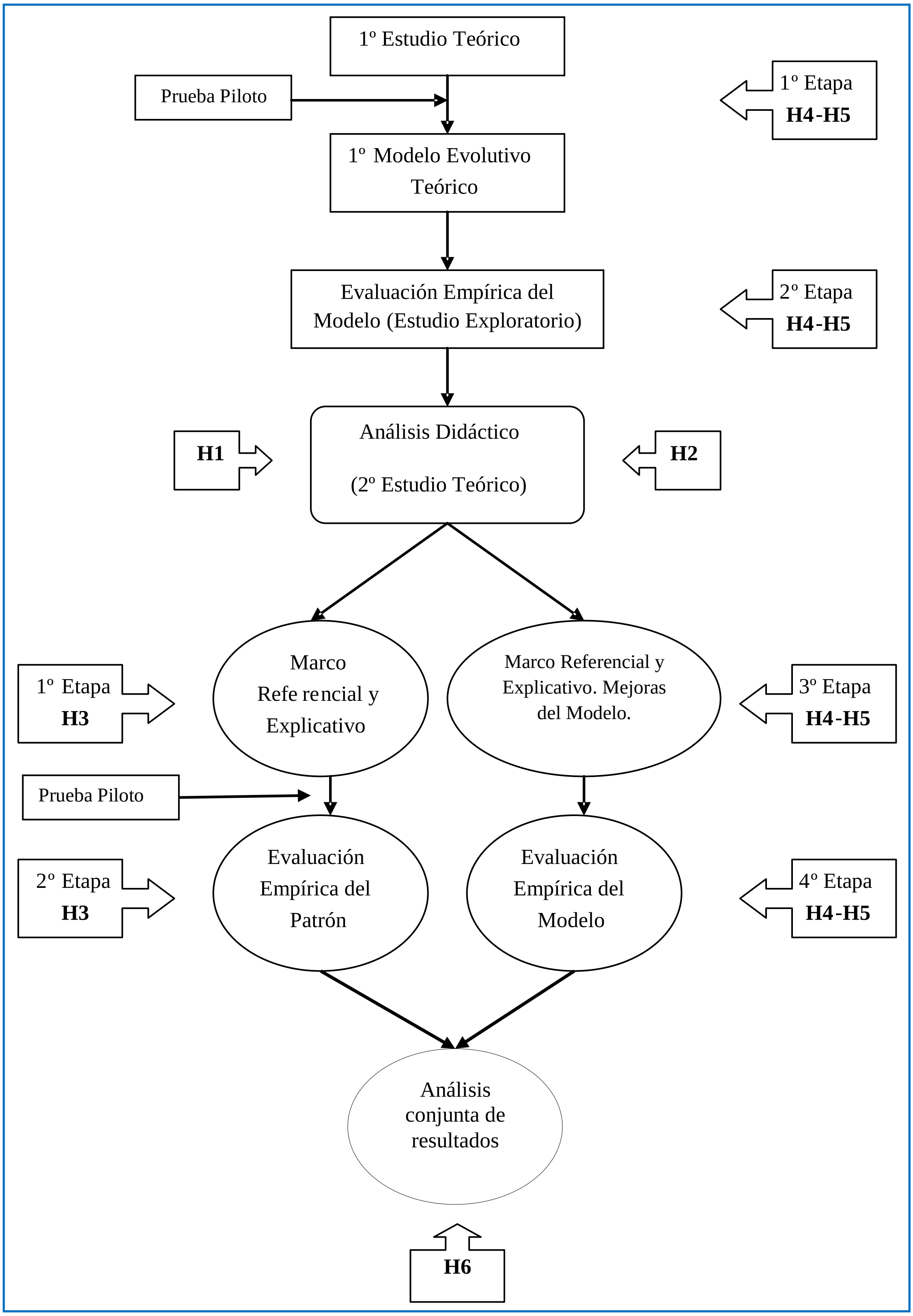


Figura II. 2. Esquema articulación de las hipótesis

5. Desarrollo cronológico de la investigación

El proceso ha sido largo y laborioso desde su comienzo en el 2003. A lo largo de dicho período se pueden distinguir las siguientes fases temporales diferenciadas por años:

Año 2003. Primer Curso de Doctorado: Período de Docencia.

a) Se especifica el problema de investigación que estará centrada en el infinito en educación. Primera delimitación del Marco Teórico de la investigación a partir de la documentación aportada en este primer curso de Doctorado.

b) Alfonso Ortiz, profesor titular de la Universidad de Málaga, me aconseja, debido sobre todo por la amplia selección bibliográfica, que empiece a delimitar el problema en sus orígenes. Para ello me sugiere que estudie la definición del tópico matemático elegido en el diccionario de filosofía de Ferrater Mora.

c) Por otro lado, José Luis González, profesor titular de la Universidad de Málaga, me aconseja la bibliografía realizada por Bruno D'Amore *"El Infinito: Una historia de conflictos, de sorpresas, de dudas. Un Campo fértil para la investigación en didáctica de la matemática."*, publicada en la revista Épsilon en 1996, que nos facilita la bibliografía entorno al infinito en el campo de la Didáctica de la Matemática, en la Epistemología y en la Psicología.

Las conclusiones y expectativas al finalizar este periodo fueron:

- Orientar nuestra investigación en torno al conocimiento del infinito.
- Primera selección bibliográfica.
- Considerar que los estudios empíricos con alumnos y alumnas de educación secundaria, eran viables.

<u>Año 2004. Segundo Curso de Doctorado: Período de Investigación.</u>

a) Con el aporte epistemológico de Ferrater Mora se realiza un trabajo teórico de síntesis. El problema de investigación se concreta en el infinito actual en educación.

b) Con la bibliografía de D'Amore, se seleccionan los artículos relacionados con nuestro problema de investigación.

c) Del artículo *"Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual."* De Guillermina Waldegg (CINVESTAV), se extraen las primeras tareas que se les propondrán a un grupo reducido de alumnos y alumnas de secundaria (prueba piloto). El objetivo de este trabajo empírico es delimitar en que contexto matemático concretaremos el estudio. Nos ponemos en contacto mediante correo electrónico con la autora donde nos aconseja definir más el problema de investigación, además nos proporcionará artículos escritos por ella misma.

d) La profesora titular de la Universidad de Málaga, Catalina Fernández es designada como tutora del trabajo de Suficiencia Investigadora para la obtención de la DEA. Me aconseja leer *"Los Principios de la Matemática"* de B. Russell. De la parte II, El número, capítulo XIII hace distinción de lo finito e infinito, que será la pieza clave del trabajo. Por otro lado, me sugiere construir un Modelo evolutivo teórico de conocimiento en relación a esa definición basado en su Tesis Doctoral. Consideramos la entrevista clínica individualizada como técnica apropiada en los estudios empíricos a realizar.

Conclusiones y expectativas de este segundo curso:

- Ubicar nuestra investigación en torno al conocimiento del infinito actual.
- El contexto matemático en la que se sustenta el tópico estudiado es en el

numérico.

- Primer modelo teórico evolutivo del conocimiento lógico del infinito actual.
- Las tareas asociadas al modelo estarán fundamentadas en la comparación de conjuntos numéricos finitos e infinitos.

Finaliza el periodo de investigación y se alcanzan los objetivos establecidos para superar este periodo. Se propone la evaluación empírica del modelo. Con ello no sólo dará validez al modelo teórico propuesto, sino que todo el trabajo, su síntesis y conclusiones formaran parte de la Tesina. Para todo ello:

a) Selección y construcción de los instrumentos de recogida de datos.
b) Selección de los alumnos y alumnas para la realización de las entrevistas.
c) Desarrollo de las entrevistas. El tiempo medio de grabación de cada entrevista fue aproximadamente de unos 25 minutos. En total se realizaron 22 entrevistas.
d) Realización de la prueba del estudio exploratorio en un centro concertado.
e) Transcripción de las entrevistas a partir de las grabaciones en video.
f) Identificación de regularidades y características generales del comportamiento observado en la prueba, y selección de los criterios para la realización del estudio exploratorio interpretativo.
g) Realización del análisis cualitativo de la información obtenida en las entrevistas.

<u>Año 2005. Reconocimiento Suficiente Investigadora.</u>

En febrero de este año, se defiende el trabajo de investigación realizado frente al tribunal asignado, reconociéndome la suficiencia investigadora.

Este trabajo será el punto de partida para el actual trabajo que presentamos. La síntesis de éste, designado como Estudio Exploratorio, está contenida en el capítulo IV.

Académicamente, veo oportuno como formación docente y la realización de nuestra Tesis, realizar un Máster de Matemáticas en el bienio que sigue 2006-07.

Año 2006

a) Realización de búsquedas retrospectivas en la Biblioteca virtual de la Facultad de Ciencias de la Educación, sobre las bases de datos y periodos 1998-2005:
    - ERIC **(**Education Resources Information Center**).**
    - MATHDI (Mathematics Didactics Database, Mathematics Education).
    - CSIC (Consejo Superior de Investigaciones Científica)

b) Realización de búsquedas retrospectivas de las bases de datos:
    - TESEO (Base de datos de Tesis Doctorales Españolas). Además, se solicita recibir por correo electrónico notificaciones de cambios relevantes sobre las tesis en las que estamos involucrado.
    - Tesauro de la UNESCO.
    - Dialnet de la Universidad de La Rioja, donde también se activa el Servicio de Alarma que dispone para informar de las nuevas incorporaciones de artículos de nuestro interés, de acuerdo con los perfiles temáticos definido previamente

c) Recopilación de artículos versión electrónica.

Conclusiones y expectativas de esta fase.

- El volumen bibliográfico que se ha conseguido es muy extenso.
- Será necesario agrupar los textos seleccionados según temática principal: Epistemológica, Fenomenológica, Cognitiva y Enseñanza-Curriculum.

Consultas a expertos:

- Mónica Torres Curth. Universidad Nacional Comahue. Barriloche. Argentina.

- Virginia Montoro. Universidad Nacional Comahue. Barriloche. Argentina.
- Carmen Mª Valdivé Fernández. Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado (UCLA). Venezuela.
- Carmen Azcárate. Universidad Autónoma de Barcelona (UAB).
- Sabrina Garbin Dall'Alba. Universidad Simón Bolívar. Venezuela.
- Silvia Sbaragli. Universidad de Bolonia. Italia.
- Ana Lucena Córdoba. Universidad del Valle. Cali. Colombia.

<u>Año 2007</u>

a) Realización de nuestra propia base de datos. Con todos los textos seleccionados, se archivan, se ordenan y se crea nuestro propio motor de búsqueda con la ayuda de la herramienta informática Excel (ver anexo II).

b) Revisión de la Tesis Doctoral en profundidad de Catalina Fernández.

Consultas a expertos:

- Javier Pérez. Universidad de Cádiz (UCA).

<u>Año 2008</u>

a) Actualizaciones de búsquedas informatizadas. Ampliación de nuestra propia base de datos.

b) Revisión de los artículos y libros seleccionados.

Consultas a expertos:

- Antonio Rodríguez Chia. Universidad de Cádiz (UCA).
- Ana Serradós Bayes. Universidad de Cádiz (UCA).

<u>Año 2009</u>

a) Actualizaciones de búsquedas informatizadas. Ampliación de nuestra propia base de datos.

b) Revisión de los artículos y libros seleccionados.

c) Revisión de nuestra tesina y a partir de este trabajo se publica el artículo Número infinito como identidad cardinal entre series numéricas. Un estudio mediante entrevistas clínicas en alumnos y alumnas de secundaria. [Versión electrónica]. *UNIÓN.*

Año 2010

a) Actualizaciones de búsquedas informatizadas. Ampliación de nuestra propia base de datos.

b) Revisión de los artículos y libros seleccionados.

Consultas a expertos:

- Mª Carmen Penalva. Universidad de Alicante (UA).
- Mª Teresa Juan. Universidad Nacional Comahue. Barriloche. Argentina.

Año 2011

a) Actualizaciones de búsquedas informatizadas. Ampliación de nuestra propia base de datos.

b) Revisión de los artículos y libros seleccionados.

c) Revisión de las Tesis de Belmonte (2009) y Codes (2009).

d) Realización de diversos experimentos con el libro de los espejos con alumnos y alumnas de Educación Secundaria, para ver el tipo prueba, individual que podría hacer en un futuro.

e) Revisión y ampliación del Modelo evolutivo.

f) Presentación del trabajo "Hacia un modelo evolutivo del infinito cardinal en alumnos y alumnas de la ESO". En la Reunión del grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Universidad de Granada (UGR).

g) Presentación del trabajo “Construcción de un modelo evolutivo del infinito cardinal en alumnos y alumnas de EPO y ESO.” En la Reunión del grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Universidad Castilla-La Mancha (UCLM). Ciudad Real.

Consultas a expertos:

- Mª Celeste Bertoia. Instituto José Manuel Estrada. Buenos Aires. Argentina.
- Mercedes Palarea. Universidad de La Laguna (ULL).
- Myriam Codes Valcárcel. Universidad Pontificia de Salamanca (UPSA).

<u>Año 2012</u>

a) Actualizaciones de búsquedas informatizadas. Ampliación de nuestra propia base de datos.

b) Se empieza a realizar el análisis didáctico de nuestra investigación (Expuesto en el capítulo III).

c) Preparación de las nuevas pruebas asociadas al modelo empírico evolutivo. De la misma naturaleza que las que se establecieron en el estudio exploratorio, pero con un nuevo formato utilizando las nuevas tecnologías que tenemos al alcance en los centros educativos.

d) Del anterior punto, se ensaya las nuevas tareas con el nuevo formato con un alumno. Las conclusiones de todo ello se publican en el capítulo del libro Aprendizaje y Razonamiento Matemático. Universidad de Málaga. Libro homenaje al profesor D. Alfonso Ortíz Comas, con título El uso de las TIC en entrevistas clínicas semiestructuradas: estudio del infinito como identidad cardinal entre series numéricas en alumnos y alumnas de la ESO.

Las conclusiones y expectativas al finalizar el año:

- Fijar los objetivos iniciales del estudio.
- Revisión de los trabajos de investigación sobre Epistemología.
- Realizar un estudio epistemológico de nuestro tópico matemático.
- Determinar los criterios de construcción de los protocolos.
- Diseñar las entrevistas, determinando su contenido, proceso de realización y recogida de la información.
- Preparación del material informático tanto de las fichas de los alumnos y las alumnas como el material de grabación y de almacenamiento.

Año 2013

a) Actualizaciones de búsquedas informatizadas. Ampliación de nuestra propia base de datos.
b) Revisión de los artículos y libros seleccionados.
c) Revisión de las Tesis de Claros (2010).
d) Realización de los análisis Fenomenológico y Epistemológico.

Las conclusiones y expectativas al finalizar el año:

- El trabajo de estos dos últimos años, nos sugiere realizar dos trabajos empíricos en nuestra tesis. Después de la revisión epistemológica, es posible tomar nuestro problema de investigación desde dos puntos de vista diferentes: la de Bolzano y la de Cantor.
- Revisión de los objetivos iniciales del estudio.

Consultas a expertos:

- José Mª Cardeñoso Domingo. Universidad de Cádiz (UCA).

Año 2014

a) Actualizaciones de búsquedas informatizadas.
b) Realización de los análisis Cognitivo y de Enseñanza-Currículum.

c) Reconstrucción del modelo teórico evolutivo (base para el estudio empírico desde el punto de vista cantoriano).
d) Construcción de la experiencia física de los espejos (base empírica desde el punto de vista de Bolzano). Construcción de la prueba para contrastar empíricamente el modelo teórico.
e) Elaboración del diseño prueba piloto para la experiencia física.
f) Selección de los alumnos y alumnas para la realización de las entrevistas tanto las relacionadas con el modelo evolutivo como las relacionadas con la experiencia física.
g) Realización de las pruebas en el mismo centro concertado.

Conclusiones y expectativas de esta fase. La prueba piloto de la experiencia física había funcionado en los dos frentes que pretendíamos:

- Desde el punto de vista técnico: La prueba resulta muy motivadora. Los alumnos y alumnas colaboraron en todo momento involucrándose en las tareas.
- Desde el punto de vista conceptual: las tareas hacían que los alumnos y las alumnas manifestaran distintas estrategias de resolución útiles para la investigación.

Consultas a expertos:

- José Luis Belmonte Martínez. Universidad Pontificia de Salamanca (UPSA).
- Sabrina Garbin Dall'Alba. Universidad Simón Bolívar. Venezuela.

<u>Año 2015</u>

a) Presentación del trabajo "Análisis Didáctico del infinito actual mediante la comparación cardinal", en la Reunión del grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática de la

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Universidad de Castilla-La Mancha (UCLM). Albacete.

b) Desarrollo de las entrevistas. El tiempo medio de grabación de cada entrevista fue aproximadamente de unos 25 minutos para modelo evolutivo y de 6 minutos para la experiencia física. En total se realizaron 69 entrevistas en cada estudio empírico.

c) Transcripción de las entrevistas de los dos estudios cualitativos.

d) Identificación de regularidades y características generales del comportamiento observado y selección de los criterios para la realización de los estudios interpretativos.

Conclusiones y expectativas de esta primera fase del presente año. La prueba había funcionado en los dos frentes que pretendíamos:

- Desde el punto de vista técnico: La prueba se pasaba individualmente y los alumnos y alumnas colaboraron en todo momento, implicándose en las tareas, que sobre una situación concreta el investigador planteaba.
- Desde el punto de vista conceptual: las tareas hacían que los alumnos y alumnas manifestaran esquemas lógicos y distintas estrategias de resolución útiles para la investigación.

Consultas a expertos:

- Bernardo Gómez Calderón. Universidad de Valencia (UV).
- José Antonio Fernández Plaza. Universidad de Granada (UGR).
- Javier Claros Mellado. Universidad Carlos III de Madrid (UC3M).

La segunda fase de este año:

a) Realización de los análisis cualitativos de la información obtenida en las entrevistas.

b) Actualizaciones de búsquedas informatizadas.

c) Conclusiones generales de la investigación.

d) Revisión de los documentos y redacción definitiva del Informe de Investigación.

6. Fuentes de información y documentación

Búsquedas informatizadas

A través del servicio de la Biblioteca Virtual de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Málaga, hemos realizado búsquedas informatizadas a la siguiente base:

Una consulta en la base de datos **MATHDI** [7]. El historial de dicha búsqueda se puede ver en el anexo II. La tabla II.1 contiene, de forma esquematizada, los resultados más relevantes de la misma.

Tabla II. 1. *Número de registros encontrados en la base de datos MATHDI*

Palabras claves en Títulos y/o Descriptores	Período de tiempo	Nº de archivos
Infinito	1978-2014	64
Infinity	1978-2014	581
Infinito+Educación	1978-2003	7
Infinito+Educación	2004-2014	6
Infinity+Education	1978-2003	23
Infinity+Education	2004-2014	71

[7] Mathematics Didactics Database (Mathematics Education)

Libros especializados

Tesis doctorales:

Tabla II. 2. *Tesis doctorales utilizadas en nuestra investigación*

Universidad de Málaga (UMA)	Ortiz (1997)
Universidad de Málaga (UMA)	Fernández (2001)
Universidad Pontificia de Salamanca (UPSA)	Belmonte (2009)
Universidad Pontificia de Salamanca (UPSA)	Codes (2009)
Universidad de Granada (UGR)	Claros (2010)

Libros de divulgación científica:

- *Las paradojas del infinito* de B. Bolzano, (1851/1991).
- *Fundamentos para una teoría general de conjuntos* de G. Cantor, (1895/1983a).
- *Contribuciones a la fundamentación de la teoría de los conjuntos transfinitos.* de G. Cantor, (1895/1983b).
- *Los principios de la Matemática* de B. Russell, (1903/1995).
- *Psicogénesis e historia de la ciencia* de J. Piaget y R. García (1982).
- *El fin del infinito* de A.León, (2014).
- *Breve historia del infinito* de P. Zellini, (1991).
- *La Historia definitiva del infinito* de R. Morris, (2000).
- *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston. Traducido al castellano en National Council of Teachers of Mathematics (2003).
- *HOMENAJE A UNA TRAYECTORIA*: *Guillermina Waldegg* de I. Fuenlabrada, y L. Armella, (2008).

Revistas especializada

Suma (Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las MATEMÁTICAS). FESPM (Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas).

Revista de la S.A.E.M.(Sociedad Andaluza de Educación Matemática) “THALES”.

Documentos Oficiales

BOE (Boletín Oficial del Estado)

BOJA (Boletín Oficial de la Junta de Andalucía)

Libros especializados de las bibliotecas de las Facultades de Ciencias de la Educación de la Universidad de Málaga. En especial se han consultado:

- Actas de Congresos internacionales en Educación Matemática.
- Publicaciones especializadas en informes y tratados de investigación educativa:
    - Handbook of Research on Teacher Education
    - Research in Mathematics Education (National Council of Teachers of Mathematics).
- Libros de metodología de investigación educativa.
- Libros de Epistemología.
- Libros de Didáctica de la Matemática.
- Otras Tesis Doctorales.

7. Modalidad de la investigación

De acuerdo con la clasificación de investigaciones que propone Bisquerra (1989, citado en Fernández, 2001), el trabajo elaborado se corresponde con las siguientes características:

- Según el proceso formal, utilizamos el método hipotético-deductivo.
- Según el grado de abstracción, se trata de una investigación a la vez pura o

básica, dado que se pretende aumentar el conocimiento teórico sobre el campo en estudio, y aplicada, dado que también se aporta información que tiene una utilidad práctica.

- Según la naturaleza de los datos, se trata de una investigación cualitativa, en el sentido de investigación interpretativa y no pretendemos generalizar los resultados más allá de los estudiantes observados.
- Según la orientación, está orientada a conclusiones y no a decisiones.
- Según la manipulación de variables, es una investigación no experimental de tipo descriptivo, por ser un estudio de desarrollo.
- Según la dimensión cronológica y desde el punto de vista de los estudios empíricos realizados, se trata de una investigación descriptiva con enfoque de presente ya que describimos fenómenos sobre el presente.
- Según las fuentes, se trata de una investigación documental y metaanalítica como parte del análisis didáctico y una investigación empírica.
- Según la temporalización, la fase empírica es transversal ya que la investigación se ha realizado en un breve lapso de tiempo y supone un corte transversal en la situación de los sujetos ante el problema investigado.

8. *Criterios de bondad*

De acuerdo con distintos autores, (Fernández, 1995; Cohen y Manion, 1990; Bisquerra, 1989, citados en Fernández, 2001), toda investigación debe cometer ciertos requerimientos, algunos de los cuales dependen de la naturaleza de la misma. Al igual que lo hiciera Fernández (2001), nos hemos centrados en los siguientes:

<u>*Replicabilidad.*</u>

Pensamos que la investigación que hemos realizado puede ser replicada en más de un punto:

- Desde el punto de vista empírico, en el mismo sentido en el que se han realizado los estudios empíricos.
- Desde el punto de vista teórico, siguiendo los pasos establecidos y disponiendo de la información básica general a que se alude en los apartados correspondientes.
- Realizando el estudio completo en otras muestras de composición diferente.

Posibilidad de desarrollo posterior.

- A partir de documentos no utilizados se puede profundizar en el estudio teórico y abrir nuevas perspectivas para futuros estudios.
- El estudio proporciona una plataforma para la realización de investigaciones experimentales que permitan extender y generalizar los resultados.
- El estudio se puede ampliar a la etapa educativa de Bachillerato o teniendo en cuenta otras consideraciones, otros instrumentos (tareas, etc.), otros factores, etc., llegando a un modelo más general que incluso modifique la interpretación de los resultados obtenidos aquí.

Imparcialidad.

Las conclusiones a las que hemos llegado tienen el alcance que se puede atribuir a las evidencias que se presentan. En tal sentido, no hay unanimidad de criterios y, por tanto, el problema siempre está planteado.

En el desarrollo de la investigación se ha procurado ser objetivo, en lo posible, y subjetivo en lo necesario, considerando que, a pesar de todo, se aportan datos y argumentos novedosos y nuevas formas de afrontar el problema.

Fiabilidad.

La fiabilidad de nuestra investigación la podemos acreditar por los siguientes aspectos:

- El control de la información. Su valoración depende de los medios disponibles y por tanto de la posibilidad de acceder a cierto tipo de información. En este sentido consideramos que la información utilizada ha sido suficiente, ya que ha posibilitado una investigación no realizada y por tanto original, tanto en su contenido e intenciones como en su proceso constructivo.
- La rigurosidad, profundidad y amplitud de los análisis realizados en todos los ámbitos científicos que hemos considerado oportunos.
- El no escatimar esfuerzos en cuanto al proceso completo de la investigación, realizando cuantos estudios (estudios teóricos, estudios exploratorios, pruebas pilotos, figura II.2) se han creído necesarios para llegar a obtener evidencias teóricas y empíricas que avalan las cuestiones planteadas así como los resultados obtenidos.

Consistencia empírica.

No hay contradicción entre el modelo teórico de desarrollo y la evidencia empírica de las respuestas de los alumnos y alumnas. Ello es comprobable tanto en los anexos correspondientes como en los capítulos de esta Tesis Doctoral dedicados al análisis de los resultados. Todas las grabaciones obtenidas en las entrevistas constituyen una prueba irrefutable que permanecerá durante unos años bajo custodia para posibles revisiones y replicaciones de esta investigación.

Validez.

En cuanto a la validez debemos señalar que hemos realizado un análisis profundo teniendo en cuenta los principales campos del saber que interaccionan con nuestro tópico estudiado.

1. *Introducción*

Como se ha expuesto en el capítulo II apartado 4 de esta Memoria, en general esta investigación consta de dos fases:

Primera Fase, de construcción del primer modelo teórico evolutivo de competencias lógicas del infinito actual como identidad cardinal y su evaluación empírica en un grupo reducido de alumnos y alumnas de secundaria.

Segunda Fase, de dos estudios empíricos diferenciados tanto en el modo de comparación de los conjuntos dispuesto como en el modo de presentación a los estudiantes.

La primera fase consta a su vez de dos partes:

- Un estudio teórico que plantea la necesidad de un modelo para demostrar el razonamiento de los estudiantes sobre el infinito actual tras la comparación de conjuntos numéricos y la creación de dicho modelo teórico evolutivo.
- Una evaluación empírica del modelo creado, que corresponde a la última parte de de la investigación, resumido en el capítulo IV de la Memoria de Tercer Ciclo (Prieto, 2004), llamado Estudio Exploratorio.

La segunda fase consta también de dos partes bien diferenciadas:

- La primera parte, donde se realiza el marco referencial explicativo del modelo de inclusión seguido por Bolzano en la comparación de conjuntos numéricos; la creación de un patrón evolutivo de competencias sobre las distintas estrategias y destrezas usadas por los estudiantes, verificada con una prueba piloto en una muestra de estos, con ayuda de una experiencia física. Finalmente, la evaluación empírica del patrón evolutivo de competencias. Esta se desarrolla en el capítulo V de esta memoria.

- La segunda parte, donde se mejora el modelo evolutivo de competencias del infinito actual tras la comparación cantoriana de conjuntos numéricos utilizados en la primera fase de nuestra investigación y la evaluación empírica del modelo mejorado. Esta se presenta en los capítulos VI y VII de esta memoria.

Entre estas dos fases de nuestra investigación, podemos encontrar la realización del análisis didáctico del infinito actual como identidad cardinal, que establecerá el marco interpretativo y el desarrollo conceptual de las dos formas de comparar conjuntos numéricos, para su aceptación o no, en estudiantes de secundarias de edades comprendidas de entre los 13 y los16 años.

Entendemos el análisis didáctico de las matemáticas como el análisis de los contenidos de esta, que depende de la organización de su enseñanza por el sistema educativo y que tiene varios componentes.

Por tanto, desde el punto de vista teórico, es necesario indagar en los modelos de construcción y elaboración de las comparaciones de los conjuntos finitos-infinitos; en el origen y evolución del infinito desde una postura fenomenológica, epistemológica-histórica y cognitiva, para poder crear un marco interpretativo de la evolución de las comparaciones de conjuntos y así llegar a la conceptualización del infinito actual.

2. Propósito del análisis didáctico y procedimiento seguido

En el marco teórico de la investigación ha sido necesaria una revisión bibliográfica muy extensa. El proceso seguido en nuestra investigación, que revisa, sintetiza e integra un gran número de investigaciones, es lo que se denomina revisión multivocal (Ogawa & Malen, 1991, citado en González, 1999). Este procedimiento de síntesis cualitativo la define Fernández (1995, citado en González, 1998, p.252) de la siguiente forma: "(…) dirigido a indagar un fenómeno complejo de interés en el que no se pueden manipular los eventos y del que se tienen múltiples fuentes de datos eminentemente cualitativos, confiando en obtener un retrato detallado del fenómeno que se estudia".

Los criterios, en los que se basa la revisión multivocal, en un tópico en concreto (González, 1999, p.253):

1) Una clara definición del tópico a indagar a través de consultar múltiples fuentes; mantener cadenas de evidencia entre los registros de las fuentes consultadas y las inferencias extraídas; incorporar formalmente las reacciones de los informantes a la definición conceptual establecida.

2) Valorar la fuerza relativa e individual de cada dato utilizando alguno de los siguientes criterios: posición y certitud de la fuente (validez externa); claridad, detalle, consistencia y factibilidad del contenido (validez interna); capacidad para corroborar la información contenida en cada documento con información adquirida de otras fuentes.

3) Revisar el mayor número posible de estudios; localizar los estudios a través de búsquedas objetivas y replicables; no excluir inicialmente estudios en base a su calidad; diferenciar y clasificar cada estudio de acuerdo con la incidencia de sus resultados en el problema de investigación.

La conjunción de los criterios anteriores crea un nuevo enfoque que denominamos meta-análisis cualitativo. Esta metodología interpretativa es la que llamamos Análisis Didáctico. De forma general y específica la define González (1999, p.253):

> Denominamos análisis didáctico de un tópico o contenido específico en Educación Matemática al procedimiento metodológico global que integra y relaciona, siguiendo un proceso secuenciado y de acuerdo con los criterios del meta-análisis cualitativo, informaciones relacionadas con el objeto de estudio y procedentes de fuentes diversas en torno a cuatro áreas fundamentales en Educación Matemática: Historia y Epistemología, Aprendizaje y cognición, Fenomenología y Enseñanza y estudios curriculares.

El proceso seguido para ello, se puede implantar cronológicamente en dos fases bien definidas:

- Primera fase: Revisión primaria de la información obtenida de las distintas bases de datos en todas y cada una de las cuatro áreas de acuerdo a la figura III.1: Fenomenología (F), Epistemología (E), Cognición (Co) y Enseñanza y Curriculum (EC).
- Segunda fase: Análisis de las relaciones[8] entre las cuatros áreas. En la figura III.1, esas posibles relaciones las hemos descrito de la siguiente forma:
    - Epistemología- Fenomenología (EF)
    - Fenomenología-Cognición (FeCo)
    - Fenomenología-Enseñanza y Curriculum (FeEC)
    - Epistemología-Cognición (ECo)
    - Enseñanza y Curriculum-Epistemología (ECE)
    - Cognición- Enseñanza y Curriculum (CoEC)

[8] González(1999), toma el área de Epistemología como elemento básico común y establece sólo relaciones entre EF , ECo y EEC. Posteriormente relaciones entre tres componentes EF-ECo, EF-EEC y ECo-EEC, y finalmente entre las cuatro. Ha sido para nosotros más factible, el análisis de las relaciones todos con todos, dos a dos.

Con el estudio, independientemente de las cuatro áreas, sobre las relaciones a partir de la información obtenida anterior, llegamos a una sería de conclusiones para conjeturar y, posteriormente, reconocer prioridades y aspectos a investigar. Finalizamos con unos resultados generales y una evaluación del análisis completo. De ahí, como consecuencia de todo este proceso, se deducen consecuencias para futuros estudios.

Para González (1999):

> El análisis didáctico procesa, analiza y sintetiza información procedente de diferentes campos interrelacionados entre sí por su objeto de estudio, proporcionando una síntesis que permite detectar carencias y limitaciones en los trabajos anteriores y organizar adecuadamente el desarrollo futuro de la investigación. La técnica utilizada tiene en cuenta la complejidad del campo, así como la pluralidad de aproximaciones que se suelen encontrar en la literatura científica al uso y en los resultados de investigación contrastados por la comunidad. (p. 255)

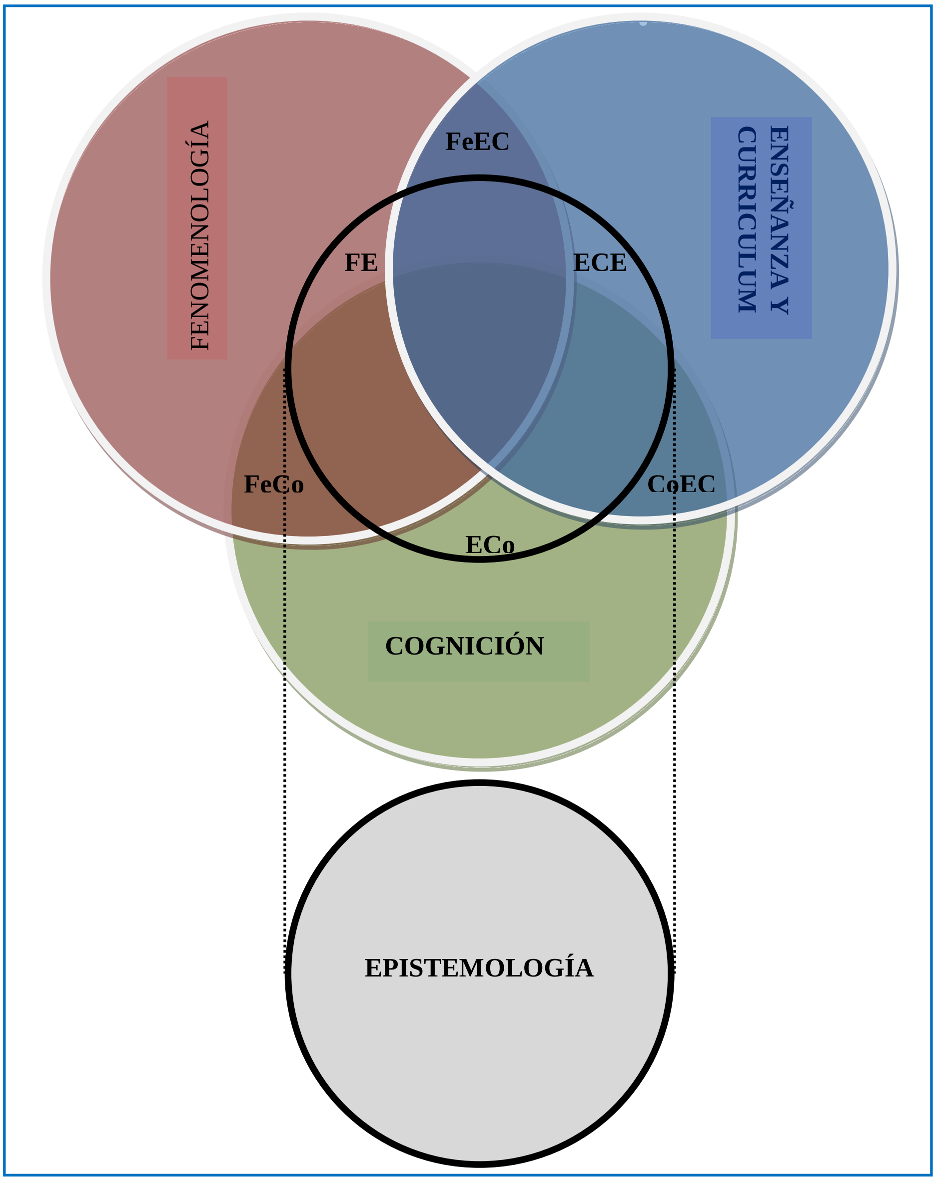


Figura III. 1 Esquema entre las Relaciones

Con el análisis didáctico pretendemos:

a) Alcanzar los siguientes objetivos:

O1. Delimitar el conocimiento del infinito actual dentro del marco general de las matemáticas.

Para el logro de este objetivo realizamos una revisión epistemológica del infinito atendiendo a varias corrientes importantes tanto filosóficas como matemáticas.

O2. Delimitar el infinito actual dentro de todos los posibles contextos: comparación de conjuntos.

Para ello realizamos una revisión en las obras de Bolzano (1851/1991) y Cantor (1895a, 1895b) para llegar a resumirla con Russell (1903/1995).

O3. Delimitar el infinito actual en la transmisión escolar.

Para ello realizamos una revisión en el campo de la didáctica del infinito, incidiendo en el actual y en las comparaciones de conjuntos numéricos Waldegg (1996), Moreno & Waldegg (1991), Garbin & Azcárate (2002), Penalva (1996, 1998) y Lestón (2008, 2009).

b) Proporcionar un marco teórico para lograr el primer apartado del objetivo:

O4. Analizar y categorizar las respuestas de los alumnos y alumnas, al establecer como criterio de comparación la relación parte/todo, comparación elegida por Bolzano basada en las relaciones de inclusión, bajo una experiencia física.

Al establecer como criterio de comparación el modelo de inclusión, parte/todo elegida por Bolzano será necesario un análisis precedente en términos del desarrollo y evolución histórica conceptual.

O5. Establecer un modelo teórico evolutivo de competencia del infinito actual como identidad cardinal mediante la comparación de series numéricas y comprobar, con alumnos y alumnas de Educación Secundaria (13-16 años), la utilidad y eficacia del modelo para describir su comportamiento real.

Este objetivo se consigue combinando el análisis didáctico con los resultados del estudio exploratorio.

c) De los objetivos complementarios se pretende alcanzar el objetivo.

C4. Comprobar la utilidad del análisis didáctico para fundamentar y contextualizar investigaciones en Educación Matemática.

Este objetivo se logra al conseguir interpretar el conocimiento del infinito actual con las comparaciones de series numéricas en distintos campos del conocimiento, con las correspondientes implicaciones para su enseñanza.

En los siguientes apartados, exponemos el análisis de las áreas definidas y de las relaciones entre ellas. Ese estudio comprenderá el análisis didáctico que queremos construir con referencia al tópico estudiado.

3. *Análisis Fenomenológico*

Entendemos análisis fenomenológico[9] como el método de investigación de los contenidos matemáticos, en el que parte de la contraposición entre *fenómeno* y *noúmeno* (Freudenthal, 1983 citado en Claros, 2010). Para Puig (1997, p.63): *"*Los fenómenos son, por tanto, las apariencias o lo que se nos aparece de las cosas. En su origen pues los fenómenos se contraponen a la realidad verdadera*"*. Mientras que "*noúmeno* hace referencia a los conceptos o estructuras matemáticas como organizadoras de fenómenos".

Puntualiza Puig (1997, p.63):

> (…) la relación entre fenómenos y conceptos se torna más compleja al intervenir un tercero en la relación, el objeto mental, y que el análisis fenomenológico ha de tomar en consideración también las relaciones entre fenómenos y objeto mental y entre objeto mental y concepto.

Una vez definido *fenómeno* y *noúmeno*, Puig (1997, p.63), con la misma tendencia de Freudenthal, señala que: "El análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática consiste entonces en describir cuáles son los fenómenos

[9] Freudenthal (1983) daría el nombre de *fenomenología.*

para los que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos”.

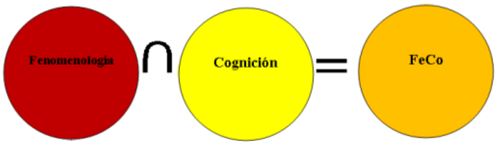
Para Claros (2010):”Esta descripción de los fenómenos no sólo se debe tener en cuenta para la organización de las matemáticas en su estado actual, sino también para qué fenómenos se creó y cuáles se extendió posteriormente, si es su caso” (p.81).

El análisis fenomenológico tendrá como objetivo servir de base para la organización de la enseñanza de las matemáticas, pero no pretenderá entrar en la valoración de la naturaleza de las matemáticas. Para Freudenthal (1983, citado en Claros, 2010): “no hay dos mundos distintos: el de los conceptos matemáticos o ideal y el de la experiencia, sino uno solo que crece con cada producción matemática” (p.81). Es por ello, que los conceptos matemáticos no caen fuera del campo de la experiencia ni están fuera del mundo de los fenómenos que lo organizan. Es el medio de organización de un (o más) fenómeno que, posteriormente, pasa a formar parte de un campo de fenómenos que son organizados por otro nuevo concepto matemático. Para Freudenthal (1983, citado en Claros, 2010) *noúmeno* es objeto del pensamiento, mientras que *fenómeno* es algo que poseemos bajo la experiencia.

3.1 Tipos de fenomenología

Freudenthal (1983, citado en Claros, 2010) distingue cuatro tipos de fenomenología, que se diferenciarán unas de otras en la relación de los fenómenos teniendo en cuenta siempre la relación con el concepto matemático que nos ocupa. Los tipos de fenomenología que distingue son: Fenomenología, Fenomenología didáctica, Fenomenología genética y Fenomenología histórica. Para él, todas al servicio de la didáctica. Mientras que para la primera Fenomenología se tienen en cuenta las relaciones ya establecidas, para las otras tres se tiene en cuenta cómo se produjeron estas relaciones en el sistema educativo, cómo se adquieren esas relaciones con respecto a la cognición o cómo se han creado y evolucionado a lo largo de la historia de las matemáticas, respectivamente.

Para el análisis de las relaciones entre las cuatro áreas (figura III.1), serán estas tres últimas las que nos ocuparán más adelante (EFe, FeCo y FeEC) para poder relacionar el análisis fenomenológico con el epistemológico, cognitivo y didáctico.



3.2 Fenomenología-Cognición

Tratará de fenómenos que tienen en cuenta el desarrollo cognitivo de los alumnos y alumnas. Estos conceptos matemáticos, una vez definidos, organizarán los fenómenos del mundo real, siendo este un cúmulo de productos de la cognición humana y productos propiamente matemáticos. Este proceso se repite una y otra vez, ya que la incorporación de los conceptos matemáticos al mundo de nuestra experiencia, en el que están como fenómenos, crean nuevos conceptos matemáticos. Esta progresión escalonada del par fenómeno-medio - organización dará lugar a una creación de objetos matemáticos cada vez más complejos (Claros, 2010).

Pensamos que el concepto de infinito actual tiene tal amplitud que da lugar en los alumnos y alumnas a muchos objetos mentales[10]. Los objetivos que hemos trazado en esta investigación no consisten en determinarlos con precisión y consideramos que deberían realizarse investigaciones en este sentido.

En la relación entre concepto y su correspondiente objeto mental creemos que interviene la interpretación intuitiva y contraintuitiva.

[10] Ocurrió con Freundenthal con el concepto de función y Claros con el concepto de límite.

Fischbein (1994, citado en Malaspina, 2008) considera la noción de intuición como un equivalente del conocimiento intuitivo, no como principio ni como procedimiento sino como un tipo de conocimiento, realizando una teoría intuitiva, analizando el rol esencial que relaciona los procesos matemáticos en los estudiantes.

Comenta las diferencias entre intuir y percibir; mientras que esta última es una cognición inmediata captada por los sentidos, la primera implica una extrapolación más allá de la información directa.

Distingue distintas características en el razonamiento intuitivo:

- Autoevidente. Sin la necesidad de justificar, se toman las afirmaciones de forma verdaderas por sí mismas. No implica que el alumno o alumna sea capaz de justificar la afirmación tratada.
- Certeza intrínseca o certidumbre. Admitir que son aceptados como ciertos.
- Perseverancia. Una vez establecidas las intuiciones, estas están arraigadas sólidamente.
- Carácter restrictivo. En general descartando otras alternativas como inaceptables.
- Status de teoría. La intuición es una teoría, no una habilidad o una herramienta o la simple percepción de un hecho tratado.
- Carácter extrapolativo[11]. Excediendo la información disponible.
- Global y sintético. Enfrentándose al pensamiento analítico de origen discursivo.

Fischbein (1994, citado en Malaspina, 2008) clasifica de dos maneras las intuiciones: según sus funciones, basadas en los roles, y según sus orígenes. En

[11] Esa extrapolación debe intervenir cuando tratamos procesos o conjuntos infinitos. "La noción de infinito dinámico expresa de una forma más pura, el carácter extrapolable de la intuición" (López, 2007, p. 32).

nuestra investigación hemos podido observar las intuiciones relativas a sus orígenes distinguiendo, como lo hiciera Fischbein, dos tipos:

- Intuiciones primarias, desarrolladas de forma natural como consecuencia de sus propias experiencias personales cotidianas, independientemente de la instrucción sistemática. A su vez, pueden ser *preoperacionales*, basadas en configuraciones, y las *operacionales*, basadas en estructuras operacionales. Estas últimas, se desarrollan durante el periodo de las operaciones concretas de Piaget permaneciendo (primordialmente inalterables, adquiriendo precisión y claridad como resultado del desarrollo de las capacidades formales) para toda la vida.
- Intuiciones secundarias, aquellas que no tienen un origen natural, sino que son adquiridas mediante la intervención educativa, influencia de instrucciones sistemáticas, aprendizaje de conceptos, propiedades y/o resultados.

  Para Fischbein (1994, citado en Malaspina, 2008, p. 70): “la categoría de intuiciones secundarias implica asumir que se pueden desarrollar nuevas intuiciones con raíces no naturales”.

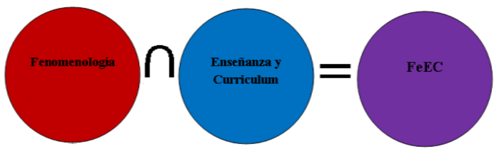
La diferencia entre intuiciones primarias y secundarias no es absoluta. De hecho, una intuición nueva y correcta no sustituye a otra original e incorrecta, coexistiendo ambas.

Garbin & Azcárate (2000, 2001 y 2002) analizan el concepto del infinito actual, así como las respuestas de los alumnos y alumnas a un cuestionario elaborado para ello, donde un mismo problema, involucrado el infinito actual, es expresado de diferentes maneras.

En el marco teórico de la investigación, se puntualiza la teoría intuitiva de Fischbein (1982, citado en Garbin & Azcárate, 2001, pp.55-56), relacionándola con la noción de infinitud, donde el concepto potencial del infinito responde a una interpretación natural intuitiva del infinito: “Un objeto potencialmente infinito (por ejemplo una línea que puede ser extendida indefinidamente) tiene un significado “conductual”. Una operación potencialmente infinita también tiene un significado “conductual” (por ejemplo dividir indefinidamente un segmento)”.

En cambio, el infinito actual no tiene significado conductual, es decir, no es congruente con una interpretación intuitiva. Para Fischbein (1982, citado en Garbin y Azcárate ,2001): “Un infinito actual no tiene un significado conductual, por tanto no es congruente con una interpretación intuitiva” (p.56).

Una de las conclusiones de su estudio fue la posibilidad de establecer una clasificación de tres tipos de alumnos y alumnas según sus respuestas: los finitistas, que evaden la infinitud; los actualistas, que aceptan el infinito actual; los potencialistas, que respondieron básicamente con la intuición natural del infinito.



3.3 Fenomenología-Enseñanza y Curriculum

Aunque todas las fenomenologías están al servicio de las didácticas de las matemáticas, solo esta se denomina Fenomenología Didáctica (para nosotros, relación entre Fenomenología y Enseñanza y Curriculum). La define Puig (1997) como aquella donde intervienen los fenómenos presentes en el mundo de los estudiantes y se plantean las secuencias educativas.

Para Puig (1997) bajo la misma tesitura que Freudenthal, confirma que el objetivo principal de la acción educativa debe ser en primer lugar la formación de objetos mentales y en segundo lugar la adquisición de conceptos. Mientras que el objeto mental es concebido en la mente de los alumnos y alumnas, el concepto es lo que está establecido en las matemáticas.

Para la adquisición del concepto es necesario integrar los diferentes objetos mentales en un único objeto mental y esa fusión no siempre es fácil.

En la Educación Secundaria no se suele dedicar tiempo a analizar y trabajar con el infinito. Los estudiantes pueden tener objetos mentales, pero no llegan a asociarlos al concepto por la ausencia[12] en el curriculum didáctico. Para Puig (1997, p.39), *"*una didáctica de estos conceptos también ha de tener en cuenta que sólo pueden constituirse buenos objetos mentales de ellos a condición de poder experimentar los fenómenos que organizan*"*.

En nuestra investigación el elemento que organiza y que forma el objeto mental, en nuestro caso el infinito actual como identidad cardinal, es la comparación entre conjuntos numéricos.

Antes de esta comparación se pretende que el estudiante cree la secuencia numérica y así defina los conjuntos numérico mediante el principio de inducción completa.

Para Freudenthal (1994, citado en Fernández, 2001):

> La secuencia numérica es el pilar fundamental de las Matemáticas y, por tanto, entre las distintas concepciones del número atendiendo a su fenomenología prima, especialmente y con gran relevancia *"el número para contar"*[13] considerado este como el *devanado en el tiempo de la secuencia de números naturales*. (p.75)

Por otro lado, el concepto "y así sucesivamente" que surge tras construir los términos de la secuencia numérica es operatorio en toda la instrucción aritmética. Si

[12] Esta ausencia en el curriculum se analiza en el apartado 6.2.4 del presente capítulo.
[13] "El número para contar es matemáticamente llamado el número ordinal, es formalizado mediante la inducción completa y los Axiomas de Peano" Freudenthal (1983, citado en Fernández, 2001).

hay una infinitud de tiempo y espacio, es conforme al principio "así sucesivamente" de la serie numérica, este principio se formaliza en el principio de la inducción completa.

Para Russell (1914[14], citado en Pérez, 2014):

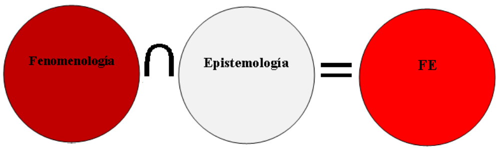
> Es pues el principio de inducción, más que la ley de casualidad, el que está en el fondo de todas las inferencias sobre la existencia de cosas no dadas de modo inmediato. Con el principio de inducción, todo lo que se desea de tales inferencias puede ser probado; sin él, todo tipo de inferencias son inválidas. (p.322)

Al comparar conjuntos infinitos, hay varias investigaciones realizadas por Tirosh (1985, 1991 y 1999, citados en Penalva, 2001) con alumnos y alumnas de secundaria. El objetivo principal del estudio es cambiar las ideas de los estudiantes relacionada con el infinito actual. Intenta fomentar en el estudiante un conocimiento formal de la teoría cantoriana de conjuntos, además con un desarrollo intuitivo para esta teoría. De las respuestas de los estudiantes, extrae los siguientes puntos:

- En general, pocos utilizan la correspondencia una a una,
- la mayoría piensan que todos los conjuntos infinitos tienen el mismo número de elementos,
- suponen que todos los métodos que sirven para comparar conjuntos finitos son adecuados para conjuntos infinitos,
- sus conocimientos son de forma inconsistentes provocando conflictos en ellos, pero de manera inconsciente,
- estos conflictos se aprecian en los criterios intuitivos que los estudiantes usan para la comparación de cantidades infinitas y las definiciones formales de la teoría.

[14] *Our Knowledge of the Externa Word as a Field for Scientific Method in Philosophy*. Cornell University Library.

Tirosh concluye que todo este estudio, no permite afirmar que la instrucción aplicada a los alumnos y alumnas modifique las intuiciones hacia la comparación de conjuntos infinitos.



3.4 Fenomenología-Epistemología

Fenómenos organizados por el concepto matemático y cómo se extendió a otros fenómenos. Para Freudenthal (1983, citado en Claros, 2010) en el sistema educativo los conceptos matemáticos son anteriores a los fenómenos que los alumnos y las alumnas experimentan sobre dicho concepto. El sistema escolar pretende permitir la creación en los estudiantes de objetos mentales que sean medio de organización de los fenómenos relacionados con los conceptos y además que los escolares accedan a los medios de organización legados de la historia, es decir a los conceptos.

En la historia de las matemáticas los conceptos no son previos a los fenómenos que lo organizan. Por otro lado, las diferencias entre objetos mentales y conceptos son diferentes en el ámbito de la historia de las matemáticas y en el sistema educativo. Mientras que en el ámbito histórico el objeto mental es anterior al concepto y este una cristalización de un objeto mental, Claros (2010). En el mundo de las matemáticas, a través de su historia, los matemáticos crean nuevos conceptos a partir de un análisis de objetos mentales, los cuales aparecen como medios de organización de fenómenos, es decir, el fin de crear estos conceptos es añadirlos a las matemáticas en sí.

La evolución de un concepto matemático en su historia hace que el campo de fenómenos sobre el que actúa el concepto sea tan amplio que no se pueda abarcar en un solo objeto mental. Freudenthal puso como ejemplo de esta evolución, a través de la historia, hasta la definición actual del concepto de función: hicieron su aparición como relaciones entre magnitudes variables, la inversión y composición posteriores, hicieron enriquecer el concepto, el uso de las funciones en representaciones gráficas, cálculo de límites, derivadas e integrales hicieron que el campo de fenómenos sea tan amplio como para que sea ubicado en un solo objeto mental.

Para Puig (1997), siguiendo a Freundethal, comenta que hay un abismo entre los conceptos de límite e infinito (incluyendo también la continuidad), y los fenómenos iniciales y los primeros objetos mentales a través de la historia de las matemáticas y la historia de cada estudiante.

4. Análisis Cognitivo

Dos partes diferenciaremos en este apartado, una primera intentando ubicar la etapa cognitiva de los estudiantes de nuestra investigación, la segunda parte dedicada a la relación entre Cognición y Enseñanza y Curriculum.

4.1 Etapas Cognitivas

En los comienzos de la investigación aparece un interés por distinguir las diferentes etapas en el desarrollo del aprendizaje, descubrir sus características fundamentales y determinar los parámetros de las transiciones correspondientes.

La etapa cognitiva en que se encuentran los estudiantes hasta aproximadamente los 16 años es la llamada etapa con Pensamiento Matemático Elemental (PME).

Posteriormente a ésta, existe un período de transición hasta alcanzar lo que se llamará una etapa con Pensamiento Matemático Avanzado (PMA). Para Tall (1995, citado en Belmonte, 2009) este paso del PME al PMA implica, entre otras cosas, una transición significativa con una reconstrucción cognitiva. Además implica el paso de “describir” a “definir” y de “convencer” a “demostrar”.

Aline & Schawarzenberger (1991, citado en Garbin, 2005a) comenta que en cuanto a los procesos de pensamiento se distingue una etapa de otra en la complejidad y la frecuencia del uso de ciertos procesos, así como los de representación, traslación, abstracción y deducción.

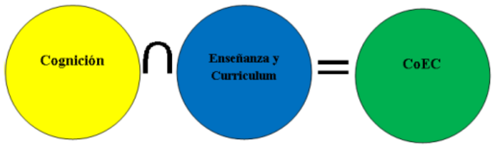
Estos mismos autores afirman que las características no delimitaban formas significativas y claras de las dos etapas de pensamientos para establecer esa discontinuidad. Sí reconocían la existencia de diferencias entre ambos pensamientos incluso una discontinuidad, especialmente, en las características relacionadas a su enseñanza y su proceso de evaluación.

Por otro lado, Garbin (2005a) que realizó su estudio en alumnos y alumnas con edades comprendidas entre 16 y 20 años, localizó la etapa de transición en aquellos con edades comprendidas entre los 15-20 años.

Nuestras investigaciones se realizaron con estudiantes que se encuentra en la franja de edad de los 13-16 años; por tanto, las ideas, aportaciones y reflexiones que presentamos se sitúan en la etapa cognitiva del Pensamiento Matemático Elemental y en la etapa de transición (de PME a PMA).

Tabla III. 1. *Esquema Etapas Cognitivas*

<table>
<tr><th colspan="6">Etapas Cognitivas</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Etapas Piagetiana</td><td colspan="5">Etapas de las Operaciones Formales</td></tr>
<tr><td colspan="2">Génesis de las Operaciones Formales (12-14 años)</td><td colspan="3">Las Estructuras de las Operaciones Formales (14-20 años)</td></tr>
<tr><td>Pensamiento Matemático</td><td colspan="2">PME</td><td colspan="3">Etapa Transición PME-PMA (Garbin, 2005)</td></tr>
<tr><td>EDADES</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>…20</td></tr>
<tr><td>Cursos ESO</td><td>1º</td><td>2º</td><td>3º</td><td>4º</td><td></td></tr>
<tr><td>ETAPA</td><td colspan="4">SECUNDARIA OBLIGATORIA</td><td></td></tr>
<tr><td>Principios y Estándares</td><td colspan="3">Etapa 6-8</td><td>Etapa 9-12</td><td></td></tr>
</table>



4.2 Cognición-Enseñanza y Curriculum

Tal como finalizamos el anterior apartado y aclarando las etapas cognitivas donde se encuentran los alumnos y alumnas objeto estudio, para el análisis de la relación entre el área Cognición y Enseñanza y Curriculum, centraremos la atención en dos apartados: uno referente al Pensamiento Matemático Elemental y otro en la etapa transitoria de ésta al Pensamiento Matemático Avanzado.

4.2.1 Pensamiento Matemático Elemental: Preámbulo piagetiano

Iniciamos este periodo de aprendizaje cognitivo recordando las dos teorías fundamentales. Por un lado, la teoría conductiva basada a partir de la observación externa de estímulos-respuestas, teoría que no reflexiona sobre el funcionamiento interno de la mente; por otro lado, la que sí tienen en cuenta ese funcionamiento. En esta última podemos diferenciar dos líneas de pensamiento psicológicos: el constructivismo (nuestra investigación se enmarca en esta corriente) que estudia cómo se crean las ideas mentales en la persona y el socio-culturalismo, apoyada por Vigotsky, donde el desarrollo de la inteligencia del individuo es el resultado de las iteraciones sociales con su entorno.

Una concepción constructivista del aprendizaje matemático es introducida por Piaget y la escuela de Ginebra. Esta se basa en la experiencia, entendida como la acción física y mental desarrollada por el individuo y a la interacción con el conocimiento previo de este. El conocimiento previo es lo que se reconoce como sistemas de ideas propias, sistema que se caracteriza por sus formas de interpretar e intervenir en la realidad (Azcárate, 1996).

Para Piaget, el individuo tiene la necesidad de estar en equilibrio dinámico con su entorno; de tal forma que puede ser afectado este equilibrio, si se enfrenta con nuevos conocimientos al entrar en conflicto con los primitivos. Es lo que llamó periodo de transición, en el que se reconstruye la estructura del conocimiento alcanzando un nivel de equilibrio más avanzado.

Piaget divide el desarrollo cognitivo en cuatro etapas, cada una más rica y evolutiva que la anterior. Los límites de edad que marcan cada estadio, son orientativos y dependen del período de maduración del individuo.

Cada etapa responderá a nuevas necesidades y estímulos del estudiante, que irá adaptándose a la demanda de su entorno.

Para Dubinsky & Lewin (1986, citados en Codes, 2009): "Las estructuras cognitivas se construyen desde el principio y sufren sistemáticamente modificaciones de creciente diferenciación e integración jerárquica" (p.7). Por tanto, es un constructivismo genético. En la teoría de Piaget hay dos conceptos fundamentales: la equilibración y la abstracción reflexiva.

Se entiende por equilibración, "al principio organizador del desarrollo cognitivo", (Dubinsky & Lewin, 1986, citados en Codes, 2009, p.7). Para estos autores este principio comprenderá todas las series de acciones cognitivas que el individuo llevará a cabo al intentar comprender un nuevo paquete de información que recibe su sistema cognitivo y proporcionará un desequilibrio, el cual el sujeto intenta *re-equilibrar* a través del proceso de *asimilación*.

A esa resistencia a la asimilación del nuevo conocimiento que presenta el individuo en la modificación de sus estructuras cognitivas, le seguirá el proceso de acomodación, "llegado a este punto, el individuo ha comprendido el nuevo conocimiento y su sistema cognitivo se ha re-equilibrado a través de la reorganización y re-construcción de sus estructuras cognitivas" (Dubinsky & Lewin, 1986, citados en Codes, 2009, p.8).

Por otro lado, la abstracción reflexiva de Piaget consiste en la construcción progresiva de las estructuras cognitivas "a través de la interacción con alimentos cognitivos[15] y la reconstrucción progresiva debido a continuas interacciones con alimentos cognitivos posteriores" Dubinsky & Lewin (1986, citado en Codes, 2009, p.7).

Todas estas abstracciones son resultados de construcciones internas del individuo; no son independientes unas de las otras y se apoyarán entre ellas. Dubinsky (1991, citado en Codes, 2009) lo resume en el siguiente párrafo:

> La abstracción empírica y pseudo-empírica extraen el conocimiento desde el objeto ejecutando (o imaginando) acciones sobre él. La abstracción reflexiva interioriza y coordina esas acciones para generar nuevas acciones y, en última instancia, nuevos objetos (que ya no son físicos sino matemáticos, como una función o un grupo). Entonces, la abstracción empírica extrae datos de esos nuevos objetos a través de acciones mentales sobre ellos, y así sucesivamente. (p.8)

Volviendo a la abstracción reflexiva, existen diversas formas: la *generalización* o extensión, semejante a la abstracción empírica con los objetos cognitivos, y que se produce cuando el individuo se da cuenta que los nuevos conocimientos tienen ciertas propiedades similares a los que posee aplicándole estructuras cognitivas existentes; y por otro lado, la *encapsulación*, otra forma de abstracción reflexiva y se produce cuando el conjunto de nuevos conocimientos lo percibe el individuo como un todo estructurado. La encapsulación lleva su tiempo y no todos los individuos lo realizan (Dubinsky & Lewin, 1986, citado en Codes, 2009).

[15] Dubinsky y Lewin (1986, citado en Codes, 2009) consideran alimentos cognitivo a esas estructuras cognitivas que tiene el individuo y que lo utilizará conscientemente para la adquisición de un nuevo conocimiento.

4.3 Etapa transición: PME a PMA

Nuestro trabajo de investigación, tal como dijimos en la introducción de este apartado, trata la transición del Pensamiento Matemático Elemental (PME) al Pensamiento Matemático Avanzado (PMA).

Se pueden reconocer la existencia de diferencias entra ambos pensamientos, su discontinuidad, pero no presentan acotaciones muy precisas, pero si aproximaciones muy prometedoras, Belmonte (2009).

Veamos a continuación esas diferencias de forma cronológica como los autores lo han ido describiendo. Hemos visto oportuno realizarlo de esa forma para observar, además de la dificultad de los investigadores, la evolución en su forma.

El primero en intentar describir los aspectos formales que separan ambos pensamientos fue Piaget (1950, citado en Belmonte, 2009). Concretó la etapa de las operaciones formales a partir de los 11 años, etapa del adolescente que logra la abstracción sobre los conocimientos concretos observados que le permiten emplear el razonamiento lógico inductivo y deductivo.

Pudo reconocer dos estadios en este período de operaciones formales:

"Génesis de las operaciones formales" de edades comprendidas entre los 12 y los 14 años, caracterizada por la preparación y estructuración de las operaciones formales de transición entre el pensamiento concreto y formal. Estas operaciones se basan y se desarrollan sobre operaciones concretas.

"Las estructuras operatorias formales", entre los 14 y los 20 años. El individuo ya posee una extraordinaria movilidad del pensamiento, manifestando una clara organización mental.

Estas estructuras significarán una forma nueva de relacionarse con el mundo exterior, aunque no sepa formalizarlas de una manera clara y lógica.

A modo de manifiesto, Tall en 1991 publicó junto a otros colaboradores *Advanced Mathematical Thinking*, el estudio cognitivo del PMA. Para ellos, ese cambio al PMA supone una transición difícil, ya que pasan de una posición donde los conceptos tienen fundamentalmente, una base intuitiva organizada en la experiencia a otras que vendrán delimitadas por definiciones formales y propiedades que se construirán por deducciones lógicas.

Pero es el propio Tall (1991, citado en Belmontes, 2009), quien reconoce que no se ha definido con precisión ese paso al PMA, enlazando la noción del PMA con las matemáticas formales. Ese PMA se caracterizaría por dos componentes: las definiciones matemáticas precisas y las deducciones de los teoremas basadas en ellas.

Durante esta evolución conviven en la mente del individuo experiencias más tempranas y el nuevo corpus de conocimiento deductivo. Al respecto, Belmontes (2009) escribe que las investigaciones empíricas han corroborado que ese tránsito da lugar una amplísima variedad de conflictos cognitivo que pueden actuar como obstáculo para el aprendizaje.

Pero por otro lado, hay autores que admiten que esos diversos mecanismos cognitivos que administran el aprendizaje no son cualitativamente diferentes para niños y adolescentes. Dreyfus (1991, citado en Belmontes, 2009), lo resume de la siguiente forma:

- No hay distinción evidente entre muchos procesos del PME y PMA.
- Aunque las matemáticas avanzadas se centran en abstracciones propias de la definición y la deducción, es posible pensar en elementos de las matemáticas avanzadas de una manera elemental. También existe un pensamiento avanzado en tópicos elementales.

- Una característica diferencial entre el PME y el PMA es la complejidad y su manipulación.
- Es necesario disponer de representaciones mentales ricas de los tópicos con el fin de alcanzar un desarrollo óptimo en matemáticas. Esa representación es rica si posee numerosas relaciones entre diversos aspectos del tópico.
- La abstracción será uno de los procesos que caracterizará a las matemáticas superior a tal punto que esa capacidad será la que refleje el nivel del pensamiento matemático. Los procesos previos necesarios para que se produzca la abstracción son: representar, generalizar y sintetizar. Indica Belmonte (2009) que las dificultades en el proceso de transición al concepto abstracto dependen esencialmente de tales vínculos.
- El aprendizaje se produce en cuatro etapas: utilizar una única representación, utilizar más de una en paralelo estableciendo relaciones entre las representaciones paralelas, integrar representaciones y enlaces flexibles entre las representaciones.

Según Robert & Schawarzenberger (1991, citado en Belmontes, 2009) también encuentran similitudes y diferencias entres los dos tipos de pensamientos llegando a encontrar algunos matices que señalan ciertas contradicciones en las formas de categorizarlos. Al contrastar estos pensamientos señalaron:

- Mayor cantidad de conceptos en menos tiempo, lo que conllevará una mayor carga de trabajo individual fuera del aula.
- Se instruyen con mayor repetición los contenidos del currículo de modo formal antes que se haya adaptado a ellos de modo informal el estudiante.
- Los conceptos son muy diferentes desde el punto de vista del estudiante exigiendo un mayor poder de reflexión y abstracción.

- Ha de formalizarse en un breve espacio de tiempo conceptos matemáticos que históricamente tardaron mucho en consolidarse.
- Menos problemas significativos. Más insistencia en la demostración.
- Mayor necesidad de un aprendizaje variable y mayor control personal sobre ése.
- La confusión creada por la adquisición de nuevos conceptos hacen la necesidad de un pensamiento deductivo más abstracto.

Estos cambios cuantitativos dan lugar a cambios cualitativos que caracterizará la transición al pensamiento matemático avanzado, (Belmonte, 2009).

Una vez formalizado estos cambios conllevará la abstracción de las propiedades específicas que ya no se aplican al objeto origen sino a cualquier tópico que obedezcan dichas propiedades suponiendo la construcción de un nuevo objeto mental pudiendo entrar en conflicto con el original. Todo ello provoca una discontinuidad en esa difícil transición.

Desde los aspectos psicológicos y cognitivo se esperan en los alumnos y las alumnas que posean la capacidad de distinguir entre el conocimiento matemático y el meta-conocimiento[16] matemático, la capacidad de comunicarlo y el aumento de estrategias de trabajo, Codes (2009) y Garbin (2005a).

Gray, Pitta, Pinto & Tall (1999, citados en Belmonte, 2009) [17] afirman que las matemáticas elementales se apoyan en dos métodos: uno centrado en las propiedades de los objetos y otros sobre las propiedades de los procesos. En cambio, las matemáticas avanzadas toman la propiedad como fundamental y de esa forma establecen definiciones conceptuales construyéndose una teoría formal sistemática.

[16] Para Robert y Schwarzenberger (1991, citados en Codes, 2009) lo considera como la exactitud, relevancia o elegancia de una parte de las matemáticas.
[17] Estos autores escriben sobre matemáticas y no sobre pensamientos matemáticos. Para Pimm (1995, citado en Belmonte, 2009) observó que el calificativo avanzado estaba siendo aplicado por algunos autores tanto para detallar las matemáticas como el pensamiento poniendo visible su ambigüedad.

Crean mundos mentales nuevos que pueden ser para el estudiante totalmente hipotéticos.

Belmonte (2009) escribe sobre ello: "El paso de la construcción objeto-definición a la construcción definición-objeto es considerado como una parte esencial de la transición del pensamiento elemental al avanzado" (p.44).

Azcárate & Camacho (2003) toman el proceso de abstracción como la propiedad fundamental de la substitución de fenómenos concretos por conceptos ya contenidos en la mente del individuo.

Para Azcárate & Camacho (2003):

> No se puede decir que la abstracción sea una característica exclusiva de las matemáticas superiores, como tampoco lo son otros procesos cognitivos de componente matemática tales como analizar, categorizar, conjeturar, generalizar, sintetizar, definir, demostrar, formalizar, pero resulta evidente que estos tres últimos adquieren mayor importancia en los cursos superiores: la progresiva matematización implica la necesidad de abstraer, definir, demostrar y formalizar. Por otro lado, entre los procesos cognitivos de componente más psicológica, además de abstraer, podemos citar los de representar, conceptualizar, inducir y visualizar. (p. 136)

Harel & Sowder (2005, citado en Belmonte, 2009) exponen otra forma de definir el PMA. Para ellos es necesario distinguir entre "formas de pensamiento" y "formas de compresión". Esta última atenderá aquellos significados particulares de los alumnos y alumnas a un tópico matemático, mientras que las formas de pensamiento serán las teorías generales implícitas-explicitas que subyacen a tales acciones.

Estos mismos autores (citado en Belmonte, 2009), aclaran cuándo un pensamiento matemático es considerado avanzado:

> Un pensamiento matemático es avanzado si su desarrollo envuelve al menos una de las tres condiciones para que un obstáculo sea epistemológico[18]. El nivel de adquisición para una forma de pensamiento por un individuo es determinado por la amplitud con lo cual ha superado estos obstáculos. (p.43)

Para Edwards, Dubinsky & McDonald (2005, citados en Belmonte, 2009), proponen una definición alternativa y señalando que un tópico se considerará avanzado dependiendo de los aspectos que se traten. Proponen que un pensamiento es avanzado si requiere del razonamiento deductivo y riguroso acerca de nociones matemáticas y no directamente de la percepción sensorial[19]. Señalan que no hay un período concreto en el cual el elemental finaliza y empieza el avanzado, es más, reconocen que "el pensamiento matemático ejemplar puede darse a cualquier edad en los estudiantes y en cualquier nivel de las matemáticas". Aún así, como el PMA para ellos requieren razonamientos deductivos y rigurosos, difícilmente ocurrirá en los niveles educativos de secundaria. No descartan en estos niveles el razonamiento deductivo en algunos alumnos y alumnas, pero estos progresan desde una primera observación implícita del elemento de las matemáticas como parte del mundo real y los problemas matemáticos en la forma de implantar notación, diagramas, análisis, etc., para cada clase de problemas y así facilitar su solución. Ponen como ejemplo cuando los estudiantes de secundaria trabajan con límites, ellos lo realizarán como un puro proceso algebraico no requiriendo necesariamente un pensamiento matemático avanzado, (Claros, 2010).

---

[18] Las tres condiciones, descritas por Harel & Swoder (2005, citado en Claros, 2010), para que un obstáculo sea epistemológico son: que haya trazas de éste en la historia de las matemáticas, que no sea una desaparición de conocimiento o una mala concepción, sino una fragmento de conocimiento o concepción que producen respuestas satisfactorias en un determinado contexto y, por último, que ocasione contradicciones y establezca una mejor pieza de conocimiento.

[19] Para Edwards et al (2005, citados en Belmonte, 2009), la percepción sensorial lo redacta como los cincos sentidos.

5. Análisis Epistemológico

La noción de infinito fue el elemento esencial de preocupación en los dos periodos críticos de la fundamentación matemática. El primer periodo que culmina con *Los elementos* de Euclides y el segundo se originó con los trabajos de Cantor. Es entre estos dos periodos donde hemos de situar los trabajos de Bolzano que fue uno de los precursores del infinito actual[20].

Es en la obra póstuma de Bolzano "*Las paradojas del infinito*" (1851/1991) donde trata la posibilidad de considerar el infinito como un objeto matemático proporcionándolo con operatividad propia. El camino definitivo fue pensar en el infinito como un atributo, un adjetivo y no como un sustantivo o un adverbio. Era necesario un cambio en el concepto del infinito con el fin de resolver sus propias paradojas y que debido a la ausencia de una buena definición y dominio operacional bien delimitado, seguían sin resolver.

Bolzano, posteriormente Cantor y Russell, considera que la manera apropiada de estudiarlo es mediante el concepto y la comparación de conjuntos. Desde entonces hay que señalar que ya no se estudia "el infinito" per se, sino los "conjuntos infinitos", Belmonte (2009).

5.1 Actualización del infinito tras comparar conjuntos en Bolzano[21]

En Bolzano (1851/1991), en primer lugar se expone la necesidad de definir el concepto de infinito debido a su implicación en casi todas las situaciones paradójicas matemáticas: "(…) la mayoría de las afirmaciones paradójicas que surgen en el ámbito

[20] Algunos autores anteriores a Bolzano, como Leibniz en *Opera Omnia* "Estoy totalmente por el infinito actual…", se habían declarado a favor de la existencia de un infinito en acto.
[21] Este apartado se toma como referencia el capítulo: *El acercamiento de Bolzano a las paradojas del infinito; implicaciones para la enseñanza* del libro *Homenaje a una trayectoria; G. Waldegg* (Fuenlabrada & Armella, 2008, pp.109-134).

de las matemáticas, tienen que ver con el concepto de *infinito*[22] ya sea que lo mencionen directamente o involucrándolo de manera indirecta en su demostración" (Bolzano, 1851/1991, p. 39).

Su implicación en otras ciencias:

"(...) porque de la refutación satisfactoria de su aparente contradicción depende la determinación de cuestiones fundamentales para ciencias tan importante como la física y la metafísica, pertenecen a esta especie." (Bolzano, 1851/1991, p. 39).

De ahí a que lo primero que tratará, es aclarar el concepto:

> (…) Pero es evidente que el reconocimiento adecuado de una aparente contradicción –es decir, de aquello que sólo en *apariencia* es una contradicción-- no puede ser posible, si no existe antes una claridad sobre la idea misma que aquí está en cuestión: el infinito. (Bolzano, 1851/1991, p. 39)

Bolzano relaciona el concepto de infinito con la noción de conjunto. Para ello diferencia los términos de *agregado, conjunto* y *multitud.*

Entiende como *agregado*, todo compuesto de elementos bien definidos. Especifica que hay agregados que coinciden, es decir, poseen los mismos miembros y, a su vez, se diferencian en algunos aspectos (a esas diferencias las llamó *esenciales*).

Aquellos agregados en los que es indiferente la forma de combinación y cuyas permutaciones no causan cambios esenciales, los llamó *conjuntos*. Puntualiza que un conjunto es un agregado que ostenta cierta característica de la cual se prescinde. Esta última peculiaridad hace que la noción de conjunto sea más abstracta que agregado[23].

A partir de esta última definición, llega a describir *multitudes* como aquellos conjuntos cuyos miembros son individuos que pertenecen a una misma especie.

[22] En cursiva en la traducción de la obra.
[23] Esas diferencias, Freudenthal (1983, citado en Claros, 2010) lo asocia a una fenomenología que repercutirá en el aspecto didáctico.

Una vez clarificado estos términos, define conjuntos finitos mediante la siguiente proposición:

> Pensemos en una serie cuyo término es un elemento del tipo *A*, en la que todo sucesor se deriva de su predecesor, de tal manera que, tomando un objeto igual a él lo relacionamos con otro elemento del tipo *A* en una suma. Es entonces evidente que todos los términos que aparecen en esta serie –con excepción del primero que es únicamente un elemento del tipo *A* –serán multiplicidades a las que llamaré *finitas* o *numerables* o, de manera algo audaz: números y, más específicamente, números enteros (que incluirían el primer término). (Bolzano, 1851/1991, p. 43)

Destacamos el principio de generación de un conjunto, en concreto de los números enteros, y a partir del *1* y utilizando el término de "sucesor" (cada elemento del conjunto se crea como una multitud finita es decir, cada número será formado por unidades mediante un proceso bien establecido). Es una construcción inductiva del conjunto de los números naturales que nos proporciona modelos de las colecciones finitas.

A partir del concepto conjunto finito, Bolzano define conjunto infinito:

> En particular, puede haber tantos términos que si la serie ha de agotar (incluir a) todos los elementos, no puede tener un *último término*, como habremos de demostrar con todo detalle más adelante. Suponiendo esto por el momento, llamaré *infinita* a una multiplicidad si todo conjunto finito es tan sólo una parte de ella. (Bolzano, 1851/1991, p. 44)

Observamos que la forma de definir infinito no es la que tradicionalmente se estuvo haciendo como la negación de lo finito, aunque en su introducción menciona lo infinito como lo que contrapone a lo finito, p.39. El infinito es un atributo de los conjuntos y definen éstos a partir de conjunto finito. El infinito actual no puede existir sino como un atributo de una colección infinita (Fuenlabrada & Armella, 2008).

Estos párrafos y el siguiente:

> Una cantidad verdaderamente infinita (…) no necesariamente variable (…). Por otra parte, una cantidad que solamente puede ser considerada como algo que es siempre mayor que cualquier cantidad (finita) dada, es capaz de conservar su carácter de cantidad finita, tal y como ocurre con las cantidades numéricas *1, 2, 3, 4,* ….(Bolzano, 1851/1991, p.45)

Es donde Bolzano atribuye el concepto de infinito actual a una multitud, no ve la posibilidad de recapacitar el infinito como sustantivo sino como calificativo de algunas colecciones. Suprime la manera de pensar en el infinito como sinónimo de no acotado o como valor que crece sin límite.

Bolzano no adopta la definición propia de Spinoza (Fuenlabrada & Armella, 2008), según la cual *las cosas infinitas son incapaces de ser incrementadas*. Para ello propone un contraejemplo con una semirrecta. La idea del infinito como *lo que no tiene fin* (entendido como no limitado), tampoco le satisface a Bolzano. Para ello pone como ejemplo el espacio entre dos rectas paralelas infinitas (objetos que están limitados y que pertenecen a la categoría de infinito).

En el siguiente párrafo, Bolzano, discute de forma objetiva la existencia de conjuntos infinitos:

> Una vez que nos hemos puesto de acuerdo en cuanto al concepto que queremos asociar con la palabra *infinito* y tras haber distinguido claramente sus partes constitutivas, se plantea como siguiente problema la cuestión de su objetividad, la pregunta de si tiene o no una existencia objetiva. (…) Me atrevo a decir que la respuesta es definitivamente *afirmativa* (…) *El conjunto de las proposiciones* y de las verdades en si es claramente infinito. (Bolzano, 1851/1991, p.50)

Utiliza el método inductivo para la construcción de conjuntos infinitos. Establece una comparación biunívoca entre tal conjunto infinito y el conjunto de números enteros y de esa forma demuestra que el conjunto así construido es infinito:

> Porque cuando consideramos una verdad cualquiera *A* (por ejemplo, la proposición "existen verdades" o cualquier otra) descubrimos que la proposición expresada por la frase "*A* es verdadera" y es algo distinto a la proposición *A* misma, pues, obviamente, el sujeto de ambas es diferente: el sujeto de ella misma. De manera análoga a como derivamos a partir de *A* una proposición distinta *B* podemos, a partir de esta, obtener otra proposición *C*, diferente tanto de *A* como de *B* y así sucesivamente en un proceso sin fin.
>
> (…) si fijamos nuestra atención en una verdad cualquiera tomada al azar, digamos la proposición "existen verdades", la llamamos *A*, encontramos que la proposición compuesta por las palabras "*A* es verdadera" es distinta de la proposición *A*, puesto que *A* es el sujeto de la nueva proposición. A la nueva proposición la llamamos *B*. A continuación podemos formar la proposición "*B* es verdadera" y continuar de este modo generando una lista de proposiciones sin fin (…)
>
> Esta analogía[24] consiste, en realidad, en que para cada elemento de la serie de los números existe un elemento correspondiente en la serie de las proposiciones descrita; y por tanto, en que para cualquier número entero (…) existe un número igual de proposiciones distintas entre sí. Por último, en que podemos continuar indefinidamente el proceso de construcción de proposiciones, siendo posible siempre generar nuevas proposiciones (…) De todo ello se sigue que el agregado de todas las proposiciones mencionadas posee una multiplicidad que supera cualquier número; es decir, que la multiplicidad de ese agregado es infinita. (Bolzano, 1851/1991, pp.50-51)

Bolzano concluye que el párrafo anterior es más que suficiente para argumentar que el conjunto de los números enteros es infinito y por tanto la existencia de éstos:

[24] Analogía existente entre la serie de estas proposiciones, obtenida con la ley de construcciones enunciada, y la serie de los números del párrafo p. 43.

> Considero suficiente la exposición y defensa que aquí se ha hecho de que existen los conjuntos infinitos; por lo menos los de objetos que no tienen realidad; en particular, el conjunto de todas las verdaderas absolutas es infinito. (…) podemos aceptar que el conjunto de *todos los números* (de los llamados naturales o enteros (…) es también infinito. (Bolzano, 1851/1991, p.57)

5.2 Actualización del infinito tras comparar conjuntos en Cantor

En este apartado analizamos aspectos que contribuirán a la comparación de conjuntos, sus diferencias frente a la comparativa de Bolzano, la noción de infinito a la que concluye Cantor y la aritmetización de este. Para ello examinamos, principalmente, dos obras de Cantor: *Fundamentos de una teoría general de las multiplicidades*[25]*: una investigación matemático filosófica en la teoría del infinito,* (1895/1983a) y *Contribuciones a la fundamentación de la teoría de los conjuntos transfinitos,* (1895/1983b).

Cantor revolucionó el pensamiento matemático con una teoría de conjuntos generalista y novedosa, la introducción del infinito con la consolidación de los números transfinitos y la vinculación-proceso de aceptación, tal como pasó a Bolzano, del infinito actual.

En ese sentido, Cantor (1895/1983a), se ve influenciado por el trabajo de Bolzano:

> Pero el defensor más decido del infinito actual, tal como se presenta, por ejemplo, en los conjuntos bien definidos de puntos (…) es un agudísimo filósofo y matemático de nuestro siglo, Bernhard Bolzano, que ha dado forma a sus ideas con firmeza sobretodo en las "Paradoxien des Unendlichen", Leipzig 1851. Esta obra bellísima y rica en pensamientos se propone demostrar que las contradicciones que los escépticos y peripatéticos de todos los tiempos han tratado de hallar en el infinito no existen en modo alguno, si sólo se toma la molestia (no, con toda seguridad, siempre liviana) de estudiar

[25] En otras traducciones de este trabajo en Ferreirós (2006).

con toda seriedad los conceptos del infinito de acuerdo con su verdadero contenido. En el texto también se encuentra una discusión, en muchos aspectos plenamente adecuada, del infinito matemático impropio, bajo la forma sea de diferenciales del primer orden o de orden superior sea en la sumación de series infinitas o de otros procesos de paso al límite. (p.14)

Ahora bien, Cantor amplia las ideas de Bolzano. Toma el conjunto infinito para explicar los conjuntos infinitos de puntos como un todo en un intervalo infinito. De esa forma, el concepto de punto de acumulación será el puntal básico para la teoría cantoriana. Definiría los conjuntos derivados y con el teorema de Bolzano-Weierstrass[26] demostró que el conjunto de los números reales no es equipolente con el conjunto de los números naturales. De ahí se descartaría ese infinito inalcanzable y tácito que como creencia había perdurado tantos siglos, que crea una teoría aplicada al tamaño de colecciones infinitas, la aritmetización del infinito generalizando la aritmética ordinaria y que trata a las colecciones infinitas como si fueran finitas con los números ordinales finitos y transfinitos.

5.2.1 De la teoría de conjunto a la concepción del infinito actual

Debemos diferenciar dos periodos[27] en los trabajos de Cantor en relación a las teorías de conjuntos; en el primer periodo, anterior a 1883 con la publicación de su obra Fundamentos, los conjuntos a la que se referirá serían conjuntos numéricos, mientras que posterior a Fundamentos será la teoría general de conjuntos.

Del primer periodo destacaremos los siguientes hallazgos:

[26] Toda sucesión acotada de números reales admite una sucesión parcial convergente.
[27] Comentarios por J. Bares y J. Climent en Cantor(1895/1983a)

- En 1874[28], demuestra que el conjunto de los números reales no es infinito numerable[29].
- En 1878 por un lado, define la equipotencia de los conjuntos, en su artículo sobre propiedad de las colección de todos los números reales algebraicos; demuestra que los números racionales pueden estar puestos en una correspondencia biunívoca[30] uno a uno con los números naturales[31] ; y por otro, una demostración de que el conjunto de números reales es equipotente al conjunto de los puntos del espacio euclídeo n-dimensional cuando $n \geq 2$.

Podemos deducir a partir de ello que antes de 1883, Cantor localizaba al menos dos números cardinales infinitos: los números naturales y los reales (la hipótesis del continuo demostró que no hay ningún subconjunto infinito del conjunto de los números reales cuya cardinalidad estuviese comprendido en los números naturales y reales). “Constituye que hay distintos “tamaños” u “órdenes” del infinito y diferentes cardinalidades que serán infinitas” (Ferreirós, 1991 citado en Aponte, 2014, p.212).

A diferencia de Bolzano distinguió entre las propiedades de los constructos[32], objetos matemáticos y las propiedades de los conjuntos tomados sin estructura[33].

Debemos destacar la idea que tenía Cantor (1895/1983a) sobre el concepto de conjunto en este período:

> Llamo a una variedad (un agregado, un conjunto) de elementos, que pertenecen a cualquier esfera conceptual, bien-definida, si sobre la base de su definición y como

[28] Entre 1879 y 1884 intentó publicar una serie de seis artículos en *Mathematische Annalen* en la cual sería la introducción básica a la teoría de conjuntos. La principal oposición de Kronecker, muy influyente en esta época, no consiguió su publicación.
[29] Ver anexo III.2.
[30] “Se dice que dos conjuntos A y B tienen la misma cardinalidad, es decir son equipotentes, si y sólo si existe una aplicación f de A en B que es biyectiva” (Ferreirós, 2006, p.13).
[31] Ver anexo III.2.
[32] Objetos matemáticos constituidos por un conjunto unido con una estructura sobre tal.
[33] En los comentarios por J. Bares y J. Climent en Cantor (1895/1983a) ponen un ejemplo clarificador a esa diferencia de Cantor frente a Bolzano:

> Los intervalos]0*;* 1[y]0*;* 2[, considerados como objetos geométricos, tienen magnitudes distintas (y a ellos les es aplicable el principio de que el todo es mayor que la parte), pero, en tanto que conjuntos, tienen el mismo cardinal (y a ellos no les es aplicable el mismo principio). (p.32)

consecuencia del principio lógico del tercio excluso, debe ser reconocido que está internamente determinado cuándo un objeto arbitrario de esta esfera conceptual pertenece a la variedad o no, y también, cuándo dos objetos en el conjunto, a pesar de las diferencias formales en la manera en la que están dados, son iguales o no. En general las diferencias relevantes no pueden ser hechas en la práctica con certeza y exactitud por las capacidades o métodos actualmente disponibles. Pero eso carece de cualquier importancia. Lo único importante es la determinación interna a partir de la cual en casos concretos, donde ello es exigido, una determinación actual (externa) ha de ser desarrollada por medio de un perfeccionamiento de los recursos. (p.32)

El desarrollo de la teoría de conjuntos la hace Cantor en su trabajo *Fundamentos* (1895/1983a), donde estructura la teoría sobre el concepto del infinito actual, de esa forma le permitirá incorporar a ese infinito la extensión del concepto de número que el pensamiento matemático de entonces tenía.

Por un lado, distingue el infinito como cantidad variable y finita (*finito variable*[34]) que puede crecer o decrecer más allá de los límites, pero puntualiza que sigue siendo finita, "justificada en la ciencia y contribuido a su servicio" (Cantor, 1895/1983a, p.86) denominándolo infinito impropio.

Por otro lado, el infinito propio, enteramente determinado, igualmente justificado tanto en la geometría como en la teoría de funciones[35], se presenta bajo una tal forma definida y determinada.

Dos principios de generación le ayudan a la construcción conceptual de números enteros realmente existentes. Un tercer principio, que lo *llamó principio de limitación o restricción* impondrá una construcción de barreras sucesivas a las que

[34] En cursiva en la traducción de la obra.
[35] Cantor, pone de ejemplo una función analítica de una variable compleja donde un punto infinitamente alejado está definido, y por tanto, se puede examinar el comportamiento de la función entorno a ese punto de la misma manera que se podría examinar si lo fuera en un punto que estuviera a una distancia finita.

llamó formación de segmentación natural de la sucesión infinita de los números enteros realmente existentes.

La segmentación natural de la sucesión infinita de los números enteros realmente existentes los llamó clases numéricas.

La primera clase numérica (I) es el conjunto de números enteros finitos:

$$1,\ 2,\ 3, \ldots,\ \nu, \ldots$$

La segunda clase (II) seguirá a la citada y estará formada por números enteros infinitos que siguen entre sí una sucesión determinada. El proceso seguirá una vez que se haya completado esta última clase, creándose la tercera, cuarta, etc.

Ese proceso de ir incluyendo nuevos números enteros le hizo desarrollar y afinar el *concepto de potencia*[36]. De esa forma, le permitirá asociar una potencia determinada a cada conjunto bien definido. De ahí que dos conjuntos tengan la misma potencia si se puede establecer una relación uno a uno entre cada uno de sus elementos, correlacionados entre sí y de forma recíproca.

De ahí que la potencia coincida con la *enumeración* de los elementos en el caso de conjuntos finitos, independiente de cómo estén ordenados, a diferencia de los conjuntos infinitos donde a la *enumeración* de sus elementos se les pueden atribuir una potencia determinada independiente a su ordenación.

Especifica que la potencia *mínima* entre conjuntos infinitos debe atribuirse a conjuntos que puedan correlacionarse recíprocamente uno a uno con la *primera clase numérica* (I). De esa forma, tendrán las mismas potencias. Posteriormente distinguirá potencias *superiores*. No solo será diferente la potencia de primera de la potencia de segunda clase numérica sino también será la potencia *inmediatamente superior*, y así sucesivamente con las siguientes.

[36] El concepto de potencia a la que se refiere ya los propuso en dos trabajos anteriores a Fundamentos.

Otro logro alcanzado a los nuevos números por Cantor(1895/1983a), en *Fundamentos*, es el concepto de la enumeración de los elementos de un conjunto infinito[37] bien ordenado.

Entiende por conjunto bien ordenado un conjunto bien definido en el cual los elementos están ligados entre sí mediante una sucesión dada, según la cual:

i) Existe un primer elemento de dicho conjunto.

ii) A cada uno de los elementos singulares, supuestamente que no sea el último, le sigue otro elemento determinado.

iii) Para cualquier conjunto de elementos finito o infinito le corresponde un elemento determinado que es el *inmediato superior* o *sucesor inmediato* en la sucesión, excepto cuando no exista absolutamente nada en la sucesión que los siga a todos ellos.

Dos conjuntos "bien ordenados" tienen la misma enumeración cuando se pueden establecer una correlación recíproca y de uno a uno entre ellos. Así, si E y F son dos elementos cualesquiera de un conjunto y E_1, F_1 son los correspondientes del otro, entonces la posición de E y F del primero coinciden con la posición de E_1 y F_1 en la sucesión del segundo.En ese sentido establece la diferencia fundamental entre conjuntos finitos e infinitos: mientras que el conjunto finito presenta siempre la misma enumeración para cualquier sucesión, el conjunto infinitos elementos pueden ser enumerados de varias maneras. Respecto a la potencia de un conjunto es un atributo independiente del orden, en cambio la enumeración del conjunto es un factor que depende de la sucesión dada de elementos. En el caso de conjuntos infinitos hay un vínculo entre potencia de un conjunto y enumeración de sus elementos, determinados

[37] En Cantor (1895/1983a) multiplicidad infinita.

por una sucesión dada. En ese sentido la teoría de las potencias de Cantor está basada en su teoría de los números ordinales.

5.2.2 *Los cardinales transfinitos*

En 1874 demostró que los números algebraicos, y por ello el subconjunto de los números racionales, podrían ponerse en correspondencia biunívoca con los números naturales uno a uno y la imposibilidad de relacionarlos con los reales, o que el conjunto de números racionales tenía el mismo tamaño que el de los naturales mientras que el de los reales era mayor.

Posteriormente, al poner los puntos del plano en correspondencia biunívoca con los puntos de una línea, le permitió encontrar una magnitud infinita mayor. Las técnicas usadas por Cantor permitieron demostrar que los puntos de un espacio de infinitas dimensiones podían estar puestos en una correspondencia biunívoca con los puntos de una recta. A partir de ahí, centró la atención en dos ideas fundamentales: la del conjunto derivado (el estudio sobre los procesos derivación le permitió desarrollar la teoría topológica de conjuntos de puntos, de ahí la idea de derivados de orden infinito para llegar a la idea de derivados de orden infinito) y la de los símbolos transfinitos[38] que serán la raíz de los números ordinales transfinitos y definirán los conjuntos derivados de orden superior.

Introduce la distinción entre los cardinales y ordinales transfinitos[39] . Estos conceptos estarán relacionados con las nociones de conjunto derivado y potencia.

[38] O "símbolos de infinititud". Los números transfinitos aparecían con o simples símbolos y sin carácter objetivo, (Ferreirós, 1991 citado en Aponte, 2014). Para diferenciar los números ordinales transfinitos de la idea de incremento de sin límite (con símbolo ∞) empezó a utilizar el símbolo ω en vez de ∞ (Lavine, 1994 citado en Aponte, 2014).

[39] Los conjuntos ($a_{1,}$,a_2, a_3,…) y (b_2, b_3,…b_1) tienen la misma potencia o cardinalidad pero con respecto a su numeración o sus ordenes son diferentes. Mientras el primero tiene orden ω, el segundo tiene orden ω+1. Así un mismo conjunto puede ser contado o numerado de más de una forma. Ahora bien, en un conjunto finito sólo se le puede dar un orden y de esa manera coinciden los números ordinales y cardinales finitos (Lavine, 1994 citado en Aponte, 2014).

Fundándose en el teorema de Bolzano-Weierstrass[40]cataloga los conjuntos infinitos de puntos en intervalos acotados[41]. Puntualiza el concepto de punto de acumulación constituyendo la base de la teoría de conjuntos, a partir de este define los conjuntos derivados (Aponte, 2014).

Debemos esperar hasta 1882, en su trabajo de *Fundamentos* es donde toma los transfinitos como una identidad numérica, estructurando la teoría sobre la noción de infinito actual.

La incorporación práctica del infinito actual le permitió extender el concepto de número, de esa forma pudo formalizarlos. Define para ello dos principios de generación:

El primer principio reside en crear nuevos ordinales mediante la adición sucesiva de unidades; el segundo tratará, una vez se tenga una sucesión ilimitada de números, en definir un nuevo número, entendido este como el mínimo número mayor que cualquier número de la sucesión. De ahí que se pueda definir el número transfinito ω, como el primero que seguirá a la sucesión completa de los números naturales.

Posteriormente definido ω y aplicando el primer principio obtiene la siguiente secuencia:

$$\omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+\upsilon, \ldots$$

Una vez creado esta secuencia y aplicando ahora el segundo principio, le permite definir el elemento máximo de esta sucesión 2ω.

Ahora, aplicando ambos principios se obtiene la siguiente secuencia:

$$2\omega+1, 2\omega+2, 2\omega+3, \ldots, 2\omega+\upsilon, \ldots$$

De esa forma, empleando los dos principios:

[40] El teorema como tal acepta el infinito actual, al tomar un conjunto infinito de puntos como un todo en un intervalo finito (Recalde, 2004).

$$3\omega, 3\omega+1, \ldots, 3\omega+\upsilon, \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mu\omega, \mu\omega+1, \ldots, \mu\omega+\upsilon, \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Tampoco se llegaría a un fin, ya que entre estos números $\mu\omega+\mu$ no hay ninguno que sea mayor. Aplicando el segundo principio de generación induce a introducir un sucesor inmediato a todos ellos al que llamó ω^2. Seguirá a este en sucesión los números:

$$\lambda\omega^2 + \mu\omega + \upsilon$$

de nuevo, con los dos principios de generación se llegaría a números de la siguiente forma:

$$\upsilon_0\omega^{\mu} + \upsilon_1\omega^{\mu-1} + \ldots + \upsilon_{\mu-1}\omega + \upsilon_{\mu}$$

donde nos obliga a poner un nuevo número inmediatamente superior a todos ellos, al que le asignó: ω^{ω}.

Se observa que el concepto fundamental para diferenciar las clases es el de potencia. Cantor pudo comprobar, además, que las potencias de las clases de números I y II son diferentes y que la potencia de los números de clase II es la que le sigue a la potencia de los números de clase I.

A los objetos $\omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+\upsilon, \ldots$ le da el tratamiento de números reales de segunda especie, que había llamado símbolos de infinidad, ya que entre ellos se podría hacer una cierta extensión en los números finitos (Recalde, 2004).

Aún así, estos objetos no cumplen las mismas propiedades de los números finitos, por ejemplo la ley conmutativa. Ahora bien, como ω y $\omega+1$ son dos números ordinales distintos, pero de igual cardinal, lleva a Cantor a crear una diferencia significativa entre estos dos tipos de números: los finitos y los transfinitos. Mientras que en los finitos no existe diferencias entre su ordinal y su cardinal, los transfinitos si los tienen. En *Contribuciones* fundamentará su teoría de conjuntos transfinitos (es allí donde establece el símbolo alef para representar los cardinales transfinitos). Relaciona cardinales según tamaño estableciendo para ello una bisección. De esa forma, llega a que todo conjunto infinito numerable tiene la misma cardinalidad que el conjunto de los números naturales de todos los ordinales de la primera clase I a lo que expresa como $\aleph_0$.

Con el teorema de Cantor-Schröder-Bernstein[42] donde el conjunto 2^N tiene la misma cardinalidad que el conjunto de los reales, R demostraría que este conjunto no es numerable, de ahí que $\aleph_0 < 2^{\aleph}$.

Por otro lado, demuestra que el conjunto de números ordinales de la primera clase I tiene una potencia menor a la de segunda II, denotada $\aleph_1$, es decir, $\aleph_0 < \aleph_1$ de ahí la secuencia inagotable de los cardinales transfinitos (Recalde, 2004).

En el segundo artículo de su obra *Contribuciones*, inicia la aclaración de conjuntos bien ordenados implantando una teoría sobre este. De esa forma, llega a definir los números ordinales de los conjuntos bien ordenados en: “A todos los conjuntos semejantes entre sí, y solo a ellos, les corresponde uno y el mismo tipo de orden. Al tipo de orden de un conjunto bien ordenado *F*[43] lo denominamos el “número ordinal" que le corresponde (Cantor, 1895/1983b, p.45).

Las operaciones, que definió en su teoría inicial de la *adición* y la *multiplicación* de tipos de orden de conjuntos simplemente ordenados arbitrarios, evidentemente, serán también aplicables a los números ordinales. Así, formarán parte de la justificación de considerarlos como números (Lavine, 1994 citado en Aponte, 2014).

[42] Ver anexo III.2.
[43] Anteriormente, en Cantor, 1895/1983b, p.32, define *F* como un conjunto simplemente ordenado que cumple dos condiciones básicas.

Diferencia los números ordinales transfinitos de los números cardinales transfinitos:

> Los números ordinales finitos coinciden, por lo tanto, en sus propiedades con los números cardinales finitos. Con los números ordinales transfinitos sucede algo diferente por completo; y el mismo número cardinal transfinito α hay una cantidad infinita de números ordinales, (…). (Cantor, 1895/1993b, p.49)

Esto es, los conjuntos finitos (a_1, a_2, a_3) *y* (b_2, b_3, b_1) tienen la misma potencia y el mismo orden, en cambio los conjuntos infinitos $(a_1, a_2, \ldots)$ *y* $(b_2, b_3, \ldots, b_1)$ tienen la misma potencia o cardinalidad, pero sus numeraciones y sus órdenes son diferentes.

Además para un mismo conjunto infinito $(a_1, a_2, \ldots)$ con un mismo cardinal, tiene cantidad infinita ordinales, es decir, $(a_1, a_2, \ldots)$, $(a_2, a_3, \ldots)$…

5.3 Teoría matemática del infinito en Russell

B. Russell en su obra *Los Principios de las Matemáticas* se plantea dos fines fundamentales: En primer lugar demostrar que toda la matemática pura trabaja con conceptos que pueden definirse a partir de un reducido número pequeño de conceptos lógicos principales y además que todas sus proposiciones se pueden deducir de un número pequeño de principios lógicos esenciales; el segundo fin es la explicación de aquellos conceptos fundamentales que la matemática acepta como indefinibles, que formaría parte principal de la lógica filosófica. En su *teoría positiva del infinito*, Russell lleva a cabo una exposición filosófica, más específicamente de una teoría lógica, de la teoría matemática de Cantor (Tomasini, 1990). Antes de nada, la noción de infinito se nos presenta como un número. Y para elucidar la noción de número, Russell echa mano de la noción de cardinalidad y para la aclaración de esta última acude a la noción de clase. Para terminar la elucidación de la noción de clase la realiza a través de la noción de función proposicional. De esta misma manera, teniendo el *0* como la cardinalidad de la clase vacía y el *1* como la cardinalidad de la clase unitaria, es posible definir cualquier otro número natural. Una vez que ha establecido la noción de número, Russell pasa a tratar el número infinito apelando a sus propiedades desde un punto de vista logicista. Ahora bien, las propiedades del infinito puedan variar en función de aquello a lo que se aplica. Así las cosas, lo infinito, se puede decir tanto de un número como de una clase.

5.3.1 Finito e Infinito

En lo que nos respecta a nuestro problema de investigación centraremos el estudio en los capítulos XIII, XIV, XVIII, XXXVII y XXXVIII que expondrán brevemente la teoría matemática de lo finito e infinito tal como surge en la teoría de los números cardinales, rehuyendo en la discusión de las dificultades filosóficas referentes al infinito que dejará para otra parte de la obra. Inicia el estudio comparando clases finitas con clases infinitas:

> Sea *u* cualquier clase y *u'* una clase formada quitando un término *x* de *u*. Entonces puede suceder o no suceder que *u* sea semejante a *u'*. Por ejemplo, si *u* es la clase de todos los números finitos y *u'* la clase de todos los números finitos excepto el *0*, los términos de *u'* se obtienen sumando *1* a cada uno de los términos de *u*; esto pone en correspondencia un término de *u* con uno de *u'* y viceversa, no omitiéndose ningún número de ninguna de las dos clases ni tomándolo dos veces. De modo que *u'* es semejante a *u*. Pero si *u* está formada por todos los números finitos hasta *n*, donde *n* es algún número finito, y *u'* está formado por todos ellos excepto *0*, entonces *u'* no es semejante a *u*... (Russell, 1903/1995, p.223)

Para ello, sean:

$$u = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

$$u' = u - \{0\} = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

donde se observan que *u* y *u'* son semejantes.

Ahora:

$$u = 0, 1, 2, 3, 4,..., n$$

$$u' = u - \{0\} = 1, 2, 3, 4, 5, ...n+1$$

u y *u'* no son semejantes.

"Cuando es posible quitar un término de *u* y dejar una clase *u'* semejante a *u*, decimos que es una clase infinita. Cuando no es posible decimos que *u* es una clase finita" (Russell, 1903/1995, pp. 223-224).

De acuerdo con esto último, se llega a que si *u* es una clase finita, la clase formada agregando un término a *u* es finita, y recíprocamente. Con respecto a clases y sus partes diferencia las clases finitas de las infinitas, Rusell (1903/1995) puntualiza:

"En las clases finitas, si una es parte propia de otra, la una tiene un número menor de términos que la otra. (Parte propia es una parte y no el todo). Pero en las clases infinitas esto deja de ser válido" (p. 224).

Esta última diferencia hace que sea esencial para diferenciar finitud de infinitud. Atendiendo ahora a sólo clases infinitas especifica que pueden tener distintos números de términos y así habla de clase infinitas una mayor que otra y por tanto no semejantes, en tanto a las clase y sí a una parte propia de la mayor.

> Se sabe que si *u* es semejante a una parte propia de *v*, y *v* a una parte propia de *u*, entonces *u* es semejante a *v*; por lo tanto *u* es mayor que *v* es incompatible con *v* es mayor que *u*. (Russell, 1903/1995, p. 224)

Concluye que debe existir un mínimo número infinito, menor que cualquier número infinito diferente. Este es el número de los enteros finitos y lo denota con α_0

[44]. Lo define (como lo hace implícitamente Cantor[45]) por el principio de inducción matemática:

> (...) α_0 es el número de cualquier clase *u* que es el dominio de una relación biunívoca *R*, cuyo dominio recíproco se halla contenido en *x*, pero no es coextensivo con *u*, y el cual es tal que, llamando al término respectivo al cual *x* guarda la relación *R* el sucesor de *x*, si *s* es cualquier clase a la que pertenece un término de *u*, y al cual pertenece el sucesor de todo término de *u* que pertenece *s*, entonces todo término de *u* pertenece a *s*. (Russell, 1903/1995, p. 224)

O bien define α_0 de la siguiente manera:

> Sea *P* una relación simétrica y transitiva, y guarden dos términos diferentes cualesquiera del campo *P* la relación *P* o su recíproca. Además sea cualquier clase *u* contenida en el campo de *P* y que tenga sucesores con un sucesor inmediato, es decir, un término cuyos predecesores o pertenezcan a *u* o precedan algún término de *u*; sea un término del campo *P* que no tenga predecesores, pero todo término que tenga predecesores tenga sucesores y tenga también un predecesor inmediato; entonces el número de términos en el campo *P* es α_0. (Russell, 1903/1995, p. 225)

Una de la característica más importante de ello es que toda clase cuyo número sea α_0 puede arreglarse en una serie que tenga términos consecutivos de principio, pero no de fin, tal que el número de predecesores de cualquier término de la serie sea finito; y cualquier serie que tenga estas características tiene el número α_0. De ahí demuestra que toda clase infinita contiene clases cuyo número es α_0 :

> Sea *u* una tal clase y sea x_0 un término de *u*. Entonces *u* es semejante a la clase obtenida quitando x_0, a la que llamaremos u_1. De ella podemos quitar un término x_1, dejando una

[44] Russell puntualiza que Cantor utiliza el *aleph* hebreo con subíndice 0, comentando que la notación no es conveniente.(p.224)

[45] En *Contribuciones a la fundamentación de la teoría de los conjuntos transfinitos, Mathematische Annalen*, vol. XLVI, cap.6: *El mínimo número cardinal transfinito Aleph-cero*. (1895).

> clase infinita u_2, y así sucesivamente. La serie de términos x_1, x_2,... se halla contenida en u, y es del tipo que tiene el número α_0. (Russell, 1903/1995, p. 225)

A partir de ello da una definición alternativa del finito y del infinito por medio de la inducción matemática: "Si *n* es cualquier número finito, el número obtenido sumando *1* a *n* es también finito, y es diferente de *n*."

Proposición tomada de los axiomas de Peano[46]. A partir de *0* podemos formar una serie de números por adiciones sucesivas:

> Podemos definir los números finitos, como los números que pueden obtenerse a partir de cero por medio de tales pasos, y que obedecen a la inducción matemática. Es decir, la clase de números finitos es la clase de números que se halla contenida en toda clase *s* a la que pertenece *0* y el sucesor de todo número obtenido sumando *1* al número dado. (Russell, 1903/1995, p. 226)

Ahora bien, eso no pasa con el número α_0, ya que no hay un número tal que sea semejante a una parte de sí mismo. De ahí que ningún número mayor que α_0 sea finito. Pero sí que todo número menor que α_0 es finito.

Tras la definición de las dos clases con el mismo cardinal definida por Russell mediante correspondencias biunívocas, hay que matizar que no hace distinción entre clases finitas e infinitas. Por tanto, no sólo define los números finitos por inducción, sino que de esa forma también lo hace con los números infinitos:

> Definió a los números finitos más o menos por inducción, después consideró a una clase infinita como cualquier clase cuyo número cardinal no es finito. Concluyó declarando que ésta era la (única) teoría del infinito. (Russell, 1903/1995, pp.356-357)

Podemos resumir: "Si usted comprende lo que es 'clase', si comprende 'clase finita' y si entiende lo que significa la palabra 'no', entonces comprende lo que es 'clase finita'" (Lavine, 2005, p.204).

[46] Ver anexo III.2.

Esa idea se mantuvo hasta que Russell, junto a Whitehead, cambió la noción de clase:

> La aritmética cardinal usualmente es concebida en asociación con los números *finitos*, pero sus leyes generales también son válidas para los números infinitos, y se pueden demostrar muy fácilmente sin hacer ninguna referencia a la distinción entre lo finito y lo infinito. (Lavine, 1994, citado en Aponte, 2014, p.92)

5.3.2 Los cardinales transfinitos

Exalta la teoría del infinito de Cantor, aun así puntualiza que el cálculo infinitesimal lo trabaja poco, tratando de disimular todo lo que puede. Está de acuerdo en que es necesario estudiar separadamente los cardinales y los ordinales, los cuales difieren mucho más en las propiedades cuando son transfinitos que cuando son finitos.

Aclara que la definición que Cantor da a los cardinales transfinitos es una expresión que indica que lo que se va a tratar es más que una verdadera definición. Para ello intenta, mediante el principio de abstracción, dar una definición formal sobre los números cardinales.

Como una relación biunívoca puede definirse sin hacer referencia a números: una relación es biunívoca cuando, si *x* tiene la relación con *y*, y *x'* difiere de *x*, *y'* de *y*, entonces se sigue que *x'* no tiene relación con *y*, ni *x* con *y'*. La definición que ya la especificaba en capítulo II, no hace referencia al número y por tanto la definición de semejanza estaría libre de esa referencia también. Al tener como propiedades la semejanza, la reflexiva, transitiva y simétrica, podría descomponerse en el producto de una relación pluriunívoca (de una clase con el número de sus términos) y con su recíproca, por lo tanto, tendría al menos una propiedad común en las clases de semejanzas que se refiere. Al menos esta es la que pudo llamar número cardinal de las clases semejantes. Además comenta que como la semejanza es reflexiva para las clases, toda la clase tiene un número cardinal. Al sustituir los términos "todos" por "cualquiera", esta definición no solo servirá para las clases finitas (todos los términos de una clase son correlativos con todos los de la otra), se podrá extender a las clases infinitas.

Con respecto a las propiedades de los cardinales, sólo repite las mostradas por Cantor, atribuyendo sus relaciones con las clases.

De todo ello, definición, propiedades y operaciones (adición, multiplicación y potenciación) lo aplica tantos a los enteros finitos como a los transfinitos. Estos últimos difieren de los finitos en las propiedades de su relación con las clases de las que son números y respecto a las propiedades de las clases de los enteros mismos.

Especifica que las clases de números tienen propiedades diferentes si son todos números finitos o por lo menos transfinitos.

El número de números finitos es transfinito. Russell lo denotará como α_0, no como Cantor lo expresa $\aleph_0$, y será el menor de todos los cardinales transfinitos, basado en cuatro teoremas:

A. Toda colección transfinita contiene otras partes, cuyo número es α_0.
B. Toda colección transfinita, que es parte de una cuyo número es α_0, tiene también α_0.
C. Ninguna colección finita es semejante a cualquier parte propia de ella misma.
D. Toda colección transfinita es semejante a alguna parte propia de ella misma.(p.482)[47]

De todos ellos se concluye que:

1. Ningún número transfinito es menor que el número de números finitos.
2. Las colecciones, que tiene este número, se le llaman numerables, ya que dado cualquier término de la colección en cuestión, existiría algún número finito n tal que el término dado sea el n-ésimo, es decir, todos los términos de una colección numerable tendrán una correlación biunívoca con los números

[47] Especifica Russell a pie de página que los teoremas C y D requerirán que el finito se defina por inducción matemática.

finitos, o dicho de otro modo, el número de la colección es el mismo que el de números finitos.

3. No se debe suponer que no exista un número mayor a α_0: existe una serie infinita de estos números.
4. No existe el predecesor inmediato de α_0 porque si lo tuviera tendría que ser el último de los números finitos.
5. El número α_1[48] es el número del continuo distinto de α_0. No se debe conjeturar que se obtendrá sumándole sencillamente uno o cualquier número finito.
6. La suma de dos números que pertenezcan a la primera clase es igual o mayor a esos dos números.

Para Russell las dudas en este sentido, estarán en que:

i. Los cardinales finitos y transfinitos que formen una clase, formen una clase única conjuntamente.
ii. La serie de los números finitos sea completa en sí misma, sin posibilidad de amplificar su relación generatriz.
iii. Todos los enteros, finitos y transfinitos formen una serie única.

Para todo ello, dirigirá su atención los ordinales transfinitos, siendo para él más interesantes que los cardinales transfinitos.

5.3.3 Los ordinales transfinitos

A diferencia de los cardinales no acata su aritmética ni cumple la ley conmutativa. A cada ordinal transfinito le corresponde una colección infinita de ordinales transfinitos.

Ahora bien, el número cardinal de todos los ordinales es el mismo o menor que el de los cardinales. A los ordinales que pertenezcan a la serie cuyo número cardinal

[48] Cantor demostró que $\alpha_1=2^{\alpha_0}$, sin embargo Russell lo duda a esta altura aun teniendo razones que lo crean factible.

sea α_0 se le llaman segunda clase de ordinales. De esa forma podríamos relacionar la tercera clase, la serie cuyo número cardinal sea α_1, y así continuamente.

Especifica que los números ordinales son clases de relaciones generatrices de series que se definen en su gran parte por alguna relación de inducción. En el caso de los ordinales transfinitos pueden crearse como tipo de series, igualmente en ese sentido, Russell ejemplariza con el número ordinal *n* como una relación serial de *n* términos distinta a la noción *n-ésimo*. Siendo *n* el nombre de una clase de relaciones seriales.

Para Russell, el ordinal ω es sencillamente el nombre dado a la clase de relaciones generatrices de las progresiones. Ahora bien, a diferencia de los ordinales finitos, por inducción matemática y partiendo de un ordinal finito, nunca podrá llegar a ω ya que este no es un miembro de la clase de ordinales finitos. Aclara que este principio no debería tomarse como un postulado o axioma sino como la propia definición de finitud.

Alude a los números de la segunda clase distintos a ω, todas las series, que pueden constituirse con un cierto número finito de términos, son ordinalmente semejantes. En cambio, si se trata de serie infinitas de términos susceptible de ordenaciones diferentes, pueden pertenecer a tipos diferentes.

Se asemejan la teoría de los ordinales con los cardinales de modo siguiente:

> Dos relaciones se dirán *semejantes* cuando exista una relación biunívoca *S*, cuyo dominio sea el campo de una de ellas (*P*), y que sea tal, que la otra relación sea $\breve{S}PS$. Si *P* es una relación bien-ordenada, es decir, una relación que engendra una serie bien-ordenada, la clase de relaciones semejantes a *P* puede definirse como el número ordinal de *P*. De este modo los números ordinales resultan de la semejanza entre relaciones, como los cardinales de la semejanza entre clases. (Russell, 1903/1995 p.493)

Está de acuerdo con Cantor que el término *número ordinal* se debe utilizar para las series bien ordenadas, esto es, las que cumplan las dos propiedades siguientes:

- Que exista en la serie *F* un primer término.
- Si se considera *F'* como una parte de *F* y este último tiene uno o más términos que sean posterior a todos los términos de *F'*, entonces existe un término *f'* de *F* que va inmediatamente detrás de *F'*, en definitiva, no hay ningún término de *F* delante de *f'* y detrás de todos los términos de *F'*.

Con respecto a las series que no están bien ordenadas, comenta que son importante en su estudio, pero con menos afinidad con la aritmética que en el caso de las bien ordenadas.

Al igual que Cantor, restringe los números ordinales a las series bien-ordenadas. Repite las definiciones generales de la aritmética finita aplicada a toda progresión y en consecuencia, la definición de números ordinales que trató en la parte IV, capítulo XXIX, y las aplica a las series bien-ordenadas llamándola aritmética relacional.

Todo ello deja sólidamente asentados los teoremas de existencias, pero puntualiza que en "la obra de Cantor deja que desear" (Russell, 1903/1995, p. 500). El escepticismo de algunos filósofos muestra sobre ello, hace que Russell demuestre en líneas generales que ninguna clase finita comprende a todos los términos:

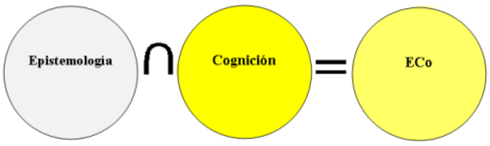
- *0* es un número cardinal.
- El número de números hasta el número finito *n* es *n+1* (incluido el *0*).
- Los cardinales finitos forman una progresión, existiendo el número ordinal ω y el cardinal α_0.
- Se podrá definir y demostrar la existencia del número ordinal ω_1 como la clase de relaciones seriales.

- Se define α_1 como el número de términos en una serie cuya relación generatriz es del tipo ω_1.
- Procedemos de las misma forma para ω_2 y α_2, y repetidamente hasta ω_ω[49]y α_α.
- Este proceso nos da una correlación biunívoca entre ordinales y cardinales, donde podemos formar que cada ordinal que pueda pertenecer a una serie bien ordenada corresponde a un ordinal y solo uno.

La admisión que hace Cantor como axioma que toda clase es el campo de alguna serie bien ordenada y que "todos" los cardinales pueden correlacionarse con ordinales por este método, le parece a Russell injustificada ya que para él aun no se ha conseguido disponer una clase 2^{α_0} términos en una serie bien ordenada.

Con respecto al número ordinal máximo comenta que no existe ya que todo ordinal puede incrementarse sumándole *1*. Menciona para ello que a partir de esta contradicción, Burali-Forti, deduce que no es preciso que dos ordinales diferentes sean uno mayor ni el otro menor, tal como pasa con dos cardinales diferentes. En este caso, Russell observa una contradicción de todo ello sobre un teorema de Cantor que afirmaba lo contrario, "he examinado este teorema con todo el cuidado posible y no he podido encontrar ninguna incorrección en su demostración" (Russell, 1903/1995, p.502)

[49] Russell demuestra su existencia.



5.4 Epistemología-Cognición: Triada piagetiana

Relacionaremos la epistemología del infinito actual con la cognición. Para ello ampliaremos el trabajo realizado por Moreno & Waldegg (1991), donde analizaron las diferentes etapas en la evolución conceptual del término. Ellos evidenciaron cómo el trabajo de Bolzano en *Las paradojas del infinito* se ajustaba a la etapa intra-objetal y los de Cantor a la etapa inter-objetal, además de mostrar las dificultades encontradas por los estudiantes para lograr estas etapas dadas en la estructura curricular. La triada piagetiana la completamos con la etapa trans-objetal en los trabajos de B. Russell.

5.4.1 Evolución del concepto fundamentada en la triada piagetiana

La progresión conceptual del infinito actual lo intentamos ajustar a las etapas establecidas por Piaget y García en *Psicogénesis e historia de la ciencia* (1982). De esa forma justifica la validez de una comparación entre la psicogénesis de un concepto y el de su historia.

Piaget & García (1982) encuentran similitud entre los mecanismos de pasajes (constituirán el objetivo central de la obra) que hay en el desarrollo de las ciencias en un periodo histórico y los mecanismos de pasajes de un estadio psicogenético al siguiente. El pasaje de una etapa a otra no se caracteriza por el aumento en conocimientos sino por una reinterpretación total de los fundamentos conceptuales. Distinguen para ello, dos mecanismos:

El primero de estos mecanismos, creado por un proceso general que caracteriza a todo proceso cognoscitivo, radica en que cada vez que hay un rebasamiento, lo que fue rebasado está de alguna forma asociado en el rebasante. No se produce de forma lineal por acumulación de conocimientos, sino en la reconstrucción de lo que se adquirió en niveles precedentes: una reorganización de conocimientos y de su interpretación de los conceptos bases.

El segundo mecanismo de pasaje, constituirá el tema central de *Psicogénesis e historia de la ciencia*, no descarta que sea un proceso de naturaleza completamente general: el proceso que traslada de lo intra-objetal (o análisis de los objetos) a lo inter-objetal (o estudio de las relaciones y transformaciones) y de allí, finalmente, a lo trans-objetal (o construcción de las estructuras).

Piaget & García (1982, p107) señalan que coexisten en esta sucesión intra-inter-trans, de forma general, tres propiedades fundamentales:

> Primer aspecto, esta sucesión se encuentra en todas las disciplinas con distintas velocidades en el proceso de formación o con diferencias en el contexto histórico y tienen la misma regularidad en el orden de sucesión. Será la expresión de las condiciones que las leyes de la asimilación y equilibración aplican a toda ganancia cognitiva.

Segundo aspecto, no se trata de un proceso específico del pensamiento científico. Se encuentra el *mismo orden de sucesión* y en función de los *mismos mecanismos*[50] en estudios de la psicogénesis del desarrollo conceptual.

Y tercero, *cada etapa repite en sus propias fases el proceso final*.

Cuando un individuo se enfrenta a un dominio nuevo, se encuentra con la necesidad de asimilar los datos suficientes a sus esquemas de acción o conceptuales. En estos comienzos del conocimiento, es lo que llaman el carácter intra-. Una vez adquiridos estos nuevos esquemas los transportará con pretensiones de equilibración a formas más o menos firmes de coordinaciones, es decir, no permanecerán aislados, carácter inter- de esta etapa. Finalmente, la existencia de varios subsistemas amenazando la unidad del todo será equilibrada por predisposiciones integradoras. Ese

[50] Escrito en cursivas en el texto original.

equilibrio entre diferencia e integración crea las estructuras de conjunto, caracterizando el nivel trans-.

Esta triada se puede localizar en cualquier proceso de construcción del conocimiento y, asimismo, afirma que al estudiar cada una de estas etapas se encuentra que el proceso es anidado: dentro de cada etapa del conocimiento se puede encontrar una triada en un nivel diferente, Trigueros (2005).

En Piaget & García (1982):

> La sucesión obligada de los intra- a los inter-, y solamente de allí a los trans-, muestra así la evidencia, el carácter constructivista y dialéctico de las actividades cognoscitivas y constituyen, a nuestro juicio, una justificación de un alcance no despreciable.
>
> Es conveniente formar una descripción más detallada de estas *construcciones progresivas* con su acción *retroactiva* y *proactiva.* (p.34)

Para ello supongamos tres etapas *A*, *B* y *C* en una cierta línea del desarrollo y que la etapa *B* tenga como subetapas *a*, *b* y *c*. Cuando esté en la subetapas a (*intra*- para *B*) ya hay una retroalimentación en *A* (*acción retroactiva*) y a su vez los elementos de *a* en *B* intervienen en operaciones *inter*- en *b* (*acción proactiva*).

En el proceso de conceptualización y construcción el papel que eximen estas nociones implica tres aspectos diferentes, pero asociados que serán necesarios explicitar a fin de esclarecer el sentido epistemológico de estas nociones.

Estos aspectos corresponden en Piaget & García (1982):

> i] a niveles sucesivos de la historia o de la psicogénesis;
>
> ii] a las fases de formación de cada uno de estos niveles, puesto que cada uno de ellos necesita una secuencia regular de subetapas en el seno de nuevas construcciones;
>
> iii] a la forma en la cual las adquisiciones anteriores son reinterpretadas desde la perspectiva del nuevo nivel al cual se ha llegado. (p.157)

5.4.2 *Relaciones de las etapas intra- e inter-objetal en la evolución conceptual del infinito matemático actual de Moreno-Waldegg*

Identificación de *Las paradojas del infinito* (1851/1991) de Bolzano con la etapa inter-objetal

La conceptualización en Bolzano se estableció mediante la comparación de conjuntos infinitos en función de dos criterios de comparación: por un lado con la correspondencia uno-a-uno y la relación parte-todo. De estos dos, Bolzano enfatizó en este último, basándose en las relaciones de inclusión (diferencia fundamental con la establecida por Cantor, correspondencia uno-a-uno, que veremos más adelante).

Moreno & Waldegg (1991, citados en Fuenlabrada & Armella, 2008) justifican las relaciones conjuntistas dadas por Bolzano y consideran que son relaciones de tipo intra-objetal en varios puntos:

a) Bolzano facilitó una definición para la comparación entre conjuntos infinitos como el predecesor directo para el establecimiento de funciones uno-a-uno caracterizado por Cantor, pero esta comparación no da origen a transformaciones, al no definir operaciones conjuntistas que originen un nuevo conjunto.
b) Los criterios de comprobación son su mayor parte empíricos.
c) No existe evidencia de conservación entendido en el sentido piagetiano.
d) Sí existe evidencia de un cierto grado de transitividad en las relaciones utilizadas por Bolzano para la comparación, no obstante, hay que puntualizar que son limitadas.

Por todo ello, "(…) la aproximación realizada por Bolzano constituye el centro de la estructuración que se requería para la evolución hacia el nivel inter-objetal" (Fuenlabrada & Armella, 2008 p.22).

Identificación de las teoría de Cantor con la etapa inter-objetal

Desde sus primeros trabajos de *potencia*, procedentes de la correspondencia uno-a-uno, se muestra como legítimo el principio de la organización.

Para Moreno & Waldegg (1991, citado en Fuenlabrada & Armella, 2008) argumentan las relaciones conjuntista cantoriana con las relaciones piagetiana de tipo inter-objetal en los siguientes puntos:

a) La comparación de conjuntos con correspondencia uno-a-uno realizada por Cantor es de manera explícita, a diferencia de Bolzano que se basó en el criterio de inclusión. Cantor afronta el problema de comparación en un sentido más amplio, de ahí al comparar conjuntos que uno no fuera subconjunto del otro, no dependería de las características de los elementos.
b) Por ello, requerirá de un criterio externo y la necesidad de un "agente mediador", es decir, la relación uno-a-uno entre los elementos de los conjuntos comparados.
c) Es esa biyección la que mostrará un cambio de pensamiento.
d) La correspondencia establecida distinguirán los conjuntos contables de los no contables.
e) Supondrá un cambio metodológico ya que el proceso de verificación deja de ser empírico para ser más lógico.
f) Las operaciones efectuadas sobre un conjunto infinito para lograr el conjunto derivado y las operaciones de situar los elementos de dos conjuntos infinitos en correspondencia, harán que las propiedades reversibilidad, recursividad, transitividad, asociatividad y conmutatividad sean más evidentes.

"Las coordinaciones entre las correspondencias, por un lado, y entre las transformaciones, por el otro, con las propiedades antes mencionadas, son características de las relaciones de la etapa inter-objetal, y así también lo son los principios de conservación" (Fuenlabrada & Armella, 2008, p.25).

Si comparamos los enfoques de Bolzano y Cantor, la diferencia principal se puede manifestar en términos del objeto de estudio y en aspectos donde se centraliza la atención: si para Bolzano su foco de atención se encontraba en cada uno de los conjuntos infinitos y era dentro de ellos donde se podría constituir sus comparaciones, para Cantor su criterio de comparación se basaba en la relación biyectiva entre los conjuntos que comparaba. Si para Bolzano el foco de estudio era la comparación dentro del mismo conjunto, aquellos que atañen a sus subconjuntos infinitos propios, pero no pudo fragmentar el conjunto para compararlo con su subconjunto ya que la naturaleza misma estaba en la inclusión misma; para Cantor se encontraba en las relaciones que se podrían constituir entre los diferentes conjuntos. Mientras la delimitación del objeto de estudio lo alcanza Bolzano con el concepto de conjunto, Cantor lo alcanzará en las relaciones. Por todo ello, Bolzano muestra características de la etapa intra-objetal y Cantor de la etapa inter-objetal del desarrollo histórico del concepto.

Figura III. 2 Etapas evolutivas piagetianas en la conceptualización del infinito actual

5.4.3 *Identificación de la etapa piagetiana trans- con la definición conceptual del infinito en Russell*

Para Piaget & García (1982) el pasaje del inter al trans implica un rebasamiento con todo lo que ello implica en términos de construcciones. Esta sucesión es obligada, es decir, de lo intra a lo inter y solo allí a los trans mostrándose el carácter constructivista.

Para Russell la reducción logicista evitaba a las matemáticas de una intuición subjetiva y la lógica se podría reducir a dos aspectos:

1. Los conceptos de las matemáticas pueden ser derivados de conceptos lógicos, a través de definiciones explícitas.
2. Los teoremas de las matemáticas pueden ser derivados de axiomas lógicos a través puramente de la deducción lógica.(Carnap 1931[51], citado en Ruiz, 1988, p.4)

De ahí que de un modo el intuicismo tiene carácter constructivista. Russell antes de definir el concepto de infinitud ve la necesidad de definir la finitud en el campo numérico. La definirá como "…aquellos que se obtienen por inducción matemática, partiendo de 0 e incrementando 1 en cada paso, ya como aquellas clases que no son semejantes" (Russell, 1903/1995, p.226), a partir de ahí sintetiza la Teoría de los números finitos para más adelante definir los cardinales y ordinales transfinitos. Demuestra ahí la característica principal de la etapa trans- "…por la preeminencia de las estructuras" (Piaget & García, 1982, p.106). Además, el punto de partida es transparente: la lógica es consistente y de ahí a probar que las matemáticas también lo son, si se reduce, y de ahí mostrar toda la matemática pura de premisas lógicas puras usando conceptos definibles solo en términos lógicos.

Centraremos la atención en este apartado, en la tercera y última etapa trans-, identificando la estructuración que hace Russell en toda su obra.

> El nivel trans-operacional es fácil de definir, en función de lo que precede, como involucrando, además de las transformaciones, síntesis entre ellas. Dichas síntesis llegan a la construcción de "estructuras", aunque permaneciendo en el plano de las acciones,

[51] *The logicist foundations of mathematics.*

que aunque están interiorizadas, no han sido tematizadas. (Piaget & García, 1982, p.167)

Como mencionamos anteriormente, el pasaje de una etapa a otra no está caracterizado por un incremento de conocimientos sino por una reinterpretación total de los fundamentos conceptuales. En general, *Los principios de las Matemáticas* que se refiere al concepto de lo finito e infinito, no incrementa los conocimientos de estos conceptos, pero sí lo reinterpreta. El proyecto logicista en Russell pretende la reducción de toda la matemática, pasando a través de la arimetización de la misma.

La exposición que realiza en el capítulo XIII, con respecto a la definición de número infinito mínimo, es un ejemplo de ello. Es en la p. 224, donde toma la definición por medio del principio de inducción, dada por Cantor, sin ampliar su conocimiento (su único aporte será la inconveniencia de la notación cantoriana acerca de este número). En el capítulo XXXVIII, p.284, definirá de la misma forma los cardinales transfinitos además de reiterar el concepto de α_0. De la misma manera lo hará con la definición de ω en el capítulo XXXVIII. Siendo todas estas definiciones una reinterpretación total de los fundamentos conceptúales.

Para Piaget-García el carácter formador del nivel trans-, lo menciona en la psicogénesis de las estructuras geométricas:

(…) se establece un equilibrio que no se podría lograr sin alcanzar sistemas de interacciones, en lugar de estar sometidos a ellas, única manera de amortizarlas sin perturbaciones internas y sin que entren en conflictos entre sí. De aquí surgen las estructuras de conjunto de carácter formador que caracterizan el nivel trans-. (Piaget & García, 1982, p.128)

Las preocupaciones de Russell desde que escribió los Principios, giraron en torno a la solidez y consistencia de las matemáticas, llegando a establecer un equilibrio a lo largo de los Principios. Las interacciones serían para Russell el “factor paradojas" elemento más decisivo en la motivación y la fundamentación de las matemáticas.

Tal como nos habla en las conclusiones de las estructuras geométricas,

> (…) una vez superados los conflictos locales , la línea general del desarrollo transfigural consiste entonces en subordinar , todo aquello adquirido en el intra- e inter-figural, a sistemas de conjunto de transformaciones que habrán de engendrar las figuras o los subsistemas diferenciados, en lugar de sufrir resistencias. De aquí surge el primado y la victoria final de lo endógeno elaborando estructuras….que no consisten ya en "figuras", sino que integran en sistemas de construcciones realizables. (Piaget & García, 1982, p.132)

El proyecto logicista de Rusell surge en referencia a otro problema la naturaleza de la verdad matemática, se trata de una subordinación.

Por otro lado, especifica:

> Esto no obsta para que tal situación no llegue nunca a un punto final, puesto que dichas estructuras, una vez elaboradas y convertidas por ese mismo hecho en intrínsecamente necesarias, pueden a su vez ser tratadas como "datos". Éstos presentan ciertamente un carácter que podría ser calificado de "seudoexógeno", ya que pueden ser considerados como elementos que prestan a nuevos análisis intra-. (Piaget & García, 1982, p.132)

Es lo que sucede con el Axioma de infinito. Este axioma no lógico de infinitud lo enuncia de la siguiente manera, en 1918: "Si n es un número cardinal inductivo cualquiera, existe por lo menos una clase de individuos que tienen n elementos" (Russell, 1945 citado en Ruiz, 1988, p.7).

Sin este axioma es imposible obtener los resultados matemáticos de los enteros infinitos y los de los números reales. Sin la validez de este axioma junto con el de elección, sería imposible la fundamentación matemática. Pero ello reabre nuevos análisis y en definitiva una crisis en el logicismo (Ruiz, 1988), una característica más del nivel trans-:

> (…) el *intra-* conduce al descubrimiento de un conjunto de propiedades en los objetos o eventos, pero sin que hay explicaciones que no sean locales y particulares. Las "razones" que se pueden establecer no pueden entonces encontrarse sino en las relaciones inter-objetales, lo que equivale a decir que deben encontrarse sino en las transformaciones que son, por su propia naturaleza, características del segundo nivel: *inter-*. Estas transformaciones, una vez descubiertas, demandan el establecimiento de vínculos entre ellas, lo que nos lleva a la construcción de las estructuras características de *trans-* . (Piaget & García, 1982, p.251)

6. *Análisis Enseñanza y Curriculum*

Son muchos los trabajos de investigación que abordan el tópico del infinito actual tras la comparación de conjuntos en todas las etapas educativas: desde infantil a la universitaria, e incluso a profesores. Para un mejor análisis de estos, intentemos categorizarlos según su finalidad.

Figura III. 3 Análisis Enseñanza y Curiculum por finalidad

6.1 Concepciones Previas

Se examinan las ideas iniciales y las respuestas en alumnos y alumnas que no lo abordaron a lo largo de su etapa académica.

Bagni (1997, citado en Belmonte, 2009) investiga la idea de infinito en alumnos y alumnas entre 16 y 17 años utilizando para ello el examen de dos tópicos del currículo matemático tradicional de Italia. Por un lado, la introducción del conjunto infinito de los números primos con la prueba de Euclides; por otro utilizando la criba de Erastóstenes. Mientras que con el primero un 62% de los estudiantes consideraron que el conjunto de los números primos es infinito, con el segundo todos los estudiantes afirmaron la infinitud de este conjunto. Por otro lado, en Bagni (1998) utilizando la comparación entre algunos conjuntos infinitos, analiza las respuestas en alumnos y alumnas de 17 y 18 años sobre las cardinalidades. Identifica lo que el llamará el *error de los subconjuntos infinitos*, el 33% de los alumnos y alumnas afirman incorrectamente que la cardinalidad en el conjunto de números reales es mayor que el de racionales y este mayor que la de los naturales.

Fischbein (1987, citado en Belmonte, 2009) centra sus investigaciones en dos ideas fundamentales: la división indefinida y la comparación de conjuntos numéricos o geométricos. Para él la intuición es el sentido común elemental de conocimiento primitivo que es opuesta a interpretaciones y concepciones científicas. Estos métodos intuitivos deben prevalecer en determinadas edades a los métodos formales en la enseñanza. A veces en matemáticas se establece proposiciones y definiciones de conceptos de forma lógica y no empírica contradiciendo la forma natural del pensamiento, es por ello, que para Fischbein será necesario un cuidado didáctico especial. En Fischbein (1987, citado en Belmonte, 2009) a partir de intuiciones secundarias (cogniciones separadas totalmente de la experiencia cotidiana fruto de formas de razonamiento), facilita una forma correcta para llegar a las intuiciones del infinito.

Turégano (1996) analiza los resultados acerca de las intuiciones e imágenes del concepto del infinito en 87 estudiantes de 1º BUP (14-16 años) cuando se enfrentan, en distintos contextos figurativos, a situaciones matemáticas que involucran el infinito. En particular, a lo que refieren a los cardinales transfinitos dieron lugar a tres esquemas de respuestas bien definidas:

- Los dos conjuntos son infinitos. Este tipo de respuesta se presenta bajo dos diferentes argumentos: o los dos conjuntos son infinitos o los dos conjuntos son iguales y por tanto parece indicar este último que nos llevará a que son conjuntos infinitos.
- Un conjunto propio del otro con distinción de argumentos fundadas en argumentos conjuntistas e inclusivos.
- Los dos conjuntos son equipotentes, lleva implícito el establecimiento de una correspondencia.

Concluye el estudio entre otros puntos:

- Cuando se trata de reconocer la infinitud en un conjunto acotado en el contexto geométrico, el estudiante tiene problemas, pero debido principalmente a las nociones geométricas de segmento y punto, en cambio los problemas son mayores cuando se trata de determinar la infinitud de dos conjuntos con las mismas características.
- En la comparación de conjuntos numéricos, el criterio de biyección se muestra más fuerte que el de la inclusión.
- Mientras que la imagen del infinito potencial es el mayor obstáculo con que se encuentran para concebir un proceso infinito como algo definido o acabado,

por ello, el infinito actual se acepta de menor grado y con una cierta indeterminación.

- Admiten la existencia de proceso infinitos como algo definido y que no se modifica al añadirle uno, en cambio los procesos infinitos que conducen al infinitamente pequeño son más difíciles de intuir.
- Al igual que Sierpinska & Viwegier (1989, citados en Penalva, 2001), una de las grandes dificultades que existen para modificar sus intuiciones están relacionadas a las concepciones duales que tienen los estudiantes de los objetos matemáticos (ideas-representaciones).

Sierpinska (1994, citado en Penalva, 2001) indica las aportaciones de los estudiantes a las diferentes respuestas realizando una diferenciación en la actitud que tienen con respecto al infinito. Concluye que el estudiante crea sus propios argumentos, acertadas o no, para poder explicar esas respuestas.

Tirosh, fundamentándose en su tesis doctoral y los trabajos de investigación anteriores (Tirosh, Fischbein & Dor (1985), Tirosh (1991), Tirosh (1999) citados en Penalva (2001)) da una idea relativa a la intuición del infinito. La autora relacionará el conocimiento formal de la teoría cantoriana con un desarrollo adecuado intuitivo en esta misma teoría para poder cambiar las ideas de los estudiantes asociada en el infinito actual.

De todo ello, saca las siguientes conclusiones de las respuestas de los alumnos y alumnas:

- En general, pocos utilizan la correspondencia una a una.
- La mayoría piensan que todos los conjuntos infinitos tienen el mismo número de elementos.

- Suponen que todos los métodos que sirven para comparar conjuntos finitos son adecuados para conjuntos infinitos.
- Sus conocimientos inconsistentes provocan conflictos en ellos, pero de manera inconsciente.
- Estos conflictos se aprecian en los criterios intuitivos que los estudiantes usan para la comparación de cantidades infinitas y las definiciones formales de la teoría.

Concluye que todo este estudio, no permiten afirmar que la instrucción aplicada a los alumnos y alumnas modifica las intuiciones hacia la comparación de conjuntos infinitos.

Para Tsamir (1999, citado en Belmonte, 2009) comenta que en cursos tradicionales de teoría de conjuntos, no se tienen en cuenta tendencias intuitivas y suele estar representados de una manera formal. Aunque la muestra de su investigación se centró en futuros profesores de matemáticas, donde un grupo no siguió ningún curso de teoría de conjuntos; otro grupo, un curso formal y un tercero el curso que se refiere en el artículo, es significativo que aquellos que no habían realizado ningún curso de teoría de conjuntos cotejaron intuitivamente el número de elementos de conjuntos infinitos de una manera que solo era correcta para la comparación en conjuntos finitos. De esa forma, la mayoría de los estudiantes utilizaron diferentes métodos, pero examinaban cada problema por separado, es decir, abordaban cada problema como si fuera uno nuevo sin tener en cuenta conexiones entre los distintos tipos de problemas (ese fenómeno es debido, para Vinner (1990, citado en Belmonte, 2009), a la *compartimentación* del conocimiento. La correspondencia uno a uno ocasionalmente fue utilizada por los alumnos y alumnas, mientras que para aquellos, que siguieron el curso de teoría de conjuntos formal, fue el método preferible para comparar conjuntos infinitos.

Monaghan (2001, citado en Belmonte, 2009) en un estudio con una población de 190 alumnos y alumnas preuniversitarios (hasta 19 años), 147 sujetos entiende el infinito como un objeto (conjunto como unidad) cuando se analizan las respuestas a preguntas sobre la cardinalidad. Mientras que todos los entrevistados tuvieron dificultad en hablar sobre el número de elementos de un conjunto infinito, el 31% consideraba el infinito como un número enorme y cuando se trataba de comparar conjuntos infinitos, solo una minoría de estudiantes no hizo comentarios en las comparaciones tales como "hay más en…" o "igual en ambos".

Para el mismo autor, los contextos de cálculo se encuentran asociados a situaciones discretas, mientras que los de medida habitualmente están asociados a situaciones continuas. De ahí que en este último, en un contexto de medida, lleven a una ordenación del infinito. Por otro lado, la diferencia entre contexto estático y dinámico dependerá de la interpretación de la cuestión por el estudiante. Es decir, si se trata de un proceso indefinido, suponiendo un movimiento en algún sentido, diremos que se trata de un contexto dinámico, mientras que los contextos estáticos no piensan en un sentido de "llegar a". El infinito como proceso está detrás de las interpretaciones dinámicas en fenómenos infinitos, pero los contextos dinámicos son menos generales que el infinito entendido como proceso.

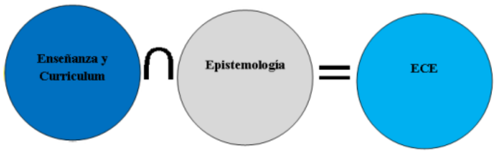
En Lestón (2008), analiza las reacciones de los alumnos y alumnas de la escuela media (15 a 18 años) al enfrentarse a las contradicciones que surgen entre las ideas intuitivas y las ideas del infinito matemático. Para ello, estudia la argumentación de los estudiantes respecto a las imágenes mentales. La actividad la plantea en dos fases. En la primera se realizan preguntas abiertas en base a la resolución de situaciones sencillas e intenta establecer las ideas intuitivas en la comparación entre cardinales de conjuntos finitos e infinitos, así como en algunos casos en sus subconjuntos propios. La segunda fase parte de la ayuda de la biyección como posible ayuda en la comparación entre estos conjuntos. Finaliza la actividad con las posibles contradicciones entre las conclusiones finales y las ideas que tenían en las preguntas abiertas. Concluye comentando que la resolución de este tipo de secuencias, referidas a la biyección, permite formar en la mente del estudiante ideas que eran desconocidas con referencia al tópico matemático.

Belmonte (2009) estudia la evolución del concepto del infinito desde educación primaria hasta el primer curso universitario. Con la ayuda de un cuestionario, basado en parte en la bibliografía existente, se aplicó a más de dos mil estudiantes para identificar los modelos tácitos del infinito en su desempeño o en sus representaciones. Para el análisis de respuesta utilizó un nuevo indicador, el patrón de evolución nivelar PEN, para comparar los resultados con los de otras investigaciones. Tras la investigación, Belmonte encuentra tres nuevos modelos intuitivos tácitos.

Lo que se refiere a cardinalidad y relación entre conjuntos infinitos en el contexto numérico:

- Favorece aceptar como una propiedad natural la infinitud de los conjuntos planteados.
- Entran en juegos los modelos:
  - *infinito=infinito*: "ambos conjuntos tendrán los mismos elementos". Con PEN creciente. Este nivel domina a nivel tácito frente a los demás.
  - *de inclusión*; los dos conjuntos tienen infinitos elementos, pero el primero tiene más porque empieza antes". El PEN creciente-decreciente.

- *de indefinición*: “los dos conjuntos son infinitos y no se puede decir cuál va tener mayor número de elementos”. El PEN creciente-decreciente.



6.2 Enseñanza y Curriculum-Epístemología

Aunque todas las investigaciones del apartado Enseñanza y Curriculum tienen un eje epistémico, hemos primado, en la relación ECE, aquellos estudios donde el eje fundamental es la Enseñanza y Curriculum.

6.2.1 Errores-Dificultades-Conflictos

Sierpinska & Viwegier (1989, citados en Bemonte, 2009), realizan el estudio con dos alumnas de 10 y 14 años. Para ellas, justifican los obstáculos sobre las concepciones del infinito en el paso del estadio de las operaciones concretas al estadio de las operaciones formales en niños y niña. Es en ese estadio de las operaciones concretas donde son incapaces de entender la propia naturaleza infinita de la división continua cuando se realiza en una figura geométrica, pero eso no significa que no puedan desarrollar concepciones cercana al infinito conceptual como podría ser ”muy grande”, ocurriendo también en estudiantes de más edad.

Una vez más es la equipotencia entre conjuntos el contexto que utilizan las autoras en las entrevistas con los estudiantes. De esa forma analiza la forma en que estos aceptan una correspondencia uno-a-uno entre los elementos de dos conjuntos infinitos, como criterio de comparación.

Es significativo que para Sierpinska que los alumnos y alumnas tengan una idea previa sobre el infinito, puede ser un obstáculo para aceptar como criterio de comparación los conjuntos infinitos. Si el criterio es aceptado utilizándolo de una forma correcta, es muy probable que puedan superar estos obstáculos, que raramente ocurren en edades comprendidas entre 10 y 14 años. Podemos decir, por tanto, que estos obstáculos aún no se han construido.

El segundo objetivo del trabajo es ver en qué condiciones y momento deja de ser aceptable el criterio de comparación o correspondencia uno-a-uno para los estudiantes. Utilizando distintos contextos matemáticos, números de fichas de colores, números naturales y pares, segmentos y curvas, circunferencias de distintos radios, pudo observar que se inclinan por la intuición cada vez que las tareas eran más complejas, rechazando la validez de la correspondencia.

Como conclusión de algunos de los resultados del estudio, citados en Belmonte (2009):

- Las concepciones concretas no privan la capacidad de realizar razonamientos deductivos precisos fundados en hipótesis no esencialmente acordes con sus propias intuiciones (una de las razones es que en ese estadio las intuiciones son muy superficiales y por otro lado, estas intuiciones no están relacionadas con las emociones).
- La dificultad para superar obstáculos puede relacionarse con las concepciones duales de los objetos matemáticos ideas-representaciones unidas con la actitud operacional hacia las matemáticas que caracteriza el periodo de transición entre los dos estadios de operaciones concretas y formales.

Moreno & Waldegg (1991, citados en Fuenlabrada & Armella, 2008) analizan las diferentes etapas históricas en relación a la evolución conceptual del infinito actual. Por otro lado, observan que la relación de inclusión como herramienta para comparar conjuntos (postura de Bolzano) genera menos obstáculos a los estudiantes de secundaria que el realizar una correspondencia biyectiva entre conjuntos (postura de Cantor). Para ellos, los conflictos a los que se enfrentan los estudiantes son:

- Aceptar que el todo puede ser igual a una de sus partes: en sus experiencias de la vida cotidiana, el todo es siempre mayor que sus partes.
- Esto determinará el esquema conceptual.
- La extrapolación de algunas propiedades de los conjuntos finitos a los infinitos, conducen a situaciones contradictorias difícil de superar.
- Una condición para aceptar la correspondencia biyectiva se encuentra en la posibilidad de concebir los conjuntos infinitos de manera sintética.

La investigación de Falk (1994, citado en Belmonte, 2009) es significativa para nuestro trabajo porque aunque se centró en estudiantes de Psicología y Educación, eligió la muestra de estos estudiantes que habían cursado matemáticas antes de ingresar a la universidad.

La autora planteó a los estudiantes que eligieran entre dos afirmaciones. La primera, donde hay más números naturales que números pares argumentando que el conjunto de los pares forma parte del conjunto de los naturales poniendo el ejemplo que números como, 1, 3, 5, que no son pares, están en ese conjunto natural. Termina esta premisa con una representación lineal de la forma siguiente:

$$1\ \underline{2}\ 3\ \underline{4}\ 5\ \underline{6}\ 7\ \underline{8}\ 9\ldots.$$

La segunda, afirma que hay tantos números naturales como pares ya que se puede establecer una correspondencia uno-a-uno entre ellos. La autora facilita la aclaración a esta opción con una representación en paralelo:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\ldots \\ | & | & | & | & | \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10\ldots \end{array}$$

Los resultados fueron los siguientes, el 55% eligieron la primera afirmación y de ellos sólo el 19% argumentó su elección. El resto eligió la segunda, de los cuales solo el 39% dieron su explicación.

De todo ello extrae las siguientes conclusiones:

- La afirmación de que el todo es mayor que sus partes es una relación que se adquiere alrededor de 7 u 8 años, por tanto, el sustituir este aprendizaje por la correspondencia uno-a-uno es un paso importante para extender el concepto de número cardinal de un conjunto infinito.
- El paso de la finitud a los números transfinitos es necesario para que el estudiante pueda afrontarlo *con un tipo de conservación*[52] *más extremo* (Belmonte, 2009, p.142). El cardinal de un conjunto infinito es invariante frente a la operación aritmética de la suma o la substracción al conjunto de un número finito de elementos, contradiciendo en parte a esa *conservación*.

Garbin & Azcárate (2002) centran su atención en identificar las inconsistencias, así como representar, categorizar y analizar las situaciones de coherencia en alumnos y alumnas de 16 y 17 años respecto a sus esquemas conceptuales relacionados con el infinito actual, utilizando para esa contextualiación problemas expresados en distintos lenguajes matemáticos. Tras analizar algunas investigaciones de interés didáctico sobre el infinito matemático y dar un *paseo por la historia del concepto del infinito*, centralizarán su interés en el infinito actual, dedicándolo a la divisibilidad infinita de Zenón de Elea y sus paradojas El estudio en alumnos y alumnas es de tipo cualitativo y su análisis de datos inductivo. Concluyen la investigación con una clasificación de los estudiantes en coherentes y consistentes, coherentes e inconsistentes y un tercero en incoherentes; todo ello dependiendo de la representación del problema. La tarea de

[52]Relativos a los principios de conservación de Piaget para cualquier concepto.

conexión se hace presente en la actividad matemática favoreciendo la inducción de esta tarea durante las entrevistas realizadas, observando su importancia en el desarrollo del pensamiento coherente, de manera particular en la noción del infinito actual.

Puntualizan la necesidad de intervenir didácticamente en las tareas de cambio y coordinación de los registros de representación y la tarea de conexión:

> Un profesor, al resolver en una práctica varios problemas que son representados de diferente manera, pero que presentan la misma noción matemática, tendrá que ayudar a establecer las conexiones pertinentes a sus estudiantes, de manera que no sean problemas aislados. Una manera podría ser la de comenzar con el reconocimiento de las diferencias de la representación: reconocer el tipo de lenguaje y contexto, tipo de registro de representación semiótica usado en cada uno de ellos, y establecer las conexiones entre los sistemas semióticos presentes y los registros. Podría ser una manera de incidir en el desarrollo de un pensamiento consistente y menos compartimentado. (Garbin & Azcárate, 2002, p.100)

Waldegg (1996) intenta identificar los obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual en alumnos y alumnas de 15 a 18 años. Para ello se basará en una biyección entre un conjunto infinito y una de sus partes propias (la autora puntualiza que ese proceso marcará el obstáculo más difícil para la compresión de los conjuntos infinitos). De un trabajo anterior con estudiantes y profesores con preguntas referida al tópico en varios contextos incluida la relación entre dos conjuntos infinitos, pudo categorizar en *finististas*, aquellos que argumentaban la imposibilidad de continuar una operación indefinidamente y que solo aceptan conjuntos finitos; y los *infinitistas*, referido a un infinito potencial donde argumentan la posibilidad de continuar indefinidamente una operación dada. Esto ayudó a realizar un cuestionario definitivo que a partir de las propias concepciones de los alumnos y alumnas, afrontarlo en situaciones diferentes. A modo de instrucción, construye una batería de preguntas con definiciones y ejemplos de ideas de los estudiantes siendo algunas matemáticamente incorrectas.

Del primer análisis de respuestas obtienen dos conclusiones:

- Aquellas preguntas que podían establecer una correspondencia uno-a-uno entre conjuntos variaron en un margen muy significativo (entre 33% y 72%) y si la biyección está indicada o explicitada, son más importantes en ese margen. Además de las respuestas de los alumnos y alumnas se induce que los conjuntos deben estar dispuestos en “estructura de fila” con espacio ilimitado para poder incluir los elementos del conjunto.
- Los porcentajes de acierto sobre equipotencia son los más bajos (entre un 11% y un 56%): menos de un tercio de los estudiantes reconocen la equipotencia de los conjuntos comparados.

De ahí, que las preguntas del cuestionario que formula la autora se centrarán en dos contenidos principales, por un lado decidir si un conjunto es infinito y por otro si dos conjuntos son equipotentes. A partir del estudio estadístico, concluye que hay factores con una fuerte influencia sobre la comprensión de los conjuntos infinitos.

- En conjunto acotado (sobre todo si están representado en el contexto geométrico), no se acepta que tengan un número infinito de elementos.
- La comparación entre conjuntos infinitos se hacen más difícil si solo uno de los conjuntos es acotado. En este caso, el infinito potencial será un obstáculo para comparar los dos conjuntos ya que es este infinito el que permite disponer de las posiciones necesarias para continuar el proceso, pero oculto en los acotados, provocando con ello una parálisis ante el problema.

- Existe un rechazo al usar el criterio de la biyección cuando se trata de comparar un conjunto con uno de sus subconjuntos propios (incluso con instrucción al respecto).
- El estudiante posee una serie de intuiciones locales con respecto al infinito que aplicará según la situación propuesta. Las intuiciones son localmente coherentes, pero globalmente se contradicen. Las nociones intuitivas son un obstáculo para aceptar los conceptos formales, aunque no todos los estudiantes comparten las mismas intuiciones locales.

6.2.2 Enseñanza – Aprendizaje

Los trabajos de investigación realizados por Tirosh & Tsamir (1996), y las investigaciones de Sierpinska & Viwegier (1989), Waldegg (1987, 1993), Moreno & Waldegg (1991), y Penalva (1996, 2001), plantean la comparación de conjuntos (finitos e infinitos) como la forma posible de trabajar la definición formal de conjunto infinito y su cardinalidad. De esa forma, estos autores intentan evitar la intuición como motor para comprender las matemáticas y en nuestro caso, el infinito.

Duval (1983, citado en Waldegg, 1996) trata la comparación de conjuntos desde una perspectiva semiótica en alumnos y alumnas de 12 a 14 años. Una de las observaciones más significativa que indica el autor es que aquellos estudiantes que rechazan la equipotencia, incluso tras la explicación de la relación uno-a-uno, entre conjunto infinito y un subconjuntos propio, es que ciertos elementos parecen para ellos, intervenir dos veces (dos objetos distintos o como dos atributos de un mismo objeto). Si el estudiante no realiza de forma correcta este desdoblamiento del objeto, no podrá reconocer la posibilidad de la biyección. Para él una biyección es una correspondencia entres dos conjuntos formados con distintos elementos y, por tanto, no será difícil relacionar un conjunto infinito con su subconjunto propio.

Tsamir & Tirosh (1996, citadas en Penalva, 2001) realizaron una investigación con alumnos y alumnas de 15 a 18 años relativas a la comparación de conjuntos infinitos. Lo más llamativo en los resultados fue que la decisión de los estudiantes sobre la equivalencia o no de los conjuntos proporcionado dependían de las representaciones optadas para esos conjuntos infinitos:

Posteriormente, Tsamir & Tirosh (1999, citadas en Penalva, 2001) en una muestra mucho más pequeña de estudiantes, exponen aquellas soluciones que eran incompatibles a un mismo problema; con diferentes representaciones pueden utilizarse para concienciarlos en las inconsistencias de sus razonamientos.

Para Penalva (2001), tras la elaboración de su Tesis, sintetiza las implicaciones didácticas de las dificultades en el aprendizaje de conjuntos infinitos y de ahí a las representaciones de conjuntos numéricos en textos matemáticos escolares. Facilita la tarea con una clasificación en tres categorías según su finalidad, de todas las publicaciones hasta esa fecha relativas al tema de estudio:

- Investigaciones psicodidácticas relacionadas con el concepto de infinito examinan las dificultades psicológicas debidas al conocimiento intuitivo y otras causas que darán origen a otras dificultades en la compresión de infinito.
- Estudios sobre el aprendizaje de conjuntos infinitos. Intentan evitar la intuición para alcanzar la comprensión del infinito. Para ello recurren a las comparaciones de conjuntos para alcanzar la definición formal.
- Estudios relacionados con el proceso de comunicación del contenido matemático. Se centran en estudiar la forma de organizar y de transmitir el concepto y sus posibles conflictos de aprendizaje.

Categorización que nos ha ayudado a realizar este apartado de Enseñanza y Curriculum y adjuntar las publicaciones realizadas desde entonces hasta la fecha actual.

Concluye, al igual que Ortiz (1999, citado en Penalva, 2001), que los libros de texto de matemáticas y las investigaciones clasificadas anteriormente no promueven la coordinación de diferentes sistemas de representación en un mismo concepto, es decir, se estudia de forma aislada. Puntualiza que siguen apareciendo representaciones de conjuntos numéricos que dificultaran el aprendizaje de los conjuntos infinitos.

Tsamir (2001, citada en Bemonte, 2009), mediante un estudio similar a las anteriores, indica que puede utilizarse a modo de enseñanza matemática. A esta actividad la llamó IST[53] (siglas *It's the same Task*) que al igual que Fischbein, intenta que el estudiante sea consciente de sus conflictos mentales y llegar con ello a controlar las estructuras conceptuales enseñadas sobre las intuiciones primarias. En esta investigación utilizaron como herramienta el criterio de correspondencia uno-a-uno para comparar cantidades infinitas.

Imaz (2001) cree que el infinito debería categorizarse y de esa forma se podría abrir nuevas perspectivas a problemas de enseñanza y aprendizaje del cálculo.

Montoro & Scheuer (2006a), aunque el objeto de su estudio se centró en estudiantes universitarios, hacen alusión a las dificultades de conceptualización cuando se enfrentan a situaciones que implican el infinito repercutiendo posteriormente a las matemáticas universitarias. Concluyen que sería necesaria la intervención de complejos procesos representacionales que propicien un alto grado de reflexión matemática.

[53] "La actividad IST es una herramienta didáctica formada por tres fases con actividades con diferentes representaciones que provocan respuestas incompatibles a un mismo problema sobre la comparación de conjuntos infinitos en los alumnos" (Belmonte, 2009, p.149).

6.2.3 Otras Investigaciones

Penalva (1996) en su tesis doctoral realiza un estudio de las concepciones y dificultades de comprensión en estudiantes universitarios, licenciados y profesores, que tienen asociadas al concepto de número cardinal de un conjunto infinito, así como indagar la evolución de las concepciones relativas a ello. Puntualiza dos tipos de significados: el público, asociado a la definición del concepto, y el privado o personal, relacionado al proceso de construcción a partir de su significado y uso del concepto. Las dos características del concepto hacen considerar por un lado elementos históricos y evolución para el significado público; por otro, relaciones entre el conocimiento público y el privado.

Encuentra que las principales dificultades en la comprensión de conjuntos infinitos de lo sujetos entrevistados se pueden clasificar en *dificultades lingüísticas* (significado, símbolos, representaciones gráficas, secuenciación de contenidos y ejemplos utilizados) y *dificultades conceptuales* (conceptos, definición y creencias erróneas por parte del profesorado relativas a la suposición de conocimientos ya adquirido por el estudiante).

Montes (2014) estudia el conocimiento especializado que el profesor de matemáticas de secundaria tiene acerca del infinito, en pos de su identificación, caracterización y categorización. Las conclusiones de esta investigación reflejan la naturaleza compleja del conocimiento del infinito en el profesor. Es en ese conocimiento, en el mismo sentido de Schoenfeld (2010, citado en Montes, 2014)[54], donde se establecen las conclusiones de este estudio.

[54] Conocimiento como información favorable para utilizar, más allá de consideraciones estrictamente propias de la matemática formal.

6.2.4 *Análisis Curricular en la Educación Secundaria Obligatoria (E.S.O.)*

Tras analizar los Reales Decretos del Ministerios de Educación, Ciencia y Deporte y Órdenes de la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía relativas a la Educación Secundaria Obligatoria con relación al tópico estudiado podemos certificar, en primera instancia, la ausencia de forma aparente de éste. Decimos forma aparente por dos motivos:

- El concepto matemático estudiado no aparece de forma explícita, ahora bien, se puede relacionar en muchos puntos del currículo.
- El Real Decreto establece solo las Enseñanzas Mínimas establecidas en esta etapa.

En 1º ESO se introduce la noción del infinito a través de los múltiplos de un número natural dado, además también se trata del concepto de semirrecta por el origen y no el final.

En tanto al bloque geométrico, se describen propiedades y análisis de relaciones de figuras en el plano que con relación a nuestro tema, sería paralelismo entre rectas y entre planos. Por otro lado, detallan los polígonos regulares y su extrapolación, como polígono con infinitos lados, a la circunferencia.

En 2º ESO, se inician a la notación científica para representar números muy grandes. Se estiman y obtienen raíces aproximadas no exactas. Se comienzan a explicar las resoluciones de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas con la posibilidad de que sean compatibles indeterminados con lo que habría una cantidad infinita de soluciones.

En 3º ESO se trata la escritura decimal de los números decimales, así como su periodicidad. Esta periodicidad conlleva asimilar que estas cifras decimales se puede englobar en un número fraccionario (paso de los infinitos decimales de un periódico a un número finito fraccionario).Se introduce el número irracional y la no posibilidad de englobarlo como pasó en el caso anterior en un número fraccionario. Además, se empieza a hablar de números con muchas cifras y la necesidad de englobarlas para su mejor tratamiento con la notación científica. En la representación de los números en la recta real, se alude al $+\infty$ y $-\infty$ (infinito actual).

En el concepto de sucesión no sólo aborda el acercamiento a los números ya mencionados irracionales, sino también en la distinción del infinito potencial cuando se trata de una sucesión convergente y el acercamiento a un número finito, si es la sucesión divergente.

En el tratamiento de inecuaciones de primer grado con una incógnita se introduce el infinito número de soluciones que tienen, es por ello que en el Decreto 1631/2006 recomienda utilizar la representación gráfica de la recta de los números reales.

En geometría también se plantea el concepto del infinito, por un lado el número π y por otro lado con las construcciones de frisos y mosaicos en un plano.

En 4ºESO opción B es donde más se tratarán conceptos que llevarán a la noción del infinito.

Se empieza con la densidad de los números reales, a partir de dos números racionales donde siempre hay uno intermedio y con el número irracional ya dado en el curso anterior. Se define conjuntos numéricos y sus representaciones (intervalos y semirrectas). La representación de los números en la recta numérica se completa en este curso con todos los reales, poniendo más énfasis en los números irracionales utilizando para tal fin el teorema de Pitágoras para la representación de irracionales, raíces cuadradas no exactas y los intervalos encajados de Cantor, para el resto.

Continúa con el concepto de sucesión y del estudio de los límites de éstos. En la función real de una variable no sólo se trabajará sus límites, sino que se llegará a adquirir el concepto de continuidad. No sólo de forma cuantitativa sino también gráfica.

Con respecto a las recomendaciones indicadas por la Consejería de Educación de la Junta Andalucía, en la Orden 171/2007 hemos de destacar el núcleo temático número 4 relacionado con el desarrollo del sentido numérico y la simbolización matemática que nos puntualiza: "(…) relacionar las distintas formas de representación numérica con sus aplicaciones, así como comprender las propiedades de cada conjunto de números para poder realizar un uso razonable de las mismas" (p.53).

Particulariza el mismo documento con respecto al bloque temático número 5, Las formas y figuras y sus propiedades, como contenido relevantes el uso del rectángulo áureo o rectángulo cordobés, no solo contribuyendo este al descubrimiento en distintas manifestaciones de nuestro entorno, sino que descubran la presencia de los números irracionales en sus formas.

Hemos de decir que mientras en el currículo no aparece explícitamente el concepto de infinito, los libros de textos lo introducen de manera intuitiva explicándolo de forma cuantitativa o utilizando gráficas de funciones. Además, se evita toda formulación del término, empleándose para ello expresiones como *infinitamente* a un valor o *la función se hace tan grande (o tan pequeña) como queramos*.

En lo que se refiere al aprendizaje, en el preámbulo del Real Decreto 1631/2006 donde se establecen las enseñanzas mínimas de la educación secundaria obligatoria puntualiza:

> Para que el aprendizaje sea efectivo, los nuevos conocimientos que se pretende que el alumno construya han de apoyarse en los que ya posee, tratando siempre de relacionarlos con su propia experiencia y de presentarlos preferentemente en un contexto de resolución de problemas. Algunos conceptos deben ser abordados desde situaciones preferiblemente intuitivas y cercanas al alumnado para luego ser retomados desde nuevos puntos de vista que añadan elementos de complejidad. (p.750)

La recomendación que se hace lo podemos aplicar al concepto tratado en cuanto queramos introducírseles a los alumnos y alumnas. Queremos puntualizar dos recomendaciones:

- El nuevo conocimiento debe ser abordado desde una situación preferiblemente intuitiva, que comparando el modelo evolutivo creado correspondería a las primeras preguntas de las tareas asociadas. Sí es verdad que solo podría conseguir ese acercamiento de forma intuitiva sobre el infinito potencial.
- Por otro lado, el nuevo conocimiento debe ser abordado desde una situación cercana al estudiante. El utilizar los espejos paralelos hace que sea más factible esa proximidad al concepto de una forma elemental, que más adelante será retomado de nuevo en el propio modelo evolutivo añadiendo elementos más complejos.

En tanto a los contenidos, el mismo preámbulo comenta:

> El desarrollo del sentido numérico iniciado en educación primaria continúa en educación secundaria con la ampliación de los conjuntos de números que se utilizan y la consolidación de los ya estudiados al establecer relaciones entre distintas formas de representación numérica, como es el caso de fracciones, decimales y porcentajes. (p.750)

Con respecto a las recomendaciones marcadas por la Consejería de Educación Junta Andalucía referida al aprendizaje, en la introducción a la materia de las

Matemáticas de la Orden de 10 de agosto de 2007, BOJA 171/2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía, nos hace la misma reflexión:

> Deberá favorecerse el tránsito desde las experiencias matemáticas intuitivas, vinculadas a la acción propia, hasta el conocimiento más estructurado, con un incremento progresivo de aplicación, abstracción, simbolización y formalización, orientado en todo momento hacia aspectos prácticos y funcionales de la realidad en la que se desenvuelve el alumnado. (p.51)

Por otro lado, la misma Orden, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía, hace sus sugerencias acerca de líneas metodológicas y utilización de recursos en el bloque de Geometría:

> Para el estudio de la Geometría es conveniente conjugar la experimentación a través de la manipulación con las posibilidades que ofrece el uso de la tecnología. Es recomendable el uso de materiales manipulables, como geoplanos y mecanos, puzzles, libros de espejos, materiales para formar poliedros, etc., así como la incorporación de programas de geometría dinámica para construir, investigar y deducir propiedades geométricas (…). (p.21)

En el comienzo de la creación del modelo evolutivo en tanto a las tareas asociadas a los niveles se refiere, vimos oportuno utilizar algún recurso manipulativo, como es el libro del espejo, en nuestro caso, espejos paralelos, para reconducir aquellos alumnos y alumnas que no respondían de forma acertada a las tareas propuestas. Como en la misma Orden de 10 de agosto de 2007, pero en lo que respecta al desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía, no encontramos ninguna recomendación acerca de ello, recurrimos al de educación primaría (de hecho, el tratar el infinito cardinal o actual es de suponer un concepto novedoso en el alumnado que en ese sentido debe ser tratado).

6.2.5 *Recomendaciones ajenas al Currículo: Principios y Estándares para la Educación Matemática*

Las etapas educativas que establecen y las recomendaciones que proponen, en Principios y Estándares (2003), son las siguientes:

Estándares para la etapa 6-8

Corresponde alumnos y alumnas de edades comprendidas entre los 12 y 15 años. Recomiendan que participen en actividades ligadas a sus capacidades emergentes, como podría ser encontrar y aplicar estructuras, conjeturar y verificar, pensar hipotéticamente abstraer y generalizar. Los alumnos y alumnas deberían aprender una cantidad suficiente de álgebra y geometría y poder verlas interconectadas. En tanto a los Números y operaciones, proponen que lleguen a una compresión profunda de los conceptos de números racionales además que aprendan a pensar de forma flexible sobre las nociones de fracción y decimal entre otras.

Principio y Estándares, comenta que los alumnos y alumnas de esta etapa se espera que aprendan unas matemáticas sustantivas y serias, haciendo especial insistencia en el pensamiento reflexivo y el aprendizaje significativo.

Los programas de enseñanza de esta etapa debería capacitar a estos estudiantes a:

- En Números y Operaciones, comprender los números, las formas de representarlos, las relaciones entre ellos y los conjuntos numéricos.
- En Conexiones, reconocer y usar conexiones entre ideas matemáticas y comprender cómo las ideas matemáticas se interconectan y construyen una sobre las otras para producir un todo coherente, además de reconocer y aplicar las matemáticas en contextos no matemáticos.
- En Representación, usar representaciones para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.

Estándares para la etapa 9-12

Esta etapa corresponde alumnos y alumnas con edades comprendidas entre los 16 y 18 años, último curso de secundaria obligatoria y educación postsecundaria. Los estudiantes de esta etapa son jóvenes adolescentes que intentan resolver problemas de identidad, así como los relativos a capacidades mentales y físicas. Son más autónomos, pero a su vez son más capaces de trabajar en grupo con otros. Son más reflexivos, desarrollando las competencias personales e intelectuales suficientes para el trabajo o educación superior.

En tanto a la educación matemática se refiere, empezarán en esta etapa a comprender aspectos de la forma y de la estructura matemática. Deberán visualizar fenómenos matemáticos, la interacción entre los distintos bloques de la materia. Empiezan a desarrollar un conocimiento mucho más profundo de los conceptos fundamentales.

En lo que se refiere a la resolución de problemas, deberían construir sobre sus propios conocimientos previos, técnicas más avanzadas y complejas; mayor habilidad para visualizar, describir y analizar situaciones en el contexto matemático.

Se caracterizan estos estudiantes de Secundaria por la necesidad de desarrollar su capacidad para probar conjeturas, justificar afirmaciones, así como utilizar símbolos para su razonamiento.

En tanto al bloque Cálculo se recomienda en National Council of Teachers of Matehematics(1989):

- Cubrir menos tópicos: mayor énfasis en los más fundamentales.
- Menos destreza manipulativas.
- Enseñar a pensar y razonar, más que realizar operaciones rutinarias.

- Saber construir modelos del mundo real y ampliar técnicas de resolución de problemas.
- Uso adecuado de las nuevas tecnologías.
- Promover la experimentación y la formulación de conjeturas.
- En definitiva, proporcionar una sólida base matemática para que puedan leer y aprender materiales matemáticos adaptados al nivel académico.

En general, en los Estándares, puede observarse dónde se considera más conveniente situar el aprendizaje de los diferentes conceptos matemáticos asociados al infinito. Tanto a cada concepto como a las diferentes etapas, proponen actividades adaptadas para provocar la reflexión del estudiante y ayudar a la asimilación del concepto.

Uno de los experimentos más básicos que proponen para una primera reflexión en el estudiante, es el enfrentamiento de dos espejos paralelos. Su efecto puede variar en función a la edad del estudiante.

Una línea que puede favorecer a esa asimilación de infinitud procede del manejo de patrones para modelizar e incluso pronosticar. Cuando los alumnos y alumnas aprenden canciones repetitivas, en los primeros niveles educativos, invitan a predecir o conjeturar ya que están apoyados en patrones de crecimiento y en la repetición.

El uso del razonamiento inductivo en las primeras demostraciones por inducción admiten un fortalecimiento en la idea de que el infinito es tratable. Es un acercamiento mayor del estudiante a un infinito más "real".

Otro acercamiento que proponen en los Estándares, es en el trabajo con alumnos y alumnas con frisos y teselaciones, entre ellos, la generalización para poder cubrir el plano infinito en su totalidad. Recomiendan que los alumnos y alumnas estimen modelos físicos, así como otros objetos de la vida cotidiana que les permita desarrollar la intuición geométrica hasta alcanzar ideas abstractas apoyadas en experiencias previamente adquiridas (Fedriani & Tenorio, 2007).

La actividad geométrica de hallar figuras con área y perímetro determinados, pueden favorecer la mejora intuitiva del infinito.

La generalización de procesos finitos puede alcanzar la idea de lo infinito en el campo del estudio de sucesiones y series infinitas.

Y por último, la presentación del infinito no numerable en el uso de correspondencias biunívocas entre conjuntos de la misma cardinalidad.

7. Consecuencias del análisis didáctico

Para finalizar, concluimos este capítulo con una exposición de los resultados y conclusiones que se deducen del estudio realizado. Los dos apartados que siguen relacionan los resultados y conclusiones de todo el análisis bajo dos perspectivas diferentes: una reflexión general comentada y una síntesis global.

7.1 Reflexión general

Recapacitando sobre el infinito actual como identidad cardinal tras la comparación de conjuntos numéricos, se llega a la conclusión de que dicho conocimiento no surge en el vacío, es decir, la sucesión de términos numéricos, un entramado de relaciones y criterios de comparaciones, el desarrollo de distintas estrategias y procedimientos, la admisión del infinito potencial y posteriormente la aceptación o no del infinito actual, es necesario un cúmulo de competencias lógicas en los estudiantes de educación secundaria.

Con respecto al análisis fenomenológico y sus relaciones con las otras cuatro áreas, hemos podido localizar algunos fenómenos para los que son los medio de organización y qué relación tienen el concepto y la estructura con esos fenómenos, como son la intuición, el principio de inducción completa y criterios de comparación entre conjuntos. La profundidad en el estudio de todos ellos no son objetivos de esta investigación en general y se propone como perspectiva futura.

El análisis cognitivo nos ha ayudado a concretar en que lugar se encuentran los alumnos y alumnas objeto de estudio, tanto en las etapas piagetiana, en el pensamiento matemático, así como en el curriculum oficial. Además de las características principales de los diferentes pensamientos elemental y avanzado, así como en la etapa de transición de estos.

Con el análisis epistemológico hemos pretendido focalizar el estudio del infinito actual como identidad cardinal en tres autores Bolzano, Cantor y Russell. En la primera aproximación histórica al término matemático que se realizó en el periodo de investigación que se recoge en la Memoria de Tercer Ciclo (Prieto, 2004), se toma como referencia la obra de Russell *Los principios de la matemática* que aportará a nuestra investigación una manera de poder trabajar con los alumnos y alumnas lo finito e infinito. El aporte de Russell alude constantemente a Cantor, por ello analizamos sus dos obras fundamentales, *Fundamentos de una teoría general de las multiplicidades: una investigación matemático filosófica en la teoría del infinito* y *Contribuciones a la fundamentación de la teoría de los conjuntos transfinitos* que añade a nuestra investigación una visión sistemática para poder comparar conjuntos infinito. Los trabajos cantorianos aluden a Bolzano y por ello, analizamos su obra *Las paradojas del infinito* dándonos otra forma de abordar el objeto de nuestro trabajo.

Moreno & Waldegg (1991, citados en Fuenlabrada & Armella, 2008) nos facilitan la tarea de relacionar la epistemología con la cognición. Ellos analizan las diferentes etapas en la evolución conceptual del infinito actual basándose en la triada piagetiana de Piaget & García (1982), mostrándonos las dificultades encontradas por los estudiantes para lograr estas etapas en la estructura curricular. Moreno & Waldegg (1991, citados en Fuenlabrada & Armella, 2008) relacionarán las dos primeras etapas con el enfoque del tópico de Bolzano (etapa intra-objetal) y Cantor (etapa inter-objetal) extrayendo resultados muy significativos contribuyéndo en dos enfoques evolutivos en nuestra investigación (capítulos V y VI-VII). Necesariamente tuvimos que analizar la triada piagetiana en Piaget & García (1982), donde intentamos completar la tercera y última etapa evolutiva conceptual (etapa trans-objetal) con los trabajos de Russell.

Del análisis Enseñanza-Curriculum obtendremos el mayor aporte a nuestro trabajo, valorado en las conclusiones que vendrán posteriormente a la reflexión general. En general, nos facilitará realizar las tareas asociadas al modelo teórico evolutivo del capítulo VI. De las dificultades y errores que los estudiantes encuentran cuando se enfrentan a las actividades matemáticas donde es el infinito actual el principal objeto de estudio, nos ayuda a elaborar el proceso que debemos seguir en las entrevistas semiestructuradas en los alumnos y alumnas en nuestros estudios empíricos y facilita la categorización en tanto a las estrategias que usan estos para la aceptación o no del infinito actual, capítulo VII. De los trabajos de investigación donde las concepciones previas es objeto de estudio, nos ayuda a realizar el protocolo inicial de nuestra investigación del capítulo V, además de ayudarnos a la realización de los microrrelatos, posteriormente, a categorizar las distintas respuestas dadas por nuestros estudiantes en esta parte de la investigación.

7.2 Síntesis de conclusiones

Las principales conclusiones del estudio se pueden resumir en los siguientes apartados y puntos concretos:

1. *Creación de los conjuntos numéricos: Secuencias numéricas.*

C1 Que el uso del principio de inducción completa para construir conjuntos, así como utilizar el término “así sucesivamente” en la serie numéricas es factible para indagar en el pensamiento del individuo. Para Russell: “es pues el principio de inducción (…) el que está en el fondo de todas las inferencias sobre la existencia de cosas no dadas de modo inmediato” (Pérez, 2014, p.322)

C2 Que la generalización de procesos finitos puede alcanzar la idea de lo infinito en el campo del estudio de sucesiones y series infinitas (National Council of Teachers of Mathematics, 1989).

C3 El uso del razonamiento inductivo en las primeras demostraciones por inducción admiten un fortalecimiento en la idea de que el infinito es tratable. Es un acercamiento mayor del estudiante a un infinito más “real” (National Council of Teachers of Mathematics, 1989).

2. Aceptación del infinito potencial.

C4 Que el concepto potencial del infinito responde a una interpretación natural intuitiva del infinito (Fischbein, 1982 citado en Garbin & Azcárate, 2001).

C5 Que la aceptación o no del infinito potencial puede presentar un obstáculo para la aceptación del actual (Turégano, 1996).

3. Criterios de comparación de conjuntos.

C6 Que los métodos de comparación usados en conjuntos finitos son adecuados para la comparación conjuntos infinitos (Tirosch, 1991, 1992 citados en Penalva, 2001).

C7 Que el todo es mayor que sus partes es una relación que se adquiere alrededor de los 7 u 8 años al sustituir este aprendizaje por una correspondencia uno-a-uno que sin duda es un paso importante en tanto a la evolución del pensamiento (Falk, 1994 citado en Belmonte, 2009).

C8 Que ideas previas sobre el infinito y ciertas actitudes hacia las matemáticas pueden funcionar como obstáculo para aceptar como criterio de comparación utilizando la correspondencia uno-a-uno en conjuntos infinitos en estudiantes de 10 a 14 años (Sierpinska, 1989 citado en Penalva, 2001).

C9 Que mientras Ortiz(1994) según la definición dada por Bolzano plantea contradicción con la intuición que se tiene de subconjunto propio(ya que si un conjunto A tiene un subconjunto propio B, la intuición indica que B es necesariamente más pequeño que A, existen elementos de A que no están en B), para Waldegg (2005, citado en Fuenlabrada & Armella, 2008) el criterio dado por Bolzano es más “intuitivo”, pues es más cercano a experiencias finitas concretas y que la solución cantoriana solo puede alcanzarse por un desprendimiento total del significado y de la intuición, representando un corte epistemológico.

4. Cardinalidad finita e infinita.

C10 Que dos conjuntos son equipotentes, lleva implícito el establecimiento de una correspondencia, Turégano (1996).

C11 Que hay una creencia errónea acerca de que un conjunto acotado tiene cardinal finito (Belmonte, 2011).

C12 La mayoría piensan que todos los conjuntos infinitos tienen el mismo número de elementos, Tirosh (1999, citado en Penalva, 2001).

5. *Aceptación del infinito actual.*

C13 Que el infinito actual se acepta de menor grado y con una cierta indeterminación, Turégano (1996).

C14 Que un infinito actual no tiene un significado conductual, por tanto no es congruente con una interpretación intuitiva, Fischbein (1982, citado en Garbin & Azcárate, 2001).

C15 Que la inducción de las tareas propuestas durante la entrevistas puede ayudar a desarrollar un pensamiento coherente en el estudiante y de manera particular cuando es la noción del infinito actual esté implicado en dichas tareas (Garbin & Azcárate, 2002).

C16 Que el estudiante crea sus propios argumentos, acertadas o no, para poder dar respuestas en la aceptación del infinito actual, Sierpinska (1994, citado en Penalva, 2001).

C17 Que: "El desarrollo conceptual del infinito actual es bastante diferente, se manifiesta muy tardíamente y aparece siempre inmerso en situaciones de en conflictos" (Waldegg, 1996, p.108).

C18 Se podría pensar "en una especia de anterioridad lógica del infinito actual sobre el potencial, lo que tiene como consecuencia que su aparición sea inevitable en los procesos de creación y re-creación de las matemáticas en donde se presenta el infinito potencial" (Waldegg, 1996, p.108).

Conclusiones específicas según el criterio de comparación aplicado a los estudiantes

7. *Con respecto a establecer como criterio la comparación parte/todo, comparación elegida por Bolzano basadas en la relación de inclusión, bajo una experiencia física.*

C19 Intentar que el nuevo conocimiento debe ser abordado desde una situación cercana al estudiante, Real Decreto 1631/2006.

C20 Como sugerencias acerca de líneas metodológicas y utilización de recursos en el bloque de Geometría, el uso del libro de los espejos, BOJA 171/2007.

C21 Uno de los experimentos más básicos que proponen para una primera reflexión en el estudiante es el enfrentamiento de dos espejos paralelos, National Council of Teachers of Mathematics (1989).

C22 Recomiendan que los alumnos y alumnas estimen modelos físicos, así como otros objetos de la vida cotidiana que les permitan desarrollar la intuición geométrica hasta alcanzar ideas abstractas apoyadas a experiencias previamente adquiridas, (Fedriani & Tenorio, 2007).

8. *Con respecto a establecer como criterio de comparación uno-a-uno, comparación elegida por Cantor basada en la biyección entre conjuntos, bajo un modelo evolutivo de competencia.*

C23 En la comparación de conjuntos numéricos, el criterio de biyección se muestra más fuerte que el de la inclusión, Turégano (1996).

C24 La opción con una representación en paralelo de los términos de sucesiones numéricas que se pretenden comparar bajo una comparación uno-a-uno es más factible para aceptar la cardinalidad infinita que la representación lineal (Falk, 1994 citado en Belmonte, 2009).

C25 Que los conjuntos acotados no se aceptan que tengan un número infinito de elementos. Así, la comparación entre conjuntos infinitos se hace más difícil, si solo uno de los conjuntos tratados está acotado, Waldegg (2005, citados en Fuenlabrada & Armella, 2008).

C26 Que la ayuda de la biyección en cuanto a método de comparación de conjuntos permite formar en la mente del alumno o alumna ideas que eran desconocidas para él o ella (Lestón, 2008).

9. *Con respecto a nuevas perspectivas metodológicas.*

C27 Que las intuiciones secundarias provocadas por un cuidado didáctico especial, facilita una forma correcta para llegar a las intuiciones del infinito (Fischbein, 1987 citado en Belmonte, 2009).

C28 Imaz (2001) cree que el infinito debería categorizarse y de esa forma se podría abrir nuevas perspectivas a problemas de enseñanza y aprendizaje del cálculo.

Se confirma la bondad de las hipótesis:

H1. Existen corrientes epistemológicas que priman el aspecto comparativo para entender el infinito actual frente a otras corrientes que priman el carácter inclusivo de los conjuntos.

Los resultados y conclusiones del análisis didáctico basado en el análisis epistemológico y en la relación epistemología-cognición (triada piagetiana) aportan evidencias que sostienen la hipótesis H1.

H2. Existen tareas con esquemas lógicos comparativos subyacentes para evaluar las competencias del infinito en el campo de las series numéricas.

La bondad de esta hipótesis queda manifiesta cuando se analiza la relación Enseñanza y Curriculum-Epistemología.

H6. Los escolares aceptan más ampliamente el infinito actual como identidad cardinal mediante el método de inclusión de Bolzano bajo una experiencia física que mediante comparación de conjuntos en el sentido cantoriano.

Parte fundamental de esta hipótesis queda manifiesta en los resultados y conclusiones del análisis Cognición y Enseñanza y Curriculum cuando el soporte de comparación de conjuntos es con elementos formales de las matemáticas en sí.

La confirmación de estas hipótesis es garantía del logro de los distintos objetivos propuestos en el apartado 2 de este mismo capítulo.

El análisis didáctico efectuado fundamenta, por un lado, el patrón evolutivo de competencias y su estructuración, así como la racionalidad del mismo, capítulo V; por otro lado, establece y confirma el modelo realizado en el estudio exploratorio, un modelo evolutivo teórico de competencias en el cardinal infinito, capítulo VI.

CAPÍTULO IV

ESTUDIO EXPLORATORIO CUALITATIVO

1. Introducción

Como se ha citado en el capítulo I dedicado al problema de investigación y el capítulo II marco metodológico, la última parte de la investigación que se recoge en la Memoria de Tercer Ciclo (Prieto, 2004) consistió en un estudio exploratorio. En éste se analizaron las respuestas mediantes unas tareas de razonamiento del número infinito[55] como identidad cardinal en series numéricas[56] tras comparar conjuntos finitos e infinitos.

El fin primordial de esa investigación, de acuerdo con el marco metodológico y el esquema general que se propuso entonces, era indagar en determinados aspectos del conocimiento del número infinito en los estudiantes de primer y segundo ciclo de Educación Secundaria, de 1º a 4º ESO. En concreto se seleccionó una muestra de 22 estudiantes. Para ello se construyó un primer modelo teórico evolutivo susceptible de comparación empírica.

La contrastación y validación del modelo mencionado requiere, a nuestro juicio, de un estudio empírico cualitativo para el análisis y predicción de la evolución del conocimiento en el número infinito en estos estudiantes.

En el presente capítulo se expone el diseño de este estudio empírico cualitativo, que ahora tomamos como estudio exploratorio. En su parte fundamental tiene un

[55] Se eligió entonces, la terminología de Russell de *número infinito*: "(…) existe un número infinito mínimo, es decir, un número que es menor que cualquier otro número infinito" Russell (1908/1995, p. 224).

[56] Entendido como conjunto ordenado de números creados a partir de un término general.

carácter transversal (diferentes grupos con sujetos de 13, 14, 15 y 16 años de edad, y diferentes niveles escolares de Educación Secundaria) y se ha realizado con un enfoque actual. La información que se quiere obtener se refiere a la categorización de los estudiantes según el rendimiento obtenido en las tareas asociadas al modelo evolutivo teórico señalado.

Como la pretensión general del estudio, era validar un modelo evolutivo sobre un conocimiento concreto: el número infinito, la prueba que consideró adecuada fue la entrevista clínica semiestructurada en base a lo que reseña: White y Gunstone (1992, citados en Fernández, 2001) refiriéndose a las entrevistas sobre conceptos; Cohen (1990, citado en Fernández, 2001) en cuanto a las entrevistas semiestructuradas y el análisis de tareas; o Piaget & Apostel (1976, citados en Fernández, 2001) sobre el método clínico y las entrevistas clínicas.

Cuando los estudiantes se enfrentan a tareas no usuales en la enseñanza, pueden manifestar el estado real de comprensión de los conocimientos, a diferencia de otras tareas rutinarias en las que diversos factores pueden llegar a enmascarar la verdadera situación de dicha comprensión. En este sentido y como ya hemos apuntado en capítulos anteriores, las tareas que hemos considerado en la prueba (entrevistas clínicas semiestructuradas) creemos que son adecuadas para analizar el nivel real de comprensión del infinito en los estudiantes por varios motivos:

- Las situaciones concretas pensadas para la prueba, parten de un material original en el que confluyen esquemas lógicos-matemáticos del número infinito.
- No son tareas usuales en la educación reglada, con lo cual evitamos los aspectos rutinarios que se puedan dar y permitir que aflore la comprensión del conocimiento deseado.

- La determinación de las tareas viene precedida por la construcción de un modelo evolutivo.
- Las tareas asociadas a los niveles del modelo teórico manifiestan las características lógico-matemáticas de cada uno de los mismos

Como veremos a lo largo del desarrollo de la investigación, la información extraída en este estudio exploratorio ha sido útil para profundizar en las capacidades de razonamiento de los estudiantes, propiciando un acercamiento a la verdadera naturaleza de éste. En particular, la evidencia empírica obtenida, ya sean estrategias, procedimientos, habilidades y conceptos en la resolución de las pruebas, han servido en primer lugar, para la construcción de un primer modelo evolutivo de competencia del número infinito; en segundo lugar, para orientar el estudio empírico cualitativo desarrollado posteriormente.

En los apartados siguientes, hemos incluido el modelo empírico que se propuso entonces, el propósito del estudio y el procedimiento sistemático que se utilizó en el análisis. Se han descrito las respuestas y el estudio que se realizó, así como las tareas más representativas de los mismos.

Concluye el presente capítulo con una exposición detallada de los resultados y principales consecuencias del estudio exploratorio para la investigación.

2. *Modelo evolutivo empírico del conocimiento*

Proponemos desarrollar un modelo de competencias cognitivas de carácter evolutivo sobre el número infinito, mediante la comparación de series numéricas finitas e infinitas, que explique e integre los siguientes factores:

- La progresión en el descubrimiento por parte del sujeto individual.
- Las características en el uso de la series para determinar.

- Los tipos de series que se toman en consideración.
- La evolución al pasar de un nivel evolutivo a otro superior.

Para ello además como información fundamental es necesario:

- Realizar un análisis exhaustivo de cada una de las tareas propuestas en el estudio cualitativo.
- Determinar las posibles interpretaciones que pueda establecer el estudiante acerca de las comparaciones entre las series numéricas finitas e infinitas, y asignar a cada una de ellas un estatus evolutivo.
- Delimitar los distintos tipos de tareas y construir las que se puedan adaptar mejor a las distintas interpretaciones y niveles de competencias.
- Ordenar los tipos de respuestas en categorías y delimitar las características que las definen teniendo en cuenta los resultados de todos los puntos anteriores expuestos, es decir, la construcción del modelo.

La opción que hemos elegido para la exposición del modelo teórico es la de un razonamiento progresivo, a partir de los aspectos más elementales hasta los más complejos y de las edades inferiores a las superiores, resumido y estructurado por etapas o aproximaciones. Cada aproximación corresponde a un nivel diferente, que viene especificado por la descripción desde un punto de vista de la progresión de las capacidades correspondientes en un sujeto individual ideal.

En la caracterización y determinación de los siguientes niveles se utilizan series infinitas básicas[57], divergentes y convergentes, para la inferencia del número infinito.

[57] Llamamos series infinitas básicas a las que su término general son del tipo , $a_n = n + k$ y $a_n = k.n$;
$a_n = \frac{kn+1}{n} = \frac{1}{n} + k$, $a_n = \frac{1}{n+k}$ y $a_n = \frac{n}{n+k} = 1 - \frac{k}{n+k}$

La comparación entre dos series básicas se realiza mediante una correspondencia serial, dicha correspondencia es biunívoca y por tanto determina la equipolencia entre ambas, lo que lleva al número infinito.

En consecuencia, en cada uno de los niveles, es necesario que el estudiante aplique esquemas lógicos-matemáticos (Piaget e Inhelder, 1976, citados en Fernández, 2001) tales como:

- ***Clases extensivas***, para la determinación de las dos series básicas dado su término general.
- ***Correspondencia serial***, para la comparación término a término entre ambas series.
- ***Equipotencia de conjuntos***, cuando se infiere que la correspondencia uno a uno es un método válido para comparar cardinales de conjuntos.
- ***Inclusión de clases***, para inferir que una de las series forma parte de la otra.
- ***Número infinito versus número finito***, la correspondencia biunívoca se da entre dos series numéricas básicas pero esta correspondencia deja de existir cuando consideramos tramo[58] de la misma.

De acuerdo, con estas consideraciones, el modelo evolutivo queda configurado de la siguiente forma:

NIVEL I

En el nivel más bajo se encuentran los estudiantes que no distinguen lo finito de lo infinito. Los estudiantes que conforman este nivel no aplican correctamente el esquema lógico-matemático que hemos llamado número infinito versus número finito, en el sentido que no mantienen la correspondencia entre series básicas infinitas a la que a una de ellas se le han quitado los primeros términos, y en este sentido tratan de

[58] Llamamos tramo de la serie básica n+k, al segmento $S(n)=\{x+k, 1+k \leq x+k \leq n+k\}$

igual manera la comparación de series infinitas básicas con tramos finitos de las mismas.

NIVEL II

El criterio seguido para determinar si un alumno o alumna se encuentra en el Nivel II es que sea capaz de determinar el número infinito mediante la comparación de dos series básicas divergentes (del tipo $a_n = n + k$ y $a_n = k.n$) donde la diferencia entre ellas es de pocos términos y primeros.

Un alumno o alumna de este nivel presenta todos los esquemas lógico-matemáticos señalados, siempre y cuando las series dadas sean series divergentes básicas. En relación a los esquemas “clases extensivas” y “número infinito versus número finito” aparecen con limitaciones; en este sentido tenemos estudiantes que las aplican cuando los tramos finitos elegidos para su comparación son “pequeños” (unos diez o veinte términos).

NIVEL III

Un alumno o alumna está en este nivel si presenta las mismas características que en el Nivel II, pero además es capaz de determinar el número infinito mediante comparación de dos series divergentes básicas, donde la diferencia de términos ha pasado de “poco” a “muchos”.

Los esquemas lógico-matemáticos que se trabajan aparecen sin limitaciones por los tramos finitos elegidos, dichos tramos son de más de quinientos términos y se deben aplicar las mismas representaciones en éstos como en las series infinitas, lo cual pone de manifiesto que los estudiantes de este nivel, además de los esquemas señalados, usan el esquema lógico-matemático de “último elemento” para diferenciar las series finitas de las infinitas.

NIVEL IV

El criterio seguido para determinar si un alumno o alumna se encuentra en el Nivel IV es que sea capaz de determinar el número infinito mediante la comparación de dos series básicas convergentes (del tipo $a_n = \frac{kn+1}{n} = \frac{1}{n} + k$, $a_n = \frac{1}{n+k}$ y $a_n = \frac{n}{n+k} = 1 - \frac{k}{n+k}$) en la que la diferencia entre ellos es de pocos términos y primeros.

Al igual que en el Nivel II, se presentan todos los esquemas lógicos-matemáticos señalados en series convergentes básicas y cuando los tramos dados sean de pocos términos.

El avance de este nivel respecto de los anteriores se encuentra en el "dominio operatorio" de las series consideradas con la correspondiente generalización del conocimiento del número infinito que se había manifestado.

NIVEL V

Un alumno o alumna estará en este nivel si además de presentar las mismas características que el Nivel IV, presenta la capacidad de determinar el número infinito mediante la comparación de dos series convergentes básicas, donde la diferencia de términos ha pasado de "pocos" a "muchos".

Por tanto, se tiene un dominio operatorio de las series, que junto al esquema lógico-matemático de "último elemento", hacen que quede interiorizado la comparación entre número finito e infinito.

3. Plan de trabajo

En este apartado haremos referencia a la proyección del modelo anteriormente expuesto sobre la continuidad del presente informe.

Con la construcción del modelo tenemos el propósito de validar la hipótesis planteada inicialmente en este estudio exploratorio:

> Las diferentes estrategias utilizadas por estudiantes de 13 a 16 años en la comparación de series numéricas finitas e infinitas, se pueden organizar en un modelo teórico de desarrollo que explica y describe la evolución del conocimiento del número infinito.

Pero en el proceso de validación, debemos distinguir dos etapas desde el punto de vista metodológico: la primera, construcción del modelo y la segunda, valoración empírica del modelo.

4. Viabilidad de una prueba asociada al modelo evolutivo

En este apartado buscamos una prueba que forme parte de un diseño experimental, adecuado para un propósito muy concreto dentro de esta investigación, el de validar empíricamente el modelo teórico evolutivo ya expuesto.

Al tratarse de un modelo evolutivo se pretende determinar diferentes niveles de conocimiento y las transiciones de unos niveles a otros. En este sentido, no basta con los métodos de observación pura y pruebas de rendimiento, sino que se hace más adecuado un método clínico, esencialmente individual, cualitativo y no estandarizado (Claparède, 1976; Vinh-Bang, 1966; Inhelder, Sinclair y Bovet, 1974, citados en Fernández, 2001). Dicho método puede tener la siguiente forma, “Niño y experimentador actúan y hablan sobre una situación concreta. Según las acciones individuales de los niños, las observaciones y las respuestas a preguntas, el experimentador puede modificar la situación concreta, ofrecer sugerencias o pedir explicaciones" (Fernández, 2001, p. 171).

En este sentido, hemos considerado adecuado aplicar el método anteriormente expuesto en la construcción de la prueba, sin perder de vista que nuestras pretensiones son las de evaluación de distintos niveles que entran a formar parte de un modelo evolutivo y la comparación entre los mismos. Es por ello que la prueba la conforma un conjunto de tareas destinadas cada una de ellas al estudio y análisis de las características lógicas matemáticas que se dan en cada uno de los niveles. Por tanto, la prueba consta de cuatro tareas, una por cada nivel.

Debemos hacer notar que una vez que se construya la prueba, estaremos ante la validación planteada inicialmente en este estudio exploratorio:

> *Es posible determinar pruebas para estudiantes de 13 a 16 años que formen parte de un diseño experimental cualitativo, constituidas por una serie de tareas que podemos ordenar de menor a mayor dificultad dependiendo de los esquemas lógicos-ordinales implicados en cada una de ellas.*

4.1 Tareas asociadas a los Niveles del Modelo Evolutivo

Para cada uno de los niveles pasamos una tarea que conlleva las características lógico matemáticas del mismo.

El procedimiento seguido[59] queda sistematizado en el cuadro de la figura 4.1 que explicamos a continuación:

- Cuando indicamos Nivel K, la letra K toma sucesivamente los valores II, III, IV y V.
- La tarea específica para cada uno de los niveles, se inicia con una situación de partida que llamaremos Situación S1.

[59] Está basado en la validación del modelo evolutivo de competencias ordinales de Fernández (2001).

- La situación S1 divide a los estudiantes en dos categorías: los que la resuelven y los que no lo hacen. La primera queda codificada como K1A, y la segunda como K1B.
- A los estudiantes de la categoría K1B se les presenta otra situación, llamada Situación S2.
- La situación S2 divide a los estudiantes de K1B en dos categorías: los que la resuelven, codificada como K2A, y los que no lo hacen, codificada como K2B.
- Los estudiantes de la categoría K2B no siguen la prueba, o bien pasan a otra tarea, y son de un nivel inferior al considerado.
- A los estudiantes de la categoría K2A se les presenta otra situación, llamada Situación S3.
- La situación S3 divide a los estudiantes de K2A en dos categorías: los que la resuelven, codificada como K3A, y los que no lo hacen, codificada como K3B.
- Los estudiantes de la categoría K3B no siguen la prueba, o bien pasan a otra tarea, y son de un nivel inferior al considerado.
- A los estudiantes de la categoría K3A se les presenta la situación de partida, es decir, la Situación S1 o bien la situación S1', la misma que resolvieron los de la categoría K1A.
- Los estudiantes de la categoría K3A, que son parte de los que inicialmente no habían resuelto la situación S1, pueden, ahora, llegar a resolverla una vez que han realizado con éxito las situaciones S2 y S3. Si no lo resolviera, quedaría en la categoría K1'B considerada un nivel inferior.
- Los estudiantes que después del proceso precedente están en K1B, no siguen la prueba o bien pasan a otra tarea, y están en un nivel inferior al considerado.

- Los estudiantes que están en K1'A, bien desde el principio de la prueba o una vez seguido el proceso, son los estudiantes del nivel en cuestión.

Todas las situaciones de cada una de las tareas están planteadas con el material que hemos reseñado en el apartado anterior, y a cada una de ellas se pretende adaptar un nivel lógico matemático dado.

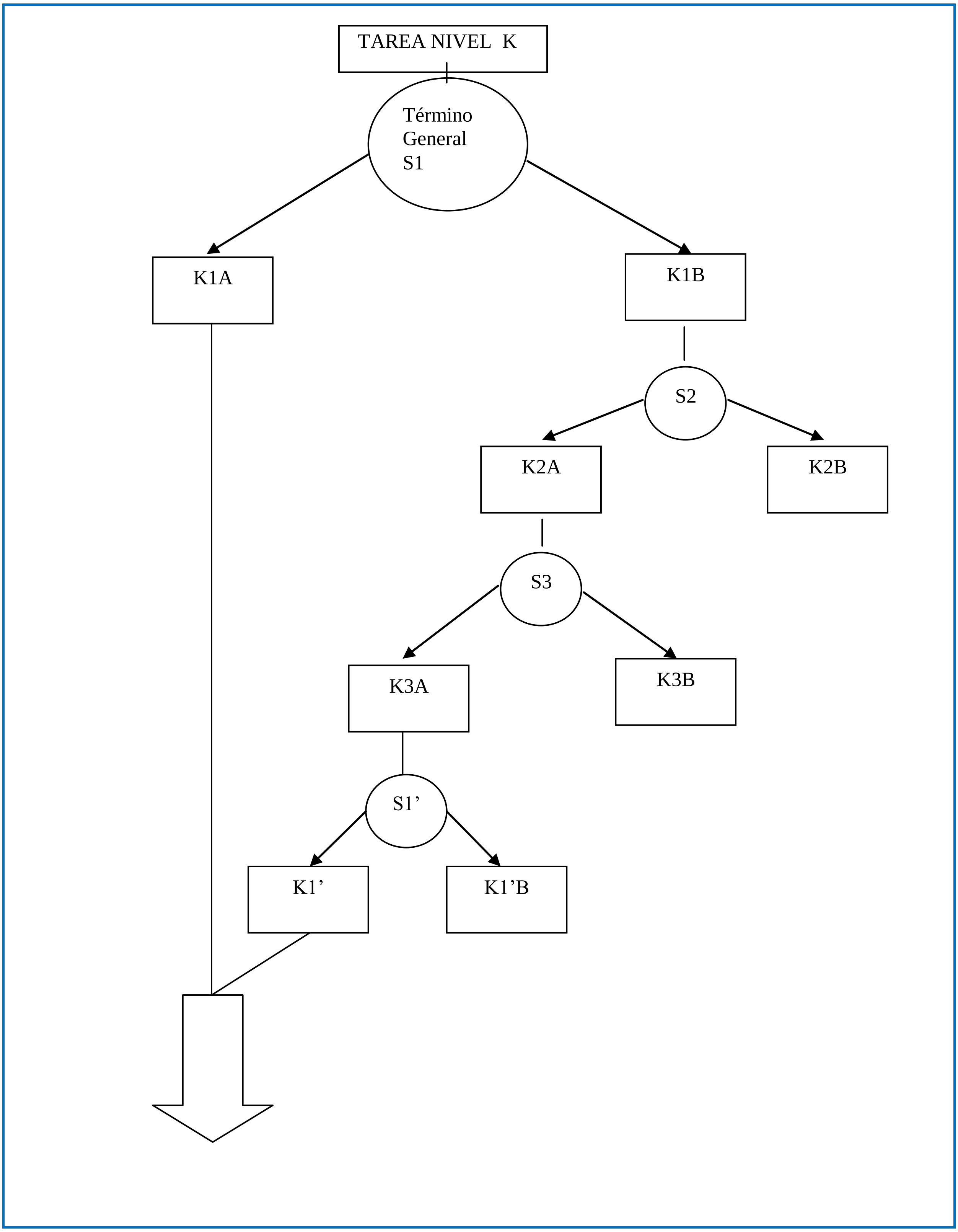


Figura IV. 1 Sistematización en las tareas realizadas para cada uno de los niveles del modelo teórico

Teniendo en cuenta las características lógico matemáticas del Nivel K y el método sistemático, anteriormente señalado en la figura IV.1; se determina la tarea asociada al mismo, perfilando las tres situaciones que la componen.

A continuación, y para cada uno de los niveles, veremos algunas consideraciones generales sobre las tres situaciones que conformarían la tarea asociada al mismo, la información que se pretende obtener con cada una de ellas y la justificación de las mismas desde el punto de vista de las características lógicas-ordinales del nivel.

Tarea asociada al Nivel II

Situación 1.- Es la situación de partida. A los estudiantes se les presentan los términos generales de series numéricas. Se tratará de comparar cuando la n esté acotada en una franja de pocos números (serie numérica finita), con la que no esté acotada (serie numérica infinita). Dicha comparación se realiza mediante el "modus operandi" cuando se establecen sendas correspondencias seriales entre dos series numéricas finitas (a la que hemos llamado "tramos"), y otra entre dos series infinitas básicas divergentes. La diferencian en pocos términos (menos de 10).

En este nivel se presentará series divergentes básicas que serían de la forma:

$$a_n = n + k, \;\; a_n = k.n$$

Situación 2.- Situación a la cual llegan aquellos estudiantes que no han superado con éxito la anterior tarea o bien no entendieron la pregunta o desconocían todo lo que conlleva el término general. Para ello, en esta situación se le explica en que consiste el término general y se le ayuda a elaborar la seria a partir de él, si fuera necesario; es decir, sino lograran generar los términos a partir del general, se les presenta las series desarrolladas para que las comparen.

Situación 3.- Situación a la cual llegan aquellos estudiantes que han superado con éxito la anterior situación. Se les presentan unas series muy parecidas a las de S1 para que la elaboren y comparen. En esta situación varía la estructura de la tarea. No aparecen los términos de las series, de este modo el alumno o alumna debe construirlos por sí solo.

Situación 1'.-Situación a la que llegan aquellos estudiantes que superaron con éxito la situación 1 o aquellos que superaron con éxito la situación 3.

En este caso la tarea será similar pero con una franja de número mayor en el caso de la serie numérica finita.

Aquellos estudiantes que no supieron diferenciar las series finitas de las infinitas después de todo este proceso, quedan catalogados en el Nivel I. Los que lo superan pasan a las siguientes tareas programadas.

Tarea asociada al Nivel III

La tarea la conforman situaciones similares a la anterior, tan solo que las series numéricas finitas la diferencian un mayor número de términos. Las series presentadas son las mismas que la de la tarea asociada al Nivel II, pero la diferencia entre los dos tramos, así como entre las dos series es de muchos términos (unos quinientos).

Las situaciones S2 y S3 presentan tareas con series divergentes iguales a la de la situación S1, pero con las mismas estructuras en la forma de presentar las tareas, de S2 y S3 del Nivel II.

En la situación 1', S1', la tarea será similar a la S1 pero con una franja de número mayor en el caso de la serie numérica finita.

Aquellos estudiantes que superan estas tareas con éxito llegando a la situación S1', pasan a las tareas asociadas al nivel siguiente. Aquellos que no lo superan con éxito quedan catalogados en el Nivel II

Tareas asociadas a Nivel IV

Situación 1.- Es la situación de partida. A los estudiantes se les presentan los términos generales de series numéricas. Se tratará de comparar cuando la n esté acotada en una franja de pocos números (serie numérica finita) con la que no esté acotada (serie numérica infinita).

En este nivel se presentarán series convergentes básicas que serían de la forma:

$$a_n = \frac{kn+1}{n} = \frac{1}{n} + k, \quad a_n = \frac{1}{n+k} \quad \text{y} \quad a_n = \frac{n}{n+k} = 1 - \frac{k}{n+k}$$

Las situaciones, que preceden, y en las que los estudiantes superan o no estas tareas, son similares a la expuesta en las tareas asociadas al Nivel II, pero ahora con series convergentes. Por tanto la situación S2 y S3 se presentan con las mismas estructuras en la forma de presentar las tareas que las situaciones S2 y S3 del Nivel II.

En la situación 1', S1', la tarea será similar a la S1, pero con una franja de número mayor en el caso de la serie numérica finita.

Aquellos estudiantes que superan estas tareas con éxito llegando a la situación S1', pasan a las tareas asociadas al nivel siguiente. Aquellos que no lo superan con éxito, quedan catalogados en el Nivel III.

Tareas asociadas a Nivel V

Estas tareas y situaciones son similares a la anterior, tan solo que las series numéricas finitas la diferencian un mayor número de términos (unos 500 términos). La situación 1 se presenta de la misma forma que en la situación 1 del Nivel IV con la diferencia anterior.

Las situaciones, que preceden, en los que los estudiantes superan o no estas tareas, son similares a la expuesta en las tareas asociadas al Nivel II, pero ahora con series convergentes. Por tanto la situación S2 y S3 se presentan con las mismas estructuras en la forma de presentar las tareas que las situaciones S2 y S3 del Nivel II.

En la situación 1', S1', la tarea será similar a la S1, pero con una franja de número mayor en el caso de la serie numérica finita.

Aquellos estudiantes que superan estas tareas con éxito llegando a la situación S1', se catalogan en el Nivel V. Aquellos que no lo superan con éxito, quedan catalogados en el Nivel IV.

5. *Propósito del estudio exploratorio*

Con esta parte de la investigación se pretende alcanzar los dos objetivos propuesto en el estudio exploratorio:

Establecer un primer modelo teórico evolutivo de competencia del número infinito mediante la comparación de series numérica, y comprobar empíricamente con estudiantes de Educación Secundaria (13-16 años) la utilidad y eficacia del modelo para describir su comportamiento real.

e

Identificar cada uno de los diferentes niveles de desarrollo en términos de estrategias y procedimientos relativos al conocimiento.

Para alcanzar los objetivos anteriores se ha de comprobar la bondad de la hipótesis:

Las estrategias utilizadas por los estudiantes de 13 a 16 años en la comparación de series finitas e infinitas, se pueden establecer en un modelo teórico de desarrollo que explica y describe la evolución del conocimiento del número infinito.

Previamente debemos construir la prueba que nos permita realizar el estudio empírico cualitativo deseado, es entonces cuando validaremos la hipótesis:

Es posible establecer pruebas para estudiantes de 13 a 16 años que formen parte de un diseño experimental cualitativo, constituidas por una serie de tareas que podemos ordenar de menor a mayor dificultad dependiendo de los esquemas implicados en cada una de ellas.

Y con ello se alcanzaría los objetivos anteriores.

6. *Metodología*

Se trata de una investigación empírica cualitativa basada en la recogida de información mediante una entrevista clínica semiestructurada y en el análisis cualitativo de los resultados.

En principio, a cada estudiante entrevistado se le propondrá la realización de cuatro tareas, una por cada nivel del modelo teórico, compuesta, a su vez, cada una de ellas por varias situaciones. Todas tienen en común el material concreto que sirve como soporte a la entrevista.

Aún teniendo las tareas un grado creciente de dificultad en cuanto están asociadas a niveles evolutivos de un modelo teórico, todas ellas parten del mismo material concreto, pues creemos conveniente que la dificultad esté en los esquemas lógicos matemáticos empleados para resolver las cuestiones planteadas y no en hacer variar un material que conllevaría, colateralmente, aspectos estructurales propios y ello haría variar la situación didáctica y dificultaría la evaluación del conocimiento que queremos ver aparecer en los estudiantes.

En el transcurso de la entrevista se provocará, intencionadamente, la interacción constante entre el entrevistador y el entrevistado, dependiendo el desarrollo de la misma de las respuestas de cada sujeto.

Las cuatro tareas de la prueba se pueden denominar de la siguiente forma:

1. Distinguen las sucesiones finitas[60] e infinitas en las que la diferencia es de pocos términos y primeros. Se infiere el número infinito versus número finito.
2. Distinguen las sucesiones finitas e infinitas en las que la diferencia es de mayor número de términos. Se infiere el número infinito versus número finito.

[60] Una sucesión es finita si determinamos su último término, por ejemplo el *i*-ésimo. Ej.: a_0, a_1,a_2,…a_n,…a_i donde a_n sería el término n-ésimo o término general.

3. Distinguen sucesiones finitas e infinitas en las que la diferencia con pocos términos iniciales. Se infiere el número infinito versus número finito.
4. Distinguen sucesiones finitas e infinitas en las que la diferencia con mayor número de términos iniciales. Se infiere el número infinito versus número finito.

Cada una de ellas presenta las características lógico-matemáticas propias de cada nivel del modelo evolutivo teórico, en este sentido presentan una jerarquización de menor a mayor dificultad en cuanto que los esquemas lógicos matemáticos implicados para su resolución sean más o menos evolucionados. Por ello, cuando un alumno o alumna no realiza dos tareas consecutivas de un mismo nivel, no se le pasa al siguiente.

Cada una de las tareas consta de tres situaciones, así para la tarea asociada al Nivel K las situaciones serían: S1, S2, S3 y S1'. Para el desarrollo de la entrevista, en cada una de las tareas, se sigue el esquema de la figura 4.1, en el que queda sistematizado el desarrollo de la prueba.

7. *Elección y distribución de la muestra*

De acuerdo con los propósitos de la investigación y teniendo en cuenta que éste es una aproximación al modelo evolutivo, la elección y distribución de la muestra es la siguiente:

1) Elegir sólo un centro de trabajo para realizar las pruebas.
2) La muestra de estudiantes para la realización del estudio empírico cualitativo sale sólo de este centro. El criterio para la elección de dicha muestra viene dado por una distribución por edades dentro de cada curso de los cuatro considerados en Educación Secundaria.

3) Los estudiantes que participan son elegidos entre aquellos que se ofrecen voluntarios para realizar la entrevista una vez que la investigadora es presentada a los estudiantes por sus profesores correspondientes. El sistema de elección es el siguiente: sorteo de los estudiantes voluntarios.

4) Se elegirán cinco o seis estudiantes por curso.

1º ESO: 5 estudiantes

2ª ESO: 5 estudiantes

3º ESO: 6 estudiantes

4º ESO: 6 estudiantes

En total 22 estudiantes.

5) Los estudiantes que se entrevistarán, son más alumnas que alumnos dadas las características históricas del centro.

8. *Materiales*

El material empleado en esta prueba consta de:

- Las fichas que se entregarán a los entrevistados.(Ver anexo IV)
- Aquellos estudiantes que lleguen alcanzar el Nivel IV, podrán utilizar la calculadora científica proporcionada por el entrevistador, dadas las características de las tareas asociadas a estos niveles.

9. *Actividades*

Se trata de una entrevista semiestructurada, y por ello es necesario especificar en el diseño previo tanto el contenido como los procedimientos (Cohen, 1990, citado en Fernández, 2001). Por tanto exponemos, a continuación, el objetivo pretendido, el desarrollo de la entrevista y el análisis de resultados que se verán en trabajos sucesivos.

9.1 Tareas

Las tareas consisten en lo siguiente:

1. Se trata de comparar dos pares de series numéricas: una finita y otra infinita. Las series presentadas son las básicas del tipo, $a_n = n + k$ y $a_n = k.n$, divergentes, donde de la segunda de cada tipo se le sustraen varios términos iniciales. Los estudiantes que superan con éxito estas tareas, pasan a las tareas del nivel siguiente; los que no lo superan con éxito, quedan catalogados en el Nivel I.
2. Se trata de comparar dos pares de series numéricas una finita y otra infinita. Las series presentadas, son las básicas del tipo, $a_n = n + k$ y $a_n = k.n$, divergentes, donde de la segunda de cada tipo se le sustraen una gran cantidad de términos iniciales. Los estudiantes que superan con éxito estas tareas, pasan a las tareas del nivel siguiente; los que no lo superan con éxito, quedan catalogados en este Nivel II.
3. Se trata de comparar dos pares de series numéricas: una finita y otra infinita. Las series presentadas son las básicas del tipo

$$a_n = \frac{kn+1}{n} = \frac{1}{n} + k, \quad a_n = \frac{1}{n+k} \quad \text{y} \quad a_n = \frac{n}{n+k} = 1 - \frac{k}{n+k}$$

convergentes, donde a la segunda de cada tipo se le sustraen varios términos iniciales. Los estudiantes, que superan con éxito estas tareas, pasan a las tareas del nivel siguiente; los que no lo superan con éxito quedan catalogados en el Nivel III.

4. Se trata de comparar dos pares de series numéricas una finita y otra infinita. Las series presentadas son las básicas del tipo,

$$a_n = \frac{kn+1}{n} = \frac{1}{n} + k, \quad a_n = \frac{1}{n+k} \quad \text{y} \quad a_n = \frac{n}{n+k} = 1 - \frac{k}{n+k}$$

convergentes, donde a la segunda de cada tipo se le sustraen una gran cantidad de términos iniciales. Los estudiantes, que superan con éxito estas tareas, son catalogados en el Nivel superior V; los que no lo superan con éxito, quedan catalogados en el Nivel anterior IV.

9.2 Objetivo

Con estas tareas se pretende estudiar la evolución de las competencias en el número infinito en los entrevistados y entrevistadas, mediante la comparación de series finitas e infinitas.

9.3 Desarrollo de la entrevista

A continuación expresamos como procederemos en las entrevistas para todas y cada una de las tareas asociadas a los niveles del modelo evolutivo teórico. El procedimiento general, según figura IV.1, es el siguiente:

Para cada uno de los niveles la tarea asociada conlleva a su vez tres situaciones. Para la situación S1 (situación inicial primera de la tarea K) se realizará una clasificación de respuestas atendiendo a que el alumno o alumna realizara o no la actividad. Si la realiza correctamente se analizará el tipo de estrategia y procedimiento seguido, si no lo hace entonces pasa a realizar la situación S2 (segunda de la tarea K). Si no realizara con éxito esta nueva situación se da por finalizada la tarea K, mientras que si la realiza correctamente entonces pasará a realizar la situación S3 (tercera de la tarea K). Si no realiza con éxito esta nueva situación se da por finalizada la tarea K, mientras que si la realiza correctamente entonces pasará a realizar una tarea similar a la situación S1 modificada, llamada S1'. Si la realizara correctamente, se analizará el tipo de estrategia y procedimiento seguido, si no lo hace entonces se da por finalizada la tarea.

En los apartados sucesivos, exponemos el procedimiento que seguiremos en el desarrollo de las entrevistas para cada una de las tareas asociadas a los niveles, así como el protocolo seguido.

9.3.1 Presentación esquemática del desarrollo de la entrevista para cada una de las tareas asociadas a los niveles

Considerando las características lógicas-matemáticas asociadas a las tareas y el procedimiento general señalado en el apartado anterior tenemos lo siguiente:

Tarea 1

Situación I1. Se le presenta al alumno o alumna la ficha 1, ver anexo IV. El investigador leerá junto al entrevistado esta ficha y le dirá que conteste a las preguntas que aparecen al final de la misma.

Se pueden presentar dos opciones con respecto a la resolución por parte del estudiante de la situación 1, que llamaremos I1A y I1B (I1 indica que estamos en la primera situación del primer nivel) y que son respectivamente: La resuelve y no la resuelve.

El investigador observa las distintas estrategias de los alumnos y alumnas que presentan la opción I1A.

Situación I2. Para los estudiantes de la categoría I1B se presenta la situación I2.Para ello, se le da las dos fichas de esta situación, ver anexo IV.

El investigador plantea:

FICHA 1º (series finitas) *En cada círculo de la primera hilera vamos escribiendo los números desde 1 hasta 10. En la hilera paralela escribiremos los números resultado de sumar 3 a los anteriores, de 1 hasta 7 en este caso. ¿Tienen el mismo número de elementos?*

FICHA 2º (series infinitas) *En cada círculo de la primera hilera vamos escribiendo los números desde 1 en adelante. Vemos que será imposible escribir todos los* *números, estaríamos toda la vida y más para ello, por eso hemos puestos estos puntos suspensivos. En la hilera paralela escribiremos los números resultado de sumar 3 a los anteriores, de 1 en adelante. Intenta corresponder cada elemento de la primera hilera con la de la segunda. ¿Tienen el mismo número de elementos?*

Se pueden presentar dos opciones con respecto a la resolución por parte del estudiante de la situación I2 que llamaremos I2A y I2B: la resuelve y no la resuelve

Los estudiantes de la categoría I2B no continúan con la prueba en lo referente a la tarea de este nivel. A los estudiantes de la categoría I2A les hacemos continuar con la situación I3.

Situación I3. Para los estudiantes de la categoría I2B se presenta la situación I3.Para ello, se le da las dos fichas de esta situación, ver anexo IV. Estas fichas tienen las mismas tareas que las anteriores diferenciando en que no están paralelas las hileras de círculos donde deben introducir los números de las series y la correspondencia deberán hacerlo ellos mismos sin ninguna ayuda o pista del investigador. Se plantea entonces, unas tareas más complejas que las anteriores pero más sencillas que las planteadas inicialmente.

El investigador plantea: *Haz lo mismo que en las fichas anteriores. Contesta al final a las preguntas que se plantean.*

Las opciones existentes respecto a la resolución son: I3A si la resuelve y I3B si no lo hace.

Los estudiantes de la categoría I3B no continúan con la prueba en lo referente a la tarea de este nivel. A los estudiantes de la categoría I3A les volvemos a pasar la situación I1 modificada, I1', ver fichas anexo IV: si las resuelven con éxito están en I1A entonces son estudiantes al menos del segundo nivel, pero si por el contrario están en I1B se quedan en el primer nivel considerado en el modelo evolutivo teórico.

Tarea 2

Situación II1. Se le presenta al alumno o alumna la ficha 1, de este nivel, ver anexo III. En este caso, como en el anterior en la misma situación, el estudiante tendrá que calcular los términos de las dos sucesiones a comparar. La diferencia entre este nivel y el anterior, es que en éste se diferencian más términos, unos 500.

El investigador leerá junto al entrevistado esta ficha y le dirá que conteste a las preguntas que aparecen al final de la misma.

Se pueden presentar dos opciones II1A y II1B, y se procede igual que en la tarea anterior.

Situación II2. Las tareas que se proponen en esta situación, son de la misma estructura que en las pasadas en el nivel anterior, es decir a modo de hileras de círculos paralelos, el estudiante tendrá que ir escribiendo cada término de las series. Por tanto, habrá dos pares, una para las series finitas y otra para las series infinitas. La diferencia con las anteriores, como ya dijimos, es que la diferencia es de muchos términos. Por tanto, es necesario que en las series finitas aparezcan puntos suspensivos tal como pasa con las series infinitas. Por tanto, el entrevistador planteará al estudiante porque aparecen esos puntos en estas series finitas. Todo lo demás se planteará como en la situación del anterior nivel.

Las opciones presentadas son II2A y II2B, y se procede como en la tarea anterior

Situación II3. Las tareas que se proponen son de la misma estructura que en las pasadas en el nivel anterior en esta misma situación con la diferencia que se explica en la situación II2, de los puntos suspensivos.

Las opciones existentes respecto a la resolución son: II3A si la resuelve y II3B si no lo hace.

Los estudiantes de la categoría II3B no continúan con la prueba en lo referente a la tarea de este nivel. A los estudiantes de la categoría II3A les volvemos a pasar la situación II1 modificada, II1', ver fichas anexo IV: si las resuelven con éxito están en II1A, entonces son estudiantes al menos del tercer nivel; pero si por el contrario están en II1B, se quedan en el segundo nivel considerado en el modelo evolutivo teórico.

Tarea 3

Situación III1. Se le presenta al alumno o alumna la ficha 1 de este nivel (ver anexo IV). Sigue siendo las mismas estructuras que las fichas anteriores en esta misma situación. Tal como se explicó, en este nivel se utilizan series numéricas convergentes en concreto $a_n = \frac{1}{n+k}$. El entrevistador planteará lo mismo que anteriormente.

Las dos opciones se denominarán III1A y III1B, y se procede como en tareas anteriores.

Situación III2. Para los estudiantes de la categoría III1A se presenta la situación III2, similar a las anteriores en esta misma situación, pero con series divergentes.

Se pueden presentar dos opciones: III2A y III2B, según la resuelvan o no respectivamente.

Los estudiantes de la categoría III2B no continúan con la prueba en lo referente a la tarea de este nivel. A los estudiantes de la categoría III2A les hacemos continuar con la situación III3.

Situación III3. Igual que la situación III1, pero en este caso con series convergentes. Las dos opciones son III3A y III3B, y se procede como en los casos anteriores.

Los estudiantes de la categoría III3B no continúan con la prueba en lo referente a la tarea de este nivel. A los estudiantes de la categoría III3A les volvemos a pasar la situación III1 modificada, III1' (ver fichas anexo IV): si las resuelven con éxito, están en III1A, entonces son estudiantes al menos del cuarto nivel; pero si por el contrario están en III1B, se quedan en el tercer nivel considerado en el modelo evolutivo teórico.

Tarea 4

Situación IV1. Similar a la situación III1, pero la diferencia entre este nivel y el anterior es que en éste se diferencian más términos, unos 500. Se pueden presentar dos opciones con respecto a la resolución por parte del estudiante de la situación IV1, que llamaremos IV1A y IV1B, según la resuelva o no.

Situación IV2. Similar a III2. Se procede igual que en la tarea anterior.

Situación IV3. Similar a III2. Se procede igual que en la tarea anterior.

Se pueden presentar dos opciones con respecto a la resolución por parte del estudiante de la situación IV3, que llamaremos IV3A y IV3B: que la resuelvan o no.

Los estudiantes de la categoría IV3B no continúan con la prueba en lo referente a la tarea de este nivel. A los estudiantes de la categoría IV3A les volvemos a pasar la situación IV1 modificada IV1': si las resuelven con éxito, IV1'A, entonces son estudiantes de este nivel, pero si por el contrario están en IV1B, son del cuarto nivel.

9.3.2 Aspectos protocolarios en el desarrollo de la entrevista

Toda vez que hemos visto el procedimiento en cuanto a su forma sistemática y esquematizada del desarrollo de las entrevistas en cada una de las tareas, es momento de indicar el formalismo y la parte protocolaria que hemos considerado.

El comienzo de las tareas de cada uno de los niveles en las entrevistas se realiza de la siguiente forma por parte del investigador (lo indicamos con la letra I):

TAREAS 1 (correspondiente a la Situación1)

E[61]. *Vamos a empezar con esta ficha. Primero leerá en voz alta la actividad A, la contestará; luego leerá la B, la contestará. Finalmente, responderá la pregunta que*

[61] Entrevistador.

se hace al final de la columna. Una vez terminado con ésta, se hará lo mismo en la columna de la derecha, C y D.

TAREAS 2 (correspondiente a la Situación 2)

E. *Se va hacer el mismo ejercicio, pero en esta ficha, donde se va a preguntar lo mismo que antes*, ahora *en vez de ser cuadraditos son círculos y tendrá que ir apuntando la serie que se pide. Observa que se han puesto los primeros términos. En A, para n igual a 1, es 1, y se ha puesto en el primer círculo. Para n igual a 2, es 2 (o ½ según la tarea), y se ha puesto en el segundo círculo. Debe continuar ahora, lo mismo, pero para B. ¿Ves la correspondencia que hay entre A y B? (Se lo señalo con el dedo). Pues bien, intenta responder la pregunta que te hace. Bien, pasemos a C y D. Como ves es muy parecido, lo único que se diferencia del anterior es que aparecen puntos suspensivos. Eso significa que seguirá adelante, que no vamos a poner todos los términos. Te he puesto de nuevo los primeros. Igual que en A, para n igual 1, es 1, te lo he puesto en el círculo primero, para n igual a 2, es 2, te lo he puesto en el segundo. Sigue tú. Ahora parece unos puntos suspensivos, eso significa que seguirán. Y este círculo vacío es para que tú pongas un término, que sea grande, por eso antes te he puesto esos puntos, para que halla diferencias entres estos valores. Yo te he puesto éste (1000). Lo mismo para D. ¿Ves la correspondencia entre C y D? (Se lo señalo con el dedo). Intenta ahora responder a la pregunta.*

TAREAS 3 (correspondiente a la Situación 3)

E. *Se va hacer el mismo ejercicio, pero en esta nueva ficha. Ahora te voy ayudar menos. Inténtalo hacerlo. Te digo igual que antes, observa bien la correspondencia entre los números que vas apuntando en A con los que vas apuntando en B. Responde las preguntas que se hace. Ahora lo mismo con C y D. Intenta ahora responder a la pregunta.*

TAREAS 4 (correspondiente a la Situación 1')

I. *Ahora terminamos, con la misma actividad, pero con el mismo formato inicial. Ahora sí que no te voy a decir nada.*

9.3.3 Aspectos a considerar

Pretendemos lo siguiente:

- Comprobar si el alumno o alumna es capaz de diferenciar los elementos de una serie mediante el término general. Relacionándolo con los puntos siguientes.
- Comprobar si el alumno o alumna establece relaciones lógicas-ordinales numéricas al comparar los términos de las series que ha tenido que construir previamente. Relacionarlo con los demás puntos de este apartado.
- Comprobar si el alumno o alumna reconoce la diferencia entre las series finitas cuando se le han extraído unas series de términos.
- Averiguar si el alumno o alumna reconoce la identidad cardinal entre las series infinitas cuando se le han extraído unas series de términos.
- Averiguar si el alumno o alumna es capaz de diferenciar los puntos anteriores, en series convergentes y divergentes.

10. Instrumentos y estrategias de recogidas de información

Para la recogida de datos hemos utilizado un instrumento común que ha sido la grabación en vídeo, además de un reproductor del mismo.

Con estos instrumentos hemos podido reproducir las entrevistas en su totalidad con todos aquellos detalles que de otra manera nos hubiera sido imposible de conseguir.

Una vez realizada todas las entrevistas se hace la trascripción de las mismas con ayuda del reproductor de vídeo (trascripción que puede verse en el anexo IV).

Además de las grabaciones, el investigador llevaba preparadas las fichas de actividades que se iban entregando al estudiante en el momento de la entrevista. De esa forma, también se registraron los datos por escrito.

11. Consideraciones generales sobre el desarrollo de la entrevista

Las entrevistas se realizaron en el mes de noviembre del curso 2004/2005. En el único colegio, "Huerta de la Cruz" en Algeciras.

Las entrevistas se realizaron a puerta cerrada en un despacho preparado para ello y pasando, uno por uno, todos los estudiantes seleccionados.

Cada entrevista tuvo una duración que osciló entre 20 y 30 minutos, por lo que, si tenemos en cuenta que no se permitieron interrupciones y que era obligado respetar el horario de los estudiantes, incluido el recreo, se realizaron entre 3 y 4 entrevistas diarias y por las tardes. Fueron necesarios 5 días.

Por último hemos de decir que todas las entrevistas tuvieron un desarrollo adecuado, incluso más satisfactorio de lo previsto, teniendo en cuenta la actitud positiva de los entrevistados y entrevistadas frente a una cámara de vídeo.

En los apartados que siguen hasta el final del capítulo, se exponen los resultados y conclusiones de dichas entrevistas teniendo en cuenta las tareas consideradas asociadas al modelo evolutivo.

12. Resultados y conclusiones de la prueba

Diremos que un alumno o alumna ha superado con éxito la tarea del Nivel K si realiza correctamente la situación S1 en cualquiera de sus dos presentaciones, es decir, si están en la categoría S1A. En el caso que un alumno o alumna se encuentre en esta situación se observará la estrategia seguida y se codificará con un número del 1 al 4 como se muestra en la tabla IV.1.

Vamos a considerar para todos los estudios realizados, que el alumno o alumna da la respuesta que se le asignará en las tablas correspondientes si la hace explícita al menos una vez en el transcurso de la entrevista.

12.1 Análisis de respuestas

En primer lugar [62] presentamos una tabla, que recogen las respuestas de cada uno de los estudiantes según las tareas, situaciones dentro de las tareas y, si procede, la estrategia utilizada.

Para la interpretación correcta de las tablas debemos tener en cuenta los siguientes puntos:

- Cada casilla de la primera fila indica que se va a evaluar la resolución de la tarea asociada al nivel correspondiente. Cuando se pasa de un nivel a otro en la tabla, la línea de separación entre columnas queda marcada por el grosor de la misma.
- Para cada una de las tareas asociada a un nivel, se consideran las situaciones que la determinan. Se empieza con la situación 1 y se termina con la misma. Esto se refleja en la segunda fila de las tablas.
- Cada casilla de la segunda columna indica las iniciales del nombre del alumno o alumna cuyas respuestas se registran en esa misma fila. Los números que aparecen a continuación de las iniciales expresan la edad.
- Los estudiantes están agrupados por edades prevaleciendo, cuando se pasa de un curso a otro en la tabla, la línea de separación entre filas queda marcada por el grosor de la misma.

[62] Para el análisis cualitativo de respuestas nos hemos basado en la metodología seguida en la validación del modelo evolutivo de competencias ordinales de C. Fernández (2001).

- Las casillas correspondientes a las coordenadas (i, Nivel K, 2)[63] se rellenan si aparecen en blanco las casillas (A, Nivel K, 1)[64]. Para cada estudiante la casilla (i, Nivel K, 3) se rellena si anteriormente ha sido marcada la casilla (A, Nivel K, 2). Análogamente se da esa misma situación entre las casillas (i, Nivel K, 1)[65] y (A, Nivel K, 3)
- Los recuadros de coordenadas (A, Nivel K, 1), con K variando entre II y V, indican que los estudiantes han superado el nivel que se indica en la terna.
- El número que aparece en las casillas sombreadas correspondientes a las coordenadas (A, Nivel K, 1), indica la estrategia seguida por el estudiante en la tarea asociada al nivel que se considera en la terna.

La codificación de las estrategias se registra en el siguiente cuadro:

Tabla IV. 1. *Codificación de las estrategias*

TAREAS ASOCIADA A LOS NIVELES	ESTRATEGIAS[66]
II	*1.* Ensayo y error. *2.* Contar. *3.* Comparar series. *4.* Razona sobre el nº infinito[67].
III	*1.* Ensayo y error. *2.* Contar. *3.* Comparar series. *4.* Razona sobre el nº infinito.
IV	*1.* Ensayo y error. *2.* Calculadora. *3.* Comparar series. *4.* Razona sobre el nº infinito.
V	*1.* Ensayo y error. *2.* Calculadora. *3.* Comparar series. *4.* Razona sobre el nº infinito.

Debemos puntualizar que, para cada uno de los niveles, las estrategias codificadas como *1* y *2* son propias de niveles inferiores, *3* y *4* corresponden a

[63] La primera componente de la terna, i,, toma los valores A ó B. Respecto a la segunda componente, la letra K varía entre II y V.
[64] El 1 que aparece en esta terna se refiere a la primera columna del Nivel K en la tabla.
[65] El 1 que aparece en esta terna se refiere a la cuarta columna del Nivel K en la tabla.
[66] Si el alumno o alumna utiliza más de una estrategia se denotará en la tabla de resultados los códigos que correspondan.
[67] Explican el porqué utilizando el concepto del infinito (siguen adelante, no acaban, no paran,...).

esquemas lógicos matemáticos propias de los niveles en cuestión o a niveles superiores.

Una vez realizadas todas las aclaraciones pertinentes pasamos a presentar la tabla de resultados de los estudiantes.

Tabla IV. 2. *Distribución de respuestas de cada estudiante por tareas, situaciones y estrategias asociadas a los niveles y por cursos*

			TAREA NIVEL II				**TAREA NIVEL III**				**TAREA NIVEL IV**				**TAREA NIVEL V**			
			1	2	3	**1’**	**1**	2	3	**1’**	**1**	2	3	**1’**	**1**	2	3	**1’**
1º CURSO	A. 12	A	*4*				*4*							*4*	*4*			
		B																
	C. 12	A																
		B																
	E. 12	A	*3*				*2*											
		B																
	P. 12	A	*4*				*4*							*3*	*4*			
		B																
	T. 12	A				*1*	*1*											
		B																

			TAREA NIVEL II				**TAREA NIVEL III**				**TAREA NIVEL IV**				**TAREA NIVEL V**			
			1	2	3	**1’**	**1**	2	3	**1’**	**1**	2	3	**1’**	**1**	2	3	**1’**
2º CURSO	P. 13	A				*2*												
		B																
	B.13	A																
		B																
	I. 13	A	*1*															
		B																
	M.13	A																
		B																
	I. 13	A																
		B																

			TAREA NIVEL II				TAREA NIVEL III				TAREA NIVEL IV				TAREA NIVEL V			
			1	2	3	**1’**	**1**	2	3	**1’**	**1**	2	3	**1’**	**1**	2	3	**1’**
3º CURSO	P. 14	**A**				*1*												
		B																
	T. 14	**A**				*1*												
		B																
	L. 14	**A**				*3*	*4*				*4*				*4*			
		B																
	MA. 14	**A**	*3*				*3*							*4*	*4*			
		B																
	A. 14	**A**																
		B																

			TAREA NIVEL II				TAREA NIVEL III				TAREA NIVEL IV				TAREA NIVEL V			
			1	2	3	**1’**	**1**	2	3	**1’**	**1**	2	3	**1’**	**1**	2	3	**1’**
4º CURSO	B.15	**A**				*3*	*3*				*3*				*3*			
		B																
	A.15	**A**				*3*	*3*				*3*				*3*			
		B																
	R.15	**A**																
		B																
	C.15	**A**																
		B																
	G.15	**A**	*2*				*2*											
		B																

De acuerdo con el grado creciente de dificultad de los esquemas lógicos matemáticos implicados, en lo que sigue interpretaremos las respuestas de los estudiantes desde los esquemas más evolucionados hasta los menos. Para ello, analizaremos los casos que se dan en las tablas denominándolos por sus coordenadas.

A. Realizar con éxito la tarea asociada al Nivel V: (V1A) ó (V1B,V2A, V3A, V1’A)

Si el alumno o alumna ha superado la tarea asociada al Nivel V con la estrategia más evolucionada, quiere decir que es capaz de diferenciar el número infinito del finito mediante series numéricas tanto convergentes como divergentes. En esta situación nos encontramos a: (V1A), como es el caso de: L (14), M (14).

Observamos que no hay ningún alumno o alumna en este nivel que lo haya realizado mediante el camino: V1B, V2A, V3A, V1'A.

Si el alumno o alumna es capaz de superar la tarea asociada al Nivel V, pero usando estrategias menos evolucionadas, caso que no hemos encontrado, significará que estarán en un subnivel y muy posiblemente no superarían niveles superiores en tareas asociadas de series más complejas.

B. Realizar con éxito la tarea asociada al Nivel IV: (IV1A) ó (IV1B ,IV2A, IV3A, IV1'A)

En este caso consideraremos los estudiantes que han superado con éxito la tarea asociada al Nivel IV, son estudiantes que en sus tablas correspondientes se dan las coordenadas:

(IV1A), como es el caso de: B (15), A (15) Estos estudiantes superaron con éxito esta tarea y en esta ocasión utilizando estrategias superiores.

(IV1B, IV2A, IV3A, IV1'A), como es el caso de: MA (14), A (12). Éstos utilizaron calculadora para llegar a la solución.

No es significativo que haya superado la tarea de la segunda ocasión que se presenta, ya que la mayoría realizaron con éxito la tarea asociada al nivel superior. Por otro lado, dada la dificultad de las tareas asociadas a este nivel, donde las series eran convergentes, los estudiantes del primer ciclo de secundaria y algunos de tercero desconocían como construir la serie a partir del término general.

Si es significativo que aunque ningún alumno o alumna pensó que las series infinitas que se presentaban tenían un límite cero, el entrevistador insistió a todos en este nivel que utilizaran el cálculo de los términos (incluso con calculadora si fuera necesario), para que observaran la tendencia que tendría la serie. Ninguno de los entrevistados llegaron a la conclusión que tenía un límite y en su caso una cota (último elemento) y que pensaran a posteriori que las series podrían ser distintas.

C. Comparación de respuestas de las tareas asociadas a los Niveles V y IV

Todos los estudiantes que realizaron con éxito las tareas asociadas al Nivel IV, superaron con éxito la del Nivel V. Es significativo indicar que las estrategias utilizadas en estos dos niveles eran las mismas o superiores en el Nivel V. Esta observación será objeto de estudio futuro.

Las consideraciones realizadas en estos tres puntos anteriores nos llevan a las siguientes conclusiones:

Los estudiantes de este nivel tienen la capacidad de determinar el número infinito mediante la comparación de cualquier tipo de series numéricas que se diferencian en "muchos" o "pocos" términos.
Tienen un dominio operatorio que junto al esquema lógico-matemático de "último elemento" hacen que quede interiorizado el concepto de número infinito.

D. Realizar con éxito la tarea asociada al Nivel III: (III1A) ó (III1B, III2A, III3A, III1'A)

Empezamos el análisis con los estudiantes que de primera instancia han resuelto la situación III1 de la tarea asociada al Nivel III.

Entre los estudiantes que están en esa situación nos encontramos con los que superan la tarea con estrategias:

(4) Como es el caso de A (15) y M (14). De (3), caso de B (15). Como el (2), E (12) y (1) como el estudiante T (12).

Podemos observar que sólo los estudiantes que utilizaron estrategias superiores, realizaron con éxito las tareas de niveles superiores.

Por la vía (III1B, III2A, III3A, III1'A), no hemos encontrado ningún alumno o alumna que lo haya superado con éxito por este camino.

Estas consideraciones nos llevan a las siguientes conclusiones:

Los estudiantes de este nivel, usan el esquema lógico-matemático de “último elemento” para diferenciar las series finitas de las infinitas.

E. Realizar con éxito la tarea asociada al Nivel II: (II1A) ó (II1B, II2A, II3A, II1’A)

Los estudiantes que han superado con éxito la tarea asociada al Nivel II, son estudiantes que en sus tablas correspondientes se dan las coordenadas:

(II1A), como es el caso:

(4) Caso de A (12). Del (3), como el estudiante M (14). Como (2),caso de G (15) y del (1), M (15).

Podemos de nuevo observar que aquellos estudiantes que utilizaron estrategias inferiores, no superaron con éxitos las tareas de niveles superiores.

(II1B, II2A, II3A, II1’A), como es el caso de P (13), P (12).

No es significativo obtener con éxito la tarea en este nivel mediante esta vía, debido sobre todo al poco o ningún conocimiento que tienen los estudiantes de estas edades en series numéricas y su construcción a partir del término general.

Tenemos lo siguiente:

Los estudiantes del Nivel II presentan esquemas lógicos-matemáticos relacionados con “clases extensivas” y “número infinito versus número finito”, pero pueden aparecer limitadas.

F. Comparación de respuestas de las tareas asociadas a los Niveles, II, III, IV y V

Los estudiantes que superaron con éxitos los niveles inferiores con estrategias superiores, superaron con éxito las tareas de niveles superiores.

Observamos que aquellos estudiantes que han superado con éxito las tareas asociadas a un nivel mediante el procedimiento S2, S3, S1’, si resuelven con éxitos las tareas de niveles superiores lo hacen mediante S1. Esta observación será objeto de estudio futuro.

Indicar que todos los estudiantes entendieron la interpretación de los puntos suspensivos que aparecían en las series, incluso distinguían aquellos q indicaban elementos finitos (entre dos términos) de los infinitos (siguen adelante).

12.2 Niveles asociados al modelo evolutivo teórico

Pretendemos determinar los perfiles de los estudiantes que conforman una categoría determinada, atendiendo a que en la prueba del estudio empírico cualitativo, que estamos realizando, hayan sido capaces de realizar o no la tarea asociada a un Nivel K del modelo evolutivo.

Para ello consideraremos la tabla IV.3 siguiente que sintetiza los resultados de la tabla IV.2 del punto anterior. Previamente, aclararemos que:

- ✓ Cada casilla de la primera fila indica la tarea asociada a un nivel.
- ✓ Cada casilla de la segunda columna indica las iniciales del nombre del alumno o alumna y su edad.
- ✓ Las líneas horizontales más señaladas, diferencian un curso de otro.
- ✓ Cada casilla marcada de una fila y columna dadas, representará que el alumno o alumna de esa fila ha superado la tarea asociada al nivel correspondiente de esa columna.
- ✓ Si la casilla del Nivel II está en blanco, es decir, que el alumno o alumna no ha conseguido superar la tarea de este nivel con éxito, se considera que está situado en un nivel inferior, el Nivel I.

Tabla IV. 3. *Distribución de respuestas por tareas asociadas a los niveles de los estudiantes*

			II	III	IV	V
Colegio Concertado "Huerta de la Cruz"	1° CURSO	A. 12				
		C. 12				
		E. 12				
		P. 12				
		T. 12				
	2° CURSO	P. 13				
		B. 13				
		I. 13				
		M. 13				
		I. 13				
	3° CURSO	P. 14				
		T. 14				
		L. 14				
		MA. 14				
		A. 14				
		M. 14				
	4° CURSO	B. 15				
		A. 15				
		R. 15				
		C. 15				
		G.15				
		M. 15				

De la observación de las tablas podemos decir que todos los estudiantes que han realizado con éxito la tarea asociada al Nivel K del modelo evolutivo, realizan correctamente todas las tareas asociadas a niveles inferiores. Este hecho se visualiza en las tablas de la siguiente forma: si consideramos una casilla marcada cualquiera, entonces están marcadas todas las que se encuentran a la izquierda de la misma, y si por la derecha aparece una casilla en blanco entonces todas las que le siguen, por la derecha, están también en blanco; es decir, dada una fila cualquiera, no encontramos casillas en blanco entre casillas marcadas, no hay huecos.

Todo ello contribuye a confirmar que la prueba que estamos considerando ha funcionado en el sentido que los esquemas lógicos matemáticos implicados en los niveles del modelo teórico están escalonados de menor a mayor dificultad y la realidad empírica lo corrobora. Por tanto, podemos categorizar a los estudiantes en niveles crecientes evolutivos, en los que en cada nivel se perfilan unas características lógicas matemáticas propias de cada uno de los niveles del modelo teórico. En este sentido, los niveles quedan definidos como sigue:

Nivel I. Los estudiantes de este nivel son los que no consiguen realizar con éxito tareas asociadas al Nivel II.

Nivel II. Aquí se encuentran aquellos estudiantes que consiguen realizar con éxito tareas asociadas al Nivel II del modelo evolutivo y no realizan las propias del Nivel III.

Nivel III. En este nivel están los estudiantes que realizan correctamente tareas asociadas a los Niveles II y III del modelo evolutivo, pero no logran las propias del Nivel IV.

Nivel IV. Los estudiantes de este nivel son los que logran la realización correcta de las tareas propias de los Niveles II, III y IV del modelo evolutivo, y no hacen lo mismo con tareas del Nivel V.

Nivel V. Pertenecen a este nivel todos aquellos estudiantes que realizan tareas asociadas a los Niveles II, III, IV y V del modelo evolutivo.

13. Conclusiones evolutivas del estudio exploratorio

Uno de los propósitos de este estudio era caracterizar y justificar los resultados de la prueba asociada al modelo evolutivo, y dar significado a los comportamientos generales encontrados, así como a los procedimientos, destrezas y estrategias que los estudiantes de Educación Secundaria utilizan para comparar y diferenciar número finito de número infinito. Dicha caracterización es:

***<u>Nivel I</u>*.**

Se caracterizan porque son capaces o no de etiquetar los elementos de una serie numérica diferenciándolos unos de otros, pero sin establecer comparaciones entre ellos y si lo hacen sin encontrar diferencias.

<u>Nivel II</u>.

Se caracterizan porque además de construir las series numéricas convergentes infinitas, saben diferenciarlas sustrayendo un número pequeño de elementos y primeros.

Reconocen el número infinito en la comparación de dos series básicas infinitas divergentes, cuando la diferencia entre amabas series es de pocos términos y primeros.

<u>Nivel III</u>.

La característica fundamental es que saben distinguir las sucesiones infinitas en las que la diferencia es de mayor número de términos.

Reconocen el número infinito en la comparación de dos series básicas infinitas divergentes cualesquiera.

<u>Nivel IV</u>.

Sus características son que construyen tanto series finitas como infinitas y diferencian éstas con pocos términos iniciales.

Reconocen el número infinito en la comparación de dos series básicas infinitas convergentes cuando la diferencia entre ambas series es de pocos términos y primeros.

Nivel V.

Se caracterizan porque saben distinguir sucesiones finitas e infinitas en las que la diferencia con mayor número de términos iniciales.

Reconocen el número infinito en la comparación de dos series básicas convergentes cualesquiera.

Como última observación, debemos hacer notar lo que ocurre en el Nivel V en cuanto que, los estudiantes, que alcanzan ese nivel, son los que resuelven la tarea asociada al Nivel IV con estrategias superiores.

Como conclusión final a todo el estudio empírico realizado hemos de confirmar las hipótesis. Se alcanzan con ello los objetivos, además del objetivo complementario indicados en el apartado 6, propósito del estudio exploratorio del presente capítulo.

CAPÍTULO V

ESTUDIO DEL INFINITO ACTUAL SIGUIENDO EL MODELO DE INCLUSIÓN DE BOLZANO

1. Introducción

En el estudio epistemológico que hemos realizado en el capítulo III, análisis didáctico, hemos centrado nuestra atención en la noción del infinito actual en el periodo crítico de la fundamentación de las matemáticas que se origina con los trabajos de Bolzano, precursor de la actualización del infinito, y a partir de de este los trabajos de Cantor y posteriormente los de Russell.

Entre Bolzano y Cantor hay diferencias esenciales en las teorías de conjuntos para llegar a definir el concepto del infinito. Es en esto último donde fijamos la atención. Mientras que la comparación y correspondencia que hace Cantor (uno –a-uno) es de exclusión (compara el conjunto de números naturales que es infinito numerable con otros conjuntos), la relación en Bolzano es de inclusión enfatizando la relación parte-todo y estableciendo una comparación dentro del propio conjunto.

Mientras que el capítulo VII se basa en el primer criterio de Cantor para la construcción de un modelo evolutivo del pensamiento, nuestro presente estudio lo hace en el criterio de Bolzano. Nuestro objetivo en este: será corroborar con una experiencia física lo que Waldegg (2005, citado en Fuenlabrada & Armella, 2008) argumenta sobre el criterio de Bolzano: es más “intuitivo” porque es más cercano a experiencias concretas (finitas) y además “menos paradójico”.

De ahí el estudio que realizarán Moreno & Waldegg (1991, citado en Fuenlabrada & Armella, 2008) analizando las dos primeras etapas de la triada piagetiana (intra- e inter-) en la evolución conceptual del término con los trabajos de Bolzano y Cantor. Además mostraron las dificultades de los estudiantes para lograr estas etapas dadas en la estructura curricular.

2. *Propósito del estudio*

Con esta parte de la investigación se pretende alcanzar los siguientes objetivos expuestos en el capítulo I:

O1. Delimitar el conocimiento del infinito actual dentro del marco general de las matemáticas.

O2. Delimitar el infinito actual dentro de todos los posibles contextos: comparación de conjuntos.

O3. Delimitar el infinito actual en la transmisión escolar.

Junto a estos también se pretenden conseguir el objetivo complementario siguiente:

C1. Introducir el método de comparación con la relación de inclusión y con la ayuda de la experiencia física como iniciación al aprendizaje del infinito.

C4. Comprobar la utilidad del análisis didáctico para fundamentar y contextualizar investigaciones en Educación Matemática.

Para alcanzar los objetivos anteriores se ha de comprobar la bondad de la hipótesis H3:

H3. Es posible tomar un modelo físico experimental como tarea para examinar el razonamiento en la cardinalidad de conjuntos infinitos.

3. Marco Teórico

3.1 El infinito actual con la comparación de conjuntos en Bolzano

La forma de abordar el concepto de infinito en Bolzano, tal como lo hace también Cantor, es con la noción de conjunto. Diferencia los siguientes términos de *agregado*, *conjunto* y *multitud*, antes de definir conjuntos finitos. A partir de estos, definirá el conjunto infinito para, posteriormente, ver la posibilidad de recapacitar al infinito actual como calificativo y no como sustantivo de algunas colecciones.

Define *agregado* como todo compuesto de elementos bien definidos. Especifica que hay agregados que coinciden, es decir, poseen los mismos miembros y, a su vez, se diferencian en algunos aspectos (a esas diferencias las llamó *esenciales*).

Llama *conjuntos* a aquellos *agregados* en los que es indiferente la forma de combinación y cuyas permutaciones no causan cambios fundamentales. Puntualiza que un conjunto es un agregado que muestra cierta característica de la cual se prescinde.

Por último describe *multitudes,* a partir de esta última definición, como aquellos conjuntos cuyos miembros son individuos que pertenecen a una misma especie.

Aclarado estos términos, define conjuntos finitos mediante la siguiente proposición:

> Pensemos en una serie cuyo término es un elemento del tipo *A*, en la que todo sucesor se deriva de su predecesor, de tal manera que tomando un objeto igual a él lo relacionamos con otro elemento del tipo *A* en una suma. Es entonces evidente que todos los términos que aparecen en esta serie –con excepción del primero que es únicamente un elemento del tipo *A* –serán multiplicidades a las que llamaré *finitas* o *numerables* o de manera algo audaz: números y, más específicamente, números enteros (que incluirían el primer término). (Bolzano, 1851/1991, p. 43)

Es una construcción inductiva del conjunto de los números naturales: a partir del *1* y utilizando el término de “sucesor” (cada elemento del conjunto se crea como una multitud finita, es decir, cada número será formado por unidades mediante un proceso bien establecido). Nos ha proporcionado modelos de colecciones finitas.

A partir del concepto conjunto finito, Bolzano define conjunto infinito:

> En particular, puede haber tantos términos que si la serie ha de agotar (incluir a) todos los elementos, no puede tener un *último término* (…). Suponiendo esto, por el momento, llamaré *infinita* a una multiplicidad, si todo conjunto finito es tan solo una parte de ella. (Bolzano, 1851/1991, p. 44)

Observamos que la forma de definir infinito no es la que tradicionalmente se estuvo haciendo como la negación de lo finito, aunque en su introducción menciona lo infinito como lo que contrapone a lo finito. El infinito es un atributo de los conjuntos y definen estos a partir de conjunto finito. El infinito actual no puede existir sino como un atributo de una colección infinita (Fuenlabrada & Armella, 2008).

Estos párrafos y el siguiente:

> Una cantidad verdaderamente infinita (…) no es necesariamente variable (…). Por otra parte, una cantidad que solamente puede ser considerada como algo que es siempre mayor que cualquier cantidad (finita) dada, es capaz de conservar su carácter de cantidad finita, tal y como ocurre con las cantidades numéricas *1, 2, 3, 4,* ….(Bolzano, 1851/1991, p.45)

Bolzano atribuye el concepto de infinito actual a una multitud, no ve la posibilidad de recapacitar al infinito como sustantivo, sino como calificativo de algunas colecciones. Suprime la manera de pensar en el infinito como sinónimo de no acotado o como valor que crece sin límite.

En el siguiente párrafo Bolzano discute de forma objetiva la existencia de conjuntos infinitos:

> Una vez que nos hemos puesto de acuerdo en cuanto al concepto que queremos asociar con la palabra *infinito* y tras haber distinguido claramente sus partes constitutivas, se

plantea como siguiente problema la cuestión de su objetividad, la pregunta si tiene o no una existencia objetiva. (…) Me atrevo a decir que la respuesta es definitivamente *afirmativa* (…). *El conjunto de las proposiciones* y de las verdades en si es claramente infinito. (Bolzano, 1851/1991, p.50)

Utiliza, de nuevo, el método inductivo para la construcción de conjuntos infinitos. Establece una comparación biunívoca entre tal conjunto infinito y el conjunto de números enteros y de ahí demuestra que el conjunto así construido es infinito:

Porque cuando consideramos una verdad cualquiera *A* (por ejemplo, la proposición "existen verdades" o cualquier otra) descubrimos que la proposición expresada por la frase "*A* es verdadera" es algo distinto a la proposición *A* misma, pues, obviamente, el sujeto de ambas es diferente: el sujeto de ella misma. De manera análoga a como derivamos a partir de *A* una proposición distinta *B* podemos, a partir de esta obtener otra proposición *C*, diferente tanto de *A* como de *B* y así sucesivamente en un proceso sin fin.

(…) Si fijamos nuestra atención en una verdad cualquiera tomada al azar, digamos la proposición "existen verdades", llamada *A*, encontramos que la proposición compuesta por las palabras "*A* es verdadera" es distinta de la proposición *A*, puesto que *A* es el sujeto de la nueva proposición. A la nueva proposición la llamamos *B*. A continuación podemos formar la proposición "*B* es verdadera" y continuar de este modo generando una lista de proposiciones sin fin (…).

Esta analogía[68] consiste, en realidad, en que para cada elemento de la serie de los números existe un elemento correspondiente en la serie de las proposiciones descrita; y por tanto, para cualquier número entero (…) existe un número igual de proposiciones distintas entre sí. Por último, podemos continuar indefinidamente el proceso de construcción de proposiciones siendo posible siempre generar nuevas proposiciones

[68] Analogía existente entre la serie de estas proposiciones, obtenida con la ley de construcciones enunciada, y la serie de los números del párrafo p. 43.

(…) De todo ello se sigue que el agregado de todas las proposiciones mencionadas posee una multiplicidad que supera cualquier número; es decir, que la multiplicidad de ese agregado es infinita. (Bolzano, 1851/1991, pp.50-51)

Bolzano concluye con el párrafo anterior que el conjunto de los números enteros es infinito y por tanto la existencia de estos:

Considero suficiente la exposición y defensa que aquí se ha hecho de que existen los conjuntos infinitos; por lo menos los de objetos que no tienen realidad; en particular, el conjunto de todas las verdaderas absolutas es infinito. (…) podemos aceptar que el conjunto de *todos los números* (de los llamados naturales o enteros (…) es también infinito. (Bolzano, 1851/1991, p.57)

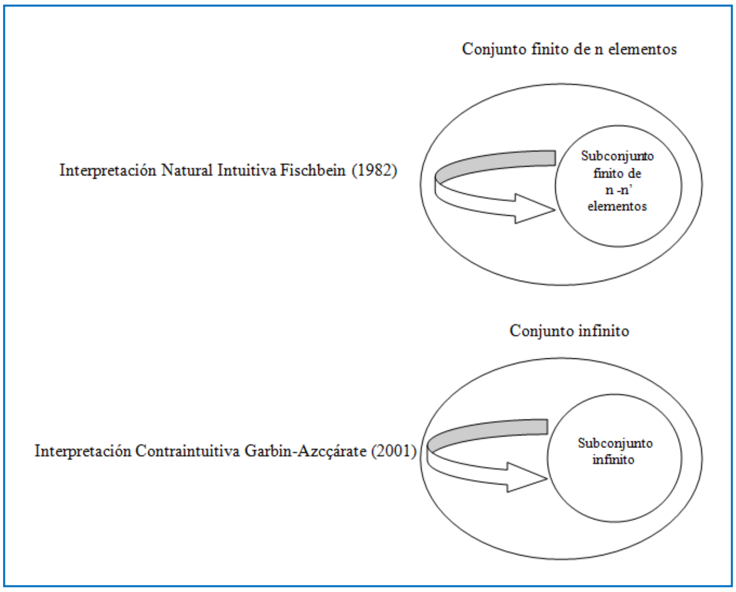


Figura V. 1. Esquema comparación de conjuntos mediante el método de inclusión de Bolzano

3.2 Relación de la etapa intra-objetal piagetiana[69] con la conceptualización del infinito actual en Bolzano

La conceptualización en Bolzano se estableció mediante la comparación de conjuntos infinitos en función de dos criterios de comparación: por un lado con la

69 Primera etapa en el marco de trabajo piagetiano donde argumenta la validez para extraer conclusiones de una comparación entre la psicogénesis de un concepto y el de su propia historia, (Piaget & García, 1982).

correspondencia uno-a-uno y la relación parte-todo. De estos dos Bolzano enfatizó en este último, basándose en las relaciones de inclusión (diferencia fundamental con la establecida por Cantor, correspondencia uno-a-uno, analizada también en el capítulo III).

Moreno & Waldegg (1991, citado en Fuenlabrada & Armella, 2008) justifican las relaciones conjuntistas dadas por Bolzano y consideran que son relaciones de tipo intra-objetal en varios puntos:

a) Bolzano facilitó una definición para la comparación entre conjuntos infinitos como el predecesor directo para el establecimiento de funciones uno-a-uno caracterizado por Cantor, pero esta comparación no da origen a transformaciones al no definir operaciones conjuntistas que originen un nuevo conjunto.

b) Los criterios de comprobación son su mayor parte empíricos.

c) No existe evidencia de conservación, entendido en el sentido piagetiano.

d) Si existe evidencia de un cierto grado de transitividad en las relaciones utilizadas por Bolzano para la comparación, no obstante, hay que puntualizar que son limitadas.

Si comparamos los enfoques de Bolzano y Cantor, la diferencia principal se puede manifestar en términos del objeto del estudio y en sus aspectos, donde se centraliza la atención:

- Si para Bolzano su foco de atención se encontraba en cada uno de los conjuntos infinitos y era dentro de ellos donde se podría constituir sus comparaciones, para Cantor se basaba su criterio de comparación en la relación biyectiva entre los conjuntos distintos que comparaba.

- Si para Bolzano el foco de estudio era la comparación dentro del mismo conjunto de aquellos que atañen a sus subconjuntos infinitos propios, de ahí que no pueda fragmentar conjunto para compararlo con su subconjunto ya que la naturaleza misma estaba en la inclusión misma, para Cantor se encontraba en las relaciones que se podrían constituir entre los diferentes conjuntos.
- Mientras la delimitación del objeto de estudio lo alcanza Bolzano con el concepto de conjunto, Cantor será en las relaciones.

Por todo ello, Bolzano muestra características de la etapa intra-objetal y Cantor de la etapa inter-objetal del desarrollo histórico del concepto.

4. Fenómeno físico de la reflexión en espejos paralelos

Consideremos un espejo y situemos un objeto *O* a una distancia *a* del pie del mismo. La imagen que se produce estará situada a una distancia *a* del pie del espejo.

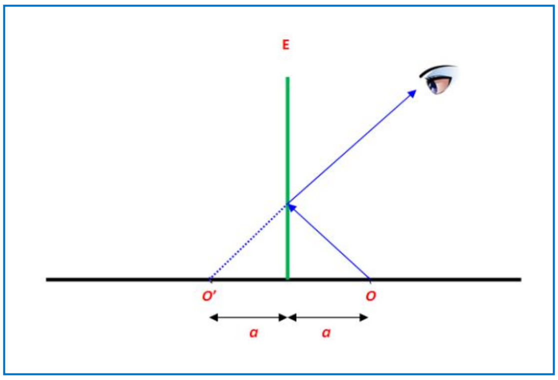


Figura V. 2. Reflexión de un objeto en un espejo

Supongamos ahora, dos espejos planos y paralelos, E_1 y E_2, cuyas caras reflectoras están orientadas hacia el objeto que se encuentra entre ambos. Situemos un observador entre ellos hacia *A*. Este verá un número de imágenes tanto mayor cuanto más largos sean los espejos o cuanto menos inclinado sea el ángulo de observación con respecto a la horizontal.

Un objeto luminoso insertado entre estos dos espejos da origen en cada uno de ellos a un primera imagen convirtiéndose en objeto luminoso para los demás espejos respectivamente, crean dos imágenes nuevas más lejanas que las primeras, que a su vez crearán otras nuevas y así indefinidamente. Para el ojo situado convenientemente verá una infinidad de imágenes que serán cada vez más débiles debido a las pérdidas que hacen sufrir a la luz en cada reflexión sucesiva.

Ópticamente lo aclara Santiago (2001), el rayo luminoso como R_1 es reflejado por el espejo E_1 como si procediera de la imagen O_1' simétrica de O con respecto al plano E_1. Posteriormente se encuentra el segundo espejo E_2 donde se refleja de nuevo como si procediera de la imagen O_1' producida por E_2, es decir, de $O_{1,2}'$ en el espejo E_1 y por consiguiente, de $O_{1,2,1}'$; una reflexión puede producirse sobre E_2, etc. Pero por otro lado, hay una segunda serie, un rayo R_2 que incida primeramente sobre el espejo E_2 se alejaría como si procediera de la imagen $O_{2,1,2}''$, etc.

Las imágenes formadas están alineadas sobre una misma recta perpendicular a los lados de los espejos que pasan por O.

Las imágenes están dispuestas alternativamente de cara y de espalda, las distancias entre ellas son alternativamente $2a$ y $2b$ siendo a y b las distancias del objeto O con respecto a los pies de los espejos E_1 y E_2, respectivamente.

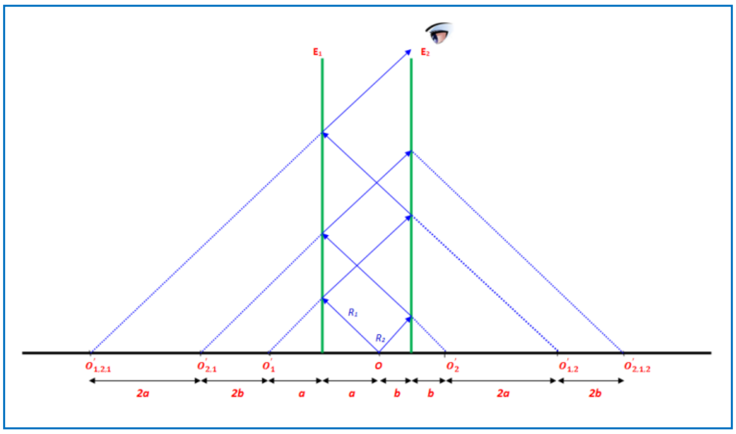


Figura V. 3. Reflexión de un objeto en dos espejos paralelos

5. *Uso de la experiencia física en nuestro problema de investigación*

Pretendemos utilizar los dos fenómenos de reflexión, detallados en el apartado anterior, de experiencias con los alumnos y alumnas para indagar sobre el cardinal infinito siguiendo el criterio de Bolzano; donde el foco de estudio era la comparación dentro del mismo conjunto y mediante una relación de inclusión.

Queremos desde su inicio que esta experiencia sea constructiva inductiva para que se asemeje todo lo posible con las experiencias que se realizan en el modelo evolutivo detallado en el capítulo VI.

5.1 Metodología

Podemos diferenciar, metodológicamente en la evaluación empírica, dos pasos:

PRIMER PASO: Construcción del patrón Construcción de un patrón evolutivo[70] de competencias, como consecuencia de los siguientes elementos básicos.

- Realización de un análisis didáctico que fundamenta el significado del patrón y su estructuración, así como la racionalidad del mismo.
- Realización de una prueba piloto[71] con 24 alumnos y alumnas en la que se confirma la existencia de regularidades en el comportamiento real y efectivo de los estudiantes al enfrentarse a tareas exclusivamente de comparación de conjuntos finitos e infinitos. Este estudio pone en evidencia el razonamiento de los estudiantes utilizando para ello diferentes tipos de estrategias que pueden escalonarse, desde el punto de vista evolutivo, de menor a mayor complejidad. Por otro lado, la ejecución de esta prueba piloto nos aporta un perfeccionamiento en el artilugio de los espejos. Estas mejoras que se realizan no serán una ventaja para el resto de los alumnos y alumnas, sino que facilita el

[70] Para diferenciarlo del modelo evolutivo del capítulo VI.
[71] Para diferenciarlo del estudio exploratorio del capítulo IV realizado para la validación empírica del modelo evolutivo.

proceso de la entrevista.

- Los conocimientos sobre modelos evolutivos en el ámbito de la educación matemática que sirven de referentes para la construcción de uno nuevo (Ortiz, 1997, y Fernández, 2001).

SEGUNDO PASO: Confirmar la bondad del patrón Se realizan entrevistas clínicas semiestructuradas para desarrollar un estudio cualitativo con los siguientes propósitos:

- Los alumnos y alumnas se pueden organizar y categorizar en estados evolutivos, asociados cada uno de ellos a un estado del patrón teórico, atendiendo a las distintas estrategias que utilizan. En cada estado se darían las características propias del estado del modelo asociado.
- Probar que alumnos y alumnas del mismo curso de Educación Secundaria pueden manifestar distintas estrategias en las respuestas resolutivas a las tareas.

6. Elección y distribución de la muestra

De acuerdo con los propósitos de la investigación tomamos como referencia la población de escolares correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. Por razones de tamaño y teniendo en cuenta los propósitos limitados de la investigación, decidimos elegir una muestra que tuviera una cierta representatividad con respecto a la población mencionada. Todo ello se justifica sobre la base de los siguientes motivos:

- Para este estudio cualitativo nos interesa cotejar los resultados de alumnos y alumnas de distintos cursos y que hayan seguido procesos de enseñanza tanto iguales como diferentes (unidades paralelas, adaptaciones significativas y no significativas, programa de diversificación curricular, alumnos y alumnas con altas capacidades). Esta semejanza o diferencia en el proceso de enseñanza-aprendizaje no es determinante para nuestro trabajo, pero puede ser un factor a tener en cuenta para su interpretación.

- Nuestro propósito es realizar un estudio transversal.
- En ninguno de los casos, nuestro estudio tiene la intención de generalizar resultados.

En definitiva se elige un solo centro escolar con la intención que todos los alumnos y alumnas tengan similares características y no haya diferencias significativas en los resultados según el medio sociocultural, urbano o rural ni según el tipo de enseñanza pública o privada.

1) La muestra de alumnos y alumnas para la realización del estudio empírico cualitativo sale solo de este centro. El criterio para la elección de dicha muestra viene dado por una distribución por edades dentro de cada curso de los cuatro considerados en Educación Secundaria.

2) El sistema de elección es mediante un sorteo de veinte alumnos y alumnas por curso. Una vez realizado este proceso, son reunidos en el salón de acto y se les comenta la naturaleza del estudio y en que va a consistir este. Al finalizar este encuentro se le entrega a cada estudiante un modelo de autorización paterna (anexo V) que debería cumplimentar el padre, la madre o el tutor/a de los menores de 16 años, de acuerdo con la LOPD respecto al tratamiento de las imágenes de alumnos y alumnas menores de dieciséis años[72]. La confidencialidad del nombre y apellido del estudiante la hemos respetado. De ahí que se identifiquen con las dos primeras letras de su nombre, la primera en

[72] El derecho a su intimidad y el derecho a la protección de sus datos de carácter personal están regulados por la Ley Orgánica 1/1982, de 5 de mayo, de protección civil del derecho al honor, a la intimidad personal y familiar y a la propia imagen y la Ley Orgánica 15/1999, de 13 de diciembre, de Protección de Datos de Carácter Personal. También la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo hace especial hincapié en el tratamiento de datos o imágenes del alumnado.

mayúscula, seguida de un punto, luego su edad en números acompañado de una coma y seguido del número de meses desde su último cumpleaños hasta el mes que se realizó la entrevista. Si coinciden en estas letras y estos números, se le acompaña con la tercera letra de su nombre. Si además, esta codificación finaliza con *(Pp)*, nos indicará que ese estudiante realizó la prueba piloto.

3) Una vez acabado el plazo, una semana después de esta reunión, y aclaradas las dudas de algunos familiares respecto a la forma en que se iban a realizar las entrevistas, los alumnos y alumnas que aceptan la realización de las mismas por curso son los siguientes:

   1º ESO: 20 estudiantes

   2ª ESO: 15 estudiantes

   3º ESO: 18 estudiantes

   4º ESO: 16 estudiantes

   En total 69 estudiantes.

4) Estos mismos alumnos y alumnas participan en el modelo evolutivo de competencias en el cardinal infinito (capítulo VII).
5) Para la prueba piloto se seleccionan 24 alumnos y alumnas.

7. Materiales

El material empleado en esta prueba consta de:

- Diez bolas de cerámica del mismo tamaño y color, situadas linealmente y perpendicular a los espejos en una plataforma con distancias entre ellas fijas (se realizó unas muecas en la misma plataforma para que no variaran esas posiciones).

- Sistema formado por dos espejos paralelos dispuesto en una plataforma. Uno de ellos está fijo y el otro con posibilidad de quitarse o moverse con la ayuda de unos rieles. Este último dispone de un elevador-corrector para corregir imágenes ópticas no deseadas.

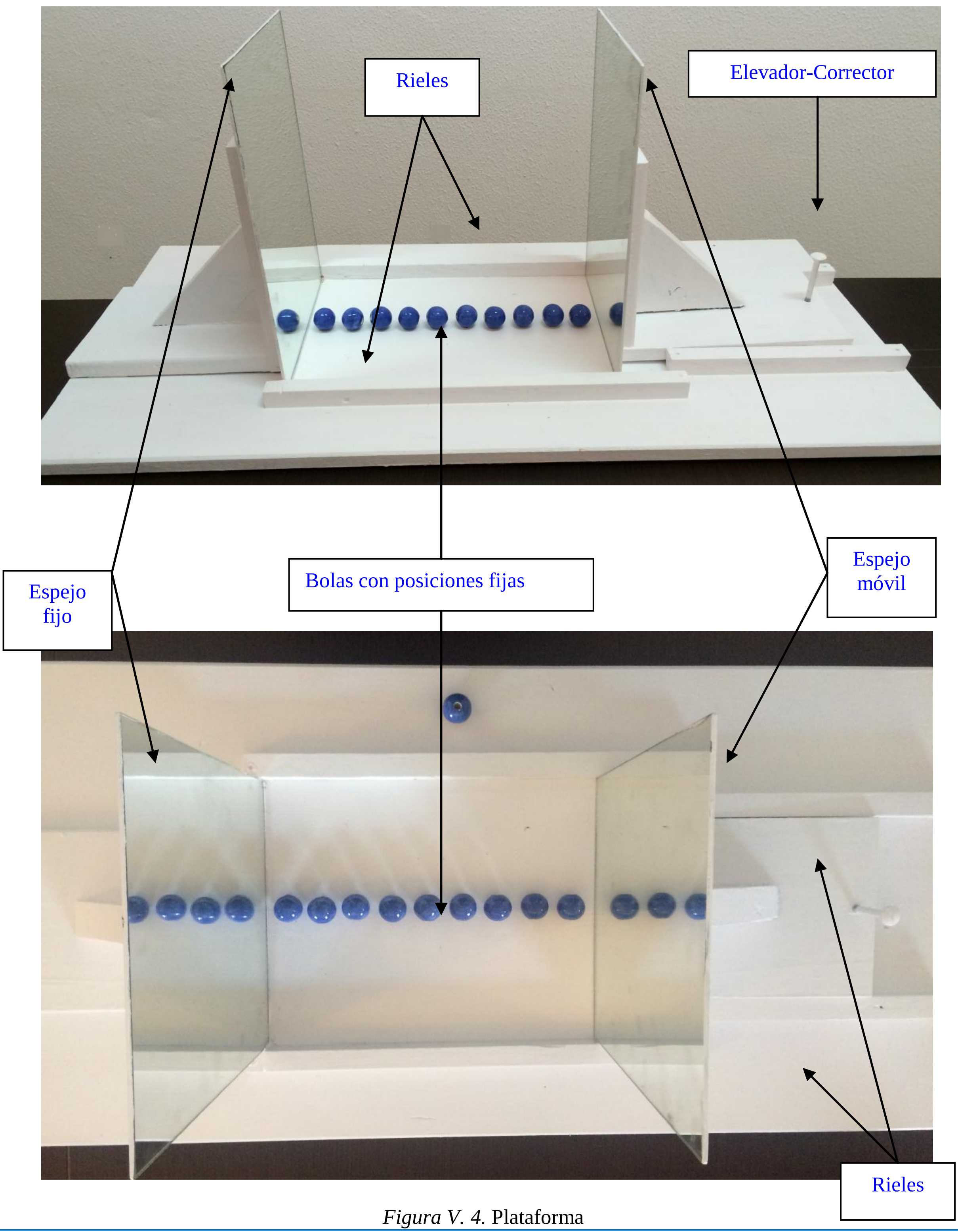


Figura V. 4. Plataforma

8. *Actividades*

Se trata de una entrevista semiestructurada (al igual que el estudio exploratorio del capítulo IV y del modelo evolutivo de competencias del cardinal infinito del capítulo VII), por ello es necesario especificar en el diseño previo tanto el contenido como los procedimientos (Cohen, 1990, citado en Fernández, 2001). Por tanto exponemos a continuación el objetivo pretendido, el desarrollo de la entrevista, así como los aspectos a observar en el conjunto de la prueba.

8.1 Tareas

Son dos las tareas que se le propone al estudiante:

1º Tarea asociada al cardinal finito

Con un solo espejo se coloca un número determinado de bolas y se le pedirá que cuente estas y las reflejadas en el único espejo (tarea que pretendemos equivaler a la primera tarea, la A, asociada al Nivel I del modelo evolutivo de competencias del cardinal infinito. Ver anexo VI).

Figura V. 5. Cardinal finito

Se le pedirá que quite una bola y que las vuelva a contar (tarea que pretendemos equivaler a la segunda tarea, la B, asociada al Nivel I del modelo evolutivo de competencias del cardinal infinito. Ver anexo VI).

Finalmente se le hace la pregunta si tienen la misma cantidad de bolas antes y después de quitar esa bola.

2º Tarea asociada al cardinal infinito

Con los dos espejos ya enfrentados y paralelos se coloca un número determinado de bolas y se le pedirá que cuente estas y las reflejadas en los dos espejos (tarea que pretendemos equivaler a la tercera tarea, la C, asociada al Nivel I del modelo evolutivo de competencias del cardinal infinito. Ver anexo VI).

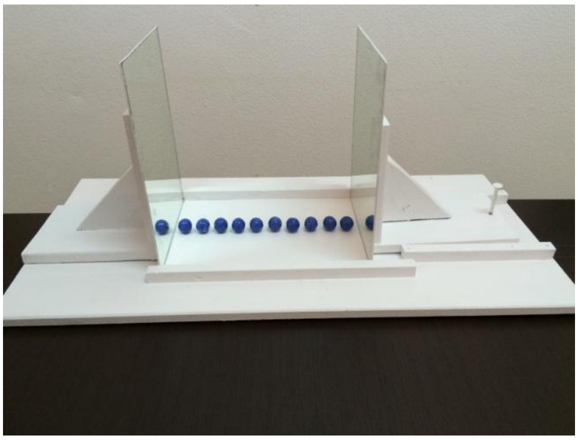


Figura V. 6. Cardinal Infinito

Se le pedirá que quite una bola y que las vuelva a contar (tarea que pretendemos equivaler a la cuarta y última tarea, la D, asociada al Nivel I del modelo evolutivo de competencias del cardinal infinito. Ver anexo VI).

Finalmente se le hace la pregunta si tienen la misma cantidad de bolas antes y después de quitar esa bola.

8.2 Objetivo

Con estas dos tareas se pretende estudiar la cardinalidad infinita según el modelo de Bolzano de comparación de conjunto en uno mismo mediante el método de inclusión en los estudiantes de secundaria.

La primera tarea, la del cardinal finito, está propuesta para que el estudiante de una forma constructiva e inductiva empiece a inferir lo que posteriormente se le preguntará, si tienen o no las mismas cantidades.

8.3 Desarrollo de la entrevista

A continuación expresamos la forma de proceder en las entrevistas para las dos tareas.

1º Tarea asociada al cardinal finito

Siéntate enfrente de todo este artilugio. Como ves, tienes una serie de bolas alineadas enfrente de un solo espejo. Cuenta las bolas que ves tanto las reales como las reflejadas en el espejo.

Ahora, quita una de ellas, mejor la primera que te encuentras, para que no dejen huecos entre ellas. Cuéntalas de nuevo.

La pregunta es la siguiente, ¿hay la misma cantidad de bolas antes que después? ¿Por qué?

2º Tarea asociada al cardinal infinito

Ahora pongamos este segundo espejo en la plataforma, en una posición paralela al espejo enfrentado y que la distancia a la primera bola sea similar a los espacios que hay entre bolas (para que las distancias, que se reflejan, sean similares y no haya un hueco mayor que otro). *Debes mirar por encima del espejo colocado (*ver fotos mala y buena posición*) de tal forma que no puedas ver las últimas bolas reflejadas. Si no las ves correctamente* (se pueden producir curvaturas o no "ver" las últimas bolas) *utiliza este tornillo que sirve de elevador para que la imagen sea más correcta. Bien, ¿puedes contar las bolas que hay entre los dos espejos y las reflejadas? ¿Cuántas bolas hay?*

Figura V. 7. Mala y Buena posición para observar el fondo de los espejos

Ahora quita una de ellas, la primera que hay en el espejo móvil. Acerca el espejo a la primera bola que hay (para no dejar huecos). *Bien, ¿puedes contar las bolas que hay entre los dos espejos y las reflejadas? ¿Cuántas bolas hay? Bien, la pregunta final es la siguiente, ¿hay la misma cantidad de bolas antes que después? ¿Por qué?*

9. Instrumentos y estrategias de recogidas de información

Para la recogida de datos hemos utilizado un instrumento común que ha sido la grabación en vídeo en formato MP4 por un iPhone-5S[73], además de un reproductor del mismo.

Con estos instrumentos hemos podido reproducir las entrevistas en su totalidad con todos aquellos detalles que de otra manera nos hubiera sido imposible de conseguir.

Una vez efectuada todas las entrevistas se hace la transcripción de las mismas con ayuda del reproductor de vídeo (transcripción que puede verse en el anexo V).

10. Consideraciones generales sobre el desarrollo de la entrevista

Las entrevistas se realizaron en los meses de febrero y marzo del curso 2014/20015, en el único colegio "Huerta de la Cruz", en Algeciras.

[73] Smartphone (en inglés) o teléfono inteligente. Construido sobre una plataforma informática móvil y que puede trabajar como un pequeño ordenador personal.

Las entrevistas se realizaron en horario lectivo, respetando los recreos, a puerta cerrada, en un despacho preparado para ello y pasando, uno por uno, todos los alumnos y alumnas seleccionados.

Cada entrevista tuvo una duración de unos 5 minutos, por lo que si tenemos en cuenta que no se permitieron interrupciones, se realizaron entre 3 y 4 entrevistas diarias. Fueron necesarias unos veinte días no consecutivos.

Por último, hemos de decir que todas las entrevistas tuvieron un desarrollo adecuado, incluso más satisfactorio de lo previsto, teniendo en cuenta la actitud positiva de los entrevistados frente a una cámara.

Agradecemos a todos los estudiantes, profesores, profesoras y directora su colaboración.

En los apartados que siguen hasta el final del capítulo, se exponen los resultados y conclusiones de dichas entrevistas teniendo en cuenta las dos tareas asociadas a los cardinales finitos e infinitos.

10.1 Análisis de respuestas: Los Microrrelatos

Nos ha facilitado nuestro análisis de respuestas y su categorización por Estados[74], la realización de microrrelatos de casos específicos. Para nosotros ha sido un nuevo procedimiento de análisis con dos pretensiones: extraer más información de las entrevistas semiestructuradas realizadas y plasmarla narrativamente, por otro lado, hemos innovado en la investigación narrativa, en el campo de investigación de la didáctica de las matemáticas.

10.2 La investigación narrativa

Hemos optado para el estudio empírico del presente capítulo de nuestro trabajo, la investigación narrativa.

[74] Hemos llamado Estados en la categorización de las respuestas dadas de los alumnos y alumnas para diferenciarlas de los Niveles que serán para la categorización en el Modelo evolutivo de competencias.

Para Bolívar, Domingo & Fernández (2001, citado en Arribas, 2008) la consideran en el ámbito educativo de la siguiente forma:

> La investigación biográfica-narrativa, además de ser una metodología específica de recogida/análisis de datos, se sitúa en un espacio más amplio acorde con determinadas orientaciones y posiciones actuales del pensamiento. Esto hace que se haya constituido como un enfoque o perspectiva propia del ámbito educativo, configurándose como una forma de reflexión oral o escrita que utiliza la experiencia personal en su dimensión temporal. Esta puede ser comprendida como una subárea dentro del amplio paraguas de la "investigación cualitativa", más específicamente como "investigación experiencial". (p.179)

Connelly & Clandinin (1995, citado en García, Lubián & Moreno, 2013) señalan que, al menos, la narrativa se puede utilizar en un triple sentido:

- El fenómeno que se investiga (como resultado escrito o hablado).
- El método de la investigación (como forma de construir y analizar los fenómenos narrativos).
- El uso que se pueda hacer de la narrativa con diferentes fines (formativo, proceso de reflexión, cambio, innovación, mejora,…).

De todo ello, es la narrativa un modo básico de pensamiento, de organización del conocimiento y de la realidad (Bolívar et al., 2001, citado en Arribas, 2008); considerándose como un tipo específico de discurso consistente en una narración, donde la experiencia humana vivida es enunciada a través de un relato (Connelly & Clandinin, 1995, citado en García et al., 2013).

Es en la metodología donde la investigación narrativa se toma como proceso de recogida de información a través de los relatos y donde las fuentes de construcción de los relatos son las propias entrevistas. Este tipo de investigación hace referencia a dos posiciones básicas bien diferenciadas en el análisis de las narraciones: la del investigador como analista de relatos que realiza un análisis de la narración y piensa *sobre* los relatos, y la del investigador como relator de historias que realiza un análisis narrativo y piensa *con* los relatos (Atkinson, 1997; Bochner, 2001; Polkinghorne, 1995; Smith &Sparkes, 2006, citados en Satriano & Marques, 2015).

La labor del investigador como analista de relatos se puede sintetizar en los siguientes puntos:

- Realiza un análisis de las narraciones con el propósito de explorar ciertas características de contenido o estructura de los relatos.
- El proceso de análisis se realiza pensando *sobre* las historias.
- Adopta una postura estrictamente metodológica porque entiende el análisis, solo desde una perspectiva técnica.
- Reduce los contenidos y los desagrega con la idea de obtener patrones, categorías o temas.

Para la segunda posición, el trabajo del investigador como relator de historias consiste en los siguientes puntos:

- Revela un tipo de investigación y análisis en el que el producto es el propio relato.
- El énfasis está puesto en las técnicas narrativas.
- Las historias son la unidad de análisis y sirven para interpretar y dar sentido al mundo.
- El investigador participa del momento en el que se está contando la historia, por lo tanto forma parte del proceso.

- Esto implica pensar *con* los relatos y no sobre ellos, así como una implicación desde dentro y no un análisis desde fuera.

10.3 De las entrevistas semiestructuradas y a sus microrrelato

La opción de haber elegido realizar entrevistas semiestructuradas, al igual que el estudio exploratorio del capítulo IV y del modelo evolutivo de competencias del cardinal infinito del capítulo VII, es por su carácter flexible y dinámico dependiendo de las respuestas de los alumnos y de las alumnas. Por ello se profundiza en aspectos que el entrevistador decida, es decir, aunque haya un protocolo de preguntas formalizadas con anterioridad, se pueden modificar en la práctica según las circunstancias y momentos de estas. Permiten ver hasta dónde llega el conocimiento del estudiante, además de evaluar mejor qué piensa realmente.

11. Resultados

11.1 Análisis de respuestas: Categorización

Tras realizar la prueba piloto con 24 estudiantes y utilizando la metodología de la investigación narrativa, los microrrelatos, la pudimos categorizar en cinco estados distintos, de menos a más evolucionada en cuanto a su reflexión proporcionando un patrón evolutivo. En cada uno de los cinco estados hemos seleccionado la entrevista de un alumno o alumna para escribir su correspondiente microrrelato (ver anexo V) y así corroborar su situación estatutaria.

Tabla V. 1. *Categorización de las respuestas*

CATEGORIZACIÓN DE LAS RESPUESTAS EN EL PROCESO INFINITO	
Estados	**Descripción**
I. Finitista[75] Elemental	Estudiantes que quitando una, la cantidad final es ya menor que la inicial.
II. Finitista Complejo	Estudiantes que quitando una y los correspondientes reflejos, la cantidad final es menor que la inicial.
III. In-finitista	Estudiantes que consideran el infinito con propiedades de lo finito
IV. Potencialista[76]	Estudiantes que razonan la equidad de las cantidades utilizando argumentos propios del infinito potencial, no haciendo ninguna referencia al actual.
V. Actualista[77]	Estudiantes que razonan la equidad de las cantidades utilizando argumentos propios del infinito actual.

11.2 Estados

Posteriormente a esta prueba piloto y perfeccionando el artilugio de los espejos, se siguió entrevistando al resto de los estudiantes seleccionados.

Estado I. Finitista Elemental

Estudiantes que quitando una bola, la cantidad final es ya menor que la inicial

El estudiante cuando quita la bola real comenta que la cantidad final es menor que la inicial argumentando que tiene una bola menos (incluso señala la bola menos, la que ha quitado). El razonamiento que sigue este tipo de respuesta es la propia transformación, en este caso quitar. Como ocurre con las cantidades finitas en la primera tarea: quitar o sustraer un elemento hace que la cantidad final sea diferente a la inicial. Es probable que el estudiante se deje llevar por la intuición natural o primaria. De nada ha servido la realización de la primera tarea del cardinal finito que pretendíamos que de forma inductiva se formara un razonamiento que pudiera luego aplicar a la segunda tarea del cardinal infinito.

[75] Calificación usada por Waldegg (1996) y posteriomente por Garbin & Azcárate (2002, p.94): "Los alumnos finitistas o que que evaden la infinitud".
[76] Calificación usada por Garbin & Azcárate (2002).
[77] Calificación usada por Garbin & Azcárate (2002).

En esta categoría nos encontramos con respuestas firmes, como Ju.12,07, Al.13,06 y El.15,07, basándose en que quitar uno es uno menos:

Ju.12,07: "Porque hemos quitado una, y al quitar una no hay lo mismo, es una menos."

Al.13,06: "Porque se quitó una y significa que hay uno menos."

El.15,07: "Antes hay más porque le he quitado uno."

Y otros que se apoyan en la bola sustraída para argumentar que las cantidades ya no son las mismas, como Ma.13, 09:

Ma.13,09: "No, porque le he quitado una. (Mira la bola que ha quitado)"

y con respuestas argumentadas con dudas como Lu.15,04, Mi.14,10*(Pp)* y Ma.16,02*(Pp)*:

Lu.15,04: "No lo sé, yo diría que no porque le he quitado una."

Mi.14,10*(Pp)*: "Pero… si había uno más, tendría que haber más caramelos."

Ma.16,02*(Pp)*: "A: *(Silencio)* Antes había más. E: ¿Sí?, ¿lo has contando y por eso ves la diferencia? A: No, al quitar una, hay menos."

Estado II. Finitista Complejo

Estudiantes que quitando una y los correspondientes reflejos, la cantidad final es menor que la inicial

Son aquellos que argumentan las diferentes cantidades basándose no sólo en la bola real sustraída sino en esta y todas las posibles reflejadas en los espejos. Para ellos la diferencia no solo está en una sola bola, la que quita, sino en muchas bolas: la real y todas las que se reflejan en los dos espejos.

A diferencia del anterior estado, creemos que el estudiante da su respuesta basándose en intuiciones secundarias y provocadas por la primera tarea, la del cardinal finito: si inicialmente tienes 10 bolas (con las reflejadas) y se le quita una, ya no son 9 las resultantes, sino 8. De ahí, al pasar a la tarea infinitista, si le quita una bola, no solo será esta la diferencia, sino también todas las que no se reflejan (de la bola sustraída) en los espejos. En ningún momento recurre al concepto del infinito ni potencial ni actual.

En esta situación nos encontramos a Ig.13,02, Vi.13,03, Al.12,09, Mag.13,00 y Su.14,05*(Pp)*:

> **Ig.13,02:** "No hay la misma cantidad porque le he quitado una y esa se multiplica por muchas…"
>
> **Al.12,09:** "No lo sé, falta una a cada lado (…) Una pelota en cada reflejo."
>
> **Mag.13,00:** "No hay la misma cantidad porque le he quitado una y en cada espejo hay una menos."
>
> **Su.14,05(Pp):** " Porque antes había más."

Otro lo argumentan de la forma siguiente:

> **An.14,07:** "7 por… muchos. E: Muchos, venga quita una de ellas,… ¿cuántas hay ahora? A: 6 por muchos. E: La pregunta es la siguiente: ¿Cuándo hay más cantidad de pelotitas, antes, ahora o son iguales? A: Antes."

Estado III. In-finitista

Estudiantes que consideran el infinito con propiedades de lo finito

Los estudiantes en esta estado tratan al infinito como un número muy grande, pero como un número. Por tanto, para ellos sustraer o quitar al infinito es considerado como algo finito o con propiedades similares a este último y hacen que las cantidades comparadas sean distintas.

La diferencia con el estado anterior es la argumentación basada en las propiedades de lo finito en el infinito. De forma coherente empieza dando su respuesta con base a argumentaciones infinitista, negando posteriormente la equidad de los dos conjuntos infinitos utilizando razonamientos y propiedades finitista.

En este estado está el alumno Ma.15,09 que razona que son diferentes aun siendo infinitos.

> **Ma.15,09:** Ma.15,09: "A: Infinitas. E: Bien, la pregunta es la siguiente, ¿hay la misma cantidad de pelotitas antes que ahora? A: No. E: No, ¿por qué? A: Porque hay una menos. E: ¿Aunque sea infinito? A: Sí, aunque sea infinito."

En la misma situación, Ce.16,01*(Pp)* su razonamiento en la negación de la equidad de los dos conjuntos infinitos es más argumentada.

Ce.16,01*(Pp)*: E: Teniendo en cuenta los dos espejos, ¿cuántas bolitas hay entre los dos espejos? A: Si se tienen en cuentan las reflejadas, hay infinitas. E: Infinitas, ¿podrías contarlas? A: Bueno… *(Se ríe)* E: ¿Te vas a poner a contarlas? A: No puedo. E: Mira, con una de tus manos quita una de ellas, cualquiera. Bien, ¿podrías contarlas ahora? A: No, hay infinitas. E: ¿Qué tenías más, antes, ahora o son iguales? A: Antes había más. *(Mira la bola que ha quitado)* E: ¿Antes había más quitando esta? A: Sí, quitando esta. E: ¿Aunque no tenga fin? A: Aunque no tenga fin.

En el mismo estado, el caso del alumno Da.15,02, que argumenta la diferencia de las cantidad infinitas con el tratamiento de finitud puntualizando que son infinitos diferentes.

Da.15,02: "E: No, ¿por qué? A: Porque son dos infinitos diferentes. E: ¿Infinitos diferentes?, ¿por qué?, ¿por haber quitado la pelotita? A: Porque realmente hay menos cantidad de pelotitas. E: ¿Sí? A: Sí."

Estado IV. Potencialista

Estudiantes que razonan la equidad de las cantidades utilizando argumentos propios del infinito potencial, no haciendo ninguna referencia al actual

Las respuestas argumentadas en este estado son correctas basándose en el propio infinito potencial, en su naturaleza y propiedades. El conflicto entre lo finito e infinito es de un grado mayor a los estados anteriores y la conceptualización del infinito es el potencial.

En este estado nos encontramos con La.14,03, Ca.15,03*(Pp)* y Al.13,07*(Pp)*:

La.14,03: "Sí tienen la misma cantidad, porque en el espejo se reflejan infinitas veces."

Ca.15,03(Pp): "Porque hay lo mismo, sigue hasta el fondo."

Al.13,07*(Pp)*: Al.13,07: "Hay infinitos…como poder, poder se pueden *(contar)* (…), pero sería demasiado tiempo, sería infinito. (…) Son los mismos, no hay diferencia."

Otros los argumentan, pero con dudas, Pa.12,09 y Na.15,11:

Pa.12,09: "No se sabe porque no hay fin … (Piensa en silencio).Sí tienen la misma cantidad."

Na.15,11: "¡Hum!. Pues no sé, en realidad son las mismas, como hay tantas tienen que ser las mismas."

Estado V. Actualista

Estudiantes que razonan la equidad de las cantidades utilizando argumentos propios del infinito actual

Estado más evolucionado de todos los anteriores. Sus respuestas son correctas y lo justifica con argumentos relacionados con la propia naturaleza del infinito actual y sus propiedades.

Entre los casos que razonan, pero no verbalizan ese razonamiento están An.12,08 y Ma.14,10*(Pp)*:

> **An.12,08:** "Sí, porque sigue siendo infinitas."

> **Ma.14,10*(Pp)*:** "A: Infinitos. E: Vale, con una de tus manos quita el primero, bien, estupendo, ¿cuántos hay ahora? A: Infinitos. E: ¿Hay la misma cantidad antes qué ahora? A: Sí. E: Aunque, ¿hayas quitado uno? A: Sí.

Otros los intenta verbalizar fundamentándose en la propia invarianza del infinito actual. Casos de la alumna, Nu.15,06:

> **Nu. 15,06:** "A: ¡Ah!, no, no, al quitar esta, sí, sí. E: La misma, ¿no?, aunque haya quitado una. A: Sí, porque esta es despreciable. E: Es despreciable frente a lo que sería el… A: El infinito."

Casos especiales

Para el caso de Ma.14,09*(Pp)*:

> **Ma.14,09*(Pp)*:** "A: Porque al quitar una pelotita, quito infinitas pelotitas. E: ¿Quito infinitas pelotitas? A: Sí. E: ¿Por qué? A: Porque al quitar una pelotita sigue habiendo infinitas, pero hay una menos E: ¿Las puedes contar? A: No las puedo contar, pero…sigue habiendo infinitas. E: Entonces, ¿hay más, menos ó son iguales? A: Son iguales."

Para él haber quitado una bola significa que sustrae no una cantidad finita, sino una cantidad infinita ya que no sólo tiene en cuenta la bola sustraída sino todas las que se reflejan de esta misma en los espejos paralelos, que serían infinitas. Frente a esa indeterminación de las infinitas bolas reflejadas por el conjunto de bolas reales menos las infinitas bolas reflejadas causada por la bola sustraída, la respuesta de ello es que son iguales.

Para este caso y el siguiente, si hubiéramos utilizado en la metodología de la tarea aplicada una forma inductiva constructiva, como se realiza las tareas infinitas del modelo evolutivo de competencias, creemos que esas dudas no se hubieran presentados[78].

Para la alumna Fa.15,03*(Pp)* da una respuesta correcta, pero con condicionante:

> **Fa.15,03*(Pp)*:**"A: Antes había más. E: ¿Por qué? A: Porque estaba más pegado y se veía más cantidad. E: ¿Más cantidad? Si yo acerco un poco esto… *(Acerca el espejo móvil)*A: Ahora, está igual que antes. E: ¿Hay más cantidad antes, ahora o son iguales? A: Así son iguales. E: Son iguales, ¿aún quitando uno? A: Sí, si quitamos uno hay menos. E: Entonces dime, ¿son iguales ó antes había más? A: Ahora está igual, antes al quitarle uno estaba diferente y ahora lo que se ve en el reflejo está igual."

Su razonamiento se basa en el hueco que crea tras la sustracción de la bola, así como los huecos reflejados en los espejos. De esa forma afirma que no son las mismas cantidades. En cambio especifica que si se mueve el espejo para que no haya huecos, las cantidades son las mismas.

[78] En las perspectivas futuras se proponen una serie de mejoras también en el método que se debería aplicar con las ayudas de los espejos paralelos y basándonos en el modelo de inclusión de Bolzano.

11.3 Estados por cursos

Adjuntamos en las siguientes tablas los alumnos y alumnas por cursos categorizados por nuestro crite

Tabla V. 2. *Estados en 1º de E.S.O.*

1ºE.S.O.[79]	Estudiantes-Respuestas
Estado I	**Ju.12,11:** "Porque quitando una, habrá menos…Antes había más." **Zo. 13,02:** "Más porque he quitado la que está en este lado y del otro no." **Fr. 12,09:** "No. (…) Porque ahora le he quitado una." **Vi. 13,03:** "Hay menos. (…) Porque falta una." **Ju. 12,07:** "Porque hemos quitado una, y al quitar una no hay lo mismo, es una menos." **Ma.13,00:** "No son iguales porque le he quitado una." **Te. 12,09:** "Son distintas porque le he quitado una pelotita." **Ma.13,03:** "Sí, falta una."
Estado II	**Ig. 13,02:** "No. (…) Porque he quitado una, y esa bola se multiplica por las demás si se quita." **Al. 12,09:** "No lo sé, falta una a cada lado (…) Una pelota en cada reflejo." **Mag.13,00:** "Porque hemos quitado una pelota y en cada espejo hay una menos."
Estado III	**Ai. 13,00:** "A: No (…) porque hay una menos… *(Piensa en silencio)*.E: ¿Tú la has podido contar y falta esa? A: No (…) Es igual (…) o parece igual." **Al. 12,07:** "A: Antes *(Duda mira los espejos y la bola real)* E: Sí, entonces ¿tú has podido ver que falta una? A: No *(Ríe)* E: Entonces A: Iguales. (…) Creo que sí."
Estado IV	**Ma.12,09:** "No, son iguales. Llegan al infinito." **Pa.12,09:** "No sé, porque no hay fin. (…) (*Piensa en silencio)*.Sí tienen la misma cantidad."
Estado V	**An.12,08:** "Sí, porque sigue siendo infinitas." **Pa.12,11:** "Porque son infinitas." **Ma.12,04:** "Iguales, hay infinitas." **Na.12,09:** "No sé, la misma … *(Piensa en silencio)*, porque siguen estando los espejos uno enfrente del otro.(…) Infinitas."

[79] La alumna Mar.(13,00) da el siguiente argumento: "Ahora hay más porque hemos acercado los espejos y están más profundos." , por ello queda fuera de nuestra categorización.

Tabla V. 3. *Estados en 2º de E.S.O.*

2º E.S.O.	Estudiantes -Respuestas
Estado I	**Al.13,08:** "Por qué se quitó una y significa que hay uno menos." **Ma.13,09:** "No, porque le he quitado una. *(Coge y mira la bola que ha quitado)*" **Lu.15,04:** "Porque al quitarle una, hay una menos." **Al.13,06:** "Porque se quitó una y significa que hay uno menos." **Ju.13,07:** "Sí, uno menos." **Gu.13,06:** "Porque he quitado uno."
Estado II	**De.14,04:** "Aquí hay uno menos, otra menos y otra menos *(señala sitios)*, y las que se reflejan en los espejos." **Ma.14,03:** "No, porque si le quito una, no se ve reflejada en este espejo, ni en este, ni en este otro."
Estado III	**Pa.13,10:** "No, porque hemos quitado una, pero lo que se refleja se ve infinito. (…)Hay menos. (…) No, no se puede contar."
Estado IV	**Ca.13,05:**" Sí tienen la misma cantidad, porque aunque le quite una sigue habiendo (…) infinitas." **La.14,03:** "Sí tienen la misma cantidad, porque en el espejo se reflejan infinitas veces" **Pa.13,09:** "Sí porque hemos hecho lo mismo que antes y van hasta el fondo." **Al.13,07*(Pp)*:** "Hay infinitos…como poder, poder se pueden *(contar)* (…), pero sería demasiado tiempo, sería infinito. (…) Son los mismos, no hay diferencia." **Jo.13,11:** "Porque como hay más espejos, más se reflejan las pelotitas.(…) Sí, es la misma cantidad."
Estado V	**Se.14,02:** "Son la misma cantidad. (…) Sigue habiendo infinitas."

Tabla V. 4. *Estados en 3º de E.S.O.*

3º E.S.O.[80]	Estudiantes -Respuestas
Estado I	**Lu.15,00:** "Porque he quitado una pelotita, entonces hay menos." **Al.14,06*(Pp)*:** "Ahora hay menos. (…) No, pero si he quitado uno, se supone que son menos." **Mi.14,10*(Pp)*:** "Pero… si había uno más, tendría que haber más caramelos." **Ca.14,10*(Pp)*:** "Porque hay una menos."
Estado II	**Al.14,10*(Pp)*:** "No, pero se ven menos. *(Mira entre los espejos)*." **Su.14,05*(Pp)*:** " Porque antes había más." **An.14,07:** "7 por… muchos. E: Muchos, venga quita una de ellas,… ¿cuántas hay ahora? A: 6 por muchos. E: La pregunta es la siguiente: ¿Cuándo hay más cantidad de pelotitas, antes, ahora o son iguales? A: Antes."
Estado III	**Cl.14,10:** "A: Porque hay infinitas menos una. E: ¿Infinitas menos una?, ¿entonces sería menos? A: Sí, hay una menos. *(Se ríe)*"
Estado IV	**Ca.15,03*(Pp)*:** "Porque hay lo mismo, sigue hasta el fondo." **Pa.15,01*(Pp)*:** "No se pueden contar, son infinitos. (…) Son iguales." **Cr.15,04:** "No hay fin. (…) *(Piensa en silencio).* Si van al hasta el *fondo* tienen la misma cantidad.
Estado V	**Pa..14,09*(Pp)*:** "Infinitos (…). Son iguales." **Pa..14,11*(Pp)*:** "¿Entre los dos espejos…? Infinitos (…) Tienen las mismas." **Jo.15,03*(Pp)*:** "A: ¡Hum!…, hay los mismos. E: ¿Por qué? A: Porque son infinitos." **Ma.14,10*(Pp)*:** "A: Infinitos. E: Vale, con una de tus manos quita el primero, bien, estupendo, ¿cuántos hay ahora? A: Infinitos. E: ¿Hay la misma cantidad antes que ahora? A: Sí. E: Aunque, ¿hayas quitado uno? A: Sí. **Ma.14,09*(Pp)*:** "A: Porque al quitar una pelotita, quito infinitas pelotitas. E: ¿Quito infinitas pelotitas? A: Sí. E: ¿Por qué? A: Porque al quitar una pelotita sigue habiendo infinitas, pero hay una menos E: ¿Las puedes contar? A: No las puedo contar, pero…sigue habiendo infinitas. E: Entonces, ¿hay más, menos o son iguales? A: Son iguales." **An.15,03*(Pp)*:** "Infinitos. (…) Son iguales."

[80] La alumna **Fa.15,03*(Pp)*** da la siguiente respuesta: "Al quitarle uno, hay menos pero al mover el espejo son iguales.", por ello queda fuera de nuestra categorización.

Tabla V. 5. *Estados en 4º de E.S.O.*

4º E.S.O.	Estudiantes -Respuestas
Estado I	**El.15,07*(Pp)*:** "Antes hay más porque le he quitado uno." **La.16,01*(Pp)*:** A: Antes había uno más. E: ¿Sí?, ¿tú lo has contado antes?, ¿has contado ahora y hay uno menos? A: No, pero le he quitado uno, sé que hay uno menos. **Ju.15,06:** "A: No. E: No, ¿por qué? A: Falta una." **Ma.16,02*(Pp)*:** "E: ¿Tiene la misma cantidad de caramelos antes, después o son iguales? A: *(Silencio)* Antes había más. E: ¿Sí?, ¿lo has contando y por eso ves la diferencia? A: No, al quitar una hay menos."
Estado II	
Estado III	**Ma.15,09:**"A: Infinitas. E: Bien, la pregunta es la siguiente, ¿hay la misma cantidad de pelotitas antes que ahora? A: No. E: No, ¿por qué? A: Porque hay una menos. E: ¿Aunque sea infinito? A: Sí, aunque sea infinito." **Ce.16,01*(Pp)*:**"A: No, hay infinitas. E: ¿Qué tenías más, antes, ahora o son iguales? A: Antes había más. *(Mira la bola que ha quitado)* E: ¿Antes había más quitando ésta? A: Sí, quitando ésta. E: ¿Aunque no tenga fin? A: Aunque no tenga fin." **Da.15,02:** "E: No, ¿por qué? A: Porque son dos infinitos diferentes. E: ¿Infinitos diferentes?, ¿por qué?, ¿por haber quitado la pelotita? A: Porque realmente hay menos cantidad de pelotitas. E: ¿Sí? A: Sí."
Estado IV	**Na.15,11:** "A: Pues…, no lo puedo contar, muchas, muchas. E: Vale, la pregunta es la siguiente: ¿hay la misma cantidad de pelotitas que antes? A: ¡Eh!…, pues…, no sé, ¡eh!… E: ¿Entiendes la pregunta? A: Sí, sí, en verdad, son la misma cantidad de pelotitas. Tienen que ser la misma." **An.16,05*(Pp)*:** "Infinitos, no se ve el final."
Estado V	**Al.16,03:** "A. Infinitas. E: ¿Hay la misma cantidad que antes? A: Sí. E: Aunque, ¿hayas quitado una pelotita? A: Sí." **Al.15,09:** "Pues si he quitado una…, aunque realmente sigue habiendo infinitas, es la misma cantidad." **Nu.15,06:** "A: ¡Ah!, no, no, al quitar esta, sí, sí. E: La misma, ¿no?, aunque haya quitado una. A: Sí, porque esta es despreciable. E: Es despreciable frente a lo que sería el… A: El infinito." **Pa.15,10*(Pp)*:** "Antes, bueno son iguales porque antes tenía más caramelos, pero son infinitos." **Al.15,06*(Pp)*:** "A: Infinitas, ¿no? E: Infinitas, vale, ¿tú puedes ver el final? A: ¡Eh!…, no. E: ¿Tú puedes contar las pelotitas? A: Tampoco. (…)A: Sí, tiene infinitas. E: ¿Podrías contarlo ahora? A: Tampoco." **Ju.15,07*(Pp)*:** "A: ¡Eh!…., la misma. (…) A: Infinitos." **Ju. 16,01*(Pp)*:** "A: Igual, igual, no hay menos, pero no lo veo, infinitos. E: Entonces, ¿qué dirías tú?, ¿hay la misma cantidad o hay menos? A: Hay la misma cantidad."

A continuación, adjuntamos una tabla donde se recogen el número de estudiantes junto el tanto por ciento que representan en cada estado, en los distintos cursos, ciclos y, finalmente, etapa.

Tabla V. 6. *Números y % de alumnos y alumnas en los distintos estados.*

1º E.S.O.
(19)

I	II	III	IV	V
8 **(42.1%)**	3 **(15.8%)**	2 **(10.5%)**	2 **(10.5%)**	4 **(21.1%)**

2º E.S.O.
(15)

I	II	III	IV	V
6 **(40%)**	2 **(13.3%)**	1 **(6.7%)**	5 **(33.3%)**	1 **(6.7)**

3º E.S.O.
(17)

I	II	III	IV	V
4 **(23.6%)**	3 **(17.6%)**	1 **(5.9%)**	3 **(17.6%)**	6 **(35.3%)**

4º E.S.O.
(16)

I	II	III	IV	V
4 **(25%)**	0 **(0%)**	3 **(18.8%)**	2 **(12.4%)**	7 **(43.8%)**

1º CICLO
(34)

I	II	III	IV	V
14 **(41.2%)**	5 **(14.7%)**	3 **(8.8%)**	7 **(20.6%)**	5 **(14.7)**

2º CICLO
(33)

I	II	III	IV	V
8 **(24.2%)**	3 **(9.1%)**	4 **(12.1%)**	5 **(15.2%)**	13 **(39.4)**

ETAPA
(67)

I	II	III	IV	V
22 **(32.8%)**	8 **(11.9%)**	7 **(10.5%)**	12 **(17.9%)**	18 **(26.9)**

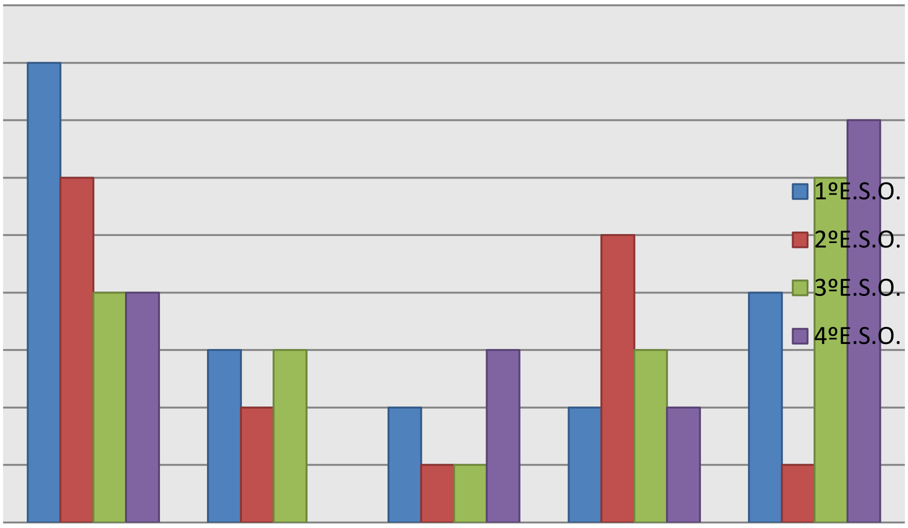


Figura V. 8 . Estados-Cursos

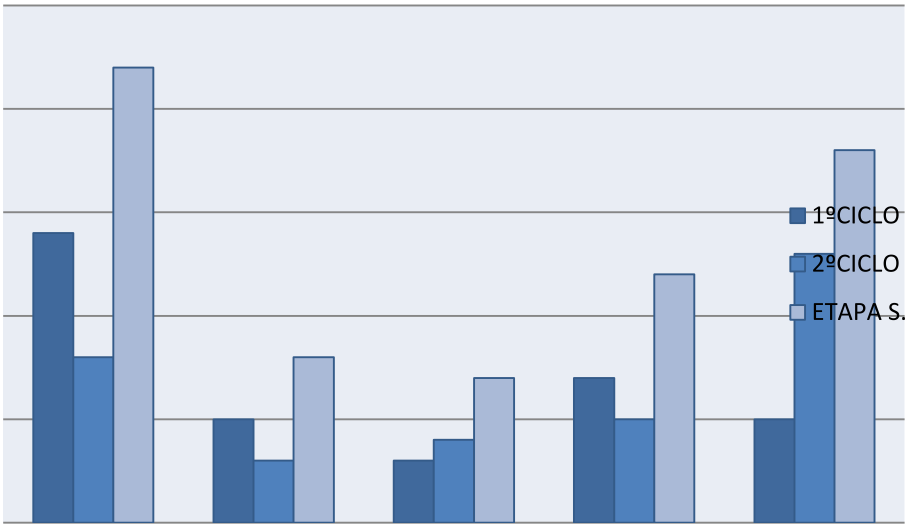


Figura V. 9. Estados-Ciclos, Etapa

Podemos extraer las siguientes conclusiones generales:

- Los Estados inferiores I y II, que no aceptan la equidad de las cantidades infinitas, son en mayor número alumnos y alumnas de cursos inferiores, así como los que lo aceptan utilizando argumentos propios del infinito actual son en cursos superiores.
- La aceptación de la invariabilidad en el cardinal infinito con argumentos del infinito potencial son los alumnos y alumnas de 2º curso de la E.S.O.

- En general, los estudiantes que consideran el infinito, pero con propiedades de lo finito son en menor cantidad en todos los cursos de Educación Secundaria, pero mayoritariamente estudiantes de 4º curso.
- La pariedad en el número de alumnos y alumnas de los cursos 1º, 2º y 3º en el Estado III.

12. Conclusiones

Dos son los propósitos de este estudio: por un lado introducir el método de investigación de comparación con la relación de inclusión de Bolzano con la ayuda de una experiencia física; y por otro lado dar significado a los comportamientos generales encontrados, así como a los procedimientos, destrezas y estrategias en tanto que reconocen las cardinalidades de esos conjuntos y finalmente la aceptación o no del infinito actual. Con la ayuda de la investigación narrativa y sus microrelatos hemos podido caracterizar los siguientes estados evolutivos y posteriormente categorizar todos los estudiantes entrevistados en esos estadios. Dicha caracterización es:

Estado I. Finitista Elemental

Alumnos y alumnas que quitando una, la cantidad final es ya menor que la inicial. En mayor cantidad, alumnos y alumnas de cursos inferiores.

Estado II. Finitista Complejo

Alumnos y alumnas que quitando una y los correspondientes reflejos, la cantidad final es menor que la inicial. Tanto este estado como el anterior evaden la infinitud argumentando lo observado con propiedades propio de lo finito.

***Estado III.* In-finitista**

Alumnos y alumnas que consideran el infinito con propiedades de lo finito. Aceptan con medidas la infinitud, pero con argumentos finitista.

***Estado IV.* Potencialista**

Alumnos y alumnas que razonan la equidad de las cantidades utilizando argumentos propios del infinito potencial, no haciendo ninguna referencia al actual.

***Estado V.* Actualistas**

Alumnos y alumnas que razonan la equidad de las cantidades utilizando argumentos propios del infinito actual. Propio de alumnos y alumnas de cursos superiores.

CAPÍTULO VI

MODELO EVOLUTIVO[81] DE COMPETENCIAS[82]EN EL CARDINAL INFINITO

1. Introducción

El principal objetivo de la investigación es describir el conocimiento lógico del cardinal infinito mediante la comparación de sucesiones numéricas finitas e infinitas en alumnos y alumnas de Educación Secundaria de edades comprendidas entre los 13 y los 16 años.

Una investigación previa desarrollada en el capítulo IV estudio exploratorio permitió, en tal sentido, concretar el problema de infinitud en lo que se refiere a qué infinito usar, cómo trabajarlo y en qué posible lenguaje matemático expresarlo. Además establece un modelo evolutivo primogénito tanto en el nivel educativo estudiado como en los distintos niveles del modelo.

El citado estudio caracterizó y analizó los resultados en cuatro tareas, tratadas en la entrevista, para dar significado a los comportamientos generales.

Las respuestas a las tareas analizadas en ese estudio mostraron existencia de regularidades y la posibilidad de clasificarlas con una cierta evolución de las distintas categorías.

Se pretende a partir de ello realizar un estudio cualitativo donde se caracterice y analice los resultados de las tareas que se realizarán a los alumnos y alumnas para dar,

[81] Teniendo en cuenta el análisis didáctico y el estudio exploratorio de este mismo informe, así como las investigaciones previas en el marco Procesamiento de la Información, las diferentes estrategias, procedimientos y conceptos que los alumnos y alumnas aplican tiene connotaciones cognitivas de carácter evolutivo (Fernández, 2001).

[82] Entendemos competencias a las capacidades con diferentes conocimientos, habilidades, pensamientos, carácter y valores de una forma integral y en las diferentes interacciones, para poder comprender un tópico dado.

de nuevo, significado a los comportamientos generales. Posteriormente, realizar entrevistas y analizar las situaciones singulares encontradas, así como los procedimientos, destrezas y estrategias, y con ello dirigirnos hacia un modelo evolutivo ampliado que explique las competencias del alumnado.

Todo ello nos conducirá a clasificar a los alumnos y alumnas de la muestra en distintos niveles según las comparaciones, uno-a-uno, comparación elegida por Cantor basada en la biyección entre conjuntos numéricos finitos e infinitos, con mayor énfasis en el cardinal infinito.

Los aspectos citados se abordan en el presente capítulo como consecuencias importantes del estudio exploratorio y del análisis didáctico. Si con el primero ha sido posible perfilar el modelo ampliando las categorías que determinarán la jerarquía, con el segundo obtendremos los distintos niveles intelectuales que relacionan las distintas categorías, además de facilitarnos el análisis de respuestas de los alumnos y alumnas.

2. *Marco teórico*

2.1 El infinito actual[83] con la comparación de conjuntos en Cantor

A diferencia de Bolzano, Cantor distinguió entre las propiedades de los constructos u objetos matemáticos y las propiedades de los conjuntos tomados sin estructura.

Debemos destacar la idea que tenía Cantor sobre el concepto de conjunto en este período:

> Llamó a una variedad de elementos que pertenecen a cualquier esfera conceptual, bien-definida, si sobre la base de su definición y como consecuencia del principio lógico del tercio excluso debe ser reconocido que está internamente determinado cuándo un objeto arbitrario de esta esfera conceptual pertenece a la variedad o no, y también, cuándo dos

[83] Para Cantor, el infinito propio o transfinito, intermedio entre el infinito absoluto y el infinito impropio. Es un infinito actual distinto al infinito absoluto y al infinito potencial.

> objetos en el conjunto, a pesar de las diferencias formales en la manera en la que están dados, son iguales o no. En general las diferencias relevantes no pueden ser hechas en la práctica con certeza y exactitud por las capacidades o métodos actualmente disponibles. Pero eso carece de cualquier importancia. Lo único importante es la determinación interna a partir de la cual en casos concretos, donde ello es exigido, una determinación actual (externa) ha de ser desarrollada por medio de un perfeccionamiento de los recursos. (Cantor, 1895/1983a, p.32)

El desarrollo de la teoría de conjuntos la hace Cantor en su trabajo *Fundamentos* (1895/1983a), donde estructura la teoría sobre el concepto del infinito actual, de esa forma le permitirá incorporar a ese infinito la extensión del concepto de número que el pensamiento matemático de entonces tenía.

Por un lado, distingue el infinito como cantidad variable y finita (*finito variable*[84]) que puede crecer o decrecer más allá de los límites, pero puntualiza que sigue siendo finita, "justificada en la ciencia y contribuido a su servicio" (Cantor, 1895/1983a, p.86) y lo denominó infinito impropio.

Y por otro, el infinito propio, enteramente determinado, igualmente justificado tanto en la geometría como en la teoría de funciones[85], donde se presenta bajo una tal forma definida y determinada.

Dos principios de generación le ayudan a la construcción conceptual de números enteros realmente existentes. Un tercer principio, que lo *llamó principio de limitación o restricción* impondrá a esa construcción barreras sucesivas que llamó formación de segmentación natural de la sucesión infinita de los números enteros realmente existentes.

[84] En cursiva en la traducción de la obra.
[85] Cantor, pone de ejemplo una función analítica de una variable compleja donde un punto infinitamente alejado está definido, y por tanto, se puede examinar el comportamiento de la función entorno a ese punto de la misma manera que se podría examinar si lo fuera en un punto que estuviera a una distancia finita.

2.2 Relación de la etapa inter-objetal piagetiana[86] con la conceptualización del infinito actual en Cantor

Para Moreno & Waldegg (1991, citado en Fuenlabrada & Armella, 2008) exponen las relaciones conjuntitas cantorianas con las relaciones piagetianas de tipo inter-objetal en los siguientes puntos:

a) La comparación de conjuntos con correspondencia uno-a-uno realizada por Cantor es de manera explícita, a diferencia de Bolzano que se basó en el criterio de inclusión. Cantor afronta el problema de comparación en un sentido más amplio, de ahí al comparar conjuntos que uno no fuera subconjunto del otro, no dependería de las características de los elementos.

b) Requerirá de un criterio externo con la necesidad de un “agente mediador”, usando para ello la relación uno-a-uno entre los elementos de los conjuntos comparados.

c) Es esa biyección la que mostrará un cambio de pensamiento.

d) La correspondencia establecida distinguirán los conjuntos contables de los no contables.

e) Supondrá un cambio metodológico ya que el proceso de verificación deja de ser empírico para ser más lógico.

f) Las operaciones efectuadas sobre un conjunto infinito para lograr el conjunto derivado y las operaciones de situar los elementos de dos conjuntos infinitos en correspondencia harán que las propiedades reversibilidad, recursividad, transitividad, asociatividad y conmutatividad sean más evidentes.

[86] Segunda etapa en el marco de trabajo piagetiano donde argumenta la validez para extraer conclusiones de una comparación entre la psicogénesis de un concepto y el de su propia historia, (Piaget & García, 1982).

"Las coordinaciones entre las correspondencias, por un lado, y entre las transformaciones, por el otro, con las propiedades antes mencionadas, son características de las relaciones de la etapa inter-objetal, y así también lo son los principios de conservación" (Fuenlabrada & Armella, 2008, p.25).

2.3 Modelo evolutivo del conocimiento cardinal infinito en la comparación de conjuntos numéricos

Queremos desarrollar un modelo de competencias cognitivas de carácter evolutivo sobre el cardinal infinito mediante la comparación de sucesiones numéricas finitas e infinitas que expliquen e integren los siguientes factores:

- La progresión en el descubrimiento por parte del sujeto individual.
- Los tipos de sucesiones que se toman en consideración.
- La formación de los términos de las sucesiones y la expresión en su infinitud.
- La relación biunívoca que se establece para su comparación.
- La evolución al pasar de un nivel evolutivo a otro superior.

Para ello además de tener en cuenta los resultados del estudio exploratorio como información fundamental es necesario:

- Realizar un análisis exhaustivo de cada una de las tareas propuestas en el estudio cualitativo.
- Determinar las posibles interpretaciones que pueda establecer el estudiante acerca de las comparaciones entre las series numéricas finitas e infinitas y asignar a cada una de ellas un estatus evolutivo.
- Delimitar los distintos tipos de tareas y construir las que se puedan adaptar mejor a las distintas interpretaciones y niveles de competencias

- Ordenar los tipos de respuestas en categorías y delimitar las características que las definen teniendo en cuenta los resultados de todos los puntos anteriores expuestos, es decir, la construcción del modelo.

La opción que hemos elegido para la exposición del modelo teórico es la de un razonamiento progresivo, a partir de los aspectos más elementales hasta los más complejos y de las edades inferiores a las superiores, resumido y estructurado por etapas o aproximaciones. Cada aproximación corresponde a un nivel diferente, que viene especificado por la descripción desde un punto de vista de la progresión de las capacidades correspondientes en un sujeto individual ideal.

En la caracterización y determinación de los siguientes niveles se utilizan sucesiones infinitas básicas[87], divergentes y convergentes, para la inferencia del número infinito.

La comparación entre dos sucesiones básicas se realiza mediante una correspondencia en términos, dicha correspondencia es biunívoca y por tanto determina la equipolencia entre ambas lo que se lleva a reflexionar el cardinal infinito. En definitiva, el criterio que elegimos en esta parte de nuestra investigación, es la postura de Cantor acerca de las comparaciones entre conjuntos.

En consecuencia, en cada uno de los niveles es necesario que el estudiante aplique esquemas lógicos-matemáticos (Piaget e Inhelder, 1976, citado en Fernández, 2001) tales como:

- ***Clases extensivas***, para la determinación de las dos sucesiones básicas dado su término general. Por inducción el estudiante elabora los primeros términos de la sucesión para que posteriormente, por intuición pueda

[87] Llamamos sucesiones infinitas básicas a las que su término general son del tipo :

$a_n = n + k$ y $a_n = k.n$; $a_n = \frac{kn+1}{n} = \frac{1}{n} + k$, $a_n = \frac{1}{n+k}$, $a_n = \frac{n}{n+k} = 1 - \frac{k}{n+k}$, $a_n = n^k$ y $a_n = \frac{1}{n^k}$

reflexionar cuáles serían los últimos términos, Fischbein(1987,citado en Belmonte, 2009).

- ***Correspondencia serial***, para la comparación término a término entre ambas series.
- ***Equipotencia de conjuntos***, cuando se infiere que la correspondencia uno a uno es un método válido para comparar cardinales de conjuntos. En Tirosch (1991, 1999, citados en Penalva, 2001), pocos alumnos y alumnas utilizan la correspondencia una a una. Para Sierpinska & Viwegier (1989, citados en Belmonte, 2009) puntualiza que para utilizar y aceptar este criterio de equipotencia, debe ser capaz de pensar contra sus propias intuiciones. Además ideas previas sobre el infinito pueden funcionar como obstáculo para aceptar este criterio de comparación, Para la misma autora es improbable que alumnos y alumnas entre los 10 y 14 años, acepten el criterio sin dificultad, así como su uso. Por ello pensamos que es necesario, por nuestra parte, que a lo largo de las entrevistas, cuando se deba realizar las tareas asociadas al modelo, haya ese aporte necesario por parte del entrevistador para la comparación entre conjuntos. También Lestón (2008) se refiere al criterio de la biyección comentando que permite formar en la mente del alumno ideas que eran desconocida con respecto a la comparación entre conjuntos que habrá de tener en cuenta.
- ***Inclusión de clases***, para inferir que una de las series forma parte de la otra. En Turégano(1996) el criterio de biyección se muestra más fuerte que el de inclusión.
- ***Intuición primaria,*** en las primeras tareas asociadas a los niveles e ***intuición secundaria***, cuando se le aporta por parte del entrevistador ayuda

añadida a las tareas. Para Fischbein(1987, citado en Belmonte, 2009) esta última clase de intuición facilitará una forma correcta para llegar a las intuiciones del infinito.

- ***Aceptación del infinito potencial y actual.*** Para Fischbein (1982, citado en Garbin & Azcárate, 2001), el concepto potencial del infinito responde a una interpretación natural intuitiva del infinito. Para Turégano (1996) la aceptación o no del infinito potencial puede presentar un obstáculo para la aceptación del actual. Por último, un infinito actual no tiene un significado conductual, por tanto no es congruente con una interpretación intuitiva, Fischbein (1982, citado en Garbin & Azcárate, 2001).

Para Fernández (2001):

> La exposición del modelo teórico es la de un razonamiento progresivo donde, a partir de los aspectos más elementales se llega a los más complejos, desde las edades inferiores a las superiores, resumidas y estructurados por niveles o aproximaciones. Cada aproximación corresponde a un nivel diferente, que viene especificado por su descripción y justificación, así como por las competencias teóricas que le corresponden desde un punto de vista de la progresión de las capacidades correspondientes en un sujeto individual ideal. (p. 163)

Los niveles que hemos planteados:

NIVEL 0. Trivial

En el nivel más bajo se encuentran los alumnos y alumnas que no distinguen entre lo finito y lo infinito. Los alumnos y alumnas que conforman este Nivel 0 no aplican correctamente el esquema lógico-matemático que hemos llamado infinito versus número finito en el sentido que no mantienen la correspondencia entre sucesiones básicas infinitas a la que a una de ellas se le han quitado los primeros términos, en este sentido tratan de igual manera la comparación entre sucesiones infinitas básicas que entre tramos finitos de las mismas.

Por otro lado, el infinito potencial puede ser un obstáculo para aceptar el infinito actual, Turégano(1996). En nuestro caso, la no aceptación intuitiva de la potencialidad del infinito puede rechazar la idea posterior, la del infinito cardinal tras la comparación de los conjuntos formados.

NIVEL I. Aceptación de la cardinalidad infinita básica reducida

El criterio seguido para determinar si un estudiante se encuentra en el Nivel I es que sea capaz de reconocer el cardinal infinito mediante la comparación de dos sucesiones básicas divergentes (del tipo $a_n = n + k$ y $a_n = k.n$) en la que la diferencia entre ellas es de pocos términos y primeros.

Para Falk (1994), el todo es mayor que sus partes es una relación que se adquiere alrededor de los 7 u 8 años, es un paso muy importante el sustituir este aprendizaje por la correspondencia uno-a-uno.

Un alumno o alumna de este nivel presenta todos los esquemas lógico-matemáticos señalados, siempre y cuando las sucesiones dadas sean divergentes básicas. En relación a los esquemas “clases extensivas” y “número infinito versus número finito” aparecen con limitaciones; en este sentido tenemos que los alumnos y alumnas las aplican cuando los tramos finitos elegidos para su comparación son “pequeños” o “muy pocos” (unos diez o veinte términos).

NIVEL II. Aceptación de la cardinalidad infinita básica excesiva

Un alumno o alumna está en este nivel si presenta las mismas características que el Nivel II, pero además es capaz de reconocer el cardinal infinito mediante comparación de dos sucesiones divergentes básicas en donde la diferencia de términos ha pasado de “poco” a “mucho”.

Los esquemas lógico-matemáticos que se trabajan aparecen sin limitaciones por los tramos finitos elegidos, dichos tramos son de más de quinientos términos, y se deben de aplicar las mismas representaciones en estos como en las sucesiones infinitas, lo cual pone de manifiesto que los alumnos y alumnas de este nivel además de los esquemas señalados usan el esquema lógico-matemático de "último elemento" para diferenciar las sucesiones finitas de las infinitas.

NIVEL III. Aceptación de la cardinalidad infinita básica reducida con convergencia

El criterio seguido para determinar si un alumno o alumna se encuentra en el Nivel IV es que sea capaz de reconocer el cardinal infinito mediante la comparación de dos sucesiones básicas convergentes (del tipo $a_n = \frac{kn+1}{n} = \frac{1}{n} + k$, $a_n = \frac{1}{n+k}$ y $a_n = \frac{n}{n+k} = 1 - \frac{k}{n+k}$) en la que la diferencia entre ellos es de pocos términos y primeros.

En Waldegg(1996), existe una gran dificultad en aceptar que en conjuntos acotados, tengan un número infinito de elementos. Por ello, creemos que este nivel es de grado superior al tener que comparar sucesiones convergentes, acotadas por ambos extremos. En la misma línea, Belmonte (2011) comenta que existe una creencia errónea acerca de que un conjunto acotado tenga cardinal finito.

La misma autora, Waldegg(1996), considera que la comparación entre conjuntos infinitos se hace más compleja de razonar si sólo uno de los conjuntos está acotado, de ahí que las comparaciones de sucesiones básicas convergentes tanto finita como infinita sean ambas acotadas.

Al igual que en el Nivel II, se presentan todos los esquemas lógicos-matemáticos señalados en sucesiones convergentes básicas y cuando los tramos dados sean de pocos términos.

El avance de este nivel respecto a los anteriores se encuentra en el “dominio operatorio” de las sucesiones consideradas con la correspondiente generalización del conocimiento del infinito cardinal que se había manifestado.

NIVEL IV. Aceptación de la cardinalidad infinita media excesiva

Un alumno o alumna estará en este nivel si además de presentar las mismas características que el Nivel IV se da la capacidad de determinar el número infinito mediante la comparación de dos sucesiones convergentes básicas donde la diferencia de términos ha pasado de “pocos” a “muchos”.

Por tanto, se tiene un dominio operatorio de las sucesiones consideradas que junto al esquema lógico-matemático de “último elemento” hacen que quede interiorizado la comparación entre número finito e infinito y llegue a aceptar la cardinalidad infinita.

El modelo teórico que acabamos de determinar se representa sintéticamente en la siguiente tabla VI.1. De una forma global se visualiza el dominio de la cardinalidad infinita desde una posición básica, donde de forma evolutiva va pasando de niveles de mayor dificultad en cuanto a cantidad de elementos y acotación.

Tabla VI. 1 *Caracterización de los estados del modelo evolutivo*

MODELO EVOLUTIVO	
NIVELES	***CARACTERÍSTICAS LÓGICAS MATEMÁTICAS***
0. Trivial.	Construir y diferenciar los términos de la sucesión. Reconocer el infinito potencial.
I. Aceptación de la cardinalidad infinita básica reducida.	Establecer la correspondencia biunívoca entre los conjuntos formados. Reconocer y diferenciar la cardinalidad finita e infinita en ausencia de pocos términos.
II. Aceptación de la cardinalidad infinita básica excesiva.	Reconocer y diferenciar la cardinalidad finita e infinita en ausencia de muchos términos.
III. Aceptación de la cardinalidad infinita básica reducida con convergencia.	Intuir la cota inferior tras la formación de los primeros términos de la sucesión. Comparar la correspondencia biunívoca que se establece entre conjuntos finitos e infinitos. Reconocer y diferenciar la cardinalidad finita e infinita en ausencia de pocos términos.
IV. Aceptación de la cardinalidad infinita básica excesiva con convergencia.	Reconocer y diferenciar la cardinalidad finita e infinita en ausencia de muchos términos.

3. Plan de trabajo

En este apartado haremos referencia a la proyección del modelo que se acaba de exponer en relación a la continuación del presente informe.

Con la construcción del modelo tenemos el propósito de validar la hipótesis:

H5 Las diferentes estrategias utilizadas por los alumnos y alumnas de 13 a 16 años en la comparación de sucesiones numéricas finitas e infinitas se pueden organizar en un modelo teórico de desarrollo que explica y describe la evolución del conocimiento de la cardinalidad infinita.

Pero en el proceso de ratificación debemos distinguir dos etapas cronológicas desde el punto de vista metodológico, bien diferenciado:

1ª Etapa: Reconstrucción del modelo.

2ª Etapa: Valoración empírica del modelo.

Con relación a la primera etapa, se realizó el análisis didáctico para tener un marco referencial y explicativo que construye y justifica el modelo de desarrollo de las competencias en el cardinal infinito centrando la atención en alumnos y alumnas de 13 a 16 años. Además se realiza un estudio empírico exploratorio para obtener información de las habilidades y estrategias utilizadas por los alumnos y alumnas como indicadores de pautas que quedan reflejados en el modelo. El hecho de considerar un estudio empírico exploratorio en la construcción del modelo evolutivo teórico, hace que este sea susceptible de una validación empírica y con ello se da paso a la siguiente etapa.

La segunda etapa se sitúa en la evaluación empírica del modelo, para ello consideramos dos subetapas:

- Construcción de una prueba adaptada al modelo. Para la preparación de dicha prueba es necesario determinar tareas de competencias del cardinal infinito de acuerdo con los esquemas lógicos matemáticos que aparecen en cada uno de los niveles del modelo teórico (Berthoud y Ackermann, 1986, Lagos, 1992, Ortiz, 1997, citados en Fernández, 2001).

- Una vez construida la prueba sobre el campo de tareas considerado, será necesario realizar un estudio empírico para confirmar la validación y contrastación del modelo.

Lo que llevamos desarrollada, es la primera etapa del plan propuesto. En la segunda, vamos a dedicar lo que queda de capítulo a la primera subetapa, es decir, a la construcción de una prueba adaptada al modelo evolutivo teórico. El capítulo siguiente estará destinado a ultimar la segunda etapa realizando un estudio empírico cualitativo en base a la prueba que fijemos.

4. Viabilidad de una prueba asociada al modelo evolutivo

En este apartado indagamos en una prueba que forme parte de un diseño experimental adecuado para un propósito muy concreto dentro de esta investigación, que no es otro que el de validar empíricamente el modelo teórico evolutivo ya expuesto.

Al tratarse de un modelo evolutivo se pretende determinar diferentes estados de conocimiento y las transiciones de unos niveles a otros. En este sentido, no basta con los métodos de observación pura y pruebas de rendimiento, sino que se hace más adecuado un método clínico, esencialmente individual, cualitativo y no estandarizado (Claparède, 1976; Vinh-Bang, 1966; Inhelder, Sinclair y Bovet, 1974, citados en Fernández, 2001). Dicho método puede tener la siguiente forma:

"Niño y experimentador actúan y hablan sobre una situación concreta. Según las acciones individuales de los niños, las observaciones y las respuestas a preguntas, el experimentador puede modificar la situación concreta, ofrecer sugerencias o pedir explicaciones" (Fernández, 2001, p. 171).

En este sentido, hemos considerado adecuado aplicar el método anteriormente expuesto en la construcción de la prueba, sin perder de vista que nuestras pretensiones son las de evaluación de distintos niveles que entran a formar parte de un modelo evolutivo y la comparación entre los mismos. Es por ello que la prueba la conforma un conjunto de tareas destinadas cada una de ellas al estudio y análisis de las características lógicas matemáticas que se dan en cada uno de los niveles. Por tanto, la prueba consta de seis tareas, una por cada estado.

Debemos hacer notar que una vez que se construya la prueba, estaremos ante la validación de la hipótesis H4 expuesta en el apartado 7 del capítulo I:

H4 Es posible determinar pruebas para alumnos y alumnas de 13 a 16 años que formen parte de un diseño experimental cualitativo, constituidas por una serie de tareas que podemos ordenar de menor a mayor dificultad dependiendo de los esquemas lógicos en la comparación de cardinales finitos e infinitos implicados en cada una de ellas.

En los apartados siguientes concretamos las tareas mediante un método sistemático que hace que todas ellas tengan unas características comunes para conformar la prueba en el sentido del método anteriormente señalado. Para ello, debemos partir de situaciones concretas y presentación comunes. Estas situaciones concretas de las que hablamos se plantean a partir de un diseño en un software concreto[88].

4.1 Tareas asociadas a los Niveles del Modelo Evolutivo

Para cada uno de los niveles pasamos una tarea que conlleva las características lógico matemáticas del mismo.

[88] Del diseño en el software de la prueba en general se describirá más específicamente en el capítulo siguiente.

El procedimiento seguido[89] queda normalizado en el cuadro de la figura 1; lo explicamos a continuación:

- Cuando indicamos Nivel K, la letra K toma sucesivamente los valores 0, I, II, III, IV.
- La tarea específica para cada uno de los niveles se inicia con una situación de partida que llamaremos Situación S1.
- La situación S1 divide a los alumnos y alumnas en dos categorías: los que la resuelven y los que no lo hacen. La primera queda codificada como K1A y la segunda como K1B.
- A los alumnos y alumnas de la categoría K1B se les presenta otra situación, llamada Situación S2.
- La situación S2 divide a los alumnos y alumnas de K1B en dos categorías: los que la resuelven, codificada como K2A, y los que no lo hacen, codificada como K2B.
- Los alumnos y alumnas de la categoría K2B no siguen la prueba o bien pasan a otra tarea, y son de un nivel inferior al considerado.
- A los alumnos y alumnas de la categoría K2A se les presenta otra situación, llamada Situación S3.
- La situación S3 divide a los alumnos y alumnas de K2A en dos categorías: los que la resuelven, codificada como K3A, y los que no lo hacen, codificada como K3B.
- Los alumnos y alumnas de la categoría K3B no siguen la prueba o bien pasan a otra tarea, y son de un nivel inferior al considerado.
- A los alumnos y alumnas de la categoría K3A se les presenta la situación de partida, es decir, la Situación S1 o bien la situación S1’ misma que resolvieron los de la categoría K1A.

[89] Está basado en la validación del modelo evolutivo de competencias ordinales de Fernández (2004) y en el estudio exploratorio expuesto en el capítulo IV.

- Los alumnos y alumnas de la categoría K3A, que son parte de los que inicialmente no habían resuelto la situación S1, pueden ahora, llegar a resolverla una vez que han realizado con éxito las situaciones S2 y S3. Si no lo resolviera quedaría en la categoría K1’B considerados un nivel inferior.
- Los alumnos y alumnas que después del proceso precedente están en K1B no siguen la prueba o bien pasan a otra tarea, y están en un nivel inferior al considerado.
- Los alumnos y alumnas que están en K1’A bien desde el principio de la prueba o una vez seguido el proceso, son los estudiantes del nivel en cuestión.

Todas las situaciones de cada una de las tareas están planteadas con el diseño en el software que hemos reseñado en el apartado anterior y cada una de ellas se pretende adaptar un nivel lógico matemático dado.

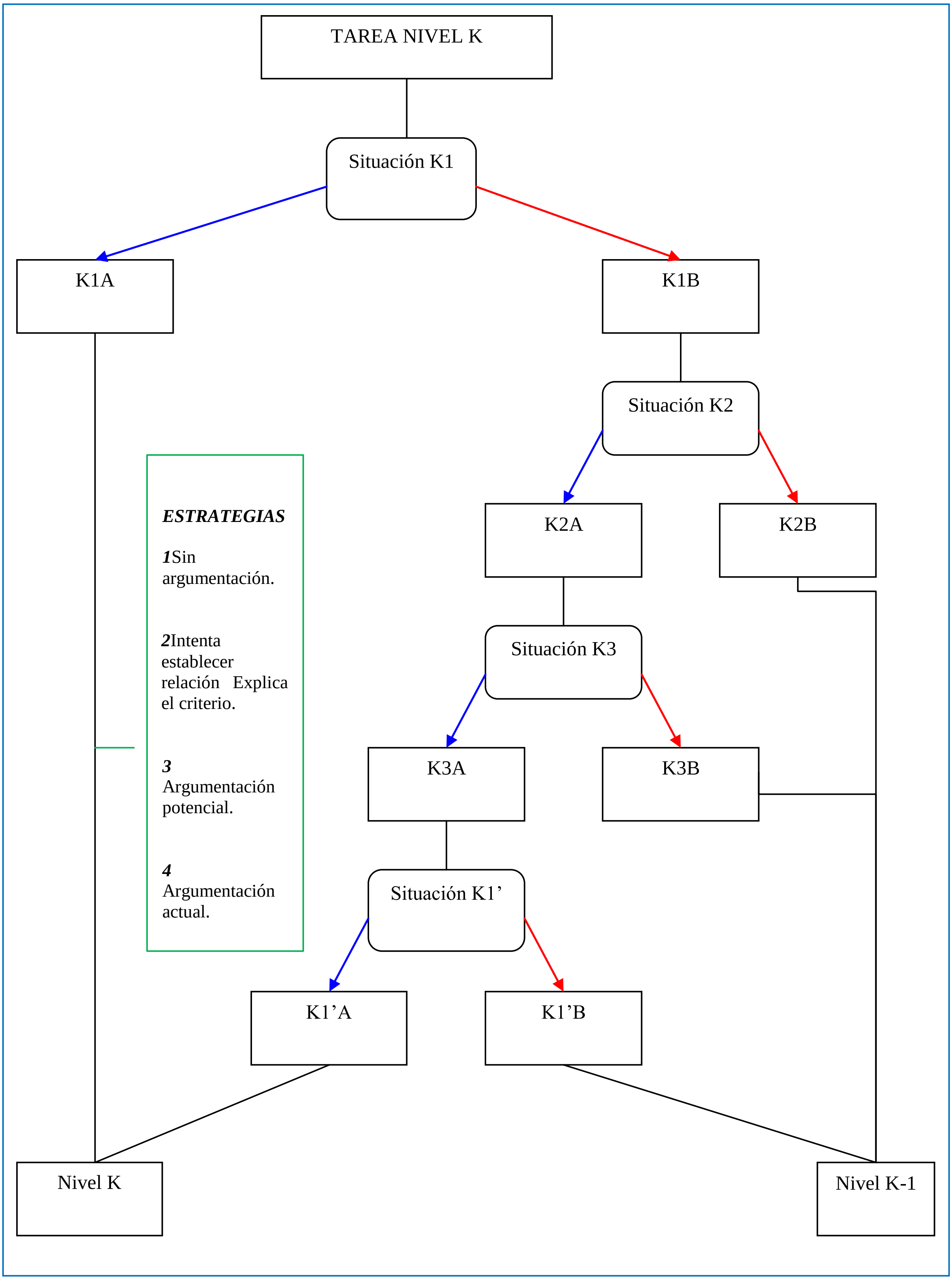


Figura VI. 1 Sistematización en las tareas realizadas para cada uno de los niveles del modelo teórico

Teniendo en cuenta las características lógico matemáticas del Estado K y el método sistemático anteriormente señalado en la figura VI.1, se determina la tarea asociada al mismo perfilando las tres situaciones que la componen.

Tenemos que hacer referencia a una tarea no asociada a ningún nivel. Durante el estudio exploratorio previo pudimos comprobar que había un sector del alumnado que no estaba familiarizado con las sucesiones en cuanto a formación de sus términos, orden, cotas, etc. Por ello, hemos visto oportuno crear una tarea, que la denominaremos de Arranque, para intentar solventad esos posibles problemas y dudas en la creación de términos de una sucesión.

Tareas de Arranque

Sin duda, el empleo de las TIC agilizará todo el proceso de entrevista y en concreto para aquellos alumnos y alumnas con dificultades en el inicio de realización de las tareas.

Si con el anterior modelo realizado en el estudio exploratorio ya tuvieron dificultad algunos alumnos y alumnas de realizar con éxito las tareas asociadas en niveles inferiores debido a esos contenidos curriculares que no se ajustan a su nivel escolar, ahora lo intentaremos subsanar con las tareas de arranque.

Mediante distintos software[90] los alumnos y alumnas con estas necesidades, mediante tareas recreativas, pueden afrontar esos contenidos curriculares que no recuerdan o no se dieron esos niveles educativos.

Una primera tarea[91], "Adivina los números", trata de completar en una regleta de series numéricas algunos números que faltan. Si aciertan, los recuadros se van coloreando en azul.

[90] Microsoft Office Excel y JClic.
[91] En Microsoft Office.

Con el mismo programa informático una segunda tarea de arranque aparece en una regleta donde deben añadir el conjunto numérico que se les pregunta. Conjuntos numéricos finitos, con poco y muchos números, y conjuntos numéricos infinitos. Se pretende con esta tarea observar como reflexiona, razona, y registra en ella los muchos o infinitos números que se piden que anoten. Se espera que la mayoría utilice los puntos suspensivos para denotar que "siguen en adelante".

La última tarea está realizada en software JClic. En esta se representa dos conjuntos numéricos finitos donde el alumno o alumna debe establecer una relación una-a-una entre sus términos teniendo para esta relación el término general de la sucesión. Si aciertan, cada par de números se obscurece. Se pretende que se vaya familiarizando con la correspondencia uno-a-uno.

A continuación, y para cada uno de los niveles, veremos algunas consideraciones generales sobre las tres situaciones que conformarían la tarea asociada al mismo, la información que se pretende obtener con cada una de ellas y la justificación de las mismas desde el punto de vista de las características lógicas matemática del nivel.

1. Tarea asociada al Nivel I

NIVEL I	**CARACTERÍSTICAS LÓGICO-MATEMÁTICAS**
Aceptación de la cardinalidad infinita básica reducida	Establecer la correspondencia biunívoca entre los conjuntos formados. Reconocer y diferenciar la cardinalidad finita e infinita en ausencia de pocos términos.

Situación 1.- Es la situación de partida. A los alumnos y alumnas se les presentan los términos generales de sucesiones numéricas. Por inducción el estudiante deberá ir calculando los términos que irá escribiendo en las casillas que se facilita para tal fin. En el caso de las sucesiones finitas, se les facilitará la tarea con casillas sombreadas que no deben disponer de términos en ellas. A continuación, lo harán con la sucesión infinita de

la misma forma, por inducción calcularán los primeros términos de esta. Creemos que es importante incidir en la representación de los puntos suspensivos sobre los cuales el alumno o alumna deberá razonar para que dispone de ellos y que trate de diferenciar los puntos que aparecen entre términos finitos y los que aparecen después del último término que escriba. En este punto, será necesario incitar al estudiante que intuya sobre la potencialidad del infinito.

Se tratará de comparar cuando la n esté acotada en una franja de pocos números (serie numérica finita) de cuando no esté acotada (serie numérica infinita). Dicha comparación se realiza mediante el "modus operandi" cuando se establecen sendas correspondencias seriales entre dos sucesiones numéricas finitas (a la que hemos llamado "tramos"), y entre dos sucesiones infinitas básicas divergentes. En ambas con la diferencia entre los dos tramos, así como entre las dos series de pocos términos (menos de 10).

En este Nivel I se presentarán sucesiones divergentes básicas tal como especificamos en el capítulo I, de la forma:

$$a_n = n + k, \; a_n = k.n$$

Situación 2.- Situación a la cual llegan aquellos alumnos y alumnas que no han superado con éxito la anterior tarea o bien no entendieron la pregunta o desconocían todo lo que conlleva el término general. Para ello, en esta situación se le explica en qué consiste el término general y se le ayuda a elaborar la serie a partir de él, si fuera necesario, es decir, sino lograran generar los términos a partir del general, se les presenta las series desarrolladas para que las comparen.

Si la razón de no haber superado con éxito la Situación 1 es la dificultad de comparar los conjuntos creados, se le facilita la tarea explicando la correspondencia biunívoca que se establece entre cada par de conjuntos.

Situación 3.- Situación a la cual llegan aquellos alumnos y alumnas que han superado con éxito la anterior situación. Se les presentan unas series muy parecidas a las de S1 para que las elaboren y comparen. En esta situación varía la estructura de la tarea. No aparecen los términos de las sucesiones, de este modo el estudiante debe construirlos por sí solo.

La tarea que corresponde a esta situación es de un grado de dificultad mayor a la anterior en cuanto a la estructura que se dispone para que el alumno o alumna escriba los términos y, por tanto, en saber corresponder biunívocamente término a término.

Situación 1'.-Situación que llegan aquellos alumnos y alumnas que superaron con éxito la situación 1 o aquellos que superaron con éxito la situación 3.

En este caso la tarea será similar, pero con una franja de número mayor en el caso de la serie numérica finita.

Aquellos alumnos y alumnas que no supieron diferenciar las sucesiones finitas de las infinitas después de todo este proceso, quedan catalogados en el Nivel 0. Los que lo superan pasan a las tareas programadas siguientes.

2. Tarea asociada al Nivel II

NIVEL II	**CARACTERÍSTICAS LÓGICO-MATEMÁTICAS**
Aceptación de la cardinalidad infinita básica excesiva.	Reconocer y diferenciar la cardinalidad finita e infinita en ausencia de muchos términos.

La tarea la conforman situaciones similares a la anterior, tan solo que la sucesión numérica finita la diferencia un mayor número de términos. Los términos generales de las sucesiones presentadas son las mismas que la de la tarea asociada al Nivel I, pero la diferencia entre los dos tramos, así como entre las dos sucesiones es de muchos términos (unos quinientos).

En las situaciones S2 y S3 se les presentan tareas con sucesiones divergentes iguales a la de la situación S1, pero con las mismas estructuras en tanto la forma de presentar las tareas de S2 y S3 del Nivel I.

En la situación 1', S1', la tarea será similar a la S1, pero con una franja de número mayor en el caso de la sucesión numérica finita.

Aquellos alumnos y alumnas que superan estas tareas con éxito bien desde S1 o llegando a la situación S1', pasan a las tareas asociadas al nivel siguiente. Aquellos que no lo superan con éxito quedan catalogados en el Nivel I.

3. Tarea asociada al Nivel III

NIVEL III	**CARACTERÍSTICAS LÓGICO-MATEMÁTICAS**
Aceptación de la cardinalidad infinita media reducida.	Intuir la cota inferior tras la formación de los primeros términos de la sucesión. Comparar la correspondencia biunívoca que se establece entre conjuntos finitos e infinitos. Reconocer y diferenciar la cardinalidad finita e infinita en ausencia de pocos términos.

Situación 1.- Es la situación de partida. A los alumnos y alumnas se les presentan los términos generales de sucesiones numéricas. Se tratará de comparar cuando la n esté acotada en una franja de pocos números (serie numérica finita) de cuando no esté acotada (serie numérica infinita). Es necesario que previamente y mientras el alumno o alumna va escribiendo los términos formados a partir del general, vayan observando sus valores y de forma intuitiva intente prever la cota inferior.

En este Nivel III se presentarán sucesiones convergentes básicas tal como especificamos en el capítulo I, de la forma:

$$a_n = \frac{kn+1}{n} = \frac{1}{n} + k, \quad a_n = \frac{1}{n+k} \quad \text{y} \quad a_n = \frac{n}{n+k} = 1 - \frac{k}{n+k}$$

Las situaciones que preceden, en las que los alumnos y alumnas superan o no estas tareas, son similares a la expuesta en las tareas asociadas al Nivel I, pero ahora con convergentes. Por tanto la situación S2 y S3 se presentan con las mismas estructuras en la forma de presentar las tareas que las situaciones S2 y S3 del Nivel I.

En la situación 1', S1', la tarea será similar a la S1, pero con una franja de número mayor en el caso de la serie numérica finita.

Aquellos alumnos y alumnas que superan estas tareas con éxito bien desde la S1 o llegando a la situación S1', pasan a las tareas asociadas al nivel siguiente. Aquellos que no lo superan con éxito, quedan catalogados en el Nivel II.

4. Tarea asociada al Nivel IV

NIVEL IV	**CARACTERÍSTICAS LÓGICO-MATEMÁTICAS**
Aceptación de la cardinalidad infinita media excesiva.	Reconocer y diferenciar la cardinalidad finita e infinita en ausencia de muchos términos.

Tareas y situaciones similares a la anterior, tan solo que las sucesiones numéricas finitas diferencian un mayor número de términos (unos 500 términos). La situación 1 se presenta de la misma forma que en la situación 1 del Nivel III con la diferencia anterior.

Las situaciones que preceden en las que los alumnos y alumnas superan o no estas tareas son similares a la expuesta en las tareas asociadas al Nivel I, pero ahora con sucesiones convergentes. Por tanto la situación S2 y S3 se presentan con las mismas estructuras en la forma de presentar las tareas que las situaciones S2 y S3 del Nivel I.

En la situación 1’, S1’, la tarea será similar a la S1, pero con una franja de número mayor en el caso de la sucesión numérica finita.

Aquellos alumnos y alumnas que superan estas tareas con éxito bien desde la S1 o llegando a la situación S1’, pasan a las tareas asociadas al nivel siguiente. Aquellos que no lo superan con éxito quedan catalogados en el Nivel III.

CAPÍTULO VII

ESTUDIO EMPÍRICO CUALITATIVO DEL MODELO EVOLUTIVO

1 Introducción

El fin primordial de esta investigación, de acuerdo con el marco metodológico y el esquema general que se incluyen en los capítulos I y II, es indagar en determinados aspectos del conocimiento del infinito actual como identidad cardinal en los alumnos y alumnas de la E.S.O. de edades comprendidas entre los 13 y 16 años. Para ello hemos construido un modelo teórico evolutivo susceptible de comparación empírica. El criterio uno-a-uno de comparación de series numéricas es el elegido en este, comparación elegida por Cantor basada en la biyección entre conjuntos.

La contrastación y validación del modelo mencionado requiere, a nuestro juicio, de un estudio empírico cualitativo para el análisis y predicción de la evolución del conocimiento en el cardinal infinito en estos estudiantes.

En el presente capítulo exponemos el diseño y los resultados del estudio empírico cualitativo, que en su parte fundamental tiene un carácter transversal (grupos diferentes de sujetos de distintas edades, 13, 14, 15 y 16 años, y niveles escolares correspondientes a esas edades) y se ha realizado con un enfoque actual. La información que se quiere obtener se refiere a la categorización de los estudiantes según el rendimiento obtenido en las tareas asociadas al modelo evolutivo teórico señaladas en el capítulo anterior.

Como la pretensión general del estudio empírico es validar un modelo evolutivo sobre un conocimiento concreto: el infinito actual como identidad cardinal, la prueba que consideramos adecuada es la entrevista clínica semiestructurada en base a lo que reseña White y Gunstone (1992) refiriéndose a las entrevistas sobre conceptos; Cohen (1990) en cuanto a las entrevistas semiestructuradas y al análisis de tareas; ó Piaget y Apostel (1976) sobre el método clínico y las entrevistas clínicas, todas estas referencias citadas en Ortiz (1997) y Fernández(2001).

Cuando los alumnos y alumnas se enfrentan a tareas no usuales en la enseñanza pueden manifestar el estado real de comprensión de los conocimientos a diferencia de otras tareas rutinarias, en las que diversos factores pueden llegar a enmascarar la verdadera situación de dicha comprensión. En este sentido y como ya hemos apuntado en el capítulo anterior, las tareas que hemos considerado en la prueba (entrevistas clínicas semiestructuradas), creemos que son adecuadas para analizar el estado real de comprensión del infinito en los estudiantes por varios motivos:

- Las situaciones concretas pensadas para la prueba parten de un material original en el que confluyen esquemas lógicos-matemáticos del cardinal infinito.
- Se ha intentado construir unas tareas no usuales en la educación reglada, con lo cual evitamos los aspectos rutinarios que se puedan dar y permitir que aflore la comprensión del conocimiento deseado.
- La determinación de las tareas viene precedida por la construcción de un modelo evolutivo.
- Las tareas asociadas a los niveles del modelo teórico manifiestan las características lógico-matemáticas de cada uno de los mismos.

En los apartados correspondientes a la primera parte de este capítulo se exponen los objetivos del estudio, la metodología y los aspectos fundamentales del diseño. La segunda parte se dedica a la exposición de los resultados y las conclusiones del trabajo relativo al modelo evolutivo del conocimiento matemático estudiado en los estudiantes.

2 Propósito del estudio

Con esta parte de la investigación se pretende alcanzar los siguientes objetivos de los enunciados en el capítulo I:

O5. Establecer un modelo teórico evolutivo de competencia del infinito actual como identidad cardinal mediante la comparación de series numérica y comprobar con alumnos y alumnas de Educación Secundaria (13-16 años) la utilidad y eficacia del modelo para describir su comportamiento real.

O6. Caracterizar cada uno de los diferentes niveles de desarrollo en términos de estrategias y procedimientos relativos al conocimiento.

Junto a estos también se pretenden conseguir el objetivo complementario siguiente:

C3. Corroborar que las metodologías cualitativas, iniciadas en Ortiz (1997) y Fernández (2001), son efectivas en este tipo de investigaciones.

Para alcanzar los objetivos anteriores se ha de comprobar la bondad de la hipótesis H5:

H5. Las diferentes estrategias utilizadas por los alumnos y alumnas de 13 a 16 años en la comparación de series finitas e infinitas se pueden organizar en un modelo teórico de desarrollo que explica y describe la evolución del conocimiento del infinito.

Como se ha visto en el capítulo anterior, la primera parte de construcción del modelo evolutivo teórico ya se ha realizado. En el presente capítulo se exponen los trabajos para llevar a cabo la valoración empírica del modelo.

Previamente debemos construir la prueba que nos permita realizar el estudio empírico cualitativo deseado, es entonces cuando validaremos la hipótesis H4:

H4. Es posible determinar pruebas para alumnos y alumnas de 13 a 16 años que formen parte de un diseño experimental cualitativo, constituidas por una serie de tareas que podemos ordenar de menor a mayor dificultad dependiendo de los esquemas lógicos de la comparación del número finito e infinito implicados en cada una de ellas.

Y con ello se alcanzaría el objetivo complementario C3.

3 Metodología

La investigación que vamos a utilizar es de tipo empírica cualitativa basada en la recogida de información mediante una entrevista clínica semiestructurada y posteriormente en el análisis cualitativo de los resultados.

En principio, a cada estudiante entrevistado se le propondrá la realización de cuatro tareas, una por cada nivel del modelo teórico, compuesta, a su vez, cada una de ellas por varias situaciones. Todas tienen en común el material concreto que sirve como soporte a la entrevista.

Aún teniendo las tareas un grado creciente de dificultad en cuanto están asociadas a niveles evolutivos de un modelo teórico, todas ellas parten del mismo material concreto, pues creemos conveniente que la dificultad esté en los esquemas lógicos matemáticos empleados para resolver las cuestiones planteadas y no en hacer variar un material que conllevaría, colateralmente, aspectos estructurales propios y ello haría variar la situación didáctica y dificultaría la evaluación del conocimiento que queremos ver aparecer en los alumnos y alumnas.

En el transcurso de la entrevista se provocará, intencionadamente, la interacción constante entre el entrevistador y el estudiante, dependiendo el desarrollo de la misma de las respuestas de cada sujeto.

Las cuatro tareas de la prueba se pueden denominar de la siguiente forma:

1. Distinguen las sucesiones divergentes finitas e infinitas en las que la diferencia es de pocos términos y primeros. Se infiere el cardinal infinito versus cardinal finito.
2. Distinguen las sucesiones divergentes finitas e infinitas en las que la diferencia es de mayor número de términos. Se infiere el cardinal infinito versus cardinal finito.
3. Distinguen sucesiones convergentes, y por tanto acotadas, finitas e infinitas en las que la diferencia es con pocos términos iniciales. Se infiere el cardinal infinito versus cardinal finito.
4. Distinguen sucesiones convergentes, y por tanto acotadas, finitas e infinitas en las que la diferencia es con mayor número de términos iniciales. Se infiere el cardinal infinito versus cardinal finito.

Cada una de ellas presenta las características lógico-matemáticas propias de cada nivel del modelo evolutivo teórico, en este sentido presentan una jerarquización de menor a mayor dificultad en cuanto que los esquemas lógicos matemáticos implicados para su resolución sean más o menos evolucionados. Por ello, cuando un estudiante no realiza correctamente dos tareas consecutivas de un mismo nivel, no pasa al siguiente.

Cada una de las tareas consta de tres situaciones, así para la tarea asociada al Nivel K las situaciones serían S1, S2, S3 y S1'. Para el desarrollo de la entrevista, en cada una de las tareas, se sigue el esquema de la figura 1 del capítulo VI (apartado 4.1) en el que queda sistematizado el desarrollo de la prueba.

4 Elección y distribución de la muestra[92]

De acuerdo con los propósitos de la investigación tomamos como referencia la población de escolares correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. Por razones de tamaño y teniendo en cuenta los propósitos limitados de la investigación, decidimos elegir una muestra que tuviera una cierta representatividad con respecto a la población mencionada. Todo ello se justifica sobre la base de los siguientes motivos:

- Para este estudio cualitativo nos interesa cotejar los resultados de estudiantes de distintos cursos y que hayan seguido procesos de enseñanza tanto iguales como distintos (unidades paralelas, adaptaciones significativas y no significativas, programa de diversificación curricular, alumnos y alumnas con altas capacidades). Esta semejanza o diferencia en el proceso de enseñanza-aprendizaje no es determinante para nuestro trabajo, pero puede ser un factor a tener en cuenta para la interpretación del mismo.
- Nuestro propósito es realizar un estudio transversal.
- En ninguno de los casos nuestro estudio tiene la intención de generalizar resultados.

En definitiva se elige un solo centro escolar con la intención de que todos los estudiantes tengan similares características y así, no pueda haber diferencias significativas en los resultados según el medio sociocultural, urbano o rural, y según el tipo de enseñanza, pública o privada.

1) La muestra de alumnos y alumnas para la realización del estudio empírico cualitativo sale solo de este centro. El criterio para la elección de dicha muestra viene dado por una distribución por edades dentro de cada curso de los cuatro considerados en Educación Secundaria.

[92] Misma que para el estudio del infinito actual en alumnos y alumnas siguiendo el modelo de inclusión de Bolzano.

2) El sistema de elección es mediante un sorteo de veinte alumnos y alumnas por curso. Una vez realizado este proceso, son reunidos en el salón de acto y se les comenta la naturaleza del estudio y en que va a consistir este. Al finalizar este encuentro se les entrega a cada alumno o alumna un modelo de autorización paterna (anexo VI) que debería cumplimentar el padre, la madre o el tutor/a de los menores de 16 años, de acuerdo con la LOPD respecto al tratamiento de las imágenes de menores de dieciséis años[93]. La confidencialidad de los apellidos del estudiante se ha respetado. De ahí que se identifica con las dos primeras letras de su nombre, la primera en mayúscula seguida de un punto, luego su edad en números acompañado de una coma y seguido del número de meses desde su último cumpleaños hasta el mes que se realizó la entrevista. Si coinciden en estas letras y estos números, se le acompaña con la tercera letra de su nombre.

3) Una vez acabado el plazo, una semana después de esta reunión, y aclaradas las dudas de algunos familiares respecto a la forma en que se iban a realizar las entrevistas, el número de alumnos y alumnas que aceptan la realización de las mismas por curso son los siguientes:

   1º ESO: 20 estudiantes

   2ª ESO: 15 estudiantes

   3º ESO: 18 estudiantes

   4º ESO: 16 estudiantes

   En total: 69 estudiantes.

[93] El derecho a su intimidad y el derecho a la protección de sus datos de carácter personal están regulados por la Ley Orgánica 1/1982, de 5 de mayo, de protección civil del derecho al honor, a la intimidad personal y familiar y a la propia imagen y la Ley Orgánica 15/1999, de 13 de diciembre, de Protección de Datos de Carácter Personal. También la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo hace especial hincapié en el tratamiento de datos o imágenes del alumnado.

4) Estos mismos alumnos y alumnas participaron en el estudio del infinito actual siguiendo el modelo de inclusión de Bolzano (capítulo V).

5 *Materiales*

El material empleado en esta prueba consta de:

- Dos equipos informáticos (monitores, teclados, ratones y torres) conectados entre ellos mediante escritorio remoto, de tal forma que puedan interactuar tanto estudiante como entrevistador en la tarea que se esté realizando.
- Webcam (enfocado solo al estudiante) y micrófono (recogerá toda la conversación establecida por Entrevistador-Estudiante)
- Herramientas informáticas:
    - Para las tareas asociadas (Ver anexo V) a los niveles del modelo evolutivo, Excel (Microsoft Office Excel) y JClic.
    - Para la grabación de imagen y sonido, el capturador de pantalla Camtasia Studio 8[94].
- Podrán utilizar una calculadora científica proporcionada por el entrevistador.

6 *Actividades*

Se trata de una entrevista semiestructurada, y por ello es necesario especificar en el diseño previo tanto el contenido como los procedimientos (Cohen, 1990, citado en Fernández, 2001). Exponemos a continuación el objetivo pretendido; el desarrollo de la entrevista y el análisis de resultados.

[94] Software CamStudio (CamStudio.org).

6.1 Tareas

Las tareas consisten en lo siguiente:

1. Se trata de comparar dos conjuntos numéricos finitos y otros dos infinitos, que previamente deberán calcular sus términos a partir de términos generales de sucesiones básicas de tipo

$$a_n = n + k \text{ y } a_n = k.n$$

divergentes, donde de la segunda, de cada tipo, el término general es tal que se diferencian en el anterior en varios términos iniciales. Los estudiantes que superan con éxito estas tareas, pasan a las tareas del nivel siguiente y a los que no lo superan con éxito, quedan categorizados en el Nivel 0.

2. Se trata de comparar dos conjuntos numéricos finitos y otros dos infinitos, que previamente deberán calcular sus términos a partir de términos generales de sucesiones básicas de tipo

$$a_n = n + k \text{ y } a_n = k.n$$

divergentes, donde de la segunda, de cada tipo, el término general es tal que se diferencian en el anterior en una gran cantidad de términos. Los estudiantes que superan con éxito estas tareas, pasan a las tareas del nivel siguiente y a los que no lo superan con éxito, quedan catalogados en este Nivel I.

3. Se trata de comparar dos conjuntos numéricos finitos y otros dos infinitos, que previamente deberán calcular sus términos a partir de términos generales de sucesiones básicas de tipo

$$a_n = \frac{kn+1}{n} = \frac{1}{n} + k \quad a_n = \frac{1}{n+k} \quad \text{y} \quad a_n = \frac{n}{n+k} = 1 - \frac{k}{n+k}$$

convergentes, donde de la segunda, de cada tipo, el término general es tal que se diferencian en el anterior en varios términos iniciales. Los estudiantes que superan con éxito estas tareas, pasan a las tareas del nivel siguiente y a los que no lo superan con éxito, quedan catalogados en el Nivel II.

4. Se trata de comparar dos conjuntos numéricos finitos y otros dos infinitos, que previamente deberán calcular sus términos a partir de términos generales de sucesiones básicas de tipo

$$a_n = \frac{kn+1}{n} = \frac{1}{n} + k \quad a_n = \frac{1}{n+k} \quad \text{y} \quad a_n = \frac{n}{n+k} = 1 - \frac{k}{n+k}$$

convergentes, donde de la segunda, de cada tipo, el término general es tal que se diferencian en el anterior en una gran cantidad de términos. Los estudiantes que superan con éxito estas tareas son catalogados en el Nivel superior IV y a los que no lo superan con éxito, quedan catalogados en el Nivel anterior III.

6.2 Objetivo

Con estas tareas se pretende estudiar la evolución de las competencias en el infinito actual como identidad cardinal en los entrevistados y entrevistadas, mediante la comparación de series numéricas finitas e infinitas de tipos divergentes y convergentes.

6.3 Desarrollo de la entrevista

A continuación expresamos la forma en que procederemos en las entrevistas para todas y cada una de las tareas asociadas a los niveles del modelo evolutivo teórico. El procedimiento general según figura VI.1 capítulo VI, es el siguiente:

Para cada uno de los niveles su tarea asociada (conlleva, a su vez tres situaciones. Para la situación S1 (situación inicial primera de la tarea K) se realizará una clasificación de respuestas atendiendo a que el estudiante realizara o no la actividad. Si la realiza correctamente se analizará el tipo de estrategia y procedimiento seguido, si no lo hace entonces pasa a realizar la situación S2 (segunda de la tarea K). Si no realizara con éxito esta nueva situación se da por finalizada la tarea K, mientras que si la realiza correctamente entonces pasará a realizar la situación S3 (tercera de la tarea K). Si no realiza con éxito esta nueva situación se da por finalizada la tarea K, mientras que si la realiza correctamente entonces pasará a realizar una tarea similar a la situación S1 pero modificada llamada S1'. Si la realizara correctamente se analizará el tipo de estrategia y procedimiento seguido, si no lo hace entonces se da por finalizada la tarea.

En los apartados sucesivos, exponemos el procedimiento que seguiremos en el desarrollo de las entrevistas para cada una de las tareas asociadas a los niveles, así como el protocolo seguido.

6.3.1 *Presentación esquemática del desarrollo de la entrevista para cada una de las tareas asociadas a los niveles*

Considerando las características lógicas-matemáticas asociadas a las tareas y el procedimiento general señalado en el apartado anterior tenemos lo siguiente:

Tarea 1

Situación I1. Se le presenta al estudiante la ficha de este nivel, ver anexo VI. El investigador leerá junto al entrevistado esta ficha y le dirá que conteste a las preguntas que aparecen al final de la misma.

Se pueden presentar dos opciones con respecto a la resolución por parte del estudiante de la situación 1 que llamaremos I1A y I1B (I1 indica que estamos en la primera situación del primer nivel) y que son respectivamente: La resuelve y no la resuelve.

El investigador observa y registra las distintas estrategias de los alumnos y alumnas que se presentan en la opción I1A.

Situación I2. Para los alumnos y alumnas de la categoría I1B se presenta la situación I2.Para ello, se les pone en la pantalla la actividad de esta situación, ver anexo VI.

El investigador plantea:

Sucesiones finitas (A y B). *En cada casilla de la primera fila* (marcadas con bordes) *vamos escribiendo los números del 1 hasta 10. En las casillas de la fila paralela* (coincidiendo en vertical una a una con las de la fila de arriba) *escribiremos los números resultantes de sumar 3 a los anteriores, de 1 hasta 7, en este caso* (están marcadas con bordes esas siete casillas). Se les pregunta: "*¿Tienen el mismo número de elementos?"*

Sucesiones infinitas (C y D). *En cada casilla de la primera fila* (marcadas con bordes) *vamos escribiendo los números de 1 en adelante. Vemos que es imposible escribir todos los números, por eso hemos puestos puntos suspensivos*, ellos deberán luego razonar *qué números representan estos puntos suspensivos*. Finaliza esta fila con una casilla, marcada por los bordes, con el número 100. Posteriormente en esa misma fila aparecen puntos suspensivos que tendrán que relacionar con los anteriores puntos, *¿estos puntos suspensivos representan la misma cantidad de números que los anteriores?* En la fila paralela (coincidiendo en vertical una a una con las de la fila de arriba) escribiremos los números resultado de sumar 3 a los anteriores, de 1 en adelante. Así como el correspondiente a la casilla marcada con el número 100. Intenta corresponder cada elemento de la primera hilera con la de la segunda. *¿Tienen el mismo número de elementos?*

Se pueden presentar dos opciones con respecto a la resolución por parte del estudiante de la situación I2 que llamaremos I2A y I2B: la resuelve y no la resuelve

Los alumnos y alumnas de la categoría I2B no continuarán con la prueba y quedarán categorizados en el Nivel 0. Los estudiantes de la categoría I2A les haremos continuar con la situación I3.

Situación I3. Para los estudiantes de la categoría I2A se presenta la situación I3.Para ello, se les ponen la ficha de esta situación, ver anexo VI. Esta ficha tienen las mismas tareas que las anteriores diferenciando en que las casillas paralelas no coinciden en vertical una a una. Estas casillas deberán introducir los números de las sucesiones (incluido la casilla que anteriormente estaba marcada con el número 100, ahora serán ellos los que pongan el número que quieran y crean). Posteriormente, deberán establecer la correspondencia de los términos de arriba con los de abajo, sin ninguna ayuda o pista del investigador. Como podemos observar, se plantean unas tareas más complejas que las anteriores, pero más sencillas que las planteadas inicialmente.

El investigador propone: *Haz lo mismo que en las fichas anteriores. Contesta al final a las preguntas planteadas.*

Las opciones existentes respecto a la resolución son: I3A si la resuelve y I3B si no lo hace.

Los alumnos y alumnas de la categoría I3B no continuarán con la prueba y quedarán categorizados en el Nivel 0. Los estudiantes de la categoría I3A les volvemos a pasar la situación I1 modificada, I1’, ver fichas anexo VI: si las resuelven con éxito I1’A, están en la misma situación que los de I1A, pasando como estos últimos a las tareas asociadas al Nivel II. Si no la resuelven correctamente, I1’B, quedan categorizados en el Nivel 0.

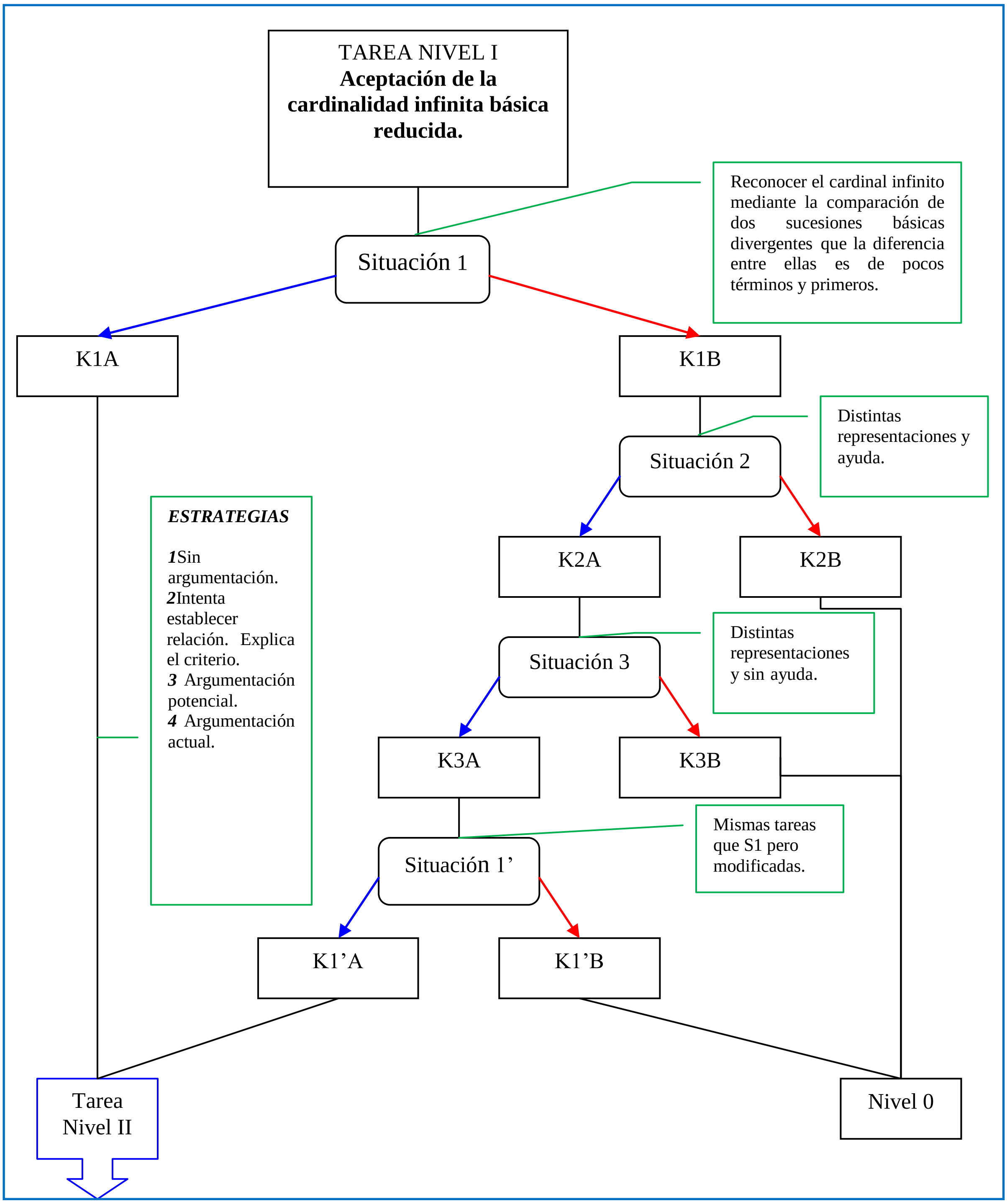


Figura VII. 1. Desarrollo de la entrevista para la tarea 1

Tarea 2

Situación II. Se le presenta al estudiante la ficha de este nivel, ver anexo VI. En este caso, como en el anterior, en la misma situación, el estudiante tendrá que calcular los términos de las dos sucesiones a comparar. Las diferencias entre este nivel y el anterior son: primero que debe calcular y representar muchos más términos en las tareas finitas, unos cinco mil; y segundo, que las diferencias entre los conjuntos formados son de muchos términos, unos 500.

El investigador leerá junto al entrevistado esta ficha y le dirá que conteste a las preguntas que aparecen al final de la misma.

Se pueden presentar dos opciones II1A y II1B y se procede igual que en la tarea 1.

Situación II2. Las tareas, que se proponen en esta situación, tienen la misma estructura que en las pasadas del nivel anterior, es decir a modo de filas con casilleros marcados por los bordes, el alumno o alumna tendrá que ir escribiendo cada término de las sucesiones. Por tanto, habrá dos pares de filas: una para las sucesiones finitas y otra para las infinitas. La diferencia con las anteriores, como ya dijimos, es de muchos términos. Por tanto, es necesario que en las sucesiones finitas aparezcan puntos suspensivos tal como pasa con las sucesiones infinitas. Por tanto, el entrevistador planteará al alumno o alumna porque aparecen esos puntos en estas sucesiones finitas. Todo lo demás se planteará como en la situación del anterior nivel.

Las opciones presentadas son II2A y II2B, y se procede como en la tarea anterior.

Situación II3.Las tareas que se proponen son de la misma estructura que en las pasadas en la situación I3, con la diferencia que se explica en la situación II2, de los puntos suspensivos.

Las opciones existentes respecto a la resolución son: II3A si la resuelve y II3B si no lo hace.

Los alumnos y alumnas de la categoría II3B no continúan con la prueba y quedarán categorizados en el Nivel I. A los estudiantes de la categoría II3A les volvemos a pasar la situación II1 modificada, II1’, ver fichas anexo VI: si las resuelven con éxito están en la misma situación que los de II1A, pasando como estos últimos a plantearles las tareas asociadas al Nivel III. Si no la resuelven correctamente, II1'B, quedan categorizados en el Nivel I.

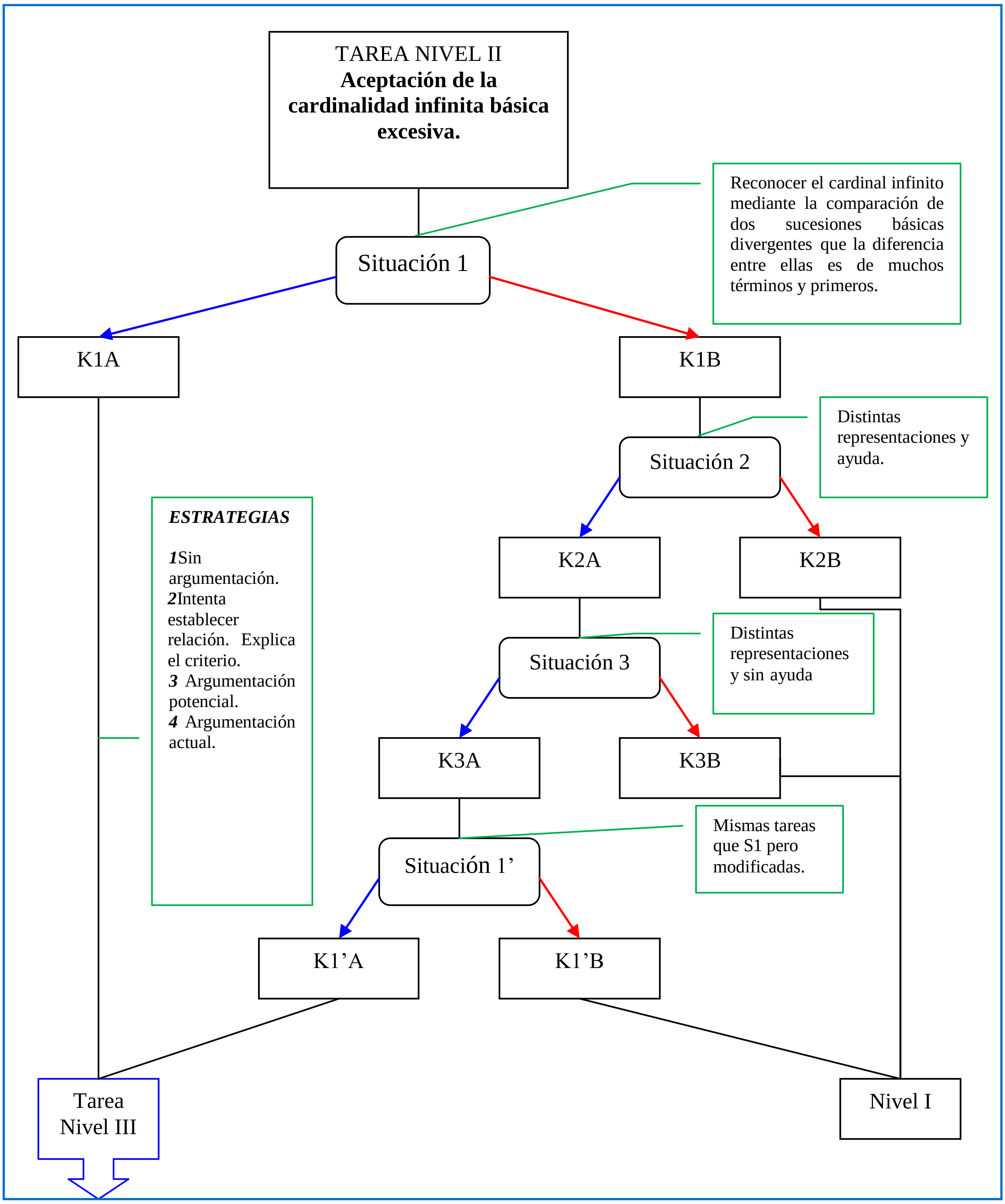


Figura VII. 2. Desarrollo de la entrevista para la tarea 2

Tarea 3

Situación III1. Se presenta estudiante la ficha de este nivel, ver anexo VI. Siguen siendo las mismas estructuras que las fichas anteriores en esta misma situación. Tal como se explicó, en este nivel se utilizan sucesiones numéricas convergentes, en concreto $a_n = \frac{1}{n+k}$. El entrevistador planteará lo mismo que anteriormente haciendo hincapié que observe como las sucesiones planteadas son decrecientes con cota inferior al cero (los términos que van incluyendo en los casilleros correspondientes, se van transformando en números decimales automáticamente).

Las dos opciones se denominarán III1A y III1B y se procede como en tareas anteriores

Situación III2. Para los alumnos y alumnas de la categoría III1A se presenta la situación III2, esta similar a las anteriores en esta misma situación, pero con sucesiones divergentes.

Se pueden presentar dos opciones: III2A y III2B según la resuelvan o no respectivamente.

Los estudiantes de la categoría III2B no continuarán con la prueba y quedarán categorizados en el Nivel II.A los alumnos y alumnas de la categoría III2A les hacemos continuar con la situación III3.

Situación III3. Igual que la situación III1, pero en este caso con sucesiones convergentes.

A los alumnos y alumnas de la categoría III3A les volvemos a pasar la situación III1 modificada, III1’, ver fichas Anexo V: si las resuelven con éxito, están en la misma situación que los de III1A, pasando como estos últimos a plantearles las tareas asociadas al Nivel IV. Si no la resuelven correctamente, III1’B, quedan categorizados en el Nivel II.

Tarea 4

Situación IV1. Similar a la situación I1, pero con series convergentes.

Se pueden presentar dos opciones con respecto a la resolución por parte del estudiante de la situación IV1 que llamaremos IV1A y IV1B según la resuelva o no.

Situación IV2. Similar a I2, pero con series convergentes.

Se procede igual que en la tarea anterior.

Situación IV3. Similar a I3, pero con series convergentes.

Se pueden presentar dos opciones con respecto a la resolución por parte del estudiante de la situación IV3, que llamaremos IV3A y IV3B: según la resuelvan o no.

Los alumnos y alumnas de la categoría IV3B no continuarán con la prueba y quedarán categorizados en el Nivel III. A los estudiantes de la categoría IV3A les volvemos a pasar la situación IV1 modificada IV1': si están en IV1'A, entonces son de este nivel, pero si por el contrario están en IV1B, no son de este nivel y quedarán categorizados en el Nivel III.

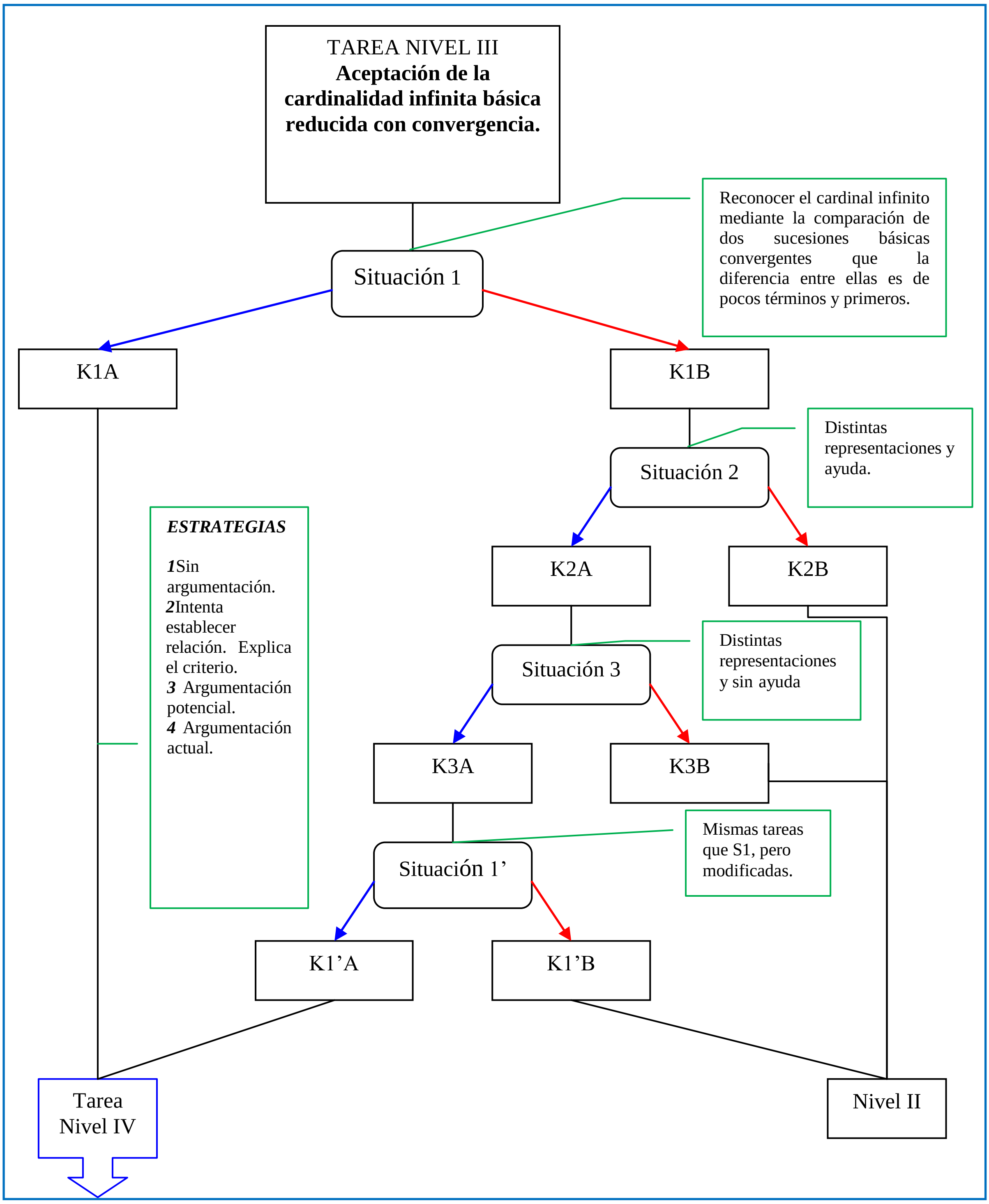


Figura VII. 3. Desarrollo de la entrevista para la tarea 3

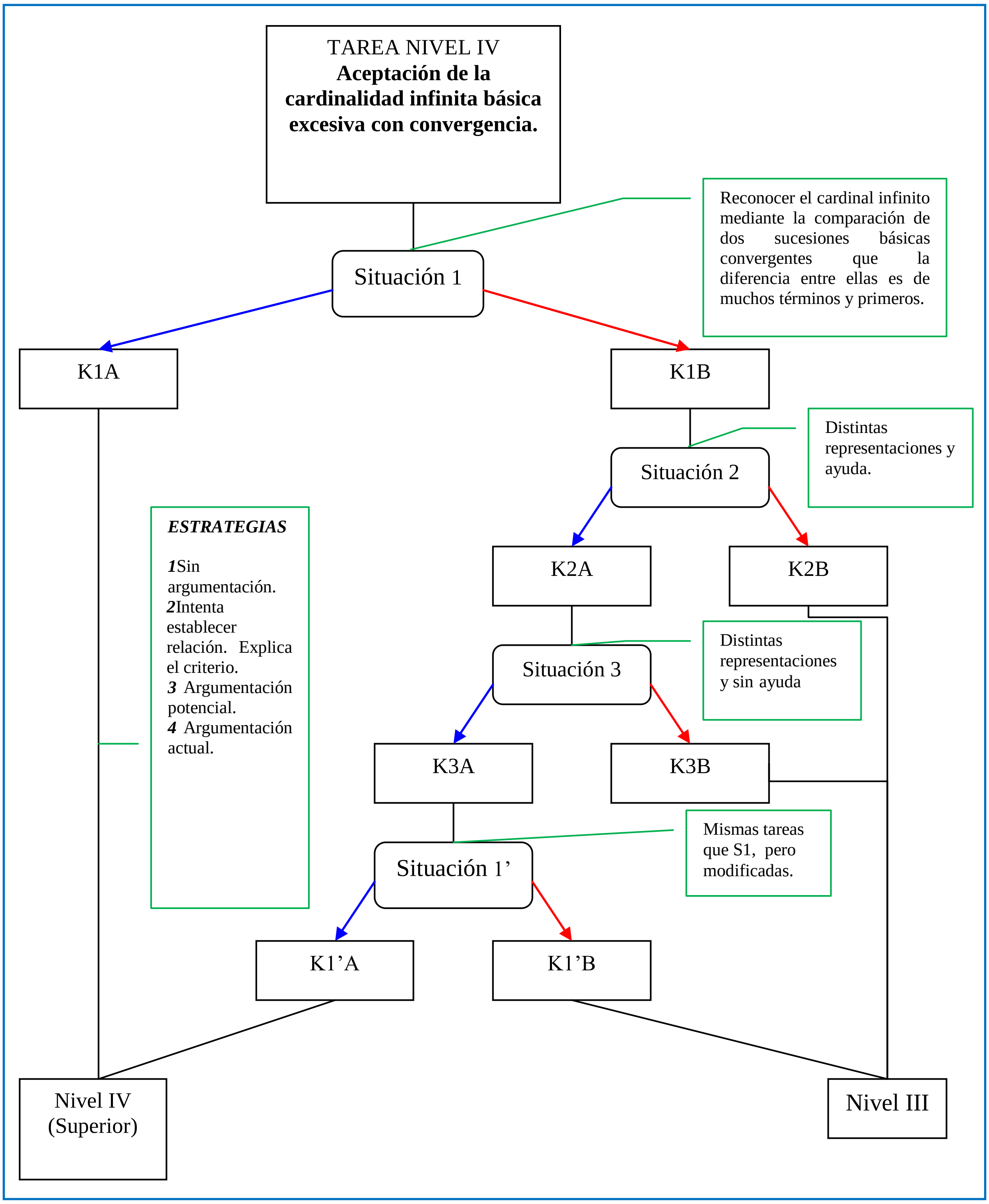


Figura VII. 4. Desarrollo de la entrevista para la tarea 4

6.3.2 *Aspectos protocolarios en el desarrollo de la entrevista*

Toda vez que hemos visto el procedimiento en cuanto a su forma sistemática y esquematizada del desarrollo de las entrevistas en cada una de las tareas, es momento de indicar el formalismo y la parte protocolaria que hemos considerado.

El comienzo de las tareas de cada uno de los niveles en las entrevistas se realiza de la siguiente forma por parte del investigador (lo indicamos con la letra E):

TAREAS 1 (correspondiente a la Situación1) E. Vamos a empezar con esta ficha. Primero leerá en voz alta la actividad A, la contestará; luego leerá la B, y la contestará. Finalmente, responderá la pregunta que se hace al final de la columna. Una vez terminado con esta, se hará lo mismo en la columna de la derecha, C y D.

TAREAS 2 (correspondiente a la Situación 2) E. Se va hacer el mismo ejercicio, pero en esta ficha, donde se va a preguntar lo mismo que antes. En este caso hay ya casillas que tienen números. Observa que te he puesto los primeros términos. En A, para n igual a 1, es 1, y te lo he puesto en la primera casilla. Sigo, para n igual a 2, es 2 (o ½ según la tarea), y te lo he puesto en la segunda casilla. Sigue tú. Ahora, lo mismo, pero para B. ¿Ves la correspondencia que hay entre A y B? (Se lo señalo con el cursor gracias al escritorio remoto). Pues bien, intenta responder la pregunta que te hace. Bien, pasemos a C y D. Como ves es muy parecido, lo único que se diferencia en el anterior es que aparecen puntos suspensivos. Eso significa que seguirá adelante, que no vamos a poner todos los términos. Te he puesto de nuevo los primeros. Igual que en A, para n igual 1, es 1, te lo he puesto en la primera casilla, para n igual a 2, es 2, te lo he puesto en la segunda. Sigue tú. Ahora aparece unos puntos suspensivos, eso significa que seguirán. Y esta casilla vacía es para que tú pongas un término, que sea grande, por eso antes te he puesto esos puntos, para que haya diferencias entre estos valores. Yo te he puesto este (1000). Lo mismo para D. ¿Ves la correspondencia entre C y D? (Se lo señalo con el cursor). Intenta ahora responder a la pregunta.

TAREAS 3 (correspondiente a la Situación 3) E. Se va hacer el mismo ejercicio, pero en esta nueva ficha. Ahora te voy ayudar menos. Intenta hacerlo. Te digo igual que antes, observa bien la correspondencia entre los números que vas apuntando en A con los que vas apuntando en B. Responde las preguntas que se hace. Ahora lo mismo con C y D. Intenta ahora responder a la pregunta.

TAREAS 4 (correspondiente a la Situación 1') E. Ahora terminamos, con la misma actividad, pero con el mismo formato inicial. Ahora sí que no te voy a decir nada ni te voy ayudar.

6.4 Aspectos a considerar

Pretendemos lo siguiente:

- Comprobar si el alumno o alumna es capaz de calcular los términos de una sucesión dado el término general.
- Comprobar si el alumno o alumna establece relaciones lógicas-ordinales numéricas al comparar los términos de las sucesiones que ha tenido que construir previamente. Relacionarlo con los demás puntos de este apartado.
- Comprobar si el alumno o alumna reconoce la diferencia entre conjuntos numéricos creado mediante una sucesión finita básica cuando se diferencian en pocos o en muchos términos.
- Averiguar si el alumno o alumna reconoce la identidad cardinal entre dos conjuntos numéricos formados mediante una sucesión infinita básica cuando se diferencian esos conjuntos en pocos y en muchos términos iniciales.
- Averiguar si el alumno o alumna es capaz de diferenciar los puntos anteriores, en sucesiones convergentes y divergentes.

7 Instrumentos y estrategias de recogidas de información

Para la recogida de datos hemos utilizado un instrumento común que ha sido la grabación en vídeo de todo lo que se realizaba en la pantalla del ordenador, junto a la imagen webcam del alumno o alumna y la conversación establecida.

Con estos instrumentos hemos podido reproducir las entrevistas en su totalidad con todos aquellos detalles que de otra manera nos hubiera sido imposible de conseguir.

Una vez realizada todas las entrevistas se hace la trascripción de las mismas con ayuda del reproductor de vídeo (trascripción que puede verse en el anexo VII).

8 Consideraciones generales sobre el desarrollo de la entrevista

Las entrevistas se realizaron en los meses de febrero y marzo del curso 2014/2015. En el único colegio, “Huerta de la Cruz” en Algeciras.

Las entrevistas se realizaron en horario lectivo, respetando los recreos, a puerta cerrada en un despacho preparado para ello y pasando, uno por uno, todos los estudiantes seleccionados.

Cada entrevista tuvo una duración que osciló entre 20 y 30 minutos, por lo que, si tenemos en cuenta que no se permitieron interrupciones se realizaron entre 3 y 4 entrevistas diarias. Fueron necesarias unos veinte días.

Por último hemos de decir que todas las entrevistas tuvieron un desarrollo adecuado, incluso más satisfactorio de lo previsto teniendo en cuenta la actitud positiva de los entrevistados frente a una webcam y micrófono.

Agradecemos a todos los alumnos y alumnas, profesores, profesoras y directoras su colaboración.

En los apartados que siguen hasta el final del capítulo, se exponen los resultados y conclusiones de dichas entrevistas teniendo en cuenta las tareas consideradas asociadas al modelo evolutivo.

9 Las entrevistas realizadas en la prueba exploratoria y las realizadas en el presente estudio

Hay una gran diferencia entre el proceso de recogida de información en la prueba exploratoria y en el presente estudio. El uso de las TIC en los centros escolares ha facilitado no sólo la tarea de recogida de información y su tratamiento en la transcripción de las entrevistas, sino también en la forma de disponer las tareas a los alumnos y alumnas. De esta forma, el volumen de información es mayor, entrevistándose un número mayor de alumnos y alumnas.

9.1 Innovación en las Entrevistas

Las entrevistas se realizarán mediante el uso de ordenadores conectados en red y con escritorio remoto[95] del entrevistador al sujeto entrevistado. Con este software se podrá controlar remotamente el ordenador del entrevistado, Es decir, durante el proceso de la entrevista, podríamos modificar, sugerir, aclarar, etc. Es más, al estar conectado en red, no es necesaria la entrevista de forma presencial, se podría realizar en lugares distintos, sin necesidad de estar los dos físicamente en el mismo lugar, estudiante y entrevistador.

Los alumnos y alumnas podrán resolver las tareas programadas mediante el uso del teclado, ratón, o mediante la voz, siguiendo las indicaciones del entrevistador.

[95] Software Teamviewer

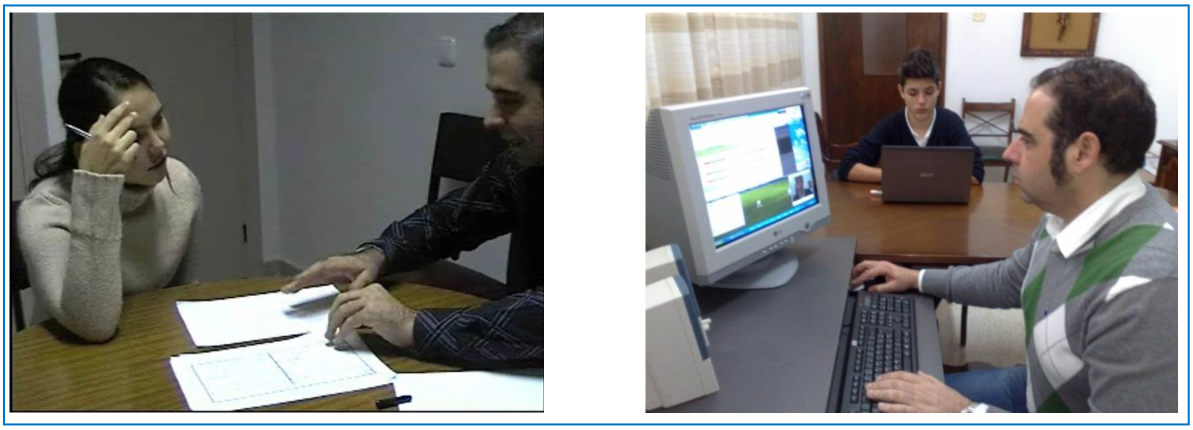


Figura VII. 5. Desarrollo de las entrevistas: El antes y el después

En la pantalla del ordenador del entrevistador se refleja la tarea que estará realizando, además de toda la videoconferencia durante el proceso. El programa informático dispone, además del uso del Chat, con lo que facilita la tarea del estudiante, sino se expresa adecuadamente y quiere utilizar el formato escritura.

Todo lo que aparece en la pantalla del entrevistador, incluido la videoconferencia, se guardará íntegramente en un archivo[96], para su posterior transcripción y análisis de respuestas. Es otra ventaja más frente a las grabaciones analógicas, los datos que se recogen digital tiene un carácter de inmutabilidad que no lo tienen las grabaciones con las cámaras de vídeos tradicionales o grabadoras de voz.

Otra ventaja que nos proporciona el uso de esta herramienta informática, es poder seguir paso a paso todos los movimientos del cursor y los datos que va introduciendo el alumno o alumna cuando está realizando las tareas asociadas.

[96] Software CamStudio (CamStudio.org).

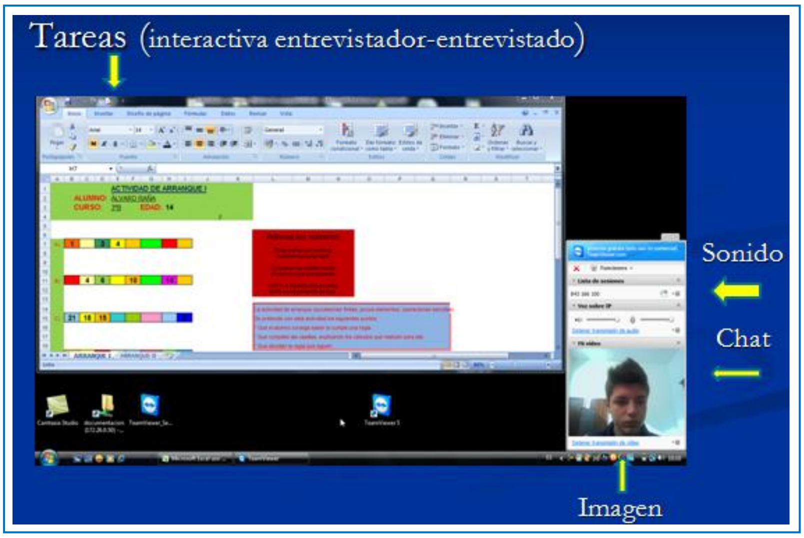


Figura VII. 6 Imagen de la pantalla del entrevistador

9.2 Innovación en los formatos de las Tareas

Hay un antes y un después en las tareas asociadas a los niveles: mientras que en la primera fase se realizaba en papel, ahora se utilizará la herramienta informática[97] para la realización de la misma.

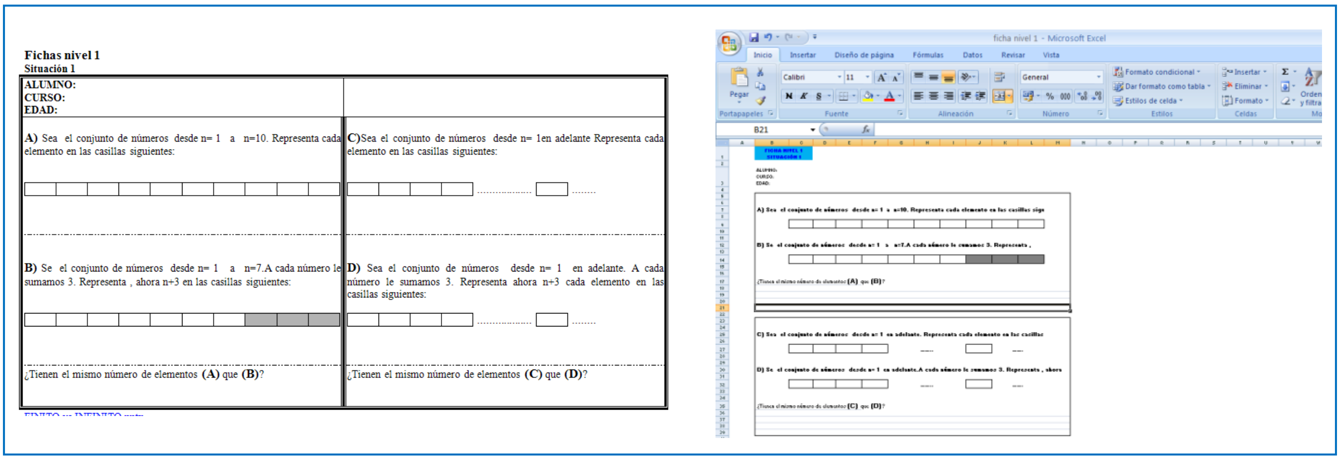


Figura VII. 7 Antes y después en las fichas de tareas

Como el uso de las TIC agiliza todo el proceso de entrevista, hemos pensado ampliar la población a estudiar.

[97] Microsoft Office Excel.

Por otro lado, pudimos observar en el estudio exploratorio, que había sujetos que tenían dificultad en empezar las tareas, de esa forma hemos creado tres tareas de arranque para poder conectar con las tareas asociada al Nivel I, si fuera necesario. Para ello, también quisimos realizarlos con el uso de herramientas informáticas[98].

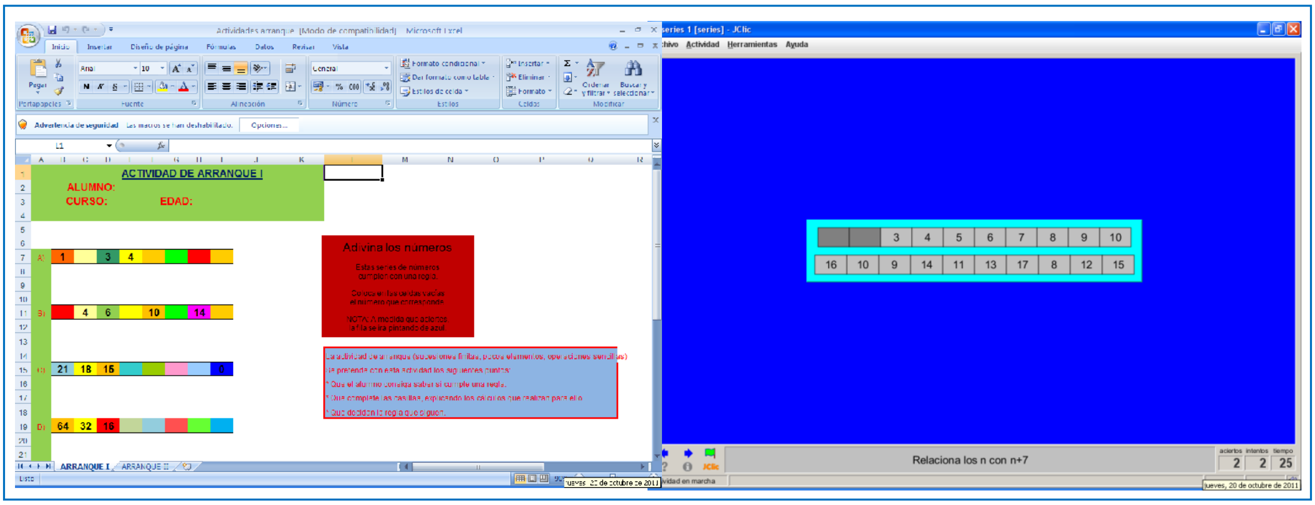


Figura VII. 8 Actividades de arranque en distintos programas

9.3 Pretensiones con el uso de TIC

Al margen del estudio en sí, podríamos aplicarlas en otros contextos:

- Posibilidad de colgar en la red todo el modelo con las tareas asociadas a cada nivel de competencia.
- Posibilidad de crear una base de datos en la red.
- Posibilidad de que estas tareas no solo sirvan para la construcción del modelo evolutivo, sino que con las TIC se utilicen para actividades de enseñanza y aprendizaje.
- Posibilidad de usar con alumnos y alumnas de necesidades educativas especiales.

[98] Microsoft Office Excel y JClic.

10 Resultados y conclusiones de la prueba

Diremos que un alumno o alumna ha superado con éxito la tarea del Nivel K, si realiza correctamente la situación K1 en cualquiera de sus dos presentaciones, es decir, si están en la categoría K1A. En el caso que un estudiante se encuentre en esta situación, se observará la estrategia seguida y se codificará con un número del ***1*** al ***4*** según se indicó en el apartado 6.3.1 de este capítulo.

Vamos a considerar para todos los estudios realizados, que el estudiante da la respuesta que se le asignará en las tablas correspondientes si la hace explícita al menos una vez en el transcurso de la entrevista.

10.1 Análisis de respuestas

La serie de cuadros-esquemas presentados en las *Figuras VII 1, 2, 3* y *4* del apartado 6.3.1 de este mismo capítulo nos ha proporcionado una posible categorización de respuestas para su análisis desde el punto de vista del modelo evolutivo.

En el anexo VII.1, podemos encontrar algunas anotaciones para justificar que el estudiante presenta una categoría determinada de respuestas. Aunque dichas anotaciones aparezcan en una intervención concreta tenemos que considerar, para que sirva de justificante en la categoría, algunas preguntas y respuestas que le anteceden así como algunas otras que le suceden. En este sentido tenemos:

- Las anotaciones del tipo *(Ki)* que aparecen en algunas intervenciones del investigador, significa que está planteando la situación *i* (con *i* variando 1,2, 3 o 1') de la tarea asociada al Nivel *K (K toma los valores de I a IV).*
- En algunas respuestas de los estudiantes aparece entre paréntesis notas del tipo: *(Kim)*[99] que será el justificante de señalar en la tabla[100] la celda de coordenadas

[99] K representa el nivel, i la situación de la tarea asociada al nivel y m toma los valores a ó b.

(m, Nivel K, i), es decir, justificará que el estudiante ha superado la situación i del Nivel K, si m toma el valor A, y que no lo ha superado, si m toma el valor B.

- Si el estudiante no supera la tarea finita (procesos finito), que son aquellas que preceden a la tarea infinitas (procesos infinitos que son los verdaderos objetos del estudio), se acompaña el valor de B con el símbolo †.
- En algunas respuestas aparece *(KE**t**)*, *K* indica el nivel, ***Et*** significa estrategia seguida, siendo E fijo y ***t*** variando de ***1*** a ***4***. En el caso que un alumno o alumna y un nivel determinado lo supera con distintas estrategias, entonces consideramos que la estrategia usada en el nivel considerado es el mayor.

Presentamos una serie de tablas, una por cada curso que participa en la prueba, que recogen las respuestas de cada uno de los alumnos y alumnas según las tareas, situaciones dentro de las tareas y, si procede, la estrategia utilizada.

Para la interpretación correcta de las tablas debemos tener en cuenta los siguientes puntos:

- Cada casilla de la primera fila indica que se va a evaluar la resolución de la tarea asociada al nivel correspondiente. Cuando se pasa de un nivel a otro en la tabla, la línea de separación entre columnas queda marcada por el grosor de la misma.
- Para cada una de las tareas asociada a un nivel, se consideran las situaciones que la determinan. Se empieza con la situación 1 y se termina con una similar a esta, que la llamamos 1'. Esto se refleja en la segunda fila de las tablas.
- La primera columna indica el curso al que pertenecen los alumnos y alumnas de la tabla.
- Cada casilla de la segunda columna indica las iniciales del nombre del alumno o la alumna, cuyas respuestas se registran en esa misma fila. Los números que

[100] Nos estamos refiriendo a las tablas que determinaremos en este mismo apartado.

aparecen a continuación de las iniciales expresan la edad, indicando el primero de ellos los años y el segundo los meses. En el caso que coincida las dos primeras iniciales, los años y los meses en más de un estudiante, entonces se toman más iniciales hasta que no coincidan,

- Las casillas correspondientes a las coordenadas (i, Nivel K, 2)[101] se rellenan si aparecen en blanco las casillas (A, Nivel K, 1)[102]. Para cada alumno o alumna la casilla (i, Nivel K, 3) se rellena si anteriormente ha sido marcada la casilla (A, Nivel K, 2). Análogamente se da esa misma situación entre las casillas (i, Nivel K, 1')[103] y (A, Nivel K, 3).
- Los recuadros de coordenadas (A, Nivel K, 1) o (A, Nivel K, 1'), con K variando entre I y IV, indican que los alumnos y alumnas han superado el nivel que se indica en la terna.
- El número que aparece en las casillas en negrita y cursiva correspondientes a las coordenadas (a, Nivel K, 1), indica la estrategia seguida por el alumno o alumna en la tarea asociada al nivel que se considera en la terna.

Con respecto a las estrategia utilizadas por los alumnos y alumnas, como hemos dicho anteriormente, vienen codificadas del ***1*** al ***4***, de menos a más evolucionadas. A continuación especificamos cada una de ellas que se le puede asociar a cada nivel estudiado.

Estrategia ***1***

Se trata de la menos evolucionada. En este caso el alumno o alumna no encuentra argumento alguno para poder dar explicación a una tarea que acaba de superar (Ej.: "Sí, porque sí."), o bien presenta dudas o confusión (Ej.: "Creo que sí, ¿no?).

[101] La primera componente de la terna, i, toma los valores A ó B. Respecto a la segunda componente, la letra K varía entre I y IV.
[102] El 1 que aparece en esta terna se refiere a la primera columna del Nivel K en la tabla.
[103] El 1' que aparece en esta terna se refiere a la cuarta columna del Nivel K en la tabla.

Estrategia *2*

El alumno o alumna encuentra argumento verbal para poder dar explicación a una tarea superada, pero estas no hacen alusión a la propia definición de infinito actual o potencial, ni a la cardinalidad de los conjuntos presentados, ni a las propiedades asociadas a todos ellos. Justifican las respuestas utilizando recursos propios de la tarea presentada (los puntos suspensivos, casilleros, las propias operaciones que se le piden que hagan en la actividad). El lenguaje verbal que usa no tiene rigor matemático adecuado ("hay un montón", "debe haber muchísimos").

Estrategia *3*

Asociada a la propia definición del infinito potencial y a sus propiedades. El alumno o alumna emplea esta estrategia, aunque no es el tipo de infinito objeto de estudio, para luego comparar los distintos conjuntos y así establecer la igualdad en la cardinalidad de éstos.

Estrategia *4*

Argumenta la igualdad de conjuntos en tanto a su cardinalidad usando la propia definición del infinito actual o sus propiedades. El uso de ello hace que acepten el infinito potencial previamente. Mientras que las estrategias anteriores pueden ser de tipo intuitiva, esta estrategia es de tipo contraintuitiva por su propia argumentación basado en el infinito actual. Por tanto, consideramos doblemente, esta estrategia la más evolutiva: por la aceptación del potencial y por el propio razonamiento usado para la superación de la tarea.

Las dos últimas estrategias serán las más usadas en tanto van avanzando en las tareas asociadas a la escala evolutiva.

La codificación de las estrategias se registra en el siguiente cuadro:

Tabla VII. 1. *Codificación de Estrategias*

NIVEL	Estrategias
K	***1*** Sin argumentación. ***2*** Intenta establecer relación, explicar el criterio. ***3*** Argumentación potencial. ***4*** Argumentación actual.

Debemos especificar que para cada uno de los niveles, las estrategias codificadas como ***1*** y ***2*** son propias de niveles inferiores, ***3*** corresponden a esquemas lógicos matemáticos propias del nivel en cuestión, mientras que la estrategia ***4*** corresponde a niveles superiores.

A continuación, y realizadas todas las aclaraciones oportunas, presentamos las tablas de los distintos cursos y de las distintas estrategias utilizadas.

Tabla VII. 2. *Distribución de respuestas de cada estudiante de 1º E.S.O., por tareas, situaciones y estrategias asociadas a los niveles.*

1ºESO (20 Estudiantes)			**TAREA NIVEL I**				**TAREA NIVEL II**				**TAREA NIVEL III**				**TAREA NIVEL IV**			
			1	2	3	**1’**	**1**	2	3	**1’**	**1**	2	3	**1’**	**1**	2	3	**1’**
1	**Ju.12,11**	**A**																
		B																
2	**Zo. 13,02**	**A**																
		B																
3	**Ig. 13,02**	**A**	**2**															
		B					†											
4	**Fr. 12,09**	**A**																
		B																
5	**Pa.12, 09**	A				**1**												
		B																
6	**An.12,08**	**A**				**3**	**3**				**4**							**4**
		B													†			
7	**Vi. 13,03**	**A**																
		B																
8	**Al. 12,07**	**A**	**1**															
		B																
9	**Pa.12,11**	**A**				**3**	**3**				**3**				**3**			
		B																
10	**Ju. 12,07**	**A**																
		B	†															
11	**Ma.13,00**	**A**	**2**															
		B					†	†										
12	**Te. 12,09**	**A**																
		B																
13	**Ai. 13,00**	**A**	**2**															
		B																
14	**Al. 12,09**	**A**	**2**															
		B					†											
15	**Ma.12,09**	**A**	**3**				**3**				**3**							
		B																
16	**Na.12,09**	**A**																
		B																
17	**Ma.12,04**	**A**	**3**				**4**				**3**				**3**			
		B																
18	**Ma.13,03**	**A**																
		B																
19	**Mar.13,00**	**A**																
		B																
20	**Mag.13,00**	**A**	**1**															
		B																

Tabla VII. 3. *Estrategias asociadas a los niveles utilizadas por los estudiantes de 1º E.S.O.*

NIVELES (K)	Estrategias (Et)	Respuestas de los estudiantes
I	1	**Pa. 12,09:** "Porque creo que tienen la misma cantidad." **Al. 12,07:** "Sí porque entre 4 y 9 hay 5, 6, 7 y 8; entre 7 y 12 están 8, 9, 10 y 11; y de ahí hasta infinitos números" E: ¿Aunque aquí empieza en el 1 y aquí en el 4? *A: (Duda. Pasa tiempo. No sabe que contestar. Asiente con la cabeza)* **Mag.13,00: "**Sí… No lo sé, yo creo que son iguales."
	2	**Ig. 13,02:** "Porque los dos son equivalentes." **Ai. 13,00:** "Iguales porque tienen puntos suspensivos." **Ma. 13,00:"**En realidad son iguales, tienen las mismas casillas, aunque con puntitos…" **Al. 12, 09:** "Son iguales en casillas… son iguales."
	3	**An. 12,08:** "Porque siguen adelante, no paran." **Pa. 12, 11:** "Sí, porque siguen adelante." **Ma.12, 09:** "Misma cantidad porque los puntos suspensivos significan que puede seguir en adelante." **Ma. 12,04:** "Sí, porque no te dice hasta cuando termina, o sea, que nunca acaban."
	4	
II	1	
	2	
	3	**An. 12,08:"**Iguales los dos…porque los dos son hasta el infinito." **Pa.12, 11:** "Sí… porque siguen adelante." **Ma.12, 09:** "Bueno sí, si siguen adelante sí, tienen la misma cantidad."
	4	**Ma. 12,04:** "Los dos son iguales porque no te dice un número en que termina, o sea, los dos son infinitos."
III	1	
	2	
	3	**Pa.12,11:** "Los dos iguales porque siguen adelante." **Ma.12,09:** "¡Eh! sí, si van los dos en adelante." **Ma. 12,04**: "Siguen adelante, son iguales"
	4	**An. 12,08:** "Iguales… porque los dos son infinitos y llegan hasta 0,00…"
IV	1	
	2	
	3	**Pa.12, 11:** "Porque sigue hacia adelante…Entonces los dos son iguales." **Ma.12,04:** "…son iguales…Porque no van acabar los números, siempre van los dos solo que el D lo empieza dividiendo por un número más grande, pero ya está."
	4	**An.12,08:** "Iguales… Porque son infinitos y terminan en el 0."

Tabla VII. 4. *Distribución de respuestas de cada a estudiante de 2º E.S.O., por tareas, situaciones y estrategias asociadas a los niveles.*

2º ESO (15 Estudiantes)			TAREA NIVEL I				TAREA NIVEL II				TAREA NIVEL III				TAREA NIVEL IV			
			1	2	3	**1’**	**1**	2	3	**1’**	**1**	2	3	**1’**	**1**	2	3	**1’**
1	**De. 14, 04**	**A**																
		B																
2	**Al. 13,08**	**A**																
		B																
3	**Ca. 13,05**	**A**				**3**	**3**				**3**				**3**			
		B																
4	**Pa. 13,10**	**A**	**1**															
		B																
5	**Ma. 13,09**	A																
		B																
6	**Lu. 15,04**	**A**																
		B																
7	**Al. 13,06**	**A**																
		B																
8	**Ma. 14, 03**	**A**																
		B																
9	**Se. 14,0 2**	**A**	**1**															
		B																
10	**La. 14, 03**	**A**				**4**	**3**				**4**				**4**			
		B																
11	**Ju. 13,07**	**A**																
		B																
12	**Gu. 13,06**	**A**	**1**															
		B																
13	**Al. 13,07**	**A**	**2**															
		B																
14	**Pa. 13,09**	**A**	**3**				**4**				**4**							
		B													†	†		
15	**Jo. 13,11**	**A**	**3**							**3**								
		B																

Tabla VII. 5. *Estrategias asociadas a los niveles utilizadas por los estudiantes de 2º E.S.O.*

NIVELES (K)	Estrategias (Et)	Respuestas de los estudiantes
I	1	**Pa, 13,10:** “En verdad los dos son iguales. E: En verdad los dos son iguales, ¿por qué? A: Porque los dos son infinitos E: Del 1 al infinito y del 4 al infinito, ¿los dos son iguales? A: *(Duda. Asiente con la cabeza)”* **Se. 14,02:** “*(Duda)* Pues entonces creo que es igual.” **Gu. 13,06:** “Sí…Creo que sí, no sé.” **Al. 13,07:** “Creo que sí, tienen la misma cantidad.”
	2	
	3	**Ca. 13,05:** “Sí, porque siguen adelante.” **Pa. 13,09:** “Los dos no terminan…Tienen la misma cantidad” **Jo. 13,11:** “Son iguales, van al infinito.”
	4	**La, 14,03:** “Lo mismo, misma cantidad”
II	1	
	2	
	3	**Ca. 13,05:** “Son iguales… Porque siguen hacia el infinito.” **La.14,03:** “Iguales… Porque siguen sin terminar.” **Jo. 13,11:** “Son iguales, porque no acaban”
	4	**Pa. 13,09:** “Tienen la misma cantidad porque los dos son infinitos”
III	1	
	2	
	3	**Ca. 13,05:** “Son iguales, siguen adelante.”
	4	**La.14, 03:** “Entonces misma cantidad. Es que hay los mismos números.” **Pa. 13,09:** “Van a acabar los dos en cero, ¿no?, entonces tiene la misma cantidad los dos.”
IV	1	
	2	
	3	**Ca. 13,05:** “Iguales…llegarían igual”.
	4	**La.14, 03:** “La misma cantidad, aunque lleguen a cero.”

Tabla VII. 6. *Distribución de respuestas de cada estudiante de 3º E.S.O., por tareas, situaciones y estrategias asociadas a los niveles.*

3º ESO (18 Estudiantes)			TAREA NIVEL I				TAREA NIVEL II				TAREA NIVEL III				TAREA NIVEL IV			
			1	2	3	1'	1	2	3	1'	1	2	3	1'	1	2	3	1'
1	Lu.15,00	A	1															
		B																
2	Cl.14,10	A	2															
		B																
3	Pa..14,09	A																
		B																
4	Al.14,06	A	2															
		B																
5	Fa.15,03	A	3				3											
		B																
6	Pa..14,11	A	3				3				3				4			
		B																
7	Mi.14,10	A																
		B																
8	Jo.15,03	A	2				3											
		B																
9	Ca.15,03	A	1															
		B																
10	Ma.14,10	A	1															
		B																
11	Al.14,10	A																
		B																
12	Su.14,05	A																
		B																
13	Ma. 14,09	A	4				4				4				4			
		B																
14	Ca.14,10	A																
		B																
15	An.15,03	A	3				4				4							4
		B																
16	An.14,07	A																
		B																
17	Cr.15,04	A				3	3											
		B																
18	Pa.15,01	A																
		B																

Tabla VII. 7. *Estrategias asociadas a los niveles utilizadas por los estudiantes de 3º E.S.O.*

NIVELES (K)	Estrategias (Et)	Respuestas de los estudiantes
I	1	**Lu.15,00:** "Yo creo que sí… Porque en número, en cantidad hay un montón." **Ca.15,03:** "Mismas cantidades. E: ¿Por qué son iguales en cantidad? A: Porque en los dos hay los mismos. E: ¿Los mismos? A: No los mismos, los mismos números." **Ma.14,10:** "El D.E: El D, ¿qué? A: Que tiene más números, ¿no? E: ¿Por qué? A: Bueno no, son iguales .E: Son iguales, aunque empiece en 1, y éste en 501 ¿por qué? A: No sé, ¿por qué siguen?
	2	**Lu.15,00:** " Sí, creo, hay un montón, aunque empiece en 1 y el otro en 4." **Cl.14,10:** "Porque tienen los mismos números arriba que abajo, lo que pasa es que abajo le ha sumado 3,…". **Al.14,06**: "Son iguales…tienen las mismas cantidad…porque son equivalentes. Los dos tiene la misma cantidad de números." **Jo.15, 03:** "Son iguales… Porque… Como el de abajo se le suman 3."
	3	**Fa.15, 03:** "En los dos hay lo mismo…Porque ambos llegan al infinito." **Pa.14,11:** "Son iguales… porque siguen hasta infinito los dos." **An.15,03:** "Sí…Porque siguen hasta infinito." **Cr.15,04:** "Tienen los dos iguales… Porque siguen siendo infinitos, los números nunca terminan, siempre va tener los mismos números arriba que abajo porque siempre va a seguir, aunque a lo mejor va con uno más retrasado y otro más adelantado, siempre van a tener los mismos."
	4	**Ma.14,09:** "… son iguales porque los dos son infinitos."
II	1	
	2	
	3	**Fa.15,03:** "Son iguales…Bueno van hasta el infinito y el otro también. La misma cantidad de números." **Pa.14,11:** "No, no, son iguales… Porque esto continúa hasta infinito." **Jo.15,03:** "Tienen la misma cantidad… Sí, si siguen."
	4	**Ma.14,09:** "…son iguales porque son infinitos los dos." **An.15,03:** "Sí… Porque los dos son infinitos." **Cr.15,04:** "...aquí siguen adelante, o sea, que siguen siendo infinitos."
III	1	
	2	
	3	**Pa.14,11:** "Son iguales…Porque no van a llegar… que nunca acaba ninguno"
	4	**Ma.14,09:** "A: Son iguales. E: ¿por qué son iguales? A: Porque como tiene puntos suspensivos, serían infinitos los dos. E: Aún llegando al cero, ¿no? A: Sí. **An.15,03:** "…Porque son infinitos."
IV	1	
	2	
	3	
	4	**Pa.14, 11:** "Son iguales. Porque son…, es que a ver, iguales, tienen los mismos números. E: Aunque lleguen al… A: Al 0,000, así hasta… Sí" **Ma.14,09:** "Iguales… porque son infinitos." **An.15,03 :** "Son iguales… Porque hay infinitos."

Tabla VII. 8. *Distribución de respuestas de cada estudiante de 4º E.S.O., por tareas, situaciones y estrategias asociadas a los niveles.*

4º ESO (16 Estudiantes)			**TAREA NIVEL I**				**TAREA NIVEL II**				**TAREA NIVEL III**				**TAREA NIVEL IV**			
			1	2	3	**1’**	**1**	2	3	**1’**	**1**	2	3	**1’**	**1**	2	3	**1’**
1	**Ma.15,09**	**A**																
		B																
2	**Al.16,03**	**A**	**4**				**3**				**4**							**4**
		B																
3	**Al.15,09**	**A**	**2**															
		B																
4	**El.15,07**	A																
		B																
5	**Na.15,11**	**A**	**1**				**1**											
		B																
6	**Pa.15,10**	**A**				**3**				**3**								
		B																
7	**La.16,01**	**A**																
		B																
8	**Ju.15,06**	**A**																
		B																
9	**Ma.16,02**	**A**																
		B																
10	**An.16,05**	**A**	**3**				**3**							**3**	**3**			
		B																
11	**Ce.16,01**	**A**																
		B																
12	**Nu.15,06**	**A**	**4**				**3**				**4**				**3**			
		B																
13	**Al.15,06**	**A**	**2**															
		B																
14	**Ju.15,07**	**A**	**2**				**2**							**3**	**3**			
		B																
15	**Ju. 16,01**	**A**				**3**	**4**				**4**				**4**			
		B																
16	**Da.15,02**	**A**	**4**				**4**											
		B																

Tabla VII. 9. *Estrategias asociadas a los niveles utilizadas por los estudiantes de 4º E.S.O.*

NIVELES (K)	Estrategias (Et)	Respuestas de los estudiantes
I	1	**Na.15,11:** "Son iguales. E: ¿Por qué? A: Creo que son iguales, no lo sé."
	2	**Al.15,09:** "Tienen iguales, porque ¿se cuentan todos, no?" **Al.15,06:** "Porque hay cinco números aquí en el ordenador. *(Indica con el cursor)*. E: Vale, aunque este empiece en 1 y este empiece en 4, ¿sí? A: Creo que sí." **Ju.15,07:** "Iguales…No sé, porque cuando pienso en la cantidad de números no pienso en el valor, pienso en las cantidades que hay."
	3	**An.16,05:** "…tienen los mismos números… porque como le suma 3 llega a infinito, puede llegar a donde sea…" **Ju.16,01:** "Pueden seguir "pa'lante", entonces infinitos. Iguales."
	4	**Al.16,03:** "Son iguales… porque ambos son infinitos." **Nu.15,06:** "Tienen la misma cantidad de números, bueno, no, o sea, sí, los dos son infinitos, ¿no?, aunque D empiece más tarde los dos siguen infinitamente así que…" **Da.15,02:** "Al llegar hasta más infinito, hay infinitos números por lo que da igual donde empieces."
II	1	**Na.15,11:** "Tienen la misma cantidad de números los dos, creo que tienen la misma cantidad."
	2	**Ju.15,07:** "Sí,…porque no me había fijado en el número, sino en la cantidad de ellos."
	3	**Al.16,03:** "…tienen la misma cantidad, porque van hasta el infinito." **An.16,05:** "Iguales porque aunque este empiece en 500, termina en 500, que tiene 500 números más que 1000, y continúan sin final." **Nu.15,06:** "Son iguales porque siguen hacia el infinito."
	4	**Ju.16,01:** "Porque son infinitos, no tienen fin." **Da.15,02:** "Serían iguales… Llegan hasta infinito, hay infinitos números."
III	1	
	2	
	3	**An.16,05:** "¡Eh...! Son iguales porque siguen adelante los dos sin terminar." **Ju.15,07:** "Iguales, porque continúan al infinito."
	4	**Al.16,03:** "Son,… son iguales ¿no?, es que son infinitos." **Nu.15,06:** "…si los dos van a terminar llegando a cero, teniendo en cuenta que C empieza antes. Pero como son infinitos, los dos tienen la misma cantidad." **Ju.16,01:** "Iguales, son las mismas cantidades."
IV	1	
	2	
	3	**An.16,05:** "Los dos son iguales, si no tienen fin." **Nu.15,06:** "Los mismos…Porque siguen, y siguen y siguen y siguen… " **Ju.15,07:** "Son iguales, van al infinito."
	4	**Al.16,03:** "Ahí si hay igual, misma cantidad infinita." **Ju.16,01:** "Iguales, porque son infinitos y no tienen fin, por eso son infinitos."

Antes de empezar con el análisis de respuestas, y para saber a que estudiante nos estamos refiriendo cuando hagamos alusión a algunos de ellos en concreto y poder localizarlos en las tablas, a las iniciales del nombre se le añadirá el número entre paréntesis correspondiente al curso donde se encuentra, así, por ejemplo **(1)Ju.12,11** es **Ju.12,11** de 1º de la E.S.O.

Como primera observación las tablas indican que las casillas señaladas con números[104] de los alumnos y alumnas que resuelven con mayor facilidad una tarea asociada a un nivel, se encuentran pegadas a la izquierda de cada bloque[105], quedando en blanco el resto de casillas del mismo.

De acuerdo con el grado creciente de dificultad de los esquemas lógicos matemáticos implicados, en lo que sigue interpretaremos las respuestas de los alumnos y alumnas desde los esquemas más evolucionados hasta los menos. Para ello, analizaremos los casos que se dan en las tablas, denominándolos por sus coordenadas.

- **Realizar con éxito la tarea asociada al Nivel IV: (IV1A) ó (IV1B, IV2A, IV3A, IV1'A)**

Si el alumno o alumna ha superado la tarea asociada al Nivel IV con la estrategia más evolucionada. En esta situación nos encontramos a, (2)La. 14,03; (3)Pa. 14,11; (3)Ma. 14,09 y (4)Ju. 16,01.

> (**2)La. 14,03**: E: Bien, ¿vale?, vamos para abajo, igual, en adelante, 1/n ¿vale?, sería entonces el primero uno partido… A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼)* E: Sigue adelante y aquí por ejemplo puedes poner… A: *(Escribe 1/100)* E: Vale, vamos a ver ahora, ahora es lo mismo, pero sumándole 500, entonces en vez de poner 1 habría que poner… A: Partido de 501. *(Escribe 1/501, 1/502, 1/503, 1/504)* E: Y en vez de poner por ejemplo el 100 que pusiste aquí, sería uno partido… A: *(Escribe 1/600)* E: Ahí va, te los tengo que poner también para que se vea que está pasando *(cambia el número de decimales en todas las casillas)*. Tú lo que tienes que ver, Laura, es que va disminuyendo… ¿A dónde llevará esto? A: A cero. E: Parece que hay un principio y un final, ¿quién tiene mayor número arriba o abajo? A: La misma cantidad aunque lleguen a cero. *(IV14)*
>
> **(3)Pa. 14,11**: E: Bien, vamos para el C y el D, que tiene mucho que ver con lo que estamos viendo ahora. A: Sea el conjunto de números desde n 1 en adelante, a cada elemento le corresponde su inversa, es decir, 1/n, representa cada número. E: El primero sería… A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼,)* E: Y este por ejemplo… A: *(Escribe1/99)* E: Vale, 1/99, sigue en adelante. Ahora

[104] Las casillas con números son las que marcan que se ha superado la tarea del nivel correspondiente.
[105] Según se indica en las tablas, cada nivel se considera un bloque.

lo mismo, pero le sumo 500, entonces el primero sería… A: *(Escribe 1/501, 1/502, 1/503, 1/504)* E: Y este por ejemplo sería. A: *(Escribe 1/599)* E: A la vista de los resultados ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales? A: Son iguales. *(IV13)* E: Y ¿por qué son iguales, Pablo? A: Porque son…, es que a ver, iguales, tienen los mismos números. *(IV14)* E: Aunque lleguen al… A: Al 0,000, así hasta… Sí.

(3)Ma. 14, 09: E: A. Terminamos entonces el C y el D A: sea el conjunto de números desde n=1 en adelante, a cada elemento le corresponde su inversa, es decir, 1/n. representa cada número E: Aquí ponemos entonces... A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼)* E: Aquí pones el que tú quieras A: *(Escribe 1/24)* E: Y siguen adelante, ¿vale? El apartado D; sea el conjunto de 1 en adelante. A: A cada elemento le correspondemos su inversa más 500, es decir 1/n+500. Represéntalos. E: El primero sería... A: *(Escribe 1/501, 1/502, 1/503, 1/504)* E: Y éste era... A: *(Escribe 1/524)* E: Y sigue en adelante, ¿vale? De nuevo aparece lo mismo, los números se van haciendo cada vez más pequeños, pero a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales? A: Iguales. E: Iguales, ¿por qué son iguales? A: Porque son infinitos. *(IV14)*

(4)Ju. 16.01: A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante, a cada número le corresponde su inversa más 500, es decir. Representa 1/n+500. A: 1/501, 1/502, 1/503 y 1/504. E: Y éste. A: Uno partido de… ¿Cuál habíamos puesta antes? Bueno pongo… … E: Puedes poner el que tú quieras, vamos tampoco, uno partido… 520, no 20 no era ¿no? A: 1/585. E: Ahí vale. Sería a lo mejor uno de por aquí. A la vista de los resultados ¿quien tiene mayor cantidad de números C, D o son iguales? A: Infinitos. E: ¿infinitos? A: Iguales, porque son infinitos y no tienen fin, por eso son infinitos. *(IV14)*

En todos estos casos se observa la aceptación del infinito potencial en cuanto a que la sucesión es de tipo decreciente y con cota inferior. Una vez razonado esa frontera numérica, usan la estrategia más evolucionada la del infinito actual para concluir que tienen los dos conjuntos la misma cardinalidad.

Para Belmonte (2011) hay una creencia generalizada errónea acerca de que un conjunto acotado tiene cardinal finito. Por otro lado, y anteriormente a este autor, para Waldegg(1996) existe una gran dificultad en aceptar que en conjuntos acotados tengan un número infinito de elementos. Por ello, creemos que este nivel es de grado superior al tener que comparar sucesiones convergentes, acotadas por ambos extremos. De ahí, que esa relación que usa estos alumnos y alumnas entre conjuntos acotados para decidir que tienen los dos la misma cardinalidad, hacen que estén en la cúspide de este modelo evolutivo.

Como alumnos y alumnas que realizan con éxito la tarea, pero por el camino más largo, esto es (V1B, V2A, V3A, V1’A), tenemos a: (1)An. 12,08; (3)An. 15, 03 y (4)Al. 16,03.

(1)An. 12,08: …siguen teniendo los dos iguales? A: Sí, ¿no? E: ¿Aun empezando este por esta cantidad? A: El de arriba tendría más. E: Claro, el de arriba tendría más. A: Pues creo que son iguales ¿no? E: ¿El qué? A: Que son iguales los dos. *(IV1B†)* E: ¿Por qué? A: Porque los dos seguirían al 0'000, los dos acabarían en el mismo. E: En el mismo no acabarían, ¿acabarían dónde? A: El de abajo en 500.E: No. A: ¿No? E: ¿A dónde irían a parar? Van los números cada vez más pequeños ¿verdad? ¿Y tú dices que van al número? A: Hasta el 1, el de arriba hasta el 1. E: Hasta el 1 ¿Empieza en 1 no? A: A ver 0'000.E: ¿Y el de abajo también? ¿A dónde iría a parar este? A: ¿Hasta el 5? No, ¿iguales? E: ¿A dónde irían a parar? A: Al 1…Acaba en 0, ¿quién tiene más números arriba o abajo? A: Iguales. *(Duda) (IV2A)*E: Iguales…Vale, observando los decimales que van apareciendo… ¿quién tiene más números arriba o abajo? A: Iguales. *(IV3A)*E: Iguales... Bien, a la vista de los resultados y viendo que esto va cada vez disminuyendo a más pequeñito, 1, 0'5, 0'3, 0'25...y este igual ¿quién tiene mayor cantidad arriba, abajo o igual? A: Iguales ¿no los dos? Porque son infinitos y terminan en el 0. *(IV1**4**)* E: Ahí va.

(3)An. 15, 03:… E: Entonces, mira tú lo que está pasando, otra vez lo estamos diciendo, que van disminuyendo, ¿vale? A la vista de los resultados ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales? A: C tiene más números. E: ¿C tiene más números? A: Sí. *(IV1B)*... A: C, son iguales... es que no sé si tienen final o no tiene final. E: No tienen final. A: Pues entonces son iguales. E: ¿por qué son iguales? A: Porque son infinitos. *(IV2A)*... E: A la vista de los resultados ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales? A: Son iguales. E: ¿Por qué? A: Porque hay infinitos. *(IV3A)*… A: Son iguales. E: ¿Por qué? A: Porque son infinitos. *(IV1'**4**)*

(4)Al. 16,03: E: Si los vamos disminuyendo, disminuyendo parece que van al cero, pero, ¿pasaría del cero? A: Que se haría negativo. E: ¿Y es posible que sean negativos? A: No, los números que ponemos son todos positivos. E: ¿Vale? a la vista de los resultados… ¿Quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales? A: C tendría más cantidad que D. *(IV1B)*… A: 1/501, 1/502, 1/503 E: Incluso el programa te va poniendo, y aquí por ejemplo el que tú quieras si quieres poner el de arriba. A: 1/561. E: Bien, a la vista de los resultados ¿quién tiene más cantidad de números? A: Iguales. *(IV2A)*… E: Vale, mira los decimales que van apareciendo… ¿quién tiene más números arriba o abajo? A: Los dos tienen la misma cantidad de decimales. *(IV3A)*… E: Por ejemplo, ahí da igual…A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales? A: Ahí si hay igual, misma cantidad infinita. *(IV1**4**)*

Podemos observar que cometieron errores ajenos al razonamiento del infinito actual. (1) An. 12,08 lo comete en la tarea asociada finita, en el momento que sale de esa duda, retoma su razonamiento entorno al infinito actual, alcanzando con éxito este nivel utilizando la estrategia más avanzada. El caso de (3) An. 15, 03 su problema estuvo en su fijación en los primeros números decimales que iban apareciendo, viendo que eran mayores los del caso C. Una vez resuelto ese obstáculo, retoma su razonamiento entorno al infinito actual. Para el último caso, (4) Al. 16,03, surge su duda inicial en cuanto si va aumentando el denominador de la sucesión, los términos transformados a decimales no solo llegarían alcanzar el cero, sino que se empezarían a obtener términos negativos. De ahí que su respuesta sea mayor cantidad en el apartado C.

Subsanadas esas dudas, todos ellos, retoman sus razonamientos de la misma manera que los alumnos y alumnas anteriores, los que alcanzaron con éxito este nivel por la vía más rápida la IV1A.

Alumnos y alumnas que son capaces de superar la tarea asociada al Nivel IV, pero usando estrategias menos evolucionadas que la número ***3***, razonando la equidad de las cardinalidades de los conjuntos creados en torno al infinito potencial son: (1)Pa.12,11; (1)Ma.12,04; (2)Ca. 13,05; (4)An.16,05 y (4)Nu.15,06. Si observamos las tablas anteriores relativas a la distribución de respuestas de cada alumno o alumna por tareas, podemos ver que estos alumnos y alumnas usan esta estrategia en tareas asociadas a niveles inferiores.

- **Realizar con éxito la tarea asociada al Nivel III: (III1A) ó (III1B, III2A, III3A, III1'A)**

En este caso consideraremos los alumnos y alumnas que han superado con éxito la tarea asociada al Nivel III, son estudiantes que en sus tablas correspondientes se dan las coordenadas:

- (III1A), como son los casos de (1)Pa. 12, 11; (1)Ma.12,09; (1)Ma.12,04: (2)Ca.13,05 y (3)Pa.14,11 que utilizaran la estrategia ***3*** para superar este nivel y los alumnos y alumnas (1)An.12,08; (2)La.14,03; (2)Pa.13,09; (3) Ma.(14,09); (3)An.15,03; (4)Al.16,03; (4)Un.15,06 y (4)Ju.16,01 con estrategia más evolutiva, ***4***.

Todos ellos son capaces de reconocer la igualdad en la cardinalidad de conjuntos de sucesiones divergentes en las cuales le hemos sustraído unos pocos de términos.

- (III1B, III2A, III3A, III1'A), en los casos (4)An.16.05 y (4)Ju.15,07.

(4)An.16.05. A: El C, parece que tiene más porque empieza desde 1. E: Pero tú tienes que tener en cuenta que estos puntos suspensivos para llegar a cero tienen que llegar adónde. A: Tiene que llegar hasta el cero justo E: Claro, ¿cómo se puede llegar hasta el cero? ¿Cómo podríamos llegar nosotros al cero? 1 partido, dividido por un número muy, muy grande. A: Claro. E: Pero si es un número muy grande, no llega al cero, ¿qué tendríamos que poner… A: ¿Para qué de cero? E: Sí. A: No sé. E: Tú vas poniendo el número cada vez más grande aquí y el número se está haciendo cada vez más pequeñito, acercando a cero, pero claro evidentemente es necesario un número grande como se pueda. A la vista de los resultados, ¿quién tiene mayor cantidad de números C, D o son iguales? A: ¡Eh...! yo creo que es mayor la C, creo que tiene más el de arriba. *(III1B)*… E: Y aquí el correspondiente si quieres al de arriba… A: 1/103, ¿no? E: Vale, este es más pequeñito, voy a ponerle un decimal más para que se vea. Vemos que va disminuyendo tanto uno como otro, y existe una correspondencia arriba y abajo a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales? A: Son iguales. *(III2A)* … E: Aquí pone 0.00; pero siempre va a ver, vamos a poner un par de ellos *(aumenta los decimales)*. Y este igual, aquí no va a dar cero… A la vista de los resultados, ¿quién tiene mayor cantidad de números arriba, abajo o son iguales? La única diferencia que existe es que va a llegar a cero, va a llegar, pero para llegar al cero es necesario poner unos números muy, muy grandes. A: Yo creo que igual. *(III3A)* … E: ¿Por la distribución dices tú? ¿Ha cambiado algo? A: Sí. E: ¿Arriba cambia mucho por la distribución? A: *(Asiente con la cabeza)* E: Por la izquierda y por la derecha, uno más abierto… E: A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales? A: ¡Eh...! Son iguales porque siguen adelante los dos sin terminar. *(III1'**3**)*

(4)Ju.15,07: E: Si hubieras cogido otro no pasa nada, … a la vista de los resultados ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales? A: Son iguales. E: Quiero que te fijes en una cosita, ¿qué está pasando con estos números?, Juan A: Va disminuyendo. E: Disminuyendo, ¿a dónde crees tú que llegaría? A: Al cero. E: Al cero, parece ser que se para, aún así, ¿sigues diciendo que este tiene la misma cantidad de números?
A: Entonces sería el primero. *(III1B)*… E: A la vista de estos resultados, Juan, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales? A: Son iguales. *(III2A)*… E: Fíjate en los decimales que van dando. A la vista de los resultados, ¿quién tiene mayor cantidad de números arriba, abajo o son iguales? A: Yo creo que igual. *(III3A)*… E: A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales? A: Iguales, porque continúan al infinito. *(III1**3**)*

Significativo son estos dos casos que, atravesando las situaciones intermedias, la estrategia que finalmente utilizan es la ***3***. Observamos que la mayor dificultad que se encuentra estos alumnos y alumnas es por un lado, reconocer la cota que tiene los tipos de sucesiones que le hemos propuesto, y por otro, de nuevo, la creencia errónea puntualizada por Belmonte (2011), acerca de que un conjunto acotado tiene cardinal finito. Para estos alumnos y alumnas, no ven la infinitud como un todo, sino como un proceso sin finalizar, pero finalizan superando la tarea reconociendo la misma cardinalidad, cuando en uno de estos conjuntos se les ha extraído unos pocos términos.

- **Comparación de respuestas de las tareas asociadas a los Niveles III y IV**

Las tareas asociadas en estos dos últimos niveles de nuestro modelo evolutivo tienen en común las sucesiones que presentamos a los estudiantes. Son de tipos convergentes con cota inferior, en nuestro caso el cero. La diferencia entre uno y otro nivel es la cantidad de términos que quitamos y luego ellos deben comparar esos conjuntos. Mientras el III se sustrae unos pocos e iniciales, en el IV son muchos, alrededor de 500, también iniciales.

Nos encontramos con los siguientes casos:

C1. Alumnos y alumnas que superan con éxito el Nivel III, pero no el IV

Cuando realizamos la prueba exploratoria (en el capítulo IV recogen los registros y conclusiones de ese estudio) pudimos observar que todos aquellos alumnos y alumnas que superaban con éxito las tareas del Nivel III, superaban las del IV. La elección de dejar estas tareas asociadas con la misma naturaleza de entonces fue, que las muestras elegidas de los alumnos y alumnas en ese momento fueron muy pequeñas.

Hemos podido comprobar en este nuevo estudio que sí hay alumnos y alumnas, pocos con respecto a los demás, que tras superar el Nivel III no superan el Nivel IV. Son los casos (1)Ma.12,09 y (2)Pa.13,09.

(1)Ma.12,09: A: Hasta llegar al 0'00. E: Eso, y abajo va a pasar lo mismo. A: Sí, primero va, que va bajando hasta que de 0'000. E: Y aún así ¿dices tú que tiene la misma cantidad C que D? A: Hum, no este tiene más, C empieza desde 1 y D empieza desde 500 entonces C tiene más que D porque empieza uno antes que el otro. *(IV1B)*… A: Desde el 1 en adelante que podría ser hasta el 500 y eso, y el D empieza en el 500 hasta adelante. E: Pero es que el 1, según me dices, llegaría si cada vez está más grande ¿hasta qué número me dijiste? A: Hasta 0'000. E: ¿Y el de abajo? A: 0'000. E: Vale, entonces ¿quién tiene más cantidad de números arriba o abajo? A: Más cantidad abajo ¿no? E: Este empieza desde 1/1 y este desde 1/501. A: Arriba. *(IV2B)*

El alumno intenta relacionar tres factores antes de comparar los conjuntos C y D. Por un lado, el aumento en el denominador que será la pieza clave posteriormente para la sustracción de elementos en el conjunto D, los números decimales que van transformando el programa informático a la vez que él va incluyendo términos fraccionarios y finalmente, la tendencia de las sucesiones al 0 como cota inferior. Creemos que todos esos factores, en un alumno de 1º, hacen que finalice con una respuesta errónea ajena al propósito de nuestro estudio.

(2)Pa.13,09: E: A la vista de los resultados, ¿quién tiene más arriba, abajo o son iguales? A: Tiene más el B, ¿no? E: ¿Sí? A: Aquí empieza con más, ¿no? *(Señala el apartado A)* E: Aquí empieza en el 1 y termina en 1/1000 y éste *(señala el apartado B)* empieza en 1/501 y termina en 1/1000 A: Entonces tienen la misma cantidad. E: ¿Tú crees? A: No….A: ¿Lo pongo?, 1/503, 1/504, 1/505, 1/506. E: A la vista de los resultados, este empieza en 1 y termina en 1/1000 y éste empieza en 1/501 y termina en 1/1000. A: Entonces es el B. E: El B, ¿qué pasa? A: Que empieza por mayor, que está partido de 501 y está 1/1000 y suma 500, y ese solo está partido de 1000 E: Entonces, ¿quién tiene más? A: B. E: ¿B que A? A: Sí. *(IV)*

Podemos observar, como la alumna comete los errores en la parte de la tarea finita, apartados A y B del Nivel IV. Si observamos la trayectoria de (2)Pa. 13,09 alcanza con éxitos las tareas anteriores con la máxima estrategia, la número ***4***. Por tanto, al igual que en el caso anterior, creemos que, ahora factores de naturaleza finitista, hacen que no finalice correctamente este nivel dando una respuesta incorrecta que es ajena a las intenciones de nuestro estudio.

C2. Alumnos y alumnas que superan con éxito el Nivel (III1B, III2A, III3A, III1'A) y el Nivel IV1A

Son los casos que detallamos anteriormente de (4)An.16.05 y (4)Ju.15,07 que superaron el Nivel (III1B, III2A, III3A, III1'A). Estos alumnos y alumnas superan con éxito la tarea del nivel superior con la estrategia número ***3***.Mientras que el primer nivel asociado a sucesiones convergentes vemos que le cuesta aceptar el cardinal infinito de las sucesiones propuestas en las tareas del Nivel III. En el momento que lo supera con éxito, el nivel superior, dedicado de nuevo a sucesiones convergentes con diferencias entre conjuntos de muchos elementos, los resuelven correctamente y sin necesidad de aporte de ayuda de nuestra parte con situaciones tipos 2 y 3.

C3. Alumnos y alumnas que superan con éxito el Nivel III1A y el Nivel (IV1B, IV2A, IV3A, IV1'A)

Como son los alumnos y alumnas (1)An.12,08; (3)An.15,03 y (4)Al.16,03. Todos ellos usaron para la resolución final con éxito de estas tareas la estrategia número ***4***. Como dijimos anteriormente, la vía (IV1B, IV2A, IV3A, IV1'A) que tuvieron que solventar para la finalización de la tarea corresponde a factores ajenas al propósito de nuestro estudio,

C4. Alumnos y alumnas que superan con éxito el Nivel III1A y el Nivel IV1A

Podemos diferenciar tres casos según las estrategias utilizadas por ellos:

- Con estrategias en los dos niveles número ***3***, (1)Ma.12,04 y (2)Ca.13,05. Como indica Fischbein(1982, citado en Garbin, 2002) argumentar usando la potencialidad responde a la interpretación natural intuitiva del infinito. Para el mismo autor, estas intuiciones no son absolutas dependiendo del contexto, en nuestro caso, las características de esta intuición tienen capacidad de extrapolar y globalizar.
- Con estrategias en los dos niveles número ***4***, (2)La.14,03; (3)Ma. 14,09 y (4)Ju.15,07. El uso de la argumentación del infinito actual de estos estudiantes en los dos niveles, es la aceptación previamente de la potencialidad. De ahí a la aceptación del infinito actual con el carácter contraintuitivo que con ello lo representa.
- Con estrategias mixtas en los dos niveles números ***3*** y ***4***, (3)Pa.14,11 y (4)Nu.15,06. Posiblemente se trate de un caso intermedio a los dos anteriores. Debido sobre todo a las edades de los estudiantes estudiados, aun no han conseguido esa maduración plena y es por ello que utilicen de forma mixta y según el contexto una u otra estrategia.

- **Realizar con éxito la tarea asociada al Nivel II: (II1A) ó (II1B, II2A, II3A, II1’A)**

Todos los alumnos y alumnas que superaron con éxito este nivel, ya sea de las dos formas distintas que se describen, usaron la estrategia superiores ***3*** o ***4***.

Como ejemplos de aquellos que lo realizaron con éxito la tarea asociada al Nivel II1A:

- Con estrategia ***3***, (1)An.12,08; (2) Ca.13,05; (3) Jo.(15,03) y (4)An.16,05.

(1)An.12,08: E: Andrés, ¿tienen la misma cantidad C que D? A: Sí. E: Sí, ¿por qué? A: Porque siguen adelante los números.

(2)Ca.13,05: A: Son iguales. E: ¿Por qué? A: Porque siguen hacia el infinito.

(3)Jo.15, 03: "Tienen la misma cantidad… Sí, si siguen."

(4)An.16,05: "…tienen los mismos números… porque como le suma 3 llega a infinito, puede llegar a donde sea…"

Resuelven las tareas de sucesiones convergentes en las que se comparan dos (C y D) en las cuales se diferencian en muchos términos iniciales usando para ello argumentación potencial. Para ellos el seguir en adelante, sin finalizar el proceso, hace que razonen en la equidad cardinal de los dos conjuntos que se les proponen.

- Con estrategia ***4***, (1) Ma. 12,04; (2) Pa. 13,09; (3)Ma.14, 09 y (4)Da.15,02

(1)Ma. 12,04: "Los dos son iguales porque no te dice un número en que termina, o sea, los dos son infinitos."

(2)Pa. 13,09: "Tienen la misma cantidad porque los dos son infinitos"

(3)Ma.14, 09: "…son iguales porque son infinitos los dos."

(4)Da.15,02: "Serían iguales… Llegan hasta infinito, hay infinitos números."

La aceptación de la potencialidad de los conjuntos hace que usen la argumentación más avanzada de la argumentación del infinito actual, para tras la comparación de estos dos conjuntos propuestos, determinen que sus cardinalidades son iguales.

Sólo tenemos un ejemplo de un alumno que ha superado con éxito las tareas del Nivel II por la vía (II1B, II2A, II3A, II1'A). Es el caso de (2)Jo.13.11.

(2)Jo.13.11: E: Vale, ¿dónde terminaría esto? A: En el infinito. E: Este empieza en… A: 1. E: Y no acaba, y este empieza en… A: 501. E: A la vista de los resultados ¿quién tiene más cantidad de números, C o D? A: C. *(II1B)*… E: Vale, el correspondiente. Bien a la vista de los resultados, este empieza en 1 y no acaba, este empieza en 501 y no acaba ¿quién tiene mayor cantidad de números C, D o son iguales? A: C. E: ¿C? ¿Qué pasa con C? ¿Son iguales? A: Son iguales porque no acaban. *(II3A)*… E: Siguen adelante. Bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene mayor cantidad de números C, D o son iguales? A: Son iguales. E: ¿Iguales?, ¿por qué? A: Porque no acaban. *(II1'**3**)*

Inicia sus dudas en cuanto a que la diferencia de las sucesiones presentadas (C y D) son muchas e iniciales. Con lo cual de forma intuitiva confirma que no son las mismas cantidades. Al cambiar la distribución de las tareas, con las situaciones 2 y 3 en las cuales se le ayuda no solo a formar los términos de las sucesiones sino que el alumno pueda establecer, si es necesario, una relación biunívoca de los dos conjuntos para su comparación, hace que finalmente con estrategia 3, y ahora de forma intuitiva secundaria por el aporte del entrevistador, resuelva con éxito.

- **Comparación de respuestas de las tareas asociadas a los Niveles II y III**

Podemos decir que es el paso del Nivel II al III el más complicado por la propia naturaleza de las sucesiones que se presentan (convergentes a divergentes). Por otro lado, están la cantidad de términos iniciales que se diferencia en los conjuntos que se presentan (C y D). Mientras que en el Nivel II son muchos iniciales, en el III son pocos e iniciales. Pero no es este último factor el que sea un hándicap para resolver con éxito las tareas asociadas al Nivel III una vez que haya alcanzado el Nivel II.

Como podemos observar en las tablas anteriores de distribución de respuestas, los niveles superan estos dos niveles con estrategias superiores ***3*** y ***4***. Ahora bien, el hecho de que un alumno o alumna supere el nivel inferior con estrategia superior no garantiza el éxito en las tareas asociadas al nivel superior. Al igual que puntualizaba Belmonte(2011), entendemos que existe la falsa creencia que conjuntos acotados poseen cardinal finito. Por otra parte, la mayoría de estos alumnos y alumnas, por no decir en general, no están familiarizados en temas relativos a sucesiones, conjuntos, etc., con lo cual las respuestas que proponen vienen dadas por intuiciones primarias, cuando se les presenta la tarea en una situación 1, o secundarias cuando se les facilitan con situaciones 2 y 3.

- **Realizar con éxito la tarea asociada al Nivel I: (I1A) ó (I1B, I2A, I3A, I1'A)**

El Nivel I se caracteriza por la presentación al estudiante de tareas con sucesiones de tipo divergentes. Las diferencias de los conjuntos C y D son de muy pocos términos e iniciales. Es muy probable que sea el primer contacto del estudiante que no está familiarizado con la naturaleza propia de estos elementos matemáticos. Cuando se realizó el estudio exploratorio (capítulo IV), pudimos observar que había estudiantes que ni si quieran podían formar los primeros elementos de una sucesión a partir de su término general. Por supuesto, por mucho que intentáramos en su momento ayudarlos con situaciones 2 y 3, al final no nos proporcionaba resultados objeto de nuestro estudio. Es por ello, que al revisar las tareas para el presente estudio, incluimos unas tareas "primitivas" o de "arranque" donde el estudiante tomaba contacto con los elementos básicos matemáticos para las tareas asociadas a los niveles que vendrían posteriormente. No fue nuestro caso y no se utilizaron, los alumnos y alumnas iniciaban correctamente estas tareas del Nivel I sin ningún tipo de obstáculos. Por tanto, podemos decir que aquellos que no resolvieron adecuadamente estas tareas, era debido a factores relativos a nuestro objeto estudio.

En este caso consideraremos que los estudiantes que han superado con éxito la tarea asociada al Nivel I, son alumnos y alumnas que en sus tablas correspondientes se dan las coordenadas:

- (I1A), que utilizaron estrategias inferiores ***1*** y ***2***, como son los casos:

(1)Mag.13, 00: "Sí… No lo sé, yo creo que son iguales." *(I1****1****)*

(1)Al.12, 09: "Son iguales en casillas… son iguales." *(I12)*

(2)Gu. 13,06: "Sí…Creo que sí, no sé." *(I1****1****)*

(3)Ma.14, 10: "El D.E: El D, ¿qué? A: Que tiene más números, ¿no? E: ¿Por qué? A: Bueno no, son iguales .E: Son iguales, aunque empiece en 1, y este en 501 ¿por qué? A: No sé, ¿por qué siguen? *(I11)*

(3)Cl.14, 10: "Porque tienen los mismos números arriba que abajo, lo que pasa es que abajo le ha sumado 3,…". *(I12)*

(4)Na.15,11: "Son iguales. E: ¿Por qué? A: Creo que son iguales, no lo sé." *(I11)*

(4)Al.15,09: "Tienen iguales, porque ¿se cuentan todos, no?" *(I12)*

Es la intuición primaria la que provoca que den unas respuestas acertadas. En cambio no pueden argumentar de forma verbal (estrategia ***1***) o su argumentación es pobre o desacertada (estrategia ***2***).

- (I1A), que utilizaron estrategias superiores ***3*** y ***4***, casos:

(1)An. 12,08: "Porque siguen adelante, no paran." *(I13)*

(2) Pa. 13,09: "Los dos no terminan…Tienen la misma cantidad" *(I13)*

(2) La, 14,03: "Lo mismo, misma cantidad" *(I14)*

(3)Fa.15, 03: "En los dos hay lo mismo…Porque ambos llegan al infinito." *(I13)*

(4)Ma.14, 09: "… son iguales porque los dos son infinitos."

(4)Ju.16,01: "Pueden seguir "pa'lante", entonces infinitos. Iguales." *(I13)*

(4)Al.16,03: "Son iguales… porque ambos son infinitos." *(I14)*

En estos casos, utilizaron estrategias superiores con argumentos del infinito potencial y actual para verificar la igualdad en las cardinalidades de los conjuntos dispuestos.

Para finalizar este apartado hemos resumido en una tabla el número de estudiantes junto al tanto por ciento (con respecto a los alumnos y alumnas que superan el nivel) de las estrategias utilizadas para superar con éxito las tareas asociadas en este primer Nivel I, por un camino o por otro.

Tabla VII. 10. *Número y % de estudiantes según estrategia utilizadas para superar con éxito el Nivel I*

	1º E.S.O.	2º E.S.O.	3º E.S.O.	4º E.S.O.	ETAPA
I1A					
Estrategias					
1-2	6 **(54,5%)**	4 **(50%)**	6 **(54,5%)**	4 **(40%)**	20 **(50%)**
3-4	2 **(18,2%)**	2 **(25%)**	4 **(36,4%)**	4 **(40%)**	12**(30%)**
I1B,I2A,I3A,I1'A					
Estrategias					
1-2	1 **(9%)**	0 **(0%)**	0 **(0%)**	0 **(0%)**	1**(2,5%)**
3-4	2 **(18,2%)**	2 **(25%)**	1 **(9,1%)**	2 **(20%)**	7 **(17,5%)**
I1A ó I1B,I2A,I3A,I1'A					
Estrategias					
1-2	7 **(63,6%)**	4 **(50%)**	6 **(54,5%)**	4 **(40%)**	21**(52,5%)**
3-4	4 **(36,4%)**	4 **(50%)**	5 **(45,5%)**	6 **(60%)**	19 **(47,5%)**

Podemos extraer las siguientes conclusiones:

- Las estrategias inferiores son las más utilizadas por la vía I1A. Provocado por una intuición primaria en los alumnos y alumnas.
- Por la vía, I1B,I2A,I3A,I1'A, prevalecen las estrategias superiores. Es razonable porque los alumnos y alumnas con las situaciones 2 y 3 son ayudados a realizar correctamente las tareas y responden con intuiciones secundarias.

- **Comparación de respuestas de las tareas asociadas a los Niveles I y II**

La diferencia principal de las tareas asociadas a estos dos niveles es la cantidad de términos que se diferencian en los conjuntos formados C y D, que pasan de ser unos pocos (cuatro o seis) a ser muchos (quinientos términos o más).

Adjuntamos la siguiente tabla donde incluimos el número total de alumnos y alumnas, de la etapa de secundaria, que superan cada nivel según las estrategias utilizadas.

Tabla VII. 11. *Número de estudiantes (de toda la Etapa) según estrategia utilizadas para superar con éxito el Nivel I y II*

	Superan NIVEL I	**Superan NIVEL II**
Estrategias Inferiores (***1***,***2***)	21	2
Estrategias Superiores (***3***,***4***)	19	20

Observamos junto a las Tablas 2, 3, 4 y 5 que todos los que utilizaron las estrategias superiores para superar con éxito las tareas del Nivel I, utilizan estas mismas estrategias para superar las tareas del Nivel II. Por otro lado, los dos estudiantes que superan el Nivel II, con estrategias inferiores, lo utilizaron también en el nivel inferior, también con éxito.

Mención especial a los estudiantes (1)Ma.13,00 y (1)Al.12,09 que tras superar el Nivel I con estrategia inferior 2, cometen errores en las tareas con naturaleza finitista (A y B).

10.2 Niveles asociados al modelo evolutivo teórico

Intentamos determinar los perfiles de los alumnos y alumnas que conforman una categoría determinada, atendiendo a que en la prueba del estudio empírico cualitativo que estamos realizando, hayan sido capaces de realizar o no la tarea asociada a un Nivel K del modelo evolutivo.

Para ello consideraremos las tablas siguientes que resumen los resultados de las tablas 2, 3, 4 y 5 del punto anterior. Previamente, aclararemos que:

- Cada casilla de la primera fila indica la tarea asociada a un nivel.
- En la primera columna se indica el curso del que se trata.
- Cada casilla de la segunda columna indica las iniciales del nombre del estudiante y su edad, el primer número indica los años y el segundo los meses.

- Cada casilla marcada de una fila y columna dadas representará que el estudiante de esa fila ha superado la tarea asociada al nivel correspondiente de esa columna.

Tabla VII. 12. *Distribución de respuestas por tareas asociadas a los niveles de los estudiantes de 1º E.S.O.*

		I	II	III	IV
1º ESO	Ju.12,11				
	Zo. 13,02				
	Ig. 13,02	■			
	Fr. 12,09				
	Pa. 12,09	■	■		
	An. 12,08	■	■	■	■
	Vi. 13,03				
	Al. 12,07	■			
	Pa.12,11	■	■	■	■
	Ju. 12,07				
	Ma.13,00	■			
	Te. 12,09				
	Ai. 13,00	■			
	Al. 12,09	■			
	Ma.12,09	■	■	■	
	Na.12,09				
	Ma. 12,04	■	■	■	■
	Ma. 13,03				
	Mar. 13,00				
	Mag. 13,00	■			

Tabla VII. 13. *Distribución de respuestas por tareas asociadas a los niveles de los estudiantes de 2º E.S.O.*

		I	II	III	IV
2º ESO	De. 14,04				
	Al. 13,08				
	Ca. 13,05	■	■	■	■
	Pa. 13,10	■			
	Ma. 13,09				
	Lu. 15,04				
	Al. 13,06				
	Ma. 14,03				
	Se. 14,02	■			
	La. 14,03	■	■	■	■
	Ju. 13,07				
	Gu. 13,06	■			
	Al. 13,07	■			
	Pa. 13,09	■	■	■	
	Jo. 13,11	■	■		

Tabla VII. 14. *Distribución de respuestas por tareas asociadas a los niveles de los estudiantes de 3º E.S.O.*

		I	II	III	IV
3º ESO	Lu.15,00				
	Cl.14,10				
	Pa..14,09				
	Al.14,06				
	Fa.15,03				
	Pa.14,11				
	Mi.14,10				
	Jo.15,03				
	Ca.15,03				
	Ma.14,10				
	Al.14,10				
	Su.14,05				
	Ma.14,09				
	Ca.14,10				
	An.15,03				
	An.14,07				
	Cr.15,04				
	Pa..15,01				

Tabla VII. 15. *Distribución de respuestas por tareas asociadas a los niveles de los estudiantes de 4º E.S.O.*

		I	II	III	IV
4º ESO	Ma.15,09				
	Al.16,03				
	Al.15,09				
	El.15,07				
	Na.15,11				
	Pa.15,10				
	La.16,01				
	Ju.15,06				
	Ma.16,02				
	An.16,05				
	Ce.16,01				
	Nu.15,06				
	Al. 15,06				
	Ju.15,07				
	Ju.16,01				
	Da.15,02				

A continuación, adjuntamos una tabla donde se recoge el número de alumnos y alumnas, y el tanto por ciento que han superado cada nivel por curso, ciclo y finalmente, la etapa en general.

Tabla VII. 16. *Número y % de estudiantes que han superado cada nivel*

1º E.S.O.
(20)

I	II	III	IV
11 **(55%)**	5 **(25%)**	4 **(20%)**	3 **(15%)**

2º E.S.O.
(15)

I	II	III	IV
8 **(53.3%)**	4 **(26.7%)**	3 **(20%)**	2 **(13.3%)**

3º E.S.O.
(18)

I	II	III	IV
11 **(61.1%)**	6 **(33.3%)**	3 **(16.7%)**	3 **(16.7%)**

4º E.S.O.
(16)

I	II	III	IV
10 **(62.5%)**	8 **(50%)**	5 **(31.25%)**	5 **(31.25%)**

1º CICLO
(35)

I	II	III	IV
19 **(54.3%)**	9 **(25.7%)**	7 **(20%)**	5 **(14.3%)**

2º CICLO
(34)

I	II	III	IV
21 **(61.8%)**	14 **(41.2%)**	8 **(23.5%)**	8 **(23.5%)**

ETAPA
(69)

I	II	III	IV
40 **(58%)**	23 **(33.3%)**	15 **(21.7%)**	13 **(18.8%)**

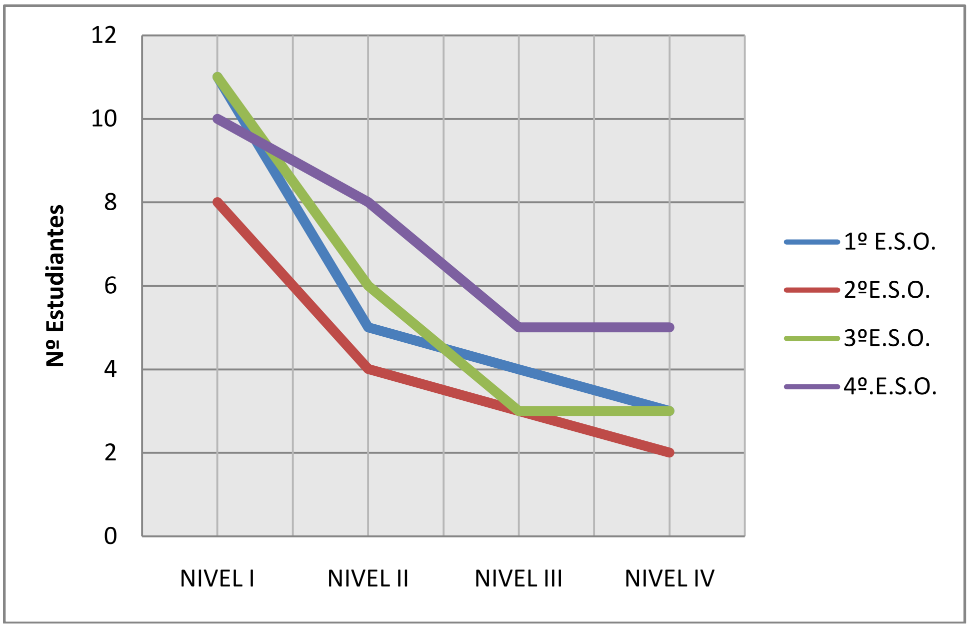


Figura VII. 9 Niveles-Nº Estudiantes: Comparativa por Cursos

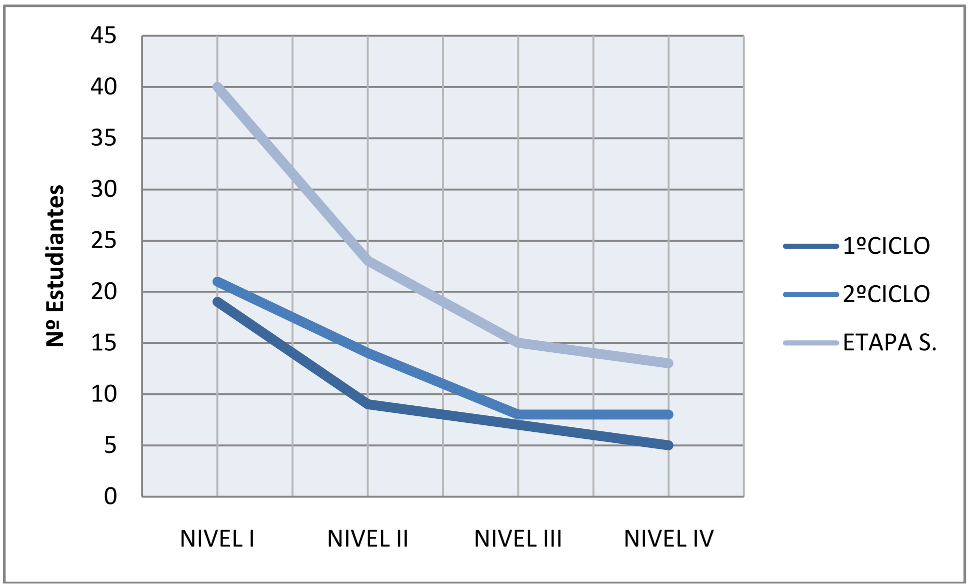


Figura VII. 10 Niveles-Nº Estudiantes: Comparativa por Ciclos

Podemos sacar las primeras conclusiones generales:

- La tendencia decreciente por cada nivel que iban superando. Con ello ratificamos el grado creciente de dificultad de las tareas en cuanto a los esquemas lógico matemáticos implicados. Ello se visualiza en las tablas observando que a medida que nos movemos de izquierda a derecha, las casillas con números señaladas en cada bloque de una misma fila[106] están en lugares consecutivos[107] y en el momento que desaparecen los números ya no vuelven a aparecer.

- La paridad que se puede observar en los resultados del primer ciclo, mientras que en el segundo ciclo hay una diferencia significativa de 3º a 4º de la E.S.O.
- La diferencia entre aquellos que superan el Nivel I y luego el Nivel II es mucho más acusada en los tres primeros cursos de secundaria. En cambio, en el cuarto curso esa diferencia entre los que superan el Nivel I y los que luego superan el Nivel II, no es tan acusada.
- Por otro lado, los que superan el Nivel III son los mismos que superan el Nivel IV en el segundo ciclo. Así como en el primer ciclo la diferencia entre estos niveles es mínima.

11 Resultados y conclusiones

Uno de los propósitos de este estudio era caracterizar y justificar los resultados de la prueba asociada al modelo evolutivo; dar significado a los comportamientos generales encontrados, así como a los procedimientos, destrezas y estrategias en tanto a las creaciones de conjuntos finitos a partir de un término general de una sucesión dada, ídem para conjuntos infinitos; reconocer las cardinalidades de esos conjuntos y finalmente comparar y concluir si existe o no diferencia entre esas cantidades en cada uno de los niveles establecidos tras el estudio cualitativo.

[106] Estamos considerando una fila como el conjunto de casillas que siguen horizontalmente a las iniciales de un estudiante, es decir, se consideran conjuntamente las opciones A y B.
[107] Lugares consecutivos se refiere a dos bloques consecutivos.

Dicha caracterización es:

***Nivel I* Aceptación de la cardinalidad infinita básica reducida**

Se caracteriza porque son capaces de reconocer el cardinal infinito mediante la comparación de dos sucesiones divergentes básicas (del tipo $a_n = n + k$ y $a_n = k.n$) en la que la diferencia entre ellas es de pocos términos y primeros.

***Nivel II* Aceptación de la cardinalidad infinita básica excesiva**

Se caracteriza porque son capaces de reconocer el cardinal infinito mediante la comparación de dos sucesiones divergentes básicas (del tipo $a_n = n + k$ y $a_n = k.n$) en la que la diferencia entre ellas de términos ha pasado de "poco" a "muchos" términos y primeros.

***Nivel III* Aceptación de la cardinalidad infinita básica reducida con convergencia**

Se caracteriza porque son capaces de reconocer el cardinal infinito mediante la comparación de dos sucesiones básicas convergentes (del tipo $a_n = \frac{kn+1}{n} = \frac{1}{n} + k$, $a_n = \frac{1}{n+k}$ y $a_n = \frac{n}{n+k} = 1 - \frac{k}{n+k}$) en la que la diferencia entre ellos es de pocos términos y primeros.

***Nivel IV* Aceptación de la cardinalidad infinita media excesiva**

Se caracteriza porque son capaces de reconocer el cardinal infinito mediante la comparación de dos sucesiones básicas convergentes (del tipo $a_n = \frac{kn+1}{n} = \frac{1}{n} + k$, $a_n = \frac{1}{n+k}$ y $a_n = \frac{n}{n+k} = 1 - \frac{k}{n+k}$) en la que la diferencia de términos ha pasado de "pocos" a "muchos".

Como última observación, debemos hacer notar lo que ocurre en los Niveles III y IV en cuanto que los alumnos y alumnas que alcanzan esos niveles son los que resuelven las tareas asociadas a estos con estrategias superiores, tipo ***3*** y ***4***, de ahí se obtienen las siguientes conclusiones:

- Para reconocer el cardinal infinito mediante la comparación de dos sucesiones convergentes, es decir, acotadas, en la que la diferencia de términos es de poco y de mucho, es necesario que la argumentación sea potencial y actual.
- Del anterior punto, obviamente, reconocen el cardinal infinito en el caso de sucesiones divergentes.
- La argumentación actual es la estrategia más avanzada en tanto que anteriormente ha tenido que reconocer la potencialidad. Además, se trata de la transición más significativa al pasar de una postura intuitiva (infinito potencial) a una contraintuitiva (infinito actual).

Como conclusión final a todo el estudio empírico cualitativo realizado hemos de señalar la culminación de P.E.R.T. (Planned Evaluation and Review Technique) propuesto en el apartado 4 del capítulo II de este informe para la evaluación del modelo teórico evolutivo de competencia en el cardinal infinito que se expone en el capítulo IV. Esto significa que se confirman las hipótesis H3 y H4, y se alcanzan con ello los objetivos O5 y O6, además del objetivo complementario C3.

CAPÍTULO VIII

CONCLUSIONES

1 Introducción

En el presente capítulo mostramos los aspectos fundamentales del trabajo, haciendo referencia a los siguientes puntos:

- Objetivo general, objetivos específicos, hipótesis y metodología, exponiendo los estudios en los que nos hemos basado para la confirmación de las hipótesis.
- Conclusiones generales y logros más relevantes.
- Perspectivas futuras, indicando vías abiertas para la realización de investigaciones que aporten nuevos conocimientos a los logros conseguidos.
- Análisis de los resultados del trabajo sobre diversos aspectos relacionados con la enseñanza aprendizaje del infinito actual como identidad cardinal.

2 Objetivos e hipótesis de la investigación

Dentro de la línea de pensamiento numérico, el objetivo general de esta investigación es el siguiente (apdo. 6, cap. I):

> "Analizar la naturaleza y evolución de competencias lógicas del infinito actual como identidad cardinal en los alumnos y alumnas de la ESO (13 a 16 años)".

Entendemos como competencias las capacidades con diferentes conocimientos, habilidades, pensamientos, carácter y valores de una forma integral y en las diferentes interacciones, para poder comprender un tópico dado.

Infinito actual como identidad cardinal, asociado a la de totalidad, considerado como alcanzado y con los límites adquiridos, referido a un conjunto con infinitos elementos numéricos.

El objetivo general anterior se formalizó con los siguientes objetivos específicos:

O1. Delimitar el conocimiento del infinito actual dentro del marco general de las matemáticas.

O2. Delimitar el infinito actual dentro de todos los posibles contextos: comparación de conjuntos.

O3. Delimitar el infinito actual en la transmisión escolar.

O4. Analizar y categorizar las respuestas de los alumnos y alumnas al establecer como criterio de comparación la relación parte/todo, comparación elegida por Bolzano basada en las relaciones de inclusión bajo una experiencia física.

O5. Establecer un modelo teórico evolutivo de competencia del infinito actual como identidad cardinal mediante la comparación de series numéricas y comprobar con alumnos y alumnas de Educación Secundaria (13-16 años) la utilidad y eficacia del modelo para describir su comportamiento real.

O6. Caracterizar cada uno de los diferentes estados de desarrollo en términos de estrategias y procedimientos relativos al conocimiento.

O7. Comprobar que la relación de biyección elegida en el modelo evolutivo denota un cambio de pensamiento frente a la relación de inclusión adoptada en la experiencia física.

Objetivos complementarios:

C1. Introducir el método de comparación con la relación de inclusión, con la ayuda de la experiencia física, como iniciación al aprendizaje del infinito.

C2. Iniciar una línea de trabajo en Pensamiento Numérico en Educación Secundaria, dentro de la línea de investigación seguida por Ortiz Comas y Fernández Escalona, cuyo nivel de concreción se dan en "Razonamiento Inductivo Numérico" y “Competencias Ordinales”.

C3. Corroborar que las metodologías cualitativas iniciadas en Ortiz (1997) y Fernández (2001) son efectivas en este tipo de investigaciones.

C4. Comprobar la utilidad del análisis didáctico para fundamentar y contextualizar investigaciones en Educación Matemática.

Para conseguir estos objetivos se han sometido a prueba las siguientes hipótesis (apdo. 7, cap. I):

H1. Existen corrientes epistemológicas que priman el aspecto comparativo para entender el infinito actual frente a otras corrientes que priman el carácter inclusivo de los conjuntos.

H2. Existen tareas con esquemas lógicos comparativos subyacentes para evaluar las competencias del infinito en el campo de las series numéricas.

H3. Es posible tomar un modelo físico experimental como tarea para examinar el razonamiento en la cardinalidad de conjuntos infinitos.

H4. Es posible determinar pruebas para alumnos y alumnas de 13 a 16 años, que formen parte de un diseño experimental cualitativo, constituidas por una serie de tareas que podemos ordenar de menor a mayor dificultad dependiendo de los esquemas lógicos en la comparación del número finito e infinito implicados en cada una de ellas.

H5. Las diferentes estrategias utilizadas por los alumnos y alumnas de 13 a 16 años en la comparación de series finitas e infinitas se pueden organizar en un modelo teórico de desarrollo que explica y describe la evolución del conocimiento del número infinito.

H6. Los escolares aceptan más ampliamente el infinito actual como identidad cardinal mediante el método de inclusión Bolzano bajo una experiencia física que mediante comparación de conjuntos en el sentido cantoriano.

3 Estudios realizados

Hemos realizados dos tipos de estudios para confirmar las hipótesis: un estudio teórico y estudios empíricos cualitativos. Para cada uno de ellos se han utilizado técnicas metodológicas concretas:

- **Estudio teórico**: Análisis Didáctico.
- **Estudios empíricos cualitativos:** Entrevistas clínicas individuales y semiestructuradas a estudiantes de 13 a 16 años.

En el caso de estudios empíricos cualitativos se han realizado tres: uno exploratorio, capítulo IV, previo a la construcción del modelo teórico evolutivo definido en el capítulo VI; otro para determinar la validez empírica de dicho modelo, capítulo VII; finalmente uno específico siguiendo el modelo de inclusión de Bolzano mediante una experiencia física. Además previo a estos estudios empíricos se han realizado pruebas pilotos para confirmar las regularidades en el comportamiento real y efectivo de los alumnos y alumnas al enfrentarse a las tareas propuestas (ver figura II.2).

Las conclusiones del análisis didáctico (cap. III) han justificado, por un lado la construcción de un patrón evolutivo de competencias cuando se utiliza el modelo de inclusión de Bolzano mediante una experiencia física en la comparación de conjuntos finitos e infinitos; y por otro lado, junto al estudio exploratorio (cap. IV) la construcción de un modelo teórico de la evolución de las competencias lógicas en el cardinal infinito en alumnos y alumnas de 13 a 16 años, usando para ello la comparación de conjuntos seguida por Cantor.

El patrón lo forman cinco estados evolutivos referidos a las distintas respuestas. Los tres primeros no aceptan el infinito actual y utilizan respuestas que hemos categorizados de menos a más. Los dos últimos estados son aquellos que lo aceptan usando para ello argumentos propios del infinito potencial o del actual (ver tabla V.1 cap. V).

El modelo consta de cuatro niveles evolutivos, que significan un dominio progresivo que explica y describe la evolución del conocimiento del infinito en los estudiantes de secundaria. Así, pasamos de un Nivel 0, que no distingue entre lo finito y lo infinito cuando se comparan conjuntos donde se han sustraídos unos pocos términos mediante una correspondencia biunívoca cuando se tratan de conjuntos infinitos que se han construidos a partir de los términos de sucesiones divergentes, como define Cantor; a cuando son muchos los términos sustraídos y con sucesiones convergentes del último nivel (ver tabla VI.1 del cap.VI).

Para el análisis y categorización de respuestas (patrón evolutivo) se realizó una prueba mediante una experiencia física constituida por dos tareas, una finita y otra infinita[108]. Las distintas estrategias como respuestas expresadas por los alumnos y alumnas para manifestar la aceptación o no del infinito actual se pudieron categorizar en cinco estados distintos de menos a más evolucionado (apdo. 11.1 cap. V).

Para la certificación empírica del modelo se creó una prueba constituida por cuatro tareas, cada una asociada a un nivel del modelo, por tanto, en cada tarea se dan

[108] Realizar una tarea asociada a conjuntos finitos anteriormente a la asociada a conjuntos infinitos, para que quede involucrado el razonamiento inductivo, entendido este de la misma manera que Ortiz (1997). Ver cap. I apdo. 2.1.

los esquemas lógicos matemáticos implicados en el nivel correspondiente (apdo. 4.1 cap. VI).

La prueba piloto (cap. V, apdo. 11.1) elaborada con entrevistas clínicas individualizadas a 24 estudiantes de 13 a 16 años con la ayuda de una experiencia física nos proporcionó un patrón evolutivo en tanto al tipo de respuestas dadas por ellos con la ayuda metodológica de la investigación narrativa. La graduación del patrón dependía fundamentalmente de la comparación de conjuntos mediante el modelo de inclusión de Bolzano, finitos e infinitos (este con la ayuda de los espejos paralelos), y de la sustracción de uno de los elementos de estos conjuntos. De esa forma, pudimos delimitar en estados evolutivos las respuestas dadas.

La prueba piloto nos ha ayudado:

- A comprobar, en una nueva y mayor muestra con 45 estudiantes más, los resultados de dicha prueba.
- Investigar la evolución de las competencias del infinito actual en los alumnos y alumnas de 13 a 16 años en tareas asociadas a niveles de conocimiento cuando se establece como criterio de comparación la relación parte/todo, modelo de inclusión de Bolzano.
- Investigar la distribución de los alumnos y alumnas del segundo ciclo de Educación Secundaria según los distintos cursos asociados a los estados.

En el estudio empírico exploratorio (cap. IV), realizado con entrevistas clínicas individualizadas a 22 estudiantes, también de 13 a 16 años, se llegó a establecer una escalabilidad entre las categorías de respuestas que implicaban la pertinencia e idoneidad de un modelo de la evolución del conocimiento del infinito en estos alumnos y alumnas. Dicha escalabilidad se da según los parámetros siguientes en tanto a los conjuntos numéricos presentados:

1. Conjuntos numéricos con cardinales finito-infinito formado mediante sucesiones divergentes-convergentes.
2. Las diferencias entre conjuntos son de unos pocos términos a muchos. Estos parámetros surgían en una especie de jerarquización que nos permitió delimitar niveles evolutivos de conocimiento del infinito (apdo. 3, cap. IV).

El estudio empírico cualitativo (cap. VII) nos ha facilitado:

- Comprobar, en una nueva y mayor muestra con 69 estudiantes, los resultados del estudio exploratorio.
- Investigar la evolución de las competencias del infinito actual en los alumnos y alumnas de 13 a 16 años en tareas asociadas a niveles de conocimiento.
- Investigar la distribución de los alumnos y alumnas del segundo ciclo de Educación Secundaria según los distintos cursos asociados a los niveles.

Finalmente, se realiza un estudio comparativo de los resultados del patrón y modelo evolutivo. Se pretende comprobar que la relación de biyección elegida en el modelo evolutivo denota un cambio de pensamiento frente a la relación de inclusión adoptada en la experiencia física.

4 Resultados y conclusiones de los diferentes estudios

4.1 Conclusiones del análisis didáctico

Reconsiderando el infinito actual como identidad cardinal tras la comparación de conjuntos numéricos, se llega a la conclusión de que dicho conocimiento no surge en el vacío, es decir, para la sucesión de términos numéricos, un entramado de relaciones y criterios de comparaciones, el desarrollo de distintas estrategias y procedimientos, la admisión del infinito potencial y posteriormente la aceptación o no del infinito actual es necesario un cúmulo de competencias lógicas en los estudiantes de educación secundaria.

Con respecto al análisis fenomenológico y sus relaciones con las otras cuatro áreas, hemos podido localizar algunos fenómenos para los que son los medios de organización y, qué relación tienen el concepto y la estructura con esos fenómenos, como son la intuición, el principio de inducción completa., criterios de comparación entre conjuntos. El estudio en profundidad de todos ellos no ha sido objetivo de esta investigación y se propone como perspectiva futura.

El análisis cognitivo nos ha ayudado a concretar en qué lugar se encuentran los alumnos y alumnas objeto de estudio tanto en las etapas piagetiana como en el pensamiento matemático, así como también en el curriculum oficial; además de las características principales en los diferentes pensamientos elemental y avanzado, así como en la etapa de transición de estos.

Con el análisis epistemológico hemos pretendido focalizar el estudio del infinito actual en tres autores Bolzano, Cantor y Russell. En la primera aproximación histórica al término matemático que se realizó en el periodo de investigación recogido en la Memoria de Tercer Ciclo (Prieto, 2004), se toma como referencia la obra de Russell *Los principios de la matemática* que aportará a nuestra investigación una manera de trabajar con los alumnos y alumnas lo finito e infinito. El aporte de Russell alude constantemente a Cantor, por ello analizamos sus dos obras fundamentales, *Fundamentos de una teoría general de las multiplicidades: una investigación matemático filosófica en la teoría del infinito* y *Contribuciones a la fundamentación de la teoría de los conjuntos transfinitos* que añade a nuestra investigación una visión sistemática para poder comparar conjuntos infinito. Los trabajos cantorianos aluden a Bolzano y por ello analizamos su obra *Las paradojas del infinito* mostrándonos otra forma de abordar el objeto de nuestro trabajo.

Moreno & Waldegg (1991) nos facilitan la tarea de relacionar la epistemología con la cognición. Ellos analizan las diferentes etapas en la evolución conceptual del infinito actual basándose en la triada piagetiana de Piaget & García (1982), mostrando las dificultades encontradas por los estudiantes para lograr estas etapas en la estructura curricular. Moreno & Waldegg (1991) relacionarán las dos primeras etapas con el enfoque del tópico de Bolzano (etapa intra-objetal) y Cantor (etapa inter-objetal) extrayendo resultados muy significativos, que contribuyen en dos enfoques evolutivos a nuestra investigación (capítulos V y VII). Necesariamente tuvimos que analizar la triada piagetiana en Piaget & García (1982), donde intentamos completar la tercera y última etapa evolutiva conceptual (etapa trans-objetal) con los trabajos de Russell.

Del análisis Enseñanza-Curriculum extraeremos el mayor aporte a nuestro trabajo, valorado en las conclusiones que vendrán posteriormente a la reflexión general y que nos facilitará realizar las tareas asociadas al modelo teórico evolutivo del capítulo VI. Las dificultades y errores que los estudiantes encuentran cuando se enfrentan a las actividades matemáticas, donde es el infinito actual el principal objeto de estudio, nos ayuda a elaborar el proceso que debemos seguir en las entrevistas semiestructuradas de los alumnos y alumnas en nuestros estudios empíricos y facilitarnos la categorización en tanto a las estrategias que usan estos para la aceptación o no del infinito actual, capítulo VII. Los trabajos de investigación, donde las concepciones previas son objeto de estudio, nos ayudan a realizar el protocolo inicial de nuestra investigación del capítulo V, además de contribuir a la realización de los microrrelatos que nos ayudarán, posteriormente, a categorizar las distintas respuestas dadas por nuestros estudiantes en esta parte de la investigación.

Las principales conclusiones del estudio se pueden resumir en los siguientes apartados y puntos concretos:

1. *Creación de los conjuntos numéricos: Secuencias numéricas.*

   - Que el uso del principio de inducción completa para construir conjuntos, así como utilizar el término "así sucesivamente" en la serie numéricas es factible para indagar en el pensamiento del individuo. Para Russell: "es pues el principio de inducción (…) el que está en el fondo de todas las inferencias sobre la existencia de cosas no dadas de modo inmediato" (Pérez, 2014, p.322).
   - Que la generalización de procesos finitos puede alcanzar la idea de lo infinito en el campo del estudio de sucesiones y series infinitas (National Council of Teachers of Mathematics, 1989).
   - El uso del razonamiento inductivo en las primeras demostraciones por inducción admiten un fortalecimiento en la idea de que el infinito es tratable. Es un acercamiento mayor del estudiante a un infinito más "real" (National Council of Teachers of Mathematics, 1989).

2. *Aceptación del infinito potencial.*

   - Que el concepto potencial del infinito responde a una interpretación natural intuitiva del infinito (Fischbein, 1982, citado en Garbin & Azcárate, 2001).
   - Que la aceptación o no del infinito potencial puede presentar un obstáculo para la aceptación del actual (Turégano, 1996).

3. *Criterios de comparación de conjuntos.*

- Los métodos de comparación usados en conjuntos finitos son adecuados para la comparación conjuntos infinitos (Tirosch, 1991, 1992, citados en Penalva, 2001).
- Que el todo es mayor que sus partes es una relación que se adquiere alrededor de los 7 u 8 años al sustituir este aprendizaje por una correspondencia uno-a-uno que sin duda es un paso importante en tanto a la evolución del pensamiento (Falk, 1994, citado en Belmonte, 2009).
- Que ideas previas sobre el infinito y ciertas actitudes hacia las matemáticas pueden funcionar como obstáculo para aceptar como criterio de comparación utilizando la correspondencia uno-a-uno en conjuntos infinitos en estudiantes de 10 a 14 años (Sierpinska, 1989 citado en Penalva, 2001).
- Para Ortiz (1994) la definición dada por Bolzano plantea contradicción con la intuición que se tiene de subconjunto propio(ya que si un conjunto A tiene un subconjunto propio B, la intuición indica que B es necesariamente más pequeño que A, existen elementos de A que no están en B), para Waldegg(2005) el criterio dado por Bolzano es más “intuitivo”, pues es más cercano a experiencias finitas concreta. La solución cantoriana sólo puede alcanzarse por un desprendimiento total del significado y de la intuición, representando un corte epistemológico.

4. *Cardinalidad finita e infinita.*

- Que dos conjuntos son equipotentes, lleva implícito el establecimiento de una correspondencia, Turégano (1996).

- Que hay una creencia errónea acerca de que un conjunto acotado tiene cardinal finito (Belmonte, 2011).
- La mayoría piensan que todos los conjuntos infinitos tienen el mismo número de elementos, Tirosh (1999, citado en Penalva, 2001).

5. *Aceptación del infinito actual.*

- El infinito actual se acepta de menor grado y con una cierta indeterminación, Turégano (1996).
- Un infinito actual no tiene un significado conductual, por tanto no es congruente con una interpretación intuitiva, Fischbein (1982, citado en Garbin & Azcárate, 2001).
- La inducción de las tareas propuestas durante la entrevistas puede ayudar a desarrollar un pensamiento coherente en el estudiante y de manera particular cuando la noción del infinito actual esté implicado en dichas tareas (Garbin & Azcárate, 2002).
- El estudiante crea sus propios argumentos, acertados o no, para poder dar respuestas a la aceptación del infinito actual, Sierpinska (1994, citado en Penalva, 2001).
- "El desarrollo conceptual del infinito actual es bastante diferente, se manifiesta muy tardíamente y aparece siempre inmerso en situaciones de conflictos" (Waldegg, 1996, p.108).
- Se podría pensar "en una especia de anterioridad lógica del infinito actual sobre el potencial, lo que tiene como consecuencia que su aparición sea inevitable en los procesos de creación y re-creación de las matemáticas donde se presenta el infinito potencial" (Waldegg, 1996, p.108).

Conclusiones específicas según el criterio de comparación aplicado a los estudiantes:

6. *Al establecer como criterio la comparación parte/todo elegida por Bolzano basada en la relación de inclusión bajo una experiencia física proponemos:*

- Intentar que el nuevo conocimiento sea abordado desde una situación cercana al estudiante, Real Decreto 1631/2006.
- Sugerencias acerca de líneas metodológicas y utilización de recursos en el bloque de Geometría sobre el uso del libro de los espejos, BOJA 171/2007.
- Uno de los experimentos más básicos que proponen para una primera reflexión en el alumno y alumna, es el enfrentamiento de dos espejos paralelos, National Council of Teachers of Mathematics (1989).
- Recomiendan que los alumnos y alumnas estimen modelos físicos así como otros objetos de la vida cotidiana que les permita desarrollar la intuición geométrica hasta alcanzar ideas abstractas apoyadas a experiencias previamente adquiridas (Fedriani & Tenorio, 2007).

7. *Al establecer como criterio de comparación la relación uno-a-uno, elegida por Cantor basada en la biyección entre conjuntos bajo un modelo evolutivo de competencia establecemos que:*

- En la comparación de conjuntos numéricos, el criterio de biyección se muestra más fuerte que el de la inclusión, Turégano (1996).
- La opción con una representación en paralelo de los términos de sucesiones numéricas bajo una comparación uno-a-uno es más factible para aceptar la cardinalidad infinita que la representación lineal (Falk, 1994, citado en Belmonte, 2009).

- Que los conjuntos acotados no se aceptan con un número infinito de elementos. Así, la comparación entre conjuntos infinitos se hace más difícil si solo uno de los conjuntos tratados está acotado, Waldegg (1996).
- Que la ayuda de la biyección en cuanto a método de comparación de conjuntos permite formar en la mente del alumno o de la alumna ideas que eran desconocidas para él o ella (Lestón, 2008).

8. *Con respecto a nuevas perspectivas metodológicas.*

- Las intuiciones secundarias provocadas por un cuidado didáctico especial, facilitan una forma correcta para llegar a las intuiciones del infinito (Fischbein, 1987, citado en Belmonte, 2009).
- Imaz (2001) cree que el infinito debería categorizarse y de esa forma se podría abrir nuevas perspectivas a problemas de enseñanza y aprendizaje del cálculo.

4.2 Conclusiones del estudio empírico exploratorio

Uno de los propósitos de este estudio era caracterizar y justificar los resultados de la prueba asociada al modelo evolutivo, y dar significado a los comportamientos generales encontrados, así como a los procedimientos, destrezas y estrategias que los alumnos y alumnas de Educación Secundaria utilizan para comparar y diferenciar número finito de número infinito. Dicha caracterización es:

Nivel I

Se caracterizan porque son capaces o no de etiquetar los elementos de una serie numérica diferenciándolos unos de otros, pero sin establecer comparaciones entre ellos y si lo hacen, sin encontrar diferencias.

Nivel II

Se caracterizan porque además de construir las series numéricas convergentes infinitas, saben diferenciarlas sustrayendo un número pequeño de elementos y primeros.

Reconocen el número infinito en la comparación de dos series básicas infinitas divergentes cuando la diferencia entre ambas series es de pocos términos y primeros.

Nivel III

La característica fundamental es saber distinguir las sucesiones infinitas en las que la diferencia es de mayor número de términos.

Reconocen el número infinito en la comparación de dos series básicas infinitas divergentes cualesquiera.

Nivel IV

Sus características son:

Construyen tanto series finitas como infinitas y diferencian estas con pocos términos iniciales.

Reconocen el número infinito en la comparación de dos series básicas infinitas convergentes, cuando la diferencia entre ambas series es de pocos términos y primeros.

Nivel V

Se caracterizan porque saben distinguir sucesiones finitas e infinitas en las que la diferencia es con mayor número de términos iniciales.

Reconocen el número infinito en la comparación de dos series básicas convergentes cualesquiera.

Como última observación debemos hacer notar lo que ocurre en el Nivel V, en cuanto que los alumnos y alumnas que alcanzan ese nivel son los que resuelven con estrategias superiores la tarea asociada al Estado IV.

Como conclusión final a todo el estudio empírico realizado hemos de confirmar las hipótesis. Se alcanzan con ello los objetivos, además del objetivo complementario indicado en el apartado 5, propósito del estudio exploratorio del presente capítulo.

4.3 Conclusiones del estudio empírico cualitativo siguiendo el modelo de inclusión de Bolzano

Dos son los propósitos de este estudio, por un lado introducir el método de investigación de comparación de la relación de inclusión de Bolzano con la ayuda de una experiencia física y por otro lado, dar significado a los comportamientos generales encontrados, así como a los procedimientos, destrezas y estrategias para reconocer las cardinalidades de esos conjuntos y finalmente la aceptación o no del infinito actual. Con la ayuda de la investigación narrativa y sus microrrelatos hemos podido caracterizar los siguientes estados evolutivos y posteriormente categorizar todos los alumnos y alumnas entrevistados en esos estadios. Dicha caracterización es:

***Estado I.* Finitista Elemental**

Alumnos y alumnas que quitando un elemento, la cantidad final es ya menor que la inicial. En mayor cantidad, alumnos y alumnas de cursos inferiores

***Estado II.* Finitista Complejo**

Alumnos y alumnas que quitando un elemento y los correspondientes reflejos, la cantidad final es menor que la inicial. Tanto en este estado como en el anterior evaden la infinitud argumentando lo observado con propiedades propias de lo finito.

***Estado III.* In-finitista**

Alumnos y alumnas que consideran el infinito con propiedades de lo finito. Aceptan con medidas la infinitud, pero con argumentos finitista.

***Estado IV.* Potencialista**

Alumnos y alumnas que razonan la equidad de las cantidades utilizando argumentos propios del infinito potencial, no haciendo ninguna referencia al actual.

***Estado V.* Actualistas**

Alumnos y alumnas que razonan la equidad de las cantidades utilizando argumentos propios del infinito actual.

4.4 Conclusiones del modelo evolutivo de competencias en el cardinal infinito.

En el capítulo VI se argumenta un modelo teórico de competencias cognitivas de carácter evolutivo sobre el conocimiento del cardinal infinito que revela la progresión en la aceptación del infinito actual tras comparar conjuntos numéricos en alumnos y alumnas de 13 a 16 años de Educación Secundaria.

Como síntesis, el modelo consta de cuatro niveles de dominio progresivo sobre la aceptación o no del infinito actual, cada uno de ellos tiene unas características lógico matemáticas propias.

***Nivel I:* Aceptación de la cardinalidad infinita básica reducida**

- Establecer la correspondencia biunívoca entre los conjuntos formados.

- Reconocer y diferenciar la cardinalidad finita e infinita en ausencia de pocos términos cuando se trata de sucesiones divergentes.

***Nivel II:* Aceptación de la cardinalidad infinita básica excesiva**

- Reconocer y diferenciar la cardinalidad finita e infinita en ausencia de muchos términos.

***Nivel III:* Aceptación de la cardinalidad infinita media reducida**

- Intuir la cota inferior tras la formación de los primeros términos de la sucesión.
- Comparar la correspondencia biunívoca que se establece entre conjuntos finitos e infinitos.
- Reconocer y diferenciar la cardinalidad finita e infinita en ausencia de pocos términos *cuando se trata de sucesiones divergentes.*

***Nivel IV:* Aceptación de la cardinalidad infinita media excesiva**

- Reconocer y diferenciar la cardinalidad finita e infinita en ausencia de muchos términos.

4.5 Conclusiones del estudio empírico cualitativo del modelo evolutivo

Uno de los propósitos de este estudio era caracterizar y justificar los resultados de la prueba asociada al modelo evolutivo, dar significado a los comportamientos generales encontrados, así como a los procedimientos, destrezas y estrategias en las creaciones de conjuntos finitos a partir de un término general de una sucesión dada (ídem para conjuntos infinitos), reconocer las cardinalidades de esos conjuntos y finalmente comparar y concluir si existe o no diferencia entre esas cantidades en cada uno de los niveles establecidos tras el estudio cualitativo. Dicha caracterización es:

***Nivel I*. Aceptación de la cardinalidad infinita básica reducida**

Son capaces de reconocer el cardinal infinito mediante la comparación de dos sucesiones divergentes básicas (del tipo $a_n = n + k$ y $a_n = k.n$) en la que la diferencia entre ellas es de pocos términos y primeros.

***Nivel II*. Aceptación de la cardinalidad infinita básica excesiva**

Son capaces de reconocer el cardinal infinito mediante la comparación de dos sucesiones divergentes básicas (del tipo $a_n = n + k$ y $a_n = k.n$) en la que la diferencia entre ellas de términos ha pasado de "pocos" a "muchos" términos y primeros.

***Nivel III*. Aceptación de la cardinalidad infinita básica reducida con convergencia**

Son capaces de reconocer el cardinal infinito mediante la comparación de dos sucesiones básicas convergentes (del tipo $a_n = \frac{kn+1}{n} = \frac{1}{n} + k$, $a_n = \frac{1}{n+k}$ y $a_n = \frac{n}{n+k} = 1 - \frac{k}{n+k}$) en la que la diferencia entre ellos es de pocos términos y primeros.

***Nivel IV*. Aceptación de la cardinalidad infinita media excesiva**

Son capaces de reconocer el cardinal infinito mediante la comparación de dos sucesiones básicas convergentes (del tipo $a_n = \frac{kn+1}{n} = \frac{1}{n} + k$, $a_n = \frac{1}{n+k}$ y $a_n = \frac{n}{n+k} = 1 - \frac{k}{n+k}$) en la que *la diferencia de términos ha pasado de "pocos" a "muchos".*

Como última observación, debemos hacer notar lo que ocurre en los Niveles III y IV en cuanto que, los alumnos y alumnas que alcanzan estos niveles son los que resuelven las tareas asociadas a estos con estrategias superiores, tipo ***3*** y ***4***, de ahí se obtienen las siguientes conclusiones:

- Para reconocer el cardinal infinito mediante la comparación de dos conjuntos numéricos formados por términos de sucesiones convergentes, es decir acotadas, en la que la diferencia de términos es de poco y de mucho, es necesario una argumentación potencial y actual.
- En el anterior punto, obviamente reconocerán el cardinal infinito en el caso de sucesiones divergentes.
- La argumentación actual es la estrategia más avanzad para reconocer la potencialidad. Además, se trata de la transición más significativa al pasar de una postura intuitiva (infinito potencial) a una contraintuitiva (infinito actual).

4.6 Conclusiones entre el estudio empírico cualitativo siguiendo el modelo de inclusión de Bolzano y estudio empírico cualitativo del modelo evolutivo

Hemos desarrollado dos estudios empíricos cualitativo que han permitido obtener y valorar la información sobre la evolución del conocimiento lógico en la aceptación del infinito cardinal cuando se trata de conjuntos numéricos en escolares de segundo ciclo de Educación Secundaria, de edades comprendidas entre los 13 y los 16 años[109]. La forma de comparación es claramente distinta, mientras uno seguía el modelo de inclusión de Bolzano parte-todo en el mismo conjunto definido previamente, el segundo correspondía a un modelo evolutivo de competencias lógicas matemáticas del infinito cardinal de comparación uno-a-uno seguido por Cantor entre conjuntos finitos e infinitos. Por otro lado, mientras la primera se basa en una experiencia física

[109] Los estudiantes que realizaron el primer estudio empírico son los mismos que realizaron el segundo estudio empírico.

que trata de modelar la cardinalidad infinita de conjuntos, la segunda corresponde a conjuntos numéricos.

A continuación, exponemos unas tablas comparativas por cursos de cada estudiante en el estado y en el nivel que se sitúan tras la realización de sus entrevistas.

Tablas VIII. 1. *Comparativa entre Estados-Niveles alcanzados por los estudiantes de 1º-2º E.S.O.*

		Criterio Inclusión parte/todo (Bolzano)	Criterio basado en la biyección uno-a-uno (Cantor)			
		Estados	Niveles			
			I	II	III	IV
1º ESO	Ju.12,11	I				
	Zo. 13,02	I				
	Ig. 13,02	II				
	Fr. 12,09	I				
	Pa. 12,09	IV				
	An. 12,08	V				
	Vi. 13,03	I				
	Al. 12,07	III				
	Pa.12,11	V				
	Ju. 12,07	I				
	Ma.13,00	I				
	Te. 12,09	I				
	Ai. 13,00	III				
	Al. 12,09	II				
	Ma.12,09	IV				
	Na.12,09	V				
	Ma. 12,04	V				
	Ma. 13,03	I				
	Mar.13,00					
	Mag.13,00	II				

		Criterio Inclusión parte/todo (Bolzano)	Criterio basado en la biyección uno-a-uno (Cantor)			
		Estados	Niveles			
			I	II	III	IV
2º ESO	De. 14,04	II				
	Al. 13,08	I				
	Ca. 13,05	IV				
	Pa. 13,10	III				
	Ma. 13,09	I				
	Lu. 15,04	I				
	Al. 13,06	I				
	Ma. 14,03	II				
	Se. 14,02	V				
	La. 14,03	IV				
	Ju. 13,07	I				
	Gu. 13,06	I				
	Al. 13,07	IV				
	Pa. 13,09	IV				
	Jo. 13,11	IV				

Tablas VIII. 2. *Comparativa entre Estados-Niveles alcanzados por los estudiantes de 3º-4º E.S.O.*

		Criterio Inclusión parte/todo (Bolzano)	Criterio basado en la biyección uno-a-uno (Cantor)			
		Estados	Niveles			
			I	II	III	IV
3º ESO	Lu.15,00	I				
	Cl.14,10	III				
	Pa.14,09	V				
	Al.14,06	I				
	Fa.15,03					
	Pa.14,11	V				
	Mi.14,10	I				
	Jo.15,03	V				
	Ca.15,03	IV				
	Ma.14,10	V				
	Al.14,10	II				
	Su.14,05	II				
	Ma.14,09	V				
	Ca.14,10	I				
	An.15,03	V				
	An.14,07	II				
	Cr.15,04	IV				
	Pa..15,01	IV				

		Criterio Inclusión parte/todo (Bolzano)	Criterio basado en la biyección uno-a-uno (Cantor)			
		Estados	Niveles			
			I	II	III	IV
4º ESO	Ma.15,09	III				
	Al.16,03	V				
	Al.15,09	V				
	El.15,07	I				
	Na.15,11	IV				
	Pa.15,10	V				
	La.16,01	I				
	Ju.15,06	I				
	Ma.16,02	I				
	An.16,05	IV				
	Ce.16,01	III				
	Nu.15,06	V				
	Al. 15,06	V				
	Ju.15,07	V				
	Ju.16,01	V				
	Da.15,02	III				

Observaciones:

- Los estudiantes categorizados en los Estados I y II, no llegan a alcanzar el Nivel I, y si lo alcanzan (casos Ig.13,02; Ma.13,00; Mag.13,00; Gu.13,06 y Lu.15,00) no argumentan la aceptabilidad en ese nivel o presentan dudas.
- Todos los alumnos y alumnas, que se encuentran categorizados en el Nivel IV, están en los Estados superiores IV o V.
- Eso no sucede en casos contrarios: estudiantes que se encuentran en los Estados IV o V, no alcanzan niveles superiores en el modelo evolutivo planteado, incluso ni el inferior (casos Na.12,09; Pa.14,09 y Pa.15.01).

- No se observa diferencia entre los que razonan la equidad de las cantidades utilizando argumentos propios del infinito potencial, Estado IV, y los que lo hacen con argumentos propios del infinito actual, Estado V, en la experiencia física, y alcanzar niveles superiores en el modelo evolutivo.

Conclusiones:

- La relación de biyección elegida en el modelo evolutivo denota un cambio de pensamiento frente a la relación de inclusión adoptada en la experiencia física.
- En la misma línea que Waldegg (2005, citado en Fuenlabrada & Armella, 2008), el criterio elegido, la experiencia física de inclusión de Bolzano basada en la correspondencia parte-todo, es más "intuitivo" y con mejores resultados.
- De acuerdo con la misma autora, la relación uno-a-uno, criterio elegido para el modelo evolutivo, aunque es más visible, solo puede alcanzarse con un desprendimiento total del significado y de la intuición, representando un corte epistemológico observado sobre todo en alumnos y alumnas de cursos superiores.
- La aceptación del infinito actual con argumentos propios del infinito potencial o del mismo infinito actual, que utilizan los estudiantes en la experiencia física, no es vinculante para aceptar el infinito actual cuando se trata de tareas asociadas a conjuntos acotados de estados superiores del modelo evolutivo.

5 Logros y hallazgos

Todo este estudio aporta datos concretos que acreditan la bondad de las hipótesis y por tanto el logro de nuestros objetivos.

Con respecto a las hipótesis:

H1. Existen corrientes epistemológicas que priman el aspecto comparativo para entender el infinito actual frente a otras corrientes que priman el carácter inclusivo de los conjuntos.

Los resultados y conclusiones del capítulo III basados en el análisis epistemológico, en concreto cuando analizamos la relación entre Epistemología y Cognición (apdo. 5.4) y cuando consideramos la Enseñanza y Currículum (apdo. 6), aportan evidencias que sostienen H1.

H2. Existen tareas con esquemas lógicos comparativos subyacentes para evaluar las competencias del infinito en el campo de las series numéricas.

De la misma manera que con la hipótesis anterior, la confirmación de esta hipótesis se lleva a cabo dentro del proceso de análisis didáctico, concretamente, cuando se analiza Enseñanza y Currículum.

H3. Es posible tomar un modelo físico experimental como tarea para examinar el razonamiento de la cardinalidad de conjuntos infinitos.

Los resultados y conclusiones del estudio empírico realizado y expuesto en el capítulo V lo confirman.

H4. Es posible determinar pruebas para alumnos y alumnas de 13 a 16 años, que formen parte de un diseño experimental cualitativo, constituidas por una serie de tareas que podemos ordenar de menor a mayor dificultad dependiendo de los esquemas lógicos de la comparación del número finito e infinito implicados en cada una de ellas.

Se confirma con la construcción de la prueba del capítulo VI, pues, que dicha prueba congrega las condiciones que la hipótesis expone.

H5. Las diferentes estrategias utilizadas por los alumnos y alumnas de 13 a 16 años en la comparación de series finitas e infinitas, se pueden organizar en un modelo teórico de desarrollo que explica y describe la evolución del conocimiento de la cardinalidad infinita.

El estudio empírico cualitativo expuesto en el capítulo VII, confirma la conciliación de la prueba concretada en el capítulo VI para validar empíricamente el modelo evolutivo de competencias en el cardinal infinito, y queda validado con alumnos y alumnas de Educación Secundaria; por tanto, se ratifica la hipótesis.

H6. Los escolares aceptan más ampliamente el infinito actual como identidad cardinal mediante el método de inclusión Bolzano bajo una experiencia física que mediante comparación de conjuntos en el sentido cantoriano.

Los resultados y conclusiones expuestos en este mismo capítulo, en el apartado 4.6, aportan evidencias que sostienen esta hipótesis H6.

Con respecto a los objetivos:

Las pruebas mostradas para corroborar las diferentes hipótesis son garantía del logro de los distintos objetivos de nuestro estudio:

O1. Delimitar el conocimiento del infinito actual dentro del marco general de las matemáticas.

Para alcanzar este objetivo realizamos una revisión epistemológica del infinito actual. La noción del infinito fue el elemento de preocupación en los dos periodos de fundamentación matemática. El primero que culmina con *Los elementos* de Euclides, y el segundo que se originó con los trabajos de Cantor. Entre esos períodos se sitúan los trabajos de Bolzano, precursor del infinito actual. Por todo ello, el análisis epistemológico se ha centrado en estos dos autores junto a Russell.

O2. Delimitar el infinito actual dentro de todos los posibles contextos: comparación de conjuntos.

Tras la revisión del análisis didáctico, en concreto cuando se analiza Enseñanza y Curriculum. Se consigue por las confirmaciones de las hipótesis H1 y H2.

O3. Delimitar el infinito actual en la transmisión escolar.

Se consigue al revisar el análisis Enseñanza y Curriculum, en concreto en el análisis curricular y las recomendaciones ajenas al Currículo, estamos validando la hipótesis H2 y conseguimos con ello el objetivo.

O4. Analizar y categorizar las respuestas de los alumnos y alumnas, al establecer como criterio de comparación la relación parte/todo, comparación elegida por Bolzano basada en las relaciones de inclusión bajo una experiencia física.

Se consigue tras la confirmación de la hipótesis H3 y los resultados expuestos en el capítulo V.

O5. Establecer un modelo teórico evolutivo de competencia del infinito actual como identidad cardinal mediante la comparación de series numéricas y comprobar, con alumnos y alumnas de Educación Secundaria (13-16 años), la utilidad y eficacia del modelo para describir su comportamiento real.

Queda confirmado con las hipótesis H4 y H5.

O6. Caracterizar cada uno de los diferentes estados de desarrollo en términos de estrategias y procedimientos relativos al conocimiento.

Queda confirmado también con la hipótesis H5 y con los resultados y conclusiones del capítulo VII.

O7. Comprobar que la relación de biyección elegida en el modelo evolutivo denota un cambio de pensamiento frente a la relación de inclusión adoptada en la experiencia física.

Se consigue tras la confirmación de la hipótesis H6 junto a las conclusiones del apartado 4.6 del presente capítulo.

Con respectos a los objetivos complementarios:

C1. Introducir el método de comparación sobre la relación de inclusión, con la ayuda de la experiencia física, como iniciación al aprendizaje del infinito.

Consideramos que la valoración realizada en los estudiantes del modelo de inclusión de Bolzano, como criterio de comparación relación parte/todo realizada bajo una experiencia física, es una posible iniciación en la enseñanza y aprendizaje del infinito.

C2. Iniciar una línea de trabajo en Pensamiento Numérico en Educación Secundaria, dentro de la línea de investigación seguida por Ortiz Comas y Fernández Escalona cuyo nivel de concreción se da en "Razonamiento Inductivo Numérico" y "Competencias Ordinales".

Siguiendo la línea de investigación de Ortiz (1997) y Fernández (2001) en sus aspectos metodológicos y de formas hemos conseguido realizar este trabajo, por tanto se consigue el objetivo.

C3. Corroborar que las metodologías cualitativas iniciadas en Ortiz (1997) y Fernández(2001) son efectivas en este tipo de investigaciones.

Pensamos que este trabajo es un ejemplo de investigaciones cualitativas en Educación Secundaria sobre conceptos lógicos matemático.

C4. Comprobar la utilidad del análisis didáctico para fundamentar y contextualizar investigaciones en Educación Matemática.

Se ha evidenciado la importancia en nuestro tema del análisis didáctico ya que ha facilitado dar significado a nuestra investigación y determinar los elementos básicos de comparación entre conjuntos numéricos para la aceptación del infinito cardinal en una experiencia física y en un modelo evolutivo de conocimiento y que se han podido contrastar de modo empírico.

6 Perspectivas futuras

Comentamos, a continuación, posibles vías por las que orientar los esfuerzos en futuras investigaciones.

1. Con respecto al análisis didáctico realizado en el tópico estudiado es posible varias perspectivas:
   - Un análisis fenomenológico más profundo entorno al infinito actual. De la misma manera las investigaciones de Claros (2010) acerca de la fenomenología del límite finito repercutieron en su Tesis Doctoral, creemos que en nuestro tópico sería posible un estudio específico de ello.
   - Extender las áreas consideradas básicas en nuestro análisis didáctico como lo hiciera González (1999) a otras áreas. Por ejemplo, en el área social, Lestón (2011):

     Se asume entonces que el infinito es un concepto que se construye inicialmente fuera de la institución escolar. Se utiliza en la vida cotidiana

> para referirse a distintas cuestiones y eso hace que exista fuera de la escuela un infinito, que aunque con algún sentido matemático, no corresponde de manera completa al infinito matemático que se utiliza en la clase de matemáticas. (…) Se produce entonces un choque entre esos dos infinitos: el construido socialmente y desconocido por la escuela, y el matemático, que se utiliza en la escuela, pero es desconocido por los alumnos. (p.4)

Se trataría de buscar en otras áreas (social, arte, física, etc.) las relaciones que pudieran tener con el infinito, realizar una búsqueda y con toda la información obtenida llegar a una sería de conclusiones para conjeturar y, posteriormente, reconocer prioridades y aspectos a investigar.

2. El razonamiento inductivo, entendido de la misma forma que Ortiz (1997), ha estado presente en las tareas aplicadas en estudiantes según el modelo evolutivo, pero carencial en las tareas apoyadas en la experiencia física.

   Vemos la posibilidad de este razonamiento en los estudiantes usando distintos ángulos de visualización cuando observan la infinitud en las bolas reflejadas en los espejos. A mayor ángulo, las bolas observadas son finitas. Si el ángulo va disminuyendo con respecto a la horizontal, las bolas reflejadas irán aumentando hasta llegar un punto en el cual se puede "observar" la infinitud de ellas, es ese punto el que hemos cogido como referencia para nuestro estudio. El uso de la observación de los distintos ángulos de una forma inductiva podríamos introducir al estudiante la potencialidad del infinito como proceso. Es posible que la aceptación del infinito potencial tras esta experiencia no presente un obstáculo para la aceptación del infinito actual.

3. Con respecto a la metodología utilizada para el análisis y conclusiones de nuestra investigación: hemos obtenido unos resultados a partir de una muestra intencional de alumnos y alumnas de Educación Secundaria, confirmando resultados ya

obtenidos en muestras anteriores tanto en la experiencia física de los espejos según el modelo de inclusión de Bolzano como del modelo evolutivo asociado a la comparativa cantoriana de conjuntos. Al igual que ocurrió con el modelo evolutivo de Fernández (2001), estos resultados tienen un significado debido a un análisis didáctico que nos ha permitido construir el patrón y modelo evolutivo. Posiblemente con un diseño estadístico adecuado a los fines pretendidos, los resultados cualitativos obtenidos en las muestras analizadas se podrían generalizar a todos los alumnos y alumnas de Educación Secundaria. Ese estudio podría configurar una nueva investigación.

4. Por último, ampliar el estudio a cursos superiores de Educación Primaria y Bachillerato:

   Con respecto al modelo evolutivo de competencias, ¿qué hay sobre las competencias utilizadas por los estudiantes antes del Nivel I, en los cursos 5º y 6º de EPO, así como en nuestro caso, todos los alumnos y alumnas que no pudieron superarlos? ¿Se pueden disponer en niveles evolutivos superiores en Bachillerato y, en nuestro caso, en alumnos y alumnas que consiguieron llegar con éxito al nivel establecido en nuestra investigación? ¿Cuáles serían esos niveles? ¿De qué dependerían las tareas asociadas a esos niveles inferiores y superiores?

7 Aplicabilidad de los resultados

La ausencia de forma aparente del tópico estudiado, al no aparecer de forma explícita en currículum de Educación Secundaria, y los resultados obtenidos junto con los que se pueden obtener en el futuro, consideramos que son de gran importancia para posibilitar una adaptación curricular a los posibles estudiantes de la etapa educativa.

Los óptimos resultados obtenidos con la experiencia física de los espejos paralelos y las recomendaciones de National Council of Teachers of Mathematics (1989), hacen plantearnos el uso de estos tipos de experiencias para una primera reflexión en el estudiante previo a la introducción conceptual de los dos distintos tipos de infinitos que se pueden plantear en Educación Secundaria, incluso en los últimos cursos de Educación Primaria.

Nuestra investigación plantea un reto a los profesores de Educación Secundaria en las estrategias utilizadas para la aceptación del infinito actual en estudiantes: utilizar y potenciar estas para un cambio en la metodología del docente.

Como hemos podido observar, no todos los estudiantes de un mismo curso se encuentran en el mismo estado o nivel, lo que justifica la diferencia de rendimientos entre ellos en cuanto a la asimilación de los conocimientos que se pretenden enseñar.

Las tareas asociadas a los niveles del modelo evolutivo creemos que pueden ser utilizadas por los profesores como indicadores en las distintas actividades propuestas a los alumnos y alumnas según la naturaleza y el grado de dificultad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aguado, R. (1978). Métodos gráficos para el estudio de conjuntos infinitos. *Gaceta Matemática 30* (1-2), 3-17.

Aponte, M. (2014). *La noción de infinito en George Cantor. Un estudio Histórico-epistemológico en la perspectiva de la Educación matemática.* Tesis de Grado para optar al título de Magisterio en Educación énfasis en Educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia.

Arboleda, L.C., & Recalde, L.C. (1995). Formación y manejo operatorio de conceptos matemáticos: la historia y epistemología del infinito, *Matemáticas: Enseñanza Universitaria, 4*(1), 151-171.

Arribas, H.F. (2008). *El pensamiento y la biografía del profesorado de Actividad Física en el Medio Natural: un estudio multicaso en la formación universitaria orientado a la comprensión de modelos formativos.* Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Expresión Musical, Plástica y Corporal. Universidad de Valladolid. España.

Arrigo G., & D'Amore, B. (1999). "Lo veo, pero no lo creo" Obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Georg Cantor que involucra al infinito actual. *Educación matemática* México DF, (México), *11*(1), 5-24.

Arrigo, G., & D'Amore, B. (2004). Otros hallazgos sobre los obstáculos en la comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor. *Educación Matemática* México DF, (México), *12*(2), 5-19.

Azcárate, C., & Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10* (2), 135-149.

Azcárate, P. (1996). *Proyecto docente.* Universidad de Cádiz.

Aztekin, S., Arikan, A., & Sriraman, B. (2010). The Constructs of PhD Students about Infinity: An Application. *The Montana Mathematics Enthusiast, 7*(1), 149- 174.

Bagni, G.T. (1997). Didactics of Infinity: Euclid's proof and Eratosthenes' sieve Prime numbers and potential infinity in High School, *Didactics of Mathematics-Technology in Education*, Erasmus ICP-96-G-2011/11, Thessaloniki, 209-218.

Bagni, G.T. (1998). Un'interpretazione categoriale de una misconcezione riguardante gli insiemi infiniti. *Atti e Memorie dell'Ateneo di Treviso, 15*, 51-60.

Bagni, G. T. (2001). Infinito e infintesimo potenziale e attuale: una sfida per la Scuola Secondaria Superiore. *Bolletino dei Docenti di Matematica*, *2* (42), 9-20.

Belmonte, J.L. (2009). *Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito en estudiantes de Educación Primaria, Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad.* Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales. Universidad de Salamanca. España.

Boero, P., Douek, N., & Garuti, R. (2003). Children's Conceptions of Infinity of Numbers in a Fifth Grade Classroom Discussion Context. *Proceedings of the 27th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, *2*, 121-128.

Bolzano, B. (1991). *Las paradojas del infinito*. (L.F. Segura, trad.). Mexico: Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM. (Obra original publicada en 1851).

Borasi, R. (1985a). Errors in the enumeration of infinite sets. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 7*, 77–89.

Borasi, R. (1985b). Intuition and rigor in the evaluation of infinite expressions. *Focus on LearningProblems in Mathematics*, *7*(3-4), 65-75.

Borges, J. L. (1989). *Poesía Completa.*, Barcelona: Destino editorial.

Brown, A., McDonald, M.A., & Weller, K (2008). Step by Step: Infinite Iterative Processes and Actual Infinity. *CBMS Issues in Mathematics Education* American Mathematical Society, *15*, 117-144.

Brown, A., McDonald, M. A., & Weller, K. (2010). Infinite iterative processes and actual infinity. *Mathematics Education,16*, 115-141.

Camacho, A., & Aguirre, M. (2001). Situación didáctica del concepto de límite infinito. Análisis preliminar. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa.*4*(3), 237-265.

Cantor, G. (1983a). *Fundamentos de una teoría general de las multiplicidades: una investigación matemático filosófica en la teoría del infinito*. (J. Bares y

J.Climent, trad.). (Obra original publicada en 1895).Recuperado del sitio de internet de http://www.uv.es/jkliment/Documentos/Cantor83.pc.pdf.

Cantor, G. (1983b). *Contribuciones a la fundamentación de la teoría de los conjuntos transfinitos.* (J. Bares y J.Climent, trad.). (Obra original publicada en 1895). Recuperado del sitio de internet de http://www.uv.es/jkliment/Documentos/Cantor95-97.pc.pdf.

Castro, E. (1994). *Exploración de Patrones Numéricos mediante Configuraciones Puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años).* Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Castro, I., & Pérez, J. (2007). *Un paseo finito por lo infinito. El infinito en matemáticas*. Bogotá: Editorial Pontificia Universidad Javeriana.

Cavalli, C. (2009). *Nocoes de infinito matematico em adolescentes e adultos*. Tesis Doctoral. Universidad Federal do Rio Grande. Porto Alegre. Brasil.

Claros, F.J (2010). *Límite finito de una sucesión: Fenómenos que organiza*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Codes, M. (2009). *Análisis de la comprensión de los conceptos de serie numérica y su convergencia en estudiantes de primer curso de universidad utilizando un entorno computacional.* Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales. Universidad de Salamanca. España.

Consejería de Educación de la Junta de Andalucía (2007, 30 de agosto). Orden de 10 de agosto de 2007 por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la ESO en Andalucía. *BOJA*, *171*, pp. 23-65.

Crespo Crespo, C. (2002). La noción de infinito a través de la historia. En Crespo Crespo (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 15 (1), 529- 534. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Crespo Crespo, C. (2006). Un paseo por el Paraíso de Cantor: Problemas y reflexiones sobre el infinito. En G. Martínez Sierra, (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19, 28-34. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

D'Amore, B. (1996). El infinito: una historia de conflictos, de sorpresas, de dudas. Un capo fértil para la investigación en didáctica de la matemática. *Epsilon, 36,* 341-359.

D'Amore, B. (1997). L'infinito in didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica, 3,* 289-305.

D'Amore, B. (Septiembre, 2011). La didáctica del infinito matemático. *Memorias del XXIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística,* Bogotá.

D'Amore, B., Arrigo, G., Bonila, M., Fandiño, M.I., Piatti, A., Rodríguez y otros. (2006). El "sentido del infinito", *Epsilon*, *65*, 187-216.

D'Amore, B. & Frabboni, F. (1996). *Didattica generale e didattiche disciplinari*. Milán, Italia: Angeli.

Da Silva Ribeiro Sampaio, P. A. (2009). Infinito: uma realidade à parte dos alunos do Ensino Secundário. *Boletim de Educação Matemática, 22*(32), 123-146.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp.25-41). Dordrecht: Kluwer Acad. Publ.

Dreyfus, T., & Tsamir, P. (2002). *Ben's consolidation of knowledge structures about infinite sets*. Tel Aviv University, Israel: Technical Report, available from the authors.

Dreyfus, T., & Tsamir, P. (2004). Ben's consolidation of knowledge structures about infinite sets. *The Journal of Mathematical Behavior*, *23*(3), 271-300.

Dubinsky, E., Weller, K., Mcdonald, M.A., & Brown, A. (2005a y 2005b). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An Apos analysis: Part 1 y Part 2. *Educational Studies in Mathematics*, *58*(3), 335-359 y *60*(2), 253-266.

Duval, R. (1983). L'osbtacle du dedoublement des objets mahtematiques. *Educational Studies in Mathematics*, *14*, 385-414.

Falk, R. (1994). Infinity: A cognitive challenge. *Theory and Psychology*, *4*(1), 35– 60.

Falk, R., & Ben-Lavy, Sh. (1989). How big is an infinite set? Exploration of children's ideas, *Proceedings of the Thirteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, *1*, 252-259.

Falk, R., Gassner, D., Ben Zoor, F., & Ben Simon, K. (1986). How do children cope with the infinity of numbers? *Proceedings of the 10th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, UK, London*, 13–18.

Fedriani, E.M., & Tenorio, A. F. (2007): El concepto de infinito en la escuela: ordenando lo inconmensurable. *Revista de la S.A.E.M. "THALES", 67, 23* (1-2), 83-93.

Fedriani, E. M., & Tenorio, A. F. (2010). Matemáticas del más allá: el infinito. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática (UNION), 21*,37-58.

Fernandez, A. (1995). Metodologías de la Investigación en Educación Matemática. En Berenguer, L.; Flores, P. (eds.): Investigación en el Aula de Matemáticas. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. S.A.E.M. Thales, p. 47-65.

Fernández, C. (2001). *Relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica en niños de 3 a 6 años.* Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales. Universidad de Málaga. España.

Fernández, E., Solano, I., & Jiménez, E. (2005). Sobre la divisibilidad hasta el infinito. *Enseñanza de las Ciencias, volumen extra*, 1-4.

Ferrari, E., Lagna, G.A., Luzi, E., & Trovini, E. (1995). Il concetto di infinito nell'intuizione matemática. *L'insegnamento della matemática e delle scienze integrate*, *18B*(3), 212-236.

Ferrater, J. (1969): *Diccionario de filosofía*. Buenos Aires: Ed. Sudamericana.

Ferreirós, J. (2000). ¿Antinomia o trivialidad? La paradoja de Russell. Ejemplar dedicado a: *Las matemáticas del siglo XX: una mirada en 101 artículos*, 59-64.

Ferreirós, J. (2006). Introducción. En Ferreiros (Ed.), *Georg Cantor*. *Fundamentos para una teoría general de conjuntos*. *Escritos y correspondencia selecta*. Barcelona: Editorial Crítica.

Fishbein, E. (1998). Conoscenza intuitiva e conoscenza lógica nell'attività matematica. *La Matematica e la sua Didattica*, *4*, 365-401.

Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics, 48*(2-3), 309-329.

Fischbein, E., Tirosh, D. & Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics, 10*, 3–40.

Fuenlabrada, I., & Armella, L. (2008). Homenaje a una trayectoria: Guillermina Waldegg. Departamento de investigaciones educativas. México.

Fuentes, S.R., & Oktaç, A. (2011, junio). *El infinito y niñ@s talento en matemáticas: Una mirada desde APOE.* Ponencia presentada en XIII CIAEM (Conferencia Interamericana de Educación Matemática), Recife, Brasil.

Garbin, S. (2000). *Infinito actual: inconsistencias e incoherencias de estudiantes de 16 – 17 años*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimental. Universidad Autónoma de Barcelona.

Garbin, S. (2005a). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, *8*(2), 169-193.

Garbin, S. (2005b). Ideas del infinito, percepciones y conexiones en distintos contextos: el caso de estudiantes con conocimientos previos de cálculo. *Enseñanza de las Ciencias*, *23* (1), 61-80.

Garbin, S., & Azcárate, C. (2000). Esquemas conceptuales e incoherencias en relación con el infinito actual. *Educación Matemática*, *12*(3), 5-17.

Garbin, S., & Azcárate, C. (2001). El concepto de infinito actual. Una investigación acerca de las incoherencias que se evidencian en alumnos de bachillerato. *SUMA*, *38*, 53-67.

Garbin, S., & Azcárate, C. (2002). Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. *Enseñanza de las Ciencias*, *20* (1), 87–113.

García, M.R., Lubián, P. & Moreno, A. (2013). La investigación bibliográfico narrativa en educación. En Murillo (Ed.) Facultad de Formación de Profesorado y Educación Departamento de Didáctica y Teoría de la Educación Área de Métodos de Investigación y Diagnóstico en Educación. Trabajos de Investigación. Extraído el 20 de julio de 2015 del sitio Web de la Universidad Autónoma de Madrid: https://www.uam.es/personal_pdi/stmaria/jmurillo/InvestigacionEE/Presentaciones/Curso_10/IBN_Trabajo.pdf.

Gardiner, T. (1985). Infinite processes in elementary mathematics. How much should we tell the children? *The Mathematical Gazette*, *69*,(448), 77-87.

Gómez, V. (1990). *El infinito en los confines de los pensable*. Madrid: Temas de Hoy.

González, J.L. (1995). *El Campo Conceptual de los Números Naturales Relativos*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

González, J. L. (1998): Didactical Analysis: A non empirical qualitative method for research in mathematics. En: I. Schwank (Ed.) *Proceedings of the First Conference of the European Society in Mathematics Education:* Vol. 2 (pp. 245-256). Osnabrück, Germany.

González, J.L. (1999). *Aproximación a un marco teórico y metodológico para la investigación en educación Matemática*. Tercer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).Universidad Valladolid.

Gray, E., Pinto, M., Pitta, D., & Tall, D. (1999). Knowledge Construction and Diverging Thinking in Elementary and Advanced Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *38*, 111-133.

Hannula, M.S., Pehkonen, E., Maijala, H., & Soro, R. (2006). Levels of students' understanding on infinity. *Teaching mathematics and computer science*, *4*(2), 317-337.

Imaz, C. (2001). ¿Qué pasa con el infinito? *Avance y Perspectiva*, *20*, 305-311.

Jahnke, H.N. (2001). "Cantor's cardinal and ordinal infinity". *Educational Studies in Mathematics*, *48*(2-3), 175-197.

Jirotková, D., & Littler, G. (2003). Student's Concept of Infinity in the Context of a Simple Geometrical Construct. *Proceedings of the 27th International Conference for the Psychology of MathematicsEducation*, *3*, 25-132.

Jirotková, D., & Littler, G. (2004). Insight into pupils' understanding of infinity in a geometrical context. *Proceedings of the 28th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*,*3*, 97-104.

Juan, M.T., Montoro, V., & Scheuer, N. (2012). Colecciones infinitas. Ideas de estudiantes de escuelas secundarias. *Educación Matemática*, *24* (2), 61-90.

Kim, D.J., Sfard, A., & Ferrini-Mundy, J. (2005). Students' Colloquial and Mathematical Discourses on Infinity and Limit. *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *3*, 201-208.

Kolar, V. M., & Hodnik Čadež, T. (2012). Analysis of factors influencing the understanding of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *80*(3), 389-412

Lavine, S. (2005). *Comprendiendo el infinito.* México: Fondo de Cultura Económica.

León, A. (2014). *El fin del infinito.* Salamanca: Interciencia.

Lestón,P. (2008). *Ideas previas a la construcción del infinito en escenarios no escolares.* Tesis de maestría no publicada. CICATAMIPN, México.

Lestón,P. (2011). *El infinito en el aula de matemática. Un estudio de sus representaciones sociales desde la socioepistemología*. Tesis doctoral. Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Lestón, P., & Crespo, C. (2008). *El infinito escolar.* En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22,* 1117-1126. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Lestón, P. (Ed.), & Crespo, C. (2010). El infinito matemático: la escuela, Cantor y Bolzano. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 23, (pp. 879-888). México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Extraído el día 20 de Agosto, 2015 del sitio web: http://www.clame.org.mx/documentos/alme23.pdf.

Lestón, P., & Veiga, D. (2004). *Introducción al infinito.* En L. Díaz (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17*(1), 404-410. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

López, C. A. (2007). La intuición y la matemática. *Revista Ciencia y Tecnología* (cap.6). Extraído el 6 Agosto, 2014 del sitio Web Dspace Universidad de Palermo, Facultad de Ingeniería: http://dspace.palermo.edu/dspace/handle/10226/87 y luego http://dspace.palermo.edu/dspace/handle/10226/94.

López, C. A. (2014). El infinito en la historia de la matemática. *Ciencia y Tecnología*, *14*,277-298.

Lorenzo, J. (2001). El infinito matemático. *En Ideas del infinito. Serie Temas 23 de Investigación y Ciencia, Prensa Científica, B. 1.^{er} trimestre*, 4-9.

Malaespina, U. (2008). *Intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización. Un análisis desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática.* Tesis Doctoral. Escuela de Graduados, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Mamolo, A. (2007). Infinite Magnitude vs Infinite Representation: Intuitions of “Infinite Numbers”, *Proceedings of the 31th Conference of the International*

Group for the Psychology of Mathematics Education, Seoul, Corea. Extraído el 18 de Agosto, 2015, de http://www.rume.org/crume2007/papers/mamolo.pdf.

Mamolo, A., & Zazkis, R. (2008). Paradoxes as a window to infinity. *Research in Mathematics Education, 10*(32), 167-182.

Manfreda, V., & Hodnik, T. (2011). Analysis of factors influencing the understanding of the concept of infinity. *Educational Studies in Mathematics, 80*(3), 389-412.

Mántica. A.M., & Carbó, A. L. (2013). Interacciones en el aula de secundaria acerca de la dualidad infinito actual infinito potencial en un contexto geométrico. *Educación Matemática, 25*(3), 27-59.

Marín, M. A. (2008). De la intuición sensible del infinito potencial a la caracterización lógico-formal del infinito actual: un estudio histórico-epistemológico en la perspectiva de la educación matemática. Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Martin, W. G., & Wheeler, M. M. (1987). Infinity concepts among preservice elementary school teachers. In: J. C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 362–368). Montreal, Canada.

Maurice, L. (1996). Une genèse de l'idée d'infini. *Bulletin AMQ, 36* (4), 10-20.

McFarlane, Th, J. (1999). *Nicholas of Cusa and the Infinite*. Extraído el 15 de Agosto, 2014del sitio Web: http://www.integralscience.org/**cusa**.html.

Ministerio de Educación, Ciencia y Deporte (2007, 5 de enero). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la ESO (LOE, 2006). *BOE, 5*, pp. 677-773.

Monaghan, J. (1986). *Adolescents' understanding of limits and infinity*. Unpublished Ph.D. thesis. Mathematics Education Research Centre, University of Warwick, UK.

Monaghan, J. (2001). Young people's ideas of infinity. *Educational Studies in Mathematics, 48*(2/3), 239–257.

Montes, M.A. (2014). *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas acerca del Infinito. Un estudio de caso.* Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía. Universidad de Huelva. España.

Montoro, V. (2003). *Estudio sobre concepciones de estudiantes universitarios respecto de la noción de infinito matemático*. Tesis de Maestría. Univ. Nac. Comahue. Argentina.

Montoro, V. (2005). Al infinito y más acá: concepciones de estudiantes universitarios. *Infancia y Aprendizaje*, *28* (4), 409-427.

Montoro, V., & Scheuer, N. (2004). ¿Cómo piensan el infinito matemático los estudiantes universitarios de distintas carreras? *Epsilon*, *60*,435-448

Montoro, V., & Scheuer, N. (2006a). *Distintas formas de pensar el infinito. Concepciones de estudiantes universitarios.* En Martínez, Gustavo (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 156-161). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Montoro, V., & Scheuer, N. (2006b). *Pesando el infinito. Concepciones de estudiantes universitarios.* En Aymerich, J. y Vives, S. (Eds.), *Matemáticas para el siglo XXI.* Colleció D'Informática I Tecnologia (22), 257-266. Castelló de la Plana: Universitat Jaume I.

Montoro, V., & Torres Curth, M. (1999). Reflexiones sobre las dificultades que conlleva la noción de infinito en aprendizaje de la matemática. *Epsilon*, *15*(45), 357-364.

Moore, A.W. (1995). A brief history of infinity. *Scientific American, 272*(4), 112–116.

Moore, A.W. (1999). *The Infinite*. Routledge & Paul, London.

Moore, G. (2002). Hilbert on the infinite: The role of set theory in the evolution of Hilbert's thought. *Historia Mathematica, 29*, 40–64.

Moreno, A., & Waldegg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 211–231.

Morris, R. (2000). *La historia definitiva del infinito*. Barcelona: Ediciones B,S.A.

Mura, R., & Maurice, L. (1997). L'infini, un Ensemble de Nombres? Enquête apures de Futurs Enseignants et Enseignantes. *For the Learning of Mathematics, 17* (3), 28-35.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston. Traducido al castellano en National Council of Teachers of Mathematics (1991). Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática. Sevilla, Sociedad Andaluza de Educación Matemática, THALES.

Núñez, E. (1994). Subdivision and small infinities: Zeno, paradoxes and cognition. *Actas del PME 18*,3, 368-375.

Núñez, R. (1990). Infinity in Mathematics as a scientific subject for cognitive psychology. *Proceedings of the 14th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, I*, 77-84.

Núñez, R. (1993). Approaching infinity: a view from cognitive psychology. *Proceedings of the 15th Conference for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter, 1*, 15 – 111.

Núñez, R. (1994). Subdivision and small infinites: Zeno, paradoxes and cognition. *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 3*, 368-375.

Núñez, R. (1997). Infinito en lo pequeño y desarrollo cognitivo: Paradojas y espacios consensuales. *Educación Matemática, 9*(1), 20-32.

Núñez, R. (2005). Creating mathematical infinites: Metaphor, blending, and the beauty of transfinite cardinals, *Journal of Pragmatics*, *37*, 1717 – 1741.

Ortiz, A. (1997). Razonamiento Inductivo Numérico, un Estudio en Educación Primaria. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Ortiz, J. R. (1994). *El concepto del infinito*. Asociación Matemática Venezolana (AMV), *1* (2), 59-81.

Pakhrou, T. (2013). Análisis de una varibales real I. [Versión electrónica]. Extraído el 22 de Enero, 2015, del sitio Web de Universidad de Alicante: http://hdl.handle.net/10045/26439.

Penalva, M. C. (1996). *Estudio sobre la comprensión del concepto de número cardinal de un conjunto infinito.* Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia. España.

Penalva, M. C. (2001). *Implicaciones didácticas de las dificultades en el aprendizaje de conjuntos infinitos: representaciones de conjuntos numéricos en textos matemáticos escolares*. En Ortiz, M. (Ed.), *V Reunión Científica Nacional de PNA (SEIEM)*. Palencia: Universidad de Valladolid.

Penkonen, E., & Hannula, M.S. (2006). Infinity of Numbers: A Complex Concept to be Learnt? *Proceedings of the 15th Conference for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter, 2*, 152-154.

Pérez, J. (2014). *La filosofía de Bertrand Russell*. Pentalfa Ediciones.

Piaget, J. (1950). *Introduction à l'epostémologie genetique. Paris: P.U.F.* (En español: Introducción a la epistemología genética. Buenos Aires: Paidós, 1979).

Piaget, J., & R. García (1982), *Psicogénesis e historia de la ciencia*, México, Siglo XXI Editores.

Prieto, J.A. (2004). *Número infinito como identidad cardinal entre series numéricas. Un estudio mediante entrevistas clínicas en alumnos de secundaria*. Memoria de Tercer Ciclo. Departamento Didáctica de las Matemáticas, didáctica de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales. Universidad de Málaga.

Prieto, J.A., & Fernández, C. (2009). Número infinito como identidad cardinal entre series numéricas. Un estudio mediante entrevistas clínicas en alumnos de secundaria. [Versión electrónica]. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *19*, 117-129.

Prieto, J.A., & Fernández, C. (2011). Hacia un modelo evolutivo del infinito cardinal en alumnos de la ESO. J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento v Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* - Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada, España.

Prieto, J.A., & Fernández, C. (2012). Construcción de un modelo evolutivo del infinito cardinal en alumnos de EPO y ESO. M. Marín y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación.* Simposio de la SEIEM realizada en XV, Ciudad Real, España.

Prieto, J.A., & Fernández, C. (2014). El uso de las TIC en entrevistas clínicas semiestructuradas: estudio del infinito como identidad cardinal entre series numéricas en alumnos de la ESO. En C. Fernández y J.L. González (Eds.), *Aprendizaje y razonamiento matemático* (pp. 245-268). Málaga: Universidad de Málaga.

Puig, L. (1997). Análisis Fenomenológico. En L. Rico (Coord.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria***.** Barcelona: Horsori, 61-94.

Radu, I., & Webber, K. (2011). Refinements in mathematics undergraduate students' reasoning on completed infinite iterative processes. *Educational Studies in Mathematics*, *78*, 165-180.

Recalde, L. (2004). La lógica de los números infinitos: un acercamiento histórico. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria, 12* (1), 51-72.

Roa-Fuentes, S. (2012). *El infinito: Un análisis cognitivo de niños y jóvenes talento en matemáticas*. Tesis doctoral. Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Roa-Fuentes, S., & Oktac, A. (2014). El infinito potencial y actual: descripción de caminos cognitivos para su construcción en un contexto de paradojas. *Educación Matemática*, *26*(1), 73-101.

Rucker, R. (1995). *Infinity and the Mind*. New Jersey: Princeton University.

Ruiz, A. (1988). Russell y el problema del logicismo. *MATHESIS, Revista de divulgación e información en Filosofía e Historia de las Matemáticas, 1*(4).

Russell, B. (1995). *Los principios de la matemática*. (J. Barrio, trad.). Barcelona: Círculo de Lectores S. A. (Obra original publicada en 1903).

Sacristán, A. (2001). Students shifting conceptions of the infinite through computer explorations of fractals and other visual models. In Vol. 4 of the *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 129–136). The Freudenthal Institute, Utrecht.

Sacristán, A. (2003). Dificultades y paradojas del infinito: experiencias en un ambiente de exploración computacional. En E. Filloy (Ed.), Matemática Educativa: Aspectos de la investigación actual (pp.262-279). México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados-FCE.

Salat, R. S. (2011). El infinito en matemáticas. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 77*, 75-83.

Santiago, R. (2001). Física-Óptica. Espejos y Lentes. Reflexión de la luz. Imágenes producidas en dos espejos planos paralelos. Extraído el 31 de Enero, 2015 de http://www.fisicanet.com.ar/fisica/ondas/ap07_espejos_lentes.php.

Satriano, C. & Marques, V. (2015). Instrumentación Metodológica sobre el uso de narrativas. Revista Psicología Digital Revista del Programa Problemáticas Contemporáneas. Psicoanálisis, Ciencia, Ciencia Cognitiva – Centro de Estudios Interdisciplinarios. Extraído el 20 de julio de 2015 del sitio Web de la Universidad Nacional de Rosario http://psicologiadigital.unr.edu.ar/?p=196.

Sbaragli, S. (2003). Le convinzioni degli insegnanti elementary sull'infinito matematico. *L'insegnamento della matemática e delle scienze integrate,* Part I: 26A, 2, 155-186. Part II: 26A, 5, 573-588.

Sbaragli, S. (2004). *Teacher' convictions on mathematical infinity*. Tesis Doctoral. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencia de la Educación, Universidad de Palermo, Italia.

Shama G., & Movshovitz Hadar N. (1994). Is Infinity a whole number? Actas del XVIII PME. Lisboa 1994. 265-272.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics.* London: The Palmer Press.

Sierpinska, A., & Viwegier, M. (1989). How and when attitudes towards mathematics and infinity become constituted into obstacles in students? In G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the 13th annual meeting for the psychology of mathematics education, 3* (pp. 166–173). Paris, France.

Singer, F.M., & Voica, C. (2003). Perception of infinity: does it really help in problem solving? *Proceedings of the International Conference "TheDecidable and the Undecidable in Mathematics Education*, (pp.252-256). Brno, República Checa.

Singer, F.M., & Voica, C. (2008). Between perception and intuition: Learning about infinity. *The Journal of Mathematical Behavior, 27*, 188-205.

Sondheimer,E.H., & Rogerson, A. (1981). *Numbers and Infinity: A Historical Account of Mathematical Concepts.* Cambridge: Cambridge University Press.

Tall, D. (1980a). The Notion of Infinite Measuring Number and Its Relevance in the Intuition of Infinity.*Educational Studies in Mathematics, 11*, 271-284.

Tall, D. (1980b). Intuitive infinitesimal in the calculus. *Abstracts of short communications, Fourth International Congress on Mathematical Education.* Berkeley.

Tall, D. (1980c). Mathematical Intuition, with special reference to limiting processes. *Proceedings of the 4th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 170-176.

Tall, D. (1981). Intuitions of Infinity. *Mathematics in School, 10* (3), 30 – 33.

Tall, D. (1986). Using the computer to represent calculus concepts. *Recueil des Textes et Comptes Rendus*, pp. 238-264. Le IVème École d'Été de Didactique des Mathématiques, Orleáns (sesión plenaria).

Tall, D. (1988). Concept Image and Concept Definition. *Senior Secondary Mathematics Education*, (eds.J. de Lange y M. Doorman). Utrecht: OW&OC.

Tall, D. (1991a). The Psychology of Advanced Matematical Thinking, en *Avanced Mathematical Thinking* (ed. D. Tall). Dordrecht: Kluwer Acad. Publ.

Tall, D. (1991b). Intuition and rigour: The role of visualization in the Calculus, en *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (eds. W. Zimmermann y S. Cunningham), pp. 105-119, Washington: Mathematical Association of America.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: function, limits, infinity, and proof en *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (ed. D.A. Grouws), pp. 495-511. NuevaYork: Macmillan.

Tall, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking, en *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (eds. L. Meira y D.Carraher), Vol. *1*, pp. 61-75.

Tall, D. (2001a). A Child Thinking About Infinity, *Journal of Mathematical Behavior*, *20* (1), 7-19.

Tall, D. (2001b). Natural and Formal Infinities, *Educational Studies in Mathematics*, *48* (2/3), 199-238.

Tall, D. (2004a). Building theories: the three worlds of mathematics, *For the Learning of Mathematics*,*24* (1), 29-32.

Tall, D. (2004b). Thinking through three worlds of mathematics. *Proceeding of the 28th conference of the Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. *4*, pp. 281-288.

Tall,D.(2004c).Three Worlds of Mathematics. Disponible en http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/three-worlds.html. Julio de 2014.

Tall, D. (2006). A Theory of Mathematical Growth Through Embodiment, Symbolism and Proof.*Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg, *11*, 195-215.

Tall, D. (2007a). Devoloping a Theory of Mathematical Growth. *International Reviews on Mathematical Education*, *39* (1-2), 145-154.

Tall, D. (2007b). Embodiment, symbolism and formalism in undergraduate mathematics education. *10th Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, San Diego, California.

Tall, D., & Schwarzenberger, R. L. E. (1978). Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits, *Mathematics Teaching*, *82*, 44–49.

Tall, D., & Tirosh, D. (2001). Infinity – the never-ending struggle. *Educational Studies in Mathematics*, *48* (2/3), 199-238.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12* (2), 151-169.

Tirosh, D. (1985). *The intuition of infinity and its relevance for mathematics education*. Unpublished doctoral dissertation, Tel-Aviv University.

Tirosh, D. (1991). The role of students' intuitions of infinity in teaching of the cantorial theory. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp.199-214). Dordrecht: Kluwer Acad. Publ.

Tirosh, D. (1999). Finite and infinite sets: Definitions and intuitions. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology, 30*(3), 341–349.

Tirosh, D. , Fischbein, E., & Dor, E. (1985). The teaching of infinity. In: L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the 9th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 501–506). University of Utrecht, Holanda.

Tirosh, D., & Tsamir, P. (1996). The role of representations in students' intuitive thinking about infinity. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 27*, 33–40.

Tomasini, A.(1990). Aporías, Antinomias y el Infinito; la Crítica de Russell a Zenón y Kant. *Mathesis, 6*(13), 307-326.

Tortoriello, F. S. (2012). L'infinito matematico in Benedetto Croce: un approccio metacognitivo. *Archimede, 2*, 67-72.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en educación matemática educativa a nivel superior, *Educación Matemática, 17*(1), 5-31.

Tsamir, P. (1994). *Promoting students consistent responses in respect to their intuitions of actual infinity*. Tesis doctoral. Universidad de Tel-Aviv.

Tsamir, P. (1999). The transition from the comparison of finite sets to the comparison of infinite sets: teaching prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics, 38*, 209–234.

Tsamir, P. (2001). When 'the same' is not perceived as such: The case of infinite sets. *Educational Studies in Mathematics, 48*(2-3), 289-307.

Tsamir, P. (2002). From primary to secondary intuitions: prospective teachers' transitory intuitions of infinity. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1*, 11–29.

Tsamir, P. (2003). Primary intuitions and instruction: the case of actual infinity. *Research in Collegiate Mathematics Education,12*, 79–96.

Tsamir, P., & Dreyfus, T. (2002). Comparing infinite sets-a process of abstraction, *The Journal of Mathematical Behavior, 21*(1), 1-23.

Tsamir, P., & Dreyfus, T. (2005). How fragile is consolidated knowledge? Ben's comparisons of infinite sets. *The Journal of Mathematical Behavior*, *24*(1), 15-38.

Tsamir, P., & Tirosh, D. (1992). Students' awareness of inconsistent ideas about actual infinity. *Proceedings of the 16th Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education*, *3*(pp. 90–97). Durham, USA.

Tsamir, P., & Tirosh, D. (1994). Comparing infinite sets: intuitions and representations. *Proceedings of the 18th Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education*, *4*(pp. 345–352). Lisbon, Portugal.

Tsamir, P., & Tirosh, D. (1999). Consistency and representations: The case of actual infinity. *Journal for Research in Mathematics Education 30*(2), 213–219.

Tsamir, P., & Tirosh, D. (2002). Intuitive beliefs, formal definitions and undefined operations: Cases of division by zero. In G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), Beliefs: A hidden variable in mathematics education? (pp. 331-344). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Turégano, P. (1994). Los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del cálculo infinitesimal. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia. España.

Turégano, P. (1996). Intuición del infinito en estudiantes de primero de BUP, *Epsilon*, *34*, 11-46.

Ueno, Y. (2005). The Basic Metaphor of Infinity and the Concept of a Point. *Academic Reports*, *28*(1), 120-127. The Faculty of Engineering, Tokyo Polytechnic University.

Uzcátegui, C. (2010). Elementos de Matemáticas II. [Versión electrónica]. Extraído el 22 Enero, 2015, del sitio Web de Universidad de Los Andes: http://www.ciens.ula.ve/matematica/publicaciones/guias/Elementos_2_marzo_2010.pdf.

Uzcátegui, C. (2011). Los números reales y el infinito. [Versión electrónica]. Extraído el 22 Enero, 2015, del sitio Web de Universidad de Los Andes: http://www.ciens.ula.ve/matematica/publicaciones/libros/por_profesor/carlos_uzca/RealesInfinito_marzo2011.pdf.

Valdivé, C.M (2005). El paso del infinito potencial al infinito "como un todo" para aprender la construcción de los conjuntos infinitos. *EquisAngulo: Revista eléctronica iberoamericana de Educación Matemática, 1*(1).

Valdivé, C.M. (2008). Los infinitesimales en el cálculo: un punto de vista sistémico. *EDUCERE Artículos Arbitrados, 42*, 531 - 538.

Vidal, C. (2003). *Georg Cantor et la découverte des infinis*. Tesis de maestría, Universidad de París.

Vilenkin, N.Y. (1995). *In Search of Infinity* (translated from the Russian by A. Shenitzer), Birkhäuser, Boston.

Waldegg, G. (1987). *Esquemas de respuesta ante el infinito matemático: transferencia de la operatividad de lo finito a lo infinito*. Tesis doctoral. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Waldegg, G. (1993). La comparaison des ensembles infinis: un cas de résistance à l'instruction. *Annales e Didactiques et de Sciences Cognitives, 5*, 19-36.

Waldegg, G. (1996). Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual. En *Revista Mexicana de Investigación Educativa*. *1*(1).

Waldegg, G. (2005). Bolzano's approach to the paradoxes of infinity: Implications for teaching. *Science and Education, 14*, 559-577.

Weller, K., Brown, A., Dubinsky, E. McDonald, M., & Stenger, C. (2004). Intimations of Infinity. *Notices of the American Mathematical Society*, *51* (7), 741 – 750. Extraído el 19 Agosto, 2015, de http://ams.org/notices/200407/fea-dubinsky.pdf.

Wheeler, M. M., & Martin, G., (1988), 'Explicit knowledge of infinity', Proceedings of the 10th Annual Meeting of the North American Chapter of PME, Northern Illinois University, Dekalb, Illinois, 312–318.

Yair, Y., & Yair, Y. (2004). Everything comes to an end: An intuitive rule in physics and mathematics. *Science Education*, *88* (4), 594-609.

Yehoshua, D. (1995). Comparing infinite sets: effects of presentations and order of presentation. *An essay presented as a thesis for the Degree of M.A.*, Tel Aviv University, Tel Aviv, Israel.

Zellini, P. (2004). *Breve historia del infinito.* Madrid: Siruela.

Zippin, L. (1996). *Usos del infinito.* Madrid: Euler Editorial.

ANEXO I

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Anexo I.1 Finito e infinito

De la Parte II, *El número*, Capítulo XIII, de *"Los Principios de la Matemática"* de B. Russell, hace distinción de infinitud, que será la pieza clave del trabajo. En este capítulo exponemos, brevemente, la teoría matemática de lo finito e infinito.

Inicia el estudio comparando clases finitas con clases infinitas:

> Sea *u* cualquier clase, y *u'* una clase formada quitando un término *x* de *u*. Entonces puede suceder o no suceder que *u* sea semejante a *u'*. Por ejemplo, si *u* es la clase de todos los números finitos, y *u'* la clase de todos los números finito excepto el 0, los términos de *u'* se obtienen sumando 1 a cada uno de los términos de *u*, y esto pone en correspondencia un término de *u* con uno de *u'* y viceversa, no omitiéndose ningún número de ninguna de las dos clases ni tomándolo dos veces. De modo que *u'* es semejante a *u*. Pero si *u* está formada por todos los números finitos hasta *n*, donde *n* es algún número finito, y *u'* está formado por todos ellos excepto 0, entonces *u'* no es semejante a *u*. (Russell, 1903/1995, p.223)

Para ello, sean *u* y *u'* de la siguiente forma:

$$u = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

$$u' = u - \{0\} = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots.$$

de ahí que *u* y *u'* son semejantes.

Pero si definimos *u* y *u'* de la forma siguiente:

$$u = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n$$

$$u' = u - \{0\} = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots. n+1$$

diremos entonces que *u* y *u'* no son semejantes. Ahora bien, aquí puntualiza Russell que si fuera posible quitar un término cualquiera de *u* y dejar una clase *u'* que es semejante a *u*, diremos que es una clase infinita. En caso contrario, si no fuera posible, diremos que *u* es una clase finita.

De acuerdo con esto último, la clase vacía es finita por el mero hecho que no se le puede quitar ningún término; también, si *u* es una clase finita, si se le añade un término, la clase formada también es finita recíprocamente. Las clases finitas que no sean la clase vacía se alteran al sustraer o al sumar *1*, en cambio si se trata de clases infinitas no se alteran con estas operaciones.

Con respecto a clases y sus partes se diferencia las clases finitas de las infinitas: En el caso de las clases finitas si una es parte propia de la otra, entonces ésta última tiene un número mayor de términos, es decir, la parte propia es una parte y no el todo. En cambio, en las clases infinitas esto no es cierto. Esta última diferencia hace que sea esencial para diferenciar finitud de infinitud.

Atendiendo ahora a sólo clases infinitas se pueden tener distintos números de términos y así una clase infinita es mayor que otra y por tanto no semejantes, si dicha clase es semejante a una parte propia de la mayor. Para Russell, no se sabe por el momento, si dos números infinitos diferentes uno es mayor que otro, pero sí que existe un número infinito mínimo que es menor que cualquier número infinito. Se trata de los enteros finitos denotado por Russell como α_0 a diferencia de Cantor que lo denotaría como aleph con subíndice cero, $\aleph_0$.

Al igual que hiciera explícitamente Cantor, este número infinito α_0 lo define Russell por el principio de inducción matemática:

> (...) α_0 es el número de cualquier clase *u*, que es el dominio de una relación biunívoca *R*, cuyo dominio recíproco está contenido en *u*, pero no es coextensivo con *u*, y el cual es

tal que, llamando al término respectivo al cual *x* tiene la relación *R* el sucesor de *x*, si *s* es cualquier clase a la que pertenece un término de *u* que no es sucesor de cualquier otro término de *u*, , y al cual pertenece el sucesor de todo término de *u* que pertenece *s*, entonces todo término de *u* pertenece a *s*.(Russell, 1903/1995, pp.224-225)

También lo define α_0 de forma alternativa de la siguiente manera:

Sea *P* una relación simétrica y transitiva, y tengan dos términos diferentes cualesquiera del campo *P* la relación *P* o su recíproca. Además sea cualquier clase *u*, contenida en el campo de *P* y que tenga sucesores con un sucesor inmediato, es decir, un término cuyos predecesores o pertenezcan a *u* o precedan algún término de *u*; sea un término del campo *P* que no tenga predecesores, pero todo término que tenga predecesores tenga sucesores y tenga también un predecesor inmediato; entonces el número de términos en el campo *P* es α_0 . (Russell, 1903/1995, p.225)

Una de la característica más importante de ello es que toda clase cuyo número sea α_0 puede arreglarse en una serie que tenga términos consecutivos: principio, pero no fin; tal que el número de predecesores de cualquier término de la serie sea finito; y cualquier serie que tenga estas características tiene el número α_0 . De ahí se demuestra que toda clase infinita contiene clases cuyo número es α_0 :

Sea *u* una tal clase y sea x_0 un término de *u*. Entonces *u* es semejante a la clase obtenida quitando x_0, a la que llamaremos u_1 . De ella podemos quitar un término x_1, dejando una clase infinita u_2 , y así sucesivamente. La serie de términos x_1, x_2,... se halla contenida en *u*, y es del tipo que tiene el número α_0 . (Russell, 1903/1995, p.225)

A partir de ello se puede dar una definición alternativa del finito y del infinito por medio de la inducción matemática. Si *n* es cualquier número finito, el número resultante de sumar *1* a *n* es también finito, y es diferente de *n*, proposición tomada de los axiomas de Peano. A partir de *0* podemos formar una serie de números por adiciones sucesivas.

De ahí Russell lo definirá de la siguiente manera:

> Podemos definir los números finito, como los números que pueden obtenerse a partir de cero por medio de tales pasos, y que obedecen a la inducción matemática. Es decir, la clase de números finitos es la clase de números que se halla contenida en toda clase *s* a la que pertenece *0* y el sucesor de todo número obtenido sumando *1* al número dado. (Russell, 1903/1995, pp. 225-226)

Ahora bien, eso no pasa con el número α_0 , ya que no hay un número tal que sea semejante a una parte de sí mismo. De ahí que ningún número mayor que α_0 es finito. Pero sí que todo número menor que α_0 es finito.

Tabla AI. 1. *Comparativa entre Clases Finitas y Clases Infinitas*

CLASES FINITAS	CLASES INFINITAS
Al quitar un término de u deja una clase *u'* no semejante a *u*.	Al quitar un término de u deja una clase *u'* semejante a *u*.
Se alteran sustrayendo términos atendiendo a la cantidad.	No se alteran sustrayendo términos atendiéndose a la cantidad.
La clase vacía es finita.	
Si se agrega un término a *u*, ésta sigue siendo finita.	Si se agrega un término a *u*, ésta sigue siendo infinita.
Si una es parte propia de otra, la una tiene un número menor de término que la otra.	Una puede tener un número de término igual que la otra

En la siguiente figura AI. 1 se explica el contexto matemático en el que enmarcamos el número infinito a partir del número finito en la teoría de Russell.

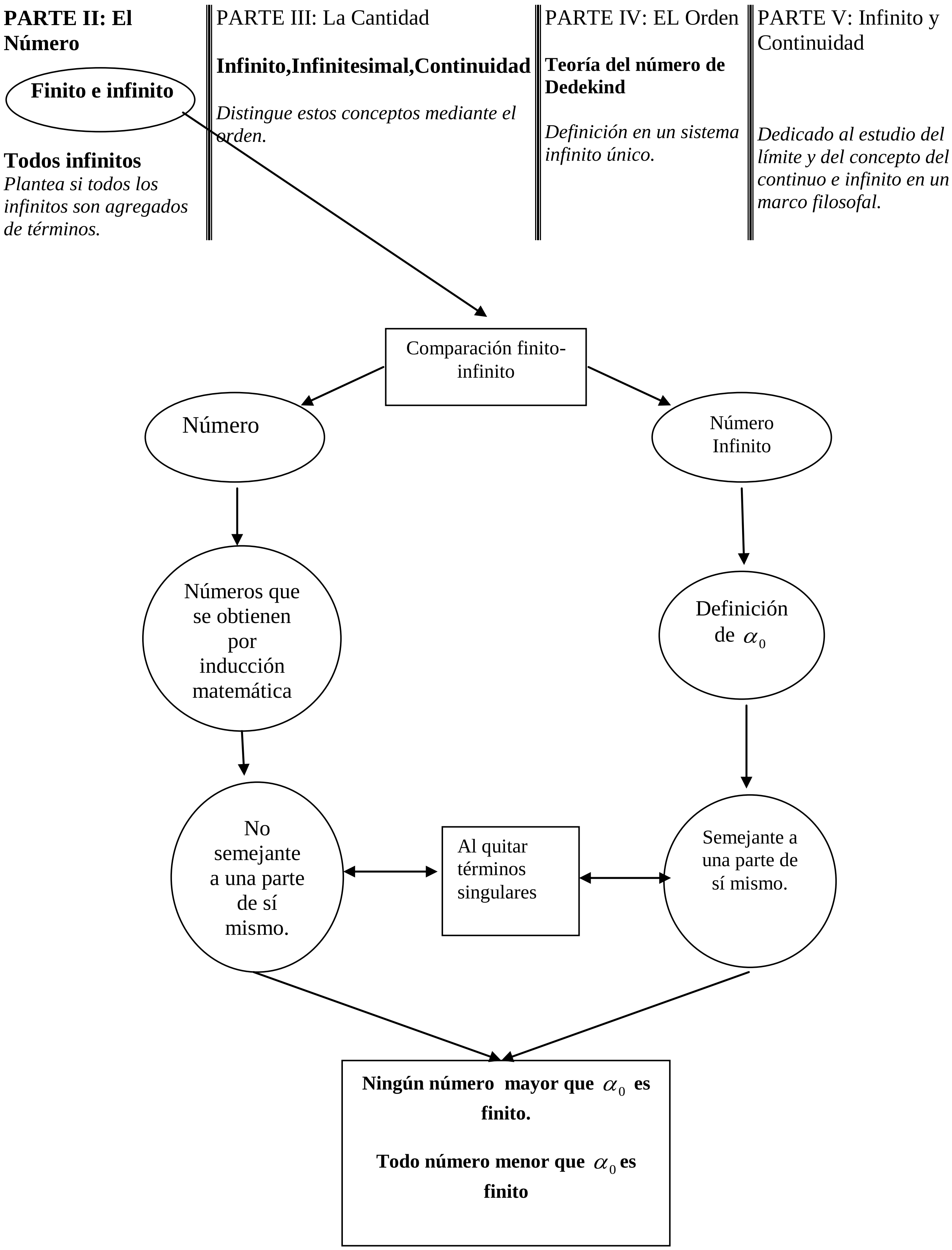


Figura AI. 1. Número infinito a partir de la comparación con el número finito

AnexoII.1 Cronograma[110] de publicaciones sobre el concepto del infinito en el ámbito de la didáctica

2014

El infinito potencial y actual: descripción de caminos cognitivos para su construcción en un contexto de paradojas
S. Roa-Fuentes, A. Oktac

El infinito en la historia de la matemática
C. A. López

Conocimiento especializado del profesor de matemáticas acerca del infinito
M.A. Montes (Tesis)

2013

Interacciones en el aula de secundaria acerca de la dualidad infinito actual infinito potencial en un contexto geométrico.
A. M. Mántica, A. L. Carbó

2012

Colecciones infinitas. Ideas de estudiantes de escuelas secundarias
M.T. Juan, V. Montoro, N. Scheuer

El infinito: Un análisis cognitivo de niños y jóvenes talento en matemáticas
S. Roa-Fuentes (Tesis)

L'infinito matematico in Benedetto Croce: un approccio metacognitivo.
S. Tortoriello

Analysis of factors influencing the understanding of infinity
V. M. Kolar, T. Hodnik Čadež

2011

La didáctica del infinito matemático
B. D'Amore

El infinito y niñ@s talento en matemáticas: Una mirada desde APOE
S. R. Fuentes, A, Oktaç

El infinito en matemáticas
R. S. Salat

[110] Cronograma iniciada en Belmontes(2009)

Analysis of factors influencing the understanding of the concept of infinity", Educational Studies in Mathematics
V. Manfreda, T. Hodnik

El infinito en el aula de matemática. Un estudio de sus representaciones sociales desde la socioepistemología
P. Lestón (Tesis)

Refinements in mathematics undergraduate students' reasoning on completed infinite iterative processes
I. Radu, K. Webber

Los números reales y el infinito
C. Uzcátegui

2010

Límite finito de una sucesión: Fenómenos que organiza
F. Claros (Tesis)

Matemáticas del más allá: el infinito
E.M. Fedriani, A.F. Tenorio

The Constructs of PhD Students about Infinity: An Application of Repertory Grids
S. Aztekin, A. Arikan, B. Sriraman

Infinite iterative processes and actual infinity
A. Brown, A. MacDonald, K. Weller

El infinito matemático: la escuela, Cantor y Bolzano
P. Lestón, C. Crespo

2009

Modelo intuitivos y esquema conceptual del infinito
J.L. Belmonte (Tesis)

Análisis de la comprensión de los conceptos de serie numérica y su convergencia en estudiantes de primer curso de universidad utilizando un entorno computacional
M. Codes (Tesis)

Nocoes de infinito matematico em adolescentes e adultos
C. Cavalli (Tesis)

Infinity: a reality apart from high school students
P. A. da Silva Ribeiro

2008

Step by step: Infinite Iterative Processes and Actual Infinity
A. Brown, M.A. McDonal, K. Weller

Between perception and intuition: Learning about infinity
F.M. Singer, C. Voica

Paradoxes as a window to infinity
A. Mamolo, R. Zazkis

Los infinitesimales en el cálculo: un punto de vista sistémico
C. M. Valdivé

De la intuición sensible del infinito potencial a la caracterización lógico-formal del infinito actual: un estudio histórico-epistemológico en la perspectiva de la educación matemática
M.A. Marín

2007

Infinite Magnitude vs Infinite Representation: Intuitions of "Infinite Numbers"
A. Mamolo

El concepto de infinito en la escuela: ordenando lo inconmensurable
E.M. Fedriani, A.F. Tenorio

Un paseo por lo infinito. El infinito en matemáticas
I. Castro, J. Pérez

Devoloping a Theory of Mathematical Growth
D. Tall

Embodiment, symbolism and formalism in undergraduate mathematics education
D. Tall

2006

El "sentido del infinito"
B. D'Amore, G. Arrigo, M. Bonila, M.I. Fandiño, A, Piatti, J. Rodríguez, S. Sbaragli

Infinity of numbers: a complex concept to be learnt?
E. Penkonen, M.S. Hannula

Levels of students' understanding on infinity
M. S. Hannula, E. Pehkonen, H. Mailjala, R. Soro

A Theory of Mathematical Growth Through Embodiment
D. Tall

Distintas formas de pensar el infinito. Concepciones de estudiantes universitarios
V. Montoro, N. Scheuer

Pesando el infinito. Concepciones de estudiantes universitarios
V. Montoro, N. Scheuer

Un paseo por el Paraíso de Cantor: Problemas y reflexiones sobre el infinito
C. Crespo

2005

Some Historical Issues and Paradoxes Regardind the Concept of Infinity: An APOS-Based Analysis
E. Dubinsky, K. Weller, M.A. Mcdonald, A. Brown

Creating mathematical infinites: Metaphor, blending and the beauty of transfinite cardinals
R. E. Núñez

¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos
S. Garbin

Ideas del infinito, percepciones y conexiones en distintos contextos: el caso de estudiantes con conocimientos previos de cálculo
S. Garbin

Student's Colloquial and Mathematical Discourses of Infinity and Limit
D.J. Kim, A. Sfard, J. Ferrini-Mundy

Al infinito y más acá: concepciones de estudiantes universitarios
V. Montoro

The Basic Metaphor of Infinity and the Concept of a Point
Y. Ueno

How fragile is consolidated knowledge? Ben's comparisons of infinite sets
P. Tsamir, T. Dreyfus

Sobre la divisibilidad hasta el infinito
E. Fernández, I. Solano

El paso del infinito potencial al infinito "como un todo" para aprender la construcción de los conjuntos infinitos
C.M. Valdivé

Bolzano's Approach to the Paradoxes of Infinity: Implications for the Teaching
G. Waldegg

Comprendiendo el infinito
S. Lavine

2004

Intimations of Infinity
K. Weller, A. Brown, E. Dubinsky, M. Mcdonald, C.Stenger

Insight into pupils understanding of infinity in a geometrical context
A. Jirotkova, G. Littler

Teacher' convictions on mathematical infinity
S. Sbaragli (Tesis)

Otros hallazgos sobre los obstáculos en la comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor
G. Arrigo, B. D'Amore

Ben's consolidation of knowledge structures about infinite sets
T. Dreyfus, P. Tsamir

Everything comes to an end: An intuitive rule in physics and mathematics
Yifat Yair, Yoav Yair

Building theories: the three worlds of mathematics
D. Tall

Thinking through three worlds of mathematics
D. Tall

Three Worlds of Mathematics
D. Tall

Breve historia del infinito
P. Zellini

¿Cómo piensan el infinito matemático los estudiantes

universitarios de distintas carreras?
V. Montoro, N. Scheuer

Introducción al infinito
P. Lestón, D. Veiga

2003

Children's Conceptions of Infinity of Numbers in a Fifth Grade Classroom discussion Context
P. Boero, N. Douek, R. Garuti

Perception of infinity: does it really help in problem solving?
M. Singer, C. Voica

Le convinzioni degli insegnanti elementary sull'infinito matematico
S. Sbaragli

Primary intuitions and instruction: the case of actual infinity.
P. Tsamir

Dificultades y paradojas del infinito: experiencias en un ambiente computacional
A.I. Sacristán

Student's Concept of Infinity in the Context of a Simple Geometrical Construct
D. Jirotková, G. Littler

Estudio sobre concepciones de estudiantes universitarios respecto de la noción de infinito matemático
V. Montoro

Georg Cantor et la découverte des infinis
C. Vidal

2002

Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años
S. Garbin, C. Azcárate

Intuitive Beliefs, Formal Definitions and Undefined Operations: Cases of Division by Zero
P. Tsamir, D. Tirosh

From primary to secondary intuitions: prospective teachers' transitory intuitions of infinity
P. Tsamir

Comparing infinite sets-a process of abstraction, The Journal of Mathematical Behavior
P. Tsamir, T. Dreyfus

Ben's consolidation of knowledge structures about infinite sets
T. Dreyfus, P. Tsamir

Hilbert on the infinite: The role of set theory in the evolution of Hilbert's thought
A. W. Moore

La noción de infinito a través de la historia
C. Crespo

2001

A Child Thinking About Infinity
D. Tall

Natural and Formal Infinities
D. Tall

Young Peoples' Ideas of Infinity
J. Monaghan

Infinity - the never-ending struggle
D. Tall ,D. Tirosh

When "The Same" is not perceived as such: The Case of Actual Infinity
P. Tsamir

Tacit Models and Infinity
E. Fischbein

Infinito e infintesimo potenziale e attuale: una sfida per la Scuola Secondaria Superiore
G. T. Bagni

El concepto de infinito actual: Una investigación acerca de las incoherencias que se evidencian en alumnos de bachillerato
S. Garbin, C. Azcárate

Implicaciones didácticas de las dificultades en el aprendizaje de conjuntos infinitos: representaciones de conjuntos numéricos en textos matemáticos escolares
M.C. Penalva

Cantor's cardinal and ordinal infinity
H. N. Jahnke

Students shifting conceptions of the infinite through computer explorations of fractals and other visual models
A. Sacristán

¿Qué pasa con el infinito?
C. Imaz

El infinito matemático
J. de Lorenzo

Situación didáctica del concepto de límite infinito. Análisis preliminar
A. Camacho, M. Aguirre

2000

Infinito actual: inconsistencias e incoherencias de estudiantes de 16 - 17 años
S. Garbin (Tesis)

1999

Consistency and Representations: The Case of Actual Infinity
P. Tsamir, D. Tirosh

Finite and infinite sets: Definitions and intuitions
D. Tirosh

The transition from comparison of finite to the comparison of infinite sets: teaching prospective teachers
P. Tsamir

Reflexiones sobre las dificultades que conlleva la noción de infinito en aprendizaje de la matemática
V. Montoro, V. y M.de Torres Curth

"Lo veo, pero no lo creo" Obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Georg Cantor que involucra al infinito actual

G. Arrigo, B. D'Amore

Nicholas of Cusa and the Infinite
Th. J. McFarlane

The Infinite
A. W. Moore

1998

Conoscenza intuitive e conoscenza lógica nell'attività matematica
E. Fischbein

Un'interpretazione categoriale de una misconcezione riguardante gli insiemi infiniti
G. T. Bagni

1997

L' Infini, Un Ensembie de Nombres? Enquête auprès de Future Enseignants
R. Mura y L. Maurice

L'Infinito in didattica della matematica
B. D'Amore

Infinito en lo pequeño y desarrollo cognitivo: paradojas y espacios consensuales
R.E. Nuñez

Didactics of Infinity Euclid's proof and Eratosthenes' sieve Prime numbers and potential Infinity in High School
G. T. Bagni

1996

Estudio sobre la comprensión del concepto de número cardinal de un conjunto infinito
C. Penalva (Tesis)

Intuición del infinito en estudiantes de primero de BUP
P. Turégano

Identificación de obstáculos epistemológicos en el estudio del infinito actual
G. Waldegg

El infinito: una historia de conflictos, de sorpresas, de dudas. Un campo fértil para la investigación en didáctica de la matemática
B. D'Amore

The role of representations in students' intuitive thinking about infinity
D.Tirosh, P. Tsamir

Une genèse de l'idée d'infini
L. Maurice

Usos del infinito
L. Zippin

1995

Il concetto di infinito nell'intuizione matemática.
E. Ferrari, G. A. Lagna, E. Luzi, E. Trovini

Comparing infinite sets: Effects of representations and order of presentation
D. Yehoshua (Tesis)

Los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del cálculo infinitesimal
P. Turégano (Tesis)

Formación y manejo operatorio de conceptos matemáticos: la historia y epistemología del infinito
L. C. Arboleda, L. C. Recalde

In Search of Infinity
N.Y. Vilenkin

Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking
D. Tall

Infinity and the Mind
R. Rucker

A brief history of infinity
A. W. Moore

1994

Infinity: A Cognitive Challenge
R. Falk

Subdivision and small infinities: Zeno, paradoxes and cognition
R. E. Núñez

Promoting students consistent responses in respect to their intuitions of actual infinity
P. Tsamir (Tesis)

Comparing infinite sets: intuitions and representations
P. Tsamir, D. Tirosh

Is infinity a whole number?
G. Shama, N. Movsshovitz-Hadar

El concepto de infinito
J. R. Ortiz

1993

Approaching infinity: a view from cognitive psychology
R.E. Núñez

La comparaison des ensembles infinis: un cas de résistance à l'instruction
G. Waldegg

1992

The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof
D. Tall

Students' awareness of inconsistent ideas about actual infinity.
P. Tsamir, D. Tirosh

1991

The Conceptual Evolution of Actual Mathematical Infinity
L.E. Moreno, G. Waldegg

The Role of Students' Intuition of Infinity in Teaching The Cantorian Theory
D. Tirosh

The Psychology of Advanced Matematical Thinking
D. Tall

Intuition and rigour: The role of visualization in the Calculus
D. Tall

Advanced mathematical thinking processes
T. Dreyfus

1990

Infinity in Mathematics as a Scientific Subject for Cognitive Psychology
R.E. Nuñez.

1989

How and when attitudes towards mathematics and infinity become constituted into obstacles in students?
A. Sierpinska, M. Viwegier

How big is an infinite set? Exploration of children's ideas
R. Falk, S. Ben-Lavy

1988

Explicit Knowledge of Infinity
M.M. Wheeler, G. Martin

Concept Image and Concept Definition
D. Tall

1987

Esquemas de respuesta ante el infinito matemático: transferencia de la operatividad de lo finito a lo infinito
G. Waldegg (Tesis)

Infinity concepts among preservice elementary school teachers
W. G. Martin, M. M. Wheeler

1986

How do children cope with the infinity of numbers?
R. Falk, D. Gassner, F. Ben Zoor, K. Ben Simon

Adolescents' Understanding of Limits and Infinity
J. Monaghan (Tesis)

Using the computer to represent calculus concepts
D. Tall

1985

Infinite processes in elementary mathematics. How much should we tell the children?
T. Gardiner

The Teaching of Infinity
D. Tirosh, E. Fischbein, E. Dor

The intuition of infinity and its relevance for mathematical education.
D. Tirosh (Tesis)

Errors in the enumeration of infinite sets
R. Borasi

Intuition and rigor in the evaluation of infinite expressions
R. Borasi

1983

L'obstacle du dedoublement des objets mathematiques
R. Duval

1981

Intuitions of Infinity
D. Tall

Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity
D. Tall , S. Vinner

Numbers and Infinity: A Historical Account of Mathematical Concepts
E. H. Sondheimer, A. Rogerson

1980

The notion of Infinite Measuring Number and Its Relevance in the Intuition of Infinity
D. Tall

Intuitive infinitesimals in the calculus
D. Tall

Mathematical Intuition, with special reference to limiting processes
D. Tall

1979

The Intuition of Infinity
E. Fischbein, D. Tirosh, P. Hess

1978

Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits
D. Tall y R.L. Schwarzenberger

Métodos gráficos para el estudio de conjuntos infinitos
R. Aguado

Anexo II.2 Cronograma de nuestra investigación

<table>
<tr><th>AÑO</th><th>Exp. Profesional</th><th>Formación Académica</th><th>Comunicaciones</th><th>Publicaciones</th><th>Consultas a Expertos</th><th>Aportes a la Investigación</th></tr>
<tr><td rowspan="2">2002-04</td><td rowspan="3">Profesor Secundaria</td><td>1º Curso Doctorado. Período formación.

X Congreso sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. El Ejido (Almería)</td><td></td><td></td><td rowspan="2">Alfonso Ortiz Comas.

José L. González Marín.

Catalina Fernández Escalona.

Guillermina Walldegg.</td><td>Problema de Investigación.

Primera selección bibliográfica.

Los estudios empíricos con alumnos y alumnas ESO, eran viables.</td></tr>
<tr><td>2º Curso Doctorado. Período Investigación.

XI Congreso sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Huelva</td><td></td><td></td><td>Ubicar nuestra investigación en torno al conocimiento del infinito actual.

Comparación de conjuntos numéricos.

Primer modelo teórico evolutivo.

Tesina (posterior Estudio Exploratorio).</td></tr>
<tr><td>2006-07</td><td>Máster en Didáctica de las Matemáticas. UCA.

XIII Jornadas sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Granada.</td><td></td><td></td><td>Mónica Torres Curth.

Virginia Montoro.

Carmen Mª Valdivé Fernández.

Carmen Azcárate.

SabrinaGarbin Dall'Alba.</td><td>Realización de búsquedas retrospectivas de las bases de datos.

Consejos y aportes de referencias bibliográficas.

Realización de nuestra propia base de datos.

Revisión de la Tesis Doctoral Fernández (2001).</td></tr>
</table>

					Silvia Sbaragli. Ana Lucena Córdoba.	
2008		XII Congreso sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Sevilla.			Antonio Rodríguez Chia. Ana Serradós Bayes.	Actualizaciones de búsquedas informatizadas. Ampliación de nuestra base de datos. Revisión de los artículos y libros seleccionados.
2009				"Número infinito como identidad cardinal entre series numéricas. Un estudio mediante entrevistas clínicas en alumnos y alumnas de secundaria."		Revisión de nuestra tesina.
2010		XIII Congreso sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Córdoba,			Mª Carmen Penalva. Mª Teresa Juan.	Actualizaciones de búsquedas informatizadas. Ampliación de nuestra propia base de datos. Revisión de los artículos y libros seleccionados.
2011			"Hacia un modelo evolutivo del infinito cardinal en alumnos de	"Hacia un modelo evolutivo del infinito cardinal en	Mª Celeste Bertoia. Mercedes Palarea.	Revisión de las Tesis de Belmonte(2009) y Codes(2009) Realización de diversos experimentos con el libro de los espejos.

			la ESO”. “Construcción de un modelo evolutivo del infinito cardinal en alumnos de EPO y ESO.”.	alumnos de la ESO.”	Myriam Codes Valcárcel.	Revisión y ampliación del Modelo evolutivo.
2012	Profesor Secundaria Profesor Sustituto Interino. UCA	DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA. Federación Educación y Gestión.		“Construcción de un modelo evolutivo del infinito cardinal en alumnos de EPO y ESO.” “El uso de las TIC en entrevistas clínicas semiestructuradas : estudio del infinito como identidad cardinal entre series numéricas en alumnos de la ESO.”		Se empieza a realizar el análisis didáctico. Preparación de las nuevas pruebas asociadas al modelo empírico evolutivo con uso de TIC. Fijar los objetivos iniciales del estudio.
2013		Curso en Red: “MATEMÁTICAS A TRAVÉS DE SOFTWARE LIBRE”. FESPM.			José Mª Cardeñoso Domingo.	Revisión de las Tesis de Claros (2010). Realización de los análisis Fenomenológico y Epistemológico.

							Revisión de los objetivos iniciales del estudio.
2014						José Luis Belmonte Martínez. Sabrina Garbin Dall'Alba.	Realización de los análisis Cognitivo y de Enseñanza-Curriculum. Construcción de la experiencia física de los espejos. Selección de los alumnos y alumnas
2015			"Análisis Didáctico del infinito actual mediante la comparación cardinal".			Bernardo Gómez Calderón. José Antonio Fernández Plaza. Javier Claros Mellado.	Desarrollo de las entrevistas. Transcripción de las entrevistas de los dos estudios cualitativos. Identificación de regularidades y características generales. Realización de los análisis cualitativos. Conclusiones generales de la investigación. Revisión de los documentos y redacción definitiva del Informe de Investigación.

Anexo II.3. Base de Datos propia

1	TÍTULO	AUTOR	AÑO	PUBLICADO	IMPRIMIDO	VINCULOS	WEB	e-mail
2	Métodos gráficos para el estudio de conjuntos infinitos.	ACUADO-MUÑOZ, R.	1978	Gaceta Matemática.Presentado en el Seminario Permanente de Matemáticas en el Bachillerato del ICE, U. Autónoma	SI	ARTÍCULOS\IMPRIMIDO GACETAMATEMATICA_1978_30_01-02_01.pdf		
3	Situación didáctica del concepto de límite infinito.	AGUIRRE GRANADOS, M.P., SÁNCHEZ LU	2002		SI			
4	LA NOCIÓN DE INFINITO EN GEORGE CANTOR. UN ESTUDIO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO EN LA PERSPECTIVA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA.	APONTE MARÍN, M.	2014	Trabajo de Grado		ARTÍCULOS\LA NOCIÓN DE INFINITO EN GEORGE CANTOR. UN ESTUDIO.p	http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/7103/1/7412-0430850.pdf	
5	Formación y manejo operatorio de conceptos matemáticos: la historia y epistemolog	ARBOLEDA, L.C. RECALDE, L.C.	1995	MATEMÁTICAS: Enseñanza Universitaria VOL.4, nº 1 y 2	SI		http://matematicas.univalle.edu.co/index.php?page=hv/nombre&nm=LuisR	ancordob@univalle.edu.co
6	Rigor o entendimiento, un viejo dilema en la enseñanza de las matemáticas: el caso d	ARCOS QUEZADA, J.I.	2004	Tiempo de Educar, julio-diciembre, año/vol.5, nº 010. pp. 77-110	SI	ARTÍCULOS\Rigor o entendimiento, un viejo dilema en la enseñanza de las mater	http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/311/31101004.pdf	teducar@uaemex.mx
7	Obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Georg Cantor que involucra al infinito actual.	ARRIGO, G. D'AMORE, B.					http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/340%20espanol%201%20parte.pdf	
8	Otros hallazgos sobre los obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor	ARRIGO, G. D'AMORE, B.	2004	Educación Matemática Vol 16,2.		ARTÍCULOS\Otros hallazgos sobre los obstáculos epistemológicos y.pdf	http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/405/40516201.pdf	
9	Sobre la investigación en didáctica del análisis matemático.	AZCÁRATE, C. CAMACHO, M.	2003	Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, vol. X, nº 2	SI	ARTÍCULOS\Sobre la invstigación en didáctica del análisis matematico.pdf		
10	Didactics of infinity: Euclid's prood and Eratosthenes' sieve Prime numbers and poter	BAGNI, G.	1997	Didactics of Mathematics-Technology in Education.Erasmus ICP-96-G-2011/11, Thessaloniki, 209-218	SI	ARTÍCULOS\Didactics of infinity. Euclid's prood and Eratosthenes' sieve Prime n	http://www.syllogismos.it/education/Eratosthenes.pdf	
11	Del concepto de infinito.	BANQUÉ, J.	1893		LIBRO			
12	The meaning of infinity in calculus and computer algebra systems.	BEESON, M. WIEDIJK, F.	2002	AISC-Calculemus 2002, LNAI 2385, pp.246-258	SI	ARTÍCULOS\The meaning of infinity in calculus and computer algebra systems. E	http://www.michaelbeeson.com/research/papers/LimitTheory.pdf	
13	Modelo intiutivos y esquema conceptual del infinito.	BELMONTE, J.L.	2009	Tesis Doctoral		ARTÍCULOS\Modelo intiutivos y esquema conceptual del infinito..pdf		
14	Children's conceptions of infinity of numbers in a fifth grade classroom discussion co	BOERO, P. DOUEK, N. GARUTI, R.			SI	ARTÍCULOS\Children's conceptions of infinity of numbers in a fifth grade classro	http://www.dima.unige.it/~boero/artic/boero&c_pme_XXVII.pdf	
15	Leibniz y el infinito	BURBAGE, F. CHOUCHAN, N.	2008			C:\Users\DONJUAN\Desktop\TESIS\ARTÍCULOS\Leibniz y el infinito.pdf		
16	Situación didáctica del concepto de límite infinito. Análisis preliminar.	CAMACHO, A. AGUIRRE, M.	2001	Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, noviembre, año/vol.4, nº 003. pp. 237-265	SI	ARTÍCULOS\Situación didáctica del concepto de límite infinito. Análisis prelimina	http://dialnet.unirioja.es/servlet/fichero_articulo?codigo=2147886&orden=71878	relime@mail.civenstav.mx
17	Las diferentes posturas en relación con el infinito actual.	CANTOR, G.		Signos Filosóficos, vol. VI, núm. 11, enero-junio, 2004, pp. 175-185		ARTÍCULOS\Diferentes posturas en relacion con el infinito actual.pdf		
18	Un paseo finito por lo infinito	CASTRO, I., PÉREZ,J.,ARBOLEDA, S.	2007	ISBN 9789586839372,Bogotá, Universidad Sergio Arboleda y Pontificia Universidad Javeriana				
19	Nocoes de infinito matematico em adolescentes e adultos	CAVALLI BERTOLUCCI, C.	2009	Tesis Doctoral. Univ. Federal do Rio Grande . Porto Alegre	SI			
20	Límite finito de una sucesión: Fenómenos que organiza.	Claros Mellado, F.	2010	Tesis Doctoral		ARTÍCULOS\Límite finito de una sucesión. Fenómenos que organiza..pdf		
21	SuceSión convergente y SuceSión de cauchy: equivalencia matemática y equivalencia fenomenológica	Claros Mellado, F.	2013	ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Revista de investigación y experiencias didácticas Núm. 31.2 (2013): 113-131 ISSN: 0212-4521		ARTÍCULOS\Sucesiones convegentes cauchy.pdf		
22	Análisis de la comprensión de los conceptos de serie numérica y su convergencia en estudiantes de primer curso de universidad utilizando un entorno computacional.	Codes Valcarce, M.	2009	Tesis Doctoral		ARTÍCULOS\Análisis de la compresión de los conceptos de serie numérica . Tesis Vaslcarcel.pdf		
23	L Infinity Embeddings	COPPERSMITH, D.	2001	M. Goemans et al. (Eds.): APPROX-RANDOM 2001, LNCS 2129, pp. 223-228	SI	ARTÍCULOS\L Infinity Embeddings. COPPERSMITH.pdf	http://www.springerlink.com/content/wdbn1gkgfqcfp79q/	dcopper@us.ibm.com
24	Letting the intitutive bear on the formal; A didactical approach for the understanding of	COPPERSMITH, D.						
25	La lógica de los números infinitos: un acercamiento histórico.	CORNELIO RECALDE, L.	2004	Matemáticas: Enseñanza Universitaria (nueva serie) junio, año/vol. XII, nº 001. pp. 51-72	SI	ARTÍCULOS\La lógica de los números infinitos... CORNELIO.pdf	http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/468/46812106.pdf	revisem@univalle.edu.co
26	EL INFINITO: UNA HISTORIA DE CONFLICTOS, DE SORPRESAS, DE DUDAS. UN	D'AMORE, B.	1996	Epsilon nº 36, 1996. pp. 341-360	SI			
27	La didáctica del infinito matemático	D'AMORE, B.	2011	Sunto della Conferenza generale tenuta il 9 settembre 2011 al XXIV Coloquio Distrital de Matematicas y Estadistica, promosso dalle Universdità Distrital, Nacional e Pedagogica de Bogotà. In: AA. VV. (2011). Memorias del XXIV Coloquio Distrital de Matematicas y Estadistica, Bogotà, 8-10 settembre 2011. CD. ISBN: 978-958-57050-0-5. Pagg. 21-29.		ARTÍCULOS\La didáctica del infinito matemático. D'Amore (2011).pdf		
28	El sentido del Infinito	D'AMORE, B.; ARRIGO, G.; OTROS	2006	Epsilon. [Sevilla, Spagna]. Vol. 22(2), n· 65, 187-216. ISSN: 1131-9321.		ARTÍCULOS\Sentito del infinito. D'AMORE, ARRIGO.pdf		
29	El concepto de límite. Una mirada histórica-epistemológica.	DE TORRES CURTH, M.	2000	Cuadernos univeristarios Crub ISSN 0325-6308, nº 36	SI		http://www.crub.uncoma.edu.ar/wp-content/uploads/2007/03/L%C3%B3gica%20Informal.pdf	
30	Reflexiones sobre El Concepto de Infinito.	DÍAZ NAVARRO, P.			SI	http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/MundoMatematicas/infinito/index.html		
31	Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS ana	DUBINSKY E., WELLER K., MCDONALD M.,	2005	Educational Studies in Mathematics (2005) 58. pp. 335-359	SI	ARTÍCULOS\Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infir	http://www.springerlink.com/content/p0p2358p8r528676/	
32	The concept of a sum of infinite series as a didactic problem.	EISENMANN, P.	2009	Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics, Issue 9, 2009, pp. 1-8	SI			
33	Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto de "límite de función": un	ESPINOZA, L. AZCÁRATE, C.	2000	Enseñanza de las ciencias, 2000, 18 (3), pp. 355-368	SI	ARTÍCULOS\Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto de límí	http://ddd.uab.es/pub/edlc/02124521v18n3p355.pdf	
34	El concepto de infinito en la escuela: ordenando lo inconmensurable.	FEDRIANI, E.M. TENORIO, A.F.	2007	Epsilon, 67 Vol. 23 (1 y 2)	NO			
35	Matemáticas del más allá: el infinito	FEDRIANI, E.M. TENORIO, A.F.	2010	UNION Marzo de 2010, Número 21, páginas 37-58 ISSN: 1815-0640		ARTÍCULOS\matematicas del mas alla.pdf		
36	Tacit models and infinity	FISCHBEIN, E.	2001	Educational Studies in Mathematics Vo. 48, nº 2-3	SI			
37	El infinito y niñ@s talento en matemáticas: Una mirada desde APOE	FUENTES; OKTAC	2011	XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011.		ARTÍCULOS\El infinito y niñ@s talento en matemáticas.pdf		
38	Following student's development in a traditional university analysis course.	FUSARO, M. TALL, D.	2001	Completed on January 14th 2001	SI	ARTÍCULOS\Following student's development in a traditional university analysis	http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2001j-pme25-pinto-tall.pdf	marcia@mat.ufmg.br
39	El infinito	GALLART, C.		Apuntes básicos de matemáticas	SI	ARTÍCULOS\el_infinito.pdf	http://www.lopedevega.es/users/cesargallart/el_infinito.pdf	
40	La paradoja de Russell.	GALLART, C.		Apuntes básicos de matemáticas	NO	ARTÍCULOS\Paradoja de Russell. Gallart.pdf	http://www.lopedevega.es/users/cesargallart/paradoja_russell.pdf	
41	Georg Cantor y la terоría de los números transinfinitos.	GALLART, C.		Apuntes básicos de matemáticas	NO	ARTÍCULOS\Georg Cantor y la teoría de los números transinfintos. GALLART.p	http://www.lopedevega.es/users/cesargallart/georg_cantor.pdf	
42	Ideas del infinito, percepciones y conexiones en distintos contextos: el caso de estudi	GARBIN, D., SABRINA	2005	Enseñanza de las ciencias, 2005, 23(1), pp. 61-80	SI	ARTÍCULOS\Ideas del infinito. percepciones y conexiones en distintos contextos el caso de estudiantes con conocimientos previos de cálculo..pdf		
43	¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelo	GARBIN, S.	2005	Relime Vol.8,Nº2, julio 2005, pp.169-193	SI	ARTÍCULOS\Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinitoLa influenci.	http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=33580205	
44	Infinito actual e inconsistencias:acerca de las incoherencias en los esquemas concep	GARBIN,S. AZCÁRATE, C.	2002	EnsEÑANZAS DE LAS CIENCIAS, 2002, 20(1), 87-113	SI	ARTÍCULOS\Infinito actual e inconsistencias acerca de las incoherencias en los	http://ddd.uab.es/pub/edlc/02124521v20n1p87.pdf	sgarbin@usb.ve
45	La problemática del concepto de infinito en su dualidad potencial y actual: ideas e inter	GARBIN,S. AZCÁRATE, C.		XVI Jornadas de la AMV	Sólo abstracc			

347
Referencias

Datos de publicación de los artículos para facilitar sus Referencias Bibliográficas

Se creó una biblioteca virtual hipervinculada donde se alojaban todos los artículos seleccionados.

Lugar de la web donde están alojadas

e-mail autores

ANEXO III
ANÁLISIS DIDÁCTICO

Anexo III.1 Paradojas

Paradojas de Bolzano

- **Primera paradoja en la esfera de las matemáticas**

Si cualquier número es, simplemente por definición, un conjunto finito ¿cómo es posible que el conjunto de todos los números sea infinito? Si consideramos, en efecto, la serie de los números naturales:

1, 2, 3, 4, 5, 6,...,

Nos percataremos de que el conjunto de los números contenidos en la serie que va del primero (o sea, la unidad) a cualquier otro, es enumerado siempre por este último (por ejemplo, la que va del *1* al *6*). En consecuencia, el conjunto de *todos* los números debe ser exactamente enumerado por el último de ellos, por lo que no podría ser infinito" (Bolzano, 1851/1991, pp. 57-58).

Solución a la primera paradoja

No hay ningún entero que ocupe el "último lugar". El principio de construcción de los números enteros avala la existencia del sucesor de cualquier número. Con esa observación basta para resolver la paradoja.

- **Segunda paradoja**

Se afirma que: "un conjunto infinito no puede existir en ninguna parte, por la sencilla razón de que no es posible abarcar nunca con el pensamiento, como un todo unitario, un conjunto de esa índole" (Bolzano, 1851/1991, p.52).

Solución a la segunda paradoja: el conjunto como un objeto sincrético:

(…) que tan pronto como tenemos una representación mental *A* que se refiere a cada uno de los objetos *a, b, c, d,…,* resulta muy fácil pasar a otra representación, cuyo objeto es el agregado mismo al que todos estos objetos tomados conjuntamente dan lugar. Para ello no se requiere otra cosa que el combinar el concepto designado por la palabra *agregado* y la representación misma, de la manera sugerida por la expresión *el agregado de todos los A.* Esta simple observación (…) disipa cualquier tipo de objeciones que pudieran hacerse al concepto de un conjunto que contienen un número infinito de elementos: *con tal* de que exista un concepto genérico que comprenda *exclusivamente* a cada uno d estos elementos (…). (Bolzano, 1851/1991, pp.52-53)

Se anticipa Bolzano al Axioma de compresión de la teoría de conjuntos:

Dada una condición $R\ (x)$ que se refiere a x y un conjunto primitivo A, podemos formar el conjunto $B = \{x \in A / R(x)$ es cierta$\}$.

- **Tercera paradoja: La comparación y la corporación de un orden entre conjuntos infinitos "una de las carácterísticas más notables de los conjuntos infinitos"**

Dos conjuntos pueden estar relacionados entre sí de tal manera que resulte posible:

(1) que cada uno de los elementos de cualquiera de ellos se encuentre asociado con un elemento del otro, no existiendo ningún objeto en ninguno de los dos conjuntos que entre en esa relación con más de un elemento del otro, y

(2) [111]que uno de esos conjuntos incluya al otro como una parte propia, por lo que las multiciplicidades que ambos conjuntos representan pueden encontrarse en las relaciones más variadas entre sí cuando se consideran todos los elementos de los mismos como objetos individuales intercambiables. (Bolzano, 1851/1991, pp. 64-65)

[111] Estos mimos conjuntos pueden presentar otro tipo de relación para su comparación que constituirá la diferencia entre los criterios con los de Cantor.

Solución a la tercera paradoja

Para Bolzano comparar dos conjuntos se debe basar en la relación parte-todo entre los conjuntos. Para ello, pone el siguiente ejemplo:

> (…) Claramente el conjunto de las cantidades que están entre *0* y *5* (que son menores que *5*) es infinito, y lo mismo es válido para el conjunto de las cantidades que son menores que *12*. Por supuesto, el segundo conjunto es mayor que el primero; en realidad, éste es tan sólo una parte de aquél. (…) que si *x* es una cantidad cualquiera entre *0* y *5*, y determinamos la relación entre *x* y *y* por medio de la ecuación "*5y=12x*", y es también una cantidad entre *0* y *12*. Inversamente: siempre que *y* se encuentre entre *0* y *12*, *x* ha de localizarse entre *0* y *5*.
>
> De la ecuación se sigue igualmente que a todo valor de *x* corresponde un único valor de *y* y viceversa. Y es también claro que a toda cantidad *x* en el conjunto entre *0* y *5* corresponde una cantidad en el conjunto entre *0* y *12*, de tal manera que ninguno de los objetos en alguno de estos dos conjuntos queda sin ser relacionado, y ninguno de ellos lo está con más de un solo objeto del otro conjunto. (Bolzano, 1851/1991, p. 65)

La correspondencia establecida es de uno-a-uno entre los dos conjuntos, pero el hecho que dos conjuntos estén relacionados por esta misma regla de forma biunívoca nunca prueba "la igualdad de sus miembros cuando estos son infinitos" (Bolzano, 1851/1991, p.67).

Para Bolzano dos conjuntos abstractos pueden estar en relacionados uno-a-uno entre ellos y sin embargo no significa que sean equinumerosos porque podría suceder que uno de ellos estuviera incluido como subconjunto propio del otro.

Ésta es la diferencia con los criterios constituidos por Cantor, en los que la relación parte-todo define a los conjuntos infinitos. Su tamaño y su orden de los conjuntos infinitos se fundamentan en su cardinalidad entendida como una medida del número de elementos que posee ese conjunto. Si dos conjuntos se puede instituir una correspondencia uno-a-uno, entonces tienen la misma cardinalidad y por tanto son equivalentes.

Bolzano continúa con la preocupación paradójica que crea la comparación de conjuntos infinitos:

> El carácter indiscutiblemente paradójico de estas afirmaciones tiene su origen exclusivamente en el hecho de que la relación que se establece entre dos conjuntos (…) representa, en el caso de conjuntos *finitos*, una condición suficiente para su identificación en cuanto a la diversidad de sus elementos (…) con esto surge igualmente la ilusión de que éste debe también ser el caso cuando los conjuntos *A* y *B* son *infinitos.* (Bolzano, 1851/1991, pp. 67-68)

La ilusión que indica lo aclara:

> Se trata, sin embargo, de una mera ilusión, pues un análisis detenido muestra que no es en forma alguna necesario que esto ocurra. En efecto, la razón de que esto suceda cuando los conjuntos son finitos es precisamente su finitud, obviamente ausente en el caso de los conjuntos infinitos. (Bolzano, 1851/1991, p.68)

Para Bolzano no acepta ampliar el criterio de biyección para comparar la equinumerosidad entre dos conjuntos infinitos. Ahora bien, la relación parte-todo sí le permite afirmar que un conjunto es mayor que el otro tal y como sucede con los conjuntos finitos. Destacar la insistencia por parte de Bolzano de establecer un criterio de especificación sobre la multiplicidad de elementos al margen de la biyección entre conjuntos infinitos: "La igualdad de tales multiplicidades no puede concluirse sino hasta que se supone adicionalmente que ambos conjuntos poseen un *modo de especificación (Bestimmungsgrund)* idéntico, por ejemplo, el mismo *modo de generación (Entstebungsweise)*" (Bolzano, 1851/1991, p. 67).

Paradoja de Russell

De todas las paradojas, la que se destaca más por su simplicidad y su carácter directo, es la de Russell: La mayoría de los conjuntos no pertenecen a sí mismos.

Sea B el conjunto de todos los conjuntos que no pertenecen a sí mismos

$$B= \{x: x \notin x\}$$

De la propia definición, $B \in B$ si sólo sí $B \notin B$.

Como se dijo inicialmente, destaca por su simplicidad, sólo es necesario, aparentemente, tener conocimiento de conjunto, pertenecer y negación, además de los principios lógicos fundamentales de tercio excluso y no-contradicción.

Russell, a través del teorema de Cantor, establece su paradoja. El teorema tiene el siguiente enunciado:

Dado un conjunto C, existe otro de mayor cardinalidad, es decir: el conjunto de las funciones

$$\{f: C \rightarrow \{0,1\}$$

Cantor demostró el teorema mediante el método de diagonalización, que lo empleó para también, demostrar que $\Re$ no es un conjunto enumerable. Pero para él, no le pareció su teorema un resultado elemental de la teoría de conjuntos, ya que la idea que tenía acerca de conjunto de funciones era bien distinta a la de un conjunto.

Importancia que si le daría Russell, estudioso de la obra cantoriana, al reformularlo a la versión moderna:

Dado un conjunto C, el conjunto potencia $\wp(C)$ tiene mayor cardinalidad ya que las funciones f: $C \rightarrow \{0,1\}$ se crean como funciones características de los subconjuntos de C.

"La primera reacción de Russell al leer a Cantor, había sido de profunda desconfianza hacia sus ideas: buscaba contradicciones por todas partes, cosa que no resulta extraña si tenemos en cuenta que venía de ser un hegeliano convencido" (Ferreirós, 2000, p.60).

Y es que el teorema de Cantor impugnaba el pensamiento de Russell en el que el conjunto de todas las cosas debe tener una cardinalidad mayor que cualquier otro ya que todo elemento de un conjunto es a la vez una cosa.

Si llamamos V al conjunto de todas las cosas, $\wp(V)$ debería estar incluido en V y de ahí la cardinalidad de éste debería ser mayor o igual, puntualizando Russell el posible error en el teorema de Cantor.

Ferreirós (2000) identifica el origen del problema y lo refiere a un postulado que se venían tomando como base para la teoría de conjuntos: *el principio de comprehesión*.

El mismo autor los expresa de forma castiza: "dame un propiedad y te daré un conjunto", que matemáticamente sería Si dado *P(x)*, existe un conjunto *{x, P(x)}*. Este principio se encuentra en muchos autores, incluido Bolzano y Peano. En cambio fue en Russell, quien lo contradijo tomando el *P(x)* del principio como $P(x)=(x\neq x)$ y posteriormente deduciendo la contradicción echando por tierra lo que se ha llamado *la teoría ingenua de conjuntos*. En su obra, *Los principios de la matemática*, comenta que la contradicción anterior nace por el propio sentido común, pero puntualiza que sólo se resuelve siempre y cuando se abandona algún supuesto del sentido común.

Hay que tener en cuenta que la paradoja de Russell no invalida la teoría de conjuntos y es que esta teoría va más de cualquier concepto logicista, basándose en postulados propiamente matemáticos.

Para Zermelo el origen de la paradoja, estaba en el principio incondicional de comprehensión. Ferreirós (2000) señala, que la propuesta de Zermelo era adoptar el axioma de separación o subconjuntos que sería una versión relativa al principio de comprehensión. Este axioma[112] afirma que dado *P(x)* y un conjunto *C*, existe el subconjunto $\{x\!: x \in C \ y \ P(x)\}$. De ahí Zermelo pudo demostrar que no hay conjunto *V* de todos los conjuntos (si se supone su existencia, daría lugar a un absurdo).

Concluye en Ferreirós(2000) comentando como síntesis a todo ello, que para muchos autores, la publicación de esta paradoja en 1903, sería la sentencia de muerte para el logicismo en tanto a poder fundamentar la propia matemática.

[112] Este axioma junto a otros seis (incluido el del Infinito y el de Elección), constituirían el sistema de Zermelo.

Anexo III.2 Teoremas

Teorema 1: *El conjunto de los números reales* $\mathbb{R}$ *no es numerable.*

Demostración:

Suponiendo que lo fuera, existiría una sucesión que contendría todos los números reales de $[0,1]$: $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n, \ldots$ (I)

Considerando un subintervalo cualquiera (α, β) de $(0,1)$, definiremos sobre la base de la sucesión (I) un número real de (α, β) no contenido en (I). Sean α'y β' los dos primeros números de la sujeción (I) que están dentro de (α, β), y sea $\alpha' < \beta'$ (renombrándolos si es preciso); sean α''y β'' los dos primeros números de (I) que están dentro de (α', β'), y sea $\alpha'' < \beta''$. Por construcción, α'' sigue a α' en la sucesión (I), y β'' sigue a β'; además, $\alpha' < \alpha''$ y $\beta'' < \beta'$. Empleando repetidamente el mismo procedimiento, obtendremos una secuencia de intervalos cerrados encajados $[\alpha, \beta], [\alpha', \beta'], [\alpha'', \beta''], \ldots$ Ahora cabe considerar dos casos:

O bien el número de intervalos es finito, siendo el último $[\alpha^{(n}, \beta^{(n)}]$; en el interior de éste hay a lo sumo un número de la serie (I), de modo que podemos tomar en dicho intervalo un número η no contenido en (I).

O bien el número de intervalos encajados es infinitamente grande. En este caso, los números α, $\alpha', \alpha'', \ldots$ forman una sucesión monótona creciente y acotada, que tiene un determinado limite α^{∞}. Lo mismo vale para los números $\beta, \beta', \beta'', \ldots$ dado que forman una sucesión monótona decreciente y acotada, siendo su límite β^{∞}. Ahora pueden distinguirse dos casos: en el primero, $\alpha^{\infty}=\beta^{\infty}$, como "sucede siempre con la colección (w) de todos los números algebraicos"; la construcción anterior es tal que el intervalo $[\alpha^{(n)}, \beta^{(n)}]$ excluye al menos los $2(n\text{-}1)$ primeros miembros de la sucesión (I), de manera que el número $\eta=\alpha^{\infty}=\beta^{\infty}$ no puede estar contenido en la sucesión inicial. En el segundo caso, podría ser que $\alpha^{\infty}<\beta^{\infty}$, y entonces ningún número η del intervalo $[\alpha^{\infty}\ldots\beta^{\infty}]$ está contenido en la sucesión (I). (Ferreirós, 1991, citado en Aponte, 2014, p.38)

Teorema 2: Los números racionales pueden estar puestos en una correspondencia biunívoca, método de diagonalización.

Demostración:

Supongamos que los números reales en el intervalo *(0, 1)* tienen la misma potencia que los números naturales. Eso significa que existe una función biyectiva entre los naturales y los reales, y por lo tanto, la totalidad de los reales del intervalo en cuestión se pueden listar en una sucesión de la forma:

$$r_1, r_2, r_3,\dots r_n,\dots$$

Dado que cada uno de estos números están ubicados en el intervalo (0,1) quiere decir que su expansión decimal consta de la parte entera igual a cero, por lo cual se los puede representar de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} r_1 = 0.a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\dots a_{1n}\dots \\ r_2 = 0.a_{21}\, a_{22}\, a_{23}\dots a_{2n}\dots \\ r_3 = 0.a_{31}\, a_{32}\, a_{33}\dots a_{3n}\dots \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ r_n = 0.a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3}\dots a_{nn}\dots \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \end{array}$$

Se supone que en la lista se encuentran la totalidad de los reales del intervalo *(0, 1)*. Sin embargo, formemos el número real,

$$b = 0.b_1\, b_2\, b_3\dots b_{1n}\dots$$

tal que, $b_i \neq a_{ii}$, para todo i. Se tiene que, por definición, $b_i \neq r_i$, para todo i, lo cual contradice el hecho de que en la lista se encontraban “todos” los reales del intervalo *(0, 1)*. (Recalde, 2005, citado en Aponte, 2014, p.39)

Se puede apreciar como Cantor empieza a tener los primeros inconvenientes para poder caracterizar los conjuntos infinitos y es que, debido a que los números reales $\mathfrak{R}$ *no es numerable* manifiesta la distinción de distintos tipos de infinitos distintos tipos de infinito, es decir no hay un único infinito.

Teorema 3 (Cantor-Schröider-Berntein): Establece un criterio para establecer si existe una función biyectiva entre dos conjuntos cualesquiera A y B.

$$\text{Si } |A| \leq |B| \text{ y } |B| \leq |A| \text{ entonces } A \approx B$$

Demostración: Sean los conjuntos A y B. Si $A \approx B$ entonces $|A| = |B|$

Por otro lado, si $|A| \leq |B|$ pero $|A| \neq |B|$, entonces $|A| < |B|$

Este teorema parece trivial para conjuntos finitos pero el enunciado del teorema se cumple para conjuntos de cualquier cardinalidad. De ahí la utilidad de éste para determinar si dos conjuntos tienen la misma cardinalidad. (Uzcátegui, 2010, p.162)

Axiomas de Peano (Pakhrou, 2013, p.1)

Se define el conjunto de los números naturales, y se expresa por ℕ, a todo conjunto que cumple las cinco condiciones siguientes:

(1) Existe un elemento de ℕ al que llamamos uno , $1 \in \mathbb{N}$.

(2) Para cada número $n_2 \in \mathbb{N}$ existe otro número natural único, n_s, lo llamaremos sucesor de n.

(3) El 1 no es el sucesor de ningún número natural. ($\forall\, n \in \mathbb{N}, n_s \neq 1$).

(4) Sean $n; m \in \mathbb{N}$, entonces:

$$n_s = m_s \leftrightarrow n = m$$

(5) *Principio de inducción matemática*. Sea A un subconjunto de ℕ. Si $1 \in A$ y para cada elemento $n \in A$; se tiene que $n_s \in A$ entonces $A = \mathbb{N}$.

ANEXOS IV

ESTUDIO EXPLORATORIO CUALITATIVO

Anexo IV.1 Tareas asociadas a los niveles del estudio exploratorio

Como dijimos en el capítulo IV, apartado 4.1, para cada uno de los niveles pasamos una tarea que conlleva las características lógico matemáticas del mismo. El procedimiento seguido queda sistematizado en el cuadro de la figura IV.1 del mismo apartado.

Estas tareas se realizarán en forma de fichas que serán entregadas al estudiante en el momento de la entrevista.

Las fichas de la situación 1, S1, de cualquier nivel, tienen las siguientes características:

- En horizontal aparece en dos columnas la comparación de dos actividades donde se comparan lo finito con lo infinito.
- Se utiliza en este caso la expresión escrita en la descripción de la actividad.
- El desarrollo de los términos de la serie que el estudiante debe construir se ubicará en unas regletas de espacios vacíos.
- El entrevistador deberá comentar al estudiante entrevistado los puntos suspensivos que aparecen, tanto en lo infinito como lo finito en el caso del Nivel II.
- El entrevistado responderá al final de cada columna las preguntas que se formulan.

Las fichas de la situación 2, S2, de cualquier nivel, tienen las siguientes características:

- Se utiliza, en este caso, dos folios: uno para las series numéricas finitas y otro para las series numéricas infinitas.
- Obviamos la expresión escrita en la presentación de estas actividades.
- El entrevistado construirá y escribirá la serie numérica en círculos vacíos.

- Estos círculos van acompañados de unas flechas para facilitar el proceso de la actividad.
- Al igual que las fichas de la situación anterior las series a comparar están dispuestas de forma paralelas.
- Al final de estas fichas aparecen las preguntas que el entrevistado deberá responder.

Las fichas de la situación 3, S3, de cualquier nivel, tienen las mismas características que la situación anterior, S2, salvo en lo siguiente:

- Para poder comparar las series, los círculos vacíos aparecen de distintas formas. No tienen ni el mismo margen izquierdo ni los espacios entre ellos son del mimo tamaño.

Las fichas de la situación 1', S1', de cualquier nivel, tienen las mismas características que la situación 1, S1, salvo en el término general.

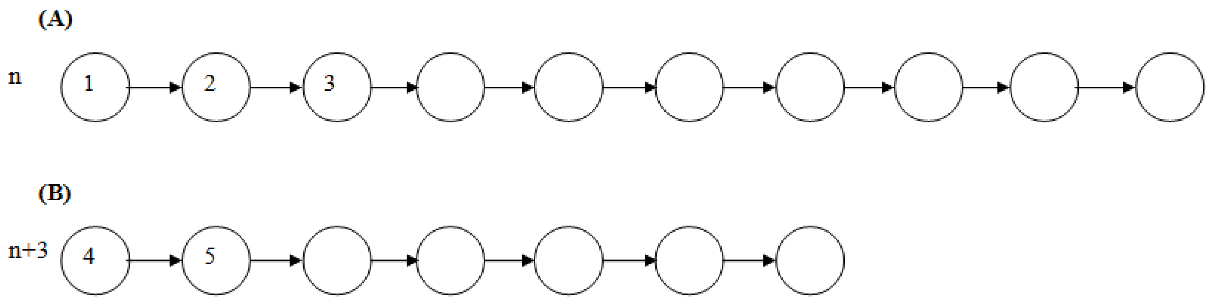
Fichas Nivel I

Situación 1

ALUMNO: **CURSO:** **EDAD:**	
A) Sea el conjunto de números desde n= 1 a n=10. Representa cada elemento en las casillas siguientes:	**C)** Sea el conjunto de números desde n= 1 en adelante Representa cada elemento en las casillas siguientes: ....
B) Se el conjunto de números desde n= 1 a n=7. A cada número le sumamos 3. Representa , ahora n+3 en las casillas siguientes:	**D)** Sea el conjunto de números desde n= 1 en adelante. A cada número le sumamos 3. Representa ahora n+3 cada elemento en las casillas siguientes: ....
¿Tienen el mismo número de elementos **(A)** que **(B)**?	¿Tienen el mismo número de elementos **(C)** que **(D)**?

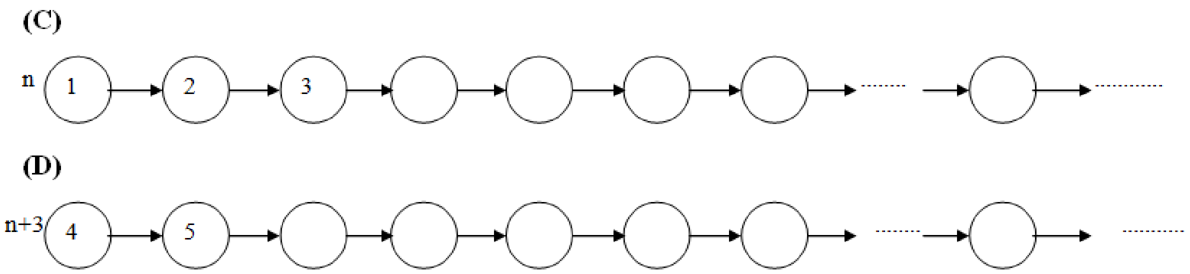
Situación 2

COMPARACIÓN DE SERIES NUMÉRICAS FINITAS.



¿Tienen el mismo número de elementos **(A)** que **(B)**?

COMPARACIÓN DE SERIES NUMÉRICAS INFINITAS.

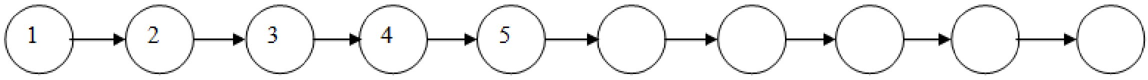


¿Tienen el mismo número de elementos **(C)** que **(D)**?

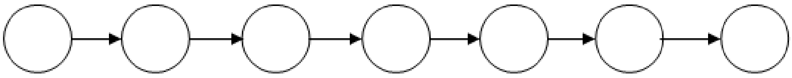
Situación 3

COMPARACIÓN DE SERIES NUMÉRICAS FINITAS.

n



n+3

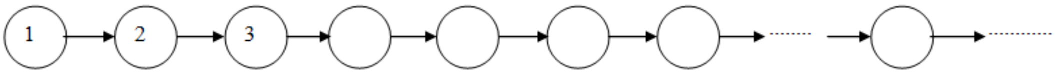


¿Tienen el mismo número de elementos **(A)** que **(B)**?

COMPARACIÓN DE SERIES NUMÉRICAS INFINITAS.

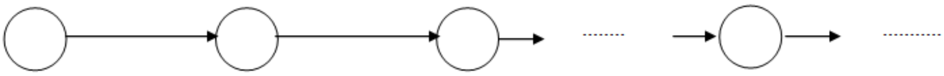
(C)

n



(D)

n+3



¿Tienen el mismo número de elementos **(C)** que **(D)**?

Situación 1'

ALUMNO: **CURSO:** **EDAD:**	
A) Sea el conjunto de números desde n= 1 a n=10. Representa cada elemento en las casillas siguientes: __ __ __ __ __ __ __ __ __ __	**C)** Sea el conjunto de números desde n= 1en adelante Representa cada elemento en las casillas siguientes: __ __ __ __ .... __ ....
B) Se el conjunto de números desde n= 1 a n=4.A cada número le sumamos 3. Representa , ahora n+ 6 en las casillas siguientes: __ __ __ __ __ __ __ __ __ __	**D)** Sea el conjunto de números desde n= 1 en adelante. A cada número le sumamos 3. Representa ahora n+6 cada elemento en las casillas siguientes: __ __ __ __ .... __ ....
¿Tienen el mismo número de elementos **(A)** que **(B)**?	¿Tienen el mismo número de elementos **(C)** que **(D)**?

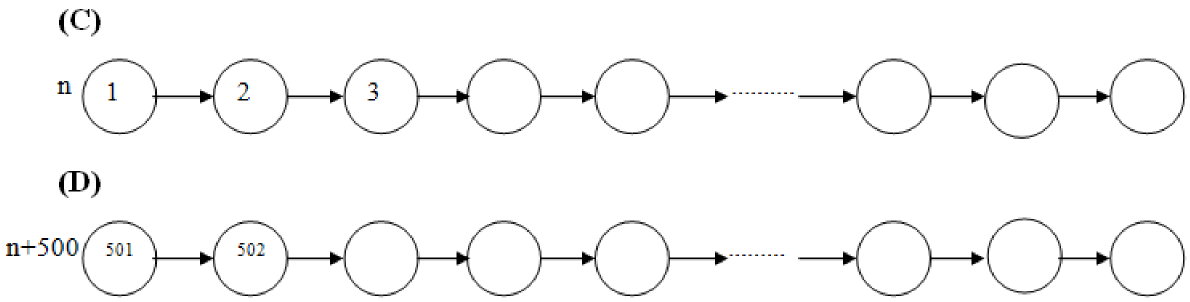
Fichas Nivel II

Situación 1

ALUMNO: **CURSO:** **EDAD:**	
(A) Sea el conjunto de números desde n= 1 a n=5000. Representa cada elemento en las casillas siguientes: __ __ __ __ __ .... __ __ __	**(C)** Sea n el conjunto de número desde n= 1 a n. Representa cada elemento en las casillas siguientes: __ __ __ __ .... __ ....
(B) Sea el conjunto de números desde n= 1 a n=4500. Representa , ahora n+500 en las casillas siguientes: __ __ __ __ __ .... __ __ __	**(D)** Sea n el conjunto de número desde n= 1 a n. Representa ahora n+500 cada elemento en las casillas siguientes: __ __ __ __ .... __ ....
¿Tienen el mismo número de elementos **(A)** que **(B)**?	¿Tienen el mismo número de elementos **(C)** que **(D)**?

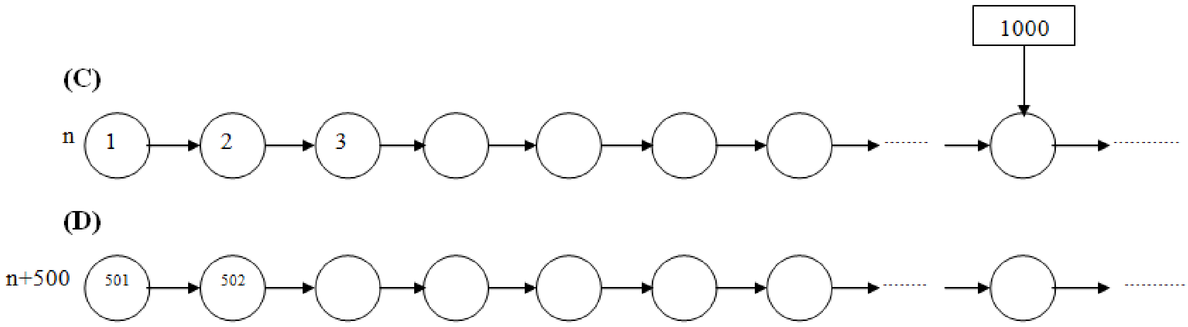
Situación 2

COMPARACIÓN DE SERIES NUMÉRICAS FINITAS.



¿Tienen el mismo número de elementos **(A)** que **(B)**?

COMPARACIÓN DE SERIES NUMÉRICAS INFINITAS....

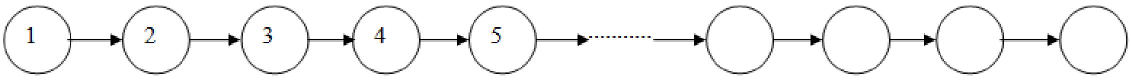


¿Tienen el mismo número de elementos **(C)** que **(D)**?

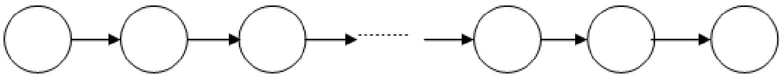
Situación 3

COMPARACIÓN DE SERIES NUMÉRICAS FINITAS.

n



n+500

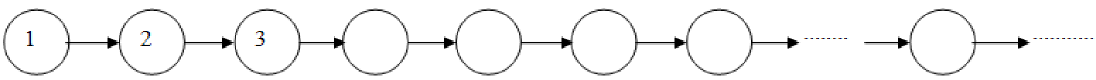


¿Tienen el mismo número de elementos **(A)** que **(B)**?

COMPARACIÓN DE SERIES NUMÉRICAS INFINITAS.

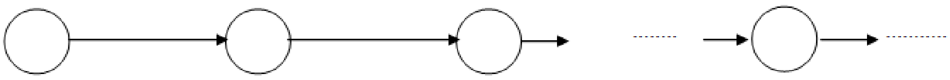
(C)

n



(D)

n+500



¿Tienen el mismo número de elementos **(C)** que **(D)**?

Situación 1'

ALUMNO: **CURSO:** **EDAD:**	
(A) Sea el conjunto de números desde n= 1 a n=5000. Representa cada elemento en las casillas siguientes: □□□□□ .... □□□	**(C)** Sea n el conjunto de número desde n= 1 a n. Representa cada elemento en las casillas siguientes: □□□□ .... □ ....
(B) Sea el conjunto de números desde n= 1 a n=4000. Representa , ahora n+1000 en las casillas siguientes: □□□□□ .... □□□	**(D)** Sea n el conjunto de número desde n= 1 a n. Representa ahora n+1000 cada elemento en las casillas siguientes: □□□□ .... □ ....
¿Tienen el mismo número de elementos **(A)** que **(B)**?	¿Tienen el mismo número de elementos **(C)** que **(D)**?

Fichas Nivel III

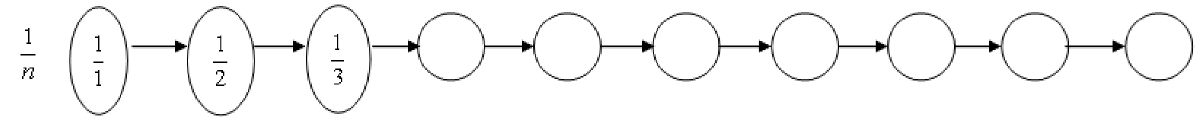
Situación 1

ALUMNO: **CURSO:** **EDAD:**	
A) Sea el conjunto de números desde n= 1 a n=10. A cada elemento le correspondemos su inversa es decir $\frac{1}{n}$. Representa cada elemento en las casillas siguientes: □□□□□□□□□□	**C)** Sea el conjunto de números desde n= 1en adelante. A cada elemento le correspondemos su inversa es decir $\frac{1}{n}$. Representa cada elemento en las casillas siguientes: □□□□ .... □ ....
B) Sea el conjunto de números desde n= 1 a n=7. A cada elemento le correspondemos su inversa más 3, es decir $\frac{1}{n+3}$. Representa ahora esos números en las casillas siguientes: □□□□□□□■■■	**D)** Sea el conjunto de números desde n= 1 en adelante. A cada elemento le correspondemos su inversa más 3, es decir $\frac{1}{n+3}$. Representa ahora esos números en las casillas siguientes: □□□□ .... □ ....
¿Tienen el mismo número de elementos **(A)** que **(B)**?	¿Tienen el mismo número de elementos **(C)** que **(D)**?

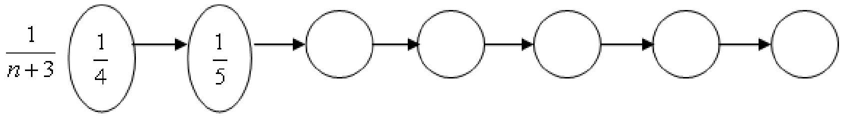
Situación 2

COMPARACION DE SERIES NUMERICAS FINITAS.

(A)



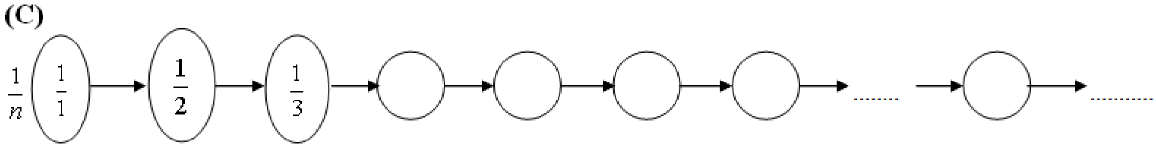
(B)



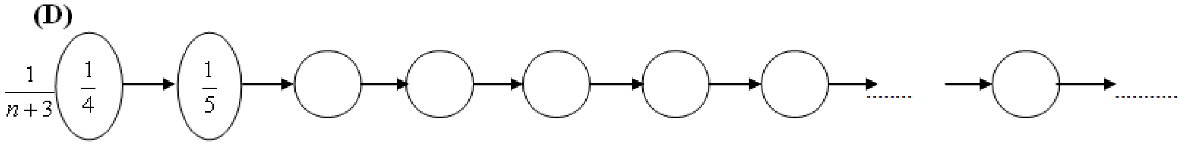
¿Tienen el mismo número de elementos **(A)** que **(B)**?

COMPARACIÓN DE SERIES NUMÉRICAS INFINITAS.

(C)



(D)

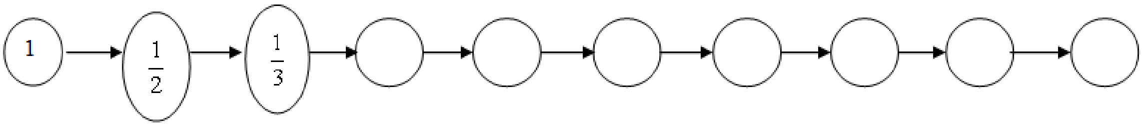


¿Tienen el mismo número de elementos **(C)** que **(D)**?

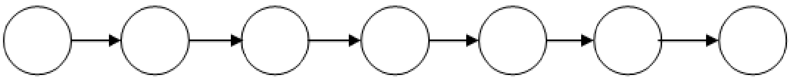
Situación 3

COMPARACIÓN DE SERIES NUMÉRICAS FINITAS.

$\frac{1}{n}$



$\frac{1}{n+3}$

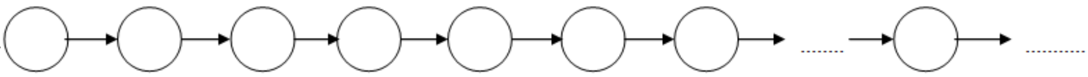


¿Tienen el mismo número de elementos **(A)** que **(B)**?

COMPARACIÓN DE SERIES NUMÉRICAS INFINITAS.

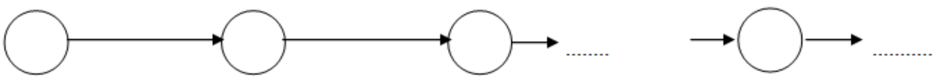
(C)

$\frac{1}{n}$



(D)

$\frac{1}{n+3}$



¿Tienen el mismo número de elementos **(C)** que **(D)**?

Situación 1’

ALUMNO: **CURSO:** **EDAD:**	
A) Sea el conjunto de números desde n= 1 a n=10. A cada elemento le correspondemos su inversa es decir $\frac{1}{n}$. Representa cada elemento en las casillas siguientes:	**C)** Sea el conjunto de números desde n= 1en adelante. A cada elemento le correspondemos su inversa es decir $\frac{1}{n}$. Representa cada elemento en las casillas siguientes: ....
B) Sea el conjunto de números desde n= 1 a n=4. A cada elemento le correspondemos su inversa más 6, es decir $\frac{1}{n+6}$. Representa, ahora esos números en las casillas siguientes:	**D)** Sea el conjunto de números desde n= 1 en adelante. A cada elemento le correspondemos su inversa más 6, es decir $\frac{1}{n+6}$. Representa ahora esos números en las casillas siguientes: ....
¿Tienen el mismo número de elementos **(A)** que **(B)**?	¿Tienen el mismo número de elementos **(C)** que **(D)**?

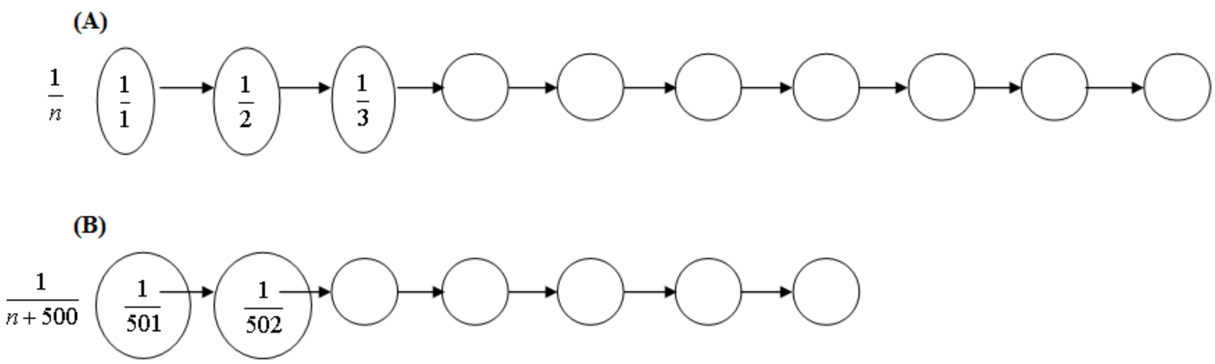
Fichas Nivel IV

Situación 1

ALUMNO: **CURSO:** **EDAD:**	
A) Sea el conjunto de números desde n = 1 a n =1000. A cada elemento le correspondemos su inversa es decir $\frac{1}{n}$. Representa cada elemento en las casillas siguientes:	**C)** Sea el conjunto de números desde n = 1en adelante. A cada elemento le correspondemos su inversa es decir $\frac{1}{n}$. Representa cada elemento en las casillas siguientes: ....
B) Sea el conjunto de números desde n = 1 a n =500. A cada elemento le correspondemos su inversa más 500, es decir $\frac{1}{n+500}$. Representa, ahora, esos números en las casillas siguientes:	**D)** Sea el conjunto de números desde n = 1 en adelante. A cada elemento le correspondemos su inversa más 500, es decir $\frac{1}{n+500}$. Representa ,ahora, esos números en las casillas siguientes: ....
¿Tienen el mismo número de elementos **(A)** que **(B)**?	¿Tienen el mismo número de elementos **(C)** que **(D)**?

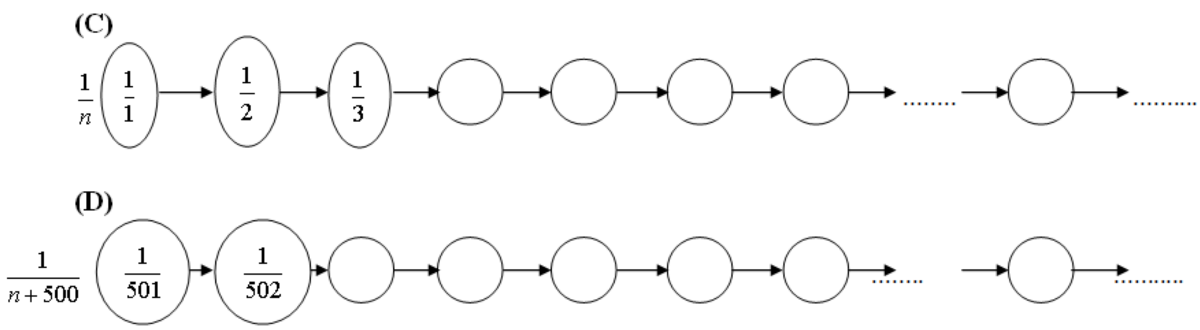
Situación 2

COMPARACIÓN DE SERIES NUMÉRICAS FINITAS.



¿Tienen el mismo número de elementos **(A)** que **(B)**?

COMPARACIÓN DE SERIES NUMÉRICAS INFINITAS.

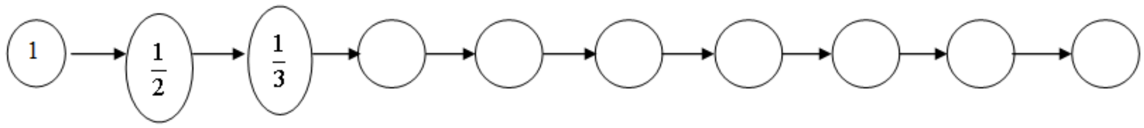


¿Tienen el mismo número de elementos **(C)** que **(D)**?

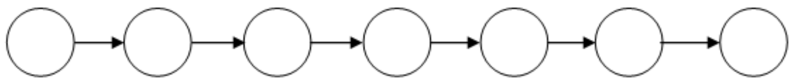
Situación 3

COMPARACIÓN DE SERIES NUMÉRICAS FINITAS.

$\frac{1}{n}$



$\frac{1}{n+500}$

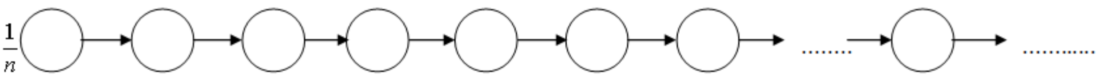


¿Tienen el mismo número de elementos **(A)** que **(B)**?

COMPARACIÓN DE SERIES NUMÉRICAS INFINITAS.

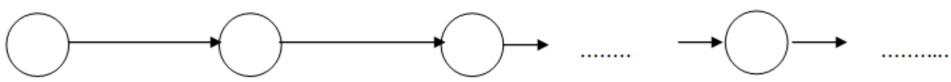
(C)

$\frac{1}{n}$



(D)

$\frac{1}{n+500}$



¿Tienen el mismo número de elementos **(C)** que **(D)**?

Situación 1'

ALUMNO: **CURSO:** **EDAD:**	
A) Sea el conjunto de números desde n = 1 a n =1000. A cada elemento le correspondemos su inversa es decir $\frac{1}{n}$. Representa cada elemento en las casillas siguientes: [ ][ ][ ][ ] .... [ ][ ][ ]	**C)** Sea el conjunto de números desde n = 1en adelante. A cada elemento le correspondemos su inversa es decir $\frac{1}{n}$. Representa cada elemento en las casillas siguientes: [ ][ ][ ][ ] .... [ ] ....
B) Sea el conjunto de números desde n = 1 a n =400. A cada elemento le correspondemos su inversa más 600, es decir $\frac{1}{n+600}$. Representa, ahora, esos números en las casillas siguientes: [ ][ ][ ][ ] .... [ ][ ][ ]	**D)** Sea el conjunto de números desde n = 1 en adelante. A cada elemento le correspondemos su inversa más 600, es decir $\frac{1}{n+600}$. Representa ,ahora, esos números en las casillas siguientes: [ ][ ][ ][ ] .... [ ] ....
¿Tienen el mismo número de elementos **(A)** que **(B)**?	¿Tienen el mismo número de elementos **(C)** que **(D)**?

Anexo IV.2 Transcripción de las Entrevistas

CURSO: 1 º E. S. O.

ENTREVISTA-1
Amaro C. L. 12 años

E: ¿Cómo te llamas?
A: Amaro C. L.
E: ¿Qué curso estás?
A: 1 de la ESO.
E: Y, ¿qué edad tienes?
A: 12
E: Vamos a empezar por la actividad 1, vamos a leerlo y lo vas a intentar solucionar. Vas contestar las dos primeras, las de aquí y luego estas dos de aquí.
(Las lee).
E: ¿Sabrías hacerlo?
A: Sí.
(Lo hace).
E: Bien, seguimos adelante, el apartado B.
(Lo lee).
A: ¿n+3?
E: Sí.
(Lo hace).
E: Intenta contestar a la pregunta.
A: ¿Elementos que son números?
E: Sí, casillas.
A: No.
E: Y porque crees que no.
A: Porque este llega a 10 y este a 7.
E: Apúntalo. Muy bien, vamos a pasar a estas dos de aquí. Es muy parecido.
(Lo lee.)
A: ¿Los puntos suspensivos? Son 5, este 6, ¿no?
E: Los puntos suspensivos significan que siguen en adelante.
A: 5, 6,7…
E: Seguirá, ¿verdad? ¿Hasta dónde?
A: Seguirá hasta aquí. Bueno, a ver los números, son infinitos, le faltarían casillas.
E: Vamos a contestar el apartado D.
(Lo lee.)
E: Es parecido al anterior, ¿verdad?
A: Sí.
(Lo hace.)
E: ¿Seguiría?
A: Sí, seguiría.
E: Bueno, vamos a ver, ¿tiene el mismo número de elementos C que D?
A: Sí.
E: ¿Porqué?
A: Porque habría más casillas y aquí más casillas.
E: Sí, pero las casillas siguen.
A: Serían los mismos. Tienen los mismos elementos.
E: ¿Aunque este empieza en 1 y este en 4?
A: Sí, los números son infinitos.
E: Muy bien, pon el nombre, Amaro, y pasemos a éste. Es muy parecido, ¿verdad? Aparecen puntos suspensivos que significarán algo. Venga ponlo.
(Lo pone).
E: Perfecto, veamos el segundo.
(Lo hace).
E: Muy bien, ¿podrías decirme lo que has puesto?
A: 501, 502, 503,504 y 505, y 4998,4999 y 5000.
E: Muy bien. Intenta responder.
A: No tienen los mismos números de elementos.
E: ¿Crees que estos puntos suspensivos y estos serán iguales?
A: No, esta va de 5 al 4998 y éste va del 505 al 4998.
E: Perfecto. Vale, pasemos al C y D.
A: ¿n?
E: Sí, ya no te digo hasta 5000. Esta n es de uno en adelante.
A: Si no termina, es el infinito.
A: Vamos a ver, n en teoría significa uno, ¿no?
E: Sí, pero en adelante.
(Lo hace).
A: 1, 2, 3,4, y 5537.
E: Pasamos a D.
(Lo hace).
E: ¿Necesita calculadora?
A: No.
E: Los puntos suspensivos, ¿los ve claro?, ¿qué significan?
A: Que siguen.
E: Intenta contestar a la pregunta esta.
(Lo escribe).
E: ¿Puedes decirlo?
A: Sí, porque son infinito. Hasta que uno quiera prolongarlo.
E: Muy bien.
E: Pasamos a esta actividad. A ver qué tal.
(Lo lee).
E: ¿Sabrías hacerlo?
A: Sí.
(Lo hace).
E: ¿Sabrías hacerlo? El B.
A: Sí, invirtiéndolo, para uno es 10.
(Le indico de nuevo).
E: Para 1 sería 1 partido 1 que es 1. Pero como n es igual a 1 para dos también es 1, y para 3 también es 1.
E: Espera, pasemos a otra actividad.
Se lo indico.
E: Mira para 1 es 1 partido 1 que es 1.

A: 1
E: para 2 es uno partido 2.
A: 0.5
E: Etc. Ahora dime, ¿qué será para 3?
A: 0 con 3,3, 3, 3...
E: Sí, pero ponlo como decimal.
A: Entonces, un cuarto, un quinto…
(Hace también el B).
E: Contesta.
A: ¿Tienen el mismo número de elementos? No.
E: Vale, muy bien. Si te pongo ahora esta fila, ¿lo sabrías hacer?
A: Sería igual.
(Lo hace, cuando llega a los puntos suspensivos, la siguiente casilla, pone 1 partido por 1667).
E: Pon ahora la D.
(Lo hace).
E: Pon la que corresponda. ¿Tienen el mismo número de elementos?
A: Sí, porque son infinitos. Llegará hasta donde quieras.
E: Entonces, si yo te pongo este.
(Lo hace).
E: Pasemos a este B.
A: No tienen los mismos elementos.
E: Vamos a C.
(Lo lee y lo hace. Se inventa un número alto, 1 partido por 10834.)
E: ¿Podríamos seguir, no?
A: Sí.
E: El D.
(Lo lee, lo hace incluso el número inventado anterior, le hace corresponder el 1 partido 10840)
E: Y ahora, contesta.
A: Sí, porque son infinitos.
E: Bien, pensemos un poco más. Fíjate, 1 partido 1 es 1; 1 partido 2 es 0,5… ¿qué pasaría si aumentamos el denominador?
A: Que tenemos una fracción, pero el denominador varía y sería más pequeño.
E: ¿Acabaría en cero?
A: No, imposible.
E: Pensemos por un momento que se hace 0.La respuesta, ¿sería la misma? ¿Tendría el mismo número de elementos si acaban?
(Duda).
E: Se haría cero C antes que D.
A: Sí, pero como eso no pasa: no tienen los mismos elementos.
E: Bien pasemos a este último.
(Lo lee y lo hace).
A: Es lo mismo, sólo que ahora hay que sumarle 500 a la inversa.
E: Eso es. Pasa al C y D.
(Lo lee y lo hace. De nuevo pone en la casilla última un número grande, 1 partido 15375)
E: Ahora la pregunta.
A: Sigo diciendo que son los mismos porque son infinitos.
E: Pues muy bien Amaro. Muchas gracias.

ENTREVISTA-2
Cristina N., 12 años.

E: ¿Cómo te llamas?
C: Cristina N.
E: ¿Qué curso estás?
C: 1º de la ESO.
E: Y, ¿qué edad tienes?
C: 12 años.
E: Hagamos esta actividad
(Lee).
E: ¿Sabrías hacerla?
C: No.
E: Piénsatelo.
C: ¿Son los números, 1, 2, 3...?
E: Muy bien. Veamos el apartado B.
(Lo lee).
E: ¿Qué tendríamos que hacer ahora?
C: Sumarle 3, pero esto es que…, no.
E: Te rindes muy pronto Cristina. Piénsatelo.
C: No.
E: No pasa nada, pasemos a esta actividad. Mira el uno; hay que sumarle 3, luego 4, lo ponemos en la primera casilla, etc. ¿Podrías seguir?
C: Sí.
(Lo hace).
E: Intenta contestar a la pregunta.
C: Todo no.
E: ¿Por qué?
C: Aquí está desde 1 a10 y éste del 4 al 10.
E: Vamos a ver ahora éste.
(Lo contesta).
E: ¿Tienen el mismo número de elementos aquí que aquí?
C: No. Porque el 1, 2 y 3 no están
E: ¿Aunque sigan adelante?
C: No
E: ¿Cuál tiene más números?
C: El de arriba.
E: La entrevista ya ha acabado
C: ¡Ah! Vale.

ENTREVISTA-3
Elisa S., 12 años.

E: ¿Cómo te llamas?
El: Elisa S.
E: ¿Qué curso estás?
El: 1º de la ESO.

E: Y, ¿qué edad tienes?
El: 11 años pero cumplo 12 el mes que viene.
E: Vamos a empezar por la actividad 1, vamos a leerla y vas a intentar solucionarla. Vas a contestar las dos primeras, las de aquí, y luego estas dos de aquí.
(Lo lee).
E: ¿Sabrías hacerlo?
El: Que ponga los números del 1 al 10, ¿no?
E: Eso es, en cada casilla.
(Lo hace).
E: Ahora el B.
(Lo lee).
El: ¿Sumándole 3 a cada uno de éstos?
E: Sí.
El: 1 más 3, 4; 1 más 4, 5; 7 más 3 , 10...
E: ¿Ya estás?
El: No se sigue, ¿no?
E: Pero estás sombrado, será por algo.
El: Sí.
E: Lee de nuevo el enunciado.
El: Dice hasta el 7.
E: Eso es, no había que llegar hasta 10, por eso te lo pongo sombreado. Bien, contesta la pregunta que tienes al final.
(Lo lee).
El: No, ¿no?
E: ¿Quién tiene más?
El: El de arriba.
E: Muy bien, no ves que es fácil.
El: Sí.
E: Venga el C.
(Lo lee, empieza la serie en vez de por el 1 por el 2)
E: ¿El 2 aquí?
El: Sí, ya el 1 está aquí.
(Refiriéndose a n =1)
E: No, debes de ponerlo como antes pusiste, desde 1.
(Lo pone y sigue, se para en los puntos suspensivos).
E: ¿Qué significa estos puntos?
El: Que vendría el 5 aquí.
E: El 5 y más números. Pero no lo vamos a poner todos. Por eso ponemos puntos suspensivos. Pero podrías poner uno aquí mayor.
El: ¿El 5?
E: No el 5 estaría más cerca en esos puntos.
El: El 15, ¿no?
E: Por ejemplo...Ahora el D.
(Lo lee y lo hace, incluso el correspondiente al 15).
E: Bien, ahora la pregunta.
(Lo lee).
El: No tiene el mismo número de elementos. (Piensa) .¡Espera!, esto tiene truco. Sí, tiene el mismo número.
E: ¿Seguro?
El: Sí, seguro.
E: Bien pasemos a esta actividad, es más complicada.
(Lo lee).
El: Es lo mismo, poner del 1 al 5000.
E: Sí, pero no lo vas a poner todos. Pon los primeros y los últimos. Los puntos suspensivos significan que están los demás en medio.
El: 1, 2, 3, 4, 5, y 5000, 4990...
E: ¿4990? ¿Es el número que está antes de 5000?
El: ¡Ah, no! 4999 y el 4998.
E: Eso es. Ahora el B.
(Lo lee).
El: 1 más 500, 501, 2 más 500, 502…
E: Los últimos.
El: Será 5000, 4500, 4000.
E: Fíjate bien, que estás muy nerviosa. El último es 4500 más 500 que es 5000, como tú has dicho. El anterior de 4500...
El: 4499.
E: Eso, y ahora habrá que sumarle 500, ¿no?
El: 4999 y ya el otro 4998.
E: Eso es, venga la pregunta.
(Lo lee).
El: Sí, tienen los mismos.
E: ¿Tú crees?
El: Sí, ¿no?
E: ¿Cuánto tiene el A?
El: 8
E: ¿Y todos los que faltan en los puntos suspensivos?
El: ¡Ah! 5000. ¡Ya, ya! No tienen el mismo número. El A tiene más.
E: Vale, el C.
(Lo lee, lo hace, la casilla vacía que sigue a los puntos suspensivos pone 20).
E: Eso, ahora el D.
(Lo lee).
El: Igual que antes, 1 más 500: 501… y 20 más 500: 520.
E: La pregunta.
El: Sí, tienen el mismo número. Es igual al anterior.
(Cuenta las casillas).
El: 5 aquí y 5 aquí.
E: Sí, pero esto sigue, aquí y aquí.
El: Sí, pero tienen iguales.
E: Aunque sigan.
El: Vale, vamos a esta actividad.
(Lo lee).
El: ¿1 Partido n?
E: Sí, la inversa. ¿Sabe lo que te pido?
El: Pongo los números debajo, 1, 1 partido 2: ½…
E: Eso es. El siguiente.
(Lo lee).
El: Sumándole 3.
E: Sí. Muy parecido al primero que hicimos, pero a la inversa.
(Lo hace.
E: Contesta la pregunta.
El: No tienen el mismo número de elementos. Éste tiene más (el A).
E: Bien, el C.
(Lo lee y empieza a hacerlo. Para en la casilla que está después de los puntos suspensivos).
El: ¿Aquí qué pongo?
E: El que tú veas conveniente.
El: El 1 partido 20.

E: Bien, el D.
(Lo lee y lo hace, incluso el correspondiente al 1 partido 20 que es el 1 partido 23).
E: Ahora la pregunta.
El: No, tienen más el D porque llega a 1 partido 23 y el otro a 1 partido 20. No, espera, tiene más el C. Sí, el C.
E: Bueno, vamos hacer la misma actividad, pero de otra forma distinta. Elisa te voy a preguntar lo mismo, pero te voy ayudar más.
(Le voy indicando todos los pasos a seguir para construir las series tanto las finita e infinitas aunque las hizo correctamente. Le voy señalando la correspondencias entres las series A y C, con B y D que son aquellas que hemos quitado términos)
E: La pregunta de nuevo en ésta (*señalo la serie infinita):* ¿Tienen el mismo número de elementos?
El: No, la C tiene más que ésta.
E: Muy bien Elisa, muchas gracias.

ENTREVISTA-4
Pablo C., 12 años.

E: Bien, ¿cómo te llamas?
P: Pablo C.
E: ¿Y en qué curso estás?
P: En 1º.
E: ¿Y tu edad?
P: 12 años.
E: Muy bien, vamos hacer esta actividad, primero leemos la A y la B, y contestamos. Luego C y D.
(Lo lee).
E: ¿Sabrías hacerlo?
P: Eso significa estos, del 1 al 10.
(Lo hace).
E: Muy bien, ahora el segundo, el B.
(Lo lee).
E: Es lo mismo, pero sumándole 3.
P: ¿A cada uno?
E: Sí.
(Lo hace).
E: Muy bien, la pregunta.
(La lee)
P: No, el A tiene más.
E: Ahora el C.
(Lo lee).
E: No te dice hasta 10, sino en adelante.
P: Pues serían 1, 2, 3, 4.
E: Y los puntos suspensivos significan que siguen. Aquí pon uno.
P: El 30.
E: Y estos puntos suspensivos significan que siguen, ¿pararían?
P: No.
E: Ahora el D.
(Lo lee).
E: Lo mismo que antes.
P: Sí.
(Lo hace).
E: La pregunta.
P: ¿El mismo número?
E: Sí, recuerda que siguen adelante.
P: Sí.
E: Vamos bien, ahora este.
(Lo lee y lo hace).
P: Y aquí serían 5000, 4999, 4998.
E: Perfecto. Estupendo, Pablo. Ahora el B.
(Lo lee).
E: Hay que sumarle 500.
P: ¿A cada número?
E: Sí.
(Lo hace).
E: ¿Y los tres últimos?
P: Habría que sumarle también 500.
E: Sí.
P: Pues sería 5000 y el anterior también.
E: Sí, es fácil, Pablo, va de uno en uno.
(Lo hace.)
E: La pregunta, Pablo.
(La lee).
P: Sí.
E: ¿Cuánto tiene A?
P: 5000.
E: ¿Y B?
P: 5000, ¡Ah! No tiene...
E: Empieza en 501 y termina en 5000.
P: 4500.
E: Ahora el C.
(Lo lee y lo hace.)
P: Aquí pongo uno cualquiera, el 20.
E: Ahora el D.
(Lo lee).
P: Lo mismo.
(Lo hace).
P: Y este 520.
E: Bien, la pregunta.
(La lee).
P: No, C tiene más.
E: ¿Cuántos más?
P: Bueno, no, tienen igual porque siguen adelante.
E: Muy bien. Ahora éste.
(Lo lee).
P: ¿n que significa?
E: El número que vamos a tener que poner.
P: ¿Su inversa? No sé.
E: Sí, hay que ponerlo debajo de1.
(No lo hace).
E: No te preocupes. Vamos hacerlo de esta forma.
(Se lo voy indicando)
E: Sigue tú.
(Lo hace).
E: ¿Tienen el mismo número de elementos?
P: No, A tiene más.
E: Bien, ahora C. Ahora es en adelante, no hasta 10 como antes.
(Lo hace, en la última casilla pone 1 partido 10)
E: El D, lo mismo, pero sumándole 3.

(Lo hace).
P: Y este sería 1 partido 13.
E: Bien, la pregunta.
P: Sí, tienen el mismo.
E: Ahora de esta forma.
(Hace A y B. Su respuesta es positiva)
E: El C y D.
P: Es lo mismo.
E: Sí.
(Lo hace y su respuesta es positiva).
E: Bien, pasemos a la misma actividad, pero con el formato inicial. Hazlo tú Pablo.
(Lo lee).
P: Es lo mismo.
E: Sí, pero sin circulitos, como estaba antes, al principio.
(Lo hace).
E: Ahora el B.
(Lo lee).
P: Ahora hay que sumarle 6 a su inversa.
E: Sí.
(Lo hace).
E: La pregunta.
(La lee).
P: No, el A tiene más.
E: Bien, el C.
(Lo lee).
P: Esto es en adelante.
E: Sí.
(Lo hace en la última casilla, pone de nuevo 1 partido 10).
E: Bien, el D.
(Lo lee).
P: Hay que sumarle 6, como antes.
E: Sí.
(Lo hace).
E: Y la pregunta es la misma.
P: Sí, tienen. Siguen adelante.
E: Muy bien Pablo, eres muy listo. Pasemos a la última actividad.
(La lee).
E: Bien, ¿no?
P: Sí.
(Lo hace).
E: Y los tres últimos serían...
P: 1 partido 1000, 1 partido 999 y 1 partido 998.
E: Bien, al B.
(Lo lee y lo hace; pone en los últimos términos 1 partido 1500, 1 partido 1499 y 1 partido 1498).
E: Lee bien Pablo, los tres últimos están mal.
P: Es verdad, serían 1 partido 1000, 1 partido 999 y 1 partido 998.
E: Eso es. La pregunta.
(La lee).
P: No, El A sigue teniendo más.
E: Bien, el C.
(Lo lee y lo hace. En la última casilla escribe 1 partido 20).
E: El D.
(Lo lee).
P: Sumándole 500: 1 partido 501, 1 partido 502, 1 partido 503 y 1 partido 504. Y éste 1 partido 520.
E: Bien esto seguiría. La pregunta.
(La lee).
P: Sí, tienen el mismo número porque siguen adelante.
E: Muy bien Pablo. Ya hemos terminado.

ENTREVISTA-5
Teresa P., 12 años.

E: Bien, ¿cómo te llamas?
T: Teresa P.
E: ¿Y en qué curso estás?
T: En 1º.
E: ¿Y tu edad?
T: 12 años.
E: Muy bien, vamos hacer esta actividad, primero leemos la A y la B, y contesta. Luego C y D.
(Lo lee).
E: ¿Sabrías hacerlo?
T: ¿Numerarlos?
E: Eso, perfecto.
(Lo hace).
E: Siguiente, el B.
(Lo lee).
T: Habrá que sumarle 3.
E: Sí.
(Lo hace).
E: ¿Tienes qué seguir? Has terminado en 10.
T: Solo, porque es hasta 7.
E: Porque 7 más 3 es 10 y es el último.
T: Sí.
E: La pregunta.
(La lee).
T: No.
E: ¿Cuál tiene más?
T: El A.
E: ¿Cuánto más?
T: 3 más.
E: Bien, apartado C.
(Lo lee).
E: ¿Sabrías hacerlo?
T: Numerarlo.
E: Sí.
(Lo hace).
E: ¿Ahí sería el 6?
T: Sí.
E: ¿Tú, por qué crees que te pongo estos puntos suspensivos?
T: Que aquí se pondría el 5.
E: ¿5 o más números?
T: No sé.
(Lo sigue haciendo, escribe en la última casilla el 6)
E: No te preocupes. Significa que sigue los números, pero no lo vas a poner todos. El D.
(Lo lee).
T: Habrá que sumarle 3.

E: Eso es.
(Lo hace).
E: ¿Y el que corresponde al 6 es el 10?
T: No sé.
E: Tú pones en la primera casilla el 4.
T: Sí, porque es 1 más 3.
E: Y el 5 en la segunda.
T: Porque es 2 más 3.
E: Y éste pones 10.
T: Porque 6 más 3 son 10.
E: Vamos hacerlo de otra forma Tere. No te preocupes.
(Le indico la actividad en otro formato. Le explico cómo se va construyendo la serie numérica a partir del término general. En las series finitas, como lo hizo bien, le digo que no lo haga de nuevo)
E: ¿Podrías seguir tú?
T: Sí.
(Lo va haciendo).
E: Esto sigue adelante. Yo te pongo el 100 y de nuevo sigue adelante. El segundo es igual, pero sumándole 3, es decir, 1 más 3, 4; si es 2, 5. Sigue tú.
(Lo hace).
E: Y seguirá adelante, el 100 le corresponderá...
T: 103.
E: Y de nuevo seguirá adelante. ¿Tienen el mismo número de elementos?
T: Sí.
E: Vale. Ahora más complicado. A ver si puedes hacer éste de aquí.
T: Es el mismo.
(Lo hace).
E: La pregunta es la misma.
T: En estos dos son diferentes, pero en estos dos no.
E: Bien, ahora esta actividad. Igual. La forma es la misma que la primera actividad.
(Lo lee).
T: Vale, enumerarlos.
E: Sí.
(Lo hace).
T: En este hay que sumarle 6.
E: Eso es.
(Lo hace).
E: La pregunta.
T: No tienen, A tiene más que B.
E: Bien, el C.
(Lo lee y lo hace, sin dificultad)
T: ¿Pongo en este 100?
E: El número que quieras. Venga ahora el D.
T: ¿Sumarle 6?
E: Sí.
(Lo hace).
T: Tienen el mismo número de elementos.
E: Muy bien Tere. Ahora éste, un poco más complicado. A ver si puedes hacerlo.
(Lo lee).
E: Fácil, ¿no?
(Lo hace).
E: ¿Y los 3 últimos?
T: Me he equivocado.
(Escribe 5003, 5004, 5005)
E: No te preocupes ponlos abajo.
(Pone 5000, 4009, 4008)
E: Antes de 5000, ¿cuál sería?
T: Me he equivocado otra vez.
(Lo hace bien).
E: Ahora el B.
(Lo lee).
E: El primero sería...
T: 1 más 500: 501.
(Lo va haciendo).
E: Y los 3 últimos serían. Piensa en el último.
T: Sería 4500.
E: Pero habrá que sumarle 500.
T: 5000.
E: Y los anteriores. Si te fijas en los tres primeros podría hacer los tres últimos.
(Lo hace)
E: La pregunta.
T: Sí tienen.
E: ¿Cuánto tiene A?
T: 8.
E: No, los puntos suspensivos es que no vas a poner todos. Sería desde 1al...
T: 5000.
E: y éste sería, el primero...
T: 501.
E: Y el último…
T: 5000. Éste tendría menos
E: El siguiente.
(Lo lee).
E: ¿Podrías hacerlo de esta forma?
T: Sí.
(Lo hace).
E: Y en esta casilla pon un número alto, si quieres.
T: El 200.
E: Lo mismo de antes, no pondríamos todo porque no cabrían. Venga el siguiente.
(Lo lee).
T: Sería, 501, 502… y éste sería 500 más 200, 700.
E: La pregunta. Te recuerdo que esto sigue adelante.
T: Sí, sí tienen.
E: Pasemos ahora a éste. Un poco más complicado.
(Lo lee. Después de un tiempo sin hacer nada).
E: No te preocupes. Vamos hacerlo así, de esta forma.
(Se lo indico).
E: Sigue tú.
T: Sí.
(Lo hace).
E: Muy bien. El segundo apartado es igual, sumándole 3. ¿Seguirías tú?
T: Sí.
(Lo hace)
E: ¿Tienen el mismo número de elementos?
T: No.
E: Muy bien, ahora C.
(Lo lee y lo hace)
E: Y en esta última casilla pon un número.
T: El 1 partido 4500.
E: Pues el de abajo es lo mismo, sumándole 3.
T: Sí.

(Lo lee).
E: ¿Podrías hacerlo tú?
(Lo hace).
E: Y para éste sería...
T: 1 partido 4503.
E: La pregunta.
T: No.
E: ¿Cuál tendría más?
T: El de arriba tiene más.
E: ¿Cuánto más?
T: Pues...
E: Tú crees que tiene más
T: Sí.
E: Bien Tere, ya hemos terminado.

CURSO: 2 º E. S. O.

ENTREVISTA-6
Patricia R., 13 años.

E: Bien, ¿cómo te llamas?
P: Patricia.
E: ¿Y en qué curso estás?
P: En 2º.
E: ¿Y tu edad?
P: 13 años.
E: Vamos a empezar con esta ficha, primero leemos la A y la B, y contesta. Luego C y D. Aquí tienes un boli.
(Lo lee).
E: ¿Puedes hacerlo?
P: Bueno. ¿Lo tengo que marcar?
E: Sí.
P: Primero el 1, luego el 2... y el 10.
E: Venga el B.
P: ¿Y éstos que están marcados?
E: Están sombreados por algo.
P: Sí.
(Lo lee).
E: ¿Qué tal?
P: Lo leo otra vez.
(No lo hace).
E: No te preocupes, Patricia, te lo pongo de esta forma.
(Se lo voy indicando. Lo hace, incluso el aparatado A que ya lo había hecho bien antes)
E: La pregunta Patricia: ¿Tienen los mismos números de elementos?
P: No.
E: ¿Quién tiene más?
P: A.
E: ¿Y el B?
P: 7.
E: De acuerdo.
P: Sí.
E: Vamos a leer la C y hacerla, y sino sale con este formato, vamos a la plantilla ésta.
(Lo lee)
E: ¿Lo entiendes?
P: No.
E: Vamos a la plantilla otra.
(Se lo voy indicando. Continúa haciendo)
E: ¿Puedes poner alguno?
P: El 20.
E: Los puntos suspensivos, ¿qué significan?
P: Que siguen.
E: ¿Pararía?
P: No.
E: De acuerdo, pasamos al segundo apartado. Lo mismo pero sumando 3.
P: Sí, es lo mismo.
(Lo hace).
E: ¿Y para 20?
P: 23.
E: Y así lo haríamos siempre. Venga responde.
P: Sí.
E: Sí, tienen el mismo número de elementos, aunque este empiece en 1 y éste en 4.
P: Sí.
E: Pasamos a la siguiente actividad. Ahora no te ayudaré. Inténtalo. Las preguntas son las mismas.
P: ¿Es lo mismo?
E: Sí.
(Lo hace. Pone los mismos datos).
E: Vale, ahora pasemos a esta actividad, muy parecida a la primera.
(Lo lee).
P: Lo mismo, ¿no?
E: Eso es.
(Lo hace).
E: Ahora la B, que es algo diferente.
(Lo lee).
P: Ahora hay que sumar 6.
E: Sí, antes había que sumar 3 y ahora 6.
(Lo hace)
E: La pregunta.
P: No, éste tiene 10 y éste 4.
E: Eso es, ahora C.
(Lo lee y lo hace sin problema. En la casilla después de los puntos suspensivos pone 40).
E: Bien, ahora el D.
(Lo lee, lo hace. Incluso pone el correspondiente al número puesto anteriormente, 40 más 6, 46)
E: Ahora la pregunta.
P: Sí, tienen los mismos. Ya lo contesté antes.
E: Vamos hacer otro. Lo vamos a intentar hacer con este formato.
(Lo lee).
E: ¿Difícil?
P: Sí.
E: Si prefieres la plantilla anterior.
P: Sí.
(Se lo voy indicando)
E: 1, 2,3, sigue tú.

(Lo hace).
E: ¿Cuál sería el anterior de 5000?
P: 4999.
E: ¿Y el anterior?
P: 1998.
E: Exactamente, ahora B.
(Le indico los primeros: 501,502).
P: 503, 504, 505.
E: Y aquí, habría algún número, te dice hasta 4500, ¿Cuál crees que será el último?
P: 4500.
E: Pero estamos sumando 500.
P: 5000.
E: ¿Cuál será el anterior?
P: 4500.
E: No. Se va pasando en unidad, entonces...
P: 4999,4998.
E: ¿Tienen el mismo número de elementos?
P: Sí.
E: ¿Cuánto tiene C?
P: 1, 2, 3,4,...
(Lo va contando)
E: ¿Lo vas a contar todos?
P: ¡Ah!, no sé. 8.
E: ¿Y los puntos suspensivos?
P: ¡Ah!, es verdad. 5000.
E: Y el de abajo (B).
P: 5000.
E: Empieza en...
P: 501.
E: Y termina en...
P: 5000.
E: Entonces...
P: Tiene 4500.
E: ¿Cuál tiene más?
P: El A.
E: Vale. Vamos hacer ahora el C.
(Lo lee).
E: ¿Sabrías hacerlo ahora aquí?
P: A ver.
E: ¿Puedes hacerlo?
(Lo lee).
E: Es parecido.
(Piensa y tarda mucho).
E: No te preocupes, pasemos al formato este.
(Se lo voy indicando).
E: 1,2, 3, sigue tú.
P: 4, 5.
E: En adelante, yo te pongo aquí por ejemplo el 1000. Para el D, lo mismo sumando 500.
(Lo hace)
P: 501, 502,503, 504.
E: Y el 1000 sería.
P: 1000.
E: ¿1000 sería? ¿Qué le vamos haciendo a estos números?
P: 5000.
E: ¿5000?
P: No, 1500.
E: Eso es, la pregunta.
P: No.
E: ¿Cuál tiene más?
P: C.
E: ¿Por qué?
P: En el C hemos llegado a 1000 y en el D hasta 1500.
E: Pero claro, esto no termina ahí.
P: No son iguales.
E: Gracias Patricia, ya hemos terminado.

ENTREVISTA-7
Bárbara G., 13 años.

E: Bien, ¿cómo te llamas?
B: Bárbara G.
E: ¿Y en qué curso estás?
B: En 2º.
E: ¿Y tu edad?
B: 13 años.
E: Empieza con esta actividad, primero leemos la A y la B, y contesta. Luego C y D.
B: ¿Lo leo?
E: Sí, lo lees.
(Lo lee.)
E: ¿Sabrías hacerlo?
B: No lo entiendo.
E: Léelo de nuevo.
B: Los distintos números que hay, ¿del 1 al 10 ó del 0 al 10?
E: Del 1.
(Lo hace).
E: La siguiente.
(Lo lee).
B: ¿Del 1 al 7?
E: Sí.
B: ¿El 3?
E: Léelo de nuevo.
(Lo lee).
B: A 1 le sumo 3, 4...
E: Bien, ¿por qué paras aquí?
B: Porque decía hasta el número 7.
E: La pregunta.
B: No, el A tiene 3 más que el B.
E: Intentemos ahora hacer el C.
(Lo lee).
B: ¿"Sea" que significa?
E: Que es. ¿Hay mucha diferencia entre este y este?
B: Empieza por el 1.
E: Los puntos suspensivos que significan.
B: Que siguen.1, 2, 3, 4.
E: ¿Y los puntos suspensivos éstos?
B: Que van al infinito.
E: ¿Al infinito?
B: Sí.
E: Esta casilla no pones el cinco porque tienes puntos suspensivos.
(Pone el 10).

E: Veamos el apartado D.
(Lo lee).
B: 4, 5, 6,7 y 13.
E: Lee la pregunta.
B: No.
E: ¿Tienen el mismo número de elementos?
B: No.
E: Me dijiste que este va al infinito. ¿Y este hasta dónde?
B: Hasta el infinito.
E: ¿Y dices que son diferentes?
B: Pero suma 3 y se saltan algunos, ¿no? En el D, no está el 1, 2, 3.
E: Entonces dirás que no tienen el mismo número de elementos.
(Duda).
E: Vamos a éste.
(Se lo voy indicando. Aunque lo hizo bien, le señalo las correspondencias que existen entre A y B ; C y D)
E: Sigue tú.
(Lo hace. La primera pregunta la contesta bien).
E: Ahora este. Lo mismo. Pero fíjate, la fila de abajo se va construyendo con la de arriba.
P: Sí, es lo mismo.
E: Y si este ponemos, por ejemplo, 1000. ¿Cuál le corresponderá a éste?
P: 1003.
E: Eso es. Y esto sigue. ¿Crees tú que tienen el mismo número de elementos?
P: Yo sigo pensando que sí.
E: Por tanto no ves ninguna diferencia entre A-B Y C-D.
B: No.
E: Muy bien, Bárbara, muchas gracias.

ENTREVISTA-8
Inmaculada D., 13 años.

E: Bien, ¿cómo te llamas?
In: Inmaculada D.
E: ¿Y en qué curso estás?
In: En 2º.
E: ¿Y tu edad?
In: 13 años.
E: Empieza con esta actividad, primero leemos la A y la B, y contesta. Luego C y D.
(Lo lee).
E: ¿Sabrías hacerlo?
In: Sí, poner los números. De 1 al 10.
E: Eso es.
In: ¿Lo pongo?
E: Sí, claro.
(Lo hace).
E: Fácil, ¿no? Ahora el B.
(Lo lee).
E: ¿Lo entiendes?
In: No.
E: Es lo mismo, pero sumándole 3.
In: Sumándole 3, ¿a quién?
E: Léelo bien, pone de 1 a 7.
(Pone 1, 2 en vez de sumarle a estos 3)
E: No, sumándole 3 a estos.
In: Vale, 4, 5, 6...10
E: ¿Tienes que seguir?
In: Pone hasta el 7.
E: Eso es. La pregunta.
(Lo lee).
In: No.
E: ¿Cuál tiene más?
In: El A.
E: Bien, pasemos al C.
(Lo lee).
In: Igual que antes. 1, 2, 3, 4
E: los puntos suspensivos indican que siguen. No lo vamos a poner todo. Pero en esta casilla podrías poner uno tú.
In: ¿Cualquiera?
E: Sí, uno alto.
In: El 80.
E: Bien, sigue con el D.
(Lo lee).
In: Pues igual, hay que sumarle 3. 1 más 3, 4… y aquí pongo 70.
E: ¿No le corresponderá el que pusiste aquí más 3?
In: No, éste es otro ejercicio.
E: Bueno, contesta.
(Lo lee).
In: Sí, tienen el mismo número.
E: Pasemos a esta actividad. Es un poco más difícil. Lo mismo lee el A, lo hace; luego el B, lo hace y contesta al final.
(Lo lee).
E: ¿Es fácil?
In: Sí, el 1, 2, 3, 4, 5.
E: Los puntos suspensivos indican que siguen. Pero los tres últimos puedes ponerlos.
In: El 5000, 4999 y 4998.
E: Bien, ahora B.
(Lo lee).
In: Hay que sumarle 500.
E: Eso, escríbelos.
In: 501, 502, 503, 504, 505
E: ¿Y los últimos?
In: El último 4500.
E: Tienes que sumarle 500.
In: 5000.
E: El anterior.
In: 4499 más 500, 4999.
E: Eso. ¿Y el anterior? No haría falta ni hacerlo.
In: El 4998.
E: Contesta la pregunta.
(Lo lee).
In: No, el A tiene más.
E: Ahora el C.
(Lo lee).
In: Lo mismo. 1, 2, 3, 4.... y este pongo el 90.

E: Bien, pasa al D.
(Lo lee).
In: 1 más 500, 501; 2 más 500, 502... y este pongo 5000.
E: Te pregunto de nuevo, ¿no tiene nada que ver este con el anterior?
In: No.
E: Bueno, responde la pregunta.
(Lo lee).
In: No, ahora son distintos. Éste empieza en 1 y éste en 501.
E: Sí, pero éstos siguen adelante.
In: No son iguales.
E: Vamos a ver la misma actividad, pero de otra forma distinta.
(*Se lo voy indicando. Aunque hizo bien las series finitas, le digo que lo haga de nuevo. Le comento que se fije en la correspondencia de A con B. Lo mismo para la serie infinita. De nuevo le digo que se fije en la correspondencia que hay, ahora entre C y D)*
E: La pregunta es la misma: ¿Tienen el mismo número de elementos?
In: Yo sigo pensando que no.
E: Muy bien Inmaculada. Muchas gracias.

ENTREVISTA-9
María S., 13 años.

E: Muy bien, ¿Cómo te llamas?
M: María.
E: ¿En qué curso estás?
M: En 2º.
E: ¿Qué edad tienes, María?
M: 13 años.
E: Vamos a ver si sabes hacer esta actividad.
(Lo lee).
E: Es fácil, ¿no?
M: Muy bien.
(Lo hace).
E: Venga el apartado B.
(*Lo lee*).
M: A cada número le sumamos 3, es decir 7.
E: Eso es, sigue.
(Lo hace).
E: Vale, ¿no sigues?
M: Hasta el número 7, ¿no?
E: Eso es. Contesta.
M: No, porque aquí hay 10 y aquí 7.
E: Apartado C y D.
(Lo lee).
E: Es fácil, ¿no?
(Lo hace).
M: Y aquí, ¿qué pongo el que quiera?
E: Sí. Y los puntos suspensivos que serán.
M: Lo que faltan, y estos los que siguen.
E: ¿Hasta dónde?
M: Hasta el infinito.
E: Ahora el D.
(Lo hace).
E: Es igual.
M: Sí, es igual.
(Lo hace).
E: La pregunta.
M: Bueno es que...
E: ¿Qué?
M: No empieza por el mismo.
E: Entonces, ¿cuál tendrá más? ¿O serán iguales?
M: Es que visto así, hay los mismo..., bueno, no sé.
E: Mismo número de elementos.
M: Yo que sé.
E: ¿Qué es lo que piensas?
M: Es que éste empieza en 1 y éste en 4, no sería los mismos. Yo creo que no.
E: ¿Cuál tendrá más, según tú?
M: No sé.
E: Vamos a ver si lo ves más claro con esta actividad.
(Se lo voy indicando. Como lo fue construyendo bien los términos de la series a partir del general, le fui señalando la correspondencia que había entre las series A-B y C-D)
E: Las preguntas son las mismas que las anteriores. Contestaste en esta que no tenían el mismo número de término. ¿Sigue pensándolo?
M: Sí, esta tiene más.
E: Vale, ¿y esta?
M: No.
E: ¿Cuál crees que tiene más elementos?
M: El C, porque va del 1 al infinito y el D del 4 al infinito.
E: Entonces, no tienen el mismo número de elementos.
M: No.
E: Vale, muchas gracias.

ENTREVISTA-10
Inés A., 13 años, 2ºE.S.O.

E: Bien, ¿cómo te llamas?
I: Inés A.
E: ¿Y en qué curso estás?
I: En 2º.
E: ¿Y tu edad?
I: 13 años.
E: Empieza con esta actividad, primero leemos la A y la B, y contesta. Luego C y D.
(Lo lee).
E: Fácil, ¿no?
I: Yo creo que sí. Hay que ponerlos en estas casillas.
E: Eso es, ponlo

(Lo hace).
E: Bien ahora por el otro.
(Lo lee)
E: ¿Sabes lo que te pido, no?
I: Sí, que ponga estos números sumándole 3.
E: Eso es.
I: Pero, ¿desde 1 a 7?
E: Sí.
I: Pues sería, 1 más 3, 4; 2 más 3, 5…y 7 más 3, 10.
E: Muy bien, Inés. Ahora contesta la pregunta que te hago al final.
(Lo lee).
I: No. El A tiene más.
E: ¿Cuántos más?
I: 3 más.
E: Pasa al C.
(Lo lee).
I: Pongo 1, 2, 3, 4
E: Los puntos suspensivos indican que siguen. Pon un número en esta casilla.
I: ¿Pongo el 10?
E: Vale. Pero eso seguirá. Por eso te pongo los puntos suspensivos también aquí.
I: Vale.
E: Pasa al D.
(Lo lee).
I: Lo mismo, pero ahora en adelante. 1 más 3, 4, 2 más 3, 5...y 10 más 3, 13.
E: Sí, pero sigue, no se para.
I: Ya, ya.
E: Ahora contesta.
(Lo lee).
I: No tienen el mismo.
E: ¿Cuál tienen más?
I: Yo creo que el C. Éste empieza en 1 y éste en 4.
E: Intentemos hacerlo con otro formato.
(Se lo voy indicando. Como hizo bien el procedimiento de ir construyendo los números de las series, le indico la correspondencia que existe entre A-B y C-D)
E: Hazlo tú.
I: ¿Otra vez?
E: Sí, es para que te dé cuenta de la correspondencia que hay entre las regletas.
(Lo hace).
E: ¿Sigues pensando que tienen distinto número de elementos? ¿Qué no son iguales?
I: Sí. Yo creo que sí.
E: Ya hemos terminado Inés. Muchas gracias.

CURSO: 3 º E. S. O.

ENTREVISTA-11
Paola L., 14 años.

E: Bien, ¿cómo te llamas?
P: Paola L.
E: ¿Y en qué curso estás?
P: En 3º.
E: ¿y tu edad?
P: 14 años.
E: Vamos hacer esta actividad, primero lo lees.
(Lo lee).
E: Muy bien, tienes que poner en cada casilla los elementos, ¿no?
P: Tengo que poner el uno aquí.
E: Venga, ponlo. Muy bien.
(Lo hace).
E: Ahora éste de aquí.
(Lo lee).
P: Ahora le sumo 3, entonces 4.
(Lo hace).
P: ¿A todos 3?
E: Sí.
(Lo hace).
P: ¿Y ya está? Porque ya... ya es 7.
E: Ahora contesta.
(Lo lee).
P: Sí, tiene el mismo número de elementos.
E: ¿Cuánto hay aquí?
P: 10.
E: ¿Y aquí?
P: 7. Entonces, no.
E: Bien, ¿no? Pasamos.
(Lo lee).
E: Vale, ¿qué vas hacer ahora?
P: No lo entiendo, ¿sea el conjunto?, ¿de 1 en adelante?
E: Intenta comparar con el anterior.
P: Es el mismo pienso, ¿no? ¿Sumarle a este 1? ¿No?
E: ¿Lo entiendes?
P: No.
E: Pasamos a esta actividad que es muy parecida. Te lo pongo de esta forma.
(Se lo voy señalando).
E: Este ya lo había hecho, pero mira....Y este, el que estaba haciendo. Míralo y sigues tú.
P: 7, 8, 9,10.
E: Aquí seguirá en adelante, ¿terminará aquí?
P: No, hasta el infinito.
E: Con n más 3 pasa lo mismo, 4, 5,6… sigue tú.
(Lo hace).
E: Si pusiéramos un número cualquiera en esta casilla.
P: Por ejemplo 58.
E: Le corresponde...
P: 61.
E: Muy bien, ¿tienen el mismo número de elementos?
P: Si porque tienen infinitos.
E: Pero este empieza en 1 y este en 4.
P: Entonces, no. Es infinito, pero le faltan.

E: Dices tú que no tienen iguales aún teniendo infinitos términos.

P: No, a este la faltarían 3.
E: Bien, Paola, ya hemos terminado.

ENTREVISTA-12
Tara Aguilar, 14 años.

E: Bien, ¿cómo te llamas?
T: Tara A.
E: ¿Y en qué curso estás?
T: En 3º.
E: ¿y tu edad?
T: 14 años.
E: Muy bien, vamos hacer esta actividad, primero leemos la A y la B, y contesta. Luego C y D.
(Lo lee).
T: ¿Esto qué es?
E: n igual a 1, que empieza en 1.
T: Pero como..., espere, n en puntos suspensivos, y 10. Tengo que poner 1 y 10. Los números que hay. No, no. No sé. Aquí no caben.
E: ¿Cuántos números son?
T: Sí caben. ¿Pero tengo que poner la n?
E: No.
T: Vale. No lo entiendo.
E: un momentito, vamos hacerlo aquí.
(Se lo indico).
E: Sigue tú
(Lo hace).
T: Hasta 10, ¿no?
E: Sí. Ahora el otro ejercicio B.
(Lo lee).
E: Yo te pongo los primeros. Para 1, 1 más 3,4…podemos seguir.
T: Pero espérese. A 1 le sumas 3, 4… a 3 ¿hay que sumarle 3? ¿No?
E: Sí, eso.
T: Vale.
E: EL siguiente.
(Hace todo la actividad).
E: ¿Y por qué paramos aquí?
T: Porque es hasta 7.
E: ¿Tienen el mismo número de elementos?
T: ¡Claro!, ¿no?
E: La misma cantidad.
T: No, pero son los mismos.
E: Te pregunto cantidad de números
T: Sí.
E: ¿Cuánto hay en A?
T: 10.
E: ¿Y en B?
T: 7.
E: Entonces, ¿tienen los mismos?
T: No, A tiene más.
E: Ahora el C.
(Lo lee).
E: Aquí no dice que paremos en 10. Dice en adelante.
T: ¿Desde 1?
E: Sí.
T: ¿Pero le sumo algo?
E: No.
T: ¿Lo pongo aquí? Pero, ¿habrá que sumarle algo?
E: No. Y los puntos suspensivos, ¿no seguirán? ¿Qué significan los puntos suspensivos?
T: Que hay una distancia entre ellos.
E: Muy bien, y aquí hay un número cualquiera.
T: ¿Cualquier número?
E: Sí, ¿sería el 8?
T: No, el 10.
E: El 10, por ejemplo. Podría ser más grande. Vale, y los puntos suspensivos....
T: Seguirá.
E: ¿Hasta dónde?
T: Hasta donde quiera. ¿Pero para?
E: No para. ¿Hasta dónde?
T: Hasta el infinito
E: ¿Hasta el infinito?
T: Sí, claro.
E: Ahora el D.
(Lo lee) .
E: Te pongo los 3 primeros.
(Lo hace).
E: Y este pondrías uno.
T: El 13.
E: La pregunta, Tara.
T: Claro.
E: ¿La misma cantidad de número?
T: Sí.
E: Pero fíjate que éste empieza en 1 y éste en 4.
T: Sí, porque le he sumado 3.
E: ¿Tienen el mismo número de elementos? ¿Me lo verificas?
T: Sí.
E: Pasamos a este otro.
(Lo lee).
T: ¿Qué lo hago como antes?
E: Sí.
(Hace los tres primeros).
E: ¿Podrías poner los tres últimos?
T: El último sería 5000. Y los anteriores 4999 y 4998. El B, ¿no?
E: Sí.
(Lo lee).
T: ¿Qué sería 1 más 500?
E: Eso es.
T: 501.
E: Y el siguiente sería...
T: 500 más 2, 502, 503, 504, ¿no?, y 505.
E: Y seguiría, Tara. ¿Y estos 3 últimos?
T: ¿Habrá que sumarle 500?
E: Por tanto sería.
T: 5000.
E: Y el anterior.
T: ¿4500?
E: No. El anterior de 4500.
T: ¿Uno antes? 4499.

E: Que sumamos 500. Ponlo aquí si quieres.
T: No, me da igual. 5000,...no. Se pasa
E: No se pasa. El anterior sería...
T: 4499. ¡Ah! Vale. 4999. ¡Ah, ya!
E: Y el anterior, sería... ¿habría que hacerlo?
T: No, el 4998.
E: La pregunta.
(Lo lee).
T: ¿Cómo el mismo número?
E: La misma cantidad.
T: Sí, pero le faltan...
E: Vamos a ver, ¿cuánto tienes aquí?
T: 5000.
E: ¿Y el de abajo?
T: No, hay menos.
E: ¿Cuántos menos?
T: ¿Unos 500? No 500, no. Hay 500 menos.
E: Vale. Ahora el C.
(Lo lee).
T: Desde n igual a 1, ¿no?
E: Eso es.
(Lo hace).
E: Esto sigue. Pon un número cualquiera.
T: El 100.
E: Vale el D.
(Lo lee).
T: Sería 1 más 500.
E: Eso es.
T: 501.
(Lo hace).
E: ¿Se parecen a éstos?
T: Sí, son iguales. Pero al final...
E: Estos no tienen final.
T: Vale. 501, 502, .503, 504
E: ¿Y para éste?
T: 600
E: Y esto seguirían, ¿y la pregunta sería?
T: No. Porque aquí...Aquí faltan 500.
E: Compáralo con el anterior
T: Sí, pero no.
E: Muy bien, muchas gracias, Tara.

ENTREVISTA-13
Laura L., 14 años.

E: Muy bien, ¿Cómo te llamas?
L: Laura.
E: ¿Qué curso estás?
L: En 3º.
E: ¿Qué edad tienes, Laura?
L: 14 años.
E: Vamos a ver si sabes hacer esta actividad
(Lo lee).
E: ¿Sabrías hacerlo?
L: Pues…el 1, 2, 3… ¿lo voy colocando?
E: No es muy difícil, ¿verdad?
L: No.
E: Ahora el B.
(Lo lee).
L: 1 más 3, 4, 3 más 4, 7.
E: No.
(Lo lee de nuevo)
L: No lo entiendo.
(Se lo indico)
L: Ya, ya....
E: ¿Lo sigues tú?
L: 5, 6, 7, 8, 9,10.
E: ¿Y se acaba aquí?
L: No hay más casillas.
E: No.
L: Ah, porque lo dice el enunciado.
E: La pregunta: ¿Tienen el mismo número de elementos?
L: En teoría tienen el mismo número de elementos, pero sumando 3.
E: Vamos a ver, cuánto hay aquí.
L: 10.
E: Y aquí.
L: 7.
E: ¿Tienen el mismo número de elementos?
L: No.
E: ¿Cuál tiene más?
L: ¡Ah!, creí si eran los mismos elementos.
E: Pasemos a C.
L: Vamos a ver, empieza en 1, 2,3...
E: Eso es.
L: ¿Hasta dónde llego?, hasta el infinito.
E: Puedes poner un número aquí, si quieres.
(Pone 100).
E: Pasemos a D.
(Lo lee).
L: 4, 5,6… hasta el infinito.
E: ¿En la casilla esta?
L: 103.
E: La pregunta.
L: Claro, como son infinitos números.
E: Muy bien, pasemos a esta actividad.
(Lo lee).
E: ¿Lo haces de esta forma?
L: Sí.
(Lo hace).
L: Los últimos números 4998,4999 y 5000.
E: Pasemos a B.
(Lo lee y hace los primeros términos).
E: ¿Y los tres últimos serán?
L: ¿4500?
E: ¿Y le sumas...?
L: 500, 5000.
E: Y el anterior...
L: 4499 más 500, 4699.
E: No, el último número 4500 le suma 500, ¿el anterior?
L: 4499, 4999.
E: ¿Tienen el mismo número de elementos?
L: A y B, claro.
E: ¿Sí?
L: Ah, no. Este va de 1 a 5000 y este de 500 a 5000.

E: Pasamos a C.
(Lo lee y lo hace hasta la casilla vacía última).
L: Este puede ser infinito.
E: Pon un número cualquiera.
(Pone 100).
E: Vale, pasa al siguiente D.
(Lo lee y lo hace).
L: Y éste último sería 600.
E: La pregunta.
L: Sí, claro.
E: ¿Sí?
L: Vamos a ver, claro.
E: Vamos a otra actividad.
(La lee).
L: Voy a tener que leerlo de nuevo. (lo lee de nuevo). Entonces sería la inversa. La unidad partido por sí misma. 1 partido 1 es 1; 1 partido 2, ½…
(Lo hace).
E: Pasamos a B.
(Lo lee y lo hace).
E: ¿Tienen el mismo número de elementos?
L: No.
E: ¿Quién tiene más?
L: El A.
E: ¿Cuánto más?
L: Tres más.
E: Pasemos a C.
(Lo lee y lo hace).
L: Pongo el 1 partido 100, y podría seguir.
E: El D.
(Lo lee y lo hace).
E: Y éste le corresponderá....
L: 1 partido 103.
E: Y la pregunta ya la sabrás.
L: Sí. Tienen el mismo número de elementos.
E: ¿Lo verifica?
L: Sí.
E: Ahora, la última actividad.
(La lee).
E: Lo mismo otra vez, Laura.
L: Sí, pero a la inversa.
E: Eso es. Pon los primeros y los últimos.
(Lo hace).
E: Ahora el B, que es lo mismo, pero sumando 500.
(Lo hace).
E: La pregunta, que es siempre la misma.
(La lee).
L: Pues, no. Este tiene más. 500 más. Además lo pone el enunciado.
E: Ya, pero tenía que ponerte a prueba. Venga el C y el D y terminamos.
(Lo lee y lo hace, pone en la última casilla 1 partido 1000)
E: Bien el D.
(Lo lee lo hace y pone como correspondiente al anterior, 1 partido 1500)
E: Y la pregunta.
L: Si tienen el mismo número de elementos, pues tampoco. Hay infinitos números.
E: Gracias, Laura.

ENTREVISTA-14
Mª Ángeles G., 14 años.

E: ¿Cómo te llamas?
MA: María Ángeles.
E: ¿En qué curso estás?
MA: 3º.
E: ¿Y tú edad?
MA: 14 años.
E: Empieza esta actividad, a ver como lo haces.
(Lo lee).
E: Vale, ¿lo sabrías hacer?
MA: Sí.
(Lo hace).
E: Muy bien, ahora éste.
(Lo lee).
E: ¿Sabrías hacerlo?
MA: Si sumando 3. Sería 4, el siguiente 5…
E: ¿Vale, tendríamos que seguir?
MA: No, decía hasta 7.
E: ¿Tienen el mismo número de elementos?
MA: No.
E: ¿Cuál tiene más?
MA: A, tres más.
E: Pasemos a éste.
(Lo lee).
(Piensa).
E: ¿Cómo sería?
MA: 1 en adelante.
(Lo hace).
E: ¿Los puntos suspensivos que significan?
MA: Que siguen.
E: ¿Podrías poner un número aquí? Pon uno.
MA: ¿Cuál pongo?
E: El que tú quieras, el que tú veas conveniente.
MA: ¿Conveniente?, ¿da igual?
E: Sí, es para la siguiente actividad. Estos puntos suspensivos, ¿qué significarán?
MA: Que siguen adelante.
E: Lee la D.
(Lo lee).
E: ¿Entonces ahora?
MA: Pues sería el número 4, el 5, el 6...
E: Y el ejemplo anterior sería ahora...
MA: 103.
E: La pregunta.
MA: Claro, en números sí.
E: ¿Por qué?
MA: Tienen el mismo número de cantidad. Aunque los números sean diferentes.
E: Aunque éste empieza en 1 y éste en 4.
MA: Claro. Son cinco números diferentes.
E: ¿Cinco números diferentes?
MA: No hay más números.
E: Aún así, ¿tienen el mismo número de elementos o números?

MA: Sí, claro, el mismo número de elementos. Sí porque los tres que están aquí que no tiene éste, estará al final, ¿no?
E: Bien pasemos a este otro.
(Lo lee).
E: Vale, ¿sabrías hacerlo?
(Lo hace).
MA: El último sería, 5000.
(Lo pone este y los anteriores)
E: Bien, pasemos al apartado B.
(Lo lee)
E: ¿Vale?
MA: n más 500, el primero 501.
E: Venga los siguientes.
MA: 502, 503, 504,505.
E: Los últimos como serán.
MA: 5000.
E: Muy bien, y los anteriores.
MA: 4499 más 500.
E: ¿Entonces?
(Piensa).
E: Es fácil, Mª Ángeles.
MA: ¿4499 más 500?
E: Sí.
MA: 4499.
E: No, háyalo bien.
MA: 4499 más 500...
E: Si quieres lo pones aparte y suma.
MA: Claro que es,... sí, sí, 4999.
E: Y el anterior...
MA: 4998,4997.
(Lo sigue haciendo aparte)
E: Vale. ¿Tiene el mismo número de elementos A que B?
MA: Sigo pensando que tienen el mismo número de elementos.
E: ¿Cuánto tiene este?
MA: 5000.
E: ¿Y este?
MA: 5000.
E: ¿5000?
MA: Ah, no. De 500 a 5000.
E: Lo indica aquí. Luego, ¿tienen el mismo número de elementos?
MA: No.
E: ¿Cuál tiene más?
MA: A.
E: ¿Cuántos tienen más?
MA: 500.
E: Vamos a pasar a este.
(Lo lee y le explico lo que significa en adelante).
(Lo hace).
E: Los puntos suspensivos significan...
MA: Que siguen.
E: En esta casilla pone...
MA: el 200.
E: Vamos a l apartado D.
(Lo lee y lo hace).
E: Vale, igual que la anterior.
(Lo hace).
E: ¿Qué número pondrás en esta casilla?
MA: 700.
E: ¿Tienen el mismo número de elementos?
MA: Sí.
E: ¿Por qué?
MA: Porque hay el mismo número desde 1 hasta 200 que desde 501 hasta 700. Hay doscientos en C y en D.
E: Muy bien, pasemos ahora a éste.
(Lo lee).
E: Es fácil, ¿no?
MA: ¡Hum!, pero... ¿qué pongo a la inversa?
E: Ahora es 1 partido n.
(No lo hace).
E: Pasamos a esta actividad.
(Le voy indicando los primeros).
E: ¿Podrías seguir tú?
MA: Un cuarto, un quinto un sexto,... y un décimo.
E: ¿Por qué hasta aquí?
MA: Porque lo dice el enunciado.
E: Ahora, hasta 7, y le vamos sumando 3. ¿Vale?
MA: Sí.
E: Podrías seguir...
MA: Sería un sexto, un séptimo,...
E: Para, ¿por qué?
MA: Porque son siete elementos.
E: ¿Tienen el mismo número de elementos?
MA: La misma cantidad de números, no.
E: ¿Cuánto hay aquí?
MA: 10.
E: ¿Y aquí?
MA: 7.
E: Pasamos a C y D.
(Lo lee).
E: ¿Podrías hacer esta actividad aquí o como estaba al principio?
MA: No, aquí mejor. (Actividad del principio).
E: El primero sería.
MA: 1 partido 1, 1.
E: El siguiente sería.
MA: 1 partido 2, un medio...
(Lo hace).
E: Ese número podrías tú poner...
MA: 1 partido 100.
E: Lee D.
(Lo lee y lo hace).
E: El que tú has puesto le corresponde...
MA: 1 partido 103.
E: Ahora la pregunta.
(Lo lee).
MA: Yo creo que sí.
E: Tienen el mismo número de electos, aunque si nos fijamos que dan estos…, vamos a ver uno partido uno.
MA: Uno.
E: Uno partido dos.
MA: Cero con cinco.
E: Uno partido tres.
MA: Cero con tres, tres, tres...
E: Perfecto, un cuarto.
MA: Cero con veinticinco.
E: Muy bien, y este que has puesto tú.
MA: Cero con cero uno.
E: ¿Qué pasa con esas cifras?

MA: Que van disminuyendo.
E: Eso sigue e irá disminuyendo, ¿sería algún momento que sea cero?
MA: No.
E: Y yo digo, si diese cero, ¿también tendría el mismo número de elementos?
MA: Si llegara a cero..., pero tendría que llegar.
E: ¿Quién llegaría antes a cero?
MA: C.
E: Pero tendría que ser un número muy grande, un número muy, muy grande que le sumemos a este tres, ¿variará?
MA: No.
E: Me explico, si es muy, muy grande se va haciendo cero; pero como este número debe ser muy grande, ¿habrá mucha diferencia el sumarle o no tres?
MA: No, por tanto los dos son iguales.
E: Bien pasemos ahora a este formato. En este caso no te voy ayudar. Las preguntas son las mismas.
(Lo hace).
E: ¿Ves diferencia entre esta y la anterior?
MA: La forma como la ponen.
E: Eso es.
MA: Pero es igual
(Lo hace).
E: La pregunta.
MA: Sigo pensando que sí tienen el mismo número de elementos.
E: Bien para finalizar, por ahora, porque esto sigue; la misma actividad con el mismo formato. Quiero que te quede claro.
(Lo lee y lo hace).
MA: Este es el mismo que antes.
E: Sí, son casi los mismos, cambian los datos.
MA: Por eso.
E: La pregunta.
MA: Pues, como antes. No tienen el mismo número de elementos en este. Y en este sí tienen el mismo número porque son infinitos.
E: Bien, pasemos a la última actividad, María.
(Lo lee).
MA: Lo mismo otra vez. Hasta 1000 y la inversa.
E: Haz los primeros y los últimos.
MA: Vale.
(Lo hace).
E: La B.
(Lo lee).
MA: Otra vez lo mismo que las anteriores.
(Lo hace).
E: La pregunta, ya sabrás lo que voy a preguntar a esta altura.
MA: Sí. Pues no tienen el mismo número de elementos.
E: Eso es. EL C y el D, y nos vamos.
(Lo lee y lo hace).
MA: Pongo aquí 1 partido 1000.
E: Vale. El D.
(Lo lee y lo hace. Pone correspondiente al anterior, 1 partido 1500)
E: La pregunta.
MA: Sí tienen el mismo.
E: Muy bien. Muchas gracias.

ENTREVISTA-15
Alba M., 14 años.

E: Bien, ¿cómo te llamas?
A: Alba M.
E: ¿Y en qué curso estás?
A: En 3º.
E: ¿y tu edad?
A: 14 años.
E: Muy bien, vamos hacer esta actividad: primero leemos la A y la B, y contesta. Luego C y D.
(Lo lee).
E: Empecemos por el A. ¿Sabrías hacerlo?
A: ¿Desde 1 al 10? Pongo 1…
E: Eso es. Muy bien.
(Lo hace).
E: Siguiente, el B.
(Lo lee).
A: ¿1 más 3?
E: Sí.
(Lo hace).
E: ¿Para aquí?
A: Porque están negras.
E: ¿Por qué están en negras?
A: ¿Sigo entonces?
E: No, léelo bien.
A: Hasta 7, ¿no?
E: Sería entonces 7 y sumándole 3.
A: ¡Ah, vale! Está bien.
E: Contesta la pregunta.
A: No.
E: ¿Cuánto tiene A?
A: 10.
E: ¿Y B?
A: 7.
E: Pasemos a C.
(Lo lee).
A: ¿Hasta el 4?
E: No dice n igual a 1 en adelante.
A: Lo que me indican las casillas.
E: Siguen. Los puntos suspensivos, ¿qué significarán?
A: Que siguen. ¿Pongo aquí el 10?
E: Sí, no sería el 5.
A: No.
E: Y aquí, ¿qué significarán de nuevo los puntos suspensivos?
A: Que siguen.
E: Venga el D.
(Lo lee).
A: Igual que aquí, ¿no?
(Lo hace).
E: Sí.

A: ¿Vale?
E: Sí, ¿y el 10?
A: 13.
E: ¿Ves la correspondencia?
A: Sí.
E: Esto sigue. La pregunta, Alba.
A: Sí, tienen el mismo número, pero...No, porque aquí empieza en 1 y este en 4. Creo que no.
E: ¿Seguro?
A: Sí, que le faltan estos 3 primeros aunque sean infinitos.
E: Te lo pongo de esta forma, Alba.
(Se lo voy indicando, aunque lo hiciera bien todos, le voy indicando la correspondencia que hay entre las series A-B y C-D)
E: ¿Lo podría hacer en este formato? ¿Lo podrías seguir tú?
A: es igual.
E: Sí. Hazlo.
(Lo hace).
E: Este tiene también su correspondiente.
A: Sí.
E: ¿Ves la correspondencia?
A: Sí. No tienen el mismo número de elementos, este tiene más. Yo creo que C tiene más que D. Es que no sé como son infinitos. Y este también.
E: Decídete, Alba.
A: Que sí, como son infinitos es igual. No, no empiezan antes.
E: Muy bien, Alba, ya hemos terminado.

ENTREVISTA-16
María V., 14 años.

E: Bien, ¿cómo te llamas?
Mv: María V.
E: ¿Y en qué curso estás?
Mv: En 3º.
E: ¿Y tu edad?
Mv: 14 años.
E: Muy bien, vamos hacer esta actividad, primero leemos la A y la B, y contesta. Luego C y D.
(Lo lee).
Mv: Yo que sé. Cada elemento...que pongo 1 y 10. Que ponga 1 al 10.
E: Sí, es fácil.
Mv: Sí, del 1 al 10 ¿aquí?
E: Bien, no todo va hacer tan fácil como este. Lee el B.
(Lo lee).
Mv: Cada número le sumamos 3.
E: Sí.
Mv: El 1, 4. ¿El 2, también?
E: Sí. ¿Sigue hasta dónde?
(Lo hace).
Mv: Hasta 7.
E: La pregunta.
(La lee).
E: Mismo número de casillas, de números.
Mv: Sí, tienen el mismo número de casilla.
E: ¿Cuánto tiene A?
Mv: 10.
E: ¿Y B?
Mv: 7, pero tachadas 3.
E: Solo los números. ¿Es lo mismo 7 que 10?
Mv: No, tiene más A.
E: Pasemos a C.
(Lo lee).
Mv: Aquí el 1, el 2...
E: Sí.
(Lo hace).
E: ¿Y estos puntos suspensivos? ¿Qué significan?
Mv: Que siguen.
E: Sí.
Mv: Pero siguen cualquier n.
E: Pon un número aquí
Mv: ¿El que yo quiera?
E: Sí.
Mv: El 17.
E:¿El 17? ¿Te gusta el 17?
Mv: Sí.
E: ¿Y estos puntos suspensivos?
Mv: Que siguen.
E: Ahora el D.
(Lo lee).
Mv: Igual que el de antes.
E: Sí.
(Lo hace).
Mv: ¿Sigo?
E: Y este sería...
Mv: Sería cualquier número.
E: Sí, pero tendrá una correspondencia.
Mv: Claro.
E:¿Qué le hemos hecho a los anteriores?
Mv: Sumarle 3.
E: Pues igual, con éste.
Mv: Vale.
E: La pregunta.
Mv: Sí tienen. Porque las casillas son las mismas, pero sumándole 3.
E: Muy bien, vamos a otro.
(Lo lee).
Mv: Igual.
E: Sí, igual.
(Lo hace).
Mv: Y aquí pondría de 5000 para atrás.
E: Muy bien. ¿Y los puntos suspensivos?
Mv: Que siguen aquí.
E: No tendríamos que poner los 5000 números.
Mv: Claro.
E: El siguiente, B.
(Lo lee).
Mv: Serían sumándole 500; 501, 502…
E: Muy bien.
(Lo hace).
Mv: Y aquí los mismos, pero sumándole 500, sería 5000.
E: Eso es.

Mv: Y los anteriores 4999 y 4998.
E: Perfecto. La pregunta.
(La lee).
Mv: Sí, yo creo que sí.
E: ¿Cuánto tiene A?
Mv: 8, no tiene 5000. ¡Ah! No tienen los mismos.
E: ¿Cuánto tiene A?
Mv: 5000.
E: ¿Y el B?
Mv: 4500.
E: Pasemos a C.
(Lo lee).
Mv: Esto es igual que antes.
(Lo hace).
E: Y aquí pon uno cualquiera.
Mv:¿Cualquiera? El 33.
E: Ahora el D.
(Lo lee).
Mv: Hay que sumarle 500. Vale.
(Lo hace).
E: ¿Y éste?
Mv: Uno que yo quiera.
E: No, el que le corresponda al que pusiste aquí.
Mv: El 533.
E: Y esto seguiría. La pregunta.
(Lo lee)
Mv: Son los mismos hasta el infinito.
E: ¿Y el porqué?
Mv: Porque sería el mismo número pero sumándole 500, pero cuando llega la infinito son iguales.
E: Ahora, María, más complicado.
(Lo lee)
Mv: Sería 1 partido...
E: Sí.
(Lo hace)
E: Muy bien, ahora el B.
(Lo lee)
Mv: Hasta el 7 pongo 1 y le sumamos 3. ¿Pongo el resultado?
E: No la fracción.
Mv: Es decir si es 1 sería 1 más 3, pongo un cuarto.
E: Eso es. Muy bien. La pregunta.
(Lo lee).
Mv: No.
E: ¿Cuál tiene más?
Mv: Éste tiene 3 más.
E: Pasemos al C que es muy parecido.
(Lo lee)
Mv: 1 en adelante. Igual.
(Lo hace).
Mv: Y aquí pongo un número que yo quiera.
E: Sí el que quieras.
Mv: El 63.
E: Apartado D.
(Lo lee)
Mv: Lo mismo que este sumándole 3 hasta el infinito.
(Lo hace).
Mv: Y este, ¿pongo el que quiera?
E: El que corresponda. La pregunta.
Mv: Sí.
E: Bien, una cosita María. No sé si te estás fijando en los resultados de las fracciones. ¿1 partido 1?
Mv: 1.
E: ¿1 partido 2?
Mv: 0,5.
E: ¿1 partido 3?
Mv: 0,3 periódico puro.
E: Eso es. ¿Qué le está pasando a estos números?
Mv: que van disminuyendo
E: Si en vez de éste que pusiste 1 partido 63 que necesitaremos la calculadora, hubiera puesto el 1 partido 100 que es más fácil de hacer, sería 0,01. ¿Llegaría a cero?
Mv: No llega.
E: Aún así me dices que tienen el mismo número de elementos. Aunque éste empiece en 1 partido 4 y éste en 1 partido 1.
Mv: No sé, ¿cómo que no están aquí?
E: Si estos tres no están aquí abajo.
Mv: No están porque le sumamos 3.
E: Y dices que son iguales.
Mv: En casillas sí, 1 partido 1 no es igual a 1partido 4.
E: Entonces, ¿aún así dices qué tienen el mismo número de elementos?
Mv: Sí.
E: Muy bien pasemos a este último.
(Lo lee).
Mv: Igual, pero con fracciones.
(Lo hace).
Mv: Y los tres últimos serían...
(Lo hace).
E: Bien, el B.
(Lo lee y lo hace).
Mv: Sumándole 500. Y los tres últimos serían...
E: Muy bien, la pregunta.
Mv: No, A tiene más.
E: Bien, ahora C y D.
(Lee el C).
Mv: Igual.
(Lo hace).
E: Aquí un número cualquiera.
Mv: El 1 partido 1000.
E: Bien, el D.
(Lo lee y lo hace)
Mv: y el que corresponde a este, 1 partido 1500.
E: Bien, la pregunta.
Mv: Pues sí, yo sigo pensando que sí tienen el mismo número de elementos con diferentes números.
E: Muy bien María, ya hemos terminado.

CURSO: 4 º E. S. O.

ENTREVISTA-17
Belén B., 15 años.

E: Bien, ¿cómo te llamas?
B: Belén B.
E: ¿Y en qué curso estás?
B: En 4º.
E: ¿Y tu edad?
B: 15 años.
E: Vamos a empezar con esta ficha, primero leemos la A y la B, y contesta. Luego C y D.
(La lee).
E: ¿Es fácil, no?
B: Sí, en cada casilla pongo un número.
E: Muy bien. Lee el segundo apartado.
(Lo lee).
B: Ahora hay que sumar 3.
(Lo hace).
E: Di los números que has puesto.
B: 4, 5…10.
E: Bueno, la pregunta.
B: No, aquí hay 10 y aquí 7.
E: Pasamos a C.*(Lo lee).*
B: Hasta el 10 y esto sigue.
E: La casilla ésta, no será el número 5.
B: ¿Por qué no?
E: ¿Y los puntos suspensivos?
B: Ah, que sigue.
E: Pon un número.
B: Yo pongo n.
E: ¿El n?
B: Y sigue luego hasta el infinito.
E: Vale, déjalo ahí. Pasamos a D.
(Lo lee).
B: Sería el 4, 5…
E: Y si hubiera puesto un número ahí, el correspondiente sería...
B: Más 3, n más 3.
E: La pregunta.
(La lee).
B: Es que no se sabe el número de elementos que hay.
E: Sí, pero tú qué piensas.
(Piensa, bastante tiempo).
E: Sí es difícil, compara A-B con C-D.
B: Es que éste empieza en 1 y éste en 4. si se acaba aquí...
E: Pero no se acaba aquí.
B: No son iguales, creo que no.
E: Es decir faltarían estos 3 aunque no terminen. Pero te dicen si tienen el mismo número de elementos.
B: Yo creo que son diferentes.
E: Y que uno es más grande que otro.
B: Sí, el primero.
E: Aún no terminando.
B: Yo creo que son distintos y que no tienen el mismo número de elementos.
E: Muy bien, Belén. Pasemos a éste. La actividad es la misma, te preguntaré los mismos. *(Se lo voy indicando).* ¿Podrías seguir tú?
B: Sí.
(Lo hace).
E: Vale. Los puntos suspensivos, ¿qué significan aquí?
B: Que va al infinito.
E: Aquí pon un número.
B: ¿El 1000?
E: Vale, ahora el siguiente.
B: Hay que sumarle 3. Si es 1, 4…
E: Fíjate que sumamos 3 a la regleta de arriba. ¿Y para 1000?
B: Sería 1003.
E: ¿Ves la correspondencia?
B: Sí.
E: Entonces, la pregunta...
B: Sí, tienen el mismo número de elementos, porque se hace éste a partir de éste.
E: Eso es. Pasemos a esta forma. Es fácil. Te pido lo mismo, pero la estructura es distinta.
(Lo hace.)
E: Perfecto. ¿Tienen el mismo número de elementos?
B: No, aquí no.
E: ¿Cuál tienen más?
B: Éste.
E: ¿Cuánto más?
B: 3 más.
E: Ahora éste.
B: Igual, ¿Pongo 1000?
E: Sí pon 1000.
B: Vale.
E: ¿Tienen el mismo número de elementos?
B: Mira como el de abajo se ha construido a partir de lo de arriba.
E: ¿Tienen el mismo?
B: Yo creo que sí.
E: Estamos diciendo si tienen el mismo número de elementos no los mismos números.
B: Sí, claro
E: Vamos a continuar con esta actividad con la misma forma que la anterior.
(Lo hace).
B: La pregunta...No, no es son diferentes. Es que estos acaban y estos no acaban. Sí acabaran serían diferentes.
E: La pregunta entonces.
B: Pues que no. A tiene 10 y B 4.
E: Ahora el C y el D.
(Lo lee y lo hace).
E: La pregunta.
B: Sí, ¿no? Sí.
E: ¿Por qué?

B: Por lo dicho de antes, se hacen estos a partir de estos.
E: Seguimos adelante.
(Lo lee).
B: Hasta n 5000.
E: ¿Los puntos suspensivos que significan aquí?
B: Que están todos los números
E: ¿Serían estos puntos iguales a estos?
B: No, porque estos acaban aquí.
E: El B.
(Lo lee).
B: 501, así, ¿no?
(Lo hace).
E: ¿Y el último sería?
B: 5000.
E: ¿Y el anterior?
B: 4500.
E: ¿Seguro?
B: Ah, vale, 4999, 4998.
E: ¿Tienen el mismo número?
B: Sí.
E: ¿Cuánto tiene A?
B: 5000
E: ¿Y B?
B: 5000
E: Pero dónde empiezan.
B: A en 1.
E: ¿Y B?
B: En 501. Sí pero empieza también en 1.
E: No eso era para construirlos, a partir de 1.
B: ¡Ah!, vale. Entonces, no.
E: El C.
(Lo lee y lo hace).
B: El 1000 le corresponderá 1500.
E: La pregunta.
B: Sí, que sé. Espera, que me estoy liando. Sí.
E: ¿Por qué?
B: Porque cada vez que existe un número aquí, existirá otro número aquí sumándole 500.
E: Ahora este.
(Lo lee).
B: Pues sería, 1 partido 1. ¿Pongo 1?
E: No, ponlo en forma de fracción.
(Lo hace).
E: Bien, ahora el siguiente.
(Lo lee).
B: A ver...
(Lo hace).
E: La pregunta ya la sabrás.
B: No, no tienen el mismo.
E: ¿Cuál tienen más?
B: Éste.
E: Pasemos a C y D.
(Lo lee y lo hace).
B: Aquí pongo uno cualquiera, ¿no?
E: Sí.
(Pone 1 partido 1000).
E: Ahora el D.
(Lo lee)
B: Es igual, ¿no?
(Lo hace)
E: Bien, la pregunta.
B: Sí tienen el mismo número. Sí porque se le va sumándola anterior más 3.
E: Te das cuenta que 1 partido 1 es....
B: 1.
E: 1 partido 2.
B: 0,5.
E: 1 partido 3.
B: 0,3.
E: Sí, periódico. 1 partido 4.
B: 0 con 2 periódico.
E: No, 0,25. Y 1 partido 1000.
B: 0,001.
E: Bien, ¿qué va pasando con esos números?
B: ¿Podría ponerlos?
E: Sí.
(Pone los decimales debajo de cada fracción).
B: Pues que va disminuyendo.
E: ¿Sería alguna vez cero?
B: No.
E: Vale. Pasemos al último.
(Lo lee).
E: Igual, ¿no?
B: Un momento.
(Lo hace).
E: Muy bien perfecto. El B.
(Lo lee).
B: Aquí pongo... 1 partido 501, 1 partido 502…
E: Y ya del tirón.
B: 1 partido 1000, 1 partido 999 y 1 partido 998.
E: La pregunta.
B: No, porque este empieza en 1 partido 1 y este en 1 partido 501.
E: OK, el C.
(Lo lee y lo hace).
B: Este pondría 1 partido 1000.
(Lee el D y lo hace).
B: Este le corresponde el 1 partido 1500.
E: La pregunta.
B: Sí que tienen
E: ¿Por qué?
B: Porque este se construye a partir de este. Bueno, este sería 1 partido n y este 1 partido n más 500.
E: Muy bien Belén, ya hemos terminado.

ENTREVISTA-18
Ana C., 15 años.

E: Bien, ¿cómo te llamas?
A: Ana C.
E: ¿Y en qué curso estás?
A: En 4º.
E: ¿Y tu edad?
A: 15 años.
E: Vamos a empezar con esta ficha, primero leemos la A y la B, y contesta. Luego C y D.

(Lo lee).
E: ¿Es fácil, no?
A: Sí, tengo que poner los números, ¿no?
E: Eso es.
(Lo hace).
E: Bien, ahora el B.
(Lo lee).
E: ¿Lo entiendes?
A: Sí, los mismos pero sumándole 3. ¿Sólo cuentan los números enteros?
E: Sí, y hasta el 7.
A: Vale.
(Lo hace).
E: La pregunta.
A: Pues no, si son sólo éstos.
E: ¿Cuál tiene más?
A: Este, el A.
E: Vale, pasemos a C.
(Lo lee).
E: ¿Entiendes los puntos suspensivos?
A: Sí, que siguen.
(Lo hace).
E: Y en esta casilla, pon un número.
A: Pongo el infinito.
E: ¿El infinito?
A: Sí.
E: Buenos vale. Pero esto seguiría. Ahora el D.
(Lo lee).
A: Lo mismo que el anterior, ahora hay que sumarle 3.
E: Eso es.
(Lo hace).
A: Y este, pongo también el infinito.
E: ¿Otra vez?
A: Sí.
E: Esta obsesionada con el infinito.
A: No.
E: Eso seguiría. La pregunta
A: Pues, yo creo que no. Este empieza en 1 y este en 4. Siempre le faltará 3.
E: ¿Aunque esto siga?
A: Sí.
E: Bien vamos a pasar a otra actividad. Es lo mismo Ana, te preguntaré lo mismo.
(Le indico como se construyen los números a partir del término general, aunque ya lo hiciera bien, pero señalándole la correspondencia entre las series que se van formando)
E: Sigue tú en el C.
(Lo hace).
A: Aquí pongo 1000.
E: Ahora lo mismo para D.
(Lo hace)
E: ¿Y el 1000?
A: 1003.
E: No sé si te estarás dando cuenta de la correspondencia que hay.
A: Se ve muy claro.
E: ¿Tienen el mismo número?
A: Sí. Si corta aquí...
E: No, sigue, Ana. Entonces, ¿tienen o no?
A: Sí, porque aquí hay menos al principio, pero se ha visto la correspondencia entre ellos.
E: Si en vez de este te pongo este. Las regletas son distintas.
(Lo hace).
A: No tienen el mismo número. Tiene más A, 3 más.
E: Ahora el C y D.
(Lo hace).
A: ¿Aquí pongo el que yo quiera? ¿Y si pongo el mismo? El 2000.
E: Te gusta el 2000.
A: No, por poner otro.
E: El D.
(Lo hace. Pone como correspondiente a 2000 el 2003).
E: ¿Tienen el mismo número?
A: A ver, sí porque... sí.
E: Aunque empiece este en 1 y este en 4.
A: Sí, porque hay una correspondencia entre ellas.
E: Pasamos a este. Archiconocido, Ana.
(Lo lee y lo hace).
E: Perfecto, el B.
A: ¿Esto qué es un 3?
E: No un 6, que me había equivocado pasándolo.
(Hace toda la regleta en vez desde 1 hasta 4).
E: ¿Seguro Ana?
A:¡ Eh!..., sí. ¡Ah! Vale hasta 4.
E: Hasta el 10 no.
A: Es que con el dolor de cabeza que tengo.
E: La pregunta.
A: Pues no. El A tiene más.
E: Pasemos a C
(Lo lee y lo hace. Escribe 1000 en la última casilla).
E: Bien el D.
(Lo lee y lo hace. Escribe 1006 en la última casilla)
E: La pregunta
A: Sí, tienen el mismo.
E: Ahora esta actividad.
(Lo lee).
A: 1, 2, 3, 4, 5
E: ¿Y los últimos?
A: 5000, 4999, 4998.
E: ¿Los puntos suspensivos?
A: Que están todos ahí.
E: ¿Qué serán?
A: Serán desde 5 a 4998.
E: ¿Serían los mismos puntos suspensivos que los de antes?
A: Serían los mismos porque son números, pero los de antes siguen adelante.
E: Pasemos a B.
(Lo lee).
E: Aquí hay que sumarle 500.
A: ¡Ah!, vale. 501, 502...
E: Vale hasta 4500, pero sumándole 500.
A: Sería 5000, 4999, 4998.
E: Parece como si lo hubiera hecho antes. Muy bien. La pregunta.
A: No, A tiene más.
E: Ahora el C.

(Lo lee y lo hace. Escribe 1000 en la última casilla).
E: El D.
A: 501, 502… y este el 1500.
E: Bien la pregunta.
A: Sí, porque empieza en 1 hasta 1000 y este empieza en 501 hasta 1500, pero continúan.
E: Vale, ahora este otro.
(Lo lee).
A: 1 partido 1 es 1.
E: El siguiente.
A: Sería 1 partido 2.
E: Efectivamente.
A: Pongo 1 partido 2 o...
E: No, pon 1 partido 2.
(Lo hace).
E: El siguiente, B.
(Lo lee y lo hace. Llega hasta el 1 partido 10).
E: La pregunta Ana.
A: No, el primero tiene más.
E: ¿El número de elementos en A?
A: 10.
E: El C.
(Lo lee y lo hace. La última casilla escribe el 1 partido 1000)
E: Ahora el D.
A: 1 partido 4, 1 partido 5... partido 7. Hasta aquí es igual. Y el 1 partido 1003.
E: ¿Tienen el mismo número?
A: A ver...Sí claro, porque... O sea empieza en con tres más, pero termina este con tres más.
E: Pero esto no termina, como este.
A: Este siempre le corresponderá este. Sí, ¿no?
E: No sé si te has fijado en los siguiente: 1 partido 1 es 1, 1 partido 2 es 0,5… ¿qué le está pasando a estos números?
A: Que son más chicos. Pero estos serían también más pequeños.
E: Sí, pero mi pregunta es: ¿sería alguna vez 0? Te lo repito: 1, 0.5, 0.25,...
A: No sé.
E: ¿Qué crees tú?
A: Que no.
E: ¿Por qué te digo esto? Si se hiciera 0 que pasaría con este.
A: Se hará 0, también. Pero no se va hacer 0.
E: ¿Incluso en el infinito?
A: En el infinito sí. Pero no sé.
E: Si se hiciera, los números se agotarían, ¿no?
A: Sí.
E: Si se agotan, están acotados.
A: Entonces no tendrían el mismo número de elementos.
E: Mi pregunta Ana, de nuevo: ¿crees que llegará a cero?
A: No.
E: Último ejercicio, Ana.
(Lo lee).
E: Es fácil, ¿no?
A: Sí: 1 partido 1, 1 partido 2….
E: Perfecto, sin hacerlo sabría decir quién tiene más o menos o son iguales.
A: Este tendría... menos.
E: ¿Cuánto menos?
A: 500 menos.
E: El C.
(Lo lee).
A: ¿Lo hago?
E: Sí.
(Lo hace. La última casilla escribe 1 partido 1000).
E: El D, fijándote en el anterior.
A: Sí, 1 partido 501, 1 partido 502… hasta el 1 partido 1000, no más 500 será 1 partido 1500.
E: La pregunta.
A: Sí, es que me estoy liando, me duele tanto la cabeza. Tienen el mismo número de electos. Claro.
E: Muy bien, ya hemos terminado, Ana.

ENTREVISTA-19
Rocío G., 15 años.

E: Bien, ¿cómo te llamas?
R: Rocío G.
E: ¿Y en qué curso estás?
M: En 4º.
E: ¿Y tu edad?
M: 15 años.
E: Muy bien, vamos hacer esta actividad, primero leemos la A y la B, y contesta. Luego C y D.
(Lo lee).
R: ¿Qué lo haga? ¿Qué lo ponga?
E: Sí.
R: ¿Así? ¿El 1?
E: Sí, muy bien sigue. Ponlo.
(Lo hace y lee B)
R: ¿Pongo también la operación?
E: No, en voz alta, lo haces.
R: 1 más 3, 4; 2 más 3, 5…
E: Sigue.
R: Espera, me he liado. Vale, ahora.
E: ¿Tienes qué seguir? Léelo de nuevo.
R: Es hasta 7.
E: ¿Y estas casillas?
R: Pues el 11, 12, 13
E: ¿Lo vas a poner?
R: No entiendo, lo que he hecho es a 1 sumarle 3, 4; a 2 le he sumado 3, 5…
E: Eso es. ¿Hasta dónde?
R: He tenido que seguir.
E: ¿Por qué te pongo estas casillas sombreada, entonces?
R: No sé D. Juan.
E: Pasemos a éste, no te preocupes.
(Se lo indico).
E: Te he hecho hasta el 3. Sigue tú.
(Lo hace).
E: Vale, ahora el segundo apartado, desde 1 al 7.

(Se lo indico y lo hace)
E: Cuando es 7, que es el último...
R: ¡Ah! Claro, el 10.
E: Bien, ahora te hago esta pregunta: ¿tienen el mismo número de elementos?
R: ¿El mismo número?
E: Sí, ¿cuánto hay aquí?
R: 10.
E: ¿Y aquí?
R: 7.
E: ¿Tienen el mismo?
R: No. ¿Lo pongo?
E: No la cámara lo está grabando. Venga ahora esta. Muy parecido a la anterior. Esto va desde 1 en adelante, no del 1 hasta el 10, como era antes. Te he puesto los primeros, sigue tú.
R: 4, 5,...
E: Y esto sigue. Ahora aquí, pon un número grande.
R: ¿Pongo?
E: Sí.
R: ¿Grande?
E: Sí.
R: 106.
E: ¿Y estos puntos suspensivos?
R: Que siguen adelante.
E: Bien, ahora D.
(Se lo indico).
E: Sigue tú, Rocío.
R: 6, 7, 8, 9 y 10
E: ¿Cuál le corresponderá a éste?
R: El 109.
E: La pregunta.
R: Sí tienen el mismo número. Este llega, pero este llega al infinito porque sigue, y este también.
E: Aún empezando este en 1 y este en 4
R: Sí tienen más.
E: ¿Entonces? ¿En qué quedamos?
R: No tienen el mismo número.
E: Pero estos siguen adelante.
R: Sí, sería infinito menos 3. Claro este empieza desde antes y este no. Sí tiene más que este.
E: Muy bien Rocío, ya hemos terminado.

ENTREVISTA-20
Carmen M., 15 años.

E: Bien, ¿cómo te llamas?
C: Carmen M.
E: ¿Y en qué curso estás?
C: En 4º.
E: ¿Y tu edad?
C: 15 años.
E: Vamos a empezar con esta ficha, primero leemos la A y la B, y contesta. Luego C y D.
(Lo lee).
E: Es fácil, ¿no?
C: ¿Qué ponga los números del 1 al 10?
E: Sí.
(Lo hace).
C: Ahora el B.
(Lo lee).
C: Hasta el 7, sumándole 3. 1 más 3, 4; 2 más 3, 5…
E: Eso es, la pregunta.
C: Sí tienen los mismos números, el 4 está aquí y aquí, el 5...
E: No, te pregunto si tienen el mismo número de elementos, de casillas.
C: Entonces, no.
E: ¿Cuál tiene más?
C: El A.
E: Eso es, pasemos a C.
(Lo lee).
C: En adelante que siguen, ¿no?
E: Sí, aquí pon un número.
C: ¿El q quiera?
E: Sí.
(Escribe el 1000).
E: Bien, y eso seguirá en adelante. Pasa al D.
(Lo lee).
C: Igual, ¿no? 1 más 3, 4; 2 más 3, 5…
E: Y este que tú has puesto le corresponderá.
C: 1003.
E: Bien la pregunta.
(Lo lee).
C: No. El C empieza en 1 y este en 4. Tendría estos 3 menos.
E: Carmen, pasemos a este formato. Son los mismos ejercicios, con los mismos enunciados y las mismas preguntas, pero de otra forma.
(Se lo voy indicando, como se forman los términos a partir del término general, aunque ya lo hiciera bien. Le digo que observe las correspondencias que hay entre las series, A-B y C-D)
C: ¿Lo hago?
E: Este lo has hecho bien antes, no hace falta que lo hagas. Vamos al C y D, que te lo pongo de esta forma. 1, 2, 3... ¿Podrías seguir tú?
C: Sí.
(Lo hace).
E: Vale. Y en este pon un número grande, el 1000 por ejemplo.
(Lo pone.)
E: Como puedes ver se hace este a partir de este, ¿podrías seguir tú?
C: Sí.
(Hace el D).
E: ¿Y este le corresponderá...?
C: 1003.
E: Muy bien, ¿tienen el mismo número de elementos?
C: No, sigo pensando que no. El primero tiene más.
E: ¿Cuánto más?
C: 3 más.
E: Muy bien, Carmen, ya hemos terminado.

ENTREVISTA-21
Gema M., 15 años.

E: ¿Cómo te llamas?
G: Gema M.
E: ¿Qué curso estás?
G: 4 º de la ESO
E: ¿Y qué edad tienes?
G: 15 años.
E: Vamos a intentar hacer esta actividad, primero A y B y luego C y D.
(Lo lee).
E: Lo vamos representando.
G: Por supuesto, 1, 2,3…10.
E: Muy bien, ahora el de abajo.
(Lo lee y lo hace).
G: En cada casilla n más tres, en la primera casilla cuatro, etc...
E: Vale, ¿tienes qué seguir?
G: No, está sombreado.
E: ¿Por qué está sombreado?
G: No, porque lo dice el enunciado, hasta siete.
E: La pregunta.
G: Vamos a ver, aquí hay 10 y aquí 7.
E: ¿Son lo mismo?
G: No, pero....
E: ¿Son iguales?
G: ¡Ah!, no.
E: Bien, lee la pregunta C. ¿Qué diferencia hay aquí con la anterior?
G: Pues que aquí no para.
(Lo hace).
G: Aquí, ¿pongo el que quiera?
E: Sí.
G: ¿Uno al azar?
E: Sí, ¿cuál has puesto?
G: 2675.
E: ¿Es un número que te gusta?
G: No.
E: Venga el siguiente, D.
(Lo lee y lo hace).
E: ¿Y el qué le corresponde al último?
G: 2678.
E: Contesta.
G: No, porque le faltan 3. Aquí supuestamente llega a este número. Yo creo que son iguales.
E: ¿Lo verifica entonces?
G: Como dice que no se para.
E: No se para.
G: Si no se para, este tiene menos porque sigue adelante.
E: Aún no parándose.
G: El de abajo si no se para tiene menos, pero no se para.
E: Entonces no hay diferencia entre la actividad anterior y esta.
G: Habría que saber cuándo se para.
E: Pero no se para.
G: Los dos primero son los mismos.
E: ¿Tú crees que se tiene que saber dónde se paran?
G: No porque siempre tiene 3 menos.
E: Pasemos a éste.
(Lo lee y lo hace).
G: Ahora es hasta 5000.
E: Vale siguiente, B.
(Lo hace).
G: 1 más 500, 501; 2 más 500, 502…hasta 4500.
E: ¿Hasta 4500?
G: ¡Ah!, no, hasta 5000.
Pone el anterior a 5000, 4500.
E: ¿4500? Va de uno en uno, sumándole la unidad.
G: Entonces, 4999, 4998.
E: ¿Tienen el mismo número de elementos?
G: No.
E: ¿Cuánto tiene A?
G: 5000.
E: ¿Y B?
G: 4500.
E: Vale, siguiente, C.
(Lo lee).
E: ¿Sabrías hacerlo?
G: Sí, 1, 2,3… pongo 5000.
E: Sigue al D.
G: 1 más 500, 501… y 5000 más 500, 5500.
E: Ahora la pregunta.
G: No, si tiene, espera...Este va de 1 a 5000 y este va de 501 a 5500, mismo número de elementos. No, este, el de abajo, tiene más. No tienen el mismo.
E: ¿Igual qué el anterior, lo verifica entonces?
G: ¿El qué? ¿El qué le faltaba 3?
E: Sí le faltaba según tú 3, y este le falta 500.
G: Sí pero este llega hasta 5500.
E: Vamos a ver, aquí falta 3 y aquí 500 y dice qué este sí y este no.
G: Es que no sé en total son los mismos.
E: Pasemos a este.
(Lo lee).
G: 1 entre 1, 1; 1 entre 2, ½…1 entre 10, 1/10.
E: Vamos hacer el de abajo.
(Lo lee).
G: 1 partido 3 más 1, ¼…
E: Muy bien, la pregunta, ya sabes lo que te voy a preguntar.
G: Sí tienen el mismo número de elementos, ¿no?
E: ¿Cuál tiene más?
G: El de arriba tiene 3 más.
E: Pasamos a C.
(Lo lee y lo hace hasta llegar a los puntos suspensivos y la siguiente casilla vacía).
G: Y este pongo 1 partido 500.
E: Vale, el D.
(Lo hace).
G: 1 partido 500 más 3, 1 partido 503.
E: La pregunta, ¿tienen el mismo número de elementos?
G: Sí, porque al principio le faltan 3, pero al final...El de arriba va de 1 a 1 partido 500.
E: No, aquello, sigue.
G: Sigue.
E: Sigue, no para.

G: Sí se para, no.
E: ¡No se para!
G: Entonces, el de abajo le falta 3.
E: Pasemos a la misma actividad, pero en otro formato. El enunciado es el mismo y las preguntas también, pero de otra forma distinta.
(Le voy indicando como se van formando los términos en cada serie y le comento que observe la correspondencia entre A-B y C-D)
E: ¿Podrías seguir tú?
G: Lo mismo, ¿no?
E: Eso es.
(Lo va haciendo. La última casilla de C pone 1 partido 500 y su correspondiente en D, 1 partido 503)
E: Bien, te hago la misma pregunta: ¿tienen el mismo número de elementos?
G: Pues no, ni en estos dos ni en estos dos. Le faltan los 3 primeros en los de abajo.
E: Muy bien Gema, ya hemos terminado.

ENTREVISTA-22
Mara R., 15 años.

E: Bien, ¿cómo te llamas?
M: Mara R.
E: ¿Y en qué curso estás?
M: En 4º.
E: ¿Y tu edad?
M: 15 años.
E: Muy bien, vamos hacer esta actividad, primero leemos la A y la B, y contesta. Luego C y D.
(Lo lee).
E: ¿Es fácil?
M: ¿Lo pongo aquí?
E: Sí.
(Lo hace).
E: Muy bien, ahora B.
(Lo lee)
M: ¿Estos que están sombreados?
E: No sé.
M: A cada número le sumamos 3.
E: Eso es, pon los resultados, pero los resultados finales.
M: Pero al 7 no va a llegar.
E: Tú sigues.
(Lo hace).
E: ¿Tienes qué seguir?
M: Supongamos que hay que parar aquí. Tienes que parar aquí, porque lo máximo es 7. Las casillas estas son un rollo.
E: Era para ver si caías. La pregunta.
M: No.
E: ¿Cuánto tiene A?
M: 10.
E: ¿Y B?
M: 10, pero del 4 al 10.
E: Entonces.
M: 7.
E: ¿Cuál tiene más?
M: El primero.
E: ¿Cuánto tiene más?
M: Tiene los dos iguales pero hay que sumarle 3.
E: Pero yo digo cantidades. ¿Cuánto tienes en A?
M: 10.
E: ¿Y en B?
M: 7.
E: ¿Es lo mismo 10 que 7?
M: No.
E: ¿No es lo mismo, no?
M: No, creo que no.
E: Vamos a C y D.
(Lo lee).
E: Aquí no te digo que pares.
M: ¿Sigue?
(Lo hace).
E: Esa casilla es para que ponga un número.
M: El 6.
E: ¿El 6?
M: No.
E: Pon un número más alto.
M: ¿El qué yo quiera?
E: Sí, hay muchos números.
(Escribe el 26600).
E: Y estos puntos suspensivos, ¿qué significan?
M: Que van hasta el infinito.
E: ¿Infinito?
M: Sí.
E: El D. Muy parecido.
M: Pero aquí continúa. Sería, 1 más 3,4...4 más 3, 7.
E: ¿Y le corresponde alguno el que tú has puesto?
M: No sé lo que me dices.
E: Como ves hay una correspondencia.
M: Supongo que le corresponderá 26600.
E: ¿Qué hemos hecho con el primero?
M: El 1 le he sumado 3.
E: ¿Y éste?
M: Le sumamos 3.
E: ¿Entonces?
M: 26603.
E: Vale, la pregunta.
(Lo lee).
M: Aquí tiene del 1 al 2600, y el otro del 4 al 26603.
E: ¿Entonces?
M: Aquí es 26600 y aquí 26603, lo que le falta lo tiene aquí. No sé.
E: Por tanto...
M: Son iguales.
E: Vamos a ver este ejercicio.
(Lo lee).
E: ¿Es fácil, no?
M: Sí. ¿Pongo el 5000?
E: Sí, y antes de 5000.
M: 4999.

E: ¿Y antes?
M: 4998.
E: Eso es, y lo que va después de 1.
M: Sí, el 2, 3, 4,5.
E: Venga el de abajo.
(Lo lee).
M: Ahora hay que sumarle 500. Para 1 sería 501, para 2 sería 502...
E: Eso es.
M: 503, 504,505.
E: ¿Qué crees que serán los del final?
M: Será 4500.
E: Pero le tienes que sumar 500.
M: Entonces 5000.
E: Y el anterior...
M: 4999, 4998.
E: La pregunta ya sabes cuál es.
(Lo lee.)
M: Sí.
E: ¿Cuántos tiene el primero?
M: 8.
E: Son 8 lo que has puesto, pero hay más.
M: 5000.
E: ¿Y el de abajo?
M: 5000.
E: ¿Sí?
M: No va de 500 a 5000. Unos 500 menos. No tienen el mismo número de elementos.
E: Vamos a C.
(Lo lee).
E: Aquí sigue.
M: ¿Cómo yo quiera?
E: Es el mismo procedimiento, pero sigue.
M: Entonces, 1, 2, 3,4...
E: Pon un número grande en éste.
M: ¿Uno grande? 35000.
E: Y eso sigue.
M: Sí.
E: Vale, al D.
(Lo lee).
M: Aquí hay que sumar 500, sería 501, 502, 503,504.
E: ¿Y éste le corresponde alguno?
M: Sí, el 35500.
E: Y esto seguiría también. La pregunta.
(Lo lee).
M: No.
E: ¿Quién tiene más?
M: Este va de 1 a 35000 y éste de 401 a 35500.
E: Pero esto sigue.
M: Sí, pero este empieza en el 501 en adelante y este desde 1. El C tiene más.
E: Entonces el anterior también es lo mismo, ¿no?
(Revisa la actividad 1, C y D).
M: Sí, pero no es lo mismo 3 que 500. Pero yo creo que... si se para aquí, sería distinto.
E: Pero no se para.
M: Sí ya lo veo, este empieza en 1 y este en 4. El C tiene más.
E: ¿Y este?
(De nuevo revisa la actividad 2)
M: Este, C tiene más.
E: Bien Mara, pasemos a esta actividad. Es las mismas que las anteriores: mismos enunciados y mismas preguntas)
(Se lo voy indicando, aunque lo hizo bien en el formato anterior, le voy indicando la correspondencia entre las series)
E: Ahora, la pregunta, que es la misma que te pregunté antes.
G: Yo creo que no.
E: Muy bien, muchas gracias Mara.

ANEXO V

ESTUDIO DEL INFINITO ACTUAL SIGUIENDO EL MODELO DE INCLUSIÓN DE BOLZANO

Anexo V.1 Trascripciones de las entrevistas para el estudio empírico cualitativo bajo la experiencia física

CURSO: 1 º E. S. O.

1) **Alumno: Ju.12, 11** **Nombre**: Juan **Fecha de Nacimiento:** 18/06/02

Escena Finitista

E: Juan, ¿cuántas pelotitas hay contando con las que se reflejan en el espejo?
A: ¿Cuántas hay?
E: Sí.
A: Nueve.
E: Nueve y ¿las del espejo?
A: Otras nueve.
E: Entonces en total ¿cuántas hay?
A: Dieciocho.
E: Quita una, ¿cuántas hay ahora, contando las que se reflejan en el espejo?
A: ¡Eh…! Dieciséis.
E: Dieciséis, vale, ¿hay más cantidad ahora que antes?
A: ¿Cómo?
E: ¿Hay la misma cantidad de pelotitas que antes?
A: No.

Escena Infinitista

E: ¿Cuántas pelotitas hay ahora entre los dos espejos?
A: ¡Eh…! Nueve.
E: No, contando las que están reflejadas.
A: ¡Ah!
E: ¿Estás contando?
A: Sí. *(Cuenta las pelotitas)*
A: *(Sigue contando)*, ¿117?
E: ¿117?, si te metes más entre los dos espejos, ¿ves el final?
A: (Se ríe) No.
E: No, quita una pelotitas de ellas.
A: ¿La quito?
E: Sí, la primera, esa misma, un momentito… Bien Juan, ahora qué tienes quitado una pelotita, ¿hay más cantidad de pelotitas antes, ahora o son iguales?
A: Antes.
E: ¿Por qué?
A: Porque quitando una, habrá menos.
E: Sí, pero… ¿tú lo has podido contar para saber que falta esa pelotita?
A: No.
E: ¿Entonces?
A: *(Se queda en silencio un rato)*
E: Juan, contesta a la pregunta, ¿hay la misma cantidad antes, ahora o son iguales?
A: Antes había más.

2) **Alumno: Zo. 13,02** **Nombre**: Zoraida **Fecha de Nacimiento:** 17/03/01

Escena Finitista

E: Zoraida Padilla, ¿cuántas pelotitas hay con las que se reflejan en el espejo?
A: 9.
E: Cuéntalas bien, con las que se reflejan en el espejo.
A: *(Piensa, mira el espejo)*
E: 9 y las que se reflejan en el espejo.
A: *(Sigue sin hablar)*
E: ¿No se reflejan pelotitas?, ¿serían 18?
A: ¡Ah!...sí.

E: Quítale la primera pelotita, ¿cuántas hay ahora?
A: 16.
E: ¿Hay la misma cantidad de pelotitas antes que ahora?
A: No.

Escena Infinitista

E: Zoraida, ¿cuántas pelotitas hay ahora entre los dos espejos?
A: 18.
E: ¿18…? ¿Tú crees?, ¿tú ves el final entre los dos espejos?
A: *(Sigue sin hablar)*
E: ¿Ves el final Zoraida?
A: *(Mira por encima de los espejos)* Sí.
E: ¿Sí…? y ¿puedes contar todas las pelotitas que hay?
A: No.
E: No, quítale la primera pelotita, ahí, con mucho cuidadito. Ahí está, vale, bien, a la vista de los resultados: ¿Tienen las mismas cantidades de pelotitas antes que ahora?
A: No.
E: ¿No?, ¿qué hay ahora menos o más?
A: Más.
E: Más, ¿por qué? *(Se ríe)*
A: Más porque he quitado la que está en este lado y del otro no.
E: Vale.

3) **Alumno: Ig. 13,02** **Nombre**: Ignacio **Fecha de Nacimiento:** 17/03/02

Escena Finitista

E: Ignacio, ¿cuántas pelotitas hay con lo que se refleja en el espejo?
A: 18.
E: Quítale la primera Ignacio, la primera, ¿cuántas hay ahora?
A: 16.
E: ¿Hay la misma cantidad que antes?
A: No.

Escena Infinitista

E: Ignacio, ¿cuántas pelotitas hay ahora entre los dos espejos?
A: ¡Eh!…27.
E: ¿27?, métete un poquito más entre los dos espejos.
A: *(Se sitúa mejor entre los dos espejos)*
E: ¿Las puedes contar?
A: No,
E: No, quítale la primera pelotita, ahí va, muy bien, la pregunta es la siguiente: ¿tienes la misma cantidad de pelotitas que antes?
A: ¡Eh!…no.
E: No, ¿por qué?
A: Porque he quitado una, y esa bola se multiplica por las demás si se quita.

4) **Alumno: Fr. 12,09** **Nombre**: Francisco Jesús **Fecha de Nacimiento:** 17/08/02

Escena Finitista

E: Francisco Jesús, ¿cuántas pelotitas hay contando las que se reflejan en el espejo?
A: 20.
E: Quita la primera Francisco, ¿cuántas hay ahora?
A: 18.
E: ¿Hay la misma cantidad qué antes?
A: No.

Escena Infinitista

E: Francisco, ¿cuántas pelotitas hay ahora entre los dos espejos?
A: ¡Eh!…30. *(Se pone de pié para verlas)*
E: ¿30?, ¿por qué? (Se ríen) Míralo bien, ¿se puede ver el final?
A: Sí.
E: Sí, ¿tú puedes contar todas las pelotitas?
A: No, no puedo.
E: No puedes, ¿verdad?, quita la primera otra vez, con mucho cuidado, eso es. La pregunta es la siguiente: ¿tiene la misma cantidad que antes?
A: No.
E: No, ¿por qué?
A: Porque ahora le he quitado una.
E: ¡Hum!… ¿aunque no se puede contar?
A: No.
E: Fran…
A: ¿Qué?
E: La pregunta… ¿tiene la misma cantidad?
A: No.

E: No, ok.

5) **Alumno: Pa. 12,09** **Nombre**: Pablo **Fecha de Nacimiento:** 20/08/02

Escena Finitista

E: Pablo Salcedo, ¿cuántas pelotitas hay contando las que se reflejan en el espejo?
A: Sin el espejo hay 10 y en el espejo hay…
E: 10 ¿y lo que se refleja en el espejo?
A: 10 también.
E: Entonces, ¿hay cuántos?
A: 20.
E: Venga, quita la primera.
A: ¿Esta?
E: Esa, ¿cuántas hay ahora?
A: 9.
E: Con lo que se refleja en el espejo.
A: ¡Ah!, vale, 18.
E: ¿Hay la misma cantidad que antes?
A: No.

Escena Infinitista

E: Pablo, ¿cuántas pelotitas hay ahora entre los dos espejos?
A: La misma 20. *(Mira al entrevistador)*
E: ¿20?, mira lo que hay, mira hasta el final chiquillo, ¿Tú ves el final?
A: No.
E: No, entonces, ¿cómo puedes decir que 20??
A: *(Permanece callado)*
E: ¿Cuántas hay? ¿Puedes contarlas?
A: No.
E: No, vale, quita la primera pelotita, la misma que quitaste antes. Muy bien, la pregunta es la siguiente, mira bien lo que hay entre los dos espejos, ¿hay la misma cantidad que antes?
A: No sé, porque no hay fin.
E: Entonces, ¿tú dirías que tiene la misma cantidad? o ¿no tienen la misma cantidad?
A: (*Piensa en silencio*) Sí, tienen la misma cantidad.
E: Vale.

6) **Alumno: An. 12,08** **Nombre**: Andrés **Fecha de Nacimiento:** 12/07/02

Escena Finitista

E: Andrés T., ¿cuántas pelotitas hay contando con las que se reflejan en el espejo?
A: 1, 2, 3, 4, 5…….20.
E: Quita la primera, ¿cuántas hay ahora?
A: 18.
E: ¿Qué hay más cantidad antes ó ahora?
A: Antes.

Escena Infinitista

E: Andrés T., ¿cuántas pelotitas hay ahora entre los dos espejos?
A: Infinitas.
E: Infinitas, vale, quítale ahora la primera pelotita. Ahí y acerca un poquito más el espejo para que no haya hueco, Andrés. Un poquito más, ahí, bien, la pregunta es la siguiente: ¿Tiene la misma cantidad ahora que antes?
A: Sí.
E: Sí, ¿por qué?
A: Sí, porque sigue siendo infinitas.

7) **Alumno: Vi. 13,03** **Nombre**: Víctor Juan **Fecha de Nacimiento:** 14/02/02

Escena Finitista

E: Juan R., ¿cuántas pelotitas hay con las que se reflejan en el espejo?
A: 9.
E: Con lo que se refleja en el espejo.
A: 18.
E: Quita la primera, ¿cuántas hay ahora?
A: 16.
E: ¿Hay la misma cantidad que antes?
A: No.

Escena Infinitista

E: Juan, ¿cuántas pelotitas hay ahora entre los dos espejos?
A: ¡Eh!… 27. *(Mira por encima de los espejos)*

E: ¿27?, cuéntalo, ¿vas a contarlo todo hasta el final?
A: Entre los espejos, ¡eh!… no sé.
E: No sabes, hay muchas ¿verdad? Quítale la primera otra vez, Juan, ahí está, la pregunta es la siguiente: ¿hay la misma cantidad de pelotitas que antes?
A: Hay menos.
E: Hay menos, ¿por qué?
A: Porque falta una.
E: Vale.

8) <u>Alumno: Al. 12,07</u> Nombre: Alejandro **Fecha de Nacimiento:** 17/10/02

Escena Finitista

E: Alejandro A., ¿cuántas bolas has contado con lo que se ve en el espejo?
A: 20.
E: ¿Cuántas?
A: 20.
E: Quita una, ¿cuántas hay ahora?
A: 18.
E: ¿Había más antes o ahora?
A: Había más antes.

Escena Infinitista

E: Alejandro, ¿cuántas pelotitas hay entre los dos espejos?
A: Un montón. *(Mira al entrevistador)*
E: Un montón, ¿tú las podrías contar?
A: No.
E: No, quita una de ellas, la primera si quieres, eso es, ¿cuántas hay ahora?
A: Un montón.
E: ¿Qué hay más antes, ahora o son iguales?, míralo.
A: Antes. *(Duda mira los espejos y la bola real)*
E: Antes, ¿por qué?
A: Porque ahora le he quitado una.
E: Sí, entonces ¿tú has podido ver que falta una?
A: No. *(Ríe)*
E: No, no, pero dices que antes había más que ahora, ¿no?
A: Igual.
E: Igual, ¿por qué?
A: Creo que sí.

9) <u>Alumno: Pa. 12,11</u> Nombre: Paola María **Fecha de Nacimiento:** 21/05/02

Escena Finitista

E: Paola, ¿cuántas pelotitas hay con lo que se refleja en el espejo?
A: 20.
E: Paola, quítale una de ellas, la primera, ¿cuántas hay ahora?
A: 18.
E: ¿Hay antes más que ahora o son iguales?
A: Hay menos.

Escena Infinitista

E: ¿Cuántas pelotitas hay ahora entre los dos espejos?
A: *(Mira)* 20.
E: ¿20?, mira bien.
A: 40
E: ¿40?, míralo bien, métete entre los espejos.
A: *(Se inclina hacia delante)*, ¿contar hasta el final?, *(Empieza a contar)*
E: Hasta el final, claro.
A: No sé cuantas.
E: ¿No sabes cuántas, verdad?, bien, quítale una de ellas, la primera,… esa, bien, la pregunta es la siguiente: ¿hay más cantidad ahora, antes o son iguales?
A: Iguales.
E: Iguales, ¿por qué?
A: Porque son infinitas.

10) <u>Alumno: Ju. 12,07</u> Nombre: Juan Antonio **Fecha de Nacimiento:** 10/10/02

Escena Finitista

E: Buenas Juan Antonio, ¿cuántas pelotitas hay contando las que se reflejan en el espejo?
A: Nueve más nueve igual a dieciocho.
E: Quita la primera pelotita, Juan, muy bien, ¿cuántas hay ahora?
A: 17.
E: ¿17?, cuéntalas bien…
A: 16.

E: La pregunta es la siguiente, ¿hay la misma cantidad de pelotas antes que ahora o son iguales?
A: Son iguales.
E: ¿Son iguales?
A: Sí.
E: ¿Cuántas había antes?
A: 18, pero…
E: ¿Y ahora?
A: Se le quita 2 y son iguales.
E: Son iguales.

Escena Infinitista

E: Juan Antonio, ¿cuántas pelotitas hay ahora entre los dos espejos?
A: Muchas.
E: Muchas, ¿se podrían contar?
A: No.
E: No, vale, quita la primera pelotita, la primera que hemos visto, eso, bien, la pregunta es la siguiente: ¿hay la misma cantidad de pelotitas antes que ahora?
A: No.
E: No, ¿cuántas había antes?, ¿más que ahora?
A: Sí.
E: ¿Por qué?
A: Porque hemos quitado una, y al quitar una no hay lo mismo, es una menos.
E: ¿Aunque tú no lo puedas contar?
A: No.

11) <u>Alumno: Ma. 13,00</u> Nombre: María Jesús **Fecha de Nacimiento:** 07/05/01

Escena Finitista

E: María Jesús M., ¿cuántas pelotitas hay contando las que están en el espejo?
A: ¿Contando lo que se refleja en el espejo?
E: Sí.
A: 20.
E: ¿Cuántas?
A: 20.
E: Bien, quítale una.
A: ¿Perdón?
E: Quítale una, la primera, ¿cuántas hay ahora?, cuéntalas.
A: Me he perdido.
E: ¿Cuántas?
A: 17, no sé.
E: Cuéntalas bien, chiquilla, ¿no sabes contar?
A: Me lío.
E: Vale, cuéntalas otra vez.
A: 16.
E: ¿Hay más cantidad antes o ahora?
A: Ahora hay menos.

Escena Infinitista

E: Muy bien María Jesús, ¿cuántas pelotitas hay ahora entre los dos espejos?
A: *(Se queda mirando por encima de los espejos)*, ¿hasta aquí?
E: Hasta aquí no, entre los dos espejos, con lo reflejado, con lo que se ve en los espejos María Jesús.
A: *(Mira al fondo)*
E: ¿Puedes contarlo?
A: *(Se pone de pie)* 14 por 9.
E: Pero… ¿tú ves el final de ahí María Jesús?
A: No.
E: Entonces ¿no puedes contarlo?, contesta María Jesús.
A: No, no se puede. *(Mira al entrevistador)*
E: Quita una pelotita, vale, la pregunta es la siguiente: ¿hay la misma cantidad de pelotitas antes, ahora o son iguales?, míralo.
A: No, no son iguales porque le he quitado una.
E: Vale.

12) <u>Alumno: Te. 12,09</u> Nombre: Teresa **Fecha de Nacimiento:** 01/08/01

Escena Finitista

E: Teresa M., ¿cuántas pelotitas hay contando las que se reflejan en el espejo?
A: 18.
E: 18 muy bien, quítale la primera, ¿cuántas hay ahora?
A: 16.

E: ¿Hay la misma cantidad antes que ahora?
A: No.

Escena Infinitista

E: Teresa, ¿cuántas pelotitas ahora hay entre los dos espejos?
A: Un montón.
E: Un montón, ¿Tú las podrías contar?
A: No sé.
E: ¿No sabes?, bien, quítale la primera pelotita.
A: ¿Qué le quite? *(Se ríe)*
E: Sí, se puede quitar.
A: ¿Puedo quitar cualquiera?
E: Sí, puedes quitar cualquiera, esa misma, venga, perfecto, bien, la pregunta es la siguiente: ¿podrías contar cuántas pelotitas hay ahora?
A: No.
E: No, ¿verdad?, y la pregunta es la siguiente: ¿hay la misma cantidad de pelotitas antes, ahora o son distintas?
A: Son distintas.
E: ¿Por qué?
A: Porque hemos quitado una pelotita.
E: Entonces, ¿antes había más que ahora?
A: Sí.

13) **<u>Alumno: Ai.13,00</u>** **Nombre**: Ainhoa **Fecha de Nacimiento:** 10/05/02

Escena Finitista

E: Ainhoa, ¿cuántas pelotitas hay, contando las que se reflejan en el espejo?
A: 20.
E: 20, quítale una Ainhoa, ¿cuántas hay ahora?
A: 10.
E: ¿10?, cuéntalas.
A: 18.
E: ¿Hay más antes o ahora?
A: Antes.

Escena Infinitista

E: No, contando lo que se refleja en los espejos.
A: Muchas.
E: Muchas, ¿tú las puedes contar?
A: No.
E: Quítale una, eso es.
A: ¿La dejo?
E: Si has cogido la primera, deberías coger la última porque no se puede acercar más, eso es. Así mejor. Acerca un poquito, ok. Bien la pregunta es la siguiente, le has quitado una, pero a la vista de los resultados ¿tiene la misma cantidad que antes?
A: No.
E: No, ¿por qué?
A: Porque hay una menos. *(Piensa en silencio).*
E: ¿Tú la has podido contar y falta esa?
A: No.
E: No, ¿entonces?
A: Es igual.
E: ¿Es igual?
A: O parece igual.
E: ¿Parece?, vale.

14) **<u>Alumno: Al. 12,09</u>** **Nombre**: Alejandro **Fecha de Nacimiento:** 17/08/02

Escena Finitista

E: Bien, Alejandro C., ¿cuántas pelotitas hay, con las que se reflejan en el espejo?
A: ¿Todo las que se reflejan en el espejo?
E: Eso.
A: 18.
E: Quítale la primera, Alejandro, vale, ¿cuántas hay ahora?
A: 16.
E: ¿Hay la misma cantidad que antes?
A: No.

Escena Infinitista

E: Alejandro, ¿cuántas pelotitas hay ahora entre los dos espejos?
A: ¿Entre los dos?
E: Sí, y las que están reflejadas claro.
A: ¡Uf!…no sé. *(Se dobla para mirar entre los dos espejos)*
E: ¿Las podrías contar?
A: No.
E: Quítale la primera pelotita Alejandro.
A: ¿La primera pelotita?
E: Sí, la primera pelotita. Vale, ¡eh!… la pregunta es la siguiente: ¿tiene la

misma cantidad de pelotitas antes que ahora? o ¿son iguales?
A: No.
E: Míralo bien, ¿hay la misma cantidad?
(Se queda mirando al entrevistador)
A: No lo sé, falta una a cada lado.
E: ¿Falta qué, Alejandro?
A: Una pelota en cada reflejo.
E: Vale.

15) <u>Alumno: Ma. 12,09</u> Nombre: María **Fecha de Nacimiento:** 22/08/02

Escena Finitista

E: María G., ¿cuántas pelotitas hay contando las que se reflejan en el espejo?
A: 18.
E: Quítale la primera.
A: ¿La primera?
E: La primera, la más cercana, ¿cuántas pelotitas hay ahora?
A: 16.
E: ¿Hay la misma cantidad que antes?
A: No.

Escena Infinitista

E: María, ¿cuántas pelotitas hay ahora entre los dos espejos?
A: 9.
E: ¿9?
A: Entre los dos sí, yo creo…
E: ¿Con las que están reflejadas?
A: No.
E: Quita la primera, eso es, acerca un poquito más el espejo. Ahí, perfecto; ¿Hay la misma cantidad de pelotitas antes que ahora? o ¿son diferentes?
A: No. *(Mira por los laterales del espejo)*
E: Dime, María
A: No.
E: ¿No?, ¿por qué?
A: Porque hay una menos y no se reflejan.
E: ¿Hay una menos?
A: Sí.
E: ¿Sí?, ¿las puedes contar para ver la diferencia?
A: No. *(Titubea)*
E: Pero, aún así dices que tienes una menos.
A: No, son iguales. Llegan al infinito.

16) <u>Alumno: Na.12,09</u> Nombre: Nayra **Fecha de Nacimiento:** 25/08/02

Escena Finitista

E: Nayra L., ¿cuántas pelotitas hay contando las que se reflejan en el espejo?
A: 20.
E: Quítale la primera pelotita, cógela con tu mano, ¿cuántas hay ahora?
A: 18.
E: ¿Hay la misma cantidad que antes?
A: ¿Qué?
E: ¿Hay la misma cantidad que antes?
A: No.

Escena Infinitista

E: Nayra, ¿cuántas pelotitas hay ahora entre los dos espejos?
A: Infinitas.
E: Infinitas, vale, quítale la primera. Eso es, bien, vamos acercar un poquito más el espejo.
A: ¿Este?
E: Sí. Acercamos un poquito más el espejo para que no haya hueco, ¿vale?
A: Se ha movido.
E: Sí, ponla en su lugar, en el huequito que hay, por favor, ahí, bien ahí, muy bien, (A pone la pelotita en su lugar);¿Hay la misma cantidad de pelotitas antes que ahora? o ¿son iguales?
A: No sé, las mismas.
E: ¿Las mismas?, vale ¿por qué?
A: Porque siguen estando los espejos uno enfrente del otro.
E: Sí, y ¿cuántas bola habría entonces entre los dos espejos?
A: Infinitas.

17) <u>Alumno: Ma. 12,04</u> Nombre: Juan Manuel **Fecha de Nacimiento:** 22/01/03

Escena Finitista

E: Manuel C., ¿cuántas bolas hay contando con lo que se refleja en el espejo?
A: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9…18.
E: 18, quita una de ellas, ¿cuántas hay ahora?
A: 16.
E: ¿Antes había más o había menos?
A: Antes había más.

Escena Infinitista

E: ¿Cuántas bolas ahora hay entre los dos espejos?
A: ¿Eh?, ¿entre los dos?
E: Entre los dos.
A: ¡Eh!… infinitas.
E: Infinitas vale, quita una de ellas, muy bien, vale, muy bien, ahí, vamos acercar el espejo para que no hay problemas, ¿cuántas bolas hay ahora?
A: Infinitas.
E: ¿Hay más cantidad antes, ahora o son iguales?
A: Iguales, hay infinitas.

18) <u>Alumno: Ma. 13,03</u> Nombre: María **Fecha de Nacimiento:** 06/02/02

Escena Finitista

E: María N., ¿cuántas pelotitas hay contando las que se reflejan en el espejo?
A: 20.
E: 20, muy bien, quita la primera María. Ahí va, ¿cuántas hay ahora?
A: 18.
E: ¿Hay la misma cantidad que antes?
A: No.

Escena Infinitista

E: María, ¿cuántas pelotitas hay ahora entre los dos espejos?
A: 20.
E: No, contando con las que se reflejan en los dos espejos.
A: D. Juan, como tú dices, no se puede contar. *(Mira al entrevistador)*
E: ¿No se puede contar?, bien, quítale la primera María y acerca el espejo para que no haya huequecito. Ahí, bien, la pregunta es la siguiente: ¿Tiene la misma cantidad de pelotitas que antes?
A: No.
E: No, ¿por qué?
A: Porque he quitado una.
E: Sí, y ¿has podido contar y ves que falta esa?
A: Sí, falta una.
E: Sí, ¿has contado y falta ésa?
A: Hombre claro, falta esa entre los espejos ¿no?, *(se ríe)*, no puedo decir cuántas hay.
E: Vale, ¿pero tú dices que hay menos que antes?
A: Sí.

19) <u>Alumno: Mar.13,00</u> Nombre: María Ángeles **Fecha de Nacimiento:** 16/05/02

Escena Finitista

E: Bien, María Ángeles Peña, ¿cuántas pelotitas hay contando las que se reflejan en el espejo?
A: 20.
E: Quítale la primera pelotita María Ángeles, ¿cuántas hay ahora?
A: 18.
E: ¿Hay la misma cantidad que antes?
A: No.

Escena Infinitista

E: Mari Ángeles, ¿cuántas pelotitas hay ahora entre los dos espejos?
A: Infinitas.
E: Infinitas vale, quítale la primera pelotita Mari Ángeles. Ahí, acerca los dos espejos.
A: ¿El qué?
E: Acerca los espejos para que no haya ese hueco. Ahí, muy bien, ahí está, ya está, ya está, bien. ¿Hay la misma cantidad de pelotitas antes que ahora?
A: Sí.
E: Sí, ¿por qué?
A: Bueno, bien tiene que haber……., yo pienso que hay más porque al estar más cerca se ve más profundo.
E: Y entonces, ¿Hay la misma cantidad?

A: No.
E: No, ¿qué había antes más que ahora?
A: Sí, había más que ahora.
E: ¿Más, por qué?
A: Pienso que al estar una pelotita más…, había más porque estaba más profundo, no sé.
E: Aunque hayas dicho que antes había infinitas pelotitas ahora hay infinitas pelotitas también.
A: Sí.

20) <u>Alumno: Mag. 13,00</u> Nombre: Magdalena **Fecha de Nacimiento:** 21/05/02

Escena Finitista

E: Magdalena P., ¿cuántas pelotitas hay contando las que se reflejan en el espejo?
A: 20.
E: Muy bien, quítale una Magdalena, ¿cuántas hay ahora?
A: 18.
E: ¿Hay la misma cantidad que antes?
A: No.

Escena Infinitista

E: Magdalena, ¿cuántas pelotitas hay ahora entre los dos espejos?
A: *(Se pone en pie)* 20.
E: 20, más las que se reflejan. Métete más, la cabecita dentro, ¿tú las puedes contar?
A: No.
E: Vale, quítale la primera pelotita. Esa, y acerca un poquito el espejo para que no haya hueco. Muy bien, la pregunta es la siguiente, mira ahora lo que hay entre los dos espejos. ¿Hay la misma cantidad antes que ahora?
A: No.
E: No, ¿por qué?
A: Porque hemos quitado una pelota y en cada espejo hay una menos.
E: ¿Sí?, ¿tú las podrías contar?
A: *(Permanece de pie, mirando entre los espejos)*
E: Magdalena, la pregunta
A: ¡Ah!…
E: ¿Tiene la misma cantidad que antes?
A: No, no tiene la misma.

CURSO: 2 º E. S. O.

1) Alumno: De.14,04 **Nombre**: Debla **Fecha de Nacimiento:** 19/01/01

Escena Finitista

E: Debla Blanco, ¿cuántas pelotitas hay contando las que se reflejan en el espejo?
A: 20.
E: 20, quítale una Debla, muy bien, ¿cuántas hay ahora?
A: 18.
E: ¿Cuántas hay ahora?, ¿igual que antesomenos?
A: Hay menos.

Escena Infinitista

E: Debla, ¿cuántas pelotitas hay ahora entre los dos espejos?
A: 30…muchísimos. *(Se ríe)*
E: Muchísimos, vale, quítale una, la primera Debla. Eso, vamos acercar los espejos para que no haya hueco. Bien, la pregunta es la siguiente, mira entre los dos espejos, ¿hay más cantidad que antes?
A: No.
E: O, ¿es distinta?
A: Distinta.
E: ¿Por qué?
A: Porque he quitado una pelotita y en el reflejo hay 3 menos.
E: ¿Hay 2 o 3 menos?
A: Aquí hay uno menos, otra menos y otra menos *(señala sitios)*, y las que se reflejan en los espejos.
E: ¿Tú has podido contar en los espejos que faltan esas?
A: Sí, 9.
E: Sí, pero con lo que se refleja en los espejos ¿lo has podido contar?
A: No,... ¿las cuento?
E: Vamos a estar mucho tiempo, creo yo.
A: Por eso. *(Se ríe)*
E: Miramos en los espejos, ¿Hay la misma cantidad que antes?
A: No.
E: No, ok.

2) Alumno: Al.13, 08 **Nombre**: Alba **Fecha de Nacimiento:** 16/09/01

Escena Finitista

E: Alba C., ¿cuántas pelotitas hay contando las que se reflejan en el espejo?
A: 20.
E: Quítale una Alba, vale, ¿cuántas hay ahora?
A: 19… no… 18.
E: ¿Hay la misma cantidad que antes?
A: No.

Escena Infinitista

E: Alba, ¿cuántas pelotitas hay ahora entre los dos espejos?
A: 20.
E: ¿20?, y con las que se reflejan en los espejos
A: ¡Hum!...no sé, es que hay muchas.
E: Muchas, ¿tú las puedes contar?
A: No.
E: No, quita la primera pelotita.
A: ¡Ay!, se ha caído.
E: No te preocupes, acércalo un poco más para que no hay hueco. Ok, vale, bien, a la vista de los resultados: ¿Tiene la misma cantidad que antes?
A: No.
E: No, ¿por qué?
A: Porque he quitado una.
E: ¿Y tú has podido contar que falta esa?
A: Sí.
E: ¿Sí?, ¿has podido contarlo?
A: No, contarlo no.
E: ¿Entonces?
A: Porque se quitó una, significa que hay uno menos.
E: Menos, vale.

3) Alumno: Ca.13, 05 **Nombre**: Candela **Fecha de Nacimiento:** 25/12/01

Escena Finitista

E: Candela M., ¿cuántas pelotitas hay con las que se reflejan en el espejo?

A: 20.
E: Quita una, la primera, eso es, ¿cuántas hay ahora?
A: 19.
E: ¿19?
A: Claro hay……18.
E: ¿Hay la misma cantidad que antes?
A: No.

Escena Infinitista

E: Candela, ¿cuántas pelotitas hay ahora entre los dos espejos?
A: Infinitas.
E: Infinitas, vale, ¿le puedes quitar la primera por favor? Acerca un poquito los espejos, quita ese hueco. Ahí, muy bien, bien, ¿ves ahora entre los dos espejos?
A: Sí.
E: La pregunta es la siguiente: ¿tiene la misma cantidad que antes?
A: ¡Hum!…, sí.
E: ¿Por qué?
A: Porque sigue habiendo……….., aunque quite una, sigue habiendo…………..
E: Sigue habiendo, ¿cuántas?
A: Infinitas.

4) <u>Alumno: Pa.13,10</u> Nombre: Paloma **Fecha de Nacimiento:** 01/07/01

Escena Finitista

E: Paloma M., ¿cuántas pelotitas hay contando con las que se reflejan en el espejo?
A: ¿Con lo del espejo?
E: Sí.
A: ¡Eh…! 20.
E: Quítale una Paloma, OK, ¿cuántas hay ahora?
A: 18.
E: ¿Hay la misma cantidad que antes?
A: ¿Qué?
E: ¿Si hay la misma cantidad?
A: No, hay menos.

Escena Infinitista

E: Paloma, ¿cuántas pelotitas hay ahora entre los dos espejos?
A: Entre los dos espejos hay 20 pelotitas.
E: 20 pelotitas ¿y lo que se refleja?
A: Infinitas, no se ven.
E: Infinitas, no se ven, ¿no se podrían contar Paloma?
A: ¿Qué?
E: ¿Si se podrían contar?
A: No.
E: Quítale una pelotita por favor, Acércalo un poquito, esos es. Observa lo que hay entre los dos espejos, ¿vale?, y lo que se refleja, la pregunta es la siguiente: ¿tiene la misma cantidad de pelotitas antes que ahora?
A: No, porque hemos quitado una, pero lo que se refleja se ve infinito.
E: ¿Entonces?
A: Hay menos.
E: ¿Hay menos?
A: *(Se ríe)* No, no se puede contar.
E: ¿No se puede contar?, ¿por qué?, ¿por qué hay infinitas?
A: Sí.

5) <u>Alumno: Ma.13, 09</u> Nombre: María **Fecha de Nacimiento:** 29/08/01

Escena Finitista

E: María M., ¿cuántas pelotitas hay contando las que se reflejan en el espejo?
A: 20.
E: Quítale la primera pelotita.
A: ¿Qué?
E: La primera pelotita, quítala, ahí va. ¿Cuántas hay ahora María?
A: 19.
E: ¿19?, cuéntalas bien María.
A: 18.
E: ¿Hay la misma cantidad que antes?
A: No.

Escena Infinitista

E: María, ¿cuántas pelotitas hay ahora entre los dos espejos?
A: 10.
E: Vale, pero me gustaría saber lo que hay con lo que se refleja en los espejos.
A: ¿Lo que se refleja en los espejos?
E: Sí.

A: 10 bolas.
E: Lo que se ve en los espejos.
A: Muchísimas.
E: Muchísimas, quítale la primera pelotita por favor. Ok, acerca un poquito los espejos para que no haya hueco entre los dos. Perfecto, bien.
A: Se ha movido una.
E: Ponla en su sitio, para que tú lo veas mejor, ponte de pie, bien, no te preocupes María, ahí, eso, ahora viene la pregunta, mira lo que hay entre los espejos, la pregunta es la siguiente: ¿tiene la misma cantidad de pelotitas que antes?
A: No.
E: No, ¿por qué?
A: Porque he quitado una. *(Coge y mira la bola que ha quitado*)
E: Y tú, ¿has podido contar las que hay ahora y que falta una?
A: No puedo contarlas.
E: ¿Entonces?
A: Hay muchas.
E: Pero, tú dices que hay menos que antes.
A: Sí.
E: Porqué falta una…
A: Sí.
E: Vale.

6) **<u>Alumno: Lu.15, 04</u>** **Nombre**: Lucía **Fecha de Nacimiento:** 28/01/00

Escena Finitista

E: Lucía L., ¿cuántas pelotitas hay contando las que se reflejan en el espejo?
A: *(Cuenta las pelotitas una a una)*, 20.
E: Quita la primera pelotita, ¿cuántas hay ahora?
A: 19.
E: ¿19?, cuéntalas.
A: *(Cuenta las pelotitas una a una)*, 18.
E: ¿Hay la misma cantidad que antes?

A: No.

Escena Infinitista

E: Lucía, ¿cuántas pelotitas hay ahora entre los dos espejos?
A: No lo sé.
E: No lo sabes, ¿no?, ¿se podrían contar?
A: No.
E: No hombre, vale. Vamos a quitarle una pelotita, la primera que hemos visto antes Lucía, ahí. Muy bien, eso, bien, tú ahora ves los que hay entre los dos espejos, ¿verdad?
A: Sí.
E: La pregunta es la siguiente: ¿tiene la misma cantidad que antes?
A: No lo sé.
E: ¿No lo sabes?, ¿tú qué dirías?, qué tiene la misma cantidad o qué no la tiene.
A: Yo diría que no.
E: Que no, no, ¿por qué?
A: Porque al quitarle una, hay una menos.
E: Vale.

7) **<u>Alumno: Al.13, 06</u>** **Nombre**: Alba **Fecha de Nacimiento:** 16/09/01

Escena Finitista

E: Alba C., ¿cuántas pelotitas hay contando las que se reflejan en el espejo?
A: 20.
E: Quítale una Alba. Vale, ¿cuántas hay ahora?
A: 19… no… 18.
E: ¿Hay la misma cantidad que antes?
A: No.

Escena Infinitista

E: Alba, ¿cuántas pelotitas hay ahora entre los dos espejos?
A: 20.
E: ¿20?, y con las que se reflejan en los espejos.
A: ¡Hum!…no sé, es que hay muchas.
E: Muchas, ¿tú las puedes contar?
A: No.
E: No, quita la primera pelotita.
A: ¡Ay!, se ha caído.

E: No te preocupes, acércalo un poco más para que no hay hueco. Ok, vale, bien, a la vista de los resultados: ¿Tiene la misma cantidad que antes?
A: No.
E: No, ¿por qué?
A: Porque he quitado una.
E: ¿Y tú has podido contar que falta esa?
A: Sí.
E: ¿Sí?, ¿has podido contarlo?
A: No, contarlas no.
E: ¿Entonces?
A: Porque se quitó una y significa que hay uno menos.
E: Menos. Vale.

8) <u>Alumno: Ma.14, 03</u> Nombre: Manuel **Fecha de Nacimiento:** 13/02/01

Escena Finitista

E: Manuel B., ¿cuántas pelotitas hay ahí, contando las que se reflejan?
A: 20.
E: Quítale una, Manolo, ¿cuántas hay ahora?
A: 18.
E: ¿Hay más antes, ahora o son iguales?
A: Hay menos.

Escena Infinitista

E: Manolo, ¿cuántas pelotitas hay ahora entre los dos espejos?
A: Entre los dos espejos hay infinitas, porque no se ve el final.
E: Eso es, quítale la primera. Esa no, la otra.
A: ¡Ah!, vale.
E: De esa forma, vamos a intentar juntar los espejos.
A: ¿Acerco el espejo?
E: Acércalo, ok, perfecto. Bien la pregunta es la misma que antes Manolo, ¿hay la misma cantidad de pelotitas antes que ahora?
A: Sí, porque son infinitas.
E: ¿Aunque hayas quitado una?
A: Antes había más, pero siguen siendo infinitas, no se sabe cuántas hay.
E: Entonces, aclárate, tú que dirías, ¿son iguales o no?
A: Yo diría que…, puedo hacer una cosa, ¿puedo echarlo para atrás?
E: Sí claro, si te aclaras, perfecto. Eso es para que no haya hueco entre los espejos
A: Ahora, hay menos, pero sigue habiendo infinitos, no se sabe cuántas hay.
E: ¿Entonces habría las mismas?
A: No.
E: ¿Aunque sean infinitas?
A: No, porque si le quito una, no se ve reflejada en este espejo, ni en este, ni en este otro.
E: Muy bien, muchas gracias.

9) <u>Alumno: Se.14,02</u> Nombre: Sergio **Fecha de Nacimiento:** 20/03/01

Escena Finitista

E: Sergio Ramos, ¿cuántas pelotitas hay contando las que se reflejan en el espejo?
A: 20.
E: Quítale la primera Sergio, la primera pelotita, OK, ¿cuántas hay ahora?
A: 18.
E: ¿Hay más antes o son iguales?
A: Hay menos.

Escena Infinitista

E: Sergio Ramos, ¿cuántas pelotitas hay ahora entre los dos espejos?
A: Infinitas.
E: Infinitas vale, quítale la primera por favor. Eso es, muy bien, acerca un poquito los espejos para que no se quede hueco, observa ahora, ¿cuántas hay?
A: ¡Hum!…, siguen habiendo infinitas.
E: Infinitas, vale, la pregunta es la siguiente: ¿hay la misma cantidad de pelotitas antes que ahora? o ¿son diferentes?
A: Son la misma cantidad.
E: ¿Por qué?
A: Sigue habiendo infinitas.
E: Vale.

10) <u>Alumno: La.14,03</u> Nombre: Laura **Fecha de Nacimiento:** 10/02/01

Escena Finitista

E: Laura R., ¿cuántas pelotitas hay contando con las que se reflejan en el espejo?
A: 20.
E: 20, mira Laura, quita la primera. Ok, ¿cuántas hay ahora?
A: 18.
E: 18, ¿hay la misma cantidad que antes?
A: No.

Escena Infinitista

E: Laura, ¿cuántas pelotitas hay ahora entre los dos espejos?
A: 20, entre los dos espejos 10.
E: 10, ¿y las que se reflejan?
A: Infinitas.
E: Infinitas, quítale la primera pelotita, acerca los espejos para que no haya esos huecos ahí, muy bien, bien, ¿cuántas hay ahora?
A: Infinitas.
E: La pregunta es la siguiente: ¿hay la misma cantidad antes que ahora?
A: Sí.
E: ¿Por qué?
A: Porque en el espejo se refleja infinitas veces.
E: Vale.

11) <u>Alumno: Ju.13,07</u> Nombre: Juan José **Fecha de Nacimiento:** 10/10/01

Escena Finitista

E: Entrevista a Juan José Butrón: Juan José, ¿cuántos caramelos hay contando con los que hay en el espejo?
A: 6.
E: Quita uno Juan José, ¿cuántos hay ahora?
A: 4.
E: 4, ¿hay la misma cantidad que antes?
A: No.

Escena Infinitista

E: Juan José, ¿cuántos caramelos ahora hay entre los dos espejos?
A: *(Mira entre los espejos, callado)* ¿Se puede subir?
E: Sí, sí, un poquito más, ¿podrías contarlos?
A: Que va, eso continúa.
E: Continúa, ¿verdad? Vale, ¿puedes quitar un caramelo con la otra mano por favor?, uno cualquiera, ese mismo, ¿cuántos caramelos hay?
A: Sigue continuando.
E: ¿Hay diferencia entre antes y después?
A: Sí.
E: ¿Sí?, ¿por qué?
A: Sí, uno menos.
E: ¿Uno menos?, pero… ¿podrías contarlos para ver la diferencia?
A: *(Permanece callado)*
E: Entre el antes y el después.
A: Que antes había entre un espejo y otro 6.
E: No, no, yo quiero que cuentes todos los caramelos que hay, ¿pudiste contarlo anteriormente?
A: No.
E: ¿Y ahora los puedes contar?
A: Tampoco.
E: Entonces, ¿el resultado final que dirías tú?
A: Que son iguales.
E: ¿Sí?, ¿tú crees?
A: No, no.

12) <u>Alumno: Gu.13,06</u> Nombre: Alejandro **Fecha de Nacimiento:** 12/11/01

Escena Finitista

E: Alejandro Guadalupe, mira los caramelos y el espejo, ¿cuántos caramelos hay?, sumando los que hay en el espejo.
A: 14.
E: Alejandro, quita uno, ¿cuántos caramelos hay ahora?
A: 12.
E: ¿Qué hay más cantidad de caramelos antes o ahora?
A: Antes.

Escena Infinitista

E: Alejandro, ¿cuántos caramelos hay ahora?
A: 14.
E: 14 no, quiero que sumes todos, los 14 más todos los que hay en los espejos
A: *(Mira entre los espejos)*
E: ¿Se pueden contar todos?
A: No.
E: No, ¿verdad?, ¿hay mucha cantidad, no?
A: Sí.
E: Vale, Alejandro con la otra manita quita otro caramelo, cualquiera, le quitas uno ¡eh!
A: Sí.
E: Mira, ¿cuántos caramelos hay ahora?
A: No sé.
E: ¿Hay diferencia entre lo anterior y ahora?
A: Sí.
E: Sí, ¿por qué?
A: Porque he quitado uno.

13) <u>Alumno: Al.13,07</u> Nombre: Álvaro **Fecha de Nacimiento:** 22/10/01

Escena Finitista

E: Entrevista a Álvaro. Álvaro, ¿cuántos caramelos hay sumando los que hay en el espejo?
A: 14.
E: Quítale uno, ¿cuántos hay ahora?
A: 12.
E: ¿Tienen la misma cantidad que antes?
A: Antes había más.

Escena Infinitista

E: Bien, Álvaro, mira al fondo de las pantallas, ¿hay fondo?
A: No.
E: ¿Cuántos caramelos hay ahora?
A: Infinitos.
E: ¿Se pueden contar?, míralo, míralo, ¿tú los puedes contar?
A: Como poder, se puede.
E: ¿Sí?
A: Pero sería…demasiado tiempo, sería infinito.
E: Ahora quítale un caramelito, éste por ejemplo, ¿se podría contar ahora?
A: ¡Eh!… ¡claro!
E: ¿Sí?, ¿cuántos cuentas?, ¿cuántos hay?
A: ¡Eh!…también infinitos.
E: Y el infinito ¿se puede contar?, mirando, mira los espejos, ¿se puede contar?
A: No.
E: Aunque quite uno, ¿hay más cantidad de caramelos ahora o antes?
A: Son los mismos. No hay diferencia.
E: No hay diferencia.

14) <u>Alumno: Pa.13,09</u> Nombre: Paula **Fecha de Nacimiento:** 18/08/01

Escena Finitista

E: Paula M., ¿cuántas pelotitas hay contando las que se reflejan en el espejo?
A: 10.
E: Quita la primera Paula, ¿cuántas hay ahora?
A: 9.
E: ¿Seguro?, cuéntalas bien.
A: ¿Y lo que se refleja en el espejo también?
E: Sí.
A: Ah…, 18.
E: Paula, antes había 20, ¿no?
A: Sí.
E: ¿Hay la misma cantidad de pelotitas antes que ahora?
A: No.

Escena Infinitista

E: Paula M., ¿cuántas pelotitas hay ahora entre los dos espejos?
A: ¿30?
E: Hay más, si metes un poco más la cabecita, ¿tú lo puedes contar?
A: ¡Uf…! es que yo no veo y ese es el problema.
E: Aunque no lo veas, ¿se te escapa, no?
A: Ni idea.
E: Ni idea, bien, vamos a quitar la primera pelotita.
A: ¿Lo acerco?

E: Sí. Un momentito, ¿se podrá contar ahora?
A: *(Piensa)* ¡Uf…!
E: No, ¿no?, bien, la pregunta es muy sencilla Paula, ¿hay la misma cantidad de pelotitas antes que ahora?
A: Sí, ¿no?
E: Sí, ¿por qué?
A: Sí porque hemos hecho lo mismo que antes y van hasta el fondo.

15) <u>Alumno: Jo.13,11</u> Nombre: José Manuel **Fecha de Nacimiento:** 14/06/01

Escena Finitista

E: José Manuel V., ¿cuántas pelotitas hay contando las que se reflejan en el espejo?
A: 20.
E: Quítale una, la primera pelotita José Manuel. Muy bien, ¿cuántas hay ahora?
A: 18.
E: ¿Hay la misma cantidad que antes?
A: No.

Escena Infinitista

E: José Manuel, ¿cuántas pelotitas hay ahora entre los dos espejos?, contando las que se reflejan.
A: 30.
E: Mira un poquito más para abajo, ¿ves el final?
A: Sí.
E: Vale, ¿cuántas pelotitas hay entre los dos espejos?
A: Más de 30.
E: ¿Más de 30?, ¿muchas más?
A: Sí.
E: Vale, ¿las podrías contar?
A: ¡Uf!
E: Difícil, ¿verdad?, quítale la primera pelotita. Perfecto, acerca el espejo por favor. Bien ¿cuántas hay ahora?, solamente viéndolo, mira lo que hay entre los dos espejos, las que se reflejan.
A: 27.
E: ¿27?, míralo un poquito más por abajo.
A: Más de 27.
E: La pregunta es la siguiente José Manuel, ¿hay la misma cantidad de pelotitas antes que ahora?
A: Sí.
E: Sí, ¿por qué?
A: Porque como hay más espejos, más se refleja las pelotitas.
E: ¿Aunque esas pelotitas son las mismas cantidades que antes?
A: Sí, es la misma cantidad.

CURSO: 3 º E. S. O.

1) Alumno: Lu.15,00 **Nombre**: Lucía **Fecha de Nacimiento:** 08/05/00

Escena Finitista

E: Lucía Terrones, ¿cuántas pelotitas hay, contando con las que se reflejan en el espejo?
A: Eh...20.
E: Quítale una pelotita, ¿cuántas hay ahora?
A: 18.
E: ¿Hay más antes o ahora?
A: Antes.

Escena Infinitista

E: Bien, ¿cuántas pelotitas hay ahora entre los dos espejos?
A: No sé…, muchas.
E: Muchas, ¿las puedes contar?
A: No.
E: Quita la primera pelotita Lucía. *(Quita la segunda bola)* Has cogido la segunda, vale, aún así, ¿cuántas pelotitas hay?
A: No sé.
E: ¿Muchas?
A: Sí.
E: Vale, la pregunta es la siguiente, ¿hay más pelotitas antes o ahora? o ¿son iguales?
A: Antes.
E: ¿Por qué?
A: Porque he quitado una pelotita, entonces hay menos.
E: ¿Tú las puedes contar?
A: No.
E: Aún así, dices que tienes más cantidad antes que ahora ¿no?
A: Sí.

2) Alumno: Cl.14,10 **Nombre**: Claudia **Fecha de Nacimiento:** 15/07/00

Escena Finitista

E: Claudia Ramírez, ¿cuántas pelotitas hay contando con lo que se refleja en el espejo?
A: 20.
E: 20, quítale una Claudia, ¿cuántas pelotitas hay ahora?
A: 18.
E: ¿Hay más antes o ahora?
A: ¡Eh!…, antes.

Escena Infinitista

E: Claudia, ¿cuántas pelotitas hay entre los dos espejos?
A: Infinitas.
E: Infinitas vale, quítale la primera pelotita por favor, muy bien, acerca el espejo, eso es, bien, la pregunta es la siguiente: ¿hay la misma cantidad que antes?
A: No.
E: ¿Por qué?
A: Porque hay infinitas menos una.
E: ¿Infinitas menos una?, ¿entonces sería menos?
A: Sí, hay una menos. *(Se ríe)*

3) Alumno: Pa.14,09 **Nombre**: Pablo **Fecha de Nacimiento:** 27/08/00

Escena Finitista

E: Pablo, mira los caramelos, ¿cuántos hay junto con los que aparece en el espejos?
A: 14.
E: Vale, quita uno, ¿cuántos hay ahora?
A: 12.
E: ¿Cuándo hay más antes o después?
A: Antes.
E: Antes.

Escena Infinitista

E: Pablo, ¿cuántos caramelos hay ahora?
A: ¡Eh!….6 por…, 7 por…
E: ¿Puedes contarlos?, ¿tiene fin?
A: No tiene fin.
E: Entonces, ¿cuántos puede haber ahora?
A: Indefinidos.
E: ¿Indefinidos?
A: Infinitos.

E: Bueno, con la otra mano quita un caramelo, ¿cuántos hay ahora?
A: Infinitos.
E: ¿Qué hay más, antes o después?
A: ¡Eh!…. Antes.
E: ¿Dime…?
A: ¡Eh!….
E: Míralo.
A: Son iguales, son iguales.
E: Quítale otro, has quitado 2, ¿puedes contarlo?
A: No.
E: ¿Tiene la misma cantidad de número antes que ahora?
A: Sí.

4) <u>Alumno: Al.14,06</u> Nombre: Alejandro **Fecha de Nacimiento:** 29/11/00

Escena Finitista

E: Alex, ¿cuántos caramelos hay contando los que aparecen en el espejo?
A: 14.
E: 14, con una mano coge uno de ellos y lo quitas, ¿cuántos hay ahora?
A: 12.
E: ¿Cuándo tienes más, antes, ahora o son iguales?
A: Ahora hay menos.

Escena Infinitista

E: Alex, ¿cuántos caramelos hay entre los dos espejos?
A: Infinitos.
E: ¿Se puede contar?
A: No.
E: Alex, con una de tus manos quita un caramelo, ¿cuántos hay ahora?
A: Uno menos.
E: ¿Se puede contar?
A: Tampoco.
E: ¿Crees que antes había más caramelos que ahora?
A: Ahora hay menos.
E: ¿Sí?, ¿lo puedes contar?
A: No, pero si he quitado uno, se supone que son menos.
E: Vale.

5) <u>Alumno: Fa.15, 03</u> Nombre: Fátima **Fecha de Nacimiento:** 17/01/00

Escena Finitista

E: Fátima B., ¿cuántos caramelos hay contando lo que se refleja en el espejo?
A: 6.
E: Contado con lo que se refleja en el espejo.
A: 6.
E: En el espejo, y lo que es real, todo.
A: 6 en el espejo.
E: ¿Y?
A: Y 6 en la realidad.
E: ¿Cuántos 12, entonces?
A: 12.
E: Quítale uno Fátima, ¿cuántos hay ahora?
A: 10.
E: ¿Hay más antes, ahora o son iguales?
A: Antes había más.

Escena Infinitista

E: Fátima, ¿cuántos caramelos hay ahora entre los dos espejos?
A: *(Se queda callada)*
E: ¿Los vas a contar?
A: Muchos.
E: ¿Podrías contarlos?
A: No.
E: No, con una mano quita uno de ellos, por ejemplo ése, vale, mira ahora, ¿podrías contar cuántos caramelos hay ahora?
A: Sí, pero hay muchos.
E: Muchos, pero…. ¿Hay igual que antes? o ¿antes había más?
A: Antes había más.
E: ¿Por qué?
A: Porque estaba más pegado y se veía más cantidad.
E: ¿Más cantidad? Si yo acerco un poco esto… *(Acerca el espejo móvil)*
A: Ahora, está igual que antes.
E: ¿Hay más cantidad antes, ahora o son iguales?
A: Así son iguales.
E: Son iguales, ¿aún quitando uno?
A: Sí, si quitamos uno hay menos.
E: Entonces dime, ¿son iguales o antes había más?

A: Ahora está igual, antes al quitarle uno, estaba diferente y ahora lo que se ve en el reflejo está igual.

.

6) **Alumno: Pa.14,11** **Nombre**: Pablo **Fecha de Nacimiento:** 07/04/00

Escena Finitista

E: Pablo B., ¿cuántos caramelos hay?, contando con los que se reflejan en el espejo.
A: 12.
E: 12, con una de tus manos quita un caramelo.
A: ¿Del espejo o de aquí?
E: Evidentemente del espejo no puedes quitarlo. *(Se ríen)* Muy bien, ¿cuántos caramelos hay ahora?
A: 8.
E: ¿8?, cuéntalos bien.
A: 12
E: ¿12?, cuéntalos bien.
A: 10
E: 10, ¿Qué hay más cantidad antes o ahora?
A: Antes.

Escena Infinitista

E: Pablo, ¿cuántos caramelos hay entre los dos espejos?
A: ¿Entre los dos espejos…? Infinitos. *(Se ríe)*
E: ¿Se podrían contar?
A: No
E: Vale, con una de tus manos quita uno de ellos, el que sea más próximo, ese por ejemplo. Muy bien, ahora la pregunta es la siguiente: ¿tienen las mismas cantidades de caramelos antes que ahora?
A: Tienen las mismas.
E: Tienen las mismas, ¿verdad?
A: Sí.
E: ¿Se podrían contar?
A: No.

7) **Alumno: Mi.14,10** **Nombre**: Miryam **Fecha de Nacimiento:** 28/06/00

Escena Finitista

E: Muy bien Miriam, Miriam G., viendo el espejo y los caramelos, ¿cuántos caramelos hay contando los que se ven en el espejo?
A: ¿Qué se ven en el espejo?
E: Sí.
A: 12.
E: Sí, con una de tus manos quita el primero, ¿cuántos caramelos hay ahora?
A: ¡Hum!…10.
E: 10, ¿hay más caramelos, antes o después o son iguales?
A: Antes.
E: Antes.

Escena Infinitista

E: Miriam, ¿cuántos caramelos hay ahora entre los dos espejos?
A: Pues… 10 también ¿no?
E: ¿Sí?, cuenta los que se reflejan en los espejos.
A: *(Silencio, mira y cuenta los caramelos)*
E: ¿Los vas a contar?
A: Puede haber 60.
E: 60, ¿por qué? *(Se ríe)*
A: No sé, porque he multiplicado por 6. *(Se ríen los dos)*
E: ¿Los has multiplicado por 6?
A: Porque es lo que se refleja.
E: ¿Y en el reflejo que ves?, intenta ponerlo un poquito más al fondo del todo
A: ¡Ojú!, pues entonces no puedo contarlo.
E: No puedes contarlo, bien, con una de tus manos quita uno de los caramelos, el que está más en el extremo. Ese de ahí, vale, ahora que has quitado uno de ellos, ¿qué hay más cantidad de caramelos antes, ahora ó son iguales?
A: Antes.
E: Antes, ¿por qué?
A: Porque había uno más.
E: ¿Uno más?, ¿tú los ha podido contar?
A: No.
E: ¿Entonces?
A: Pero… si había uno más, tendría que haber más caramelos.

E: Vale.

8) <u>Alumno: Jo.15,03</u> Nombre: José Mª **Fecha de Nacimiento:** 17/01/00

Escena Finitista

E: José María, contando los caramelos que se reflejan en el espejo, ¿cuántos hay?
A: ¡Eh!…12.
E: Quita el primero, ¿cuántos caramelos hay ahora?
A: ¡Eh!…10.
E: ¿Hay más ahora o antes?
A: Antes.

Escena Infinitista

E: José María, ¿cuántos caramelos hay ahora entre los dos espejos?
A: ¡Eh!…12.
E: No, cuenta los que hay en los espejos, los que se reflejan. ¿Los podrías contar?
A: No.
E: Muy bien, con una de tus manos, quita el primero… ese de ahí, perfecto, ¿cuántos caramelos hay ahora?
A: No los puedo contar.
E: ¿Hay la misma cantidad de caramelos antes que ahora?
A: Hay menos.
E: ¿Por qué?
A: Porque he quitado uno.
E: ¿Lo has podido contar?
A: No.
E: ¿Entonces?
A: ¡Hum!…, hay los mismos.
E: ¿Por qué?
A: Porque son infinitos.

9) <u>Alumno: Ca.15,03</u> Nombre: Candela **Fecha de Nacimiento:** 08/01/00

Escena Finitista

E: Candela, mirando el espejo y los caramelos, ¿cuántos caramelos hay?
A: 12.
E: Con una de tus manos, quita el primero, ¿cuántos caramelos hay ahora?
A: 10.
E: ¿Qué hay más antes o ahora?
A: Antes.

Escena Infinitista

E: Candela, ¿cuántos caramelos hay ahora entre los dos espejos?
A: Infinitos.
E: Muy bien, con una de tus manos quita el primero,…eso es, muy bien. Mirando los espejos,… ¿Tienes más cantidad de caramelos antes, ahora o son iguales?
A: Son iguales.
E: ¿Por qué?
A: Porque hay lo mismo, sigue hasta el fondo.
E: Hasta el fondo, verdad.

10) <u>Alumno: Ma.14,10</u> Nombre: María Isabel **Fecha de Nacimiento:** 03/03/00

Escena Finitista

E: Muy bien María Isabel H., mirando el espejo, ¿cuántos caramelos hay?: tantos los que se reflejan como los que están en la mesa.
A: 12… ¿no?
E: Con una de tus manos quita un caramelo, el primero, ¿cuántos hay ahora?
A: 10.
E: Bien, ¿hay ahora la misma cantidad que antes?
A: No.

Escena Infinitista

E: María Isabel
A: Sí.
E: O Isabel, ¿cómo quieres…?
A: María. *(Se ríe)*
E: María, ¿cuántos caramelos hay ahora entre los dos espejos?
A: Infinitos.
E: Vale, con una de tus manos quita el primero, bien, estupendo, ¿cuántos hay ahora?
A: Infinitos.
E: ¿Hay la misma cantidad antes qué ahora?

A: Sí.
E: Aunque, ¿hayas quitado uno?

A: Sí.

11) Alumno: Al.14,10 Nombre: Álvaro **Fecha de Nacimiento:** 22/06/00

Escena Finitista

E: Álvaro L., ¿cuántos caramelos hay junto con lo que se refleja en el espejo?
A: 12.
E: 12, quítale uno el primero, ¿cuántos hay ahora?
A: 10.
E: ¿Hay más cantidad ahora o antes?
A: Antes.

Escena Infinitista

E: Bien Álvaro, ¿cuántos caramelos ahora hay entre los dos espejos?
A: Entre los dos, 6.
E: No, con los que se reflejan ahora.
A: ¿Se reflejan…? *(Se queda en silencio)*
E: ¿Los vas a contar?
A: No. *(Se ríe)*
E: ¿Cuántos hay?
A: Yo que sé.
E: ¿Qué has dicho antes?
A: 12.
E: ¿12, antes?
A: 18.
E: ¿18? *(Se ríe)*
A: No.
E: Olvídalo, ¿tú puedes contarlos?
A: No.
E: No puedes contarlos, ¿verdad? ¿Hay muchos?
A: Sí.
E: Con una de tus manos, quita uno de ellos, el primero que aparece ahí. Eso es, perfecto ahora…
A: Hay 12…, hay 10.
E: Hay que meterse entre los espejos, tienes que mirar lo que se refleja, hay más cantidad de caramelos ¿ahora o antes?
A: Antes.
E: ¿Por qué?
A: Porque hay una menos.
E: ¿Tú puedes contar todo lo que se ve?
A: No, pero se ven menos. *(Mira entre los espejos)*
E: ¿Hay menos?
A: Sí.
E: ¿Tú ves el final?
A: No.
E: Aun así, ¿sigues diciendo que hay menos?
A: Sí.

12) Alumno: Su.14,05 Nombre: Cheyer Susana **Fecha de Nacimiento:** 22/11/00

Escena Finitista

E: Muy bien, ¿cuántos caramelos hay?, contando con los que se reflejan en el espejo.
A: 12.
E: Quítale uno, ¿cuántos hay ahora?
A: 10.
E: ¿Hay más antes, ahora o son iguales?
A: Antes.

Escena Infinitista

E: ¿Cuántos caramelos hay ahora entre los dos espejos?
A: ¡¡Eh!!…, no lo sé.
E: Muchos, ¿verdad? ¿Tú los puedes contar?
A: No, son infinitos.
E: Con una mano, quita el primer caramelo, eso es, muy bien, míralo ahora.
A: Ahora sí puedo contarlo.
E: ¿Se puede contar?, ¿seguro?, acerca el espejo un poco más, ahora sí, la pregunta es la siguiente: ¿Hay más cantidad de caramelos antes, ahora o son iguales?
A: Antes había más caramelos.
E: ¿Por qué?
A: Porque antes había más.
E: ¿Lo has podido contar?
A: Antes sí, ya no.
E: ¿Y, ahora no?
A: No.
E: Entonces por quitarle uno, ¿ahora tiene menos?

A: Sí.

13) Alumno: Ma.14,09 **Nombre**: María **Fecha de Nacimiento:** 25/08/00

Escena Finitista

E: María.
A: ¿Qué?
E: ¿Cuántas pelotitas hay junto con las que se reflejan en el espejo?
A: 16.
E: Coge y quita una, ¿cuántos hay ahora?
A: 14.
E: ¿Hay más o menos que antes?
A: Antes había más.

Escena Infinitista

E: María, ¿cuántas pelotitas hay ahora entre los dos espejos?
A: Infinitas.
E: ¿Lo podrías contar?
A: No.
E: Con una de tus manos, quita una de ellas, eso es, muy bien, acerca un poquito más el espejo, ahí, vale, ¿cuántas hay ahora?
A: Infinitas.
E: ¿Hay más antes, ahora o son iguales?
A: Antes.
E: Antes, ¿por qué?
A: Porque al quitar una pelotita, quito infinitas pelotitas.
E: ¿Quito infinitas pelotitas?
A: Sí.
E: ¿Por qué?
A: Porque al quitar una pelotita sigue habiendo infinitas pero hay una menos
E: ¿Las puedes contar?
A: No las puedo contar, pero…sigue habiendo infinitas.
E: Entonces, ¿hay más, menos o son iguales?
A: Son iguales.

14) Alumno: Ca.14,10 **Nombre**: Carmen **Fecha de Nacimiento:** 05/06/00

Escena Finitista

E: Carmen, ¿cuántos caramelos hay contando los que se ven en el espejo?
A: 16.
E: Quita una, la primera que te encuentras, ¿cuántos hay ahora?
A: 14.
E: ¿Hay más antes o ahora?
A: Antes.

Escena Infinitista

E: Carmen, ¿cuántas pelotitas ahora hay entre los dos espejos?
A: Muchas.
E: Muchas, ¿se podrían contar?
A: No.
E: Con una de tus manos quita la primera, ¿cuántas hay ahora?
A: Las mismas, un poquito menos.
E: ¿Un poquito menos?, ¿por qué?
A: Porque he quitado una.
E: ¿Tú las podrías contar para saber que hay una menos?
A: No.
E: Entonces, ¿hay más cantidad de pelotitas, antes, ahora o son iguales?
A: Antes.
E: ¿Por qué?
A: Porque hay una menos.

.

15) Alumno: An.15,03 **Nombre**: Ana **Fecha de Nacimiento:** 23/01/00

Escena Finitista

E: Bien, Ana, ¿cuántas pelotitas hay junto con lo que se refleja en el espejo?
A: 14.
E: 14, quítale una, ¿cuántas hay ahora?
A: 12
E: ¿Hay más antes, ahora ó son iguales?
A: Había más antes.

Escena Infinitista

E: Ana, ¿cuántos caramelos hay ahora entre los dos espejos?
A: ¡Eh!... infinitos.
E: Infinitos, ¿los podrías contar?
A: No.
E: No. Con una de las manos quita un caramelito. Coge el del extremo mejor, ahí,… perfecto. Une más los espejos, un

poco más para que no quede hueco, ahí,… muy bien, ¿cuántos hay ahora?
A: Infinitos.
E: Infinitos, y la pregunta es la siguiente: ¿hay más antes, ahora o son iguales?
A: Son iguales.
E: ¿Aunque tengamos uno menos?
A: Sí.

16) **Alumno: An.14,07** **Nombre**: Ana **Fecha de Nacimiento:** 05/10/00

Escena Finitista

E: Ana R., ¿cuántas pelotitas hay contando lo que se en el espejo?
A: 7.
E: ¿Y lo que hay en el espejo?
A: 7.
E: ¿7+7?
A: 14.
E: Muy bien, quítale una, ¿cuántos hay ahora?
A: 12.
E: ¿Hay más antes, ahora ó son iguales?
A: Antes.

Escena Infinitista

E: Ana, ¿cuántos caramelos hay ahora entre los dos espejos?
A: 14.
E: No, mira los espejos, métete entre los dos, ¿los vas a contar?
A: Sí,…14.
E: Lo que se refleja en los espejos, Ana.
A: 7. ¡Ah!7 por… muchos.
E: Muchos, venga quita una de ellas,… ¿cuántas hay ahora?
A: 6 por muchos.
E: ¿6 por 8?
A: 6 por muchos.
E: La pregunta es la siguiente: ¿Cuándo hay más cantidad de pelotitas, antes, ahora o son iguales?
A: Antes.

17) **Alumno: Cr.15,04** **Nombre**: Cristina **Fecha de Nacimiento:** 06/01/00

Escena Finitista

E: Cristina, ¿cuántos caramelos hay contando los que se reflejan en el espejo?
A: 14.
E: Quita uno de ellos, ¿cuántos hay ahora?
A: ¿Entre los dos?
E: Sí.
A: 12.
E: ¿Hay la misma cantidad de caramelos antes que ahora?
A: No.

Escena Infinitista

E: Cristina, ¿cuántos caramelos ahora hay entre los dos espejos?
A: *(No dice nada)*
E: ¿Los vas a contar?
A: 16, ¿no?
E: Entre los dos espejos….
A: ¡Ah, vale! *(Sigue sin decir nada)*
E: Pero..., no los cuentes, míralo.
A: Es que…, hay un montón.
E: Hay un montón, ¿se podrían contar?
A: No.
E: Con una de tus manos, quita uno de ellos, el primero que encuentres ahí,… muy bien. Acerca los espejos otra vez, para que no haya hueco entre ellos, ¿cuántos hay ahora?, ¿se podrían contar ahora?
A: No.
E: Bien, la pregunta es la siguiente: ¿hay la misma cantidad de caramelos antes, ahora o son iguales?
A: No, hay menos.
E: ¿Por qué?
A: ¡Ah, no!, no hay fin. (…) (*Piensa en silencio).* Si van al hasta el *fondo* tienen la misma cantidad.

18) <u>Alumno: Pa.15,01</u> Nombre: Pablo **Fecha de Nacimiento:** 07/04/00

Escena Finitista

E: Pablo, ¿cuántos caramelos hay contando con los que se reflejan en el espejo?

A: 14.

E: Quita uno de ellos, ¿cuántos hay ahora?

A: 12.

E: ¿Hay más antes o ahora?

A: Antes.

Escena Infinitista

E: Pablo, ¿cuántos caramelos hay ahora entre los dos espejos?

A: No se pueden contar, son infinitos.

E: Con una de tus manos, quita uno de ellos, ahí…Acerca un poquito el espejo para que no haya hueco, ahí, y ahora… ¿cuántos caramelos hay entre los dos espejos?

A: Sigue habiendo infinitos.

E: ¿Hay más cantidad antes, ahora o son iguales?

A: Antes.

E: Antes, ¿por qué?

A: No, son iguales.

CURSO: 4 º E. S. O.

1) **Alumno: Ma.15, 09** **Nombre**: María de la Luz **Fecha de Nacimiento:** 04/08/99

Escena Finitista

E: Mari Luz F., ¿cuántas pelotitas hay contando con las que se reflejan en el espejo?
A: 20.
E: Quítale una por favor María, ¿cuántas hay ahora?
A: 18.
E: ¿Hay la misma cantidad que antes?
A: No.

Escena Infinitista

E: María Frías, ¿cuántas pelotitas hay entre los dos espejos?
A: Infinitas.
E: Quita una pelotita, acerca un poquito el espejo por favor, ahí, ¿cuántas hay ahora?
A: Infinitas.
E: Bien, la pregunta es la siguiente, ¿hay la misma cantidad de pelotitas antes que ahora?
A: No.
E: No, ¿por qué?
A: Porque hay una menos.
E: ¿Aunque sea infinito?
A: Sí, aunque sea infinito.

2) **Alumno: Al.16, 03** **Nombre**: Alba **Fecha de Nacimiento:** 05/02/99

Escena Finitista

E: Alba C., ¿cuántas pelotitas hay contando con las que se reflejan en el espejo?
A: 20.
E: 20, quítale la primera.
A: ¿Esta?
E: Sí por favor, ¿cuántas hay ahora Alba?
A: 18.
E: ¿Hay la misma cantidad?
A: No.

Escena Infinitista

E: Alba C., ¿cuántas pelotitas hay entre los dos espejos paralelos?
A: Infinitas.
E: Infinitas, vale, quítale la primera pelotita por favor. Perfecto, acerca un poco el espejo para que no haya hueco. Ahí, ¿cuántas hay ahora?
A. Infinitas.
E: ¿Hay la misma cantidad que antes?
A: Sí.
E: Aunque, ¿hayas quitado una pelotita?
A: Sí.

3) **Alumno: Al.15, 09** **Nombre**: Alicia **Fecha de Nacimiento:** 25/08/99

Escena Finitista

E: Alicia V., ¿cuántas pelotitas hay contando las que se reflejan en el espejo?
A: 20.
E: 20, vale, quítale la primera pelotita por favor, ¿cuántas hay ahora?
A: ¡Eh!…, 18.
E: 18, ¿hay la misma cantidad?
A: No.

Escena Infinitista

E: Alicia.
A: Sí.
E: ¿Cuántas pelotitas hay ahora, contando lo que hay entre los espejos y las que se reflejan?
A: ¡Eh!…, pues ¿100?
E: ¿100?, si bajas un poco más la cabecita, ¿hasta dónde llegas?
A: La verdad, es que llega hasta el infinito.
E: Infinito, muy bien, ¿no se puede contar?
A: No.
E: Vale, quítale la primera pelotita. Alicia, acerca un poquito el espejo para que no haya ese hueco. Bien, ¿cuántas hay ahora Alicia?
A: ¡Eh!…, hay menos porque falta una, pero sigue habiendo…
E: ¿Sigue habiendo qué?
A: Infinitas.

E: Vale, la pregunta viene ahora, ¿hay la misma cantidad que antes?
A: De pelotas, sí.
E: ¿La misma cantidad?, aunque hemos quitado una.
A: ¿Contando con las reflejadas?
E: Sí, sí, con las reflejadas.
A: No, no hay las mismas.
E: ¿Por qué?
A: Pues si he quitado una…, aunque realmente sigue habiendo infinitas, es la misma cantidad.
E: La misma cantidad.

4) <u>Alumno: El.15, 07</u> Nombre: Elena **Fecha de Nacimiento:** 14/09/99

Escena Finitista

E: Elena, ¿cuántos caramelos hay contando los que se reflejan en el espejo?
A: Pues…, 12.
E: Cuéntalo bien.
A: 1,2..., perdón 14.
E: 14, *(Se ríe)*, bien, con una de tus manos quita uno de ellos, ¿cuántos hay ahora?
A: 12.
E: ¿Hay más cantidad de caramelos, antes ó después?
A: Antes.

Escena Infinitista

E: Elena, ¿cuántos caramelos hay con lo que se refleja en los dos espejos?
A: Un "montonazo".
E: ¿Lo puedes contar?
A: Hombre, puedo multiplicar por tres, sería 21…
E: Pero.., ¿tú ves el final?
A: No.
E: Bien, vale, Elena vamos a quitarle uno, el que tú quieras, ¿hay diferencia entre antes y después?
A: No, sigue igual.
E: Quítale otro, bien.
A: Si, hay más diferencia porque hay más espacio.
E: Pero, vamos acercar los espejos.
A: Así no hay diferencia.
E: Vale, ¿hay más cantidad de caramelos antes, después o son iguales?
A: Antes.
E: Antes, ¿por qué?
A: Porque había más caramelos.
E: ¿Lo has contado tú?
A: Sí, había 7.
E: No, no, no eran 7,¿cuántos había antes?
A: Yo diría 21, no mentira.
E: Pero…, si tú no venías el fin ahí, ¿no, Elena?
A: No.
E: Entonces, ¿cómo has podido contar eso?
A: Hay menos porque la estás quitando.

5) <u>Alumno: Na.15, 11</u> Nombre: Natalia **Fecha de Nacimiento:** 27/05/99

Escena Finitista

E: Natalia V., ¿cuántas pelotitas hay contando con lo que se refleja en el espejo?
A: ¡Hum!…18.
E: Vale, quítale la primera, ¿cuántas hay ahora?
A: 16.
E: ¿Hay la misma cantidad?
A: ¿Perdón?
E: ¿Hay la misma cantidad que antes?
A: No.

Escena Infinitista

E: Natalia, ¿cuántas pelotitas hay ahora entre los dos espejos paralelos?, contando con las que se reflejan.
A: Pues…, no lo puedo contar, muchas, muchas.
E: Muchas, vale, quítale la primera pelotita. Acerca un poquito. Eso es, ¿cuántas hay ahora Natalia?
A: Sigue habiendo muchas.
E: Vale, la pregunta es la siguiente: ¿hay la misma cantidad de pelotitas que antes?
A: ¡Eh!…, pues…, no sé, ¡eh!…

E: ¿Entiendes la pregunta?
A: Sí, sí, en verdad, son la misma cantidad de pelotitas. Tienen que ser la misma.
E: Vale, muchas gracias.

6) **Alumno: Pa.15, 10** **Nombre**: Palma **Fecha de Nacimiento:** 23/07/99

Escena Finitista

E: Bien Palma, situación A, mira el espejo y los caramelos, contando los que aparecen en el espejo, ¿cuántos caramelos hay?
A: 8.
E: Con una de tus manos quita un caramelo, ¿cuántos tienes ahora?
A: 6.
E: ¿Cuándo hay más cantidad de caramelos, antes o después?
A: Antes.

Escena Infinitista

E: Palma, ¿cuántos caramelos hay ahora entre los dos espejos?
A: Infinitos.
E: ¿Lo podrías contar?
A: No.
E: Con una de tus manos, quita un caramelo. Bien, ¿hay diferencia de antes y después?
A: Sí, ahora hay un hueco y se ve irregular.
E: ¿Sí?, ¿se podrían contar?
A: No.
E: No, ¿entonces?
A: Que hay diferencia.
E: ¿Hay diferencia?
A: No.
E: Quita otro caramelo.
A: ¿Dos?
E: Otro más, si otro dos más, ¿podrías contar ahora la cantidad de caramelos que hay entre los dos espejos?
A: Si, bueno, a ver, son infinitos pero son más fáciles de contar.
E: ¿Podrías tú contarlos?
A: Podría estar contando toda mi vida, (A se ríe), pero sí.
E: Entonces, para ti ¿hay más cantidad de caramelos antes, después o son iguales?
A: Antes.
E: ¿Antes había más caramelos?
A: Bueno, son iguales, porque antes había más caramelos pero son infinitos.

7) **Alumno: La.16, 01** **Nombre**: Laura **Fecha de Nacimiento:** 17/04/99

Escena Finitista

E: Laura, a la vista del espejo y los caramelos que aparecen, ¿cuántos caramelos hay?
A: 8.
E: Con una de tus manos, quita un caramelo, ¿cuántos hay ahora?
A: 6.
E: ¿Había antes igual que ahora?
A: No, antes había dos más.

Escena Infinitista

E: Laura, ¿cuántos caramelos hay ahora entre los dos espejos?
A: Hay...es que hay infinitos, no se ve.
E: ¿Tú lo podrías contar Laura?
A: Es que depende del lado donde te pongas, si sigue la fila….
E: No, no, tú te tienes que meter dentro y ver si tiene final.
A: A ver….
E: Laura, ¿te vas a poner a contar los caramelos?
A: No, *(se ríe)* una aproximación.
E: ¿Una aproximación? No, no quiero que hagas una aproximación, ¿tú podrías contar los caramelos?
A: No.
E: No, bien, con una de las manos quita un caramelo, cualquiera, vale, mira ahora entre los dos espejos, ¿podrías contar el número de caramelos que hay entre ellos?
A: No.
E: ¿Hay más cantidad de caramelos antes, después o son iguales?
A: Antes había uno más.
E: ¿Sí?, ¿tú lo has contado antes?, ¿Has contado ahora y hay uno menos?

A: No, pero le he quitado uno, sé que hay uno menos.

8) **Alumno: Ju.15, 06** **Nombre**: Juan Manuel **Fecha de Nacimiento:** 24/06/99

Escena Finitista

E: Juan Manuel T., ¿cuántas pelotitas hay contando con las que se reflejan en el espejo?
A: 20.
E: Quítale la primera pelotita Juan, ¿cuántas hay ahora?
A: 18.
E: ¿Hay la misma cantidad antes que ahora?
A: No.

Escena Infinitista

E: Juan, ¿cuántas pelotitas hay entre los dos espejos?
A: No sé.
E: Muchas, ¿no?
A: Sí.
E: ¿La podrías contar?
A: No.
E: Quítale la primera pelotita, con mucho cuidadito. Eso, muy bien, acerca un poquito el espejo, acércalo, no lo levantes, desplaza un poquito. Mira las pelotitas entre los dos espejos, la pregunta es la siguiente: ¿hay la misma cantidad de pelotitas antes que ahora?
A: No.
E: No, ¿por qué?
A: Falta una.
E: Falta una, muy bien.

9) **Alumno: Ma.16, 02** **Nombre**: María José **Fecha de Nacimiento:** 15/04/99

Escena Finitista

E: Mº José, ¿cuántas pelotitas hay contando con las que se reflejan en el espejo?
A: 8.
E: Con una de tus manos, quita un caramelo, ¿cuántos hay ahora?
A: 6.
E: ¿Hay más cantidad de caramelos antes o después?
A: Antes.

Escena Infinitista

E: María José, ¿cuántos caramelos hay entre los dos espejos paralelos?
A: Pues…
E: ¿Podrías contarlos?
A: No.
E: No, ¿tiene final?
A: No.
E: Vale, con una de tus manos quita un caramelo, cualquiera, va a existir un hueco pero no lo tengas en cuenta. ¿Podrías contarlo?
A: No.
E: ¿Tiene la misma cantidad de caramelos antes, después ó son iguales?
A: *(Silencio)* Antes había más.
E: ¿Sí?, ¿lo has contando y por eso ves la diferencia?
A: No, al quitar una, hay menos.

10) **Alumno: An.16, 05** **Nombre**: Andrés **Fecha de Nacimiento:** 29/01/99

Escena Finitista

E: Andrés, ¿cuántos caramelos hay contando con lo que se refleja en el espejo?
A: 12.
E: Quita uno con una mano, ¿cuántos hay ahora?
A: 10.
E: ¿Hay más ahora, antes o son iguales?
A: Antes había más.

Escena Infinitista

E: Andrés, ¿cuántos caramelos hay ahora entre los dos espejos?
A: Infinitos, no se ve el final.
E: ¿Podrías contarlos?
A: No.
E: Con una de tus manos, quita uno, bien, ¿podrías contar haber cuántos hay?
A: Tampoco, infinitos.
E: Muy bien, ¿hay más cantidad de caramelos, antes, ahora o son iguales?
A: Son iguales.

11) Alumno: Ce.16, 01 Nombre: César **Fecha de Nacimiento:** 20/04/99

Escena Finitista

E: César.
A: Sí.
E: César, teniendo en cuenta el espejo, ¿cuántas bolitas hay aquí?
A: ¿Teniendo en cuenta el espejo?
E: Sí, ¿cuántas cuentas tú?
A: Contando las del espejo 12.
E: Quítale una con una mano, muy bien, ¿cuántas tienes ahora?
A: 10.
E: ¿Cuál es tu respuesta?, ¿había más antes o ahora?
A: Antes.
E: Vale.

Escena Infinitista

E: Bien, César.
A: Bien.
E: Teniendo en cuenta los dos espejos, ¿cuántas bolitas hay entre los dos espejos?
A: Si se tienen en cuentan las reflejadas, hay infinitas.
E: Infinitas, ¿podrías contarlas?
A: Bueno… *(Se ríe)*
E: ¿Te vas a poner a contarlas?
A: No puedo.
E: Mira, con una de tus manos quita una de ellas, cualquiera. Bien, ¿podrías contarlas ahora?
A: No, hay infinitas.
E: ¿Qué tenías más, antes, ahora o son iguales?
A: Antes había más. *(Mira la bola que ha quitado)*
E: ¿Antes había más quitando ésta?
A: Sí, quitando ésta.
E: ¿Aunque no tenga fin?
A: Aunque no tenga fin.

12) Alumno: Nu.15, 06 Nombre: Nuria **Fecha de Nacimiento:** 19/11/99

Escena Finitista

E: Nuria de A., ¿cuántas pelotitas hay contando con las que se reflejan en el espejo?
A: Mirando lo que se ve en el espejo, hay 20.
E: 20, quítale una pelotita Nuria.
A: ¿Esta?
E: Esa por ejemplo, ¿cuántas hay ahora Nuria?
A: 18.
E: ¿Hay la misma cantidad que antes?
A: ¿De total?
E: Sí.
A: No.

Escena Infinitista

E: Nuria, ¿cuántas pelotitas hay ahora entre los dos espejos paralelos?
A: Infinitas pelotitas.
E: Infinitas pelotitas. Vale, quítale la primera pelotita Nuria. Ok, acerca un poquito. Eso es, ¡Eh!… ¿cuántas hay ahora?
A: Infinitas pelotitas.
E: La pregunta está clara, ¿Hay la misma cantidad que antes?
A: No.
E: No, ¿por qué?
A: Porque ahora hay infinitas y antes había 20, (A se ríe).
E: No, no, ¡eh!….
A: ¡Ah!, no, no, al quitar esta, sí, sí.
E: La misma, ¿no?, aunque haya quitado una.
A: Sí, porque esta es despreciable.
E: Es despreciable frente lo que sería el……
A: El infinito.

13) Alumno: Al.15, 06 Nombre: Álvaro **Fecha de Nacimiento:** 16/12/99

Escena Finitista

E: Álvaro, ¿cuántas pelotitas hay contando con las que se ven en el espejo o se reflejan en el espejo?
A: 12.
E: Con una mano quita una de ellas, ¿cuántas hay ahora?
A: 10.

E: ¿Tiene más cantidad antes, después o son iguales?
A: Antes.

Escena Infinitista

E: Álvaro, ¿cuántas pelotitas hay ahora entre los dos espejos, las reflejadas y las que son reales?
A: Infinitas, ¿no?
E: Infinitas, vale, ¿tú puedes ver el final?
A: ¡Eh!…, no.
E: ¿Tú puedes contar las pelotitas?
A: Tampoco.
E: Con una mano quita una de ellas, bien, ¿hay la misma cantidad?
A: Sí, tiene infinitas.
E: ¿Podrías contarlo ahora?
A: Tampoco.

14) <u>Alumno: Ju.15, 07</u> Nombre: Juan **Fecha de Nacimiento:** 31/10/99

Escena Finitista

E: Juan, ¿cuántos caramelos hay contando los que se reflejan en el espejo?
A: 12.
E: Quítale una con una mano, ¿cuántos hay ahora?
A: 10.
E: ¿Cuántos hay, más ó menos que antes?
A: Menos.

Escena Infinitista

E: Juan, ¿cuántos caramelos hay ahora entre los dos espejos?
A: ¡Hum!..., infinitos.
E: ¿Tú los podrías contar?
A: No.
E: Quítale un caramelo Juan, muy bien, ¿hay la misma cantidad o menos cantidad que antes?
A: ¡Eh!…., la misma.
E: La misma, ¿tú no podrías contarlo otra vez, verdad?
A: No, porque se ven muchos.
E: Mucho, muchísimos, ¿verdad?
A: Infinitos.

15) <u>Alumno: Ju.16, 01</u> Nombre: Juan Manuel **Fecha de Nacimiento:** 01/04/99

Escena Finitista

E: Contando las bolas blancas en el espejo, ¿cuántas hay?
A: 6.
E: Más las del espejo reflejadas.
A: 12.
E: Con una mano quita una de ellas, ¿cuántas hay ahora?
A: 5.
E: No, con las reflejadas.
A: 10.
E: ¿Qué hay más cantidad antes o después?
A: Antes.

Escena Infinitista

E: ¿Cuántas pelotitas hay ahora contando lo que se refleja en los espejos?
A: Infinitos.
E: ¿Podrías tú contarlas?
A: No.
E: Con una mano quita una pelotita, esta por ejemplo, ¿cuántas hay ahora?
A: Igual, igual, no hay menos, pero no lo veo, infinitos.
E: Entonces, ¿qué dirías tú?, ¿hay la misma cantidad o hay menos?
A: Hay la misma cantidad.

16) <u>Alumno: Da.15, 02</u> Nombre: David **Fecha de Nacimiento:** 15/01/00

Escena Finitista

E: David M., ¿cuántas pelotitas hay contando con las que se reflejan en el espejo?
A: 10.
E: Quítale la primera, por favor, ¿cuántas hay ahora?
A: 8.
E: ¿Hay la misma cantidad que antes?
A: ¡Hum!…, no.

Escena Infinitista

E: David M., ¿cuántas pelotitas ahora hay entre los dos espejos paralelos?
A: ¿Entre los dos espejos?, 10.
E: ¿Y Las que se reflejan?
A: ¡Eh!…, infinitas.
E: Quítale una pelotita, por favor, muy bien, acerca un poquito el espejo para que no haya hueco. Eso es, ¿cuántas hay ahora?
A: ¿Entre los espejos?
E: Entre los espejos y las que se reflejan.
A: Entre los espejos, 9.
E: ¿Y las que se reflejan?
A: Infinitas.
E: Y la pregunta es la siguiente: ¿hay la misma cantidad que antes?
A: ¡Hum!…, no.
E: No, ¿por qué?
A: Porque son dos infinitos diferentes.
E: ¿Infinitos diferentes?, ¿por qué?, ¿por haber quitado la pelotita?
A: Porque realmente hay menos cantidad de pelotitas.
E: ¿Sí?
A: Sí.
E: Vale, muchas gracias.

Anexo5.2. Microrrelatos

Para facilitar el seguimiento de los microrrelatos, hemos visto oportuno realizar el siguiente gráfico cronológico.

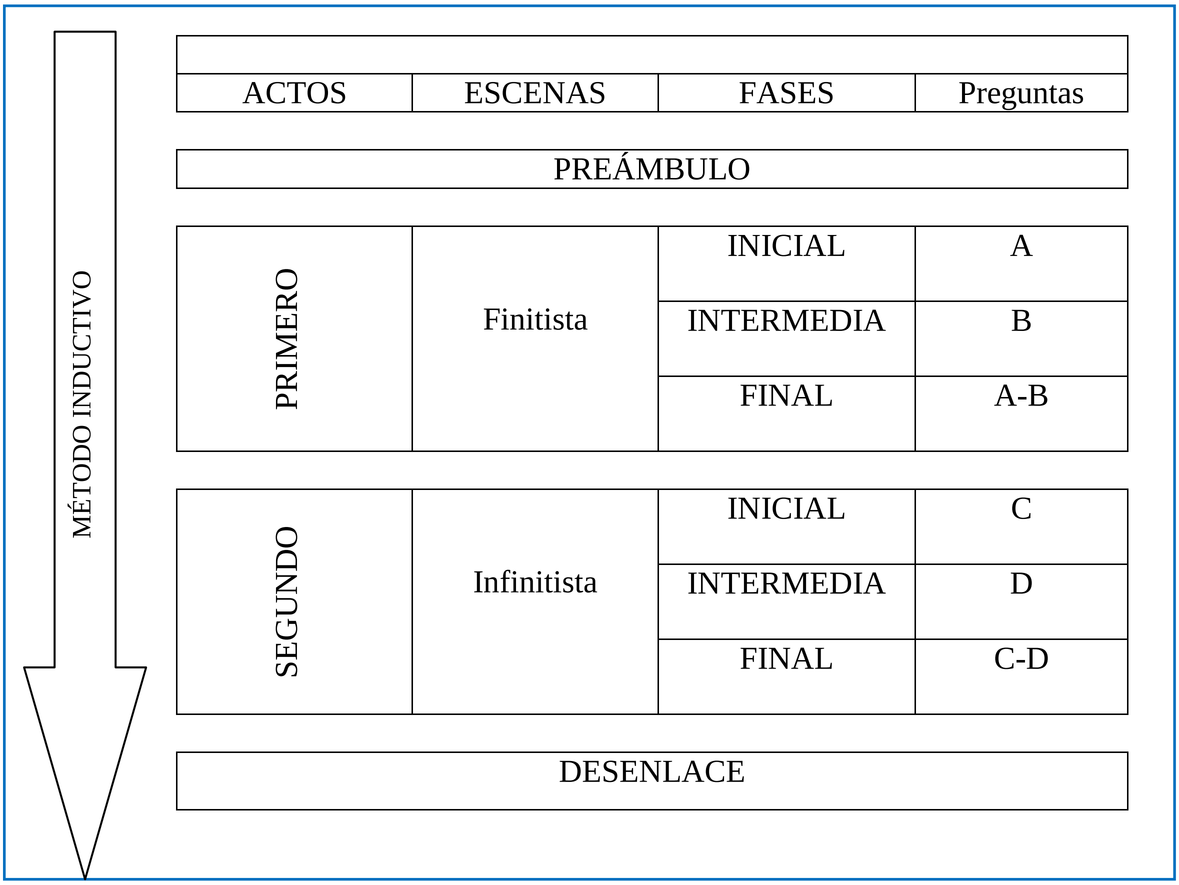


Figura AV. 1. Gráfico cronológico

Juan Manuel

Los Preámbulos

Lo que más caracteriza a Juan Manuel es su personalidad introvertida. Aunque llevo dándole clases dos cursos seguidos puedo decir que no reconocería su voz unas cuantas. Se relaciona con pocos compañeros en una micropandilla apodada por el resto "los frikis". Si los buscáramos en los recreos o en alguna hora libre que haya en el centro, los veríamos jugando con sus naipes de roles. Afortunadamente para la dirección del centro en el que estudia la uniformidad es obligatoria porque una vez los vi paseando por el centro de la ciudad y ahí sí llevaban su verdadero uniforme: totalmente de negro. Su mejor día es Halloween, no podría ser otro. Adora a Tim Burton y lo manifiesta en las portadas de sus libretas con imágenes de Eduardo Manostijeras y La Novia Cadáver, o bien con la chapa situada en su cazadora con la imagen de la carabela de Jack. Exceptuando las matemáticas todas las demás asignatura las lleva bastante bien. No eligió ninguna de ciencias en cuarto. Comentó de forma reservada a su tutor: "yo es que soy de letras de letras puras".

Fue el primero entre los entrevistados de ese día. Me esperó en el sillón que hay en frente de mi despacho. Su cara inexpresiva y por n-pocas veces me habló con su voz ronca: "Buenas".

Escena finitista

Me mira fijamente mientras le hago la pregunta cuántas bolitas hay sumando las que se reflejan en el espejo. Tras pensar varios segundos mordisqueando los carrillos internos de su boca, contesta "veinte". No me mirará en toda la entrevista. Su mirada se perderá en algún lugar del despacho. Me responde a la segunda pregunta "dieciocho" y con un "no" termina este primer acto refiriéndose a la pregunta si tienen o no la misma cantidad.

Escena infinitista

Me seguirá evitando con su mirada durante este segundo acto. A la primera pregunta que le hago, de nuevo como si fuera un telegrama, me dice que "mucha". Quita una de las bolitas y después de mover la plataforma responde "que no hay la misma cantidad porque le he quitado una."

Desenlace

Apenas ha habido diferencia entre las intuiciones primarias y secundarias en Juan Manuel. El aporte pedagógico que le hemos ofrecido para caracterizar las dos escenas e intentar relacionarlas ha sido insuficiente para dar una respuesta positiva en la aceptación del infinito potencial. La respuesta "muchas bolas" nos hace reflexionar que el infinito como proceso, para él no es concebible.

De ahí, que la no aceptación de este sea un obstáculo para la aceptación del infinito actual (Turégano, 1996).

Debla

Los Preámbulos

Debla cursa segundo curso. Es la "pijita" de la clase, de familia muy reconocida en Algeciras bien posicionada social y económicamente. Para una persona que no la conozca, casi pasaría inadvertida gracias a la uniformidad del centro y solo se destacaría por sus accesorios y complementos. Los colores de sus gafas de marca y de su reloj de pulsera no son casuales. Ahora bien, si la pudiéramos observar en un viaje de estudio, donde la uniformidad ya no es obligatoria, destacaría del resto de los alumnos por la maleta de viaje, por todas sus ropas y por el poder de su cartera, pocos alumnos usan tarjeta de crédito.

Trabajadora y muy responsable, ha llegado a segundo de secundaria con pocos problemas. Aun así, sus notas no son del todo brillantes. Es lo que llamamos los docentes "un alumno que le cuesta". A parte del horario escolar obligatorio, las tardes las tiene totalmente ocupadas con inglés, atletismo, el conservatorio de música, y además las completará con clases particulares privadas en su casa.

Tiene muy claro lo que quieres estudiar y donde trabajará. La familia es propietaria de varias farmacias de la ciudad: ¿Quién tendría dudas en su futuro?

El día de la entrevista estuvo muy preocupada por como saldría en el vídeo que le iba a hacer (seguro que la tarde anterior fue a la peluquería). Cuando la recogí de su aula, me repetía una y otra vez que estaba "super-nerviosa".

Escena finitista

En este primer acto sus respuestas son cortas y firmes. "Hay veinte", "ahora hay dieciocho", "antes había más". Aparenta estar tranquila, pero no para de tocarse su pelo largo y perfectamente planchado.

Escena infinitista

Empieza contestando a la primera pregunta "hay treinta…, no" (se levanta de su asiento para ver mejor) y finalmente responde "muchísimas". La segunda, no aguanta sentada y la contesta de pie diciendo que son distintas porque ha quitado una y es esa una la que se ha quitado también en cada espejo. Le digo si las ha contado para saber si son distintas y me contesta "¿Los cuento?". Se ríe cuando le respondo diciendo que íbamos a estar mucho tiempo para contarlas. Finaliza explicando que hay menos cantidad porque hay una menos en cada espejo.

Desenlace

Hay una clara diferencia entre Debla y Juan Manuel. Las intuiciones primarias de ambos podrían haber sido las mismas pero el aporte pedagógico durante la entrevista le ha servido a Debla para reflexionar como intuición secundaria la presencia de los reflejos de las bolas en los espejos. El quitar una de ellas no es solo quitar esa, sino esa y todas las reflejadas. Pero es la pregunta que hace casi al finalizar la entrevista, qué si quiere que las cuentes refiriéndose a "todas" las bolas que puede visualizar entre los espejos lo que nos hace pensar, a diferencia del caso de Juan Manuel, que no presenta la concepción de la infinitud como proceso. Posiblemente en este caso otras tareas de conexión en la actividad hubieran favorecido el desarrollo de un pensamiento coherente en el estudiante y de manera particular cuando la noción del infinito actual estuviere implicado en dichas tareas (Garbin & Azcárate, 2002).

David

Los Preámbulos

David es un año menor que el resto de sus compañeros de 4º de la ESO. En primaria se flexibilizó a un curso escolar superior por petición de sus padres y aconsejado por el departamento de orientación. Es un alumno de altas capacidades y talentoso en matemáticas. Durante su estancia en el Colegio la diferencia de edad, su estatura, y su capacidad mental han provocado que fuera "algo machacado", como él expresa, por un grupo de compañeros de clase. Aún así, su fuerte personalidad ha bastado para pasar de ellos. Además, con su humor sarcástico se ha podido reír de estos sin ellos saberlo.

Al principio, cuando fue elegido para realizar las entrevistas y se explicaron en el salón de actos, al finalizar se acercó y me preguntó afirmando: "¿Yo no he sido elegido fruto del azar?". Con esa afirmación nos podemos hacer una idea como es David. Evidentemente, le tuve que comentar lo afortunado que era por tenerlo entre los elegidos.

La mañana de la entrevista, como para todos los entrevistados, me dirigí a su clase de 4ºA. Después de pedirle permiso al compañero que en ese momento estaba dando sus clases le dije: "David, te toca", como era de esperar casi todos sus compañeros empezaron a cuchichear. Nunca pasaba desapercibido y seguro que entre esos comentarios estaría "Ahí va la máquina".

Durante todo el recorrido hasta mi despacho se mantuvo callado. Él suele ser muy hablador cuando se aparta del grupo y sobre todo conmigo, que siempre anda preguntando temas no propios de los chicos de su edad como: "¿Usted está de acuerdo con el modelo de multiverso?" o "¡No sabes la de posibilidades que tiene esta calculadora!", refiriéndose a la que le regalaron en ESTALMAT[113]. Con sus manos metidas en los bolsillos, cabeza abajo y de vez en cuando mirándome, llegamos al despacho.

Al entrar, se fija en el artilugio de los espejos y me dice: "Esto va del infinito, ¿no?". Algo se olería o so lo dijeron sus compañeros entrevistados anteriormente de cursos inferiores, con los que solía tener más empatía que con los de su clase. "Vamos a ver, de momento siéntate enfrente de todo esto", le dije. Le ofrecí un cojín para que el ángulo de observación fuese el más adecuado para observar las bolas; por supuesto, como yo esperaba, lo rechazó.

Escena finitista

Empiezo preguntándole cuantas pelotitas hay contando las que se reflejan en el único espejo que tiene enfrente. Él asiente con la cabeza muy educadamente y dirige su mirada a este, contesta "veinte". Le pido que quite una y que me diga cuántas hay en ese

[113] Proyecto Detección y estímulo del talento precoz en Matemáticas.

momento, responde dieciocho sin mirarlas. Cuando finalizo con la pregunta si hay la misma cantidad que antes, duda al principio un poco expresándolo con un "¡Eh!..." para continuar con un "No" en voz baja.

Escena infinitista

Entre escena y escena me dice "¿Aquí hay truco, Don Juan?"; le contesto que no hay nada especial y que solo me debe comentar lo que ve. Se acomoda en este segundo acto, tomando un ángulo de observación adecuado para observar todo lo que se refleja entre los espejos y comenta "¿Ves cómo no me hace falta el cojín?", mientras que juguetea con el tornillo elevador de la plataforma como si lo hubiera hecho con anterioridad. "David, dime, ¿cuántas bolitas hay entre los dos espejos?". Todavía cree que hay truco en la pregunta y no solo me repite la pregunta, afirma que son diez las bolitas. Le aclaro que todas las bolitas incluidas las que se reflejan y me contesta de nuevo en voz baja, tal como pasó en la última pregunta del acto anterior, "Infinito". Al quitarle la primera y acercar los espejos para que no haya espejo, me contesta que hay nueves bolitas, de nuevo al aclararle que con los que se reflejan, me vuelve a decir con voz más decisiva "Infinito".
Mirando la bola que ha quitado me dice que no hay la misma cantidad que antes dando la explicación que son infinitos diferentes y que realmente hay menos cantidad de bolitas.

En el retorno a su clase, mientras le acompaño, él sigue pensando en las preguntas que le hice y casi llegando al aula sin hablarnos se despide diciéndome: "la he cagado, ¿no?, Don Juan. Usted no me ha dicho nada… y la he cagado".

Desenlace

David acepta los infinitos tanto potencial como actual, pero con propiedades de lo finito. El criterio de inclusión de Bolzano que hemos modelizado en una experiencia física, plantea para David una contradicción con la intuición que se tiene de subconjunto propio, es decir, si un conjunto A tiene un subconjunto propio B, la intuición del alumno indica que B es necesariamente más pequeña que A debido a que existen elementos de A que no están en la de B (Ortiz, 1994).

Laura

Los Preámbulos

Laura vive en un barrio marginal de Algeciras llamado "La Piñera". Convive con sus tres hermanos su madre y la pareja actual de esta. No tiene cuarto propio, pero no le falta de nada. Poca trabajadora, pero muy "avispada". Ese recurso le ha bastado para superar los cursos anteriores: es un pequeño brillante que hay que pulir. Habla con todas y sobre todo, con todos. Dedica la mayoría de sus tardes a pasear con su "gordi", o pasar el rato con sus amigos de la barriada. Es de las pocas de 2ºE.S.O., que sale los fines de semana y que participa en algún que otro botellón.

Cuando fui a recogerla para acompañarla a mi despacho, permaneció todo el trayecto en silencio, algo inusual en ella, pero no estaba nada nerviosa. De vez en cuando me miraba y sonreía. ¡A saber lo que esa cabecita estaba pensando!

Escena finitista

Contesta a las preguntas de forma correcta, señala con sus manos (con las muñecas repletas de abalorios) que tiene menos cantidad.

Escena infinitista

Comenta que hay infinitas bolitas entre los dos espejos y sus reflejos. Tras quitar la bolita y dar la misma respuesta que la anterior, finaliza su razonamiento (haciendo aspaviento con sus manos) que son las mimas cantidades porque se reflejan infinitamente las bolas.

Desenlace

Laura acepta el infinito actual, pero con argumento potencialista. Ella se referirá al infinito como el proceso reiterado de reflejos producidos por los espejos paralelos en las bolas. Su respuesta responde básicamente a la intuición natural del infinito (Grabin & Azcárate, 2002).

Nuria

Los Preámbulos

Nuria es la típica alumna que todo docente querríamos en nuestras clases. Su fuerte personalidad y carácter disimula la adolescencia que está atravesando. Si no nos comentara su edad, podría decirse que está estudiando bachillerato. Hija única de padres docentes que han podido influir en su amor a la lectura y la escritura. Excelente en todos los campos, es lo que yo llamaría una mujer renacentista. Desde que entró en secundaria no ha parado de ganar certámenes literarios y premios por trabajos de investigación de ciencias. Muy valorada en su grupo clase, está en todas las movidas: el grupo de teatro, pertenece al grupo católico Juventudes Marianas Vicencianas y hasta toca el piano en algún que otro evento del colegio. Pocas veces la habré visto no sonreír.

Cuando le tocó hacer la entrevista me comentó por el pasillo "estás experimentando con nosotros como ratones de laboratorio".

Escena finitista

A la primera pregunta me responde sonriendo, indicando con los dedos las bolas y las reflejadas que hay veinte. En la segunda fase ya no sonríe, ha quitado una bola y cree que la pregunta tiene algo más que se le escapa. Dice que hay dieciocho y que no hay la misma cantidad total que antes, pero en voz baja y mirándome fijamente a los ojos.

Escena infinitista

Al ponerle el segundo espejo y aclarándole como funciona el artilugio, para que pudiera adaptarlo a su ángulo de observación, exclama con un "hostia que pasada" al ver las bolas reflejadas. La primera pregunta la responde con una sonrisa final "Infinitas". Le quita una bola, acerca los espejos y contesta "hay infinitas bolas". A la pregunta que le hago si son iguales me contesta que no que ahora hay infinita y antes había veinte, cree que hay truco en la pregunta. Le aclaro que se trata de antes y después de quitar esa bola a los espejos paralelos. La explicación a su afirmación final es única: "son las mismas cantidades son infinitas y esta (refiriéndose a la bola y la muestra en su mano) es despreciable frente al infinito".

Desenlace

La respuesta de Nuria es contundente y sin titubeo, "son las mismas cantidades por ser infinito", pero lo que quizás es más significante, es su explicación, con la inmutabilidad y la inconmensurabilidad que emplea en su comentario, donde para ella la extracción de una cantidad en el infinito, como acto, es totalmente despreciable. El estudiante crea sus propios argumentos acertados o no, para poder dar respuestas a la aceptación del infinito actual (Sierpinska, 1994, citado en Penalva, 2001).

ANEXOS VI

MODELO EVOLUTIVO DE COMPETENCIAS EN EL CARDINAL INFINITO

Anexo VI.1 Tareas asociadas a los niveles del modelo

Actividades de Arranque

Son tres actividades que se crearon de este tipo y solo para aquellos alumnos y alumnas que tuvieran dificultad para empezar a realizar las tareas asociadas al modelo.

En estas primeras actividades, se pretende que:

- Familiarizarse con el formato de las tareas que luego se le propondrá. (Arranque I, en formato Excel)
- Adquieran la terminología y propiedades de las sucesiones, sus términos. (Arranque I, en formato Excel)
- Averigüen la regla que siguen a los términos. (Arranque I, en formato Excel)
- Intenten representar mediante un símbolo o forma cuando se trate de incluir muchos números o infinitos números. (Arranque II, en formato Excel)
- Establezcan una relación uno-a-uno entre dos conjuntos. (Arranque III, en formato JClic)

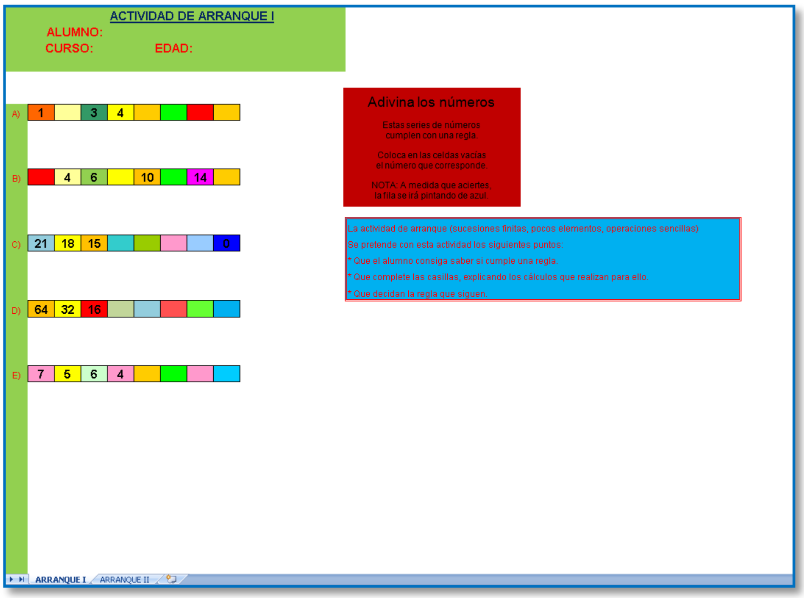


Figura AVI. 1. Actividad de Arranque I

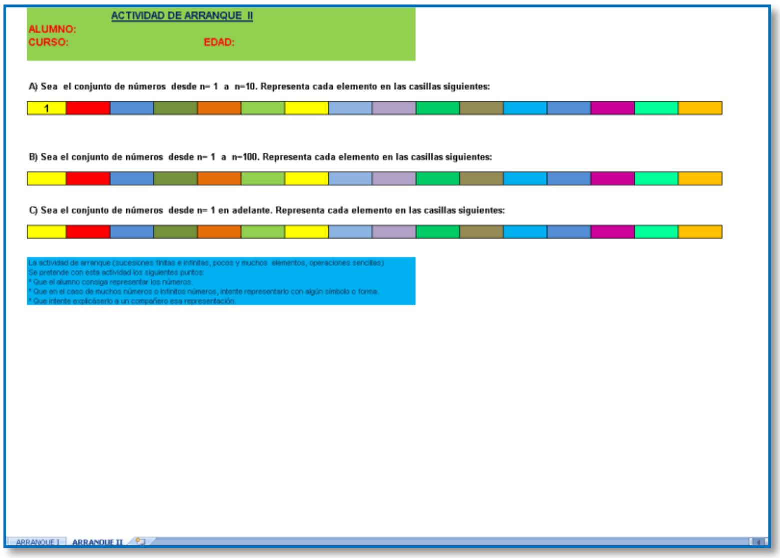


Figura AVI. 2. Actividad de Arranque II

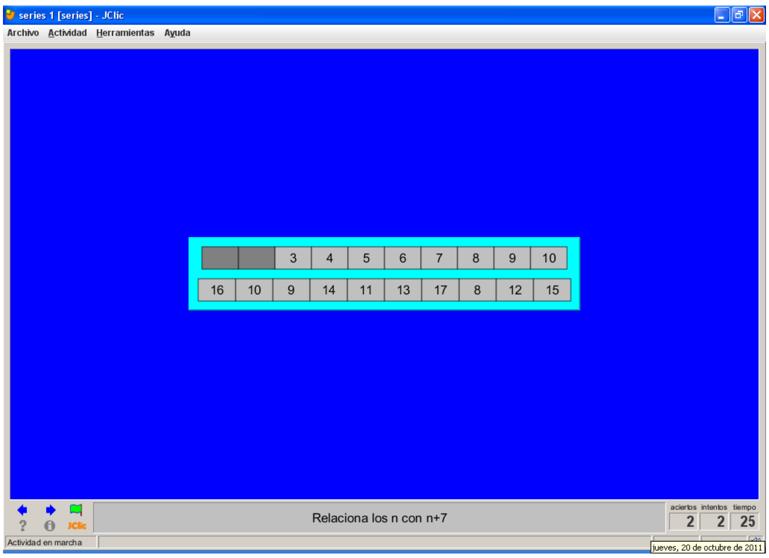
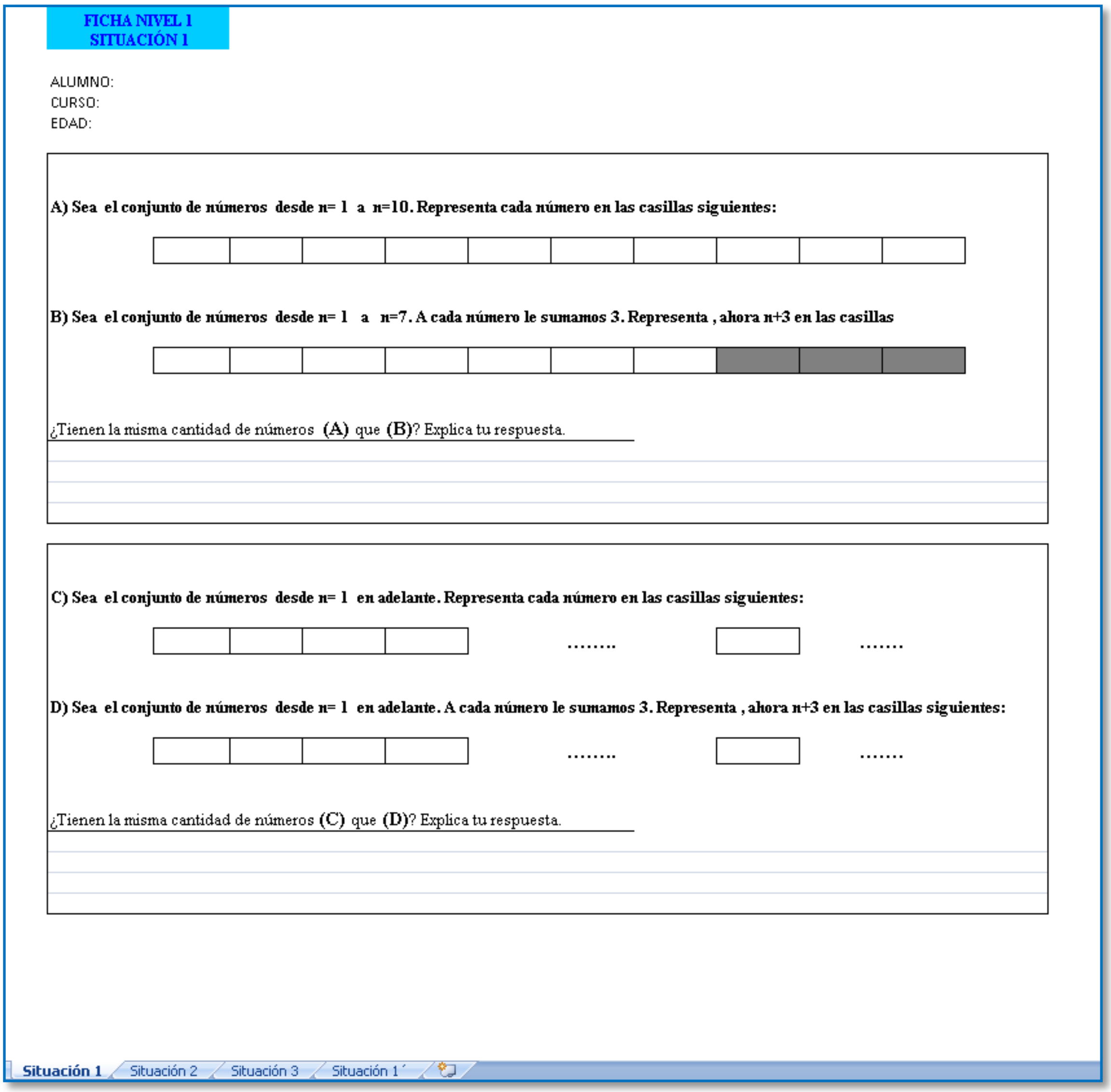


Figura AVI. 3. Actividad de Arranque III

Tareas Asociadas



FICHA NIVEL 1
SITUACIÓN 1

ALUMNO:
CURSO:
EDAD:

A) Sea el conjunto de números desde *n*= 1 a *n*=10. Representa cada número en las casillas siguientes:

B) Sea el conjunto de números desde *n*= 1 a *n*=7. A cada número le sumamos 3. Representa , ahora *n*+3 en las casillas

¿Tienen la misma cantidad de números **(A)** que **(B)**? Explica tu respuesta.

C) Sea el conjunto de números desde *n*= 1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes:

....

D) Sea el conjunto de números desde *n*= 1 en adelante. A cada número le sumamos 3. Representa , ahora *n*+3 en las casillas siguientes:

....

¿Tienen la misma cantidad de números **(C)** que **(D)**? Explica tu respuesta.

Situación 1 | Situación 2 | Situación 3 | Situación 1´

Figura AVI. 4. Nivel I-Situación 1

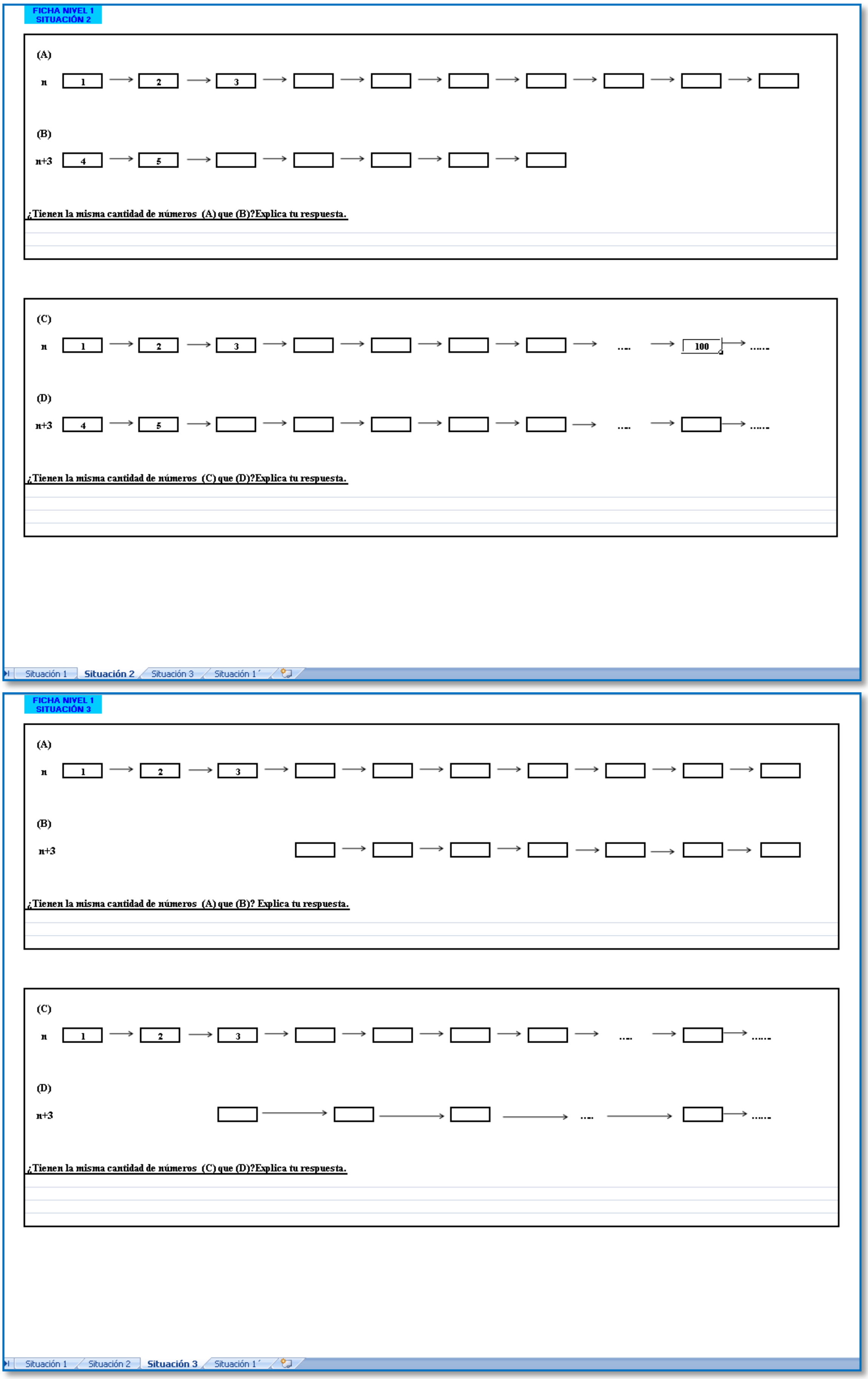
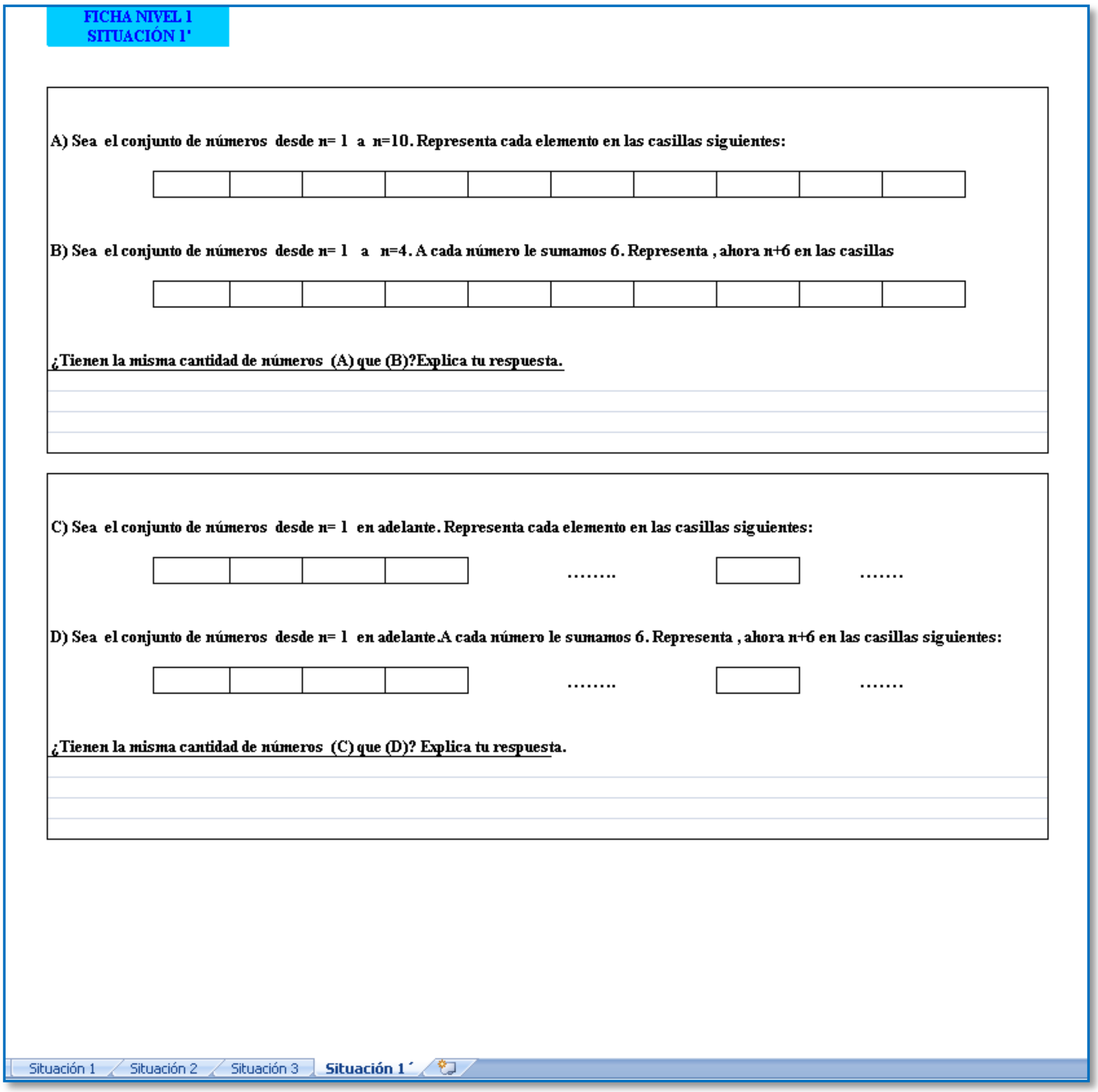


Figura AVI. 5. Nivel I-Situaciones 2 y 3



FICHA NIVEL 1
SITUACIÓN 1'

A) Sea el conjunto de números desde n= 1 a n=10. Representa cada elemento en las casillas siguientes:

B) Sea el conjunto de números desde n= 1 a n=4. A cada número le sumamos 6. Representa , ahora n+6 en las casillas

¿Tienen la misma cantidad de números (A) que (B)?Explica tu respuesta.

C) Sea el conjunto de números desde n= 1 en adelante. Representa cada elemento en las casillas siguientes:

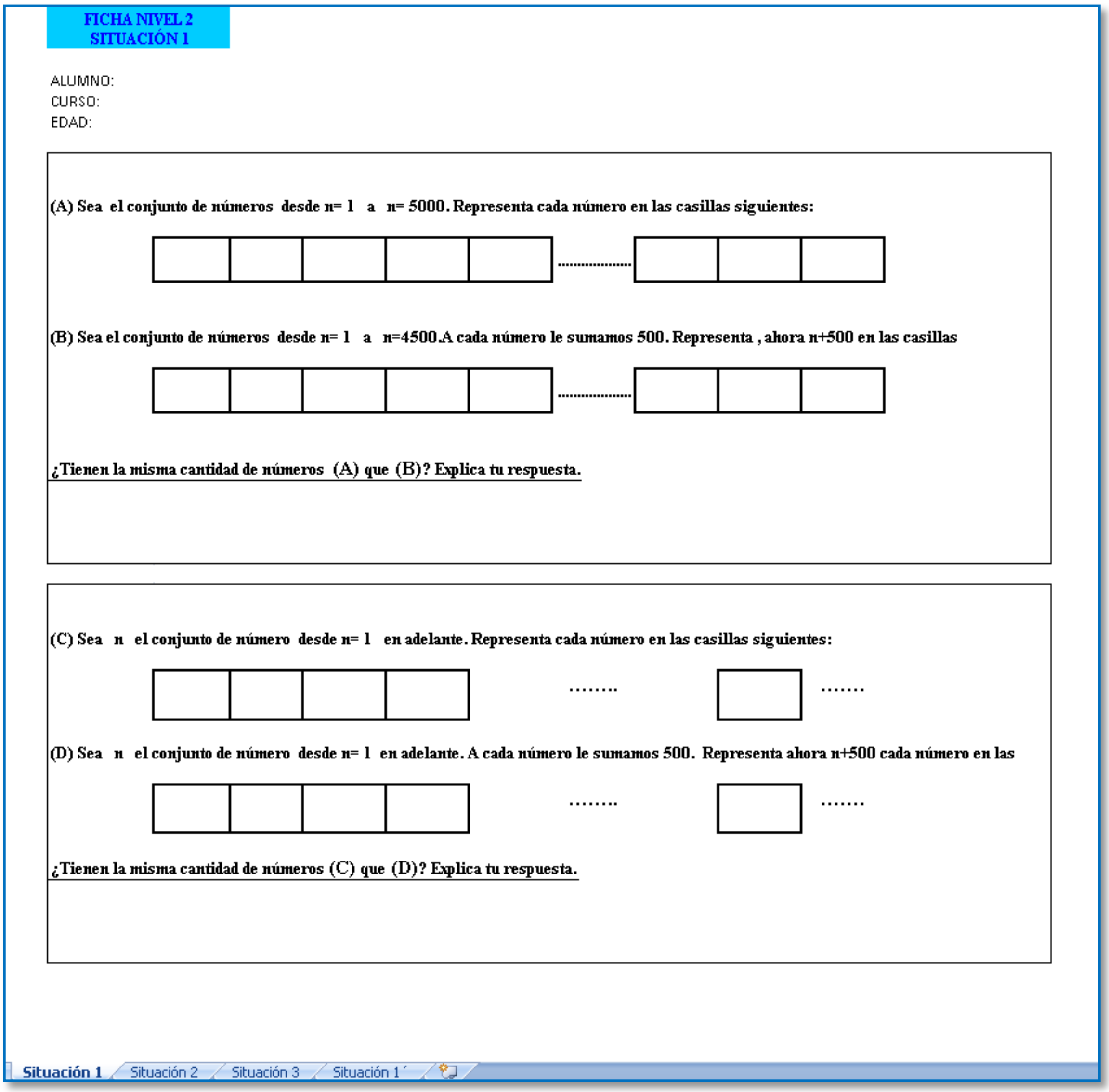
…….. …….

D) Sea el conjunto de números desde n= 1 en adelante.A cada número le sumamos 6. Representa , ahora n+6 en las casillas siguientes:

…….. …….

¿Tienen la misma cantidad de números (C) que (D)? Explica tu respuesta.

Figura AVI. 6. Nivel I-Situación 1'


FICHA NIVEL 2
SITUACIÓN 1

ALUMNO:
CURSO:
EDAD:

(A) Sea el conjunto de números desde n= 1 a n= 5000. Representa cada número en las casillas siguientes:

....

(B) Sea el conjunto de números desde n= 1 a n=4500.A cada número le sumamos 500. Representa , ahora n+500 en las casillas

....

¿Tienen la misma cantidad de números (A) que (B)? Explica tu respuesta.

(C) Sea n el conjunto de número desde n= 1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes:

....

(D) Sea n el conjunto de número desde n= 1 en adelante. A cada número le sumamos 500. Representa ahora n+500 cada número en las

....

¿Tienen la misma cantidad de números (C) que (D)? Explica tu respuesta.

Situación 1 Situación 2 Situación 3 Situación 1´

Figura AVI. 7. Nivel II-Situación 1

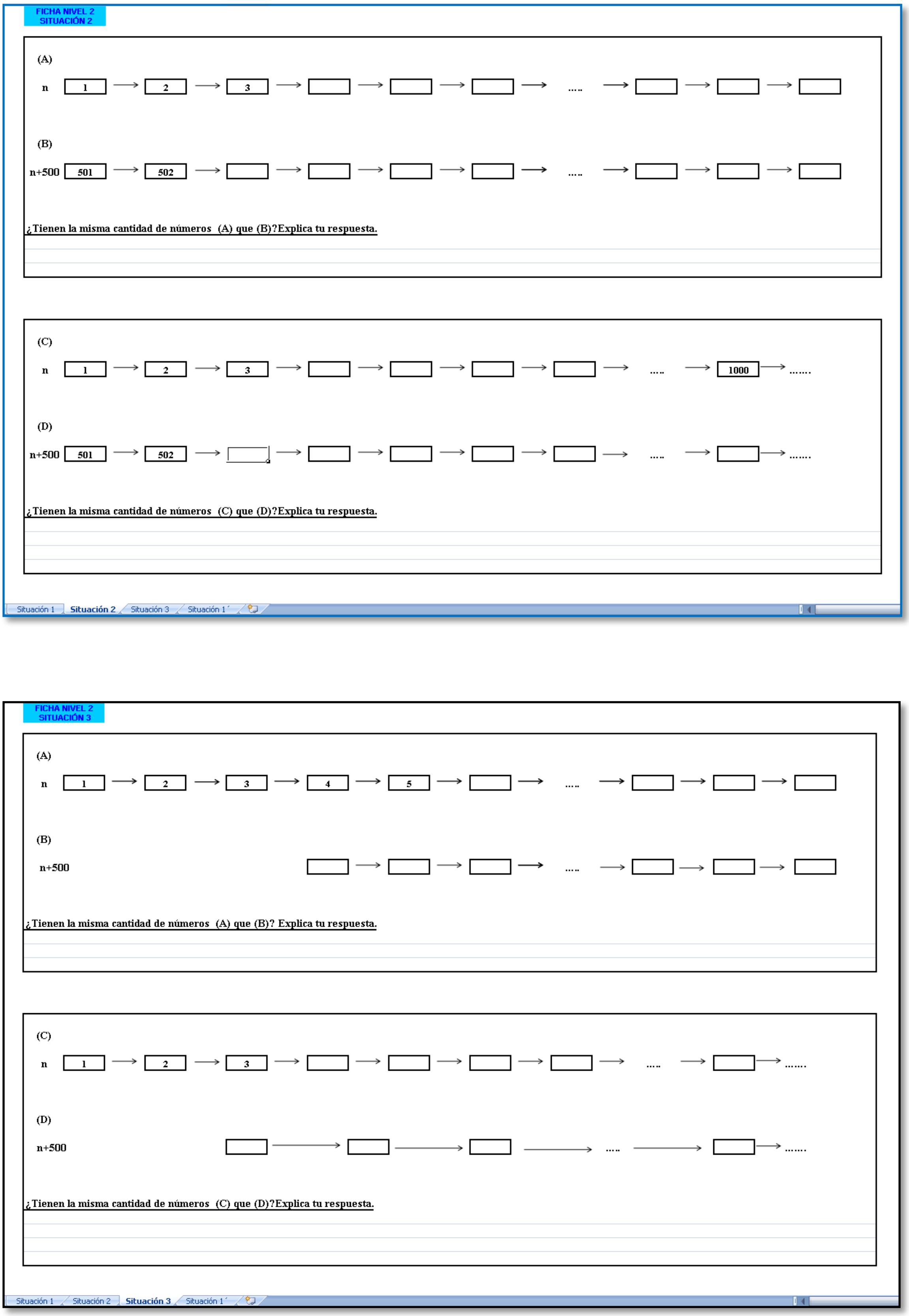
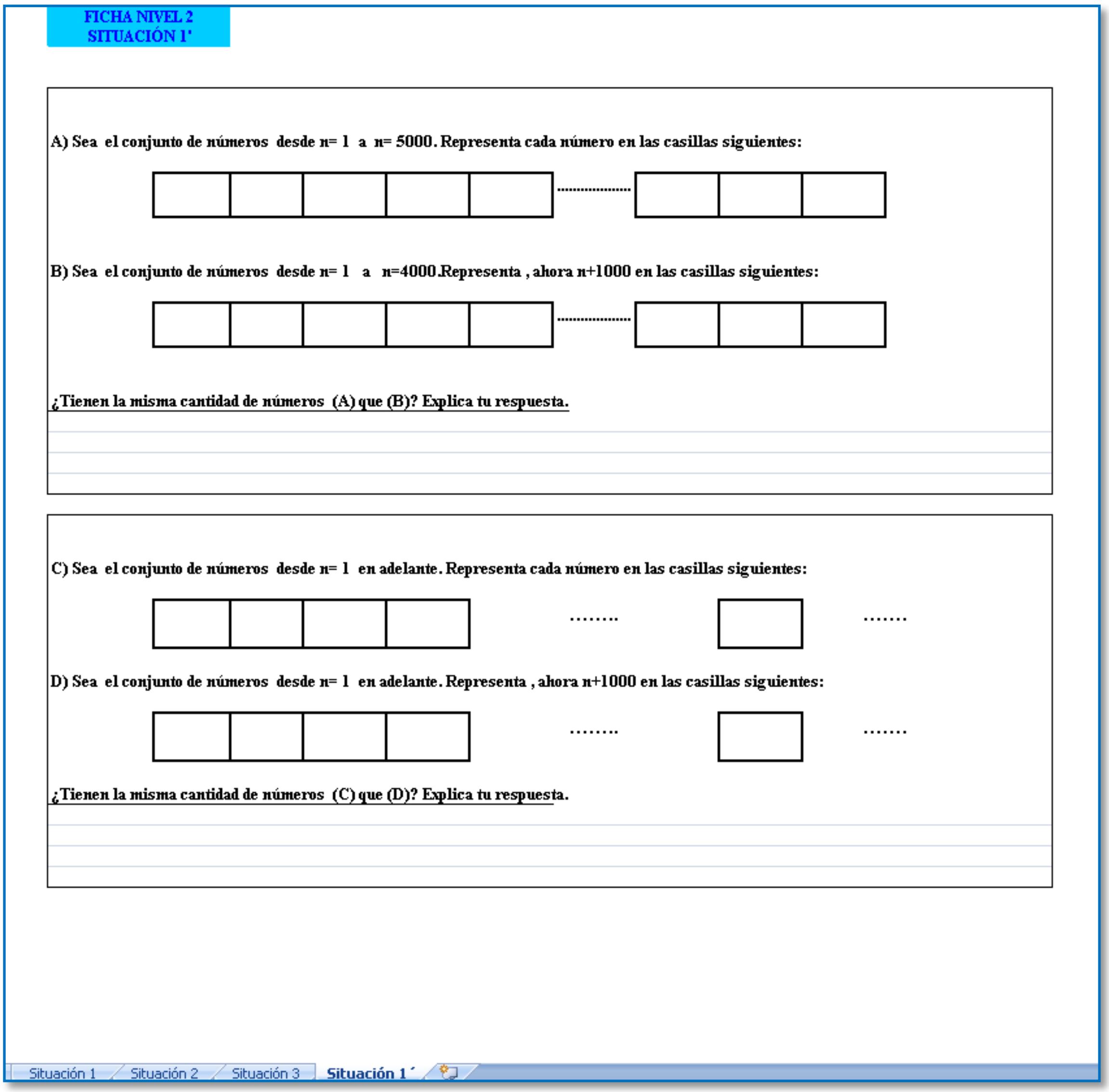


Figura AVI. 8. Nivel II-Situaciones 2 y 3


FICHA NIVEL 2
SITUACIÓN 1'

A) Sea el conjunto de números desde n= 1 a n= 5000. Representa cada número en las casillas siguientes:

....

B) Sea el conjunto de números desde n= 1 a n=4000.Representa , ahora n+1000 en las casillas siguientes:

....

¿Tienen la misma cantidad de números (A) que (B)? Explica tu respuesta.

C) Sea el conjunto de números desde n= 1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes:

....

D) Sea el conjunto de números desde n= 1 en adelante. Representa , ahora n+1000 en las casillas siguientes:

....

¿Tienen la misma cantidad de números (C) que (D)? Explica tu respuesta.

Situación 1 Situación 2 Situación 3 Situación 1´

Figura AVI. 9. Nivel II-Situación 1’

FICHA NIVEL 3
SITUACIÓN 1

ALUMNO:
CURSO:
EDAD:

A) Sea el conjunto de números desde n= 1 a n=10. A cada número le correspondemos su inversa, es decir $\frac{1}{n}$
Representa cada número en las casillas siguientes:

B) Sea el conjunto de números desde n= 1 a n=7. A cada elemento le correspondemos su inversa más 3, es decir $\frac{1}{n+3}$
Representa ahora esos números en las casillas siguientes:

¿Tienen la misma cantidad de números (A) que (B)? Explica tu respuesta.

(C) Sea el conjunto de números desde n= 1 en adelante. A cada elemento le correspondemos su inversa , es decir . $\frac{1}{n}$ **Represéntalos:**

				......		....

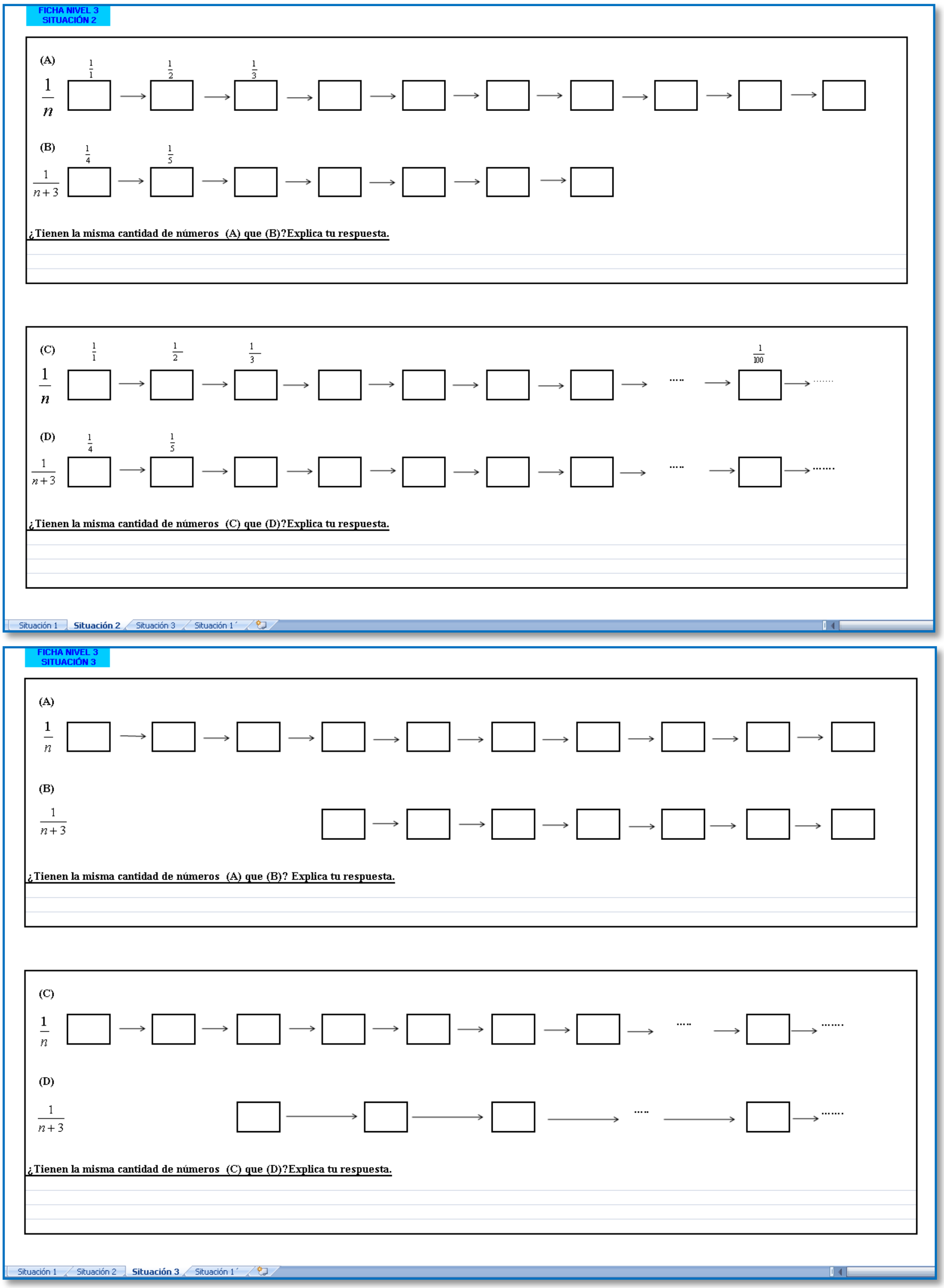
D) Sea el conjunto de números desde n= 1 en adelante. A cada elemento le correspondemos su inversa más 3, es decir $\frac{1}{n+3}$

				....		....

¿Tienen la misma cantidad de números (C) que (D)? Explica tu respuesta.

Situación 1 | Situación 2 | Situación 3 | Situación 1´

Figura AVI. 10. Nivel III-Situación 1


FICHA NIVEL 3
SITUACIÓN 2

(A)
$\frac{1}{n}$ $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$

(B)
$\frac{1}{n+3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$

¿Tienen la misma cantidad de números (A) que (B)?Explica tu respuesta.

(C)
$\frac{1}{n}$ $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ ..... $\frac{1}{100}$ ....

(D)
$\frac{1}{n+3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ ....

¿Tienen la misma cantidad de números (C) que (D)?Explica tu respuesta.

Situación 1 | Situación 2 | Situación 3 | Situación 1´

FICHA NIVEL 3
SITUACIÓN 3

(A)
$\frac{1}{n}$

(B)
$\frac{1}{n+3}$

¿Tienen la misma cantidad de números (A) que (B)? Explica tu respuesta.

(C)
$\frac{1}{n}$ ....

(D)
$\frac{1}{n+3}$ ....

¿Tienen la misma cantidad de números (C) que (D)?Explica tu respuesta.

Situación 1 | Situación 2 | Situación 3 | Situación 1´

Figura AVI. 11. Nivel III-Situaciones 2 y 3

FICHA NIVEL 3
SITUACIÓN 1´

ALUMNO:
CURSO:
EDAD:

A) Sea el conjunto de números desde n= 1 a n=10. A cada número le correspondemos su inversa es decir $\frac{1}{n}$
Representa cada número en las casillas siguientes:

B) Sea el conjunto de números desde n= 1 a n=4. A cada elemento le correspondemos su inversa más 6, es decir $\frac{1}{n+6}$
Representa ahora esos números en las casillas siguientes:

¿Tienen la misma cantidad de números (A) que (B)? Explica tu respuesta.

(C) Sea el conjunto de números desde n= 1en adelante. A cada elemento le correspondemos su inversa , es decir . $\frac{1}{n}$ **Representa cada nº:**

				....		....	

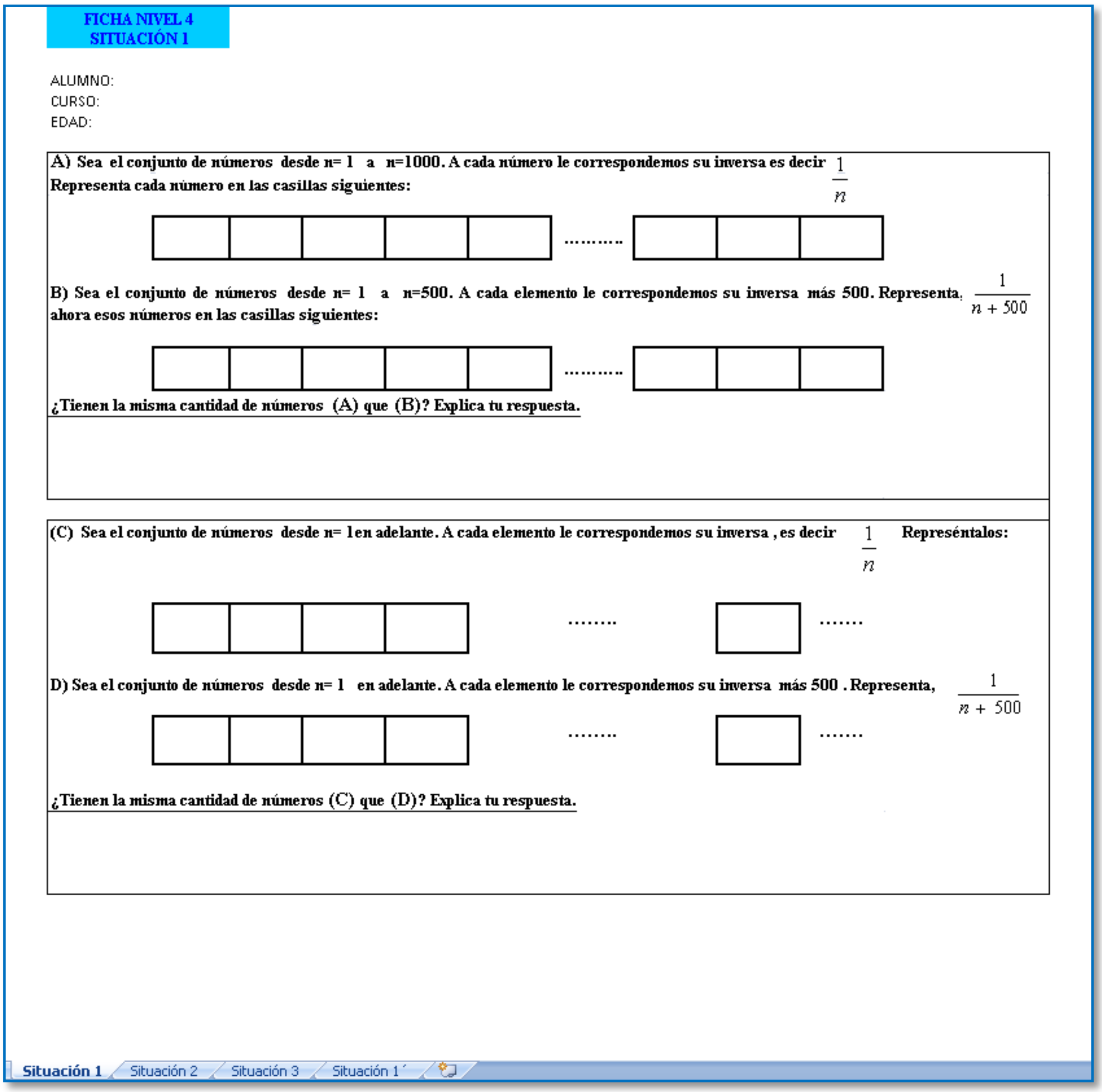
D) Sea el conjunto de números desde n= 1 en adelante. A cada elemento le correspondemos su inversa más 6, es decir . Representa, $\frac{1}{n+6}$

				....		....	

¿Tienen la misma cantidad de números (C) que (D)? Explica tu respuesta.

Situación 1 | Situación 2 | Situación 3 | **Situación 1´**

Figura AVI. 12. Nivel III-Situación 1'



FICHA NIVEL 4
SITUACIÓN 1

ALUMNO:
CURSO:
EDAD:

A) Sea el conjunto de números desde n= 1 a n=1000. A cada número le correspondemos su inversa es decir $\frac{1}{n}$
Representa cada número en las casillas siguientes:

					……….			

B) Sea el conjunto de números desde n= 1 a n=500. A cada elemento le correspondemos su inversa más 500. Representa, $\frac{1}{n+500}$
ahora esos números en las casillas siguientes:

					……….			

¿Tienen la misma cantidad de números (A) que (B)? Explica tu respuesta.

(C) Sea el conjunto de números desde n= 1en adelante. A cada elemento le correspondemos su inversa , es decir $\frac{1}{n}$ Represéntalos:

				……..		…….

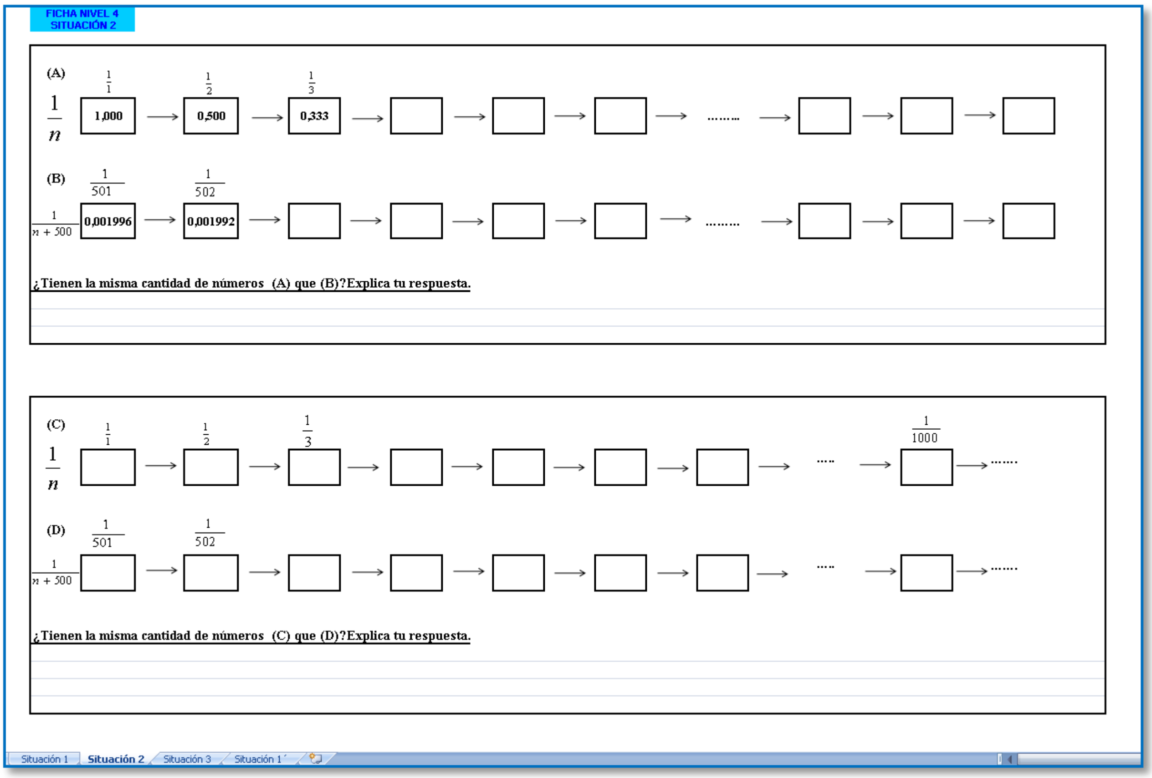
D) Sea el conjunto de números desde n= 1 en adelante. A cada elemento le correspondemos su inversa más 500 . Representa, $\frac{1}{n+500}$

				……..		…….

¿Tienen la misma cantidad de números (C) que (D)? Explica tu respuesta.

Situación 1 Situación 2 Situación 3 Situación 1´

Figura AVI. 13. Nivel IV-Situación 1



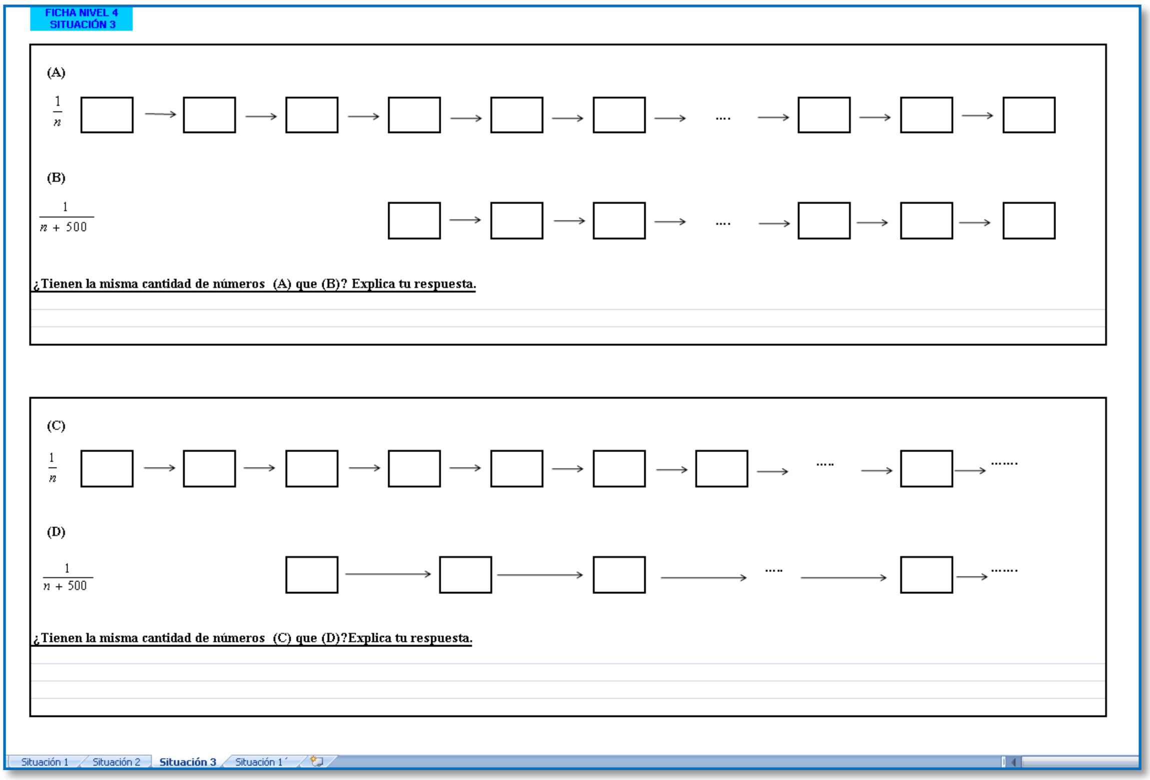
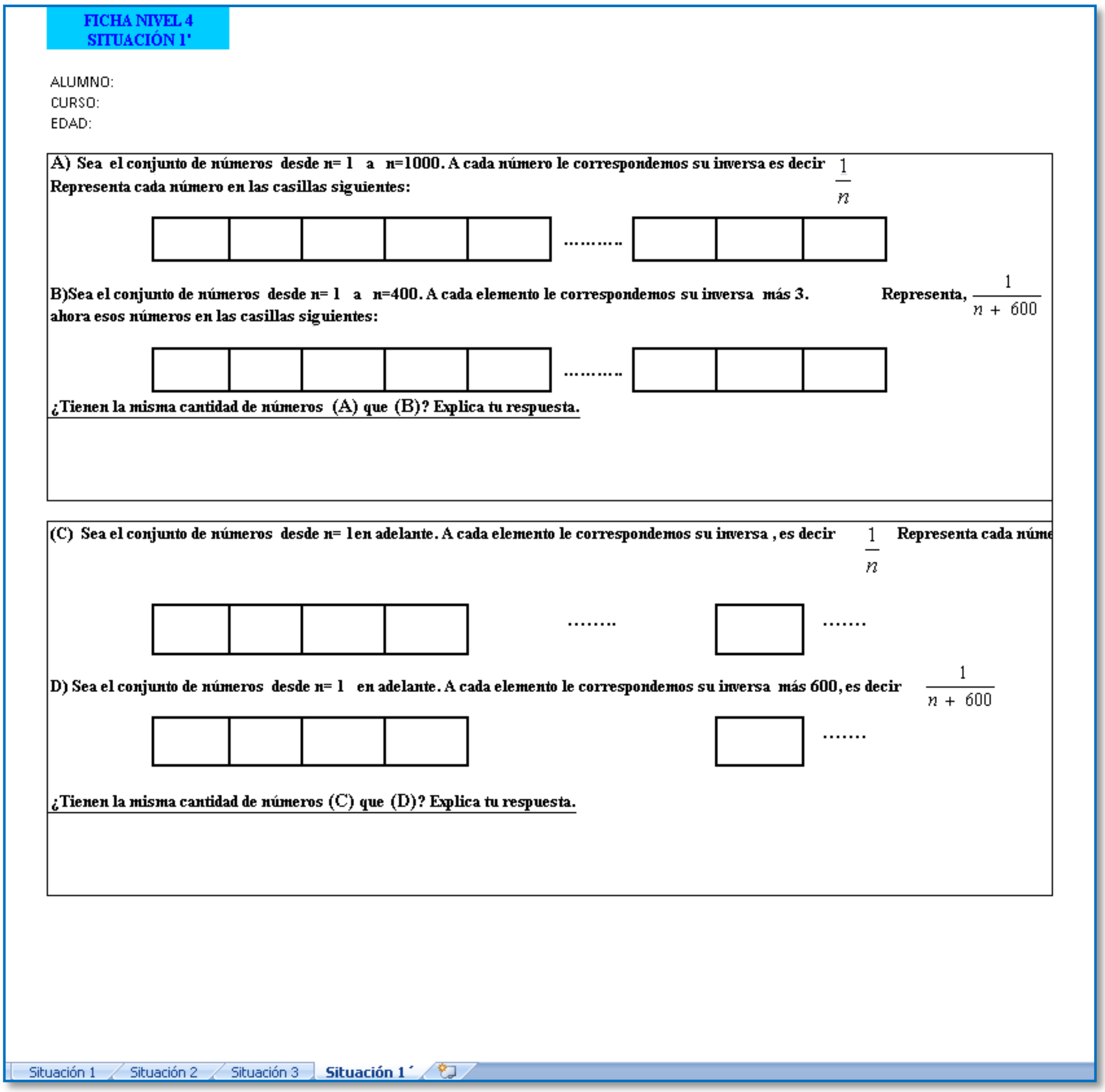


Figura AVI. 14. Nivel IV-Situaciones 2 y 3



FICHA NIVEL 4
SITUACIÓN 1'

ALUMNO:
CURSO:
EDAD:

A) Sea el conjunto de números desde n= 1 a n=1000. A cada número le correspondemos su inversa es decir $\frac{1}{n}$
Representa cada número en las casillas siguientes:

					………			

B)Sea el conjunto de números desde n= 1 a n=400. A cada elemento le correspondemos su inversa más 3. Representa, $\frac{1}{n+600}$
ahora esos números en las casillas siguientes:

					………			

¿Tienen la misma cantidad de números (A) que (B)? Explica tu respuesta.

(C) Sea el conjunto de números desde n= 1en adelante. A cada elemento le correspondemos su inversa , es decir $\frac{1}{n}$ **Representa cada núme**

				………		…….

D) Sea el conjunto de números desde n= 1 en adelante. A cada elemento le correspondemos su inversa más 600, es decir $\frac{1}{n+600}$

					…….

¿Tienen la misma cantidad de números (C) que (D)? Explica tu respuesta.

Situación 1 | Situación 2 | Situación 3 | **Situación 1´**

Figura AVI. 15. Nivel IV-Situación 1'

Anexo VI.2 Modelo de autorización paterna

	Pr. PS.02. PREPARACIÓN DE DOCUMENTOS OFICIALES Y PROCESOS BUROCRÁTICOS	Pr.PS.02.3 Revisión 0 *Página 1 de 1*
@ *info@huertadelacruz.es*	*C/ VICENTE DE PAÚL,7 ALGECIRAS 11203 (CÁDIZ)*	956 66 05 50
PS.02.3 PROTECCION DE DATOS		

D. Juan Antonio Prieto, profesor de matemáticas del Colegio Huerta de la Cruz que está trabajando en su Tesis Doctoral, solicita permiso para poder hacer entrevistas clínicas a su hijo/a, lo que supone hacer grabaciones de audio y video de las mismas. Estas grabaciones son estrictamente confidenciales, de uso pedagógicos y solamente los datos estadísticos serán utilizados.

La comunidad educativa del Centro es consciente de que los alumnos son titulares de los derechos fundamentales que hay que respetar: el derecho a su intimidad y el derecho a la protección de sus datos de carácter personal. Ambos derechos están regulados por la **Ley Orgánica 1/1982**, de 5 de mayo, de protección civil del derecho al honor, a la intimidad personal y familiar y a la propia imagen y la **Ley Orgánica 15/1999**, de 13 de diciembre, de Protección de Datos de Carácter Personal. También la ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo hace especial hincapié en el tratamiento de datos o imágenes del alumnado.

De acuerdo con esta legislación respecto al tratamiento de las imágenes de alumnos, este centro solicita el consentimiento de los representantes legales de sus alumnos para poder utilizar estas imágenes exclusivamente con un carácter pedagógico en las cuales se respete al máximo todos los derechos de nuestro alumnado. Para ello hemos preparado el presente modelo de **autorización** quedando a criterio de cada padre o madre la firma de dicha autorización y su posterior entrega al tutor/a de su hijo/a.

MODELO DE AUTORIZACIÓN PATERNA

(A CUMPLIMENTAR POR EL PADRE, LA MADRE O EL TUTOR/A DE LOS MENORES DE 16 AÑOS)

D./Dª ________________________________, con DNI/pasaporte en vigor número ________________, en mi condición de padre/madre/tutor/tutora de D./Dª ________________________________, con DNI/pasaporte en vigor número ___________________,por la presente AUTORIZO a mi hijo/hija/pupilo/pupila a participar ____.

En __________________________, a __ de ____________ de _____.

Fdo:

Adjunto copia de mi DNI/pasaporte en vigor.

Según lo que dispone la Ley Orgánica 15/1999, de 13 de diciembre, de Protección de datos, le informamos que este documento es propiedad del Colegio HUERTA DE LA CRUZ, quien se reserva el derecho de solicitar su devolución cuando así se estime oportuno. No se admite hacer copia parcial o total del mismo, así como mostrarlo a empresas o particulares sin la expresa autorización por escrito a la Dirección.

ANEXO VII
ESTUDIO EMPÍRICO DEL MODELO EVOLUTIVO

Anexo VII.1 Trascripción de las entrevistas realizadas para el estudio empírico cualitativo del modelo evolutivo

En las transcripciones de las entrevistas hemos anotado códigos[114] y símbolos que aclaramos a continuación para facilitar su lectura e interpretación:

- Las intervenciones del investigador se marcan con la letra E y las del estudiante con la letra A.
- Los asteriscos en las intervenciones del investigador indican que se inicia la tarea asociada a un nivel y a una situación.
- Las anotaciones del tipo *(Ki)*, que aparecen en algunas intervenciones de la investigador, significa que está planteando la situación *i* de la tarea asociada al Nivel *K*.
- En algunas respuestas de los alumnos y alumnas aparece entre paréntesis notas del tipo: *(Kim)*[115] que será el justificante de señalar en la tabla[116] la celda de coordenadas (m, Nivel *K*, i).
- Si m toma el valor B, cuando no resuelven correctamente las tareas finitas, se le acompaña con el símbolo †.
- En algunas respuestas aparece *(KE**t**)*, *K* indica el nivel, ***Et*** significa estrategia seguida, siendo E fijo y ***t*** variando de ***1*** a ***4***. En el caso de que un alumno o

[114] Misma simbología y codificación establecida en Fernández (2001).
[115] K representa el estado, i la situación de la tarea asociada al estado y m toma los valores A o B.
[116] Nos estamos refiriendo a las tablas del apartado 10.1 del capítulo VII.

alumna en un nivel determinado lo supere con distintas estrategias, entonces consideramos que la estrategia usada en el nivel considerado es el mayor.

- Entre paréntesis y en cursivas, lenguaje no verbal (anota con el teclado del ordenador, indica en la pantalla, piensa,…)
- Los puntos suspensivos que aparecen en la transcripción bien son de los términos que le siguen a las sucesiones (ej.: 1, 2, 3,…) o bien para indicar que el estudiante está un tiempo sin contestar.

Para facilitar la lectura y aunque ya se ha indicado en el apartado 6.3.2. del capítulo VII, el comienzo de las entrevistas se realiza de la siguiente forma por parte del investigador.

Te voy hacer una entrevista acerca de la resolución de unas series de tareas de matemáticas que debes hacer. Las respuestas son "abiertas", eso significa que no tiene que coincidir con las de otros compañeros o compañeras, pero te agradecería que no le comentaras nada a ninguno de ellos o ellas hasta que no terminemos todas las entrevistas. Se van a realizar en el programa informático Excel que seguro que estás familiarizado[117]*. Este va a ser tu ordenador, tu ratón y tu monitor. Está en red con el mío, lo que se llama "escritorio remoto", eso significa que todo lo que tú hagas, yo lo veré en mi monitor. Es más, como ves, puedo yo interactuar en la tarea que estés haciendo, ayudándome de mi ratón y de mi teclado. Todo lo que hagamos se grabará junto a tu imagen de la WebCam, así como el diálogo que establezcamos gracias a este micro. Te aconsejo que uses el teclado propio de la numeración cuando debas poner números. Como ya sabes, en Excel si quieres modificar un dato o bien lo borras o bien situándote en la misma casilla, anotando el nuevo, ya borrarías el anterior.*

[117] Es un centro TIC.

Aunque el propio programa Excel al introducir una fracción lo trasforma en número decimal y no es necesario realizar ningún cálculo, se le facilita una calculadora al estudiante por si es necesario su uso.

Las trascripciones de las entrevistas van por curso y en el mismo orden que las establecidas en las tablas de distribución de respuestas de cada alumno o alumna por tareas, situaciones y estrategias.

CURSO: 1 º E. S. O.

1) Alumno: Ju.12, 11 Nombre: Juan Fecha de Nacimiento: 18/06/02

E: Entrevista nº 1 del día 6 de Febrero del 2015, con Juan F. V. de 1º A, ¿qué edad tienes, Juan?
A: 12.
E: 12 años, bueno pues lee la actividad número 1.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=10 representa cada uno en las casillas siguientes.
E: Bien.
A: ¿Qué pongo el número o n es igual a 10?
E: No, del 1 al 10.
A: *(Escribe 1, 2, 3,… hasta 10)*
E: Muy bien, ahora la parte segunda.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=7, a cada número le sumamos tres. Representa ahora n+3 en las casillas.
E: Ahora, escoge del 1 al 7 y sumándole 3, 1 más 3.
A: 2 más 3 *(escribe 4, 5, 6,… hasta 10)*.
E: Ahora me dice la pregunta: contesta la pregunta, ¿tienen la misma cantidad de números A que B?
A: No.
E: No, ¿el A cuánto tiene?
A: 10.
E: Y el B, ¿tiene?
A: 7.
E: Bueno vamos a ver el de abajo, ahora dice sea el conjunto de números…
A: Desde n=1 en adelante, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Ahora no es hasta el 10, ya no para, ¿de acuerdo?
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*.
E: Esto como va en adelante le pongo puntos suspensivos, ¿aquí cuál puedes poner?
A: El 5.
E: No hombre, si están los puntos suspensivos es para decir que sigue adelante, pon por ejemplo…
A: ¿El 10?
E: 10, y estos puntos suspensivos, ¿qué significan, Juan?
A: Que siguen más adelante.
E: ¿Qué diferencia hay entre estos puntos suspensivos y estos? *(señala en la pantalla)*.
A: Pues que los puntos suspensivos de la izquierda están antes del 10 y los de la derecha van después del 10.
E: Sí, ¿dónde hay más números aquí o aquí? *(señala en la pantalla)*.
A: A la derecha.
E: A la derecha, bien pues abajo hay que hacer lo mismo pero sumándole 3, igual que el ejercicio anterior, si es 1…
A: 4, 5, 6, 7.
E: Y este por ejemplo…
A: 13.
E: Ahora la pregunta es, ¿tiene la misma cantidad C que D? Números, ¿eh?, no casillas.
A: D.
E: El D tiene más, ¿por qué?
A: ¡Ah, no!, iguales.
E: Iguales. ¿Por qué?
A: Porque…en el D, ¿también se cuenta desde el 1?
E: No, desde el 4.
A: El C tendría más. *(I1B)*

*E(*I2*): Sí, vale. *(Le pone la ficha I2)* Vamos a ver una situación nueva, esto te lo he puesto yo, el primero no lo vamos a hacer porque lo has hecho bien, pero el D, aquí hay que poner el 1, aquí el 2, aquí el 3,…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*.
E: Aquí hay muchos, pero por no poner todos, Juan, te he puesto puntos suspensivos, te he puesto el 100, pues ten en cuenta que del 7 al 100, pues hay noventa y tantos números, y luego sigue adelante, es decir, que no para. Y abajo tú lo has hecho bien 4, 5, sería…sumándole 3.
A: *(Escribe 6, 7, 8, 9, 10)*.
E: Esto seguiría adelante y aquí podemos poner el que tú quieras o si tú quieres poner el que corresponda arriba.
A: El 103.
E: Y esto sigue adelante, del 10 al 103. Hay bastantes, hay ochenta y tantos, si no me equivoco y aquí sigue adelante. Bien, ¿tiene la misma cantidad C que D?
A: No.
E: ¿Quién tiene más?
A: El C.
E: ¿Por qué?
A: Porque va del 1 hasta más del 100 y el D va del 4 hasta más del 103.
E: ¿Cuánto más tendría C que D? ¿Qué le falta?
A: Un número más.
E: ¿Un número más? ¿Cuál?
A: Claro le faltarían tres, el 1, el 2 y el 3
E: Aunque estén los puntos suspensivos aquí, ¿no?
A: Sí. *(I2B)*
E: Muy bien, listo.

2) <u>Alumno:</u> Zo. 13,02 Nombre: Zoraida Fecha de Nacimiento: 17/03/01

E: Entrevista nº 2 con Zoraida P. P. de 1º A, ¿qué edad tienes, Zoraida?
A: 13.
E: 13 años, vamos a empezar a escribir aquí, ¿vale?, léelo.
A: Sea el conjunto de números desde nº1 a nº10 representa cada uno en las casillas siguientes.
A: *(Escribe 1, 2, 3,… hasta 10)*
E: Vamos a ver ahora el segundo, ¿vale?, sea el conjunto…
A: Sea el conjunto de números desde nº1 a nº7, a cada número le sumamos tres. Representa ahora n+3 en las casillas.
E: Muy bien, ahora hay que sumarle 3, ¿vale?, entonces sería…1 más 3.
E: No, es del 1 al 7, y cada uno de estos numeritos hay que sumarle 3.
A: *(Escribe 4, 5, 6, … hasta 10)*.
E: La pregunta es sencilla, ¿quién tiene más cantidad de números esta regleta o esta regleta?
A: La A.
E: Bien, ahora vamos a ver estos dos apartados *(C y D)*, ahora no es del 1 al 10, sino del 1 en adelante, luego aquí hay que poner…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*.
E: Aquí tiene puntos suspensivos, que ellos siguen adelante y aquí qué números vas a poner, cualquiera que tú quieras, ¿cuál pondrías tú?
A: *(Escribe 10)*
E: …y siguen adelante. Estos puntos suspensivos lo que indica, es cuántos números hay aquí ¿Quién tiene más números estos puntos suspensivos o estos? *(señala en la pantalla)*
A: El último.
E: Eso sigue adelante, ¿vale? Bueno pues de la misma forma que el anterior, al apartado D, hay que sumarle 3, luego el primero sería…
E: 1 más 3.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Y este por ejemplo
A: *(Escribe 22)*
E: Has puesto 22 por poner uno, bien, ¿quién tiene más números arriba o abajo?
A: Abajo.
E: ¿Por qué?
A: Porque tiene 22.
E: ¿Sí? Y ¿por qué no has puesto 10?
A: Porque… *(Piensa)*
E: Ahí puedes poner el que tú quieras, además hay puntos suspensivos, estos siguen adelante.

E(I2)*: Vamos a seguir adelante, ¿vale?, *(Le pone la ficha I2)* el de arriba lo has hecho bien, vamos a hacer el de abajo. Esto para ayudarte a ti, ¿vale? 1, 2, 3 sigue tú.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Y ahora yo no voy a estar toda la vida poniendo números, te he puesto el 100 aquí, ¿vale?, decir que del 7 hasta el 100, hay noventa y tantos números, y luego esto sigue adelante sin parar, ¿de acuerdo?. Y al de abajo el que le corresponde hay que sumarle 3, en vez de 1más 3, 2 más 3, 3 más 3.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y este si tú quieres, pon el correspondiente a este si quieres, ¿vale? Sería…
A: 101.
E: ¿101? Si este corresponde a 100 y le estamos sumando 3, sería…
A: 103.
E: 103, si quieres poner el que le corresponde, bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más números arriba o abajo? Sabiendo que esto sigue adelante.
A: Los dos. *(I2A)*
E: Los dos tienen la misma cantidad.

E(I3)*: Vamos a ver aquí, ahora te lo pongo igual pero de otra forma, el primero sería 1, 2, 3 sigue tú.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9,10)*
E: Este es el que era del 1 al 10, y el de abajo sería 1 más 3: 4, el siguiente sería…
A: 8.
E: No, fíjate en el de arriba, 2 más 3.
A: *(Escribe 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Este ya lo hicimos anteriormente y tú me dijiste que había más arriba que abajo, luego está bien, lo he puesto de otra forma. Vamos a ver el de abajo, el 1, el 2, el 3.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Y ahora este por ejemplo, ¿cuál le ponemos?, anteriormente le puse 100, tú qué quieres ponerle ahora, hay muchos números ¿no?
A: 99.
E: Venga 99, puedes poner el que tú quieras, esto significa que del 7 al 99 hay 92 números, 91, y de aquí pues sigue adelante, ¿vale? Vamos a ver aquí, cojo el 1 y le sumo 3, sería…
A: *(Escribe 4, 5, 6)*
E: Bueno y aquello sigue adelante, y este por ejemplo sería…
A: 10.
E: ¿10?
A: 8.
E: ¿Por qué 8? Si fuese 8, es que en los puntos suspensivos hemos puesto el 7, ¿no?, y aquí del 7 al 99 hemos puesto un montón, luego pon ahí el que tú quieras.
A: *(Escribe 99)*
E: Bien, ¿quién tiene más cantidad de números arriba o abajo?
A: Arriba.
E: Arriba, bueno por qué dices tú que es arriba, Zoraida.
A: Porque… *(Piensa)*

E: Y cuántos números faltan entonces abajo.
A: Dos.
E: ¿Cuáles serían?
A: El 2 y el 3. *(I3B)*
E: Vale.

3) <u>Alumno:</u> Ig. 13,02 Nombre: Ignacio Fecha de Nacimiento: 17/03/02

E: Tercera entrevista del día 6 de Febrero del 2015, con Ignacio V.M. de 1º A, ¿qué edad tienes, Nacho?
A: 12.
E: 12. Bien lee esta actividad y contesta, ¿vale?
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=10 representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien ahí ponemos entonces…
A: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: Muy bien, ¿fácil no? Bueno pues ahora el segundo la diferencia que tiene es que va del 1 al 7 y hay que sumarle 3 a cada uno de ellos.
A: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: Son del 1 al 7, ¿quién tiene más números arriba o abajo?
A: Más números arriba.
E: Bien, ahora vamos a hacer este, pero la diferencia que existe, Nacho, es que este va del 1 en adelante, es decir, no es que se pare en 10 sino que sigue adelante. Entonces la primera sería…
A: 1, 2, 3, 4.
E: Sigue adelante, y aquí, por ejemplo, ponemos…
A: 10.
E: Y aquí hay puntos suspensivos, Nacho, y aquí puntos suspensivos, ¿son diferentes estos dos puntos suspensivos? *(Señala la pantalla)*
A: Sí.
E: ¿Quién tiene más números, estos puntos suspensivos o éstos?
A: El primero.
E: El primero, ¿tiene más?
A: Sí.
E: ¿Por qué?... Estos puntos suspensivos van del 4 al 10, ¿verdad? y estos puntos suspensivos van del 10, ¿a dónde?
A: Al infinito.
E: Muy bien, ahora es otra vez lo mismo que el anterior y hay que sumarle 3, en este caso sería…
A: 4, 5, 6, 7.
E: Sigue, porque no vamos a estar escribiendo todo el tiempo, ¿verdad? Y ahora este, por ejemplo.
A: 11.
E: Bien, otra vez la misma pregunta, ¿quién tiene más números arriba o abajo?
A: Iguales.
E: Iguales, ¿por qué?
A: Porque los dos son equivalentes. *(I12)*

*E(*II1*): Vale muy bien. Ficha Nivel 2. Ahora este del 1 al 5000, aquí pondríamos…
A: 1, 2, 3, 4, 5.
E: Seguirían adelante y qué pondríamos en estos 3, va del 1 al 5000.
A: Cualquier número antes de 5000.
E: Pero el último, ¿cuál sería?
A: 5000, 4999 y 4998.
E: Vale, ahora lo mismo que el anterior pero le sumamos 500, en vez de 3, en vez de 1 es...
A: 501, 502, 503, 504, 505.
E: Esto sigue adelante y estos tres últimos, ¿cuáles serán?
A: El último 4500.
E: No, porque hay que sumarle 500.
A: ¡Eh!... 4498. *(II1B†)*

*E(*II2*): Vamos hacerlo de otra forma, ¿vale? mira aquí te lo he puesto yo, más fácil 1, 2, 3, sigue tú.
A: *(Escribe 4, 5, 6)*
E: Aquí hemos dicho que este era el 500, ¿verdad?
A: *(Escribe 5000, 4999, 4998)*
E: Y aquí lo has hecho tú muy bien, 1, 501; 2, 502; 3, 503.
A: *(Escribe 503, 504, 505, 506)*
E: Le estamos sumando 500, ¿vale? Y ahora los 3 últimos son 4500, 4500 más 500.
A: 5000.
E: 5000, parece ser que es el mismo, y el anterior al sumarlo valdrá…
A: 4999.
E: Eso es, y el anterior del anterior sería…
A: 4998.
E: ¿Quién tiene más cantidad de números, arriba o abajo?
A: Igual.
E: ¿Iguales? El primero desde dónde va, del 1 al…
A: 5000.
E: Pues abajo es lo mismo, pero ahora va a seguir en adelante, ¿vale?, Juan; Nacho, perdón, serían 1, 2, 3.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)*
E: Yo te he puesto 1000, pero del 7 al 1000 hay un montón, hay novecientos y pico, y estos puntos suspensivos, dices tú que va en adelante llegando hasta dónde
A: Hasta el infinito.
E: Bien, pues ahora esto es lo mismo, si es 1 es 501, si es 2 es 502, si es 3.
A: *(Escribe 503, 504, 505, 506, 507)*

E: Y el último, no el último, sino este, cuál podría ser.
A: El 900.
E: El 900 por ejemplo, y aquí ya sigue adelante, ¿quién tiene más números arriba o abajo?
A: Arriba.
E: ¿Por qué tiene más arriba?
A: Porque del 1 al 1000 hay más.
E: No, no es hasta el 1000.
A: ¡Ah vale, vale!
E: Esto sigue adelante.
A: Entonces igual.
E: Igual, ¿vale? *(II2A)*

*E(*II3*): Vamos a ver si lo ves mejor en esta ficha. Este ya está hecho, no lo voy hacer otra vez, ¿vale?, la comparación la misma, aquí sería.
A: *(Escribe 6)*
E: Y aquí sería 4998.
A: *(Escribe 4998, 4999, 5000)*
E: Y aquí igual sumando, 501.
A: *(Escribe 501, 502, 503)*
E: Y estos 3 últimos, otra vez lo mismo.
A: *(Escribe 4998,4999, 5000)*
E: Vamos a ver abajo, 1, 2, 3 serían...
A: *(Escribe, 4, 5, 6, 7)*
E: Este ahora ya pon ya… el que tú quieras, yo te puse 1000, la otra vez, pero puedes poner el número que te dé la gana.
A: *(Escribe 50)*
E: 50 por ejemplo, ¿vale?, y esto sigue adelante. Y a este hay que sumarle 500, entonces sería…
A: *(Escribe 501, 502, 503)*
E: Perfecto, sigue adelante, y este por ejemplo.
A: *(Escribe 900)*
E: Correcto y sigue adelante. ¿Quién tiene más cantidad de números arriba o abajo?
A: ¡Eh!... iguales, no, el de arriba porque empieza en el 1 hasta infinito. *(II3B)*
E: Infinito, ¿y el otro?
A: En 501 hasta infinito.
E: Entonces le falta, ¿cuántos según tú?
A: 500.

4) Alumno: Fr. 12,09 Nombre: Francisco Jesús Fecha de Nacimiento: 17/08/02

E: Entrevista nº 4 del día 6 de Febrero, con Francisco Jesús R.R. de 1º B.
¿Qué edad tienes Francisco?
A: 12.
E: 12 años, muy bien lee el apartado A y contesta.
A: Sea el conjunto de números desde n…
E: Desde 1 hasta 10 ¿vale?
A: Desde 1 hasta 10. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien, es fácil ¿no? Entonces aquí ¿qué pondríamos aquí?
A: El 1. *(Escribe 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Muy bien, ¿vale?, vamos a ver el apartado B; dice sea el conjunto…
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=7. A cada número le sumamos 3. Representa ahora n+3 en las casillas
E: Eso, entonces aquí sería del 1 al 7 y hay que ir sumándole, entonces en vez de 1 sería 1 más 3.
A: *(Escribe 4)*
E: 2 más 3.
A: *(Escribe 7)*
E: No espera, no es que estemos sumando 3 Francisco. Hay que sumarle al 1, 3; al 2, 3; al 3, 3… ¿entonces este sería? 2 más 3.
A: ¿2 más 3? 5 *(escribe 5)*
E: 5. 3 más 3.
A: *(Escribe 6)*
E: 4 más 3.
A: *(Escribe 7)*
E: 5 más 3.
A: *(Escribe 8)*
E: 6 más 3.
A: *(Escribe 9)*
E. Y 7 más 3.
A: *(Escribe 10)*
E: ¿Ves? Como ves está del 1 al 7 y hay que ir sumándole 3 a cada uno de ellos. La pregunta es sencilla; ¿quién tiene más cantidad de números arriba o abajo?
A: ¡Eh…! Arriba.
E: Venga, ¿Cuántos más?
A: 3.
E: Muy bien. Vamos ahora por abajo, el de abajo es de 1 en adelante, pero no tiene, no tiene ningún número como el anterior que estaba hasta 10 ¿vale? Entonces sería…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: 4, unos puntos suspensivos, y aquí ponemos el que tú quieras.
A: *(Escribe 10)*
E: Por ejemplo, y esto sigue adelante. Ahora, entonces la primera pregunta que te hago es aquí ¿estos puntos suspensivos son los mismos que estos puntos suspensivos de aquí?
A: No.
E: No, ¿no?, entonces ¿estos puntos suspensivos qué serían?
A: Pues menores que el 10 y mayores que el 4.
E: Muy bien, y ¿aquí?
A: Mayores que el 10.
E: Muy bien, mayores que el 10, ¿hasta dónde?
A: Infinito.
E: Y más allá. Bueno vamos a ver ahora entonces, ahora es lo mismo que el anterior,

ahora a cada uno lo que hacemos es sumarle 3. Si es 1…
A: El 4.
E: ¿Si es 2?
A: El 5.
E: Muy bien.
A: *(Escribe 6, 7)*
E: ¿Y aquí por ejemplo?
A: *(Escribe 20)*
E: Por ejemplo, vale, ¿quién tiene más números arriba o abajo? Números ¡eh!, no casillas.
A: Iguales.
E: Iguales, ¿por qué?
A: ¡Ah! no espérate… ¿por favor me puedes repetir la pregunta?
E: Sí, ¿quién tiene más cantidad de número en el C o en el D?
A: Iguales.
E: Iguales, ¿por qué?
A: Porque tiene las mismas casillas.
E: No, no son las casillas yo quiero los números.
A: Ah, el D.
E: ¿El D qué pasa?
A: Pues que es hasta 20.
E: Es hasta 20, pero tú podrías haber puesto 20 o podrías haber puesto 10 también.
A: Ya, ya,…
E: ¿Entonces?
A: ¿Pongo 10?
E: Pon lo que tú quieras, si es que yo no te he dicho que tengas que cambiar ningún número. ¿Y cuál tiene más?
A: *(Escribe 10)* Iguales.
E: ¿Iguales? ¿Por qué?
A: Porque llegan a 10 los 2.
E: Pero es que no llegan a 10, esto sigue para adelante.
A: ¡Eh…! No sé.
E: Mira el primero, el primero ¿tiene? ¡Dímelo tú!
A: 1, 2, 3, 4, y 10.
E: Pero hay más ¿no?, están ahí todos ¿no? Del 4 al 10 también están ahí y del 10 en adelante también están ahí. Y el otro ¿dónde empezaría?
A: El 4, 5, 6, 7 y el 10.
E: Pero ¿entre el 7 y el 10?
A: Hay más.
E: Y, ¿del 10 en adelante?
A: Hay más también.
E: Hay más, entonces ¿tienen la misma cantidad uno que otro? O ¿uno de ellos tiene más que el otro?
A: El D tiene menos. *(I1B)*
E: El D tiene menos, vale.

*E(*I2*): Vamos a ver si lo podemos ver de otra forma. El de arriba lo has hecho muy bien, entonces no lo vamos a hacer ¿vale? Y ahora vamos a ver el de abajo, serían 1, 2, 3, y aquí ya pones tú, pon 4.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Y te he ayudado porque te he puesto el 100, que es un número grande. Es decir que del 7 hasta el 100 hay 94 números, pero no los vamos a poner todos, si tenemos que poner todos estaríamos hasta mañana o más, y el 100 encima sigue adelante, eso sigue como tú has dicho. Y abajo hay que sumarle 3; 4, 5, ahora ¿pondrías?
A: *(Escribe 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y, ¿aquí por ejemplo?
A: *(Escribe 100)*
E: El 100 por ejemplo has puesto, ¿vale? ¿Cuál de los 2 tendría más números arriba, abajo o iguales?
A: El de arriba porque empieza desde el 1. *(I2B)*
E: ¿Aunque esto siga adelante, como tú has dicho?
A: Porque el de arriba empieza desde el 1 y el de abajo empieza desde el 4.
E: Muy bien.

5) <u>Alumno:</u> Pa. 12,09 Nombre: Pablo Fecha de Nacimiento: 20/08/02

E: Entrevista nº 5 del día 6 de Febrero con Pablo S. T. de 1º B.
¿Pablo, qué edad tienes?
A: Tengo 12 años.
E: 12 años, muy bien. Vamos a empezar leyendo el apartado A y vamos a contestar ¿vale?
A: Sea el conjunto de números desde el número1 al número 10. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien, pues lo ponemos aquí y ¿qué pondríamos aquí?
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: ¡Uy! perdón que se me ha ido. ¿Aquí hay que poner?
A: 5. *(Escribe 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Perfecto, vamos a ver ahora el siguiente Pablo, léelo.
A: Sea el número de conjuntos, sea el conjunto de números desde el número 1 al número 7. A cada número le sumamos 3. Representa ahora n+3 en las casillas.
E: Vale, es del 1 del 7, cada vez que cojamos uno vamos a sumarle 3, entonces si es 1 es…
A: *(Escribe 1)* 1, después 4
E: Más 3. ¿4 sería?
A: Sí.
E: Entonces borra este y pon 4.
A: ¡Ah, vale! *(borra 1) (escribe 4)*
E: ¿El siguiente?
A: 7.

E: No, porque es del 1 al 7, después del 1 ¿quién vendría?
A: Ah vale ya sé como es *(escribe 5)*, sería el 3 *(escribe 6)*, 7, el 8, el 9 y el 10
E: Perfecto, bien la pregunta es sencilla. ¿Cuál de estos dos tiene más números arriba o abajo?
A: Ah, ¿qué cuál tiene más números?
E: Sí.
A: El de arriba.
E: El de arriba ¿vale?, vamos a ver el de abajo, el de abajo es diferente, ahora es desde 1 en adelante, no es como este que llegaba hasta 10, ¿entonces sería? ¿Cuál sería aquí?
A: ¡Ah! vale, ¡eh!, es que no lo entiendo, ¿desde el 1 hasta?
E: Desde el uno hacia delante.
A: ¡Ah, vale!, *(escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Estos puntos suspensivos significan que eso va hacia delante.
A: ¡Qué siguen siguiendo!
E: Y aquí pon ahora el que tú quieras.
A: *(Escribe 12)*
E: Por ejemplo, y esto sigue adelante ¿eh? Pablo, es decir, estos puntos suspensivos, ¿qué diferencia hay entre estos puntos suspensivos y estos Pablo?
A: *(Piensa)*
E: ¿Aquí cuántos números había? Pues desde el 4.
A: Al 12.
E: ¿Y estos puntos suspensivos?
A: Desde el 12 hasta el 10.
E: ¿Hasta dónde?
A: Hasta 20.
E: ¿Hasta 20? ¿Por qué hasta 20?
A: No sé, es que…
E: ¿Hasta?
A: Hasta el que sea.
E: ¿Hasta?
A: Hasta el número que se pueda.
E: Hasta donde se pueda ¿vale?, muy bien. Vamos a hacer entonces el de abajo, el de abajo es lo mismo que el anterior, pero hay que sumar de nuevo 3, en vez de 1 ¿es? Sumarle 3.
A: ¡Ah! vale, entonces ¿es igual que el otro no?
E: Igual.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Bien, aquí seguiría, ¿verdad? Y aquí pondríamos ¿por ejemplo?
A: *(Escribe 10)*
E: El 10 por ejemplo y esto sigue adelante, muy bien. La pregunta es la misma que la anterior, ¿quien tiene mayor cantidad de números arriba, abajo o igual?
A: ¿De estos?
E: De estos dos.
A: Tiene los mismos números.
E: Tiene los mismos números ¿por qué?
A: Porque hay 4 casillas.
E: No, no por las casillas, si no por la cantidad de números.
A: No lo sé, son iguales porque no sé *(piensa)*, este sería mayor porque tiene más cantidad ¿no?
E: ¿Cuál de los dos?
A: El segundo porque tiene más cantidad, ¿no?
E: ¿El segundo?
A: Sí, porque tiene más cantidad.
E: Pero, ¿por qué tiene más cantidad el de abajo que el de arriba?
A: Porque los de arriba son a partir del 1, porque los de arriba son a partir del 1 y los de abajo son sumándole 3.
E: ¿Y entonces?
A: El de abajo sería mayor. *(I1B)*
E: ¿Mayor el de abajo?

*E(*I2*): Espérate a ver si lo vemos más claro. Este lo has hecho bien lo vamos a dejar aquí ¿vale?, el de abajo sería 1, 2, 3, ¿cómo es aquí?
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: 4, 5, 7, y en adelante ¿vale?, yo te he puesto 100, es decir que del 7 hasta el 100 hay noventa y tantos.
A: 93.
E: Y de aquí en adelante, muchos más.
A: Sí, hasta el infinito.
E: Eso hasta el infinito, muy bien. Y abajo voy a hacer lo mismo, es decir, que está el 4, el 5, estamos sumando 3 ¿verdad?, ¿este sería?
A: ¡Ah! vale, 6, 7, 8, 9, y 10.
E: Y ahora aquí por ejemplo pon el que tú quieras.
A: *(Escribe 20)*
E: Por ejemplo, podrías poner también un número más grande también, o el que le corresponde a este, o el que tú quieras.
A: *(Borra 20 y escribe 120)*
E: Por ejemplo, bien. ¿Cuál de los dos tiene mayor número arriba o abajo? Sabiendo que esto va en adelante hasta donde tú has dicho.
A: Este tiene más números porque es a partir del 100 y el otro es a partir del 120.
E: Pero aquí también podrías haber puesto 100 ¿no?
A: Sí.
E: ¿Entonces?
A: Tiene los mismos números.
E: ¿Los mismos números?
A: Sí, creo que tienen los mismos números *(I2A)*
E: ¿Arriba que abajo?
A: Sí.

*E(*I3*): Pasemos a esta tarea.
E: Serían 1, 2, 3…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y, ahora el de abajo serían…
A: *(Escribe 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13)*

E: La misma pregunta, ¿tienen la misma cantidad de números A que B?
A: No.
E: No, ¿cuál tiene más?
A: El A.
E: Vale, muy bien. Vamos ahora con el C, como ve, la situación es muy parecida a la anterior, 1, 2, 3.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Y por ejemplo…
A: *(Escribe)* 100.
E: Vamos a ver ahora este, se le suma 3.
A: *(Escribe 6, 7, 8)*
E: Y aquí por ejemplo.
A: 103.
E: La pregunta, ¿tienen la misma cantidad C que D?
A: Sí.
E: Sí, ¿por qué?
A: Porque siguen los números. *(I3A)*

*E(*I1'*): Y ahora esta tarea, parecida a la primera. Lee y contesta.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Muy bien, y el de abajo que parece que hay un cambio.
A: *(Escribe 7, 8, 9, 10)* Porque se le suma 6.
E: La pregunta, ¿tiene la misma cantidad de números?
A: No.
E: No, ¿cuál tiene más?
A: El A.
E: Ahora con el C, sea el conjunto de números de 1 en adelante, es fácil.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Y este por ejemplo.
A: *(Escribe 30)*
E: Lo mismo.
A: *(Escribe 7, 8, 9, 10)*
E: Y al 30 le corresponde.
A: *(Escribe 36)*
E: La pregunta, ¿tiene la misma cantidad de números C que D?
A: Yo creo que sí.
E: ¿Por qué?
A: Porque creo que tienen la misma cantidad. *(I1'***1***)*

*E(*II1*): Nivel 2. Venga, es muy fácil también, Pablo, sea el conjunto desde el 1 al 5000, escríbelo aquí.
A: Igual que antes ¿no? *(Escribe 1)*
E: 1, muy bien.
A: *(Escribe 2, 3, 4, 5)*
E: Muy bien, y ahora aquí ¿qué pondrías? Como es hasta el 5000.
A: 4998, no ¿97?
E: 98.
A: *(Escribe 4998, 4999, 5000)*

E: Venga, vamos a ver ahora el de abajo, el de abajo es lo mismo que el anterior, pero ahora en vez de sumar 3 le vamos a sumar 500.
A: Vale.
E: En vez de 1 ¿es?
A: 501 ¿no?, ¡ah, vale! *(Escribe 501)*
E: ¿El segundo?
A: *(Escribe 502)*
E: El tercero.
A: *(Escribe 503)*
E: El cuarto.
A: *(Escribe 504, 505)*
E: Muy bien, ten cuidadito porque ahora van los puntos suspensivos y ahora vamos a ver qué serían los tres últimos, date cuenta que el último es 4500, ¿vale? 4500 más 500 ¿sería el último?
A: Pues, ¿el último? 4500 ¿no?
E: No, más 500.
A: ¡Ah, vale! *(Escribe 5000)*
E: ¿Qué va a pasar entonces con el anterior? ¿Cuánto sería entonces el anterior?
A: *(…)* ¡Ah, vale, ya!, 4999
E: Eso es, ¿y el anterior?
A: *(Escribe 4998)*
E: Vale, bien. ¿Cuál tiene mayor número, arriba o abajo?
A: Eh *(…)*
E: El de arriba va desde el 1.
A: Hasta el 5000.
E: Y el otro va desde el 501.
A: Ah, este tiene más.
E: ¿Cuál?
A: El A.
E: Vale muy bien. Vamos para abajo, el de abajo aquí ya no se cortan si no que va en adelante, entonces pondríamos aquí.
A: ¡Ah!, ¿los mismos números? *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: El 1, muy bien. Aquí ya sigue adelante y aquí ¿cuál podrías poner tú?
A: El 500.
E: El 500 mismo venga muy bien, y esto sigue adelante ¿vale? Bien vamos al de abajo, ahora lo que vamos a hacer es sumarle de nuevo 500, ¿el primero sería?
A: *(Escribe 501)*
E: ¿El segundo?
A: *(Escribe 502)*
E: Tercero.
A: *(Escribe 503)*
E: Cuarto.
A: *(Escribe 504)*
E: Sigue adelante, y ahora aquí ¿cuál pondríamos nosotros?
A: Ah el ¿500?
E: El que tú quieras.
A: ¡Ah, vale! *(Escribe 500)*
E: Si quieres poner 500, 500. Muy bien, la pregunta es la siguiente ¿quién tiene más

números arriba o abajo? Sabiendo que esto va en adelante y este igual, ese va en adelante.
A: Yo creo que este.
E: ¿Cuál?
A: El A.
E: ¿El C?
A: ¡Ah!, sí, el C. *(II1B)*
E: ¿Más números este que este?
A: Sí.

*E(*II2*): Vamos a ver si lo vemos de otra forma, te lo voy a poner de otra forma a ver si lo ves, Pablo, 1, 2, 3, sigue tú, 4.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Bien y te he puesto el mismo ¿eh?, date cuenta entones que aquí del 7 hasta el 1000 ¿hay? Para no tener que estar copiándolo todo ¿vale?, si no vamos a estar toda la mañana, y encima esto va adelante, sigue, sigue, sigue, ¿vale?
Abajo hay que sumarle 500, 501, 502, ¿este sería?
A: *(Escribe 503)*
E: Muy bien.
A: *(Escribe 504)*
E: Bien.
A: *(Escribe 505)*
E: Bien.
A: *(Escribe 506)*
E: Bien.
A: *(Escribe 507)*
E: Bien. Puntos suspensivos y esto sigue adelante y en este por ejemplo ¿ponemos?
A: 1000 ¿no?
E: 1000 también, perfecto. A la vista de los resultados ¿quién tiene mayor número arriba o abajo?
A: Este porque…
E: Dime, dime la letra.
A: El C.
E: ¿El C tiene más?
A: Sí.
E: ¿Por qué?
A: Porque del 1 al 1000 hay muchísimos más que del 500 al…
E: Pero esto sigue adelante, esto no se para aquí ¿eh?
A: Ya, ya, pero tendría más números, aun así porque aquí empieza en el 501.
(II2B)

6) <u>Alumno:</u> An. 12,08 Nombre: Andrés Fecha de Nacimiento: 12/07/02

E: Entrevista nº 6 del día 6 de Febrero, con Andrés T. R. de 1ºB, ¿qué edad tienes, Andrés?
A: 12 años.
E: 12 años, muy bien. Intenta…, bueno, lee el apartado A y contesta.
A: Sea el conjunto de números decimales desde el número 1 al número 10. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien, lo ponemos aquí.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Bien, vamos a ver el apartado B que es diferente.
A: Sea el conjunto de números decimales desde el número 1 al número 7. A cada número le sumamos 3. Representa ahora nº+3 en las casillas.
E: Vale, entonces ahora lo que hacemos es sumarle 3, y en vez de 1 ¿es?
A: ¿Uno?
E: Más 3.
A: *(Escribe 3)*
E: No, 1 más 3.
A: *(Escribe 1)* ¿Y el más?
E: No, pon ya lo que es ¿no?, 1 más 3 ¿cuánto es?, ¿mejor no?
A: *(Escribe 4)*
E: ¿Y ahora sería?
A: 7.
E: No, 2 más 3, porque estamos sumando del 1 al 7; 3 cada uno. Bien, ¿el siguiente?
A: *(Escribe 5)* 2 más 4 ¿no sería?
E: Eso es.
A: *(Escribe 6)*
E: ¿Siguiente?
A: 2 más 5. *(Escribe 7, 8, 9, 10)*
E: Muy bien, ¿quién tiene mayor cantidad de números arriba o abajo?
A: Abajo.
E: ¿Abajo? ¿Cuántos tiene abajo?
A: Porque al de abajo se le va sumando…
E: Pero tú dime los números de aquí ¿cuántos números hay aquí?
A: Aquí hay 7.
E: ¿Y arriba cuántos hay?
A: 10.
E: ¿Y qué es mayor 10 o 7?
A: Ah vale, es mayor cantidad el de arriba.
E: Bueno, va bien, vale. Vamos a ver abajo, abajo es diferente, ¿vale? Es desde el 1 en adelante, aquí ya no para, no para como en el de antes que paraba en el 10, entonces el primero sería 1
A: *(Escribe 1)*
E: Sigue.
A: 2, 3, 4.
E: No vayas a poner ahora todos, entonces lo que hacemos es poner puntos suspensivos ¿qué hay que poner en este de aquí?
A: ¿9?
E: Lo que tú digas, da igual.
A: 8 mismo.
E: 8, es decir que estos puntos suspensivos significan que ¿cuántos números hay de aquí a aquí?
A: 5, 6, 7 y 8.

E: Eso es, pero aquí sigue adelante, ¿eh? Ten cuidado, ¿quién estaría en los puntos suspensivos estos?
A: 9 y 10.
E: ¿Solo 9 y 10? He dicho que va en adelante
A: 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18.
E: ¿Hasta dónde?
A: Hasta el infinito.
E: Bueno, hasta el infinito entonces, por eso he puesto los puntos suspensivos porque si no íbamos a estar aquí toda la mañana o más. Bien, vamos a ver ahora el de abajo, Andrés, ahora lo que hacemos es sumarle 3, en vez de 1, ¿pongo?
A: *(Escribe 3)* No, no, no 4. *(Escribe 4)*
E: Eso es, ¿y el 2?
A: *(Escribe 5)*
E: ¿Y el 3?
A: *(Escribe 6, 7)*
E: ¿Y este por ejemplo.
A: *(Escribe 9)*
E: 9, es decir, que aquí has puesto tú unos cuantos números y ¿aquí hay?
A: Infinito.
E: Bien, ¿quién tiene más números arriba o abajo?
A: Arriba… No, abajo ¿no?
E: ¿Arriba por qué?
A: Arriba porque…igual que en este, porque ahí va…porque a este se le ha sumado…3. *(I1B)*

*E(*I2*): No, venga voy a ponértelo más sencillo. Vas hacer el de abajo, porque el de arriba lo has hecho bien, hemos puesto aquí el 1, el 2, el 3, ¿aquí? Todo tuyo.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Bien, yo ahora aquí te he puesto el 100. Andrés, ahora a ver, es decir que del 7 al 100 aquí hay noventa y tantos, y esto sigue adelante, ¿vale? Y abajo es lo mismo, pero sumándole 3; 4, 5.
A: *(Escribe 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Vale, y aquí ¿por ejemplo? ¿Cuál pondrías aquí?
A: Pues… 92 ¿no?
E: Venga ponlo, aquí no hay problema. 92 venga 92. Podrías haber puesto 100 más 3 también.
A: ¿Lo cambio?
E: No, es igual, como tú quieras, ahí puedes poner tú lo que tú quieras.
A: *(Cambia a 103)*
E: Vale, y esto sigue en adelante. Bien, viendo tú eso, ¿quién tiene más cantidad este o ese o los dos iguales? Sabiendo que aquello sigue adelante.
A: Los dos iguales, ¿no? *(I2B)*
E: Los dos iguales, muy bien.

*E(*I3*): Ahora de otra forma esta tarea.
E: Serían 1, 2, 3.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y, ahora el de abajo serían…
A: *(Escribe 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13)*
E: La misma pregunta, ¿tienen la misma cantidad de números A que B?
A: No.
E: No, ¿cuál tiene más?
A: El A.
E: Vale, muy bien. Vamos ahora con el C, como ve, la situación es muy parecida a la anterior, 1, 2, 3.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Y por ejemplo…
A: *(Escribe)* 500.
E: Vamos a ver ahora este, se le suma 3.
A: *(Escribe 6, 7, 8)*
E: Y aquí por ejemplo.
A: 503.
E: Andrés, ¿tienen la misma cantidad C que D?
A: Sí.
E: Sí, ¿por qué?
A: Porque siguen adelante los números. *(I3A)*

*E(*I1'*): Y ahora esta tarea, Andrés, muy parecida a la primera. Lee y contesta.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Muy bien, y el de abajo que parece que hay un cambio.
A: *(Escribe 7, 8, 9, 10)* Porque se le suma 6.
E: La pregunta, ¿tiene la misma cantidad de números?
A: No.
E: No, ¿cuál tiene más?
A: El A, tiene seis más.
E: Bien, ahora con el C, sea el conjunto de números de 1 en adelante.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Y este por ejemplo.
A: *(Escribe 500)*
E: Lo mismo.
A: *(Escribe 7, 8, 9, 10)*
E: Y al 30 le corresponde.
A: *(Escribe 506)*
E: La pregunta, ¿tiene la misma cantidad de números C que D?
A: Yo creo que sí.
E: ¿Por qué?
A: Porque siguen adelante, no paran. *(I1'***3***)*

*E(*II1*): Ficha Nivel 2, apartado A. Sea el conjunto desde 1 al 5000, ya este no es del 1 al 10.Venga empezaríamos.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5)*
E: No vamos a poner ahora todos los números, ¿no? Entonces perfecto, ¿cuál serían los tres últimos?
A: Pues sería… ¡eh!...este.
E: ¿El último cuál sería?
A: 5000.
E: Eso, más fácil, ¿no? ¿Y el anterior?

A: 4999.
E: Eso, ¿y el anterior?
A: 4998.
E: Perfecto, vamos a ver el de abajo, el de abajo es muy parecido al anterior que le sumábamos 3, pero ahora le sumamos 500, ¿entonces en vez del 1 es?
A: 501.
E: 501, ¿y el segundo?
A: 502, 503, 504, 505.
E: Y estos tres últimos, ¿cuál sería? Pues mira el último es 4500, con lo cual el último sumándole 500.
A: Cuatro mil…no 5000.
E: Ponle un cerito más.
A: Ah vale.
E: ¿Y el anterior sería?
A: 4500.
E: No. Porque el anterior sería, el anterior de 4500 aquí sería 4499 que si le sumo 500, saldría igual que el anterior.
A: ¿Por qué? No lo entiendo. Si este es, si el último es 5000.
E: 4500 es el último que le hemos sumado 500 y ha salido 5000, el anterior de 4500, ¿cuál sería?
A: No, pero si le quitas 500.
E: Pero no tienes que quitarle 500, tú primero tienes que decir qué número es y después sumarle 500.
A: El anterior de 4500 es 4499.
E: ¿y si le sumas 500?
A: 5500, no, sería 4499.
E: Más 500.
A: 4999.
E: Perfecto, y el anterior ¿era?
A: 4500.
E: No, mira.
A: ¿4998?
E: Claro, la pregunta es la siguiente, ¿quién tiene mayor número arriba o abajo o los dos iguales?
A: Iguales.
E: ¿Iguales? ¿El primero desde dónde va?
A: ¡Ah!, no, el de arriba tiene más.
E: ¡Ah!, ¿cuántos más crees tú que hay arriba? ¿Cuántos hay más arriba que abajo?
A: Pues, si a este le quitas 500…
E: El primero ¿desde dónde y hasta dónde va, Andrés?
A: Desde el 5 hasta el 4500.
E: No, no, desde el 1.
A: Desde el 1 hasta el 5000.
E: Vale ¿Y el de abajo?
A: Desde el 501 hasta el 5000. Hay más arriba.
E: Pero, ¿cuántos arriba? ¿Cuántos más?
A: *(Piensa)*
E: No, ¿dónde empieza uno y dónde empieza el otro?
A: En el 4999.
E: No, ¿el de arriba dónde empieza?
A: En el 1.
E: ¿Y el de abajo dónde empieza?
A: En el 501. Hay 500 más.
E: Claro, vale. Vamos para abajo Andrés, ahora otra vez lo mismo, esto va a seguir adelante sin parar en ningún lado, entonces ¿sería aquí?
A: Sería el…,espera que lo leo.
E: Entonces ¿este primero sería?
A: 1.
E: 1, ¿este?
A: 2. *(Escribe 3, 4)*
E: Vale, esto sigue adelante, no vamos a poner todos; por ejemplo, ¿este?, por poner uno en medio.
A: 90.
E: 90, te ha quedado muy bien, sigue adelante también, ¿eh?
A: Hasta el infinito.
E: Ahí va, muy bien, ahora vamos a ver el otro, es igual que el anterior, pero sumándole 500.
A: 501.
E: Eso es.
A: *(Escribe 502, 503, 504)*
E: Esto sigue adelante, y esto sería, ¿por ejemplo? El que tú quieras.
A: *(Escribe 5000)*
E: 5000 por ejemplo, vale, y sigue adelante, ¿cuál de los dos tiene mayor cantidad o son iguales los dos?
A: Iguales los dos. *(II13)*
E: Iguales los dos, ¿por qué?
A: Porque los dos son hasta el infinito.
E: Muy bien.

*E(*III1*): Ficha Nivel 3, lee el primero Andrés, sea el conjunto…
A: Sea el conjunto de números desde el número 1 al número 10. A cada número le correspondemos con su inversa, es decir 1…
E: Partido de n. Muy bien, entonces, ¿el primero cuál sería?
A: 1/n.
E: 1. 1 partido…
A: *(Escribe 1/)* de n ¿no?
E: No, 1. Vale el siguiente sería, ¿1 partido?
A: De 2. *(Escribe 1/2)*
E: El siguiente ¿1 partido de?
A: 1/3. *(Escribe 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9)*
E: Muy bien, y el de abajo es lo mismo, pero sumándole 3 ¿vale?, en vez de poner 1 tendremos que poner…
A: 1/1, no, 1/3, o 3/1.
E: No, 1 partido…
A: De 4. *(Escribe 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9)*
E: Bien, viendo los resultados, ¿quién tiene más números arriba o abajo? Aquí son números decimales, pero ¿cuántos números hay arriba?
A: Arriba hay más, ¿no?
E: Sí, ¿verdad? ¿Cuántos más hay arriba que abajo?

A: 3 más.
E: Bueno, ahora vamos a volver abajo que es lo mismo, pero aquí sigue adelante, el primero sería otra vez igual 1/n, ¿el primero sería?
A: 1/1.
E: Muy bien, ¿siguiente?
A: *(Escribe 1/2, 1/3, 1/4)*
E: Muy bien, ¿y este por ejemplo?
A: *(Escribe 1/8)*
E: ¿8?
A: *(Cambia a 1/10)*
E: Venga, eso. Abajo, lo mismo, hay que sumarle a cada uno, entonces el primero ¿sería?
A: 1/4 *(Escribe 1/5, 1/6, 1/7)*
E: Bien, ¿y este?
A: *(Escribe 1/13)*
E: Bien, ahora la pregunta es la misma, pero yo quiero que veas esto; esto va hasta dónde llegue, pero mira que está pasando aquí con los números 1, 0'5, 0'3, 0'25, 0'1, ¿qué está pasando?
A: Que cada vez disminuye más.
E: ¿A dónde crees que va a llegar?
A: A 0'000.
E: Ahí va, ¿y abajo igual no? 0'25, 0'20, 0'16… ¿y llega también?
A: Hasta el infinito.
E: Al infinito, pero ¿qué le está pasando a los números? ¿qué cada vez qué pasa? 0'25, 0'20, 0'16… ¿qué le está pasando a los números?
A: Que también disminuye, ¿no?
E: Disminuye, ¿dónde crees tú que van a llegar los números cuando se vayan acumulando, acumulando, acumulando?
A: A 0'0000.
E: Vale, bien. ¿Cuál de los dos tiene mayores números? Sabiendo esto ¿Arriba, abajo o iguales?
A: Iguales, ¿no?
E: Iguales, ¿por qué?
A: Porque los dos son infinitos y llegan hasta 0'000. *(III**14**)*
E: Muy bien.

*E(*IV1*): El siguiente, ¿el primero sería?
A: 1/1.
E: 1/1, muy bien ¿el siguiente?
A: *(Escribe 1/2, 1/3, 1/4, 1/5)*
E: Bien, fíjate tú que este va hasta el 1000, ¿vale?, y tú tienes que poner 1 partido de esos números, entonces ¿cuáles serían estos tres?
A: El último sería 1/1000.
E: Muy bien, el anterior sería…
A: 1/999.
E: El anterior sería…
A: 1/998.
E: Bien vamos a ver ahora, el de abajo lo mismo, pero hay que sumarle 500.
A: 1/501.
E: Muy bien, el siguiente…
A: 1/502. *(Escribe 1/503, 1/504, 1/505)*
E: Bien, y estos tres últimos ¿cuáles serían?
A: El último 1/1500.
E: No, aquí 500 más 500, 1 partido…
A: De… ¿1500?
E: No, lo que estamos haciendo es el último, sería 500, ¿no? Y hay que sumarle otros 500, entonces sería ¿1 partido…?
A: De 1000 *(Escribe 1/1000)*
E: ¿El anterior?
A: Pues…
E: El número anterior a 500, ¿sería?
A: 499.
E: ¿más 500?
A: 999.
E: 1 partido…
A: *(Escribe 1/999)*
E: ¿Y el anterior?
A: 1 partido de… Espera… 900
E: 998.
A: *(Escribe 1/998)*
E: Bien, la pregunta es otra vez la misma, Andrés, ¿más arriba o abajo?
A: Igual, ¿no?
E: ¿Igual?
A: Porque los dos llegarían a…
E: Claro, ¿cuántos números hay arriba? ¿Desde aquí a aquí cuántos hay?
A: ¡Ah! Arriba hay más.
E: Claro hombre, ¿vale?
A: Es que creía que esto también era…
E: Claro, hay que tener cuidado, es que está ahí para engañar. Abajo otra vez lo mismo, esto sigue adelante hasta no parar, venga vamos a hacer ya el primero entonces…
A: 1/1, *(escribe 1/2, 1/3, 1/4)*
E: Muy bien, ¿y este por ejemplo?
A: *(Escribe 1/8)*
E: ¿8?, vamos a ver ahora el de abajo
A: A todos le sumo 500 ¿no?
E: 500.
A: *(Escribe 1/501, 1/502, 1/503, 1/504)*
E: ¿Y este, por ejemplo?
A: Si el de arriba era 8, pues este mismo 1/508.
E: Por ejemplo, vale. Y ahora aquí te voy a dar los resultados correctos y ahora vamos a pensar lo siguiente.
A: ¿Iguales no?
E: Vale, ¿por qué son iguales?
A: Porque los dos llegarían hasta…los dos seguirían.
E: Pero fíjate lo que va a pasar con este
A: Que también va disminuyendo.
E: Este va al 0 y este también va al 0'00.
A: También va al 0'0000.
E: Entonces, ¿cuál sería el que tiene más? ¿Los dos iguales?
A: Los dos iguales.
E: ¿Siguen teniendo los dos iguales?
A: Sí, ¿no?

E: ¿Aun empezando este por esta cantidad?
A: El de arriba tendría más.
E: Claro, el de arriba tendría más.
A: Pues creo que son iguales, ¿no?
E: ¿El qué?
A: Que son iguales los dos. *(IV1B†)*
E: ¿Por qué?
A: Porque los dos seguirían al 0’000, los dos acabarían en el mismo.
E: En el mismo no acabarían, ¿acabarían dónde?
A: El de abajo en 500.
E: No.
A: ¿No?
E: ¿A dónde irían a parar? Van los números cada vez más pequeños, ¿verdad? ¿Y tú dices que van al número?
A: Hasta el 1, el de arriba hasta el 1.
E: Hasta el 1 ¿Empieza en 1, no?
A: A ver 0’000.
E: ¿Y el de abajo también? ¿A dónde iría a parar este?
A: ¿Hasta el 5? No, ¿iguales?
E: ¿A dónde irían a parar?
A: Al 1.

*E(*IV2*): Al 1 no llegaría el otro, ¿no? Bueno, vamos a mirarlo de otra forma, te lo pongo aquí, ¿vale? El primero lo dejo como está, pero el de abajo te lo he puesto aquí, ¿vale? Venga vamos a hacerlo. Este es 1/1.
A: *(Escribe 1/1)*
E: Vale, este 1/2
A: *(Escribe 1/2)*
E: Este 1/3.
A: *(Escribe 1/3)*
E: Bien ¿este?
A: *(Escribe 1/4, 1/5, 1/6, 1/7)*
E: Vale, ¿este?
A: *(Escribe 1/12)*
E: Por ejemplo, da igual. Mira yo te he puesto aquí la fracción y abajo el resultado, en este está pasando 1, 0’5, 0’3, 0’2, 0’2, 0’1, y este sería 0’08; ¿va a llegar a qué número?
A: Al 1.
E: El uno está aquí.
A: ¿9?
E: No hombre, 0’5, 0’3, 0’2, 0’2, 0’1, 0’1.
A: 0.
E: 0, bien, abajo otra vez lo mismo, pero sumándole 500, ¿1 partido?
A: *(Escribe 1/501, 1/502, 1/503, 1/504, 1/505, 1/506, 1/507)*
E: Muy bien, y este, ¿por ejemplo?
A: *(Escribe 1/512)*
E: Vale, mira qué está pasando también aquí abajo, venga dime los números, el 0’00…
A: 0’001996, 0’001992, 0’01...0’0019, 0’001980, al final acaba en el 0.
E: Acaba en 0, ¿quién tiene más números arriba o abajo?
A: Iguales. *(Duda) (IV2A)*
E: Iguales.

*E(*IV3*): Vamos a mirarlo de otra forma. Venga vamos a hacerlo. Este es 1/1.
A: *(Escribe 1/1)*
E: Vale, este ½.
A: *(Escribe 1/2)*
E: Este 1/3.
A: *(Escribe 1/3)*
E: Bien, ¿este?
A: *(Escribe 1/4, 1/5, 1/6, 1/7)*
E: Vale, ¿este?
A: *(Escribe 1/1000)*
E: ¿Los anteriores?
A: *(Escribe 1/999, 1/998, 1/997)*
E: Abajo lo mismo, pero sumando 500.
A: *(Escribe 1/501, 1/502, 1/503)*
E: Los últimos…
A: *(Escribe 1/999, 1/998, 1/997)*
E: La pregunta, ¿tienen la misma cantidad de números?
A: No, el A tiene más.
E: Bien, ahora C y D.
A: *(Escribe 1/1, 1/2, 1/3 y 1/4)*
E: Y, ¿este?
A: *(Escribe 1/100)*
E: Bien, abajo otra vez lo mismo, pero sumándole 500, ¿1 partido?
A: *(Escribe 1/501, 1/502, 1/503)*
E: Muy bien, y este ¿por ejemplo?
A: *(Escribe 1/600)*
E: Vale, observando los decimales que van apareciendo… ¿quién tiene más números arriba o abajo?
A: Iguales. *(IV3A)*
E: Iguales.

*E(*IV1´*): Bueno vamos a verlo de otra forma, otra vez muy parecido, igual; venga, ¿este sería? 1/1.
A: *(Escribe 1/1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7)*
E: ¿Y este por ejemplo?
A: *(Escribe 1/9)*
E: ¿El 9? Venga, ahora vamos a ver el de abajo, otra vez igual, es sumando 1
A: más 500 ¿no?
E: Eso es más 500, perdona
A: *(Escribe 1/501, 1/502, 1/503)*
E: ¿Y este, por ejemplo?
A: *(Escribe 1/509)*
E: Viendo los resultados, ¿quién tiene más arriba o abajo?
A: Iguales, ¿no?
E: Iguales, ¿por qué?
A: Porque acaban en 0.
E: Bien, perfecto.
A: ¿Sí?

E: Vamos a verlo otra vez aquí, otra vez un poquito más, a ver si lo haces ahora bien ya del todo, ¿este sería?
A: *(Escribe 1/1, 1/2, 1/3, 1/4)*
E: ¿Y este?
A: *(Escribe 1/13)*
E: Vale, y el de abajo es el mismo, pero ahora sumándole 600, por ponerlo difícil, es ¿1 partido…?
A: *(Escribe 1/601, 1/602, 1/603, 1/604)*
E: ¿Siguiente?
A: *(Escribe 1/608)*
E: Bien, a la vista de los resultados y viendo que esto va cada vez disminuyendo a más pequeñito, 1, 0’5, 0’3, 0’25...y este igual, ¿quién tiene mayor cantidad arriba, abajo o igual?
A: Iguales, ¿no los dos? Porque son infinitos y terminan en el 0. *(IV1**4**)*
E: Ahí va.

7) <u>Alumno:</u> Vi. 13,03 Nombre: Víctor Juan Fecha de Nacimiento: 14/02/02

E: Entrevista nº 1 del día 9 de Febrero del 2015, con Víctor Juan R. R. de 1º A, ¿qué edad tienes, Víctor?
A: 12.
E: 12 años, contesta la pregunta y realiza, en voz alta.
A: ¡Ah!, lo leo, sea el conjunto de números desde n=1 a n=10 representa cada uno en las casillas siguientes.
A: *(Escribe 1, 2, 3,… hasta 10)*
E: Perfecto, vamos a ver el de abajo.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=7, a cada número le sumamos tres. Representa ahora n+3 en las casillas.
E: Muy bien, en vez de 1 le sumamos 3, sería…
A *(Escribe 4, 5, 6, … hasta 10)* ¿sigo aquí?
E: Nada es del 1 al 7.
E: La pregunta es sencilla, no hace falta que lo escribas, ¿tienen la misma más cantidad A que B?
A: No.
E: No, ¿quién tiene más?
A: El A.
E: Bueno vamos a ver el de abajo, es muy parecido al anterior.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante, representa cada número en las casillas siguientes
E: Muy bien.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Como dice n en adelante aparecen puntos suspensivos ahí en medio, para no estar escribiendo todos, ¿vale?, aquí hay muchos números, aquí puedes poner el que tú quieras.
A: *(Escribe 14)*
E: El 14 por ejemplo y después sigue adelante. ¿Estos puntos suspensivos, Víctor, son los mismos que estos? *(Señala en la pantalla)*
A: Sí.
E: ¿Sí?, estos puntos suspensivos van del 4 al 14, y estos puntos suspensivos de aquí van hasta… ¿dónde?
A: Hasta infinito.
E: Bien, vamos a ver ahora aquí lo mismo que el anterior, ahora lo que hacemos.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. A cada número le sumamos 3, representa ahora n+3 en las casillas siguientes.
E: Igual que el anterior sería.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Y este sería…
A: *(Escribe 10)*
E: Y esto sería…, ahora la pregunta es la misma que la anterior, ¿tiene la misma cantidad de números arriba que abajo?
A: Sí.
E: ¿Por qué?
A: Porque… tiene el mismo número de casillas
E: No, casillas no es lo que te digo, solo números.
A: No sé.
E: Aunque el C empieza, ¿dónde?
A: En 1.
E: Y sigue adelante, ¿verdad?, y no termina en 14, y el D, ¿empieza?
A: En 4.
E: Y siguen adelante, aún así dices tú que tiene la misma cantidad de números.
A: No, tiene más cantidad el C. *(I1B)*
E: El C, ¿no?

*E(*I2*): Vamos a ver una situación distinta vamos a hacer la segunda, la primera la has hecho correctamente, te voy a echar una manilla, esto era 1, 2, 3…, sigue tú.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Sigue adelante, te he puesto el 100, para que veas que de aquí hasta aquí hay un montón, pero no vamos a estar todo el día de hoy copiando, y sigue adelante. Y al de abajo el que le corresponde hay que sumarle 3, en vez de 1es 4.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y esto el que tú quieras, si quieres poner el correspondiente de este, pero no tiene porque ser siempre el mismo, ¿vale? A la vista de los resultados, con estos puntos suspensivos que aparecen aquí, ¿tienen los mismos números C que D?
A: No.
E: ¿Quién tiene más?

A: El C.
E: ¿Quién tiene más?
A: El C. *(I2B)*
E: El C, ¿cuánto más dirías tú?
A: Tres más.
E: Aunque estén los puntos suspensivos aquí, ¿no? Y sigue adelante.
A: Sí.
E: Muy bien.

8) <u>Alumno:</u> Al. 12,07 Nombre: Alejandro Fecha de Nacimiento: 17/10/02

E: Entrevista nº 1 del día 16 de Febrero, con Alejandro A. C. de 1º A, ¿Alejandro, qué edad tienes?
A: 11, espera 12.
E: 12, empezamos bien, ¿eh?, Ale. Empieza leyendo el enunciado y haciendo el ejercicio. Léelo.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=10 representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien hay que poner aquí.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Muy bien, vamos a ver el segundo.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=7. A cada número le sumamos 3. Representa ahora n+3 en las casillas.
E: En vez de 1 ponemos aquí…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Bien, ¿tiene la misma cantidad de números A que B?
A: No.
E: ¿Quién tiene más?
A: A.
E: ¿Cuántos más?
A: 3.
E: Bien, vamos para abajo, era fácil ¿no? Vamos a ver el C ahora, dice.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Ponemos puntos suspensivos y aquí pones el número que quieras.
A: *(Escribe 9)*
E: 9, y esto sigue adelante. ¿Qué significan todos estos puntos suspensivos, Ale? *(Señala la pantalla)*
A: 5, 6, 7, 8.
E: ¿Y estos puntos suspensivos?
A: 10, 11, 12.
E: ¿Hasta dónde?
A: Hasta que, hasta infinito.
E: Parece que aquí hay más números que aquí, ¿no? *(Señala la pantalla)*
A: Sí.
E: Vale, vamos a ver el de abajo.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. A cada número le sumamos 3. Representa n+3 en las casillas siguientes al infinito.
E: Vale otra vez lo mismo que el de arriba, sería ahora.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Y aquí por ejemplo pondríamos.
A: *(Escribe 12)*
E: Por ejemplo, tú has puesto el correspondiente al de arriba, ¿vale?, y esto sigue adelante. Venga, ahora cuál es la pregunta.
A: ¿Tiene la misma cantidad de números C que D? Explica tu respuesta.
A: Sí.
E: Sí, ¿por qué?
A: Porque entre 4 y 9 están 5, 6, 7, y 8; entre 7 y 12, 8, 9, 10 y 11 y luego están infinitos números. *(I11)*
E: ¿Aunque aquí empieza en el 1 y aquí en el 4?
A: *(Duda. Pasa tiempo. No sabe que contestar. Asiente con la cabeza)*
E: Muy bien.

*E(*II1*): Lee la siguiente tarea.
A: Sea el conjunto desde n=1 a n=5000. Representa cada número en las casillas siguientes.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5)*
E: Vale y en estos tres últimos, ¿qué ponemos?
A: *(Escribe 4998, 4999, 5000)*
E: Vale, abajo, a ver qué dice.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=4500. Representa ahora n+500 en las casillas siguientes.
A: *(Escribe 501, 502, 503, 504, 505)*
E: Y ahora estos tres últimos, ¿cuáles crees tú que serán?
A: *(Escribe 4998, 4999, 5000)*
E: Perfecto, ¿quién tiene más cantidad de números A o B?
A: A.
E: ¿Cuántos más crees tú que tiene A?
A: 500.
E: Vamos a ver el de abajo, a ver qué tal.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien, igual que el anterior.
A: *(Escribe1, 2, 3, 4)*
E: Siguen adelante, y ponemos…
A: *(Escribe 9)*
E: Y esto sigue adelante. Vamos a ver el conjunto D.

A: Sea n el conjunto de números desde n=1 a n. Representa ahora n+500 cada número en las casillas siguientes. *(Escribe 501, 502, 503, 504)*
E: Y este.
A: *(Escribe 510)*
E: Bien, ¿tiene la misma cantidad de números C que D?
A: No.
E: ¿Quién tiene más?
A: El D.
E: ¿Cuántos más crees tú que tiene?
A: 1.
E: ¿Cuántos?
A: ¿1?
E: ¿Por qué 1?
A: Porque de 4 al 9, está 5, 6, 7, y 8 y del 504 al 510, está 505, 506, 507, 508, 509.
E: Esto porque tú le has puesto 510, pero tú puedes poner el que tú quieras, ¿no? Tú tienes que mirar desde el primero hasta el último. Este empieza, ¿en cuánto?
A: En 1.
E: Y termina…
A: En infinito.
E: Y este empieza…
A: En 501.
E: Y termina…
A: En infinito.
E: ¿Quién tiene más, iguales, o quién tiene más?
A: Iguales, ¡ah!, no, tiene más el C porque empieza en 1. *(II1B)*

*E(*II2*): Te lo voy a poner un poquito más corto, ¿vale? Este de aquí lo hemos hecho nosotros y los has hecho bastante bien, 1, 2, 3, sigue tú.
A: *(Escribe 4, 5, 6)*
E: Y este lo has puesto tú muy bien, 4998.
A: *(Escribe 4998, 4999, 5000)*
E: Y ahora el de abajo, le hemos sumado 500, lo has hecho bien.
A: *(Escribe 501, 502, 503, 504, 505, 506)*
E: Perfecto, y esto lo has hecho tú, aquí ponemos.
A: *(Escribe 4998, 4999, 5000)*
E: Y tú me has dicho que el de arriba tiene más que abajo, empieza en 1 y termina en 5000, y este empieza en 500, y termina en 5000. Vamos a ver los de abajo, te puse el 1, 2, 3.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Yo te he puesto un número bestia, 1000, lo cual aquí abajo, en medio, hay novecientos y pico y aquí sigue adelante. Y abajo le estamos sumando 500, 1 pues 501.
A: *(Escribe 502, 503, 504, 505, 506, 507)*
E: Y aquí podríamos poner, cuál podría ser, o el correspondiente de 1000.
A: *(Escribe 1000)*
E: Puedes poner el 1000, si quieres, no pasa nada, le corresponderá uno que esté por aquí, le sumamos 500 y será 1000 y sigue adelante. Este empieza y termina, este empieza, pero no termina. ¿Quién tiene más cantidad de números C o D, o los dos iguales?
A: El C porque empieza en 1. *(II2B)*

9) <u>Alumno:</u> Pa. 12,11 Nombre: Paola María Fecha de Nacimiento: 21/05/02

E: Entrevista nº 2 del día 3 de Febrero, ¿alumna?
A: Paola Mª E. M.
E: ¿Curso?
A: 1º de la E.S.O. A.
E: Y ¿la edad?
A: 12 años.
E: Muy bien, venga ¿Paola o María? ¿Cómo quieres que te llame? ¿Paola?
A: Paola, Paola.
E: Empieza leyendo el A.
A: En voz alta, ¿no?
E: En voz alta.
A: Sea el conjunto de números desde n= 1 a n=10 representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Muy bien, no ha sido difícil, ¿no? B.
A: Sea el conjunto desde nº 1 a nº 7. A cada número le sumamos 3. Representa n+3 en las casillas.

E: Léelo bien, desde 1 al 7, a cada uno hay que sumarle 3.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Perfecto, contesta la pregunta ahora, Paola, ¿tienen la misma cantidad de números A que B?
A: No.
E: ¿Cuántos tiene el de arriba?
A: 10.
E: ¿Y en el segundo?
A: 7.
E: Muy bien, vamos ahora con la tercera regleta, lee la regleta.
A: Sea el conjunto de números desde nº1 en adelante, representa cada número en las casillas siguientes.
E: ¿Por qué empiezas por el 2? Desde 1 en adelante.
A: (*Escribe 1, 2, 3, 4*), y ahora aquí.
E: Sí, eso ¿qué significa?
A: Que lo sumo.
E: No, los puntos suspensivos, ¿significan?, que siguen adelante.
A: Y entonces en este…

E: Puedes poner el que tú quieras.
A: *(Escribe 10)*
E: El 10, ¿vale? ¿Y estos puntos suspensivos que vienen después?
A: Que sigue adelante.
E: En adelante. Muy bien. Vamos a ver la regleta D.
A: Sea el conjunto de números desde nº1 en adelante. A cada número le sumamos 3. Representa ahora n+3 en las casillas siguientes.
E: Muy bien.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7…10)*
E: Muy bien, y contesta ahora la pregunta.
A: ¿Tienen la misma cantidad de números C que D? Explica tu respuesta.
A: No, ¿no?
E: No, ¿porqué?
A: Porque el C empieza del número 1 y el D del 4. *(I1B)*
E: Aunque diga que van en adelante
A: Es que no lo entiendo.
E: Solo tienes que contestar eso, ¿tienen el mismo número, cantidad de números C que D?
A: No.

*E(*I2*): Bien, Paola, te lo voy yo a explicar mejor, ¿vale? Tú has puesto en el apartado A, el 1, el 2, el 3, ahora tiene que poner tú.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y abajo, tú le has ido sumando 3, 1 más 3, 4; 2 más 3, 5; 3 más 3.
A: *(Escribe 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y tú me has dicho que no hay la misma cantidad de números en A que en B, que en el primero hay…
A: 10.
E: Y en el segundo hay…
A: 7.
E: Muy bien. Ahora nos vamos con este, y tú has puesto en el primero 1, 2, 3…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Siguen adelante, hay muchos números por medio, y ahora vendría por ejemplo, otro número.
A: El 10.
E: El 10, ¿no pondríamos otro número?
A: *(Escribe 22)*
E: 22, muy bien y abajo has ido haciéndolo bien, a 1 le has sumado 3, te sale 4; a 2, 5, a 3.
A: *(Escribe 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y al 22 le correspondería…
A: *(Escribe 25)*
E: 25. El hecho de que vaya a puntos suspensivos, aquí, aquí *(señala en la pantalla)*, es decir, desde el 7 al 22, ¿cuántos habrá aquí?
A: 15.
E: 15, vale. Y aquí pues habrá otras cantidades. Pero estos puntos suspensivos que vienen después.
A: Que siguen más números.
E: Que siguen más números en adelante, la pregunta es muy… corta, ¿tiene la misma cantidad de números C que D?
A: No.
E: No, ¿cuál tiene más?
A: El D.
E: ¿Este de aquí?, ¿por qué?
A: Porque llega hasta 25.
E: Pero hemos dicho que sigue adelante.
A: Entonces tienen iguales.
E: Tienen iguales, ¿por qué?
A: Porque siguen hasta cualquier número. *(I2A)*
E: Hasta cualquier número, ¿vale? Muy bien.

*E(*I3*): Ficha 1, Situación 3.
E: Serían 1, 2, 3
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y el de abajo sería…
A: *(Escribe 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13)*
E: Ahora otra vez la misma pregunta, ¿tienen la misma cantidad de números A que B?
A: No.
E: No, ¿cuál tiene más?
A: El B.
E: ¿El B tiene más? ¿Cuántos tiene el B?
A: 13.
E: ¿13?, ¿cuántos números tiene abajo?
A: ah vale, vale, 7. Lo que es el A tiene más.
E: Vale, muy bien. Vamos ahora con el C, la situación es muy parecida a la anterior, 1, 2, 3.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Y por ejemplo…
A: *(Escribe 95)*
E: Vamos a ver ahora este, se le suma 3.
A: *(Escribe 6, 7, 8)*
E: Y aquí por ejemplo.
A: 98.
E: La pregunta, Paola, ¿tienen la misma cantidad C que D?
A: Sí.
E: Sí, ¿por qué?
A: Porque siguen los números y puede ser hasta cualquier número. *(I3A)*

*E(*I1'*): Contesta ya a ésta.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Muy bien, y el de abajo que parece que hay un cambio.
A: *(Escribe 6, 12, 18, 24, 30)*
E: ¿Por qué pones 6, 12?
A: Porque se le suma 6.
E: Sea el conjunto que le sumamos 6, desde 1 hasta 4, se le suma 6, al 1 se le suma 6, da, ¿cuánto daría aquí?
A: ¡Ah, vale, vale! *(Escribe 7, 8, 9, 10)*
E: ¿Tienes que seguir?
A: Sí, ¿no?
E: Desde 1 hasta 4.
A: ¡Ah, vale!, entonces no.

E: La pregunta, ¿tiene la misma cantidad de números?
A: No.
E: No, ¿cuál tiene más?
A: El A.
E: Ahora con el C, sea el conjunto de números de 1 en adelante, es fácil.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Y este por ejemplo.
A: *(Escribe 20)*
E: Lo mismo.
A: *(Escribe 7, 8, 9, 10)*
E: Y al 20 le corresponde.
A: *(Escribe 26)*
E: La pregunta, ¿tiene la misma cantidad de números C que D?
A: Sí, porque siguen adelante. *(I1'**3**)*
E: Tienen la misma cantidad de números, muy bien.

*E(II1): Ahora Ficha Nivel 2, situación 1. Sea el conjunto de 1 a 5000. Representa cada número en cada casilla.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5)*
E: Esos puntos suspensivos, Paola, ¿qué significarán?
A: Que siguen más números. *(Escribe 10, 11, 12)*
E: Esos tres últimos, de 5000.
A: ¡Ah es verdad! *(Escribe 5000, 4999, 4998)*
E: Sea el conjunto de 1 a 4500, ahora hay que sumarle 500.
A: *(Escribe 501, 502, 503, 504, 505)*
E: Y los últimos
A: *(Escribe 4498, 4499,4500)*
E: La pregunta, ¿tiene la misma cantidad de números A que B?
A: No.
E: ¿Cuál tiene más?
A: El A.
E: El A muy bien, vamos ahora para abajo, Paola. Sea el conjunto del 1 en adelante, igual que el anterior.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Y ese por ejemplo…
A: *(Escribe24)*
E: Pues de la misma forma hay que sumarle 500
A: *(Escribe 501, 502, 503, 504)*
E: Y este sería…
A: *(Escribe 524)*
E: Perfecto, bien, la pregunta, ¿tiene la misma cantidad de números C que D?
A: Sí.
E: ¿Por qué?
A: Porque siguen adelante. *(II1**3**)*

*E(III1): Ficha Nivel 3, situación 1. Sea el conjunto de números de 1 a 10. A cada número le corresponde su inversa, es decir, 1/n. Representa cada número en las casillas.
A: Es que no sé.
E: Donde está la n, pones.
A: Pero qué tengo que poner una fracción, ¿cómo?
E: Ahí va, no te preocupes, 1 barra, con el 7, sigue adelante.
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10)*
E: ahora se trata de poner del 1 hasta el 4, pero se hace la inversa más 6.
A: *(Escribe 1/7, 1/8, 1/9, 1/10)*
E: Y la pregunta, ¿cuál crees que tiene más números?
A: El A.
E: El A, vale, ahora lo mismo aquí abajo. De la misma forma que el anterior vamos a ir completando estos números.
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼)*
E: Y ahora ese el que tú quieras.
A: *(Escribe 1/20)*
E: Muy bien. Y el de abajo, pues, sea el conjunto, en adelante también, ¿eh?
A: *(Escribe 1/7, 1/8, 1/9, 1/10….1/20)*
E: Vale, ¿cuál tiene mayor número el C o el D?
A: Los dos iguales porque siguen adelante. *(III1**3**)*
E: Los dos iguales. Aquí lo que quiero yo es que tú compares y veas la diferencia que existe entre este nivel y el anterior, ¿qué diferencia hay, Paola? ¿Qué crees que va a pasar? En el primero daba 1, 0,50, 0,33, 0,25, 0,05.
A: Que se van acercando y cada vez son números más bajos.
E: Cada vez más bajos, más bajos, ¿vale? aún así dices tú que tiene la misma cantidad uno que otro.
A: Sí.

*E(IV1): Ficha Nivel 4, situación 1, la misma forma, se trata de poner los números pero ahora parece ser que hay mayor cantidad, ¿vale? Empezamos por ahí.
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼, 1/5)*
A: *(Escribe 1/998, 1/999, 1/1000)*
E: Ahí pone 0, pero seguro que hay un 0,0001. Ahora lo mismo, pero ahora no sumado con 6, sino sumado 500. Luego el primero sería…
A: *(Escribe 1/501, 1/502, 1/503, 1/504, 1/505)*
A: *(Escribe 1/498, 1/499, 1/500)*
E: ¿Tiene los mismos números arriba que abajo?
A: Sí, ¿no?
E: ¿Cuál tiene más?
A: El A.
E: Vamos a ver el de abajo, el de abajo te lo voy a poner más fácil, vamos a ver el siguiente, cómo sería, igual que el anterior, ¿verdad?
A: *(Escribe 1/501, 1/502, 1/503, 1/504… 1/600)*
E: Ahora lo mismo, ¿dónde hay más cantidad de números en C o en D?, sabiendo que esto va a ir en adelante.

A: En el D.
E: En el D, ¿tiene más? ¿Por qué crees tú que en el D tiene más?
A: Porque sigue hacia adelante.
E: El de arriba también sigue, es que antes se me ha ido la imagen.
A: Entonces son los dos iguales. *(IV13)*
E: Muy bien.

10) Alumno: Ju. 12,07 Nombre: Juan Antonio Fecha de Nacimiento: 10/10/02

E: Entrevista nº 3 del día 4 de Febrero del 2015, con Juan Antonio G.M. del curso 1º A, ¿edad Juan Antonio?
A: 12 años.
E: 12 años. Juan Antonio, lee el enunciado e intenta hacerlo.
A: Sea el conjunto de números desde nº1 a nº10, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Bien.
A: *(Escribe 1, 2, 3,… hasta 10)*
E: Muy bien, vamos a ver la segunda regleta. Sea el conjunto de números desde el 1 hasta el 7, a cada número le sumamos tres.
A: A cada número…
E: ¿En cuál le corresponde entonces a esta?
A: Hum… le sumamos 3. ¿Al 3 o al 1?
E: Al 1.
A: *(Escribe 1)* El 1, después el 2, 3, 4, ¿no?
E: No, pero aquí al 1 tienes que sumarle 3, luego el primer término ¿cuál sería?
A: El 2, hay que sumarle 3 al número.
E: Ahí va, al 1 hay que sumarle 3 y ¿entonces?
A: 4, ¿no? *(Escribe 4)*
E: ¿Después vendría?
A: Si sumamos 3 más, a ver, 7, ¿10? *(I1B†)*

*E(*I2*): No te preocupes, te lo voy a explicar mejor ¿vale? Mira *(le pongo la Ficha I2)* en el primero hemos puesto el 1, 2, 3, sigue tú.
A: 4, 5, 6, 7, 8, 9, y 10.
E: Muy bien, bueno pues ahora se trata de coger, mira en la pantalla, 1 y le sumamos 3, va a salir entonces 4; 2 le sumo 3 ¿que era? 5.
A: Ah vale, vale, es que no lo había pillado.
E: Claro.
A: 3 le sumas 3, ¿6 no?
E: Venga ponlo, 6.
A: *(Escribe 6)*
E: ¿El siguiente?
A: 7.
E: Muy bien, ¿siguiente?
A: ¿8?
E: Sí, ¿Siguiente?
A: 9.
E: Sí, ¿Siguiente?
A: Y 10.
E: Y ahora la pregunta es fácil, ¿Tiene la misma cantidad de números A que B?
A: Sí ¿no?
E: ¿Si?, ¿cuántos tiene la de arriba?
A: ¿Del 1 al 10?, ah pero la de arriba tiene más números que la de abajo, entonces la primera tiene más.
E: Muy bien, perfecto. Vamos a ver ahora la segunda, igual otra vez ¿vale?, pero ahora estos siguen adelante ¿vale?, entonces sería 1, 2, 3, sigue tú.
A: 4, 5, 6, 7
E: Ahora seguiría adelante, vamos a poner aquí un número, el que tú quieras.
A. ¿El 12 mismo?
E: Por ejemplo, y aquí ya seguiría.
E: Ahora vamos a hacer lo mismo.
A: Sumarle 3, ¿no?
E: Ahí va, 1, el segundo…
A: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: ¿Y el 12?
A: 15.
E: ¿Quién tiene más cantidad de números arriba o abajo?
A: El de abajo.
E: ¿El de abajo qué tiene?
A: 8, no, son iguales.
E: ¿Por qué son iguales?
A: Porque tienen la misma cantidad de números. *(I2A)*

*E(*I3*): Muy bien. Vamos hacer esta plantilla, a ver si lo ves mejor. Ahora lo mismo igual, ¿vale?, 1, 2, 3...
A: 4, 5, 6, 7, 8, 9, y 10.
E: Muy bien, y ahora hay que sumarle 3.
A: Empezamos desde el 4, ¿no?
E: Empezamos desde el 1 siempre.
A: Desde el 1, entonces 4, ¿no?
E: 4.
A: 5, 6, 7, 8, 9 y 10.
E: ¿Quién tiene más números arriba o abajo?
A: Arriba.
E: Arriba, bien. Vamos a ver ahora este, 1, 2, 3…
A: 4, 5, 6, 7, ¿y aquí?
E: El que tú quieras.
A: 13.
E: 13, aquello sigue adelante.
A: Sí.
E: Y ahora quedaría aquí…
A: 4, 5, 6.
E: Y ese, ¿cuál podría ser?
A: ¿el 13 ahora?
E: El que tú quieras.
A: ¡Ah! tengo que poner un número ahí.

E: Un número que corresponda al de arriba o no.
A: ¿Al 13? 16.
E: Bien. ¿Dónde hay más cantidad de números arriba o abajo?
A: Arriba, hay más. *(I3B)*
E: Arriba, ¿vale? Muy bien.

11) __Alumno:__ Ma.13,00 Nombre: María Jesús Fecha de Nacimiento: 07/05/01

E: Entrevista nº 4 del día 4 de Febrero del 2015, con Mª Jesús M. P. del curso de 1º A, ¿edad Mª Jesús?
A: 12 años.
E: 12 años. Bien, Mª Jesús, vamos a hacer esta ficha, dice lo siguiente: sea el conjunto de números de 1 a 10 representa cada número en las casillas siguientes.
A: Del 1 al 10. *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Perfecto y ahora dice: sea el conjunto de números del 1 al 7, pero le sumamos 3, entonces el primero sería.
E: Súmale 3.
A: ¡Ah!, 1 más 3, 4. *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Bien, Mª Jesús, la pregunta es la siguiente, de estos dos conjuntos, ¿cuáles crees tú que tiene más números?
A: Pero según. ¿Se refiere al orden o al número?
E: Números.
A: Yo creo que el A.
E: ¿Cuántos números tiene el A?
A: A tiene 10.
E: ¿Y el segundo?
A: 7.
E: Muy bien, vamos a ver el de abajo, es muy parecido, dice.
A: ¡Ah! nos saltamos…
E: Eso lo has dicho ya.
A: ¡Ah! vale, vale.
A: Sea el conjunto de números desde 1 en adelante sería entonces…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Ahí no, ¿qué significa los puntos esos?
A: Que aquí hay unos números y vamos a poner el 6.
A: *(Escribe 6)*
E: Y los puntos suspensivos estos que están aquí, ¿qué significan? *(Señala la pantalla)*
A: Que hay más números aparte, pero que no los dicen.
E: Muy bien. Vamos a ver el de abajo, el de abajo es muy parecido al anterior, ahora hay que sumarle de nuevo 3, igual que el anterior, entonces sería…
A: Vale primero sería 4 *(escribe 5, 6, 7)* y este sería 9.
E: ¿Cuál de los dos tiene mayor número, arriba o abajo?
A: Yo creo que el D, es que en realidad no son iguales, tienen las mismas casillas.
E: ¿Por qué?
A: Porque si nos fijamos en el C tiene tantas casillas como en el D, aunque tenga los puntitos. *(I12)*

*E(II1): Ficha Nivel 2, sea el conjunto de 1 a 5000 ahora, entonces habría que poner.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5)*
E: Vale y en esta casilla, ¿cuál sería?
A: *(Escribe 7)*
E: ¿El 7 sería? Piensa un poquito.
A: ¿Puedo empezar por este? *(Señala la última casilla)*
E: Sí, claro.
A: *(Escribe 5000, 4000,3000)*
E: Tú que vas de 1000 en 1000, 4998, ¿no?
A: 4000 ¿qué?
E: ¿Cuál es el anterior del 5000?
A: ¿4900, 90? *(II1B†)*

*E(*II2*): Vamos hacerlo por aquí, ¿vale? *(Le pone la tarea II2).* Este seguro 1, 2, 3, pon el 4 aquí, yo sigo con el cursor no te preocupes.
A: *(Escribe 4, 5, 6)*
E: Como son los últimos, son 5000, sería 4998, 4998 ponlo.
A: *(Escribe 4998, 4999, 5000)*
E: Y ahora aquí le estamos sumando 500; 501, 502.
A: *(Escribe 501, 502, 503, 504, 505, 506)*
E: Y esto va ser lo mismo, sería 4998…
A: *(Escribe 4998, 4999, 5000)*
E: Muy bien, ¿cuál de los dos tiene mayor número arriba o abajo?
A: ¿No serían iguales?
E: ¿Cuántos hay arriba?
A: 9.
E: ¿9? ¿Los puntos suspensivos de aquí qué significan?
A: Pues que hay unos números, pero no están.
E: Ten en cuenta estos *(señala con el cursor)*. Muchos números, pero para no poner todos los números, pues pongo puntos suspensivos
A: Entonces habría más en el A.
E: En el A, ¿cuántos más dirías tú?
A: ¿Puedo usar la calculadora?
E: Sí.
A: *(Empieza hacer cálculo durante 22 segundos) (II2B†)*
E: Vamos a dejarlo ahí. Gracias.

12) <u>Alumno:</u> Te. 12,09 Nombre: Teresa Fecha de Nacimiento: 01/08/01

E: Entrevista nº 1 del día 5 de Febrero, con Teresa M. T. de 1º A, ¿Teresa qué edad tienes?
A: 13 años.
E: 13 años, muy bien. Lee el cuestionario e intenta hacerlo. Apartado A, en voz alta.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=10, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Del 1 al 10 ahí ponemos…
A: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: Muy bien, vamos a ver el apartado B. Sea el conjunto de números del 1 al 7 ahora y a cada número le sumamos 3, si es 1, ponemos aquí…
A: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: Ahora contesta la pregunta, ¿tiene la misma cantidad A que B?
A: No, porque aquí hay 3 y en este está del 1 al 10, y en este no están.
E: La respuesta es no. Bien, ahora vamos a ver este apartado, léelo.
A: Sea el conjunto de n=1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Entiendes 1 en adelante, luego aquí hay que poner…
A: 1, 2, 3, 4.
E: Estos suspensivos qué me indican.
A: Que hay que poner…
E: Que sigue adelante, ¿no? aquí, ¿qué podemos poner?
A: ¿El 5?
E: Y los puntos suspensivos estos, ¿significa?
A: Que hay más, ¿no?
E: ¿Vale? Vamos al apartado D, ahora es lo mismo que el anterior.
A: Que le sumamos 3. Ahora 4, 5, 6, 7.
E: Y este.
A: 8.
E: Y sigue adelante, estos puntos suspensivos de aquí y éstos ¿son iguales, Tere?
A: ¿Los números que hay aquí?
E: No, este espacio que hay aquí y este espacio de aquí. *(Señala la pantalla)*
A: No.
E: No, ¿por qué?
A: Porque este es más grande.
E: ¿Cuál es más grande?
A: El primero.
E: El primero es más grande, aquí has puesto 5 y no sé porque has puesto 5, aquí hay muchos números más. La pregunta, ¿tiene la misma cantidad C que D?
A: ¿Cómo cantidad, el mismo número?
E: Cantidad de números, ¿hay los mismos números arriba que abajo?
A: No, porque el 1, el 2 y el 3 están arriba, pero abajo no. *(I1B)*
E: No están, aunque estos siguen en adelante.

*E(I2): *(Le pone la ficha I2)* Vamos a seguir adelante, ¿vale?, este lo has hecho muy bien tú muy bien el 1, 2, 3 sigue tú con ellos.
A: El 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: Y aquí has ido sumando, si era 1, es 4, si es 2 es 5…
A: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: Y tú me has contestado aquí que A tiene más números que B. Vamos a ver el de abajo, el de abajo es muy parecido 1, 2, 3…
A: 4, 5, 6, 7.
E: Y esto sigue para delante, como hay tanta cantidad de números aquí pues he puesto puntos suspensivos, por ejemplo aquí voy a poner yo uno muy grande.
A: 10.
E: ¿10? Uno más grande.
A: 30.
E: 30, ese sí es grande, pero como no puedo poner todos he puesto puntos suspensivos, y tú has hecho lo mismo, si he puesto 1, tú has puesto 4…
A: 4, 5, 6, 7, 8, 9,10.
E: Aquí cuál le corresponde, si es 30…
A: 30, ¡ay!, no.
E: No, 30 más 3, igual que los demás le hemos sumado 3, ¿no? Aquí sería.
A: 3.
E: ¿3 sólo? Estamos sumándole 3 a 30.
A: 33.
E: Mira ahora, ¿tiene la misma cantidad arriba que abajo de números o falta algo?
A: El 1, el 2 y el 3 no están abajo.
E: Entonces, ¿quién tiene más cantidad de números? ¿El C o el D?
A: El D.
E: El D ¿tiene más cantidad de números?
A: El C que tiene el 1, el 2 y el 3.
E: Entonces ¿cuál tiene más cantidad de números?
A: El C. *(I2B)*

13) <u>Alumno:</u> Ai. 13,00 Nombre: Ainhoa Fecha de Nacimiento: 10/05/02

E: 2ª Entrevista del día 5 de Febrero del 2015, con Ainhoa de 1º A, ¿qué edad tienes, Ainhoa?
A: 12.
E: 12 años, muy bien. Ainhoa, lee el ejercicio e intenta contestarlo, empezamos por el apartado A.
A: ¿En voz alta?

E: En voz alta.
A: Sea el conjunto de números desde nº1 a nº10 representa cada uno en las casillas siguientes.
E: Ponemos ahí. *(Señala con el cursor)*
A: *(Escribe 1, 2, 3,… hasta 10)*
E: Vamos a ver ahora el apartado B lo que te dice.
A: Sea el conjunto de números desde nº1 a nº7, a cada número le sumamos tres. Representa ahora nº+3 en las casillas.
E: Ahora, es del 1 al 7 y sumándole 3, luego el primero sería…
A: 1 más 3. *(Escribe 4, 5, 6,   … hasta 10)*
E: Fíjate en estas dos regletas, ¿tienen la misma o más cantidad de números A que B?
A: No.
E: No, ¿cuál tiene más?
A: A.
E: Bueno vamos a ver el apartado C.
A: Sea el conjunto de números desde el nº1 en adelante, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Ahora no termina, sigue adelante, el primero pondremos…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Aquí pone puntos suspensivos, ¿entiendes los puntos suspensivos?
A: Sí, que sigue.
E: Y aquí podríamos poner…
A: ¿El número que tú quieras?
E: El número que tú quieras.
A: *(Escribe 11)*
E: ¿Pondrías el 5?
A: No, he puesto el 11.
E: Vale, y aquí sigue adelante. ¿Los puntos suspensivos aquí, Ainhoa, son los mismos puntos suspensivos de aquí? *(Señala en la pantalla)*
A: No.
E: ¿Qué diferencia crees tú que hay?
A: Pues que los puntos suspensivos de la primera van del 4 al 10 y los puntos suspensivos de la segunda van del 11 al número…
E: En adelante.
A: Sí.
E: Ahora el ejercicio es el mismo que el anterior Ainhoa, dice que es de 1 en adelante, pero le vamos a sumar 3, el primero sería.
A: 4, 5, 6, 7.
E: Sigue en adelante, y este sería.
A: 10.
E: ¿Qué hay más cantidad de números en el C o en el D?
A: Igual, ¿no?
E: Igual, ¿por qué igual?
A: Porque tienen puntos suspensivos *(I1**2**)*

*E(*II1*): Nivel 2, Ficha Nivel 2 situación 1.Vamos a leerlo.

A: Sea el conjunto de números desde nº1 a nº 5000. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Aquí pondríamos entonces.
A: El 1, 2, 3, 4, 5.
E: Los puntos suspensivos ahí, y estos tres, ¿Qué pondrías tú?
A: En el último 5000, 4999 y 4998.
E: Igual que el anterior, ¿vale?, pero ahora sea el conjunto desde 1 a 4500, representa ahora n+500, hay que sumarle 500.
A: 501, 502, 503, 504, 505.
E: Y estos 3 últimos, ¿cuál serían?
A: Hay que llegar al 4500, ¿no?
E: 4500 más 500, luego el último sería…
A: 5000.
E: El anterior sería.
A: 4500.
E: No.
A: 4999 y 4998.
E: La pregunta, ¿tiene la misma cantidad de números A que B?
A: Sí.
E: ¿Por qué tienen la misma cantidad?
A: No lo entiendo.
E: ¿Cuál tiene más?
A: El A.
E: ¿Por?
A: Porque va desde el 1 al 5000 y el B va desde el 501 al 5000.
E: Muy bien. Vamos abajo ahora, hacemos lo mismo otra vez, pero ahora dice que va en adelante, luego el primero sería…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Y ahora por ejemplo este, el que tú quieras.
A: ¿4000?
E: Vamos a ver la siguiente regleta.
A: Hay que sumarle 500.
E: Exactamente.
A: *(Escribe 501, 502, 503, 504)*
E: Y este le correspondería…
A: ¿4000 también?
E: Puede ser 4000, la pregunta es la misma, tiene más cantidad de números ¿arriba o abajo?
A: Arriba.
E: Arriba, ¿cuánto habrá más arriba que abajo?
A: ¡Hum!….
E: El C va del 1…
A: Del 1 al 4000.
E: No al 4000 no, en adelante y el D va…
A: Del 500 en adelante.
E: ¿Entonces?
A: ¡Eh!... es que no sé.
E: ¿Tienen la misma cantidad de números?
A: No, ¿no? *(II2B)*
E: No, ¿cuál es el que tiene más?
A: Yo creo que el de arriba.
E: El de arriba, el C, ¿vale?

*E(*II2*): Vamos a verlo de otra forma, el primero no lo vamos a hacer más ,lo hiciste bien, el de abajo. Por ejemplo el 1, el 2, el 3, esto es otra forma de ponerlo, ¿vale? Ahora sigue.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Como tú lo has puesto lo has hecho bien, yo te he puesto aquí el 1000, porque hay muchos números, y aquello sigue en adelante.
A: Ok.
E: Éstos, iguales 501, 502, este sería.
A: *(Escribe 503, 504, 505, 506, 507…. 1500)*
E: Contesta a esta pregunta, ¿tienen la misma cantidad de números C que D?, atendiendo a estos puntos suspensivos.
A: No.
E: ¿Quién tiene más?
A: C. *(II2B)*

14) <u>Alumno:</u> Al. 12,09 Nombre: Alejandro Fecha de Nacimiento: 17/08/02

E: Entrevista nº 3 del día 5 de Febrero del 2015, Alejandro C. B. del curso 1ºB, ¿qué edad tienes Alex?
A: 12.
E: 12 años, muy bien. Alex lee el apartado A y contesta, ¿vale?, léelo en voz alta.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=10, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Venga, ¿qué ponemos aquí?
A: ¿1?, ¿en número nº? 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: Vamos a ver ahora el siguiente, sea el conjunto de números del 1 al 7…
A: A cada número le sumamos 3. Representa ahora, n+3 en las casillas.
E: Pues venga, del 1 al 7 y hay que sumarle 3, ¿luego el primero sería?
A: ¿4?, ¿5? *(duda)*
E: Del 1 al 7, al 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 hay que sumarle 3.
A: Ah vale, 5, el 6, 7, 8, 9, y 10.
E: Bien, la pregunta sería ¿tiene la misma cantidad A que B?
A: No.
E: No, ¿Cuál tiene más?
A: B.
E: B ¿tiene más cantidad?
A: No.
E: ¿Cuál tiene entonces más?
A: A.
E: ¿Cuánto más?
A: 6.
E: ¿6 más? ¿Cuánto tiene A?
A: ¿A?, ¡ah no!, no, ya ésta, ya está.
E: Entonces A tiene 3 más, ¿no?, tres casillas no, tú tienes que mirar números. ¿Vale?, las casillas son para que estén bonitas. Bueno vamos a ver el segundo, ¿vale?, C, sea el conjunto…
A: Desde n=1 en adelante, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Vale, en adelante, ¿vale?, ahora ya no hay, que sigue en adelante, entonces sería el primero.
A: ¿1? ¿2?, 3, 4.
E: Aquí ponen unos puntos suspensivos ¿vale, Alex?, ¿eso qué significa?
A: Que hay más números.
E: ¿Y en este, por ejemplo, podemos poner?
A: ¿6?
E: 6, vale, siempre vas a poner un número mayor que aquí.
A: ¿Ahí tengo que poner el número? ¿En los puntos suspensivos?
E: No, en los puntos suspensivos no, los puntos suspensivos quieren decir que van en adelante, ¿vale?, entonces aquí, por ejemplo, ¿ponemos?
A: Un número cualquiera.
E: Cualquiera ¿vale?
A: *(Escribe 6)*
E: 6, y estos puntos suspensivos, ¿significan?
A: Que ahí van más números.
E: Más números. Ahora leemos este, sea el conjunto de número 1 en adelante, igual que la fórmula anterior hay que sumarle 3.
A: Vale.
E: Luego ¿el primero sería?
A: 4, 5, 6, 7.
E: ¿Y este?
A: *(Rellena con 13)*
E: Vale, ¿quién tiene más cantidad de números el de arriba o el de abajo?
A: El de abajo.
E: ¿El de abajo tiene más números?
A: No, tienen iguales los dos, ¿no?
E: ¿Tienen iguales los dos? ¿Por qué?
A: Porque en el C tiene, 7, tienen también, tienen los dos 5 casillas de números y también tienen los puntos suspensivos.
E: Pero no te fijes en las casillas.
A: Entonces no son iguales.
E: No en las casillas no te tienes que fijar, te tienes que fijar en los números.
A: ¿El D?
E: ¿El D? ¿Tienen la misma cantidad de números entonces el C y el D?
A: Sí. *(Duda) (I1**2**)*

*E(*II1*): Vale. Ficha Nivel 2. Empezamos.
A: ¿Lo leo en voz alta?
E: Lo lees en voz alta claro.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=5000. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: ¿El siguiente?

A: *(Escribe 3)*
E: ¿Por qué el 3?
A: *(Borra y escribe 2)* 3, 4, 5.
E. ¿Estos puntos suspensivos que significan?
A: Que van adelante.
E. ¿Estos tres últimos que podríamos hacer?
A: Pues…
E: Pone del 1 al 5000.
A: Ok.
E: ¿El último cuál sería?
A: ¿El último número de aquí?
E: Sí.
A: Es que... no sé.
E: ¿Pero cuál sería el último número?
A: *(Se queda pensando mucho tiempo) (II1B†)*

*E(*II2*): Bueno vamos a ayudarte un poquillo, 1, 2, 3, sigue tú, el 4.
A: *(Escribe 4, 5, 6)*
E: Yo no puedo poner todos, porque va del 1 al 500, al 5000, por eso pongo puntos suspensivos, pero sé que el último ¿es?
A: 5000 es el último.
E: 5000, vale pon 5000 ahí, y el anterior ¿cuál sería?
A: 4999.
E: Muy bien, ¿y el anterior del anterior?
A: *(Escribe 4998)*
E: Vale, por eso he puesto puntos suspensivos, porque aquí no cabría, bien y ahora la segunda parte es que hay que sumarle 500, 501, 502…
A: *(Escribe 503, 504, 505, 506)*
E: Vale, ¿y cuáles serían los tres últimos?
A: El… ¿hasta el 4500?
E: Ahí va, 4500 sumándole 500.
A: El… ¿5500?
E: No, 4500 más 500.
A: Ah, el 5000.
E: Eso, pon ahí 5000.
A: *(Escribe 5000,4999, 4998)*
E: Bien, la pregunta ahora es ¿quién tiene más cantidad de números arriba o abajo? ¿En cuál?
A: El B tiene más números.
E: ¿El B? ¿Tiene más qué?
A: Más números.
E: ¿Tiene más números? Fíjate bien, este va del 1 ¿a cuál?
A: Al 5000.
E: Y este va del 501 ¿al?
A: Al 5000 también. Yo los veo igual.
E: Iguales ¿por qué?
A: Pero ¿qué es números o cantidad de números?
E: Números, cantidad de números.
A: ¿El B no?
E: No, no, no, tú tienes que ver el 500, 501, 502, 503, ¿501, 502, 503 también están arriba?
A: No.
E: Vamos a ver, ¿el 501 no está arriba? Estos puntos suspensivos que están aquí, ¿vale? Es que están aquí solo porque yo no puedo representarlo todo. Piensa, este va desde el 1 ¿hasta dónde?
A: Al 5000.
E: ¿Cuántos números hay entonces ahí?
A: Hay hasta 5000 números.
E: Y este va, ¿desde dónde?
A: Del 501 al 5000, el A.
E: Ahora el siguiente es lo mismo, va del 1 en adelante, 1, 2, 3.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Y este por ejemplo he puesto yo, hay muchos números, no he puesto ni el 8 ni el 9, he puesto el 1000, ¿vale? Hay unos puntos suspensivos, 1000 y otros puntos suspensivos. Ahora, Alejandro, ¿estos puntos suspensivos y estos puntos suspensivos es lo mismo?
A: No.
E: Vamos a ver, estos puntos suspensivos van del 7 al…
A: 1000.
E: Y estos puntos suspensivos.
A: Más adelante.
E: Más adelante, ¿vale? Bueno pues hacemos lo mismo otra vez, 1, 501; 2, 502…
A: *(Escribe 503, 504, 505, 506, 507)*
E: Este por ejemplo, qué le correspondería.
A: Al 1000.
E: No.
A: Al 1500.
E: La pregunta ahora es la siguiente, ¿tiene la misma cantidad de números, misma cantidad de números C que D?
A: Sí.
E: ¿Tienen la misma cantidad de números?
A: Sí, porque va del 1 al 1000.
E: No, no, no va del 1 al 1000.
A: Bueno, al infinito.
E: Y este va del 500 al…
A: Infinito.
E: ¿Cuánta cantidad de números crees tú que habría más en uno que en otro?
A: el C. *(II2B)*
E: ¿Cuánto más? Si este empieza en 1 y este en 501.
A: 500.

15) <u>Alumno:</u> Ma. 12,09 Nombre: María Fecha de Nacimiento: 22/08/02

E: Entrevista nº 4 con Ainoa.
A: No yo soy María.
E: ¿Perdón?
A: María G. M.
E: María, del curso 1º B, ¿de la edad de?
A: 12 años.
E: 12 años, muy bien, María. Comienza leyendo el cuestionario A y contesta, ¿vale?
A: ¿Empiezo ya?
E: Sí.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Muy bien, vale. Y el segundo lo lees y dice sea el conjunto del 1 al 7 y ahora le sumamos 3, ¿entonces el primero sería?
A: El primero sería 3.
E: ¿3?
A: No, espera. Sería…
E: No, hay que sumarle 3.
A: ¿Pero a cada uno hay que sumarle 3? *(Escribe 1, 4)*
E: ¿El uno sería?
A: ¿Qué?
E: ¿El uno sería?
A: 3.
E: Del 1 al 7 le sumamos 3.
A: ¿Del 1 al 7 le sumamos 3?
E: Cada uno.
A: Primero el 1.
E: Pero hay que sumarle 3.
A: 4, ¡ah!, vale, es que no lo entendía. *(Borra 1, 4 y escribe 4, 6)*
E: ¿6?
A: No, ¡eh! ¿Sería 4+3 o después 2+3?
E: 2+3.
A: ¡Ah!, vale, ahora lo entiendo *(escribe 5, 6)* ¡eh! *(escribe 10)*.
E: 10 ¿por qué?
A: *(Borra 10)* ¿7?, sí ¿vamos por 6 o 7?
E: Mira tú, el 1, el 2, el 3, ¿el siguiente?
A: ¡Ah! 4, 4 más 3 *(Escribe 8, borra 8 y escribe 9)*
E: ¿4 más 3?
A: Me estoy liando un montón, 8.
E: ¿4 más 3 es 8?
A: No, 7.
E: ¿Siguiente?
A: Vale, ahora sería 5 más 3 *(escribe 8)*, vale, es que… ¡eh! 6 más 3 *(escribe 10)*
E: ¿6 más 3?
A: 9, y ahora sería 7 más 3, ahora sí sería 10
E: Bien, y ahora dice ¿tiene la misma cantidad A que B?
A: No.
E: No, ¿cuál tiene más? No hace falta que lo copies.
A: ¡Ah!, vale. No, el primero tiene más números.
E: Muy bien, ahora vamos a ver el de abajo, María, ahora te dice no hasta el 10, sino en adelante.
A: Ah, más alto.
E: Entonces ¿el primero sería?
A: 11, 12.
E: No, no, pero n=1.
A: ¿Qué?
E: Que es n=1 otra vez.
A: Ah, entonces 1, 2 *(escribe 3)* ¡uy!, otra vez abajo *(escribe 4)* y ahora, ¿aquí que se pondría otro o no?
E: Bien, ahí hay puntos suspensivos, ¿vale? Es decir esto sigue, y aquí pon, por ejemplo, el número que tú quieras
A: *(Escribe 15)*
E: El 15, así que del 4 al 15 hay…
A: Hay más números.
E: Y después hay otros puntos suspensivos, quiere decir que esto sigue adelante, ¿María estos puntos suspensivos y estos son los mismos?
A: No.
E: No, ¿por qué no son los mismos?
A: Porque unos serían del 4 al 15 y los otros seguirían en adelante.
E: Vale, muy bien, ahora vamos a ver el de abajo que es igual que el anterior.
A: *(Escribe 1, 2)*
E: No, no, piensa bien, igual que el anterior pero hay que sumarle 3 de nuevo.
A: *(Borra 1, 2)* ¡Ah!, no me he dado cuenta, entonces sería 4, 5, 6, y 7, 7 y también el número que quiera, ¿no? *(Escribe 18)*
E: 18, muy bien. ¿Tiene la misma cantidad de números arriba que abajo?
A: No.
E: ¿No? ¿Cuál tiene más?
A: Cantidad de números, el de abajo porque sigue del 18 en adelante, bueno tienen la misma cantidad porque los puntos suspensivos significan que puede seguir en adelante. *(I13)*

*E(*II1*): *(Se le pone la tarea II)* Muy bien, bien ahora es del 1 al 5000
A: ¿Empiezo por el 1? *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5)* y ahora sería *(escribe 4997, 4998)* ¡ah!, no, espera.
E: Tú misma te has dado cuenta ¿no?
A: Sí. *(Escribe 4998, 4999, 5000)*
E: Muy bien, y ahora el de abajo, desde el 1 al 4500. Pero ahora se le suma 500, ¿vale?
A: Ahora sí, sería 501, 502, *(escribe 503, 504, 505)*
E: ¿Y qué va a pasar en las últimas tres casillas?
A: Que tiene que llegar al 4500, ¡ah!, no, espera.
E: ¿Cómo? 4500 más 500.
A: ¡Ah!, vale.

E: Entonces el último, ¿sería?
A: El último sería 4000.
E: 4500 más 500.
A: 5000, ¡ah1, vale, pero se sigue sumando igualmente.
E: Igual.
A: ¡Ah!, entonces sería,…
E: No, sería en el último.
A: ¿5000?
E: 5000, porque los anteriores ¿son?
A: 4999 y 4998.
E: Ahora la pregunta es la siguiente, ¿tienen la misma cantidad de números A que B?
A: Sí.
E: ¿Sí? El primero, ¿desde dónde hasta dónde llega?
A: ¡Ah!, no, no, el primero tiene más.
E: ¿Cuántos más arriba que abajo?
A: El primero es del 1 al 5000 y el segundo del 500 al 5000.
E: ¿Entonces cuántos habrá más?
A: En el A, en el A.
E: Pero ¿cuántos habrá más?
A: Ah, vale. Pues habrá 500 números más.
E: Vale, vamos a ver el de abajo, es lo mismo otra vez, pero ahora va en adelante, es decir, eso sigue adelante, ¿vale? ¿Entonces sería?
A: El número 1, 2, 3, y 4.
E: 4, sigue adelante y ahí pon.
A: El 12 voy a poner.
E: Por ejemplo el número 12, y sigue adelante ¿vale, María?
A: Y ahora representa igual que el de arriba *(escribe 501, 502, 503, 504)* y aquí pues… *(Escribe 523)*
E: Por ejemplo.
A: Por ejemplo.
E: Vale, ¿tiene la misma cantidad de números C que D?
A: No, ¡eh!, bueno sí, si siguen adelante sí, tienen la misma cantidad. *(II1**3**)*

*E(*III1*): Vamos a ver, ficha número 3, y ahora empezamos leyendo dice A, sea el conjunto de 1 a 10 y ahora lo que hacemos es a la inversa, ¿entonces el primero sería?
A: El primero sería, o sea, la inversa.
E: No, ahí está te lo digo yo, 1/n sería abajo, lo ponemos, entonces, ¿el primero sería?
A: ¿Qué hay que poner? Es que, a ver…
E: 1 partido 1.
A: ¡Ah! vale, vale.
E: ¿Sabes poner el partido ahí en el…?
A: No, espera a ver.
E: Mira 1.
A: Sí, 1partido.
E: 1 con este y el 7.
A: 1/1.
E: Vale, el siguiente sería.
A: 1/2, que es así ¿no? *(Escribe 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9)*
E: Y ahora abajo es lo mismo pero ahora hay que sumarle 6, luego si es 1 sería…
A: 1/1 más 6, que sería 1/7; 1 partido del 2 más 6, vale. *(Escribe 1/8, 1/9, 1/10, 1/11, 1/13, 1/14, 1/15)*
E: Bien, la pregunta es la misma ¿Tiene la misma cantidad de números arriba que abajo?
A: No, abajo tiene más, bueno arriba tiene del 1 al 10 y abajo tiene del 7 al 15, entonces tiene más arriba.
E: Arriba que abajo ¿vale? Porque recuerda que aquí te he dicho del 1 al 4 entonces todo esto no tendría que estar, por lo tanto suprimir, suprimir. ¿Se ve claramente no?
A: Sí, sí.
E: Vamos a hacer el de abajo, que aquí otra vez pasa lo mismo, sigue en adelante, entonces sería.
A: 1/1 *(escribe 1/2, 1/3, 1/4)* y aquí 1/10
E: Vale, ¿y el de abajo?
A: Más 6.
E: Más 6, luego, ¿sería el primero?
A: 1/7, 1/8 *(escribe 1/9, 1/10)* y aquí *(escribe 1/15)*
E: Vale, lo que pasa que aquí… Bien, ahora la pregunta, ¿tiene la misma cantidad de números arriba que abajo?
A: ¡Eh! sí, si van los dos en adelante. *(III1**3**)*
E: Vale si es en adelante, serían iguales.
A: Pues sí.

*E(*IV1*): Ficha Nivel 4.Lee y contesta.
A: *(Escribe 1/501)*
E: No, arriba es del 1 al 1000.
A: Ah vale, arriba se pone…, entonces sería 1 más 500.
E: No, arriba no hay que sumarle todavía nada. Arriba es desde el 1 hasta el 1000 y hay que hacer 1/1000.
A: ¡Ah!, vale, no hace falta, vale, vale *(escribe 1/1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5)* y abajo luego se suma…
E: Eso es.
A: Y aquí 1/8.
E: No, porque va del 1 al 1000.
A: ¡Ah, ah!, vale. *(Escribe 1/998, 1/999, 1/1000)* Ahora es la que hay que sumar *(escribe 1/501, 1/502, 1/503, 1/504, 1/505)* y ahora aquí sería hasta el 500 ¿no?
E: Hasta el 500 claro.
A: *(Escribe 1/4998)* ¡ah!, no, he puesto uno más. *(Escribe 1/498)*
E: No, pero hay que sumarle 500, ¿vale? ¿El último es?
A: *(Escribe 1/998, 1/999, 1/1000)*
E: La pregunta ahora es ¿tiene la misma cantidad de números arriba que abajo?
A: No, abajo hay más, espera. No sería, arriba hay más porque termina, ¡eh!…

E: Aquí iría del 1 hasta esta cantidad y aquí iría del 1.
A: Arriba hay más.
E: Pues si te das cuenta, ahora es en adelante, y lo mismo, ¿vale? ¿Tendríamos aquí?
A: *(Escribe 1/1)*
E: Muy bien, espera un momentito, te lo pongo en número primero y después te lo paso a…
A: *(Escribe 1/1, 1/2, 1/3, 1/4)* y aquí *(escribe 1/10)*
E: Este que va en adelante, ¿vale?, y ¿el de abajo sería?
A: Más 500.
E: Más 500, entonces ¿sería?
A: *(Escribe 1/501, 1/502, 1/503, 1/504)* aquí voy a poner *(escribe 1/568)*
E: ¿Vale? Bien, ¿quién tiene más cantidad de números arriba o abajo?
A: Hay la misma cantidad.
E: Hay la misma cantidad ¿vale?, lo que tenemos que hacer ahora es una cosita, a ver si lo hacemos bien, si lo pasamos a decimal, bien, si lo vamos pasando a decimal tanto el primero de arriba ¿dónde iría a parar?
A: ¿El primero de arriba?
E: El 1, 0’5, 0’3, 0’25, 0’10
A: Pero a ver, ¿pero qué es lo que quieres decir?
E: Mira lo que le van pasando a los números aquí, ¿cómo van?
A: ¡Ah!, los números, van todos a menor, ¿no?, Sí.
E: Hacia dónde ¿hacia qué número iría?
A: ¿El siguiente sería?
E: No, ¿tú qué crees que vaya a pasar ahí?
A: Que llegaría a los números de abajo, o sea, si seguiría a los de abajo.
E: No, solamente mira los números de arriba, llegaría a los de abajo sí tienes razón, pero si sigue adelante poniendo los números más grandes cada vez aquí ¿qué pasaría, María? Si ponemos 1, 0’5, 0’33, 0’25, lo que tú has puesto aquí da 0’10, si le ponemos un número más grande aquí, ¿qué va a pasar?
A: Que va más para abajo.
E: Más para abajo ¿hasta llegar a dónde?
A: Hasta llegar al 0’00.
E: Eso, y abajo va a pasar lo mismo.
A: Sí, primero va, que va bajando hasta que dé 0’000.
E: Y aun así ¿dices tú que tiene la misma cantidad C que D?
A: ¡Hum!, no este tiene más, C empieza desde 1 y D empieza desde 500 entonces C tiene más que D porque empieza uno antes que el otro. *(IV1B)*

*E(*IV*2): Vamos a ver aquí, mira es la misma pregunta ¿vale? Tú lo has puesto aquí 1/1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, vamos a ponerlo aquí, pon ¼.
A: *(Escribe 1/4, 1/5, 1/6)* Aquí…
E: Como era 500.
A: Ah, ¿era 500?
E: 1/498.
A: *(Escribe 1/498, 1/499, 1/500)*
E: Este es lo mismo, pero hay que sumarle al 1, te acuerdas ¿no?
A: Sí. *(Escribe 1/503, 1/504, 1/505, 1/506)*
E: me dijiste tú que había más cantidad arriba que abajo. Y abajo pues es lo mismo, es decir vas sumando, tú has contestado que esto sería ¼.
A: *(Escribe 1/1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7)* y 1/10.
E: Perfecto, ¿vale?, abajo lo mismo, sumándole 500.
A: *(Escribe 1/503, 1/504, 1/505, 1/506, 1/506… 1/560)*
E: Vale, tú dices que esto va hasta el 0.
A: Empieza desde antes y termina, bueno y sigue hasta el 0.
E: Y entonces el de abajo empieza desde este e iría hasta el 0 como dices tú, entonces tú qué dices ahora ¿tiene la misma cantidad este que este?
A: ¡Eh! sí.
E: El primero iría ¿desde cuál hasta cuál?
A: Desde el 1 en adelante que podría ser hasta el 500 y eso, y el D empieza en el 500 hasta adelante.
E: Pero es que el 1 según me dices, llegaría si cada vez está más grande ¿hasta qué número me dijiste?
A: Hasta 0’000.
E: ¿Y el de abajo?
A: 0’000.
E: Vale, entonces ¿quién tiene más cantidad de números arriba o abajo?
A: Más cantidad abajo ¿no?
E: Este empieza desde 1/1 y este desde 1/501.
A: Arriba. *(IV2B)*

16) <u>Alumno:</u> Na. 12,09 Nombre: Nayra Fecha de Nacimiento: 25/08/02

E: Entrevista nº 5 del día 5 de Febrero, con Nayra L. P. de 1º B.
¿Qué edad tienes Nayra?
A: 12 años.
E: 12 años, muy bien. Bueno, pues vamos a intentar hacer esta actividad, léela y me lo dices.
A: Sea el conjunto de números desde el número1 al número 10. Representa cada número en las casillas siguientes.

E: Muy bien, pues entonces vamos a la casilla y empezamos. El primero sería…
A: No lo entiendo.
E: Hay que poner los números que dice ahí. Del 1 al 10, entonces sería el 1.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Muy bien, vale, fácil, ¿no? Ahora vamos a ver el segundo, ahora es que dice sea el conjunto de números del 1 al 7, pero ahora a cada uno le vamos a sumar 3.
A: *(Escribe 4, 7)*
E: Pero si estamos sumando 3.
A: (*Escribe 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Muy bien, y ahora la pregunta es la siguiente, ¿tiene la misma cantidad de números A que B?, no hace falta ponerlo, ¿vale? Lo dices sólo.
A: …
E: ¿Tiene la misma cantidad de números A que B?
A: Sí, porque, aunque, a B le haya quitado 6 números…
E: ¿En A cuánto hay?
A: 10.
E: ¿Y en el de abajo cuánto hay?
A: 7, bueno…
E: Bueno vale, vamos hacer ahora el siguiente, es lo mismo ¿vale?, sea el conjunto de 1, pero ya no es hasta el 10, sino ya sigue adelante.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: 1, 2, 3, 4, seguiría ahora en esos puntos suspensivos.
A: *(Escribe 6)*
E: Por ejemplo 6, y seguiría adelante. ¿Entiendes los puntos suspensivos?
A: No.
E: Los puntos suspensivos es que sigue adelante, que no vamos a poner todo, estos puntos suspensivos de aquí y de aquí quiere decir que va adelante. Bueno, pues ahora vamos a hacer otra vez lo mismo, ahora le vamos a sumar 3.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7…9)*
E: Y ese está bien, muy bien. Y ahora la pregunta es la siguiente, ¿tiene la misma cantidad de números C que D?
A: No.
E: ¿Por qué?
A: Porque…
E: No casillas, ¿eh? Números.
A: …No porque en…
E: ¿Tú por qué crees que tiene más?
A: Porque este tiene en los dos iguales
E: Pero esto sigue adelante ¿no? Arriba está el 1, el 2, el 3, el 4, y el 6, y más, están todos. ¿Y abajo está?
A: No sé. *(II1B)*

*E(*I2*): Mira te lo voy a poner más fácil ¿vale? El primero parece que lo has hecho bien, ve poniendo tú.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 9, 10)*
E: Muy bien, y el de abajo hay que ir sumando, tú 3.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 9, 10)*
E: 4, 5, 6, 7, 8, 9, y 10, que es sumando aquí 1 le sumo 3, 4; aquí 2 le sumo 3, 5; y se mantiene esa forma; y tú me has contestado muy bien, este tiene 10 y este tiene 7, con lo cual A tiene más que B. Y el de abajo es muy parecido, pero aquí hay que tener cuidado que aparecen los puntos suspensivos, esto quiere decir que sigue en adelante, ¿vale? Entonces aquí sería 1, 2, 3, muy bien.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Y ahora por ejemplo ponemos un número muy grande, por ejemplo 100.
A: *(Escribe 100)*
E: Entonces bueno, estos puntos suspensivos, ¿para qué ponemos estos puntos suspensivos?
A: Para saber que aunque haya más números no lo vamos a poner.
E: Claro no los vamos a poner todos, ¿no?, entonces del 7 hasta el 100 hay un montón. Hay un montón, pero ¿estos puntos suspensivos de aquí son igual que estos puntos suspensivos de aquí?
A: No.
E: ¿Por qué aquí es ya…?
A: Infinito.
E: Infinito, muy bien sabes lo que significa. Entonces este le sumamos 3 y da 4, y ¿este?
A: *(Escribe 6)*
E: 6, ¿y este?
A: *(Escribe 7)*
E: ¿y este?
A: *(Escribe 8)*
E: ¿y este?
A: *(Escribe 9)*
E: ¿y este?
A: *(Escribe 10)*
E: Muy bien, y por ejemplo ¿en el 100 sería?
A: 103
E: 103, muy bien. Y eso seguiría en adelante. ¿Tiene la misma cantidad de números C que D?
A: …Sí ¿no? *(I2A)*

*E(*I3*): Vale, vamos ahora a seguir con otra situación, vamos a ver aquí lo que hay, aquí es lo mismo, es la misma situación.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9,10)*
E: Aquí hemos sumado 3, pero te lo he puesto de forma diferente, ¿entonces el 4 es…? Hay que sumarle 3.
A: 7.
E: Sí.
A: ¡Ah! vale, vale. *(Escribe 4, 5, 6, 7, 9,10)*
E: Como ves tú es lo que hemos estado sumando a n, en lugar de poner 7 le hemos sumado nosotros 3, ¿vale? Por eso tenemos el 4, 5, 6, 7; es una forma distinta que te he puesto

antes, y también dirás que aquí hay más números que aquí, ¿no?
A: *(Asiente)*
E: Pero vamos a ver ahora aquí, 1, 2, 3
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9,10)*
E: Por ejemplo aquí.
A: ¿150?
E: 150, vale. Y abajo empezamos, ten cuidado que empezamos desde n=1 entonces el primer término sería, 1 más 3.
A: *(Escribe 4)*
E: Siguiente, sería 2, 2 más 3.
A: *(Escribe 5)*
E: Siguiente.
A: *(Escribe 6)*
E: Muy bien, siguiente.
A: *(Escribe 153)*
E: 153, que puede ser, ¿tiene la misma cantidad de números C que D?
A: No.
E: ¿Cuál para ti tienen más?
A: El C. *(I3B)*

17) Alumno: Ma. 12,04 Nombre: Juan Manuel Fecha de Nacimiento: 22/01/03

E: Entrevista nº 1 del día 6 de Mayo del 2015, con Juan Manuel C. B. de 1º A, ¿qué edad tienes Manu?
A: 12 acabo de cumplir.
E: 12 acaba de cumplir. Mira Manu, coge la ficha nº1, lee el apartado A y contéstala. En voz alta por favor.
A: Sea el conjunto de números desde n= 1 a n=10 representa cada número en las casillas siguientes.
E: Ok, luego aquí hay que poner.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Muy bien, B, léelo.
A: Sea el conjunto desde n= 1 a n= 7. A cada número le sumamos 3. Representa n+3 en las casillas.
E: Vale, entonces el primero sería, ¿entiendes eso? 1 hay que sumarle, luego el primero sería.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Bien, porque el último es hasta el 7, y esto te lo he puesto sombreadito, a la vista de los resultados, Manu, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: ¿Quién tiene más números, pero los dígitos o la suma?
E: Cantidad de números.
A: ¡Ah! cantidad de números, tiene más el A.
E: Vamos al apartado C, sea el conjunto, lee.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante, representa cada número en las casillas siguientes.
E: ¿Entiendes lo que significa en adelante?
A: *(Niega con la cabeza)*
E: Pues que siguen adelante, es decir, que continúan, no te dicen desde el 1 hasta 100, ni el 1 hasta el 7.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Pongo puntos suspensivos que significa…
A: Que llegan hasta…
E: Y aquí pon el número que te dé la gana.
A: *(Escribe 456789)*
E: Siguen adelante, ¿vale? Valen estos puntos suspensivos de aquí en medio, ¿son iguales que los que están aquí?, *(señala la pantalla)*
A: No son iguales, porque de 4 a 456789, no son los mismos números que de 456789 en adelante.
E: En adelante. Muy bien. Vamos al apartado D, léelo.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. A cada número le sumamos 3. Representa ahora n+3 en las casillas siguientes.
E: Vale, entonces el primero sería…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Siguen adelante, y este…
A: *(Escribe 13)*
E: Puede ser el que está arriba o el 13, lo único que tienes que ir es sumándole 3 y estos siguen adelante. La pregunta es la siguiente, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Son los dos iguales, porque como no te dice hasta dónde hay que llegar, pues los dos son infinitos.
E: ¿Aunque este empieza en 1 y este en 4?
A: Sí, porque no te dice hasta cuando termina, o sea que nunca acaba. *(I1**3**)*

*E(*II1*): Ficha Nivel 2, situación 1, de nuevo léelo, Manu.
A: Sea el conjunto desde n= 1 a n=5000, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Entonces es del 1 al 5000, sería…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5)*
E: Los puntos suspensivos, que no vamos a estar aquí toda la mañana, entonces los tres últimos, ¿cuál serían, Manu?
A: *(Escribe 5000, 4999, 4998)*
E: Muy bien, vamos al apartado B, Manu, léelo.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=4500. A cada número le sumamos 500. Representa ahora n+500 en las casillas.
E: Vale, luego en vez de 1 es…
A: *(Escribe 501, 502, 503, 504, 505)*
E: Y los tres últimos cuál serían, como el último es 4500, le sumo 500, el último es…
A: *(Escribe 4998, 4999, 5000)*

E: A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: Los dos son iguales, ¿no?
E: Uno empieza en 1…
A: ¡Ah!, tiene más el primero, porque empieza del 1 al 5000 y el otro del 501 al 5000.
E: Muy bien, vamos al apartado C, vale, Manu.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Ok, luego empezamos. Serían…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Sigue adelante pon el número que tú quieras.
A: *(Escribe 10)*
E: Por ejemplo el 10, eso significa que los puntos suspensivos que están aquí.
A: Que sigue.
E: Bueno no hay tantos porque sería desde el 5 hasta el 9, ¿cierto, o no cierto?
A: Pero estos, pone los que te da la gana.
E: No, estos de en medio no es lo que te dé la gana.
A: ¿Por qué?
E: Porque aquí están sólo el 5, 6, 7, 8 y el 9, y en cambio estos puntos suspensivos significan que sigue en adelante.
A: Vale es que me has dicho que ponga el que me dé la gana.
E: Sí, tú puedes poner el que te dé la gana.
A: Estos puntos de en medio son los que hay del 4 al número que pongas.
E: Evidentemente, claro, para no estar copiando todo el tiempo esto, ¿vale? Vamos al de abajo, que es muy parecido a lo que hemos hecho anteriormente. Léelo.
A: Sea n el conjunto de números desde n=1 en adelante. A cada número le sumamos 500. Representa ahora n+500 cada número en las casillas siguientes.
E: Las casillas siguientes, luego el primero sería…
A: *(Escribe 501, 502, 503, 504)*
E: Siguen adelante y aquí pon, si quieres el correspondiente al de arriba o el que te dé la gana
A: No el de arriba no se puede poner, ¿no?
E: No, es 10, pero si le corresponde 500, sería…
A: *(Escribe 510)*
E: Y siguen adelante, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o los dos son iguales?
A: Los dos son iguales porque no te dice un número en que termina, o sea, los dos son infinitos. *(II1**4**)*
E: Aunque, ¿este empieza en 1 y este en 501?
A: Sí, porque el de 500 ha empezado como el de arriba.

*E(*III1*): Ficha Nivel 3, situación 1, lee el apartado a e intenta contestar Manu.

A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=10. A cada número le corresponde su inversa, es decir, 1/n. Representa cada número en las casillas siguientes.
A: La inversa, ¿a qué se refiere?
E: Que le damos la vuelta, si es 1 es 1/1, si es 2 es ½.
A: No entiendo.
E: Sí, si es 1 pon aquí 1/1, en vez de 2, ½.
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10)*
E: Vale, él mismo te está haciendo las cuentas, no hace falta que tú lo hagas. Vamos al apartado B, es muy parecido a lo que estábamos haciendo anteriormente.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=7. A cada elemento le corresponde su inversa más 3, es decir, 1/n+3. Lo mismo de antes pero al de abajo le sumamos 3, ¿no?
E: Exactamente, en vez de 1 sería…
A: *(Escribe ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10)*
E: Ahora la diferencia que existe es que son números decimales, ¿vale? Bueno en principio, sería la pregunta, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o los dos son iguales?
A: Los dos son iguales, ¡ah! no, no, ¿quién tiene más números? El A.
E: El A, ¿no? ¿Cuánto tiene A?
A: El A tiene 10 y el B tiene 7.
E: Vamos a ver el apartado C, léelo.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. A cada elemento le corresponde su inversa, es decir, 1/n. Represéntalos.
E: Lo mismo de antes, sería entonces…
A: *(escribe ½)*
E: El primero no es ½, ¿no? N=1 en adelante, luego el primero sería 1/1.
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼)*
E: Siguen adelante y aquí vamos a poner el que tú quieras.
A: *(Escribe 1/56)*
E: Vale, y siguen adelante. Vamos al apartado D.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. A cada elemento le corresponde su inversa más 3, es decir, 1/n+3.
E: Luego el primero sería... ¼ muy bien.
A: *(Escribe ¼, 1/5, 1/6, 1/7)*
E: Aquí pon el que tú quieras, pusiste el 56, bueno el 45, vale, perfecto. Ahora quiero que razones un poquito, mira a ver qué le está pasando a los números que estas poniendo tú, son números decimales, pero tiene algo en común, ¿no?, parece ser que se están haciendo cada vez más…
A: Chicos.
E: Más pequeñitos, ¿vale? ¿Dónde crees tú que iría a parar esto?¿ Dónde iría a parar, cuanto mayor es el número de abajo? Si el número que

ponemos aquí abajo, Manu, es cada vez mayor, qué le pasa al cociente este, o al número…
A: Que es cada vez más chico, porque el 1 hay que dividirlo entre más partes
E: Y a dónde llegaría, a un número muy, muy chico.
A: A 0,0000.
E: Eso.
A: Nunca acabaría, porque nunca llegaría a cero.
E: A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o los dos son iguales?
A: ¿Número mayor, cantidad de números? son iguales.
E: Cantidad de números, ¿quién tiene más cantidad de números, ¿por qué?
A: Porque no van acabar los números, siempre van los dos sólo que el D lo empieza dividiendo por un número más grande, pero ya está. *(III13)*
E: Y al final van a tener la misma cantidad de números.
A: Sí.

*E(*IV1*): Ficha Nivel 4, situación 1. Manu, contesta la pregunta A y la B.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=1000. A cada número le corresponde su inversa, es decir, 1/n. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Es fácil, ¿no?
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼, 1/5)*
E: Vamos a hacer los tres últimos, el último sería…
A: *(Escribe 1/1000, 1/999, 1/998)*
E: Como ves tú, de nuevo cada vez se va haciendo más pequeño como tú decías, ¿vale? Vamos al apartado B.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=500. A cada elemento le corresponde su inversa más 500. Representa 1/n+500, ahora esos números en las casillas siguientes.
E: El primero sería...
A: *(Escribe 1/501, 1/502, 1/503, 1/504, 1/505)*
E: Y ahora los tres últimos, si te parece bien hacemos el último que como es 500
A: *(Escribe 1/1000, 1/999, 1/998)*
E: Al igual que el anterior, se va haciendo cada vez más pequeñito, bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o los dos son iguales?
A: A.
E: A ¿qué?
A: A tiene más cantidad de números.

E: Vamos a contestar la pregunta C y D.
A: ¿No explico la respuesta?
E: No hace falta.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. A cada elemento le correspondemos su inversa, es decir, 1/n. Represéntalos.
E: Representa qué, la inversa, ¿no?
A: Lo mismo de antes, *(escribe 1/1, ½, 1/3, ¼)*
E: Y este pon el que te dé la gana.
A: *(Escribe 1/6)*
E: 6, los puntos estos se han quedado un poquito cortitos.
A: *(Escribe 1/55458)*
E: Ya está no pongas más que vas a tener que hacer la suma. Bien, vamos al apartado D.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. A cada elemento le correspondemos su inversa más 500.
E: Parecido al anterior, ¿verdad?
A: *(Escribe 1/501, 1/502, 1/503, 1/504)*
E: Siguiente.
A: ¿Lo que me dé la gana?
E: El que te dé la gana o el correspondiente de aquí arriba, lo que tú quieras.
A: *(Escribe 1/55458)*
E: Has puesto el mismo, seguramente habrá alguno por aquí, que al sumarle 500 pues te de este. Todo esto, de nuevo, tienes que fijarte arriba porque no caben en los cuadritos, pero cada vez son números como ves tú, más pequeñitos, ¿vale? Incluso podemos ponerlo en otro formato, porque no caben tantos números decimales. A la vista de los resultados, sabiendo que son cada vez más pequeñitos, tú ¿crees que llegarían al cero?
A: Yo creo que no.
E: ¿Por qué?
A: Porque tenía que ser 1/0.
E: No 1/0, no el número que estás poniendo aquí, Manu, es cada vez más pequeño.
A: Sí, pero nunca va a llegar a cero.
E: ¿Por qué?
A: Se hace más pequeño, pero nunca va a terminar.
E: Bueno pues atento con eso, pues a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, d o los dos son iguales?
A: Los dos son iguales, nunca van a terminar. *(IV13)*
E: Nunca van a terminar, ¿aunque vayan llegando al cero?
A: Sí, pero no terminan nunca, porque no te pone hasta n igual a lo que sea.

18) <u>Alumno:</u> Ma. 13,03 Nombre: María Fecha de Nacimiento: 06/02/02

E: Entrevista nº 6 del día 5 de Febrero del 2015, con María N. S. de 1º B.
¿Qué edad tienes María?
A: 13 años.
E: 13 años. Bueno pues María vamos a empezar haciendo esta ficha, ¿vale? Dice sea el conjunto

de números desde el número1 al 10. Representa cada número en las casillas siguientes.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Perfecto, vamos a ver ahora el segundo, dice, sea el conjunto del 1 al 7, pero ahora le vamos a sumar 3 a cada uno, ¿vale? Luego el primero sería…
A: *(Escribe 3)*
E: No, le vamos a sumar 3, no, no, al 1 le sumamos 3.
A: *(Escribe 1)*
E: No, al 1 le sumamos 3.
A: *(Escribe 3)* A 1 le sumo 3, ¿no?
E: Si le sumas 3 al 1, ¿cuánto te sale?
A: ¡Ah! vale, vale, *(Escribe 4)*
E: Siguiente, ¿cuál sería el siguiente?
A: *(Escribe 7)*
E: No, al 2 le sumo 3.
A: *(Escribe 5)*
E: Al 3 le sumo 3.
A: *(Escribe 6)*
E: Al 4 le sumo 3.
A: *(Escribe 7, 8, 9, 10)*
E: Ahora viene la pregunta que no tienes por qué escribirla, ¿tiene la misma cantidad de números arriba que abajo?
A: No.
E: ¿Quién tiene más?
A: El primero.
E: El primero que tiene, ¿cuántos?
A: 10 números.
E: ¿Y el de abajo tiene?
A: 7.
E: 7, muy bien. Vamos a ver el de abajo, dice, sea el conjunto de números del 1 en adelante, es decir, ahora no para, ¿de acuerdo?, antes era hasta el 10, ahora no para, entonces sería 1.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: 4, muy bien. Estos son puntos suspensivos, María, esto quiere decir que sigue adelante.
A: *(Escribe 5)*
E: Por ejemplo el 5 no valdría ahí.
A: *(Borra 5 y escribe 1)* no, este tampoco *(borra 1 y escribe 9)*
E: Por ejemplo el 9, vale. Quiere decir que significa, entonces, María, que en los puntos suspensivos de aquí en medio estaría el 5, el, 6, el 7, que no vamos a copiarlos todos, ¿vale? Y de la misma forma, María, pongo estos puntos suspensivos que significa que esto va en adelante. Bien, pues ahora lo mismo que lo anterior, ahora vamos a sumar 3 a cada uno de ellos, en vez del 1, ¿pongo?
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7…10)*
E: Vale, bien. La pregunta es la siguiente, ¿tiene la misma cantidad de números C que D?
A: No.
E: ¿Quién tiene más?
A: El D.
E: ¿El D? ¿Por qué?
A: Porque tiene…Ah!, no, el C. *(I1B)*
E: El C.

*E(I2): Vamos a hacerlo otra vez en otra situación. Vamos a verlo aquí. Esto es lo mismo que antes, ve poniéndolo tú, y yo lo muevo con el cursor.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: ¿Y abajo sería?
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Con lo cual has dicho tú, tiene más el de arriba que el de abajo, ¿vale? Porque aquí hay 10 y aquí hay 7. Vamos a ponerlo de otra forma ahora.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Mira estos son puntos suspensivos porque esto va a ocupar mucho, entonces vamos a poner aquí un número muy grande.
A: *(Escribe 67)*
E: El 67, muy bien. Y después seguiría en adelante. Entonces, una de las cosas que quiero saber María, ¿estos puntos suspensivos de aquí son los mismos que los de aquí? Porque estos puntos suspensivos de aquí serían los números del 7.
A: Del 7 al 67 y del 67 hasta…
E: ¿Hasta dónde?
A: Hasta el que quieras.
E: Hasta el que tú quieras o más ¿vale? Hasta el que tú quieras o más. Muy bien. Aquí hemos hecho lo mismo ahora, yo te he puesto algunos para que sea fácil, entonces para 1, 4, para 5, para 2, 5, para 3.
A: *(Escribe 6)*
E: Para 4.
A: *(Escribe 7)*
E: Para 5.
A: *(Escribe 8)*
E: Para 6.
A: *(Escribe 9, 10)*
E: Muy bien, y luego ahora para 67. por ejemplo. Pues puedes poner el que tú quieras
A: *(Escribe 69)*
E: Perfecto, ¿vale? Bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más C o D o son iguales?
A: D.
E: El D, ¿qué pasa?
A: Que tiene menos que el de arriba, ¿no?
E: ¿Por qué?
A: Porque, ¡ah!, no, el D tiene más que el de arriba.
E: ¿El D? ¿Por qué? ¿Porque has puesto 69?
A: Sí y después seguía ¿no?
E: Claro, y el de arriba también seguía
A: ¡Ah!, no el C, sí el C.
E: ¿Por qué? Dime el por qué.
A: Porque tiene… porque va del 1, no sé.
E: Dilo, dilo.

A: Porque del 1 al 7 y del 7 al 67 y puede seguir; y aquí va desde el 4 y no desde el 1. *(I2B)*

19) <u>Alumno:</u> Mar. 13,00 Nombre: María Ángeles Fecha de Nacimiento: 16/05/02

E: Entrevista nº 7 del día 5 de Febrero con María N. S. de 1º B.
¿Qué edad tienes María?
A: Yo no soy María, soy Mª Ángeles.
E: Bueno, Mª Ángeles P. A. de 1ºB. ¿Edad?
A: 12.
E: 12, muy bien. Pues nada, Mª Ángeles, empezamos haciendo esta actividad, ¿vale? Dice, sea el conjunto de números desde 1 a 10. Representa cada número en las casillas siguientes.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Bien, vamos a ver la regleta B; la regleta B dice ahora que es del 1 al 7 y le vamos sumando 3 a cada uno de ellos, entonces ¿el primero sería?
A: 3
E: Más 1. No, sería 1 más 3.
A: Vale de acuerdo *(escribe 4)*
E: 2 más 3.
A: *(Escribe 5)*
E: 3 más 3.
A: *(Escribe 6)*
E: El cuarto, 4 más 3.
A: *(Escribe 7, 8, 9, 12)*
E: ¿12?; ¿7 más 3?
A: *(Borra 12 y escribe 10)*
E: La pregunta me la vas a decir, no hace falta que lo copies, ¿vale? ¿Tiene la misma cantidad de números A que B?
A: No.
E: No, ¿quién tiene más?
A: El A.
E: El A ¿Cuántos más?
A: El A tiene 3 más.
E: Muy bien, vamos ahora al de abajo ¿vale? En este caso Mª Ángeles, es desde 1, del 1 hasta…, en adelante, ¿vale? Entonces sería 1.
A: *(Escribe 1, 3)*
E: ¿Por qué 3? Es sólo en adelante, no estamos sumando nada.
A: Ah vale. *(Borra 3 y escribe 2, 3, 4)*
E: Bien, ahora aparece puntos suspensivos lo que significa que va adelante, y aparece un casillero, pon el número que tú quieras ahí.
A: *(Escribe 5)*
E: ¿Por qué 5? Es para poner ahí un número más grande ¿no?, ¿por ejemplo?
A: *(Borra 5 y escribe 17)*
E: Vale, por eso aparece, para no tener que estar escribiendo del 4 al 17, ¡eh!, y eso sigue adelante. Estos puntos suspensivos, Mª Ángeles, son distintos puntos suspensivos que los de aquí, ¿verdad? Porque estos puntos suspensivos de aquí ¿quiénes son?
A: 5, 6, 7.
E: 8, 9,…
A: Y hasta 17.
E: Vale, y ¿aquí sería?
A: 18, 19…
E: ¿Hasta dónde?
A: Hasta infinito.
E: Bien vale, vamos a ver el de abajo. De la misma forma anterior ahora le vamos a sumar 3.
A: *(Escribe 1)*
E: No, empezamos sumando 3.
A: ¡Ah!, 3.
E: Desde el 1 pero le sumo 3.
A: *(Escribe 4)*
E: Luego le sumo al 2.
A: *(Escribe 5, 6, 7)*
E: Seguiría en adelante, y ¿aquí?
A: *(Escribe 20)*
E: 20 por ejemplo, muy bien. Y la pregunta es la siguiente, ¿tiene la misma cantidad de números C que D?
A: Sí.
E: ¿Por qué?
A: Porque este tiene 4 y este también.
E: No, pero no te digo casillas si no números.
A: No, porque el D tiene hasta el 7 y el C hasta el 4.
E: Pero los puntos suspensivos estos de aquí siguen adelante, que hemos dicho antes que estaba el 5, el 6…
A: Vale, entonces el D. *(I1B)*

*E(*I2*): Vamos a ver otro a ver si lo sabes hacer. Mira, el primero lo has hecho bien, entonces no lo vamos a hacer. A ver si lo ves mejor aquí. Aquí pondríamos el 1, el 2, el 3, aquí ¿por ejemplo?
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Y aquí, por ejemplo, el 1000 puedes poner.
A: ¡Ah!, vale ¿Lo pongo yo?
E: Sí, vale. ¿Perfecto? Vale, y seguiría adelante; desde 7 hasta el 1000 no hemos puesto nada porque sino podríamos estar aquí hasta mañana, y del 1000 en adelante pues menos todavía. Y ahora lo que estamos haciendo es sumarle 3, al 1 le sumo 3 y es 4, al 2 le sumo 3 y es 5, ¿qué seguiría entonces?
A: El 6, el 7, el 8, el 9, el 10.
E: Seguiría, porque no vamos a estar aquí todo el día copiándolo, y aquí, por ejemplo, ¿podríamos poner?
A: *(Escribe 2000)*

E: Por ejemplo, ¿vale?, bien. ¿Quién tiene más cantidad de números arriba o abajo? De números.
A: …Yo creo que el D.
E: ¿El D qué tiene?
A: El 4, el 5.
E: No, ¿pero qué tiene más o menos?
A: Porque tiene el 4, después le sigue el 5, espera que no se explicarlo.
E: Pero dímelo claro ¿Quién tiene más cantidad de números el C o el D o son iguales?
A: Yo creo que son iguales. (*I2A*)

*E(*I3*): Son iguales, vale; vamos a verlo en otra situación. La primera es la otra forma distinta de ponerla el 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Y aquí estaría el 4, el 5… Vamos a ver el de abajo que es el que yo quiero hacer, aquí estaría el 1, el 2, el 3, ¿aquí sería?
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: ¿Aquí por ejemplo? Como el anterior el que tú quieras.
A: *(Escribe 344)*
E: Por ejemplo, ¿vale?, y aquí le vamos sumando, es decir, si es 1, ¿aquí le tienes que poner?
A: *(Escribe 4)*
E: ¿Y si es 2 es?
A: *(Escribe 5)*
E: ¿Y si es aquí?
A: *(Escribe 6)*
E: ¿Y si es aquí? Viendo de esta forma, con estos puntos suspensivos que están aquí, ¿quién tiene más cantidad de números el C o el D?
A: El C. *(I3B)*
E: El C, perfecto.

20) <u>Alumno:</u> Mag. 13,00 Nombre: Magdalena Fecha de Nacimiento: 21/05/02

E: Entrevista nº 8 del día 5 de Febrero, con Magdalena P. J. de 1º B.
¿Qué edad tienes Magdalena?
A: 12 para 13.
E: 12 para 13, muy bien. Mira léeme esto e intenta hacer esta actividad.
A: Sea el conjunto de números desde el número1 al número 10. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien pues lo ponemos aquí y empezamos.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Muy bien, vamos a ver ahora la segunda regleta, la segunda regleta es que va del 1 al 7, pero se le va sumando 3, ¿vale?, entonces, ¿en vez de 1 es?
A: 4.
E: Muy bien, ¿el de 2?
A: ¿2?, ¿el de 2?
E: El de 2 sumamos 3 y ¿sería?
A: 5.
E: El de 3 sumamos 3, ¿sería?
A: *(Escribe 6)*
E: 4.
A: *(Escribe 7)*
E: 5.
A: *(Escribe 8)*
E: 6.
A: *(Escribe 9)*
E: 7.
A: *(Escribe 10)*
E: ¿Quién tiene más números A o B?
A: A.
E: A ¿vale?, ¿cuántos números tiene A más que B?
A: ¿Más? 3.
E: Vamos a ver ahora la segunda regleta esta, C, ahora no es del 1 hasta el 10 sino en adelante, ¿vale?, entonces tenemos aquí, no hay que sumar ni nada.
A: ¿El número que quiera?
E: No, desde el 1.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Para no tener que poner todos y no estar todo el día ponemos puntos suspensivos, por ejemplo un número ahí, un número que tú veas.
A: *(Escribe 8)*
E: 8 por ejemplo, entonces los puntos suspensivos de aquí significan que el 5, el 6 y el 7 no los hemos puesto.
A: Vale.
E: Pero esto sigue adelante, por eso he puesto estos puntos suspensivos porque esto sigue más adelante. Magdalena, ¿qué diferencia hay entre estos puntos suspensivos y estos?
A: Que el de la izquierda tiene más puntos que el de la derecha.
E: Ahí está, vamos a ver el de abajo, ahora de la misma forma que el anterior le vamos a ir sumando 3, entonces si es 1.
A: *(Escribe 4)*
E: Si es 2.
A: *(Escribe 5)*
E: Si es 3.
A: *(Escribe 6)*
E: 4.
A: *(Escribe 7)*
E: Sigue adelante, ¿y este?
A: *(Escribe 13)*
E: Por ejemplo, ¿vale?, la pregunta es la siguiente, ¿tiene la misma cantidad de números C que D? Misma cantidad de números.
A: Sí.

E: ¿Por qué?
A: No lo sé, yo creo que son iguales. *(I1**1**)*
E: Sí, vale.

*E(II1): *(Le pone la tarea II)* Ahora es del 1 al 5000, y hay que ponerlo aquí en estas casillas.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5)*
E: También esto son puntos suspensivos, ¿vale Magdalena?, ¿y aquí qué ponemos?
A: *(Escribe 50)* No, pero en la siguiente casilla ponemos el 0 ¿no?
E: ¿Ponemos el último no?
A: Sí.
E: ¿El último sería?
A: *(Escribe 5000)*
E: ¿Y el anterior sería?
A: *(Escribe 4999)*
E: ¿Y el anterior sería?
A: *(Escribe 4998)*
E: Perfecto, y ahora otra vez lo mismo, es coger e ir sumando 500, pero del 1 al 4500, ¿vale? Entonces si es 1 más 500 sería…
A: *(Escribe 501)*
E: Muy bien, si es 2.
A: *(Escribe 502)*
E: Si es 3.
A: *(Escribe 503)*
E: Si es 4.
A: *(Escribe 504)*
E: Si es 5.
A: *(Escribe 505)*
E: Y ahora los tres últimos, son los tres últimos que suman 500. Vamos a hacer el último si quieres, el último sería 4500 más 500.
A: *(Escribe 4500)* ¿el anterior?
E: No, es el último; el último sería 4500 más 500, sería…
A: ¡Ah!, el último, ¡ah!, vale. *(Escribe 5000)*
E: ¿Y el anterior sería?
A: *(Escribe 4999)*
E: Muy bien, ¿y el anterior sería?
A: *(Escribe 4998)*
E: Perfecto, ¿quién tiene más números arriba o abajo? Más cantidad de números
A: Lo mismo.
E: Este va del 1 al 5000, ¿y este va?
A: Del 501 al 5000. No, el A tiene más números.
E: Vamos a ver el de abajo, ahora el de abajo otra vez lo mismo pero sigue adelante no se queda en el 4500 ni en 5000, entonces sería…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Y aquí hay que poner uno y sería…
A: *(Escribe 6000)*
E: Vamos a ver el de abajo, sería, ahora hay que sumarle 500 ¿eh?, 1 sería abajo.
A: *(Escribe 501)*
E: Este sería.
A: *(Escribe 502, 503, 504… 7000)*
E: Bien, ¿quién tiene mayor número C o D?
A: D.
E: ¿Sí?
A: D.
E: ¿D tiene más números?
A: Sí, porque es del 7000 hacia delante.
E: Pero es que el 7000 lo has puesto tú, ¿no?
A: ¡Ah!, vale. No, entonces el C porque empieza desde el 1. *(II1B)*

*E(*II2*): Venga vamos a mirarlo de otra forma, el primero no lo vamos a hacer más, así que por ejemplo, el 1, el 2, el 3, esto es una forma de ponerlo, ¿vale? Ahora sigue.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Como tú lo has puesto lo has hecho bien, yo te he puesto aquí el 1000, porque hay muchos números, y aquello sigue en adelante.
A: Vale.
E: Y esto igual 501, 502, este sería.
A: *(Escribe 503, 504, 505, 506, 507…. 600)*
E: Vale, entonces que sepas que del 507 al 600, aquí hay pues, bastantes números. Contesta a esta pregunta, ¿tiene la misma cantidad C que D?, atendiendo a estos puntos suspensivos.
A: No.
E: ¿Quién tiene más?
A: C. *(II2B)*

CURSO: 2 º E. S. O.

1) Alumno: De.14,04 Nombre: Debla Fecha de Nacimiento: 19/01/01

E: Entrevista nº 1 del día 11 de Febrero del 2015, con Debla B. A. de 2º A, ¿qué edad tienes, Debla?
A: 14.
E: 14 años, bien. Lee el apartado A e intenta contestar.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=10, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Bien, ponemos ahí…
A: *(Escribe 1, 2, 3 ,4 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Vamos a ver al apartado B.
A: Sea el conjunto de números desde nº1 a nº7. A cada número le sumamos 3. Representa ahora n+3 en las casillas.
E: En vez de poner 1,
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y ahora la pregunta es fácil, ¿tiene la misma cantidad A que B?
A: ¿La misma cantidad de números?
E: Sí.
A: Sí.
E: ¿Sí? ¿Cuántos tiene la primera?
A: La primera tiene 10 números.
E: ¿Y la segunda?
A: 7.
E: 7, entonces ¿tiene más cantidad, quién?
A: La primera.
E: Vamos a ver la segunda, Debla.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: ahora no hay corte, no se para en 10, sino que sigue adelante, ¿eh?
A: *(Escribe1, 2, 3, 4)*
E: Y puntos suspensivos, ¿entiendes los puntos suspensivos, Debla?
A: Sí, otro número, ¿no?
E: No, muchos números, no vamos a poner todos los números, entonces lo que hacemos es puntos suspensivos, ¿no? Y aquí ponemos por ejemplo.
A: ¿El que yo quiera? *(Escribe 9)*
E: 9, entonces significa que estos puntos suspensivos… *(Señala en la pantalla)*
A: Del 4 al 9.
E: Al 9, ¿no?, y aquellos puntos suspensivos, ¿qué significa? *(Señala en la pantalla)*
A. Después del 9.
E: ¿Hasta dónde?
A. En adelante.
E: ¿Hasta dónde?
A: Hasta el 10 como antes no, pues hasta… no lo pone.
E: No lo pone, aquello no para, ¿dónde habrá más en estos puntos suspensivos o en estos? *(Señala en la pantalla)*
A: Después del 9.
E: Después del 9. Bueno pues el objetivo ahora es lo mismo de antes hay que sumarle 3, ahora sería…
A: 4, 5, 6, 7.
E: Muy bien, esto sigue adelante y este.
A: *(Escribe 13)*
E: Podías poner el correspondiente a este, ¿vale?
A: ¡Ah!, vale.
E: Puedes poner el que tú quieras.
A: *(Escribe 12)*
E: 12 en adelante, bien, atendiendo a esto que siguen en adelante, que no se corta, ¿quién tiene mayor cantidad de números C o D o son iguales?
A: C, ¿no?
E: ¿C?
A: Porque empieza del 1 hasta el infinito y el D desde el 4.
E: ¿Aunque llegue hasta el infinito?
A: Que le falta del 1 al 4. *(I1B)*

*E(*I2*): Vamos a mirarlo aquí, te lo he puesto más cómodo, ¿vale?, en vez de ponértelo así. Este ya lo sabes tú hacer, y el de abajo te lo voy a poner un poquito más fácil, 1, 2, 3, 4 sigue tú.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Yo te he puesto una bestialidad, el 100, 1000, 1000000, lo que tú quieras, estos puntos suspensivos, pero no vamos a estar toda la mañana copiando números, y estos puntos suspensivos significa que tampoco me voy a pasar toda mi vida poniendo números. Y abajo estamos poniendo el correspondiente, el 4, el 5.
A: *(Escribe 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Vale, que son lo mismo, pero sumándole 3 y aquí, puedes poner tú el que te dé la gana.
A: *(Escribe 103)*
E: Tú estás poniendo el correspondiente al de arriba, si fuese otro, pues sería el correspondiente de otro y esto sigue adelante, a la vista de los resultados ¿quién tiene mayor cantidad de números C, D, o son iguales?
A: C. *(I2B)*
E: Sigue siendo C, ¿no?
A: Sí.
E: ¿Cuánto tendría más que D?
A: 3 números más.

2) <u>Alumno:</u> Al.13, 08 Nombre: Alba Fecha de Nacimiento: 16/09/01

E: Entrevista nº 2 del día 11 de Febrero del 2015, con Alba C. B. de 2º A, ¿qué edad tienes, Alba?
A: 13.
E: 13años, muy bien. Alba, muy fácil, lee la preguntita y contesta.
A: ¿En voz alta?
E: En voz alta si puede ser.
A: Sea el conjunto de números desde n1 a n10, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Bien, vamos a la casilla.
A: *(Escribe 1, 2, 3,… hasta 10)*
E: Muy bien, ahora en la segunda es muy parecida a la anterior, pero ahora hay que sumarle 3, lo mismo que el anterior pero sumándole 3, 1 más 3.
A: Empieza en 1, ¿no?, 4.
E: 2 más 3.
A: 5, 3 más 3, 6; 4 más 3, 7, 8, 9 y 10
E: ¿quién tiene más cantidad de números el A, el B o son iguales?
A: El A.
E: El A, ¿cuántos números más tiene A que B?
A: 3.
E: 3, muy bien, vamos ahora al apartado C y D. Es lo mismo que el anterior, pero en este caso, Alba, siguen en adelante, no hay ningún corte, ¿vale? 1 en adelante, sería…
A: 1, 2, 3, 4.
E: Sí, no vamos a estar toda la mañana, esto sigue, y pon el número que tú quieras.
A. *(Escribe 500)*
E: Muy bien, y esto sigue adelante, ¿vale? Alba, ¿estos puntos suspensivos, son los mismos que estos puntos suspensivos? *(Señala en la pantalla)*
A: No.
E: No, estos puntos suspensivos, ¿tienen más o menos números que estos? *(Señala en la pantalla)*
A: Menos, porque el otro puede ser hasta infinito, ¿no?
E: Hasta el infinito, tú has puesto aquí 500, del 4 hasta el 500. Vamos a ver ahora, es lo mismo que el anterior, le vamos a ir sumando 3, ¿vale? el primero sería…
A: 4, 5, 6, 7.
E: Seguimos adelante, aquí podemos poner…
A: *(Escribe 504)*
E: Has puesto uno muy parecido al de arriba, no tiene por qué, en fin, tú quieres poner el de arriba, y sigue adelante. ¿Hasta dónde llegaría entonces esto?
A: Hasta el infinito.
E: ¿Quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?, sabiendo que eso llega, ¿hasta…?
A: El C, ¿no?
E: ¿el C?
A: No, el D.
E: El D, ¿tiene más? ¿Son iguales, uno tiene más que otro?
A: Son iguales.
E: Son iguales, ¿por qué?
A: Porque el primero es del 1 al 500.
E: No, no es al 500, hay que tener cuidado.
A: Porque, entonces el primero, es mayor el C. *(I1B)*
E: ¿Sí? ¿Es mayor?
A: Porque empieza desde el 1 y no desde el 4.
E: Vale, aunque se vayan a infinito.
A: Sí.

*E(*I2*): A ver si lo ves mejor de esta forma. Yo te lo he puesto de otra forma distinta, a ver si lo ves, ¿vale? El primero no lo vamos a hacer, porque lo has hecho bien, el siguiente sería, bueno pues hemos puesto aquí el 1, el 2, el 3, sigue tú, Alba
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Sigue adelante, yo he puesto aquí 100, esto sigue adelante, no para. Y abajo te he puesto el 4, el 5, te voy a poner el 6.
A: *(Escribe 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Aquello seguiría, para eso he puesto los puntos suspensivos y aquí podríamos poner nosotros…
A: *(Escribe 100)*
E: 100 también si quieres, a este le correspondería uno que este por aquí, ¿no?, para que haya correspondencia, ¿vale? Mira la correspondencia que hay, viendo los resultados ahora, ¿tiene la misma cantidad C que D, son iguales, tiene uno más que otro?
A: El C tiene más. *(I2B)*
E: Aún así, llegando hasta infinito, ¿tiene más C?
A: Sí.

3) <u>Alumno:</u> Ca.13, 05 Nombre: Candela Fecha de Nacimiento: 25/12/01

E: Entrevista nº 3 del día 11 de Febrero, con Candela M. C. de 2º A, ¿qué edad tienes, Candela?
A: 13.
E: 13 años, muy bien Candela, pues nada, lee el apartado A e intenta contestar.
E: Sea el conjunto del 1 al 10 representa cada número en las siguientes casillas.

A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9, 10)*
E: Fácil, ¿no? Vamos a ver el apartado B, ahora es lo mismo, pero le sumamos 3, es decir, del 1 al 7, pero le sumamos 3.
A: A cada número se le suma 3.
E: En vez de 1 es…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: A la vista de los resultados, ¿cuál tiene más cantidad de números el A o el B?
A: ¿Cómo que más números? El A
E: ¿Cuántos más A que B?
A: 4 más.
E: ¿4 más?, 3 más, ¿no?
A: Sí, sí.
E: Por eso te lo he puesto así, para que sea más cómodo para verlo. Vale, bien. Vamos ahora al C y D. El C y el D es muy parecido al anterior, pero esto sigue adelante, esto no se para en el 10 ni ningún otro. El primero sería aquí, empezamos.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Pongo puntos suspensivos para decir que esto sigue para adelante y aquí pon el número que tú quieras.
A: *(Escribe 5)*
E: ¿El 5? Mejor no, ¿no?, si no habríamos puesto aquí el 5.
A: ¡Ah!, es verdad, ¿pero tiene que ser hasta el número 10?
E: No, no tú pon el número que creas conveniente, esto sigue adelante, ¿hasta dónde llegaría esto, Candela?
A: Hasta…
E: ¿Se para como el anterior, me refiero?
A: Llegaría hasta el 10, ¿no?
E: No, no siguen adelante, más que el 10.
A: ¿15?
E: ¿15?, no, sigue adelante, mucho más.
A: ¿25?
E: O más. Tú pon el que tú quieras, el problema es, tú quieres poner el 25, ponlo ahí.
A: *(Escribe 25)*
E: Y esto sigue adelante. ¿Estos puntos suspensivos son los mismos que estos? *(Señala la pantalla)*
A: Sí.
E: Sí, ¿tú crees? ¿Aquí cuántos números habrá?, que no hemos puesto, porque vamos a estar toda la mañana, vamos a quitarnos trabajo de en medio, ¿no?, aquí había del 4 al 25, y no lo hemos puesto por flojedad. Y aquí hay otros puntos suspensivos, estos, ¿hasta dónde irían?
A: Hasta cualquier número.
E: Cualquier número, no, hasta no parar. ¿Quién tiene más números estos puntos suspensivos o estos?
A: Los otros.
E: Los de la derecha, ¿vale? Teniendo en cuenta eso, bueno ahora es lo mismo del anterior le vamos a sumar 3, a cada uno de ellos, en vez de 1 pongo…, en vez de 2…
A: *(Escribe 4, 5, 6 y 7)*
E: Y aquí por ejemplo puedes poner el que tú quieras, ¿cuál quieres poner, el correspondiente de arriba? O si quieres poner otro, pones otro.
A: El 28.
E: Estás cogiendo el correspondiente, ¿vale?, y esto sigue adelante, no para.
E: Bien, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Contando desde donde empieza, ¿no?
E: Donde empieza y atendiendo que aquí son puntos suspensivos, que no es como estos se para.
A: El C.
E: El C, ¿tiene más cantidad de números?
A: Porque empieza desde el 1. *(I1B)*
E: ¿Aunque tenga puntos suspensivos?
A: Sí.

*E(*I2*): vamos a ver, te lo he puesto otra representación, ¿vale?, el primero lo dejo porque no ha habido dudas, pero el segundo has tenido un poquito más de dudas. Te lo he puesto de otra forma, aquí el 1, el 2, el 3.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Aquí seguiría adelante y te he puesto un número un poquito más bestia, 100, ¿vale? aquí habría pues noventa y dos números y aquello sigue adelante sin parar. Y aquí abajo te lo he puesto para que veamos nosotros así de esta forma de una forma más… El 4, el 5.
A: *(Escribe 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y aquí tú puedes poner el que tú quieras, tú quieres poner el que le corresponde a este, pues 103.
A: *(Escribe 103)*
E: Podía haber puesto otro, podía haber puesto el 200, y sería otro que estuviera por aquí, o haber puesto el noventa y tantos y estaría por aquí. Bien, a la vista de los resultados, que estos siguen adelante, ¿cuál tiene mayor cantidad de números C o D o son iguales?
A: Son iguales.
E: Serían iguales, vale. Bien, vamos a ver la situación 3, para ver si te aclaras más. Lo he puesto un poquito más separadito, a ver cómo lo ves, voy a cambiar al C y al D, ¿vale? Aquí sería el 1, 2, 3, sigue tú.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Sigo adelante, pon el número que te dé la gana.
A: *(Escribe 100)*
E: El 100, te ha gustado el 100, sigue adelante, ¿vale? Y abajo pues los correspondientes de nuevo, en vez de 1 pongo.
A: Le sumo 3, ¿no?
E: Eso es, sería 4.
A: *(Escribe 4, 5, 6)*

E: Sigo adelante y aquí quien corresponde.
A: *(Escribe 103)*
E: A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales? Teniendo en cuenta que esto sigue adelante.
A: El C, ¿no?, no, serían iguales, ¿no? *(I2A)*

*E(*I3*): Serían iguales. Voy a hacerlo otra vez, voy a empezar con el primero que tuvimos, voy a dejar este (señala el de arriba, apartado A y B), vamos a hacer el siguiente, este sería del 1 en adelante.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Este sigue adelante, y puedes poner el número que quieras.
A: *(Escribe 100)*
E: Y ahora es muy parecido al anterior, pero ahora le estamos sumando 6, entonces en vez de 1 sería.
A: *(Escribe 7, 8, 9,10)*
E: Sigue adelante y en vez de 100.
A: *(Escribe 106)*
E: Bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene mayor cantidad C, D o son iguales?
A: Son iguales, ¿no?
E: Son iguales, vale. ¿Por qué? ¿Cuál es tú respuesta final?
A: Porque siguen adelante… *(I3A)*

*E(*I1'*): Y finalmente, este.*(Se le pone la tarea I1')*.La A y la B es fácil, ya las has hecho bien. *(Señala el de arriba, apartado A y B)*, vamos a hacer el siguiente, este sería del 1 en adelante.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y el de abajo, B…
A: *(Escribe 7, 8, 9, 10)*
E: ¿Por qué pones 6, 12?
A: Porque se le suma 6.
E: La pregunta, ¿tiene la misma cantidad de números?
A: No.
E: No, ¿cuál tiene más?
A: El A.
E: Ahora, de nuevo, con el C, sea el conjunto de números de 1 en adelante, es fácil.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Y este por ejemplo.
A: *(Escribe 30)*
E: Lo mismo.
A: *(Escribe 7, 8, 9, 10)*
E: Y al 30 le corresponde.
A: *(Escribe 36)*
E: La pregunta, ¿tiene la misma cantidad de números C que D?
A: Sí, porque siguen adelante. *(I1'**3**)*

*E(*II1*): Candela bien, ahora estamos en este nivel, es muy parecido al anterior, pero ahora va hasta el 5000, del 1 al 5000.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5)*
E: Luego estos puntos suspensivos de aquí, habrá una pila, del 5 hasta el 4998.
A: *(Escribe 4998, 4999 y 5000)*
E: Otros compañeros lo que hacen es poner aquí e ir para abajo, luego estos puntos suspensivos de aquí, habrá una pila, del 5 hasta el 4998. Ahora es el mismo, hay que poner del 1 al 4500, pero hay que sumarle 500, en vez de 1 sería.
A: 501.
A: *(Escribe 502, 503, 504 y 505)*
E: Vale estos son los 3 últimos, hay que tener cuidado porque son los 3 últimos de aquí, es decir, vamos a hacer el último de aquí si quieres, 4500 si le sumo 500, el último será…
A: 5000.
A: *(Escribe 4999, 4998)*
E: Muy bien, a la vista de los resultados ¿Quién tiene mayor cantidad de números A, B o son iguales?
A: Son iguales.
E: Son iguales, ¿el primero empieza?
A: En 1.
E: ¿Y termina en?
A: 5000.
E: Y el segundo empieza en…
A: En 501 y en 5000.
E: ¿Iguales son los dos?
A: No, el A tiene más.
E: ¿Cuántos más tiene el A?
A: La mitad, ¿no?
E: ¿La mitad? 500 números tendrán más, ¿vale? Bien.
E: Aquí ha parado en 5000, ahora vamos a hacer lo mismo pero siguen adelante.
A: *(Escribe1, 2, 3, 4)*
E: Sigue adelante, aquí pon el que te dé la gana.
A: *(Escribe 100)*
E: Vale, te ha gustado el 100, sigue adelante, ¿vale? ¿Hasta dónde llegaría este?
A: Hasta infinito.
E: No para en 5000 como este, ¿vale? Bien, pues aquí otra vez lo mismo, vamos a sumarle 500 otra vez, en vez de 1 sería…
A: *(Escribe 501, 502, 503 y 504)*
E: Aquí si tú quieres pon el correspondiente a arriba, si quieres.
A: *(Escribe 600)*
E: Y estos seguirían adelante, a la vista de los resultados ¿Quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Son iguales.
E: ¿Por qué?
A: Porque siguen hacia el infinito. *(II1**3**)*
E: No paran entonces, ¿no?
A: No.

*E(*III1*): Bien. Ficha Nivel 3, situación 1, ahora es lo mismo, sea el conjunto de números del 1 al

10, ahora se hace su inversa, es decir 1/del número, en vez de 1 sería.
A: Uno partido de uno.
A: *(Escribe ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/7, 1/9 y 1/10)*
E: Muy bien, ahora el de abajo es muy parecido al anterior, pero le sumamos de nuevo 3, 1 partido…
A: *(Escribe ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10)*
E: A la vista de los resultados, ¿quién tiene más números arriba o abajo?
A: Arriba.
E: *¿Arriba cuántos números tiene?*
A: ¿Qué?
E: ¿Cuántos números más tiene arriba que abajo?
A: 3.
E: Vale bien, pues este es lo mismo, este otra vez igual, es decir que vamos a empezar del 1 en adelante sin parar.
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼)*
E: Seguiría adelante y ahora aquí pon el que te dé la gana. ¿Lo adivino cuál vas a poner tú?
A: *(Escribe 1 /100)*
E: Bueno, has sido poco valiente, y seguiría adelante.
E: Bueno, vamos a ver el otro, lo mismo, pero le sumamos 3.
A: *(Escribe ¼, 1/5, 1/6, 1/7)*
E: Y este, por ejemplo.
A: *(Escribe 1/103)*
E: Ahora hay que tener en cuenta, los puntos suspensivos, siguen adelante como tú dices, pero la diferencia que hay, Candela, es qué va pasando con los numeritos.
A: Que se van a sumar.
E: Sí, pero el de arriba, ¿qué va a pasar con los números? ¿Cómo son los números cada vez?
A: Son más grandes.
E: ¿Más grandes?
A: Que diga, más chicos.
E: Más pequeñitos, ¿verdad? ¿Dónde crees tú que irá esto a parar?
A: A cero.
E: Y ¿qué va a pasar con el segundo? ¿Va a pasar lo mismo?
A: Lo mismo.
E: Bien, sabiendo eso, que eso sigue adelante, ¿quién tiene mayor cantidad de números C, D o los dos iguales?
A: Son iguales, siguen adelante. *(III1**3**)*

*E(*IV1*): Candela, ahora es del 1 al 1000, ¿vale? por eso te he puesto los puntos suspensivos aquí, ¿vale?
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼, 1/5)*
E: Y los tres últimos, si quieres empieza por el último ¿vale?
A: *(Escribe 1/1000, 1/999, 1/998, completando desde atrás hacia delante)*
E: Bien el de abajo es igual, pero ahora tú ya lo habrás visto hay que sumarle 500, entonces hay que poner, 1 partido…
A: *(Escribe 1/501, 1/502, 1/503, 1/504 y 1/505)*
E: Y los siguientes, bueno vamos a hacer si quieres el último, el último cuál sería.
A: *(Escribe 1/1000, 1/999, 1/998)*
E: Te lo voy a poner con más decimales para que se vea, a la vista de los resultados, ¿quién tiene mayor cantidad A o B?
A: A.
E: ¿Quién tiene más, o tiene menos o si son los dos iguales?, como tú veas.
A: El B.
E: El B, ¿más?
E: Este empieza en el 1 y termina en este, 1/10 y este empieza en 1 partido… De nuevo, ¿cuántos hay en A más que en B?
A: 500.
E: Pues el de abajo igual, Candela, el primero es que va en adelante, no para, y el segundo igual; vamos a empezar por el primero.
A: *(Escribe 1, ½, 1/3, 1/4)*
E: Vale y aquí puedes poner el que tú quieras.
A: *(Escribe 1/100)*
E: Siguen adelante, y el de abajo igual pero le sumamos 500.
A: *(Escribe 1/501, 1/502, 1/503 y 1/504)*
E: Y este por ejemplo…
A: *(Escribe 1/600)*
E: Muy bien, a la vista de los resultados y atendiendo a dos cosas que hay que tener en cuenta aquí, esto va adelante, como tú has dicho, pero viendo que los números, como ves tú aquí, *(Señala a esos números)*
A: Que van…
E: Disminuyendo, ¿a dónde van a parar?
A: A cero.
E: ¿Y este?
A: Igual.
E: Quién llegará antes a cero, ¿este o este? *(Señala en la pantalla)*
A: ¿Qué?
E: O, ¿llegan los dos en el mismo momento?
A: Llegarían igual.
E: ¿Quién tiene mayor cantidad de números C, D o son iguales?
A: Iguales. *(IV1**3**)*
E: Muy Bien.

4) <u>Alumno:</u> Pa.13,10 Nombre: Paloma Fecha de Nacimiento: 01/07/01

E: Entrevista nº 4 del día 11 de Febrero, con Paloma M. V. de 2º A, ¿qué edad tienes, Paloma?
A: 13.
E: 13 años, muy bien, intenta contestar entonces a las siguientes preguntas. Lee.
E: Sea el conjunto de números desde n=l a n=10, representa cada número en las casillas siguientes.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9, 10)*
E: Muy bien. Vamos a ver el apartado B, ahora es del 1 al 7 pero le sumamos 3, en vez de 1 ponemos…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A o l B o son iguales?
A: A tiene más números.
E: ¿Cuántos números tiene más A que B?
E: 3.
E: Muy bien. Vamos a ver ahora el de abajo, Paloma, ahora no se para en el 10, ahora va en adelante, ¿vale?, del 1 en adelante.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Aquí sigue en adelante, pero no vamos a estar toda la mañana poniendo números, ¿no? Y aquí pon el número que te dé la gana.
A: *(Escribe16)*
E: 16, y aquí hay otra vez puntos suspensivos.
E: Vamos a ver, Estos puntos suspensivos que están aquí van del 4 hasta el 16, ¿vale?, y estos puntos suspensivos van en adelante *(señala la pantalla).* ¿Quién tiene mayor cantidad de números este o este?
A: En adelante tiene más.
E: ¿Hasta qué número? Si tú dices en adelante, ¿a dónde van a parar?
A: Hasta infinito…
E: El de abajo igual, pero ahora hay que sumarle 3, en vez de 1 pongo, en vez de 2…
A: *(Escribe 4, 5, 6 y 7)*
E: Muy bien, sigue adelante y aquí pones el que tú quieras o el correspondiente aquel. *(Lo señala con el cursor)*
A: *(Escribe 23)*
E: Y esto sigue adelante, bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene mayor cantidad de números C, D o los dos son iguales?
A: D.
E: ¿Qué tiene D?
A: Que 23 es mayor número.
E: Hombre, tú has puesto el 23, pero podías haber puesto otro.
A: En verdad los dos son iguales.
E: En verdad los dos son iguales, ¿por qué?
A: Porque los dos al infinito.
E: Del 1 al infinito y del 4 al infinito, ¿los dos son iguales?
A: *(Duda. Asiente con la cabeza) (I1***1***)*

E: Paloma, Nivel 2, este va del 1 al 5000, luego sería…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5)*
E: Y estos son los tres últimos, vamos a poner el último si quieres, el ultimo ¿cuál sería? Del 1 al 5000, sería…
A: 5000 *(escribe 5000, 4999, 4998*)
E: Estos puntos suspensivos que están ahí en medio, son los que están en medio, para no ponerlos todos, bien pues ahora este es lo mismo pero le vamos a sumar 1000, ¿vale? Va a ser del 1 al 4000 y le vamos a sumar 1000, ¿vale?, espera vamos a cambiar *(cambia a otra ficha)* Del 1 al 4500 y hay que sumarle 500, en vez de 1 sería…
A: 501.
A: *(Escribe 502, 503, 504 y 505)*
E: Y ahora estos 3 últimos, es del 1 al 4500, ese es el último, 4500, pero como hay que sumarle 500, el último sería…
A: 5000.
E: Los dos anteriores ya por lógica, ¿cuáles serán?
A: A 4500 le sumamos 500, son 5000 que es el último.
E: Y el anterior de 4500, ¿cuál sería?
A: 4499.
E: Como hay que sumarle 500, quedaría entonces…
A: 4999 y 4998.
E: Bien, a la vista de los resultados ¿Quién tiene mayor números A, B o los dos son iguales?
A: Los dos son iguales
E: Son iguales, ¿el primero dónde empieza?
A: El primero empieza en el 1.
E: ¿Y termina en?
A: En 5000.
E: Y el segundo.
A: En 501 y en termina en el 5000.
A: Entonces el A.
E: Ahora vamos a hacerlo igual, pero que no para, el primero sería…
A: *(Escribe1, 2, 3, 4)*
E: Aquí pones el número que tú quieras.
A: *(Escribe 600)*
E: Vale, perfecto, y sigue adelante; y ahora abajo, igual que el anterior sumándole 500.
A: *(Escribe 501, 502, 503 y 504)*
E: Aquí, si tú quieres, pon el correspondiente a arriba, si quieres.
A: *(Escribe 600)*
E: Sigue adelante y aquí puedo poner, por ejemplo…
A: *(Escribe 700)*
E: A la vista de los resultados ¿Quién tiene mayor número C, D o los dos son iguales?

A: El C, porque empieza en el 1 y termina en infinito y el D como empieza en el 501 tiene menos números. *(II1B)*

*E(*II2*): Vamos a verlo de otra forma, ¿vale?, yo te lo he puesto así. El A y el B. El de abajo te lo he puesto de otra forma, 1, 2, 3; el siguiente sería…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Sigue adelante, puntos suspensivos, 1000, y sigue adelante, yo he puesto 1000 y tú 600. Y abajo estamos sumando 500; 501, 502
A: *(Escribe 503, 504, 505, 506, 507)*
E: Aquí puedes poner el correspondiente arriba, si quieres, o cualquier otro.
A: *(Escribe 2000)*
E: Y sigue adelante, es para que tú lo vieses que está siempre relacionado, puntos suspensivos, aquí del 507, hasta 2000, sigue adelante, aquí del 7 hasta el 1000, sigue adelante, ¿hasta dónde llegan a parar estos dos?
A: Hasta el infinito.
E: Bien, viendo los resultados ahora mismo, ¿quién tiene mayor cantidad C, D o son los dos iguales?
A: El C.
E: El C tiene...
A: Mayor cantidad de números. *(II2B)*
E: ¿Cuántos tiene más C que D?
A: 500.

5) <u>Alumno:</u> Ma.13, 09 Nombre: María Fecha de Nacimiento: 29/08/01

E: Entrevista nº 5 del día 11 de Febrero del 2015, con María M. P. de 2º A, ¿qué edad tienes, María?
A: 13.
E: 13 años, bien. Intenta leer esta pregunta y contestarla, sea el conjunto.
A: ¿Lo pongo ya?
E: Sí, si sabes ponerlo ya.
A: *(Escribe 1, 2, 3 ,4 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: El de abajo, María, es lo mismo que el de arriba.
A: Sí, sumándole 3, ¿no?
E: Vale, en vez de 1 sería…
A: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: Muy bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A o B o tienen los dos iguales?
A: Tienen los dos iguales, ¿no?
E: Sí, ¿el primero cuántos tiene?
A: Pero, ¿cómo de número total o de cada número?
E: De número total, claro. ¿El primero cuántos tiene?
A: El primero tiene 10 números.
E: ¿Y abajo cuántos tiene?
A: 7.
E: 7, ¿cuál tiene mayor?
A: El A.
E: El A. Vamos a ver el C, el C no para ahora en el 10, ¿vale?, sigue en adelante.
Desde el 1 en adelante, tienes que poner aquí.
A: 1, 2, 3, 4.
E: Aquí no que los puntos suspensivos siguen adelante, pon uno cualquiera aquí.
A: El 7.
E: Y esto sigue adelante. Estos puntos suspensivos que están aquí, qué significan entonces.
A: El 5 y el 6.
E: Ahí va, ¿y estos puntos suspensivos de aquí? *(Señala en la pantalla)*
A: 8, 9 y 10.
E: No, que esto sigue adelante.
A. ¡Ah!, bueno del 10 en adelante.
E: Ahí está. Vamos a ver el de abajo, ahora hay que sumarle de nuevo 3, en vez de 1 hay que poner…
A: 4, 5, 6, 7.
E: Vale, y este por ejemplo podemos poner.
A: 9.
E: 9, por ejemplo, y siguen adelante, ¿vale? ¿Hacia dónde seguiría también este?
A: Este seguiría hasta infinito.
E: Sabiendo eso, ¿quién tiene mayor número de números el C, el D o son iguales?
A: Tiene el C.
E: ¿C?
A: Porque en esta raya representa dos números y en esta representa uno. *(I1B)*

*E(*I2*): Vamos a hacerlo de otra forma, este no lo vamos a hacer, pero este sí. *(Señala en la pantalla)* El 1, 2, 3, aquí pondríamos María.
A: 4, 5, 6, 7.
E: Yo he puesto puntos suspensivos, porque si no vamos a estar toda la mañana, he puesto el 100, una bestialidad, entonces hay aquí noventa y tantos números, y en estos puntos suspensivos más todavía, qué hacemos ahora, pues le sumamos 3, en vez de 1 pongo 4, en vez de 2 pongo 5, en vez de 3…
A: Pongo 6, 7, 8, 9, 10.
E: Y en vez de 100 pongo aquí…
A: 103.
E: 103, y aquello seguiría, a la vista de los resultados ¿quién tiene mayor números C, D, o los dos iguales?
A: Los dos iguales.
E: Los dos iguales, ¿por qué?
A: Porque representa la misma cantidad de números. *(I2A)*

*E(*I3*): Vamos a ver si lo ves mejor aquí, igual, ¿vale?, lo he puesto de otra forma distinta, el 1, el 2, el 3, ahí…
A: El 4, el 5, el 6, el 7.
E: Ahora pon un número aquí detrás.
A: El 9.
E: Entonces, aquí en medio, ¿quién estaría?
A: El 8.
E: El 8, ¿no te gustaría poner uno más grande que el 9? Por ejemplo…
A: Vale, el 15.
E: Vale, aquí en medio hay… *(Señala en la pantalla)*, y luego sigue adelante. Bueno, pues ahora le sumamos 3 a cada uno de ellos, en vez de 1 sería…
A: 4, 5, 6.
E: En vez de... ¿Qué hay que poner ahí?
A: 18, ¿no?
E: 18, a la vista de los resultados, ¿quién tiene mayor número, arriba o abajo?
A: Creo que el D, creo.
E: ¿El D qué?, ¿más cantidad, menos cantidad o igual número de ellos? Tú has puesto 18, podías haber puesto otro, igual que el de arriba.
A: Creo que tiene más que C, pero creo que son iguales, pero no sé, del 7 al 15 son 8 casillas.
E: Pero tú no mires las casillas, mira los número, ¿vale?, el de arriba empieza desde, ¿cuándo?
A: Desde el 1.
E: En adelante, ¿verdad?
A: Sí.
E: Y el otro empieza…
A: Desde el 4.
E: En adelante, eso nos vale, ¿no? ¿Quién tiene mayor número, iguales, o uno tiene más que otro?
A: El C.
E: ¿El C, tiene más números?, ¿cuántos números tendría más?
A: No veo, del 7 al 15, ocho números más.
E: Pero es porque tú has puesto el 15, pero puedes poner el 100 también. Este va del 1 en adelante y este va del 4 en adelante.
A: Sí, tienen 3 números más. (*II3B)*

6) <u>Alumno:</u> Lu.15, 04 Nombre: Lucía Fecha de Nacimiento: 28/01/00

E: Entrevista nº 6 del día 11 de Febrero del 2015, con Lucía L. R. de 2º A, ¿qué edad tienes, Lucía?
A: 15.
E: 15 años, muy bien. Lucía, lee la preguntita e intenta contestarla, ¿vale?, en voz alta.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=10, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien, y habría que poner…
A: No entiendo la pregunta.
E: Nada…es del 1 al 10, ¿vale?, entonces aquí hay que poner el número 1.
A: *(Escribe 1, 2, 3 ,4 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Es fácil, ¿no, Lucía? Ahora el de abajo no es del 1 al 10, es del 1 al 7, pero le sumamos 3, entonces, en vez de 1 pongo aquí 4, muy bien, en vez de 2, en vez de 3…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Muy bien, fácil también, ¿no?, a la vista de los resultados, ¿quién tiene mayor cantidad de números A, B o los dos iguales?
A: Tienen las mismas cantidades.
E: Sí, ¿el primero cuántos tiene? Empieza desde el 1 y termina.
A: En el 10.
E: ¿Y el otro empieza?
A: En el 4.
E: ¿Y termina?
A: En el 10.
E: ¿Iguales?
A: No.
E: ¿Quién tiene mayor cantidad de números?
A: El primero.
E: El primero, ¿cuántos números tiene más el primero que el segundo?
A: El primero tiene tres números más.
E: Claro tres números más, bien Lucía. Ahora vamos a ver este, es en adelante, no para en el 10, ¿vale?, entonces habría que poner el 1.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Aquí los puntos suspensivos para no estar toda la mañana poniendo, y aquí pon el que tú quieras.
A: 62.
E: Por ejemplo, y sigue adelante. Esto significa, Lucía, que estos puntos suspensivos son del 4 hasta el 62, y estos puntos suspensivos, ¿a dónde iría a parar?
A: Hasta el infinito.
E: Ahí va, ¿qué hay más cantidad de números aquí o aquí? *(señala en la pantalla)*
A: En la derecha.
E: En la derecha, ¿verdad? Bueno pues ahora sumamos 3, en vez de 1 pongo…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Vale, y sigue adelante, y en vez de 62 ponemos.
A: 65.
E: Muy bien y esto sigue adelante, ¿vale?, bien, a la vista de los resultados, que esto sigue adelante, no es como el anterior que se paraba, ¿quién tiene mayor número de números el C, el D o los dos son iguales?

A: La C. *(I1B)*
E: La C tiene más, ¿cuántos números más?
A: Tres más.

*E(*I2*): Vamos a verlo, te lo he puesto mejor, he puesto el 1, 2, 3, sigue tú Lucía.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Yo te he puesto un número más grande, el 100, ¿vale? entonces hay aquí noventa y tantos números, y esto sigue adelante sin parar, el de abajo 4, 5…vamos sumando 3.
A: *(Escribe 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y en vez de 100 pondríamos…
A: 103.
E: 1, 4; 2, 5; 3, 6; ¿quién tiene mayor cantidad de números C, D o los dos iguales?..... Dime lo que estás pensando, Lucía.
A: Es que para mí son iguales, es que no sé.
E: Son iguales. Vamos a poner otra situación, muy parecida a la anterior, ¿vale?, arriba no la vamos a hacer; 1, 2, 3.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Este pon el número que tú quieras.
A: *(Escribe 20)*
E: 20, vale, entonces hay aquí unos 17 números y aquí mucho más. Y aquí abajo igual, ahora vamos a sumarle 3, en vez de 1 pongo…
A: *(Escribe 4, 5, 6)*
E: Y aquí pon el que tú quieras, si quieres poner…
A: 23.
E: Bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene mayor cantidad de número, el C o el D o son los dos iguales?
A: Arriba he puesto más números. *(I2B)*
E: Hay más números, ¿cuánto más hay arriba que abajo?
A: Tres más.

7) <u>Alumno:</u> Al.13, 06 Nombre: Alba Fecha de Nacimiento: 16/09/01

E: Entrevista nº 2 del día 11 de Febrero del 2015, con Alba C. B. de 2º A, ¿qué edad tienes, Alba?
A: 13.
E: 13 años, muy bien. Alba, muy fácil, lee la preguntita y contesta.
A: ¿En voz alta?
E: En voz alta si puede ser.
A: Sea el conjunto de números desde n1 a n10, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Bien, vamos a la casilla.
A: *(Escribe 1, 2, 3,… hasta 10)*
E: Muy bien, ahora en la segunda es muy parecida a la anterior, pero ahora hay que sumarle 3, lo mismo que el anterior pero sumándole 3, 1 más 3
A: Empieza en 1, ¿no?, 4.
E: 2 más 3.
A: 5, 3 más 3, 6; 4 más 3, 7, 8, 9 y 10
E: ¿Quién tiene más cantidad de números el A, el B o son iguales?
A: El A.
E: El A, ¿cuántos números más tiene A que B?
A: 3.
E: 3 Muy bien, vamos ahora al apartado C y D. Es lo mismo que el anterior, pero en este caso, Alba, siguen en adelante, no hay ningún corte, ¿vale? 1 en adelante, sería…
A: 1, 2, 3, 4.
E: Sí, no vamos a estar toda la mañana, esto sigue, y pon el número que tú quieras.
A. *(Escribe 500)*
E: Muy bien, y esto sigue adelante, ¿vale? Alba, ¿estos puntos suspensivos, son los mismos que estos puntos suspensivos? *(Señala en la pantalla)*
A: No.
E: No, estos puntos suspensivos, ¿tienen más o menos números que estos? *(Señala en la pantalla)*
A: Menos, porque el otro puede ser hasta infinito, ¿no?
E: Hasta el infinito, tú has puesto aquí 500, del 4 hasta el 500. Vamos a ver ahora, es lo mismo que el anterior, le vamos a ir sumando 3, ¿vale? el primero sería…
A: 4, 5, 6, 7.
E: Seguimos adelante, aquí podemos poner…
A: *(Escribe 504)*
E: Has puesto uno muy parecido al de arriba, no tiene por qué, en fin, tú quieres poner el de arriba, y sigue adelante. ¿Hasta dónde llegaría entonces esto?
A: Hasta el infinito.
E: ¿Quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?, sabiendo que eso llega ¿hasta…?
A: El C, ¿no?
E: ¿El C?
A: No, el D.
E: El D, ¿tiene más? ¿Son iguales, uno tiene más que otro?
A: Son iguales.
E: Son iguales, ¿por qué?
A: Porque el primero es del 1 al 500.
E: No, no, es al 500, hay que tener cuidado.
A: Porque, entonces el primero, es mayor el C. *(I1B)*
E: ¿Sí? ¿Es mayor?
A: Porque empieza desde el 1 y no desde el 4.

E: Vale, aunque se vayan a infinito.
A: Sí.

*E(*I2*): A ver si lo ves mejor de esta forma. Yo te lo he puesto de otra forma distinta, a ver si lo ves, ¿vale? El primero no lo vamos a hacer, porque lo has hecho bien, el siguiente sería, bueno pues hemos puesto aquí el 1, el 2, el 3, sigue tú, Alba.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Sigue adelante, yo he puesto aquí 100, esto sigue adelante, no para. Y abajo te he puesto el 4, el 5, te voy a poner el 6.
A: *(Escribe 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Aquello seguiría, para eso he puesto los puntos suspensivos y aquí podríamos poner nosotros…
A: *(Escribe 100)*
E: 100 también si quieres, a este le correspondería uno que esté por aquí, ¿no?, para que haya correspondencia, ¿vale? Mira la correspondencia que hay, viendo los resultados ahora, ¿tiene la misma cantidad C que D, son iguales, tiene uno más que otro?
A: El C tiene más. *(I2B)*
E: Aun así, llegando hasta infinito, ¿tiene más C?
A: Sí.

8) <u>Alumno:</u> Ma.14, 03 Nombre: Manuel Fecha de Nacimiento: 13/02/01

E: Entrevista nº 7 del día 11 de Febrero de 2015, con Manuel B. R. de 2ºB, ¿qué edad tienes, Manuel?
A: 14 ¡eh!…, bueno, 13.
E: 13, Manuel, muy bien, entonces ve leyendo la pregunta y contestándola, ¿vale?, léela en voz alta.
A: Sea el conjunto de números desde n= 1 a n=10, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Vale, entonces aquí habría que poner…
A: ¡Eh!…, es que no…
E: Del 1 al 10 y hay que ponerlo en las casillas, luego…
A: Pero en el orden que yo quiera.
E: No, en el orden que establece, del 1 al 10
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Vale, vamos a ver el segundo de este ejercicio, el apartado B.
A: Sea el conjunto de números desde n 1 a n igual a 7, a cada número le sumamos 3, representa ahora n +3 en las casillas.
E: En vez de 1 le sumo 3, quedaría entonces…
A: 4
E: En vez de 2…
A: ¡Eh!, sería 5.
E: De 3…
A: 6, 7, 8, 9 y 10.
E: Vale, como el último es 7 más 3, 10. Bien, a la vista de los resultados ¿tiene la misma cantidad de números A que B?
A: …, no porque el B empieza desde el 4.
E: Y termina…
A: En 10, pero el A empieza desde el 1 y termina en el 10.
E: ¿Cuál tiene entonces más A o B?
A: A tiene más números, más cantidad no, pero más números si tiene.
E: Más números tienen, ¿verdad? Bien vamos a ver ahora el apartado C.
A: Sea el conjunto de números desde n= 1 en adelante, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Vale, ahora no para, ¿eh?, no es como el anterior que paraba en el 10, entonces aquí hay que poner…
A: Desde el 1 en adelante, 1, 2, 3 ,4.
E: He puesto puntos suspensivos, ¿esto qué significa Manuel?
A: Que siga.
E: Que siga, para no tener que estar copiando. Y aquí pon tú el número que tú quieras.
A: *(Escribe 10)*
E: Entonces estos puntos suspensivos, según tú, representan desde el 4 hasta el 10, ¿vale?, pero esto sigue adelante, puntos suspensivos, ¿Qué hay más números, aquí o aquí? *(señalando a los puntos suspensivos a ambos lados del 10)*
A: ¡Eh!…, depende porque si termino en el…
E: Pero esto no termina en el 15, ni en el 20, ni en el 100.
A: Entonces hay más números…
E: En la derecha ¿verdad?
A: Sí.
E: Date cuenta que significa en adelante, significa que no para.
A: Entonces no para…
E: No para, ¿a dónde iría?
A: En la derecha hay más números que en la…
E: ¿A dónde iría a parar?
A: Infinito.
E: Vamos a ver el de abajo. Lo mismo que el anterior, le vamos a ir sumándole 3, en vez de 1 pongo…
A: 4.
E: En vez de 2…
A: 5.
E: En vez de 3…
A: 6.
E: En vez de 4…
A: 7.
E: En vez de 10, por ejemplo…

A: En vez de 10, ponemos 13.
E: Vale, y así sucesivamente, ¿vale?, sin parar tampoco, a la vista de los resultados ¿quién tiene mayor número C o D?, si vemos que esto no para.
A: Si no para ninguno de los dos, C tendría más… ¿pero más cantidad de números?
E: Sí.
A: C porque, aunque los dos siguieran, este ya ha empezado desde el 1. *(I1B)*

*E(*I2*): Vamos a verlo de otra forma, ¿eh?, este ya tiene puesto el 1, el 2, el 3, sigue tú.
A: El 4, el 5, el 6, el 7, el 8, el 9 y el 10.
E: Bien, abajo hay que sumarle 3, por lo cual del 1, 4, del 2, 5, del 3…
A: 6, 7, 8, 9 y 10.
E: Y has dicho tú que este tiene más cantidad que este, en concreto porque faltan 3 y los has dicho bien. Vamos a ver el de abajo, igual ¿vale?, Manuel, hemos puesto el 1, el 2, el 3, sigue tú…
A: El 4, el 5, el 6, el 7.
E: Vale, estos pongo puntos suspensivos, pero yo he sido un poquito más bestia que tú, yo he puesto 100, ¿vale?, significa que aquí hay noventa y tantos números, y eso sigue adelante. Y ahora he puesto la relación. Si es 1, 4, si es 2, 5, si es 3 es…
A: 6.
E: Si es 4…
A: 7.
E: Si es 5…
A: 8.
E: Si es 6…
A: 9.
E: Si es 7…
A: 10.
E: Y si es 100…
A: Si es 100, 103 ¿no?
E: 103, y eso seguiría, ¿vale?, ¿quién tiene mayor cantidad de números C, D o los dos son iguales?
A: Los dos son iguales.
E: Los dos son iguales. Vamos a ver ahora en esta situación, te lo he puesto diferente a ver como continuamos, el 1, el 2, el 3…
A: El 4, el 5, el 6, el 7, el 8, el 9 y el 10.
E: Muy bien, y aquí abajo pues te lo he puesto de otra forma, te los he puesto en vez de al principio al final, si te parece bien.
A: Vale.
E: Y aquí sería.
A: Le sumamos 3, ¿no?, vale, el 7.
E: No, pero sigo con el primero.
A: ¡Ah!, le sumamos…
E: Sí, lo que pasa es que cambia el orden, sería…
A: El 4, el 5, el 6, el 7, el 8, el 9 y el 10.
E: Vale, ¿quién tiene mayor cantidad de números?
A: El A.
E: El A, aunque yo lo haya puesto para la derecha, antes estaban a la izquierda, pero da igual ¿no, Manu?
A: Sí.
E: Ahí va, vamos a ver el de abajo, 1, 2, 3, ahora…
A: El 4, el 5, el 6, el 7.
E: Sigo adelante y aquí pon el número que tú quieras.
A: *(Escribe 100)*
E: Bueno, has puesto otra vez 100, podrías haber cogido otro cualquiera ¿vale?, y sigue adelante ¿vale?, ahora lo he puesto de otra forma, a ver como lo ves tú ahora, en vez de 1 sería…
A: 4.
E: En vez de 2…
A: 5.
E: En vez de 3…
A: 6.
E: En vez de por ejemplo 100…
A: *(Escribe 103)*
E: Ahí va, ¿quién tiene mayor cantidad de números el C o el D?
A: El C. *(I2B)*
E: ¿El C?
A: Sí, porque empieza desde el 1.
E: El 1. Vale, está muy bien.

9) <u>Alumno:</u> Se.14,02 Nombre: Sergio Fecha de Nacimiento: 20/03/01

E: Entrevista nº 9 del día 11 de Febrero de 2015, con Sergio R. G. de 2ºB, ¿qué edad tienes, Sergio?
A: 13 años.
E: 13 años, muy bien Sergio, lee el apartado A y contesta.
A: Sea el conjunto de números desde n= 1 a n=10, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Bien, entonces aquí habría que poner…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Vale, es fácil, ¿no, Sergio?, el segundo ya es algo diferente, léelo.
A: Sea el conjunto de números desde n= 1 a n=7, a cada número le sumamos 3, representa ahora n más 3 en las casillas.
E: En vez de 1 le sumamos 3, sería…
A: 4.
E: En vez de 2…
A: 5.

E: De 3…
A: 6.
E: De 4…
A: 7.
E: De 5…
A: 8.
E: De 6…
A: 9.
E: Y en vez de 7…
A: *(Escribe 10)*
E: ¿Quién tiene mayor cantidad de números A, o B o son los dos iguales?
A: Uhm… de A hay más cantidad, porque en uno hay 10 y en otro hay 7, aunque terminen en 10.
E: Claro, aunque terminen en 10, pero aquí faltan, ¿no?
A: Del 1 al 3.
E: Bien, vamos a ver el C, Sergio, la diferencia que hay aquí es la siguiente, léelo.
A: Sea el conjunto de números desde n= 1 en adelante, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Me gustaría que tú me dijeras que para ti qué entiendes, en adelante.
A: En los siguientes.
E: En los siguientes, ¿vale?, entonces pondríamos aquí…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Pongo puntos suspensivos, no vamos a estar toda la mañana, ¿verdad?, no vamos a poner todos los números, por eso pongo puntos suspensivos.
A: ¡Ah!, vale.
E: Y aquí pon el que tú quieras, por ejemplo…
A: 25.
E: 25, vale, es decir que en los puntos suspensivos estos que están aquí corresponden desde el 5 hasta el 24, ¿cierto?
A: Sí, ¿cómo si estuviera toda la serie, no?
E: Claro, ¿y estos puntos suspensivos?
A: Hasta el infinito.
E: Hasta el infinito. ¿Dónde hay más números en estos puntos suspensivos o en estos?
A: En los de la derecha porque hay infinitos.
E: Claro, bien vamos a ver ahora el D, lo mismo que en el anterior, le vamos sumando 3, en vez de 1 sería…
A: 4.
E: Y en vez de 2…
A: *(Escribe 5)*
E: En vez de 3…
A: *(Escribe 6)*
E: En vez de 4…
A: *(Escribe 7)*
E: Aquí habría que seguir, ¡uh, uh, uh, uh! y aquí en vez de 25…
A: *(Escribe 28)*
E: Vale, y seguiría… ¿vale?, a la vista de los resultados ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: ¿Quién tiene menor cantidad?
E: No, ¿tienen la misma cantidad o uno tiene más que otro?
A: Tienen la misma cantidad, ¿no?
E: Tienen la misma cantidad.
A: Son cuatro números y… hasta el 25.
E: No, hasta el 25 no, esto sigue en adelante hemos dicho al principio.
A: ¿Qué sería desde el 1 hasta el infinito?
E: Ahí va.
A: *(Duda)* Pues entonces creo que es igual. *(I1**1**)*
E: Muy bien.

*E(*II1*): Nivel 2, lee la pregunta Sergio.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 al n=5000, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Vale, antes era hasta el 10, ahora al 5000, entonces habría que poner aquí…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5)*
E: Bien, aquí habría que poner *(Señala con el cursor)* y estos serían los tres últimos, así que el último sería…
A: 5000.
E: Y el anterior.
A: 4499.
E: Y el anterior del anterior.
A: 4998.
E: Y los puntos suspensivos, pues irían del 6 al 4997, ¿cierto?
A: Sí.
E: Vale, y ahora es lo mismo que el anterior, pero desde el 1 hasta 4500 y le vas sumando 500, en vez de 1 es…
A: 501.
E: En vez de 2…
A: 502.
E: 3…
A: *(Escribe 503)*
E: 4…
A: *(Escribe 504)*
E: 5…
A: *(Escribe 505)*
E: Bien y ahora los tres últimos, a ver si tú sabes hacerlo, porque claro el último es 4500 si se le sumas 500, sería entonces…
A: ¿El último tiene que ser 4500?
E: No el último es 4500 más 500, con lo cual sería…
A: *(Escribe 5000)*
E: Eso es, los dos anteriores entonces. ¿Cuál serían?
A: Lo mismo porque…, *(escribe 4999 y 4998)*

E: Perfecto, ¿vale?, a la vista de los resultados, ¿Quién tiene mayor cantidad de números A, B o son iguales?
A: Son iguales.
E: ¿Son iguales?, ¿el primero empieza…?
A: Desde el 1 hasta el 5000 y el B va del 501 hasta el 5000, entonces no…
E: ¿…? Tienen un principio y un final ¿no?, ¿Quién tiene entonces más A o B?
A: A porque va desde el 1.
E: Ahí va, ¿cuántos más crees tú?
A: ¡Hum!…, 4500.
E: No,…, ¿Cuántos más?
A: … ¿2500?
E: Si uno empieza en 1 y termina en 5000 y el otro empieza en 501 y termina en 5000…
A: 500 más.
E: Vale, muy bien, vamos a hacer los otros dos, igual que el anterior, esto es igual, del 1 en adelante sin parar, sin final, ¿vale?, entonces tienes que poner aquí…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Aquí puntos suspensivos, y aquí por ejemplo…
A: 30.
E: Perfecto, sigue en adelante. Y el otro hay que sumarle 500, lo mismo que el anterior, luego en vez de 1…
A: 501.
E: Si es 2…
A: 502.
E: Si es 3…
A: 503.
E: Si es 4…
A: 504.
E: Y ahora sigue adelante y según la correspondencia, si es 30…
A: 530.
E: Sigue en adelante, bien, a la vista de los resultados ¿Quién tiene más C, D o son iguales?
A: Tienen los mismos porque uno empieza en 1 y termina en 30…
E: No, no, no.
A: ¡Ah!, terminan en infinito y entonces son iguales.
E: Son iguales, ¿seguro?
A: Sí, porque terminan en infinito… ¡hum!…, pero uno empieza desde 1 y otro desde 500 así que no son iguales. *(II1B)*

*E(*II2*): Vamos a ver si lo podemos ver de otra manera, mira vas a ver la correspondencia, el de arriba lo hemos hecho bien, mentalmente lo has hecho bien, del 1, 501, 2, 502, 3, ¿cuánto?
A: 503.
E: Aquí vamos a seguir, 3…
A: 4, 5, 6.
E: Y tú lo has hecho bien, 4998, 4999 y el último…
A: *(Escribe 4998, 4999, 5000)*
E: Y los que corresponden ¿…? Hay que sumarle 500, para 4…
A: *(Completa con 504, 505, 506)*
E: Y estos ya eran los mismos, 4998…
A: Sí, porque era sumarle a 4500…
E: Sí, 4998, 4999 y finalmente…
A: *(Escribe 4998, 4999, 5000)*
E: Y tú me has dicho que sí, que este tiene más que este, 500 más, sobre todo porque tienen un principio y un final ¿vale?, y el principio de este es 1 y este 501. Vamos a verlo ahora con este, que tiene un principio, pero no tiene un final, entonces sería 1, 2, 3, sigue tú.
A: 4, 5, 6, 7.
E: Yo te he puesto un número más bestia, ¿vale, Sergio?, 1000, ¿vale?, pero eso sigue adelante, seguiría sin parar, entonces 1, 501; 2, 502; 3…
A: *(Completa con 503, 504, 505, 506, 507)*
E: Y hay ahí todos los de en medio, ¡uh, uh, uh!, y para el 1000.
A: *(Escribe 1500)*
E: Eso es, el suyo correspondiente, y esto no para, tiene un principio, pero no para ¿quién tiene mayor cantidad de números C o D o son iguales?
A: No son iguales, porque uno empieza desde el 1 y termina en el infinito pero otro en vez de empezar en el 1 empieza en el 501. *(II2B)*
E: Y por empezar en 501, aun no terminar…
A: Sí, tiene 500 números más.
E: Muy bien.

10) <u>Alumno:</u> La.14,03 Nombre: Laura Fecha de Nacimiento: 10/02/01

E: Entrevista nº 10 del día 11 de Febrero de 2015, con Laura R. G. de 2ºB, ¿Laura, qué años tienes?
A: Yo, 14 años.
E: 14 años, muy bien.
A: Ayer los cumplí.
E: Muy cercano a mi cumpleaños, el día 9, bueno pues, felicidades.
A: Gracias, igualmente.
E: Empecemos entonces el apartado A, ¿vale?, léelo, dice sea el conjunto…
A: Sea el conjunto de números desde nº 1 a nº 10, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien, vale, entonces aquí tienes que poner…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Vale, es fácil, ¿no?
A: Sí.

E: Muy bien, vamos a ver el siguiente, sea el conjunto... desde 1 hasta 7 ahora.
A: A cada número le sumamos 3, representa ahora nº +3 en las casillas.
E: Vale, en vez de poner 1 pongo ahora…
A: 3.
E: 1 más 3.
A: 4.
E: En vez de 2…
A: 5. *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Muy bien, la pregunta es sencilla ¿quién tiene más números arriba o abajo o tienen igual?
A: Arriba.
E: ¿Cuántos más tiene arriba?
A: Pues 3.
E: Muy bien, vamos a ir ahora al apartado C y D, ¿vale?, hay diferencia, léelo.
A: Sea el conjunto de números desde nº 1 en adelante, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien, en este caso ahora, como ves tú Laura, no se para, ¿eh?, no se paran en el 10, sino que sigue adelante, ¿vale?, entonces, aquí pondríamos de nuevo 1…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: No vamos a estar toda la vida, ¿no?, por eso he puesto puntos suspensivos, ¿vale?, aquí puedes poner tú el que tú quieras.
A: *(Escribe 10)*
E: 10, por ejemplo, y sigue adelante ¿vale?, mira quiero que veas una cosa, estos puntos suspensivos ¿son los mismos que estos puntos suspensivos?
A: No.
E: ¿Quién tiene más, estos o estos?
A: Estos de aquí, los de la izquierda
E: ¿Estos?, ¿por qué?
A: No sé.
E: Estos suspensivos ¿qué números ocultan?
A: ¡Ah!, pues el 5, 6, 7, 8 y 9.
E: Porque tú has puesto el 10, si tú hubieras puesto el 100 pues serían un poquito más, ¿vale?, y estos puntos que están aquí.
A: Infinito.
E: Sería infinito claro, aunque tú hayas puesto aquí un número grande, si tú pones 1000, ¿no?
A: Entonces los otros serían más grandes.
E: Bien, pues ahora vas a hacer lo mismo otra vez, Laura, en vez de poner 1, ahora hay que sumarle de nuevo 3, ¿vale?
A: 4, 5, 6 y 7.
E: Sigue adelante, porque esto habría que seguir, pero no vamos a estar aquí toda la mañana.
A: ¿Pongo otra vez el 10?
E: Y el 10, en vez del 10, si quieres, pon el correspondiente al 10 o el que tú quieras.
A: Pongo el 15.
E: Entonces si es el 15, le correspondería uno que estuviese por aquí, ¿no?, sería el 12 más 3, 15 ¿no?, bueno pues estos siguen en adelante. Entonces la pregunta es la siguiente ¿tienen la misma cantidad de números C que D, o tienen igual?
A: No, el D tiene más.
E: ¿El D tiene más?, ¿porqué?
A: …No,… del 7 al 15 y después el…, bueno tendría lo mismo ¿no?
E: Tú piensas…, pero tú piensas desde el principio, ¿eh?, esto va del 1 en adelante.
A: Pero, ¿los puntos suspensivos?
E: Si los puntos suspensivos también son, todos, tú tienes que ver todo el conjunto ¿vale?
A: Hay uno más, ¿no?, el C.
E: El C ¿qué pasa?
A: Que tiene más que el D.
E: ¿Por qué?
A: Porque es del 1 al infinito y el otro es del 4 en adelante. *(I1B)*

*E(*I2*): Vamos a ver si lo podemos ver de otra forma. Te lo pongo de otra forma igual ¿vale?, te lo he puesto así en parejas ¿vale?, en el primero era fácil, era del 1 al 10 ¿vale?, o sea 1, 2, 3, sigue tú.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y el otro había que sumarle 3 ¿vale?, para 1, 4, para 2, 5, para 3…
A: *(Escribe 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Lo que quiero es que te fijes en esto, y entonces tú dijiste que el de arriba tenía más cantidad de números que aquí, en concreto pues 3 más, ¿vale? El de abajo vamos a hacer lo mismo, es decir, sería… uno de ellos era del 1 en adelante 1, 2, 3…
A: (Escribe 4, 5, 6, 7)
E: Bien, estos puntos suspensivos, te he puesto un número más grande, 100, con lo cual aquí hay noventa y tantos números y esto sigue en adelante, sin parar, ¿vale?
Vamos a ver ahora, si es 1 le pongo 4, si es 2 le pongo 5, si es 3…
A: *(Escribe 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y 100 le corresponderá, si estamos sumando 3…
A: Pues 103.
E: 103, te los he puesto para que se vean parejos, ¿vale?, entonces todos estos puntos suspensivos van parejos y todos estos puntos suspensivos se van parejos, y aquí hay un inicio, pero no hay un final, aquí hay un inicio y hay un final, ¿vale?
A: Que en el otro no lo hay.
E: Ahí va, entonces ahora viendo el tema este ¿quién tiene más cantidad de números C o D o son iguales?
A: El D.
E: El D, ¿qué?
A: Tiene tres números más.
E: ¿Tres números más?, ¿qué tres números más?

A: ¡Ah!, no, porque siguen los dos hacia adelante.
E: Siguen adelante, ¿no?, ¿entonces?
A: Tienen los mismos. *(I2A)*
E: Tienen los mismos números.

*E(I3): Vale vamos a mirarlo de otra forma, ahora te lo voy a poner un poquito más complicadito, ¿eh? Un poquito más desordenado 1, 2, 3.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y este había que sumarle 1, ¿vale?, te lo he puesto un poquito más lioso, a este en vez de 1 habría que sumarle 3, ¿serían aquí?
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: ¿Cambiaría tu situación decir cuál de los dos tiene más?
A: No, si ya sé que los 3 más es…
E: Da igual, ¿no?, que esté a la derecha, que esté a la izquierda, que esté para arriba que para abajo, está claro, ¿no?, vale. Vamos a ver el de abajo, igual, 1, 2, 3, ¿pondrías tú?
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Este por ejemplo.
A: 100.
E: 100, vale. Y este te lo he puesto así, en vez de 1 sería en este caso…
A: 4.
E: Y en vez de 2 sería…
A: 5.
E: Y 3 sería 6, y aquí…
A: 103.
E: 103, esto significa que todo lo que…, que has hecho más, todo esto, debería estar aquí, y todo esto empezando por aquí, está aquí, pero claro lo importante es que esto no para…
A: Continúa.
E: Y aquello sigue en adelante, esto no, no es que yo diga aquí se ha parado, no, tienes que tener cuidado con eso.
A: Tienen los mismos números. *(I3A)*
E: Tienen los mismos números, ¿vale?

*E(*I1'*): Variamos un poco el origen, para ponerlo yo aquí, ¿vale?, ahora te voy a quitar en vez de 3,¿eh?, te voy a quitar 6, entonces el primero sería,… esto es otra vez lo mismo, para no aburrirnos.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Ahora es del 1 al 4 y hay que sumarle 6, en vez de 1 sería…
A: 7.
E: En vez de 2…
A: 8.
E: En vez de 3…
A: 9.
E: Y en vez de 4…
A: 10.
E: Y ya no puedo poner más, ¿no?, date cuenta que es del 1 al 4, o sea, que esto queda incompleto, ¿vale?, ¿quién tiene más arriba o abajo?
A: Arriba.
E: Arriba, no es lo mismo, en concreto…
A: 6 más.
E: 6 más, claro. Bueno vamos a ver ahora aquí, ¿eh?, este igual, del 1 en adelante.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Ahora sigue en adelante y ahora ponemos.
A: *(Escribe 100)*
E: Por ejemplo el 100, te ha gustado el 100, ¿vale?, sigue en adelante, ¿vale Laura?, entonces ahora otra vez lo mismo, pero sumándole 6, entonces en vez de 1 sería…
A: *(Escribe 7, 8, 9, 10)*
E: En vez de 100 sería…
A: 106.
E: 106, que sería el correspondiente y todos los demás están aquí. ¿Quién tiene más el C…?
A: Lo mismo, misma cantidad. *(I1'**4**)*

*E(*II1*): Ficha Nivel 2, situación 1, venga Laura léeme de nuevo, ahora el apartado A.
A: Sea el conjunto de números desde nº1 al nº 5000, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Vale entonces sería…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5)*
E: Seguiría, ¿no?, no vamos a poner todos estos, y ahora los tres últimos, ¿cuáles serían?
A: Pues…
E: Empieza por el último, es más fácil.
A: *(Escribe 5000)*
E: Perfecto, y el anterior…
A: *(Escribe 4499 y 4998)*
E: Por eso, entiendes tú los puntos suspensivos ¿no?, de una forma más cómoda para no estar…, si no vamos a estar aquí haciendo el tonto vamos. Bueno pues ahora mira la de abajo es del 1 al 4500 y le vamos sumando 500, ¿vale?, entonces en vez de poner 1 pongo…
A: 501.
E: En vez de 2…
A: *(Escribe 502, 503, 504, 505)*
E: Bien, y ahora vamos a ver los 3 últimos que hay confusión, ¿vale?, mira el último es 4500, si le sumas 500 sería entonces…
A: 5000.
E: Entonces los dos anteriores, ¿cuáles serían entonces?
A: 4999.
E: ¿Y el anterior?
A: *(Escribe 4998)*
E: Perfecto, ¿vale?, bien a la vista de los resultados, ¿cuál tiene mayor número, arriba o abajo?
A: El mismo.
E: ¿El mismo?, piensa un poquito, este va del 1…
A: Bueno…, el de arriba.

E: El de arriba, ten cuidado que aquí hay un inicio y un final, ¿vale?, o sea, que…, vamos a ver el de abajo, bien este del 1 en adelante, entonces sería…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Sigue adelante, y ahora aquí pon el que te dé la gana.
A: ¡Eh!, 5000.
E: Muy bien, vamos, un número importante, y sigue adelante muy bien. Ahora lo que vamos a hacer es lo mismo que en el anterior, ahora le sumamos, va de 1 en adelante y hay que representar, hay que sumar 500, en vez de 1 sería…
A: *(Escribe 501, 502, 503, 504)*
E: Sigue en adelante, el correspondiente aquí sería…
A: *(Escribe 5500)*
E: Y sigue en adelante, muy bien, este empieza en uno y termina…, no termina, este empieza en 500 y no termina, ¿cuál de los dos tiene más cantidad de números arriba, abajo o iguales?
A: Iguales, ¿no?
E: Iguales.
A: Porque siguen sin terminar. *(II1**3**)*
E: Siguen sin terminar.

*E(*III1*): Ficha Nivel 3, situación 1, apartado A
A: Sea el conjunto de números desde nº 1 a nº 10. A cada número le correspondemos su inversa, es decir 1/n. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Y habría que poner…, 1 partido 1, el mismo ya te lo hace, no te preocupes
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10)*
E: *(Modifica la resolución de la última casilla)* Abajo, lee.
A: Sea el conjunto de números desde nº 1 a nº 7. A cada elemento le correspondemos su inversa más 3, es decir, representa 1/n+3 ahora esos números en las casillas siguientes.
E: Sería entonces…
A: *(escribe ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10)*
E: Bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene mayor número, arriba o abajo?
A: Arriba.
E: Arriba, ¿vale?, ahora, la diferencia que yo estoy viendo, Laura, es ¿qué está pasando con los numeritos ahora?
A: Que se van haciendo más pequeños.
E: Se van haciendo más pequeños y han llegado hasta 0,10 y aquí igual, ¿vale?
Vamos a ver ahora aquí, bien lo mismo del 1 en adelante, ¿vale?, en este caso sería…
A: Lo mismo. *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼)*
E: Y aquí seguiría, y aquí, por ejemplo, pon el que tú quieras.
A: *(Escribe 1/10)*
E: Ahora el de abajo, ¿vale?
A: ¿Lo mismo?
E: Lo mismo, pero del 1 al 7, perdón aquí es en adelante de nuevo ¿vale?, entonces hay que ir sumándole 7 ¿vale?
A: Sumándole 3.
E: Hay que sumarle 3, perdón. Sería 1 partido…
A: *(Escribe ¼, 1/5, 1/6, 1/7)*
E: Y aquí por ejemplo…
A: Si le tengo que sumar 3. *(Escribe 1/13)*
E: Bien, quiero que pienses un poquito, porque va disminuyendo 1, 0.5, 0.3,… dónde crees tú que iría estos… y ¿a dónde se dirige Laura?
A: Hasta 0.
E: Y el de abajo, pues, lo mismo otra vez ¿no?, es decir los dos parece ser que lo último sería llegar a 0. Muy bien, a la vista de los resultados ¿quién tiene mayor número, arriba o abajo?
A: Abajo.
E: Abajo, ¿por qué?
A: Porque le falta menos para llegar a 0, no sé.
E: Pero esto sigue en adelante, ¿no?
A: Entonces misma cantidad. Es que hay los mismos números. *(III1**4**)*
E: Hay los mismos números, ¿vale?
A: Vale.

*E(*IV1*): Mira, esto otra vez lo mismo, ¿vale?, ficha Nivel 4, sea el conjunto de números del 1 al 1000 y a cada uno le corresponde la inversa, ¿vale?, entonces hay que ir poniendo y ahora sería…
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼, 1/5)*
E: Y ahora los tres últimos, ¿cuáles serían?, ten en cuenta que estamos poniendo 1000, si quieres empezar por el último, el último sería…
A: *(Escribe 1/1000)*
E: Y el anterior…
A: *(Escribe 1/999 y 1/998)*
E: Bien, y los otros igual, es muy parecido al que hemos hecho anteriormente, pero es 1/n+500, ¿vale?, entonces el primero sería 1 partido…
A: *(Escribe 1/501, 1/502, 1/503, 1/504, 1/505)*
E: Y los tres últimos, ¿cuáles serían entonces?, ¿hacemos el último?
A: Venga.
E: Venga, el último sería…
A: ¿Hasta cuál?
E: Pues tendría que ser hasta 500, si le sumamos 500, uno partido…
A: Uno partido de…
E: 1000, ¿no?
A: *(Escribe 1/1000)*
E: Y el anterior sería, uno partido…
A: *(Escribe 1/999)*
E: Perfecto y el anterior, uno partido…
A: *(Escribe 1/998)*

E: Te los voy a poner con más decimales, para que tú veas que también van a pasar cosas raras, también se va disminuyendo, se va haciendo cada vez más pequeño, más pequeño,.. ¿Quién tiene mayor número, arriba o abajo?
A: Arriba.
E: Bien, ¿vale?, vamos para abajo, igual, en adelante 1/n, ¿vale?, sería entonces el primero uno partido…
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼)*
E: Sigue adelante y aquí por ejemplo puedes poner…
A: *(Escribe 1/100)*
E: Vale, vamos a ver ahora, ahora es lo mismo, pero sumándole 500, entonces en vez de poner 1 habría que poner…
A: Partido de 501. *(Escribe 1/501, 1/502, 1/503, 1/504)*
E: Y en vez de poner por ejemplo el 100 que pusiste aquí, sería uno partido…
A: *(Escribe 1/600)*
E: Ahí va, te los tengo que poner también para que se vea que está pasando *(cambia el número de decimales en todas las casillas)*. Tú lo que tienes que ver Laura es que va disminuyendo… ¿A dónde llevará esto?
A: A cero.
E: Parece que hay un principio y un final, ¿quién tiene mayor número arriba o abajo?
A: La misma cantidad aunque lleguen a cero. *(IV14)*

11) <u>Alumno:</u> Ju.13,07 Nombre: Juan José Fecha de Nacimiento: 10/10/01

E: Entrevista nº 1 del día 25 de Febrero del 2015, con Juan José B. M. de 2º B, ¿qué edad tienes, Juan José?
A: 13 años.
E: 13 años, muy bien Juan José, contesta esta primera pregunta, léelo y lo haces. En voz alta por favor, sea el conjunto…
A: Sea el conjunto de números desde el número 1 al número 10, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Empieza aquí, 1.
A: *(Escribe 1, 2, 3 ,4 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Perfecto, bien, vamos a ver el segundo ahora, Juan José, sea el conjunto…
A: Sea el conjunto de números desde el número 1 al número 10, a cada número le sumamos 3, representa ahora número más 3 en las casillas.
E: Vale, entonces en vez de uno ahora es…
A: Uno más tres, ¿no?
E: Bien.
A: *(escribe 1)*
E: No, pero lo pones ya, ¿vale?, sería… es fácil de escribir.
A: *(Escribe 4)*
E: En vez de 2.
A: *(Escribe 5)*
E: En vez de 3.
A: *(Escribe 6)*
E: En vez de 4.
A: *(Escribe 7, 8, 9, 10)*
E: Vale, ahora la pregunta, ¿tienen la misma cantidad de números A que B?
A: No.
E: No, ¿cuál tiene más?
A: El B.
E: ¿El B cuántos tiene?
A: No, el A ¿no?
E: El A, ¿cuántos más tiene A que B?
A: 3.
E: 3, muy bien, vamos a ver el que viene ahora, léelo.
A: Sea el conjunto de números desde el número 1 en adelante, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Vale, entonces aquí…
A: *(Escribe 1, 2, 3 ,4)*
E: Bien, no vamos a estar toda la vida poniendo, ¿no?, entonces he puesto puntos suspensivos, ¿eh?, aquí pones tú el que tú quieras.
A: Un número cualquiera, ¿no?
E: Sí.
A: *(Escribe 6)*
E: Esto significa que los puntos suspensivos, ¿cuáles son?
A: 5.
E: Podías haber puesto otro número, ¿no? Y esto sigue adelante, ¿vale? No para, ¿no?
A: Que no para, ¿no?
E: No sé, ahí está puesto, ¿vale? En adelante.
E: Bien vamos ahora , sea el conjunto ahora del 1 en adelante, igual que antes, representar n más tres, es lo mismo de antes, en vez de 1 sería…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Y aquí, por ejemplo sería…
A: *(Escribe 9)*
E: ¿Cuál tiene mayor cantidad de números arriba o abajo?
A: Igual.
E: Igual ¿por qué?
A: Bueno no, el de abajo, tiene los números más no sé.
E: Explícame, por ejemplo el C, ¿por qué?, ¿por qué empieza en 1?
A: Sí.
E: Y no termina, ¿no?
A: Bueno, no tiene lo mismo que el C que es desde el 1 y el D empieza en el… *(Señala con el cursor)*
E: En el 4, ¿no?

A: Sí, el D empieza en el 4 y el C empieza en el 1.
E: Con lo cual, ¿cuántos faltarían?
A: Dos números.
E: Dos números, vale, pues te voy a echar una mano.
Te lo voy a poner mejor de esta forma, ¿vale?, el primero sería, hemos puesto el 1, el 2, el 3, sigue tú.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y abajo le hemos sumado 3, entonces el 1, 4, el 2, 5, el 3…
A: *(Escribe 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y este lo has contestado y has dicho tú que tiene más cantidad de números el de arriba que el de abajo porque le faltan 3. Vamos a ver ahora aquí, es lo mismo, pero lo he puesto de otra forma distinta, ¿vale?, vamos a hacer primero el 1, el 2, el 3, sigue tú.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Y ahora aquí he puesto 100, podría haber puesto un número más grande, pero he puesto 100, esto significa que los puntos suspensivos estos, hay noventa y tantos, tu sabes, pero estos puntos suspensivos son más, ¿vale? Bien el de abajo ahora hacemos lo siguiente, en vez de 1, pongo 3, en vez de 2, pongo 5, en vez de 3…
A: *(escribe 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Vale, y esto sigue adelante, uh, uh, uh, aquí puedes poner el que tú quieras, si quieres pon el correspondiente de arriba
A: uhm ¿pongo el 11?
E: ¿Cuál?
A: ¿El 11 puedo poner?
E: El 11 no porque aquí estaría… ¿no?
A: Ah verdad sí, el 15.
E: Por ejemplo el 15, eso significa que será un correspondiente de por aquí ¿vale?, has hecho bien tú.
E: A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números, C, D o son iguales?
A: El C es mayor.
E: El C es mayor, ¿por qué?
A: Porque empieza desde el 1 y sigue adelante y el D…
E: ¿El D por cuál empieza?
A: Son iguales, ¿no? Es que a este se le suman tres ¿no?
E: Sí, pero el primero empieza en 1 y termina en adelante ¿verdad? Y el segundo empieza en 4.
A: En 4…. El D es más ¿no?
E: El D es más.
A: Que el C.
E: ¿Más grande?
A: Es que creo que son iguales.
E: ¿Por qué son iguales?
A: Porque el C es desde el 1 hacia adelante y el D es 1 y se le suman 3, hasta adelante. *(I1B)*
E: Y, ¿tú crees que tiene los mismos números?

*E(*II1*): Vamos a verlo en otra situación, vamos a verlos ahora aquí, pongo el 1, el 2 el 3, esto sería otra vez, esto está muy pesado.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y abajo te lo he puesto de otra forma distinta ¿vale?, entonces en vez de 1 sería…
A: *(Escribe 4)*
E: En vez de 2 sería…
A: *(Escribe 5)*
E: Muy bien sigue tú…
A: *(Escribe 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Perfecto, ¿vale?, y esto otra vez lo mismo, dijiste tú…o estás de acuerdo todavía en que hay mayor cantidad de números arriba que abajo, ¿no? Vamos a ver el de abajo, pongo 1, 2, 3.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Puntos suspensivos y aquí pon un número, el que tú quieras incluso el… *(Señala con el cursor)* Si quieres.
A: *(Escribe 9)*
E: Es que si tu solamente pones ese tras los puntos suspensivos pones…, solamente te ahorras un número ¿no?
A: *(Escribe 19)*
E: Vale19, parece ser que aquí hay unos 12 números por ahí, y aquí sigue adelante. Y ahora vamos a hacer el de n+3, es decir si es, en vez de 1 pones…
A: *(Escribe 4)*
E: En vez de 2…
A: *(Escribe 5)*
E: En vez de 3…
A: *(Escribe 6)*
E: Vale y aquí ponemos pues el que tú quieras, si quieres poner el correspondiente de algo.
A: *(Escribe 9)*
E: El 9 vale, que sería entonces el correspondiente de por aquí, el del 6 ¿verdad? el correspondiente ¿no? Bien a la vista de los resultados de aquí abajo ¿quien tiene mayor número A o B o son iguales?
A: El A.
E: A es mayor.
E: Bien otra vez lo mismo, sea el conjunto del 1 al 10…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Muy bien, y el siguiente ahora le vamos a sumar 4, ¿te parece bien?, es distinto al anterior, en vez de 1 sería…
A: *(Escribe 5)*
E: En vez de 2.
A: *(Escribe 7)*
E: No.
A: *(Escribe 6)*
E: Eso es, le sumamos 4, y el 3…
A: *(Escribe 7, 8, 9, 10)*
E: Perdón, perdón, a cada numero le sumamos 6, entonces en vez de 1 sería…
A: ¿A cada número le sumamos 6?

E: Sí, a cada número le sumamos 6, lo pone ahí, tú tienes que poner del 1 al 4, pero sumándole 6, 1 es…
A: *(Escribe 7)*
E: 2 es…
A: *(Escribe 8)*
E: 3 es…
A: *(Escribe 9)*
E: 4 es…
A: *(Escribe 10)*
E: Y hasta ahí, ¿no? Porque hemos dicho del 1 al 4 ¿no?, esto es lo que anteriormente estaba sombreado, ¿te acuerdas?, ¿quién tiene más cantidad de números, arriba o abajo?
A: ¡Hum!
E: Arriba, ¿cuántos hay?
A: Hay 10.
E: ¿Y abajo cuantos hay?
A: 10 también.
E: ¿Cuántos números hay?
A: Ahí hay 4.
E: 4, ¿cuántos números tiene el de arriba?, ¿cuántos el de abajo?, ¿cuál es el de mayor?
A: El A.
E: Tiene más que el de abajo, ¿no?, te quedas con el cante, ¿no?, vamos a ver ahora otro, Juan José, este es del 1 en adelante, entonces hay que poner aquí…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Bien, pon aquí sin miedo un número.
A: *(Escribe 56)*
E: El 56, vale. Ahora vas a hacer lo mismo que en el anterior, hay que sumarle 6, ¿vale?, en vez de 1 pongo…
A: ¿Sumándole 6?
E: Ahí va.
A: *(Escribe 7)*
E: En vez de 2 pongo…
A: *(Escribe 8, 9 10)*
E: Vale, y aquí pongo el que tú quieras, o el correspondiente o puede ser otro cualquiera.
A: Cualquiera, ¿no?
E: Vale…
A: *(Escribe 30)*
E: El 30, esto significa que será de uno de por aquí, ¿no?, ¿vale? Y esto podría seguir sucesivamente, es decir, de aquí a ahí, del 4 al 56 y aquí del 10 al 30, no es lo mismo, no hay la misma cantidad aquí que aquí, y esto sigue en adelante, ¿vale? Bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene mayor cantidad de números el C, el D o los dos son iguales?
A: El C tiene más números porque el D empieza contando en el 7 hasta el 30. *(I2B)*
E: No, no, no es hasta el 30.
A: Bueno, bueno hacia adelante y el C desde el número 1 hacia delante.

12) <u>Alumno:</u> Gu.13,06 Nombre: Alejandro Fecha de Nacimiento: 12/11/01

E: Entrevista nº 2 del día 25 de Febrero, con Alejandro G. N, ¿qué edad tienes, Alejandro?
A: 13.
E: 13 años, muy bien, Alejandro, lee la pregunta y contesta.
A: ¿Lo leo en alto?
E: En alto.
A: Sea el conjunto de números desde nº 1 a nº 10, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Bien, entonces aquí habrá que ponerles…
A: Del 1 al 10, ¿no?
E: Incluido el 1 e incluido el 10, empezamos por 1, muy bien.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Muy bien. Y ahora en el apartado B, ¿qué dice?
A: Sea el conjunto de números desde nº 1 a nº 7, a cada número le sumamos 3, representa ahora número +3 en las casillas.
E: Vale, del 1 al 7 ¿vale?, entonces en vez de 1 hay que sumarle 3, serían…
A: *(Escribe 4)*
E: En vez de 2…
A: *(Escribe 5)*
E: En vez de 3…
A: *(escribe 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Muy bien, no tienes que seguir, ¿vale? Porque ha dicho solamente del 1 al 7, ¿quién tiene más cantidad de números el A, el B o son iguales?
A: El A.
E: El A, ¿cuántos números tiene el A?
A: 10.
E: Y el de abajo, ¿cuántos tiene?
A: ¡Eh!, 7.
E: 7, ¿vale?, perfecto. Vamos a ver ahora el segundo, léelo.
A: Sea el conjunto de números desde nº 1 en adelante, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Entonces el primero sería…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Vale, aquí he puesto yo puntos suspensivos, significa que sigue en adelante, ¿vale?, y aquí ponte tú por ejemplo el número…
A: *(Escribe 6)*
E: 6, esto significa que ¿aquí cuál sería?
A: 5.
E: Podías haber puesto otro número ¿no?, podías haber elegido un número muy grande y será para no estar todo el tiempo escribiendo. Y esto va puntos suspensivos, sería ¿hasta dónde?
A: ¿Iría eso?

E: Hacia donde irías tú, 6 después…
A: 7, 8, 9 10, 11, 12, 13, 14, 15.
E: ¿Hasta cuándo?
A: ¿Sigo?
E: Sí.
A: 16, 17, 18, 19, 20,21.
E: ¿Va a seguir toda la mañana?, no, ¿no? Por eso he puesto puntos suspensivos, ¿no? Vale, ahora ahí abajo, ahora sea el conjunto de 1 en adelante como pasaba anteriormente y le vamos a sumar 3, en vez de 1 sería…
A: *(Escribe 4)*
E: En vez de 2…
A: *(Escribe 5)*
E: En vez de 3…
A: *(Escribe 6)*
E: 4…
A: *(Escribe 7)*
E: Y aquí por ejemplo podríamos poner…
A: *(escribe 9)*
E: El 9, has dicho tú que es el correspondiente a este, ¿vale? Y este seguiría en adelante, ¿vale?, este empezaba y terminaba, este empezaba y terminaba, este empieza, pero no termina, este empieza, pero no termina. ¿Cuál de los dos conjuntos tiene más el C o el D o son iguales?
A: Son iguales.
E: ¿Por qué?
A: Pues porque tiene las misma casillas.
E: No, no son casillas, son los números.
A: Los mismos números.
E: ¿Sí? ¿Aun empezando uno en el 1 en adelante y el otro empieza en 4?
A: *(Se queda pensando)*
E: Que no son los mismos números, ¿pero tienen la misma cantidad?
A: Sí.
E: ¿Por qué?
A: ¡E!h… porque se le van sumando 3 cada vez que va… el orden del primer número se le suma 3 y cada vez que va aumentando se le va sumando 3.
E: Entonces, aún empezando uno en el 1 hasta no terminar y el otro empezando en el 4 hasta no terminar, dices tú que tienen la misma cantidad de números.
A: Se le van sumando 3.
E: Bien, se ha visto que se le ha ido sumando 3, pero ¿tienen la misma cantidad de números?
A: Sí. *(I1**1**)*
E: ¿Por qué?
A: Creo que sí, no sé.

*E(*II*1): *(Se le pone la tarea II1)* Lee.
A: Sea el conjunto de números desde nº 1 al nº 5000, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Vale, entonces pondríamos aquí…, del 1 al 5000 y pondríamos…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5)*
E: Bueno esto seguiría, no vamos a estar escribiendo 5000 números. ¿Cuáles serían entonces estos tres últimos? ¿El último cual sería?
A: Pero en los puntos que…
E: No vamos a estar escribiendo del 1 al 5000, ¿no, Alejandro?, entonces vamos a poner… se supone que vamos a poner que eso sigue adelante
A: Sí, sí.
E: ¿Y el último cuál es?
A: ¡Hum!… ¿el último de todos?
E: Claro.
A: 5000, ¿no?
E: 5000.
A: *(Escribe 5000)*
E: ¿Y el anterior?
A: *(Escribe 4999)*
E: ¿Y el anterior?
A: *(Escribe 4998)*
E: Hemos puesto los primeros y los últimos y hemos representado todos los números, pero por puntos suspensivos, ¿cierto?
A: Sí, sí.
E: Bien, vamos a ver ahora lo que hacemos, ahora dice: sea el conjunto del 1 al 4500 y le sumamos 500, entonces el primero hay que poner…
A: *(Escribe 501)*
E: El segundo…
A: *(Escribe 502)*
E: El tercero…
A: *(Escribe 503)*
E: El cuarto…
A: *(Escribe 504)*
E: El quinto…
A: *(Escribe 505)*
E: Muy bien, y ahora estos tres últimos vamos a ver cuáles serían, si es 4500 el último, si le sumo 500 sería…
A: *(Escribe 5500)*
E: No, el último sería 4500, si le sumo 500 sería…
A: *(Corrige y escribe 5000)*
E: ¿Y el anterior?
A: *(Escribe 4999)*
E: ¿Y el anterior?
A: *(Escribe 4998)*
E: Bien, a la vista de los resultados, ¿Quién tiene mayor cantidad de números el A o el B?
A: Los dos.
E: ¿Los dos?, mira en cual empieza el A, empieza en…
A: ¡Ah! vale, empieza en 1.
E: Y termina en…
A: En 5000.
E: Y el otro te empieza…
A: 501, ¡ah!, vale.
E: Entonces ¿quién tiene mayor número?
A: El B tiene más números.

E: ¿El B?
A: Bueno más números tiene el de arriba pero el del A…
E: ¿Cómo?
A: Nada, nada, el de arriba, el de arriba, el de arriba.
E: El de arriba, porque mira esto es 501, 502, 503, 504, está aquí metido ¿vale?, entonces ¿cuantos más tiene A que B?
A: ¡Hum!
E: Mira donde empieza uno y mira donde empieza el otro.
A: ¡Eh!, 500.
E: 500, ¿vale?, ¿de acuerdo entonces?
A: *(Asiente con la cabeza)*
E: Ahora vamos para abajo, ahora es del 1 en adelante y le vamos sumando, venga vamos a poner del 1 en adelante, sería…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Aquí es sigue adelante, pon aquí un número que sea grande.
A: *(Escribe 500)*
E: Por ejemplo, ¿vale?, aquí en medio, Alejandro, ¿cuántos números debe haber?, pues unos cuatrocientos y pico, ¿no?, ¿vale?, hasta el 500 y esto sigue adelante. Y ahora lo mismo que el anterior, es decir le vamos a ir sumando 500, en vez del 1…
A: *(Escribe 501)*
E: En vez de 2…
A: *(Escribe 502)*
E: En vez de 3…
A: *(Escribe 503)*
E: En vez de 4…
A: *(Escribe 504)*
E: Sigue adelante y en vez de por ejemplo 500…
A: *(Escribe 1000)*
E: Muy bien y sigue adelante. Muy bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene mayor cantidad de números el C, el D o son iguales?
A: Son iguales.
E: ¿Por qué?
A: Porque el 1, va desde el 1 al 500.
E: No, no, no va al 500.
A: Bueno sigue en adelante.
E: En adelante ¿eh?
A: ¡Ah!, vale, entonces, ¡eh!, porque…, son iguales ¿no?
E: Iguales por qué, uno empieza ¿por dónde?
A: El 1.
E: ¿Y dónde termina?
A: Sigue en adelante.
E: Sigue en adelante, y el otro empieza…
A: En 501.
E: Y termina…
A: Sigue en adelante.
E: Bien, ¿entonces? ¿Son iguales los dos o uno es mayor cantidad que el otro?
A: ¡Eh…! uno es mayor cantidad que otro.
E: ¿Sí?, ¿cuál?
A: El A que el B, porque si el A sigue en adelante y el B empieza en un número más alto.
E: Bueno vamos a verlo de otra forma, empezamos otra vez por el primero, ¿vale?, empieza 1, 2, 3 sigue tú.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6)*
E: Y estos eran lo que habíamos dicho antes, ¿vale?, este sería el 5000 *(señalando al último),* este el anterior, este el anterior.
A: *(Escribe 5000, 4999, 4998)*
E: Vale, este había que sumarle 500, y tú lo has hecho muy bien, en vez de 1, 501, en vez de 2, 502, en vez de 3…
A: *(Escribe 503, 504, 505, 506)*
E: Y ahora estos eran, como era del 1 al 4500 estos son los mismos 4998, 4999 y finalmente 5000, vale. Este empieza en 1 y termina en 5000 y este empieza en 501 y termina en 5000 y tú me has dicho que tiene mayor cantidad… ¿A que B o son iguales?
A: ¿El B empieza en el 501?
E: Ahí va, estamos en el mismo caso que el anterior.
A: ¡Eh!…, el A, ¿no?
E: El A, vale, perfecto, tiene más cantidad, 500 números más, ¿vale? Bien vamos para abajo, ponemos el 1, el 2, el 3,…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Mira yo lo he hecho, pero he sido más bestia que tú, he puesto el 1000, pero podía haber puesto el que me dé la gana y sigo adelante. Y ahora le voy sumando 500, de 1, 501, 2, 502, del 3 sería…
A: *(Escribe 503, 504, 505, 506, 507)*
E: Sigo adelante y bueno, si aquí pongo 1000, habría que poner aquí, si queremos poner el correspondiente y estoy sumando 500.
A: *(Escribe 1500)*
E: Y sigo adelante, vale. A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: C.
E: C, ¿qué pasa?
A: Que tiene más cantidad de números.
E: Tiene más cantidad.
A: De números.
E: ¿Por qué?
A: Porque empieza…tiene 500, el D tiene quinientos números menos. *(II1B)*
E: Aún no hemos terminado, ¿vale?

*E(*II2*): Estamos grabando, muy bien, vamos a ver otra vez de nuevo, esta sería la primera parte, la que sería la primera del ejercicio, ¿vale?, ahora es lo mismo, del 1 al 5000, sería el primero…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5)*

E: Y estos tres últimos serían, ya lo sabes tú, ¿verdad?, o te lo explico, 4998, 4999 y el último…
A: *(Escribe 4998, 4999, 5000)*
E: Este ahora le vamos a sumar 1000, ¿vale?, entonces en vez del 1 sería…
A: *(Escribe 1001)*
E: 1001, vale, en vez de 2…
A: *(Escribe 1002)*
E: En vez de 3…
A: *(Escribe 1003)*
E: En vez de 4…
A: *(Escribe 1004)*
E: En vez de 5…
A: *(Escribe 1005)*
E: Y ahora el último, si te das cuenta el último como es 4000, si se le suma 1000 sería entonces…, y el anterior sería…, y el anterior…
A: *(Escribe 5000, 4999, 4998)*
E: Bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene mayor cantidad de números A, B o iguales?
A: ¡Eh!…, A.
E: A, empieza desde el 1…
A: Y termina en 5000
E: Y el segundo empieza en 1001 y termina en 5000, luego ¿quién tiene mayor cantidad de números?
A: A.
E: A, vale. Vamos a ver ahora el segundo, este en adelante.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Y sigue adelante, y ahora ponemos aquí un número el que te dé la gana, yo puse un número muy grande, tu puedes poner el que quieras.
A: *(Escribe 700)*
E: 700 has puesto, vale. Y ahora de la misma forma anterior le vamos a sumar 1000, en vez de 1 sería…
A: Este sería ¿al 700 o al 1?
E: Al 1.
A: *(Escribe 1001, 1002, 1003, 1004)*
E: Bien, sigue adelante y aquí puedes poner incluso el correspondiente al 700, que sería…
A: *(Escribe 1700)*
E: Vale, sigue en adelante, sin parar, no termina, no es como el caso anterior que empieza y termina, empieza y termina, sino que aquí empieza pero no termina, aquí empieza pero no termina. ¿Quién tiene mayor cantidad de números C, D o iguales?
A: C. *(II2B)*
E: ¿C?, ¿aún no terminando?
A: Sí.

13) <u>Alumno:</u> Al.13,07 Nombre: Álvaro Fecha de Nacimiento: 22/10/01

E: Entrevista nº 3 del día 25 de Febrero de 2015, con Álvaro H. M. de 2ºB, ¿qué edad tienes, Álvaro?
A: 13 años.
E: Álvaro, lee la pregunta A y contéstala.
A: Sea el conjunto de números desde n= 1 a n=10, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Bien, entonces sería…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Vale, vamos a ver el segundo, léelo.
A: Sea el conjunto de números desde n= 1 a n=7, a cada número le sumamos 3, representa ahora n +3 en las casillas.
E: Es decir, en vez de 1 hay que sumarle 3, con lo cual 1 sería…
A: ¡Ah!, entonces 4.
E: Muy bien.
A: ¡Eh…!
E: En vez de 2, le sumamos 3…
A: ¡Ah!, vale, vale, más 3, 5, 3 más 3 *(escribe 6)*, 4 más 3, 7, 5 más 3, 8.
E: Vale, de todas formas ya tú lo estás viendo ¿no? lo que va pasando, ¿no?, en vez de 6 sería…
A: ¡Eh!, 9.
E: En vez de 7.
A: 10.
E: Muy bien, como ya están del 1 hasta el 7, no hay que seguir, por eso lo he puesto sombreado, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: ¿Más cantidad de números?
E: Más cantidad de números.
A: El A tiene más cantidad de números.
E: A, vale hay más cantidad.
A: Pero el B tiene más valor numérico.
E: No, porque… *(Señala que los números de B también están en A)*, pero como te estoy preguntando por cantidad de números, hay 10 arriba y 7 abajo. Bien vamos a ver ahora abajo, empezamos, leyendo.
A: Sea el conjunto de números desde n= 1 en adelante, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Vale, sería entonces, igual que el anterior.
A: ¡Ah!, vale.
E: Sería 1.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Vale, seguiría poniéndolo y ahora por ejemplo en este cual pondrías.
A: ¡Eh…! 6.
E: ¿6 quieres poner? Entonces aquí…
A: Sí, porque este sería 5, este 6 y 7, ¿no?
E: Sí, pero podíamos poner…, no porque este sigue en adelante, no para.
A: ¡Ah!, vale.
E: ¿Vale? entonces yo para no estar toda la mañana representando números, he puesto esto, siguen en adelante, ¿vale?

A: Vale.
E: Y ahora hacemos lo mismo que en el anterior, lo que hacemos ahora es que vamos a ir sumándole 3.
A: ¡Ah!, vale.
E: Entonces en vez de 1…
A: 4, 5, 6, 7.
E: Sigue adelante y este…
A: Y ya ese sería 9.
E: Correcto, 9, porque tú estás poniendo por el de arriba, ¿vale? Bien, quiero que veas la diferencia, este empieza y termina, empieza y termina, este empieza.
A: Y no termina.
E: Y no termina, este empieza…
A: Y tampoco termina.
E: Bien, a la vista de los resultados ¿quién tiene más cantidad de números, C, D o son iguales?
A: Son iguales.
E: Iguales, ¿por qué?
A: Porque tienen la misma cantidad de números, aquí hay 4 y aquí hay 6 y aquí hay 4 y aquí…
E: No, no 6.
A: ¡Uy! 6, 1.
E: ¿Aunque este empiece en el 1 y este en el 4?
A: Creo que sí, tienen la misma cantidad. *(I**11**)*

*E(*II1*): Sea el conjunto…
A: Sea el conjunto de números desde n=1 al n=5000, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Es igual, ¿no?, muy parecido, ¿no?, habría que poner aquí…
A: Ese sería 1, 2, 3, 4, 5.
E: Y habría que poner un montón.
A: Y ahora, aquí sería 5000. *(Rellenando el último)*
E: Y aquí…
A: Y ahí sería 4499.
E: 4999. Este está mal ¿vale?
A: ¡Eh!, pone ahí 4499.
E: No porque sería entonces 4500, y debe ser 4999.
A: ¡Ay!, verdad *(Corrige y escribe 4999)*
E: Eso sí, ¿y el anterior?
A: 4998.
E: Te das cuenta que hemos puesto por aquí que no vamos a poner todos los números, por eso he puesto yo puntos suspensivos.
A: Sí, ya.
E: Ahí en medio hay cuatro mil novecientos y pico, ¿vale?
A: Entiendo.
E: Vamos a ver ahora debajo, de la misma forma le vamos a ir sumando 500, desde el 1 hasta 4500 y le vamos sumando 500, entonces en vez de 1 sería…
A: ¡Eh!…, 501.
E: En vez de 2…
A: 502.
E: 3…
A: *(Escribe 503)*
E: 4…
A: *(Escribe 504)*
E: 5…
A: *(Escribe 505)*
E: Y ahora estos tres últimos, pues fíjate tú, vamos a ver el último, el último es 4500 que si se le suma 500 te queda…
A: ¡Eh...! ¿A 4500?, 5000.
E: Ya los demás ya los podría tú saber, ¿no?, ¿cuál sería el anterior?
A: *(Escribe 4999)*
E: ¿Y el anterior al anterior?
A: *(escribe 4998)*
E: Muy bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene mayor cantidad de números A o B?
A: ¡Eh…! tienen una misma cantidad de números.
E: ¿Sí?, ¿este empieza…?
A: Empieza por 1.
E: Y termina en…
A: Por el 5000.
E: Y este empieza…
A: Por 501, y termina en 5000.
E: ¿Y son iguales?
A: Hay la misma cantidad, a ver, no son iguales, pero la misma cantidad de números hay.
E: ¿Sí, cuantos números hay en el primero?
A: ¡Ay!, verdad, ¿qué hago?, que aquí empieza…, en la B empieza por 501 y luego sigue, en cambio en el A empieza por 1 y sigue hasta 5000.
E: Entonces ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: A tiene más cantidad de números.
E: En concreto ¿cuántos crees tú que habrá más arriba qué abajo?
A: ¡Eh…!, 500.
E: 500, muy bien vamos abajo a ver, empezamos, este lo mismo, del 1 en adelante, ¿vale?, entonces hay que poner aquí…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Sigue adelante, y aquí pon el que a ti te dé la gana.
A: *(Escribe 6)*
E: El 6, no…, bueno vale. Y ahora de la misma forma vamos a empezar sumándole 500, en vez de 1…
A: *(Escribe 501)*
E: En vez de 2…
A: *(Escribe 502)*
E: En vez de 3…
A: *(Escribe 503)*
E: En vez de 4…
A: *(Escribe 504)*
E: Y aquí, por ejemplo, puedes poner el correspondiente a arriba si quieres.
A: 506.

E: Bien, este empieza, pero no termina, este empieza, pero no termina. ¿Quién tiene mayor cantidad de números C, D o son iguales?
A: Son infinitos, así que…, bueno tiene más cantidad de números la C.
E: La C, ¿por qué?
A: Porque el C empieza por el 1 y el D empieza por el 501. *(II1B)*
E: ¿Aún no terminando ninguno de los dos?
A: Claro.

*E(*II2*): Te lo he puesto de otra forma, ¿vale?, bien, empezamos por el 1, el 2, el 3, sigue tú.
A: 4, 5, 6.
E: Y estos hemos puesto los últimos, sería 49998, este sería 4999 y finalmente…
A: 5000. *(Escribe 4998, 4999, 5000)*
E: Vale, y el de abajo pues los correspondientes, en vez de 1, 501; en vez de 2, 502; en vez de 3…
A: *(Completa con 503, 504, 505, 506)*
E: Y estos son los últimos.
A: Serían los mismos *(escribe 4998, 4999, 5000).*
E: Yo te lo he puesto más expandido, ¿vale?, y tú me has contestado que tiene más cantidad de números arriba que abajo ¿vale?, porque empieza y termina, empieza y termina, entonces hay 500 más arriba que abajo, Bien, abajo lo he puesto de esta forma 1, 2, 3, sigue tú.
A: *(Completa con 4, 5, 6, 7)*
E: Vale, yo te he puesto uno muy bestia, 1000, es decir que aquí en medio hay novecientos noventa y tantos ¿vale?, y aquí sigue adelante, no termina, lo importante de aquí es que no termina. Y abajo pues le vamos poniendo sumándole 500, sería 501, 502, aquí sería…
A: *(Completa con 503, 504, 505, 506, 507)*
E: Bien, y este, si tú quieres pones el correspondiente al de arriba.
A: Habría que sumarle 500 por lo que 1500.
E: De todas formas, Álvaro, si yo hubiera puesto otro número, por ejemplo el 1400, pues a lo mejor a partir de uno de aquí se le sumaba y tendríamos el de aquí, es decir que tampoco pasa nada, ¿vale?, lo importante es que empieza y no termina ¿quién tiene mayor cantidad de números C, D o son iguales?
A: El C porque empieza por el 1 y termina en el infinito y el D empieza por el 501.
E: Y no termina.
A: En el infinito.
E: Entonces, ¿tiene más cantidad C que D?
A: Sí. *(II2A)*

*E(*II3*): Bien, de la misma forma, ¿vale?, en el primero vamos a poner del 1 al 5000, entonces sería…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5)*
E: Y estos serían los últimos, serían…
A: *(Escribe 4998, 4999, 5000)*
E: Y este ahora hay que sumarle 4000, en vez de anteriormente era 500, entonces en vez del 1 sería…
A: *(Escribe 4001)*
E: Perdón, hay que sumarle 1000.
A: ¡Ah!, 1000.
E: Sería del 1 al 4000 y hay que sumarle 1000.
A: *(Corrige y escribe 1001, 1002, 1003, 1005)*
E: Vale, esto sigue adelante, pero ya sabemos que los tres últimos…, el último como es 4000 y le sumamos 1000, sería…
A: *(Escribe 4000 en la última casilla)*
E: No.
A: ¡Ah!, pero sumamos 1000, vale. *(Corrige y escribe 5000)*
E: Y el anterior.
A: *(Escribe 4999, 4998)*
E: Vale, esto es igual más o menos que la primera parte de los espejos que te puse un solo espejo y dijiste tú, bueno aquí empieza del 1 al 5000 y aquí del 1001 hasta el 5000, ¿quién tiene mayor cantidad de números A o B?
A: A.
E: A, vale. Ahora es la segunda parte que es como si fueran los espejos, ¿vale?, los dos espejos, este empieza del 1 y no termina, 1…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Y sigue adelante, y aquí pon un número, el que a ti te dé la gana.
A: *(Escribe 6)*
E: 6, te has quedado corto, porque podrías haber puesto un número muy grande, muy grande si quieres, por eso los puntos suspensivos de aquí. Y ahora le vamos a sumar 1000, en vez de 1 sería…
A: *(Escribe 1001, 1002, 1003, 1004)*
E: Y aquí, bueno, si quieres poner el correspondiente sería…
A: *(Escribe 1006)*
E: Vale, aquí empieza y termina, aquí empieza, pero no termina. ¿Quién tiene mayor cantidad de números C o D o iguales?
A: C porque empieza por 1 y el D empieza por 1001. Y hay 1000 de diferencia. *(II3B)*
E: ¿Aunque no terminan?
A: No.

14) <u>Alumno:</u> Pa.13,09 Nombre: Paula Fecha de Nacimiento: 18/08/01

E: Entrevista nº 4 del día 25 de Febrero del 2015, con Paula M. R. del curso 2º B, ¿qué edad tienes?, Paula.
A: 14.
E: 14. Muy bien, Paula. Lo que vamos hacer es leer y contestar, ¿vale? Lee en voz alta.
A: Sea el conjunto de números de nº 1 a nº 10, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Aquí pondríamos entonces…
A: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: Perfecto, vamos a ver el siguiente.
A: Sea el conjunto de números desde nº 1 a nº 7. A cada número le sumamos 3, representa ahora n+3 en las casillas.
E: En vez de 1 se le suma 3, en este caso es…y 2 más 3…3 más 3…
A: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: Ya no se ponen más, porque el último era 7 más 3, 10. Bien, ahora la pregunta, ¿tienen la misma cantidad de números A que B o son iguales?
A: No, ¿no?
E: No, ¿no?, ¿quién tiene más?
A: El B.
E: El B, ¿porqué?
A: Porque tiene más, ¿no?
E: ¿Sí?, cuéntalos, 1, 2, 3, 4.
A: 5, 6, 7.
E: 7 números. Y este, ¿cuántos números tiene?
A: 10.
E: ¿Quién tiene más?
A: A.
E: ¿Vale?, ¿estás de acuerdo?, muy bien. Vamos a ver el de abajo, vamos a ver, ahora léelo.
A: Sea el conjunto de números desde nº 1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien, igual que el anterior.
A: 1, 2, 3, 4.
E: Esto seguiría adelante.
A: 5.
E: 5, sigue tú.
A: 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.
E: ¿Vas a estar toda la mañana? Entonces ya pon aquí un número cualquiera
A: El 5.
E: No puede ser el 5, ¿no?, el 5 estaría por aquí metido *(señala los puntos suspensivos)*, pon otro anda.
A: *(Escribe el 6)*
E: Bien, eso significa que los puntos suspensivos, ¿qué es?
A: Que continúa.
E: Pero del 4 al 6, falta el 5.
A: 5.
E: Entonces, ¿los puntos suspensivos sería el 5?
A: Sí.
E: Sí hubieras puesto aquí, por ejemplo, un 8, ¿qué hubiera pasado?
A: Que estaría el 7.
E: Que aquí estaría el 6 y el 7, ¿no?
A: Sí.
E: ¿Y si aquí hubieras puesto, por ejemplo, el 10?
A: Que aquí estaría el 5, 6, 7, 8 y 9.
E: Ahí va, ¿y si pones tú aquí, por ejemplo, el 100?
A: Que estaría el 5, 6...hasta…
E: Hasta el 99, ¿vale?, ¿queda claro para qué sirven esos puntos suspensivos?
A: Sí.
E: Bueno pues estos puntos suspensivos de aquí, *(señala los de la derecha)*, siguen adelante.
A: Siguen adelante.
E: Ahí va. Bueno, vamos a ver lo que tienes que hacer ahora, dice que cojamos de 1 en adelante, pero le sumemos 3, igual que el anterior. En vez de 1 sería…
A: 4, 5, 6 y 7.
E: Siguen adelante, y ahora hay que sumar, y por ejemplo, al 6 le correspondería, ¿cuál?
A: El 7, ¿no?
E: No, 6 si le sumas 3.
A: 9.
A: *(Escribe 9)*
E: Y seguirían, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C o D o son iguales?
A: D.
E: D, ¿por qué?
A: Porque es mayor el número.
E: ¿Por el 9?
A: Sí.
E: Ha empezado en 4 y este empieza en 1 *(señala el C)*. Este empieza en 1 y no termina este empieza en 4 y no termina.
A: ¡Ah!, entonces tiene la misma cantidad, ¿no?
E: ¿La misma cantidad?, ¿aunque este empiece en 1 y este empiece 4?
A: Los dos no terminan.
E: Los dos no terminan, entonces, aclárate, Paula.
A: Tienen la misma cantidad. *(I14)*
E: Tienen la misma cantidad.

*E(*II1*): *(Se le pone la tarea II1)*Léelo y hazlo.
A: Sea el conjunto de números desde nº 1 a nº 5000. Representa cada número en las siguientes casillas.
E: Muy bien, empezamos entonces como anteriormente.
A: 5000, ¿no?
E: Desde el 1 al 5000, el primero sería…
A: 5001.
E: No, desde el 1 al 5000.

A: Entonces sería 1, 2, 3.
E: Empezamos 1, venga.
A: 1, 2, 3, 4, 5.
E: No vamos a poner ahora hasta el 5000, vamos a estar toda la mañana para esto, lo que sí es verdad que los 3 últimos, cuáles serían, ¿el último cuál sería?
A: El 4900, ¿no?
E: El último sería 5000.
A: 5000.
E: 5000, venga, ¿y el anterior?
A: 4999, 4998.
E: ¿Te has aclarado entonces para qué sirven los puntos suspensivos?, es decir, no vamos a estar toda la mañana, ponemos los primeros y los últimos.
A: Sí, vale.
E: Ahora lo siguiente es, sea el conjunto del 1 al 4500 y le sumo 500, en vez de 1 será…
A: 501, 502, 503, 504, 505.
E: Bien, vamos a ver ahora los últimos, el último dice que sea el 4500, pero como aquí hay que sumarle 500, se queda entonces en…4500 y hay que sumarle 500.
A: 5000, ¿no?
E: 5000 muy bien, y el anterior cuál será.
A: 4999 y 4998.
E: Vamos a ver ahora. El conjunto A empieza en 1 y termina en 5000 y el B empieza en 501 y termina en 5000, ¿quién tiene más cantidad de números?
A: Tiene la misma porque terminan igual, ¿no?
E: ¿Pero empieza igual?
A: No, sería el B.
E: El B, ¿qué?
A: El B porque empieza en 501.
E: ¿Quién tiene más cantidad de los dos?
A: El B.
E: ¿Sí?, empieza en 500 y termina en 5000, el otro empieza en 1.
A: Entonces el A.
E: Entonces, ¿por qué?
A: Claro, porque empieza antes y van todos los números.
E: Date cuenta que el 501 tiene que estar por aquí dentro *(señala los puntos suspensivos)*, ¿ha quedado claro?
A: Sí.
E Vamos a ver ahora el C y el D, ¿vale? Ahora en adelante, igual que el anterior, por ejemplo, ponemos aquí… empezamos del 1.
A: 1, 2, 3, 4.
E: Podríamos poner ahí un montón, *(señala los puntos suspensivos)* y aquí puedes poner el número que tú quieras, sé generosa.
A: El 8.
E: El 8, podrías haber puesto algo más grande y siguen adelante, ¿de acuerdo? Estos puntos suspensivos han servido para poner el 5, el 6 y el 7, y aquí habrá muchos. Ahora el conjunto D, es lo mismo pero sumando 500, el primero sería en vez de 1 sumado 500…
A: 501, 502, 503, 504.
E: Muy bien, y aquí pones si quieres el correspondiente al otro o puedes poner el que tú quieras.
A: 4000, ¿puedo poner?
E: 4000, vale. 4000 pues, será un número de por aquí *(señala los puntos suspensivos)* que se le ha sumado 500 y ha caído aquí, y el 8 este, pues el correspondiente sería 8 más 500, es 508, pues estaría por aquí *(señala los puntos suspensivos)*. Bien a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C o D?
A: D, porque tiene más, este tiene 8 y este tiene 4000, no tiene nada que ver tampoco.
E: No, porque podías haber puesto también 508.
A: Pues entonces este, el C.
E: El C, ¿por qué?
A: Porque empieza desde el 1, el 2.
E: ¿Sí?, ¿y dónde termina?
A: En el 8.
E: No.
A: No, pero puedes poner el número que tú quieras.
E: Claro, ese me da igual, pero ¿a dónde llega este Paula?
A: Hasta 4000.
E: Hasta 4000 porque tú lo has puesto. Estos puntos suspensivos, ¿qué significan, Paula?
A: Que pueden ser infinitos.
E: Ahí va, entonces, este empieza en 1.
A: Y puede acabar en lo que tú quieras.
E: En lo que tú quieras no, tiene que llegar, ¿a dónde?
A: A…
E: ¿Estos puntos suspensivos qué significan? *(señala los de la derecha)*
A: Que pueden haber más números, o sea 8, 9, 10…
E: Sí, muchos.
A: Infinitos.
E: Y este empieza en 501 y dónde termina.
A: En 4000.
E: No, sigue los puntos suspensivos.
A: Pueden seguir los puntos suspensivos.
E: ¿Hasta dónde?
A: Hasta lo que tú quieras.
E: No, ¿hasta dónde?, hasta lo que tú quieras no, yo no puedo decir acaba en 5000, no.
A: Hastaaa…
E: ¿Qué pasaba en este, hasta dónde llegaba este?
A: Ese infinito, ¿no?
E: Y este también, ¿vale?, ¿ha quedado entonces claro? No acaba ninguno de los dos.
A: Entonces es lo mismo, ¿no?
E: Uno empieza en 1 y otro en 501, ¿entonces?, aún empezando este en 1 y este en 501.
A: Tienen la misma cantidad.

E: ¿Por qué?
A: Porque los dos son infinitos. *(II14)*

*E(*III1*): *(Se le pone la tarea III1)* Empezamos, lee,
A: Sea el conjunto de números desde nº 1 a nº 10. A cada número le corresponde su inversa, es decir, 1/n. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Entonces en vez de 1 sería...
A: 1/1, ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10.
E: Perfecto, vamos a ver ahora el de abajo, qué nos dice el de abajo, ve leyendo.
A: Sea el conjunto de números desde nº 1 a nº7, a cada elemento le correspondemos su inversa más 3, es decir, 1/n+3. Representa ahora esos números en las casillas siguientes. O sea, que es lo mismo, pero después sumándole 3.
E: Hay que sumarle 3, el primero sería…
A: 1 partido de 13, ¿no?
E: No, 1 partido de 1 más 3.
A: ¿Lo pongo? ¼.
E: El siguiente cuál será.
A: 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10.
E: Bien. A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números arriba o abajo? ¿Cuántos números hay arriba, decimales?, cuéntalos.
A: Son 10.
E: ¿Y el de abajo, hay?
A: 7.
E: ¿Quién tiene más?
A: El A.
E: El A, vamos a ver el de abajo. Sea el conjunto desde 1 en adelante, a cada elemento se hace su inversa de nuevo, luego el primero sería.
A: 1/1, ½, 1/3, ¼.
E: Seguiríamos haciendo, pon aquí ahora el que tú quieras hacer.
A: *(Escribe 1/7)*
E: 1/7, vale. Falta aquí, como ves tú, ¼, 5, 6 y has puesto 7, ¿eh?, y sigue adelante. Bueno pues abajo igual, ahora hay que sumarle 3, en vez de poner entonces 1/1, 1/1, más 3, ¼.
A: ¼, 1/5, 1/6, 1/7.
E: Y este por ejemplo.
A: 1/9.
E: Por ejemplo, ahí hay sólo unos cuantos. Entonces vamos a pensar un momentito, mira, léeme los números de arriba.
A: 1000.
E: No.
A: 1000.
E: No.
A: ¡Ah! 1, ¿no?
E: 1.
A: 0,5; 0,3; 0,25.
E: Sigue adelante.
A: y 0,1429.
E: ¿Qué está pasando con los numeritos, Paula?, ¿va aumentando o disminuyendo?
A: Va aumentando.
E: ¿Sí? 1, 0,5; 0,3.
A: No, va disminuyendo,
E: ¿Qué crees que va a pasar cuando vamos haciendo esto mayor, mayor, mayor?
A: Que va a ir disminuyendo.
E: ¿Hasta dónde?
A: Hasta cero.
E: A cero, quédate con el cante, ¿eh? Me voy al de abajo y aquí había puesto ¼, que corresponde a este, todos los demás están aquí *(señala los puntos suspensivos)*, incluso este, ¿qué va a pasar también aquí?
A: Que también va ir disminuyendo.
E: ¿Hasta dónde?
A: Hasta el cero.
E: Parece ser que se va paralizando la cosa, ¿quién tiene mayor cantidad de números C, D o son iguales?
A: Los dos tiene la misma cantidad porque los dos van a llegar al cero.
E: Y sobre todo, ¿por qué? ¿Aún empezando este en 1 y este en 0,25?
A: Van a acabar los dos en cero, ¿no?, entonces tiene la misma cantidad los dos. *(III14)*
E: Vale.

*E(*IV1*): Vamos a ver, sea el conjunto del 1 al 1000, a cada número le corresponde su inversa, 1/n, es lo mismo. Vamos a representarlo, venga, el primero cómo sería…
A: 1/1, ½, 1/3, ¼, 1/5.
E: Podíamos estar toda la vida, pero por la mañana vamos a echar un rato. Bien ¿cuáles serían los 3 últimos?, vamos hacer el último si te parece bien.
A: 1000, ¿no?
E: 1/1000.
A: 1/1000, 1/999, 1/998.
E: Vamos a ver ahora el de abajo, ¿vale? El de abajo, como ves, dice que va del 1 al 500 y le vamos sumando 500, el primero sería 1 partido de 501.
A: 1/501, 1/502, 1/503, 1/504, 1/505.
E: No para ahí, esto sigue adelante, ¿vale?, parece que te paras, no esto sigue. Vamos a ver los últimos, como hay que llegar al 500 y será este 500 lo metemos ahora aquí, sería 1 partido…
A: 1/1000, 1/999, 1/998.
E: A la vista de los resultados, ¿quién tiene más arriba, abajo o son iguales?
A: Tiene más el B, ¿no?
E: ¿Sí?
A: Aquí empieza con más, ¿no? *(Señala el apartado A)*

E: Aquí empieza en el 1 y termina en 1/1000 y este *(señala el apartado B)* empieza en 1/501 y termina en 1/1000.
A: Entonces tienen la misma cantidad.
E: ¿Tú crees?
A: No.

*E(*IV2*): Vamos a ponerlo aquí arriba. Te lo he puesto aquí arriba para que se vea, 1/1, 1/2, 1/3; ponme ya aquí el ¼, este 1/5 y este 1/6
A: *(Escribe 1/5, 1/6)*
E: Aquí hay que poner los últimos, empezamos por el último, ¿vale?, 1 partido de…
A: 1/1000, 1/999 y 1/998.
E: Entonces, ahora al de abajo hay que sumarle 1, entonces sería 500; 1/501, el 2, 1/502, el 3 1/503, ponlo ahí.
A: ¿Lo pongo?, 1/503, 1/504, 1/505, 1/506.
E: A la vista de los resultados, este empieza en 1 y termina en 1/1000 y este empieza en 1/501 y termina en 1/1000.
A: Entonces es el B.
E: El B, ¿qué pasa?
A: Que empieza por mayor, que está partido de 501 y está 1/1000 y suma 500, y ese sólo está partido de 1000
E: Entonces, ¿quién tiene más?
A: B.
E: ¿B que A?
A: Sí. *(IV2B)*

15) <u>Alumno:</u> Jo.13,11 Nombre: José Manuel Fecha de Nacimiento: 14/06/01

E: Entrevista nº 4 con José Manuel V. R. de 2ºB, ¿cuántos años tienes José Manuel?
A: 13.
E: Muy bien, pues mira intenta contestarme la pregunta, es decir, lee la pregunta y contesta, en voz alta.
A: Sea el conjunto de números desde nº 1 a nº 10, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien, este sería entonces…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Bien, vamos a ver el siguiente, sea el conjunto...
A: De números desde el 1 a nº 10.
E: No, del 1…
A: A 7.
A: A cada número le sumamos 3, representa ahora nº +3…
E: n+3 en las casillas, ¿vale?, sería entonces 1+3…
A: 4.
E: Del 2.
A: 7.
E: No, hay que sumarle 3, del 1 le he sumado 3, 4, del 2 le sumo 3, 5, del 3…
A: *(Escribe 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Vale, ahora contesta la pregunta ¿tiene la misma cantidad de números A que B?
A: …sí.
E: ¿Cuántos números tiene A?
A: 10.
E: ¿Cuántos números tiene B?
A: 7.
E: ¿Son los mismos?
A: No.
E: ¿Entonces quién tiene más?
A: A.
E: Vale, vamos a por otro, C, sea el conjunto del 1 en adelante, representa cada número en las siguientes casillas, ¿estamos?
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Sigue en adelante, y este por ejemplo ponemos…
A: 6.
E: Entonces aquí falta el 5, ¿no?, podíamos poner otro número, por ejemplo, si tú pones un número más grande, sería por ejemplo…
A: El 7.
E: Pues aquí estarían el 5 y el 6, ¿no?, bueno pues tú ya sabes que los puntos suspensivos sirven para poner muchos números, ¿vale?, pon el que tú quieras, me has dicho tú…
A: *(Escribe 6)*
E: El 6, y estos puntos suspensivos ¿que serían?
A: 7, 8, 9 y 10.
E: No, siguen adelante, en 10 no acaban ¿eh?, ¿dónde acabarían José Manuel? ... … José Manuel, ¿Qué sería?... 6, venga sigue.
A: 7, 8 y 9.
E: ¿Y ya está?, ¿hasta 9 sabes tú?
A: 10, 11, 12, 13, 14…
E: Bueno no vamos a estar diciendo números todo el día, ¿hasta dónde llegaría?
A: Hasta el infinito.
E: Ahí va, te quedaste con el cante, ¿vale?, no vamos a ponerlos todos, por eso pongo puntos suspensivos, ¿de acuerdo?, venga vamos a ver el de abajo, ahora es lo mismo pero sumándole 3, entonces, igual al anterior, en vez de 1 sería…
A: *(Escribe 3)*
E: No.
A: 4.
E: El 2.
A: *(Escribe 5, 6, 7)*
E: Sigue en adelante y el 6 sería…
A: *(Escribe 9)*
E: Y sigue adelante, ¿cierto?, ¿hasta dónde?
A: Hasta infinito.

E: Vale, ¿quién tiene mayor número, cantidad de números, arriba o abajo?
A: Son iguales, van al infinito. *(I1**3**)*
E: Son iguales, ¿aún empezando este en 1 y este empezando en 4?
A: … Sí.
E: Sí, vale.

*E(*II1*): *(Se le pone la tarea II1)* Cuando quieras, sea el conjunto…, sigue tú.
A: Sea el conjunto de números, ¿leo en voz alta?
E: En voz alta, sí.
A: Desde el 1 al 5000, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien, ¿vale?, entonces sería…, el primero sería…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5)*
E: Y aquí serían puntos suspensivos, ¿los tres últimos cuáles serían? José Manuel, ¿el último cuál sería?
A: 5000.
E: Y el anterior…
A: 4499.
E: Y el anterior…
A: 4998.
E: Y aquí en los puntos suspensivos.
A: Del 5 hasta 4997.
E: Para no ponerlos todos, pues le ponemos puntos suspensivos. Muy bien, vamos a ver ahora este, ahora es del 1 al 4500 y le voy sumando 500, entonces el primero en vez del 1 es…
A: 4501.
E: No, 1 más 500, 1 más 500.
A: 501.
E: Muy bien, y el siguiente…, 2 más 500.
A: *(Escribe 502, 503, 504, 505)*
E: Vale, y ahora los 3 últimos, vamos a hacer el último, serían 4500, el último, más 500 sería entonces…
A: 5000.
E: Y el anterior, ¿cuál sería?
A: ¿4500?
E: 4400, 4999.
A: *(Escribe 4499)*
E: No, tienen que ser consecutivos, no puede ser 4400.
A: ¿4500?
E: No, son consecutivos.
A: *(Escribe 4999)*
E: Eso, ¿y el anterior?
A: *(Escribe 4998)*
E: A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números, A o B o son iguales?
A: Iguales.
E: ¿Sí?, ¿el primero en dónde empieza?
A: En 1.
E: ¿Y cuándo termina?
A: En 5000.
E: ¿Y el segundo dónde empieza?
A: En 501.
E: ¿Y termina?
A: 5000.
E: ¿Son iguales?
A: No.
E: ¿Quién tiene más?
A: El primero.
E: El primero, vamos a ver ahora el de abajo, igual que el anterior, desde 1 en adelante, empezamos entonces por el primero ¿no?
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Sigue adelante, ¿vale?, aquí pon un número, el que tú quieras.
A: *(Escribe 8).*
E: El 8, vale, sigue en adelante, ¿hasta dónde?, José Manuel.
A: Hasta infinito.
E: Vale, vamos al siguiente abajo, ahora hay que sumarle 500, en vez de 1 sería…
A: *(Escribe 501, 502, 503, 504)*
E: Bien, sigue adelante, y el 8…
A: *(Escribe 508)*
E: Vale, ¿dónde terminaría esto?
A: En el infinito.
E: Este empieza en…
A: 1.
E: Y no acaba, y este empieza en…
A: 501.
E: A la vista de los resultados ¿quién tiene más cantidad de números C o D?
A: C. *(II1B)*

*E(*II2*): Bien, vamos a verlo aquí, a ver qué tal, pongo yo estos, ¿vale?, que serían 1, 2, 3, aquí sería…
A: *(Escribe 4, 5, 6)*
E: Sigue adelante, y estos son los que acabamos de ver 4999, perdón me he equivocado, 4998, 4999 y el último… 5000, y a los otros habría que ir sumándoles 1, sería…
A: *(Escribe 503, 504, 505, 506)*
E: Y estos dijimos como era 4500 más 500 este último sería 5000, el anterior sería 4999 y el anterior 4998, y tú dijiste muy bien, este empieza en 1 y termina en 5000, este empieza en 501 y termina en 5000, y dijiste.
A: Que el A tenía más.
E: Bien, vamos a ver ahora el siguiente, 1, 2, 3… en adelante.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Vale, yo he sido un poquito más vasto que tú, he puesto 1000, ¿te parece bien? Es decir que aquí en medio hay novecientos y pico, y esto sigue adelante ¿vale? Ahora le vamos a sumar 500 como tú has hecho anteriormente, para 1, 501, para 2, 502,…
A: *(Escribe 503, 504, 505, 506, 507)*
E: Por ejemplo para 1000 sería…

A: ¿1500?
E: 1500 y sigue adelante. Bien, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Iguales.
E: ¿Aun empezando aquí en 500?
A: Porque este acaba en 5000, en 1500.
E: No, no acaba, sigue.
A: … Iguales. *(II2A)*

*E(*II3*): Iguales, vamos a verlos ahora aquí, vamos a ver esta representación, 1, 2, 3, 4, 5, aquí sería…
A: 6.
E: Y aquí serían los últimos 4998,4999, 5000, y aquí he puesto yo un poquito diferente, ¿vale?, para 1 sería el 501, el 2 sería…
A: *(Escribe 501, 502, 503)*
E: Y los últimos serían 4998,4999, 5000, y has dicho tú que el de arriba tiene más que el da abajo. Vamos a ver el de abajo, a ver como lo ves de esta forma, el 1, el 2, el 3, sigue tú.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Pon el número que tú quieras aquí.
A: *(Escribe 20)*
E: 20, vale, y abajo le vamos sumando 500, para el primero sería…
A: *(Escribe 501, 502, 503)*
E: Y este.
A: *(Escribe 520)*
E: Vale, el correspondiente. Bien a la vista de los resultados, este empieza en 1 y no acaba, este empieza en 501 y no acaba ¿quién tiene mayor cantidad de números C, D o son iguales?
A: C.
E: ¿C? ¿Qué pasa con C? ¿Son iguales?
A: Son iguales porque no acaban. *(II3A)*

*E(II1'): No acaban, muy bien, vamos a verlos aquí otra vez, este es un poquito más complicado, ahora vamos a sumarle 1000, el primero es desde el 1 al 5000, ¿te parece bien?, igual que el anterior.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Vale, y estos tres últimos serían 4998,…
A: *(Escribe 4998, 4999, 5000)*
E: Vamos a mirar el de abajo, ahora le vamos a sumar, del 1 al 4000, le vamos a sumar 1000, el primero sería mil…
A: *(Escribe 1001, 1002, 1003, 1004, 1005)*
E: Y los tres últimos, pues fíjate tú, si el último es 4000 y habría que sumarle 1000, el último sería…
A: 4000.
E: No.
A: 5000. *(Escribe 4998, 4999, 5000)*
E: Vale, muy bien, ¿quién tiene más cantidad de números, arriba o abajo o son iguales?
A: Arriba.
E: Arriba, vale. Ahora en adelante de nuevo José Manuel ¿vale?, el primero sería…

A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Sigue adelante, y aquí pon el número que te dé la gana.
A: *(Escribe 10)*
E: 10, vale, y siguen adelante. Y a la de abajo le vamos a sumar 1000, entonces el primero sería…
A: *(Escribe 1001, 1002, 1003, 1004)*
E: Y este por ejemplo si quieres poner el correspondiente de arriba o el que tú quieras.
A: *(Escribe 1010)*
E: Siguen adelante. Bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene mayor cantidad de números C, D o son iguales?
A: Son iguales.
E: ¿Iguales?, ¿por qué?
A: Porque no acaban. *(II1'**3**)*

*E(*IV1*): Vale, muy bien. Vamos a ver, lee, sea el conjunto…
A: De números desde 1 a 10. A cada número le correspondemos su inversa, es decir 1/n.
E: Entonces el primero sería…1, el siguiente sería 1 partido…, siempre la inversa.
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10)*
E: Vamos a ver aquí, sea del 1 al 7 y le vamos sumando ahora 3, entonces ¿el primero cuál sería?, 1 partido…
A: De 4.
E: Muy bien.
A: *(Escribe ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10)*
E: Vale, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números, arriba o abajo?
A: Arriba.
E: Vamos a ver ahora el de abajo, este en adelante, ¿de acuerdo?, entonces el primero sería…
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼)*
E: Ahora por ejemplo podrías poner…
A: *(Escribe 1/6)*
E: Vale, bien hecho, y sigue adelante. Vamos al de abajo, ahora es lo mismo que el anterior, en adelante pero sumándole 3, uno partido…
A: *(Escribe ¼, 1/5, 1/6, 1/7)*
E: Y este, por ejemplo…
A: *(Escribe 1/9)*
E: Vale, bueno, ahora quiero que te fijes en una cosita, José Manuel, ¿qué está pasando con los números ahora? Cada vez que nosotros vamos poniendo números aquí, ¿qué va pasando?
A: Que se van a dividir.
E: Y al dividir, ¿qué va pasando con los números decimales?, ¿qué van aumentando o disminuyendo?
A: Disminuyendo.
E: Y a donde irán, cada vez que este número es mayor, ¿qué va a pasar ahí?
A: Números negativos.
E: ¿Va a pasar a los números negativos?

A: No.
E: No. ¿Qué va a pasar?
A: Llega hasta cero.
E: Llega hasta cero, quédate con la copla esa. Bien, y aquí igual, va a llegar hasta cero y se va a parar, muy bien. A la vista de los resultados, ¿quién tiene mayor número C o D?
A: C. *(IV1B)*
E: C, este empieza en 1 y termina…
A: En cero.
E: En cero, y este empieza…
A: En 0,25.
E: Y entonces, que hay mayor cantidad de números aquí, ¿no? *(Señalando a C)*.
A: Sí.

*E(*IV2*): Te lo pongo así mejor, vamos a ver este último solo, el de arriba estaba bien, 1, 0.5, 0.3, este sería ¼.
A: *(Escribe ¼, 1/5, 1/6, 1/7)*
E: Bien, y aquí he puesto 1/100, que sería… ponlo ahí 1/100, para que tú sepas que veas que va disminuyendo, ¿vale?, y aquí empezamos por 3, ¼, 1/5.
A: *(Escribe 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10)*
E: Muy bien, y este, por ejemplo, sería…
A: *(Escribe 1/100)*
E: Vale, a la vista de los resultados, lee tú ahora, que los números van otra vez, ¿qué es lo que está pasando, José Manuel?
A: Que se van a cero.
E: Y aquí pasa exactamente lo mismo, este empieza en 1 y este en 0,25, a la vista de los resultados, ¿quién tiene mayor número C, D o son iguales?
A: C. *(IV2B)*

CURSO: 3 º E. S. O.

1) Alumno: Lu.15,00 Nombre: Lucía Fecha de Nacimiento: 08/05/00

E: Entrevista nº 1 del día 26 de Febrero, con Lucía T. B. de 3º A, dime la edad que tienes, Lucía.
A: 15, bueno 14.
E: 14, mira lee el apartado A y contesta, en voz alta.
E: Sea el conjunto de números desde n=l a n=10, representa cada número en las casillas siguientes.
A: 1, 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9, 10.
E: Muy bien. Fácil, ¿no? Vamos a ver el segundo ahora.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=7. A cada número le sumamos 3. Representa ahora n+3 en las casillas.
E: En vez de 1 es…
A: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: Bien, ¿vale?, como era hasta el 7, más 3, 10 y ahora contesta a la pregunta.
A: ¿Tienen la más cantidad de números A que B? Explica tu respuesta.
A: Sí, porque A, en el apartado A tenemos que poner del 1 al 10…
E: ¿Cuántos números tiene?
A: 10.
E: ¿Y el apartado B?
A: Y el apartado B si a n le vamos sumando 3, al final acaba en 10.
E: ¿Y cuántos números tiene?
A: 10.
E: ¿10? Cuéntalos: 1, 2, 3, 4, 5...
A: 7, 7.
E: ¿Vale? ¿Quién tiene más números?
A: El primero.
E: ¿Cuántos números más?
A: 3.
E: Muy bien. Vamos a ver el apartado C y D, léelo primero.
A: Sea el conjunto desde n=1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Yo quiero que entiendas lo que es, en adelante, ¿qué significa eso, Lucía?
A: Que siguen…
E: Que siguen sin parar, entonces pondríamos aquí…
A: 1, 2, 3, 4.
E: Aquí no vamos a estar toda la mañana, he puesto puntos suspensivos, y aquí pon el número que te dé la gana.
A: *(Escribe 22)*
E: Por ejemplo y esto otra vez puntos suspensivos, Lucía. ¿Tú ves la diferencia que existe entre estos puntos suspensivos y estos? *(señala la pantalla)*, ¿quién tiene más números aquí en estos puntos suspensivos o en estos puntos suspensivos?
A: Los segundos.
E: Los segundos, aquellos, ¿vale?, en concreto, aquí cuántos números podrá haber, pues unos 18, 17. ¿Estaría claro, Lucía, eso?
A: Sí.
E: Bueno, el apartado D es lo mismo que el anterior, es decir, ahora vamos a tener que sumarle de nuevo 3, entonces desde 1 en adelante hay que sumarle 3, luego el primero sería…
A: 4, 5, 6 y 7.
E: Seguiríamos y aquí…
A: ¿Qué se le sumaba?
E: 3.
A: Al que yo quiera, ¿no?
E: Al que tú quieras, va a coincidir con alguno, si quieres coger el correspondiente a este, puedes cogerlo, sino puedes poner cualquiera.
A: *(Escribe 25)*
E: Tú has cogido el correspondiente a este *(señala arriba)* y esto sigue adelante, bien, ¿tiene la misma cantidad de números C que D?
A: Yo creo que sí.
E: ¿Por qué?
A: Porque en número, en cantidad hay un montón. *(I1**1**)*
E: Hay un montón, ¿aunque este empieza en 1 y este empiece en 4?
A: Sí.

*E(*II1*): Ficha Nivel 2, lee la primera pregunta y contesta, sea el conjunto…
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=5000. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Entonces pondríamos aquí…
A: 1, 2, 3, 4, 5.
E: No vamos a estar aquí escribiendo todos los números luego los tres últimos serían…
A: El último sería 5000, este sería 4999 y 4998.
E: Parece ser que estos puntos suspensivos habrá unos 4994. Vamos a ver el siguiente, sea el conjunto…
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n= 4500. Representa ahora n+500 en las casillas siguientes.
E: Vamos a sumar 500, ¿vale? En vez de 1 ponemos...
A: 501, 502, 503, 504 y 505.
E: Seguiríamos, ¿verdad?, ¿y cuáles serían los últimos? Pues mira el último es 4500 y hay que sumarle 500, el último será.
A: 5000.

E: Y el anterior, por lógica sin necesidad de hacer cálculo, sería…
A: 4999.
E: Y el anterior del anterior.
A: 4998.
E: Muy bien, ¿tiene la misma cantidad A que B?
A: Sí.
E: Uno empieza…
A: Por 1.
E: Y termina.
A: En 5000.
E: Y el otro empieza…
A: En 501 y acaba en 5000.
E: ¿Cuál tendría más?
A: El primero.
E: ¿Cuánto más?
A: Más de la mitad.
E: Más de la mitad, no. Mira como empieza uno y como empieza el otro.
A: El primero empieza en 1 y el otro empieza en 501.
E: Luego qué cantidad, cuántos números…
A: 500.
E: Bien, vamos a ver el segundo, C. Sea el conjunto igual que l anterior, del 1 en adelante.
A: 1, 2, 3, 4.
E: Siguen adelante, pones el que te dé la gana.
A: *(Escribe 22)*
E: Vale, y siguen adelante, ahora hay que sumarle 500.
A: Vale, 501, 502, 503, 504.
E: Siguen adelante, pondríamos este.
A: 522.
E: Has cogido el que corresponde a este, podías haber cogido otro. La pregunta es fácil, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: C tiene más cantidad de números.
E: Aunque esto vaya en adelante y empieza en 1.
A: Sí, y el otro en 501. *(II1B)*

*E(*II2*): Vamos a mirarlo aquí. Vamos a verlo de esta forma, ¿vale?, aunque este, has visto, te ha salido bien. 1, 2, 3, sigue tú.
A: 4, 5, 6.
E: Y estos últimos dijimos que eran 4999, 4998, perdón.
A: *(Escribe 4998, 4999, 5000)*
E: Aquí hemos puesto 501, porque es sumando.
A: 502, 50, 504, 505 y 506.
E: Y estos ya eran los últimos, ídem de lo mismo.
A: *(Escribe 4998, 4999, 5000)*
E: Bien, como has visto que este empieza y acaba, y este empieza y acaba y has visto que este era mayor que este (señala el de arriba). Y el segundo te lo he puesto de esta forma, 1, 2, 3.
A: 4, 5, 6, 7.
E: Vale, puntos suspensivos y yo te he puesto un número más gordo, tú pusiste 22 y yo te he puesto 1000 y siguen adelante. Y el de abajo también hay que sumarle, 1, 501, 502.
A: 503, 504, 505, 506, 507.
E: Y puedes poner el que tú quieras o el que le corresponde a este sería…
A: 1500.
E: Aquí puedes poner cualquiera, si hubiera sido 1700, pues puede ser uno de por aquí *(señala los puntos suspensivos)* y esto sigue adelante. Bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: C tiene más cantidad de números.
E: ¿Por qué?
A: Porque C empieza en 1 y D en 501. *(II2B)*
E: ¿Aunque no acabe ninguno de los dos?
A: *(Asiente con la cabeza)*

2) <u>Alumno:</u> Cl.14,10 Nombre: Claudia Fecha de Nacimiento: 15/07/00

E: Entrevista nº 1 del día 4 de Marzo del 2015, con Claudia R. C. de 3º B, ¿qué edad tienes, Claudia?
A: 14.
E: 14 años, muy bien. Claudia, lee el enunciado e intenta contestar la pregunta, ¿vale?, en voz alta.
A: Sea el conjunto de números de nº 1 a nº 10, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Vale.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Vale. Fácil, ¿no? Vamos a ver el apartado B.
A: Sea el conjunto de números desde nº 1 a nº 7. A cada número le sumamos 3, representa ahora n+3 en las casillas.
E: En vez de poner 1 hay que sumarle 3, ¿vale?
A: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: ¿Por qué es 10?, porque como es 7 más 3, el último, muy bien. A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: …Son iguales, ¿no?
E: ¿Cuántos números tiene A?
A: A ver, A tiene 10 números.
E: ¿Y B cuántos tiene?
A: ¡Ah!, claro, claro…vale, vale, tiene 7.
E: ¿Quién tiene más?
A: A, es que creí que era sumando.
E: Vale, vamos a ver el apartado C y D, ¿vale?, dice…léelo.
A: Sea el conjunto de números desde nº 1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.

E: Vale, aquí ya es de 1 en adelante, ¿entiendes lo de en adelante?
A: Sí, 1, 2, 3, pero en todas estas. *(Señala las casillas)*
E: Vale, vamos a ponerlo, aquí pondrías tú.
A: 1, 2, 3, 4.
E: Seguiríamos poniendo, ¿verdad?, y aquí pon el número que tú quieras.
A: *(Escribe15)*
E: Por ejemplo 15, eso significa que esos puntos suspensivos, ¿cuáles son?
A: 5, 6, 7, 8, hasta 15.
E: Y después puntos suspensivos, ¿hacia dónde iría esto?
A: Hasta el número que tú quieras.
E: Hasta el número que tú quieras, no.
A: Hasta infinito.
E: Vale. ¿Quién tiene más cantidad de números, estos puntos suspensivos o estos? *(Señala en la pantalla)*
A: Los de la derecha.
E: Muy bien, ya tenemos entonces formado el primer conjunto ese, vamos a ver el segundo conjunto, léelo.
A: Sea el conjunto de números desde nº 1 en adelante. A cada número le sumamos 3. Representa ahora n+3 en las casillas siguientes.
E: Igual que el anterior, entonces en vez de poner 1 pondremos…
A: 4, 5, 6, 7.
E: Y aquí ponemos todos los que corresponda y aquí podíamos poner…
A: 17.
E: 17, tú habrás cogido el 14 de aquí *(señala los puntos suspensivos de arriba)* y le has sumado 3, ¿vale?, también podías haber cogido el 15 y haberle sumado 3, y sigue adelante. A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Iguales.
E: ¿Por qué?
A: Porque tienen los mismos números arriba que abajo, lo que pasa es que abajo le ha sumado 3, ¿no?
E: Pero uno empieza en 1.
A: Y otro empieza en 4, pero si lo sumamos, ah claro porque le falta los 3, tienen la misma cantidad de números, aquí tiene 1, 2, 3, 4, tiene 4 y el otro 4 números. Tú que dices de sumar o de…
E: No, no números, cantidad de números.
A: No, el de arriba, de arriba.
E: Uno empieza en 1.
A: Aquí hay 15.
E: No, tú has puesto el 15, pero no es así, podía haber puesto 20, 100, 1000000, 3000000.
A: Igual, da lo mismo.
E: ¿Aunque uno empiece en 1 y otro empiece en 4?
A: Sí, ¿no?
E: No sé, te pregunto.
A: Me estoy rayando un poquillo, sí son lo mismo, aquí hay 4 números, y ahí 4 números.
E: ¿Aunque este empiece en 1 y este empiece en 4?
A: Sí. *(I12)*

*E(*II1*): Venga, Ficha Nivel 2, léelo, Claudia.
A: Sea el conjunto de números desde nº 1 a nº 5000. Representa cada número en las siguientes casillas.
E: Venga, empezamos, este sería…, ponlo.
A: 1, 2, 3, 4, 5.
E: Aquí seguirían, vamos a poner los 3 últimos, si no vamos a estar toda la mañana, ¿no?, sería entonces…
A: 4998, 4999, 5000.
E: Ya tienes hecho el conjunto primero, ¿vale? Eso significa que los puntos suspensivos estos hay unos cuatro mil novecientos y pico, ¿vale? Vamos a ver el de abajo, sea el conjunto del 1 al 4500 y ahora le sumamos 500, en vez de poner 1 pongo…, en vez de 2…, estamos sumando 500…
A: 501, 502, 503, 504, 505.
E: Y ahora, ¿cuál serían los 3 últimos?, vamos a ver, el último es 4500, pero como le sumamos 500, se convierte en 5000…y los dos de delante qué crees que dará.
A: 5000… 4999, 4998.
E: Bien a la vista de los resultados, en estos dos conjuntos, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: Iguales.
E: ¿Uno empieza en? *(Señala el A)*
A: 1.
E: ¿Y termina?
A: En 5000.
E: ¿Y el otro empieza en? *(Señala el B)*
A: En 501.
E: ¿Y termina?
A: En 5000, que hay más en el de abajo, ¿no?
E: Contesta a esta pregunta, ¿cuál de los dos tiene mayor número arriba, abajo o son iguales?
A: Iguales.
E: ¿Iguales? Uno empieza en 1 y termina en 5000, ¿cuántos hay en el primero?
A: 5000.
E: Y el otro empieza en 501 y termina en 5000, ¿cuántos hay más o menos?
A: Pues 500 menos.
E: Entonces, ¿cuál es mayor?
A: El A.
E: Vamos a ver ahora de 1 en delante otra vez, ¿qué pondríamos?
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Sigue en adelante y aquí pon el número que tú quieras.
A: *(Escribe 15)*

E: 15, otra vez, te ha gustado el 15 y sigue adelante. Ahora vamos a hacer lo mismo sumando 500, en vez de 1 pongo…
A: *(Escribe 501, 502, 503, 504)*
E: Bien, sigo adelante, aquí pongo el que corresponde arriba o cualquier otro, da igual.
A: *(Escribe 515)*
E: Tú has puesto el que corresponde a este, bien a la vista de los resultados, Claudia, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: El C.
E: ¿El C?
A: El C tiene más.
E: Aunque empiece pero no termine, empieza en 1 pero no termina, 501, que pone el D, pero no termina, y tú crees que el C tiene más que D.
A: Sí. *(II1B)*

*E(*II2*): Vamos a verlo así, que es muy parecido al que hemos hecho anteriormente, vamos a verlo de otra distribución, el primero sería 1, 2, 3, sigue tú.
A: *(Escribe 4, 5, 6)*
E: Sigue adelante y este, los últimos son, ya sabemos nosotros 4998, 4999…
A: *(Escribe 4998, 4999, 5000)*
E: Esto lo has hecho tú anteriormente y el de abajo era el correspondiente sumándole 500, 501, 502…
A: *(Escribe 503, 504, 505, 506)*
E: Y esto ya sabemos lo que nos va a dar 4998, 4999 y finalmente 5000.
A: *(Escribe 4998, 4999, 5000)*
A: Y has dicho tú que tiene mayor cantidad de números A que B, muy bien. El de abajo, vamos a verlo de esta forma 1, 2, 3, 4…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Sigue adelante, yo he puesto el número 1000, no 15 como tú, para que veas se puede poner el número que tú quieras. Y el de abajo pues vamos a poner el correspondiente, 501; 502…
A: *(Escribe 503, 504, 505, 506, 507)*
E: Puedes poner el correspondiente a 1000 o cualquier otro.
A: *(Escribe 515)*
E: 515, que corresponde a uno que estaría por aquí *(señala los puntos suspensivos)*, no, ¿Claudia? Bien, a la vista de los resultados, viendo que este empieza, pero no termina, que empieza, pero no termina, ¿quién tiene mayor cantidad de números C, D o son iguales?
A: El C tiene más.
E: ¿Aunque no termine?
A: Sí. *(II2B)*

3) <u>Alumno:</u> Pa.14,09 Nombre: Pablo Fecha de Nacimiento: 27/08/00

E: Entrevista nº 2 del día 4 de Marzo del 2015, con Pablo S. D. de 3º B, ¿qué edad tienes, Pablo?
A: 14 años.
E: 14 años, Pablo, mira la Ficha Nivel 1, lee el apartado A en voz alta y contesta.
A: Sea el conjunto de números de n 1 a n 10, representa cada uno en las casillas siguientes.
E: Pondríamos aquí…
A: *(Escribe 1, 2, 3 ,4 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: ¿Vale?, era fácil, ¿no? Vamos a ver el de abajo, apartado B, sea el conjunto…
A: Sea el conjunto de números desde n 1 a n 7. A cada número le sumamos 3. Representa, ahora n+3 en las casillas.
E: Entonces en vez de poner 1 hay que sumarle 3…
A: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: No hace falta poner más porque el último era 7, al sumar 3, da 10, ¿de acuerdo? A la vista de los resultados, de estos dos conjuntos numéricos, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: ¿Quién tiene más cantidad de números? A.
E: A, ¿cuánto más?
A: 3 números.
E: Muy bien. Vamos a ver el apartado C y D, Pablo.
A: Sea el conjunto de números desde n 1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Vale, aquí ya empieza en adelante, significa que no va a tener fin, ¿vale?, el primero sería…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Sigo adelante, para no estar toda la mañana aquí poniendo números, son los puntos suspensivos y aquí pon el número que tú quieras.
A: *(Escribe 456)*
E: Por ejemplo, y sigue en adelante. Vamos a ver una cosita, Pablo. ¿Estos puntos suspensivos que están aquí son los mismos que éstos que están aquí? *(Señala en la pantalla)*
A: Los puntos suspensivos representan los números en adelante, así que…
E: Pero en este, ¿qué hay más cantidad de números aquí o aquí? *(Señala en la pantalla)*
A: Los dos son iguales.
E: ¿Sí? ¿Cuántos números hay aquí?
A: Son diferentes porque en el de la izquierda hay menos porque en la derecha son consecutivos, no tienen fin.
E: Aquí habría unos cuatrocientos cincuenta y tantos, y aquí a saber lo que hay. Vamos a ver entonces el apartado D, es lo mismo que el

anterior, el conjunto de 1 en adelante y a cada número le sumamos 3, ¿vale?
A: 4, 5, 6, 7.
E: Sigo adelante y este sería…
A: 45.
E: 45, eso significa que será del 42 de por ahí *(señala los puntos suspensivos de la izquierda),* ¿vale?, siguen adelante, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: ¿Quién tiene más cantidad de números? Son iguales porque son consecutivos
E: ¿Aunque uno empiece en 1 y otro en 4?
A: ¡Ah! no, espera, el D tiene más, porque tiene más.
E: ¿Cuál tiene más?
E: El D. *(II1B)*

*E(*II2*): Vamos a verlo aquí, el de arriba lo hemos hecho de esta forma, ¿vale, Pablo? 1, 2, 3; sigue tú.
A: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: Y el otro sería 4, 5.
A: *(Escribe 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y tú me has dicho que hay más arriba que abajo en concreto 3. El de abajo vamos a ponerlo de esta forma 1, 2, 3; sigue tú.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Y yo te he puesto el 100, lo he puesto *(Señala con el cursor)* Y abajo hemos puesto… En vez de 1 he puesto el 4, en vez de 2 he puesto…
A: 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: Y aquí pongo el correspondiente, si pongo el que corresponde pues sería, tú has cogido el 97.
A: *(Escribe100)*
E: ¿Quién tiene mayor cantidad de números? Tú me has dicho el del A.
A: El del A.
E: ¿Vale? Vamos a ver ahora la segunda situación. 1 en adelante, sería 1, 2, 3 sigue tú.
A: 4, 5, 6, 7.
E: Sigo adelante, ahí pones el número que tú quieras
A: *(Escribe 45)*
E: Sigue adelante, ¿vale? Y el de abajo había que sumarle 3, en vez de 1 sería…
A: *(Escribe 4, 5, 6)*
E: Y en vez de 45, o el número que tú quieras no tiene que ser con el de arriba.
A: *(Escribe 48)*
E: Bien, estamos en la segunda situación, tienen principio pero no tienen final, tienen principio, pero no tienen final aquí le hemos quitado 3, ¿Cuál de los dos tiene mayor cantidad de números C, D o son iguales?
A: El D.
E: ¿Aun así, quitándole 3?
A: Aun quitándole 3. *(II2B)*

4) <u>Alumno:</u> Al.14,06 Nombre: Alejandro Fecha de Nacimiento: 29/11/00

E: Entrevista nº 3 del día 4 de Marzo con Alejandro S. O. de 3º B, ¿qué edad tienes, Alejandro?
A: 14 años.
E: 14 años muy bien. Bueno pues, Alejandro, lee el apartado A del Nivel 1 e intenta contestar. En voz alta.
A: ¿Pero no tengo que escribir aquí, no?
E: Sí, lo lees y lo pone.
A: Sea el conjunto de números de n=1 a n= 10, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Vale. Fácil, ¿no? Vamos a ver el segundo.
A: Sea el conjunto de números desde n 1 a n 7. A cada número le sumamos 3 representa ahora n+3 en las casillas.
E: En vez de 1 hay que sumarle 3, daría entonces.
A: En la siguiente casilla le pongo ahora más tres.
E: No, en la primera sería en vez de 1, sería 1 más 3…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y finalmente 7, porque termina en 7, más 3, 10. Vale. Vista los resultados que aparecen ahí, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: El A.
E: El A tiene, ¿cuántos números más?
A: 10.
E: ¿Y el de abajo tiene?
A: 7.
E: Bien, vamos a ver el apartado C y D, sea el conjunto, lee tú.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: ¿Entiendes lo de adelante?
A: Sí, a partir de 1.
E: Ahí va, entonces ponemos 1.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Seguiría en adelante, ¿verdad? y aquí pon el número que tú quieras.
A: *(Escribe10)*
E: Muy bien, entonces significa que los puntos suspensivos esos ¿cuáles son?
A: 5, 6, 7, 8, y 9.

E: Vale y siguen adelante, es decir, no termina, ¿de acuerdo? Muy bien, ahora vamos hacer el apartado D, léelo.
A: Sea el conjunto de números desde 1 en adelante. A cada número le sumamos 3. Representa ahora n+3 en las casillas siguientes.
E: Muy bien, bueno, vamos a ir poniendo, en vez de 1 ponemos.
A: 4, 5, 6, 7.
E: Y aquí ponemos.
A: *(Escribe 13)*
E: Vale has cogido el correspondiente al de arriba, ¿no? Y esto sigue adelante, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Son iguales.
E: ¿Aunque este empiece en 1 y este empiece en 4? *(Señala los dos apartados)*
A: Tienen las mismas cantidades de números.
E: ¿Por qué?
A: Porque es equivalente, en plan, arriba va desde 1 al 10.
E: No, el 10 lo has puesto tú.
A: Va desde el 1 al 4.
E: No, tiene principio, 1, pero no tiene final, eso tienes que tener en cuenta.
A: Vale, vale.
E: Igual que el D tiene principio pero no tiene final *(señala apartado D)*, ¿de acuerdo?, entonces tú respuesta cuál es.
A: Que los dos son…, que tienen la misma cantidad de números. *(I12)*

*E(*II1*): Vamos a ver lo que hay por aquí, Ficha Nivel 2.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=5000. Representa cada número en las siguientes casillas.
E: Es fácil, ¿no?, sería…
A: 1, 2, 3, 4, 5.
E: Sigue adelante y los 3 últimos serían…
A: 4998, 4999, 5000.
E: Entonces parece ser que los puntos suspensivos éstos habría unos cuatro mil novecientos y pico. Ahora sea el conjunto del 1 al 4500 a cada uno le sumamos 500, ¿vale?, en vez de 1…
A: 501, 502, 503, 504, 505.
E: Vamos a ver, los 3 últimos cuál le corresponde, el último es 4500 como le sumamos 500, el último será…y ya por lógica…
A: 5000… 4999, 4998.
E: Te lo explico, como es el anterior de 4500, sería 4499 como le sumo 500, se convierte otra vez en 4999. Bien a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: Son iguales.
E: ¿Este empieza? *(Señala el A)*
A: Desde el 1.
E: ¿Y termina?
A: En 5000.
E: ¿Y este empieza? *(Señala el B)*
A: En 501.
E: ¿Y termina?
A: Hasta el 5000.
E: ¿Y son iguales?
A: No, no, no, el de arriba tiene más números.
E: ¿Cuántos más tiene arriba que abajo?
A: Arriba tiene 5000 y abajo tiene 4500
E: Vamos a ver ahora el C y el D, son muy parecidos, ¿vale? El C, sea n el conjunto desde 1 en adelante y ahora le sumamos 500, vale, de 1 en adelante sería entonces…
A: 1, 2, 3, 4.
E: Pon el número que quiera aquí.
A: *(Escribe 10)*
E: Vale y eso sigue adelante. Bien vamos a ver el apartado D, sea n el conjunto de 1 en adelante y ahora le sumamos 500, luego el primero sería…
A: 501, 502, 503, 504.
E: Y este por ejemplo…
A: 510.
E: Puede ser, puede ser cualquiera, has puesto el correspondiente y sigue adelante. Bien a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: El C tiene más cantidad de números.
E: ¿Por qué?
A: Porque empieza desde 1 pero no termina y sin embargo el D empieza desde 501 y no termina, entonces el C tiene 500 números más. *(II1B)*

*E(*II2*): Vamos a poner así de esta forma, a ver si lo ves mejor. Este lo has hecho ya tú, 1, 2, 3 sigue tú.
A: *(Escribe 4, 5, 6)*
E: Y este los últimos 4998, 4999 y este…
A: *(Escribe 4998, 4999, 5000)*
E: Y el de abajo era el correspondiente sumándole 500, 501, 502…
A: *(Escribe 503, 504, 505, 506)*
E: Y aquí pues los 3 últimos, ponemos 4998, 4999 y finalmente 5000.
A: *(Escribe 4998, 4999, 5000)*
E: Y has dicho tú que tiene mayor cantidad de números A que B, muy bien. Vamos a ver el de abajo, el de abajo hemos puesto el 1, 2, 3, sigue tú.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Y yo aquí he sido un poquito más bestia, ¿vale?, le he puesto el 1000, le podía haber puesto 1000000, el que tú quieras, y esto sigue adelante. Y ahora hemos puesto la correspondencia si es 1, 501; si es 2, 502; si es 3…
A: 503, 504, 505, 506, 507.

E: Y el correspondiente de 1000, tú puedes poner 1000, el correspondiente sería…
A: *(Escribe 1500)*
E: Si hubiera puesto otro, pues sería el correspondiente de aquí o de aquí *(señala los puntos suspensivos)*, si hubiera puesto el 1700, sería el correspondiente del 1200 de arriba y siguen adelante. A la vista de los resultados y que tienen un principio y no un final tanto uno como otro, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: No tienen final, ¿no?
E: No, no tiene final.
A: Entonces tiene más números el C. *(II2B)*
E: El C tiene más.

5) <u>Alumno:</u> Fa.15, 03 Nombre: Fátima Fecha de Nacimiento: 17/01/00

E: Ficha Nivel 1 con Fátima B. F. 3º A, ¿qué edad tienes, Fátima?
A: 15.
E: 15 años muy bien, Fátima, lee cada uno de los enunciados e intenta contestar, el apartado A.
A: Sea el conjunto de números de n= 1 a n=10, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Vale, aquí pondríamos entonces.
A: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: Muy bien. Vamos a ver el apartado B lo que nos dice.
A: Sea el conjunto de números desde nº 1 a nº 7. A cada número le sumamos 3 representa ahora n+3 en las casillas.
E: entonces el primero sería, estamos del 1 al 7 y hay que sumarle 3.
A: Si a 1 le sumo 3.
E: Se queda entonces…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y el último era el 7, se le suma 3; sería... A la vista de los resultados, Fátima, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: Cantidad de números, A.
E: Vamos a ver el apartado C ahora, léelo.
A: Sea el conjunto de números desde nº 1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: El primero sería…
A: 1, 2, 3, 4.
E: Aquí podríamos estar, pongo puntos suspensivos, ¿qué significa, Fátima?
A: Que hay más números.
E: Vamos a poner uno aquí.
A: El 100.
E: 100, eso significa que estos puntos suspensivos…
A: Van hasta el 100.
E: Hasta el 100, que no son infinitos, que hay noventa y tantos números.
E: Y estos puntos suspensivos, ¿significa?
A: Que llegan hasta el que yo quiera.
E: ¿Hasta el que tú quieras?
A: No, hasta el infinito.
E: Vamos a ver el apartado D, ahora, es igual, muy parecido al anterior, sea el conjunto de 1 en adelante. A cada número le sumamos ahora 3. En vez de 1 pongo…
A: 4, 5, 6, 7.
E: Así podíamos estar todo el tiempo, y ahora si quieres pones el correspondiente de ahí arriba u otro.
A: *(Escribe 100)*
E: 100, vale, *(señala los puntos suspensivos)* sería por ejemplo aquí a lo mejor estaría el noventa y siete más 3, 100. También podías haber puesto el 103, ¿por qué?
A: Porque a 100 le ha sumado 3.
E: Y podríamos seguir, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Tiene más números el D.
E: El D, ¿por qué?
A: Porque le ha ido sumando a todos los números 3.
E: Pero aquí por ej*emplo (señala apartado C)*, no está ni el 1, ni el 2 ni el 3.
A: Pero está…
E: ¿Dónde están? Yo digo cantidad de números.
A: Entonces el C.
E: ¿El C tiene más cantidad de números? ¿Aunque sigan en adelante?
A: En los dos hay lo mismo.
E: Aclárate, Fátima.
A: En los dos hay lo mismo.
E: ¿Por qué?
A: Porque ambos llegan al infinito. *(I1**3**)*

*E(*II1*): Ficha Nivel 2, situación 1, Fátima, lee el apartado A.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=5000. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien, aquí pondríamos.
A: 1, 2, 3, 4, 5.
E: Aquí pondríamos un montón y después los tres últimos, ¿cuáles serían? ¿Ponemos el último?
A: 5000, 4999, 4998.
E: Y los puntos suspensivo aquí, significa que son del 5 hasta el 4998. Muy bien, ahora vamos a ver el apartado B lo que nos dice.

A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=4500. A cada número le sumamos 500, representa ahora n+500 en las casillas.
E: Entonces en vez de 1…
A: 501, 502, 503, 504, 505.
E: Y ahora los 3 últimos, como el último es 4500, Fátima, al sumarle 500 se queda…
A: 5000, 4999, 4998.
E: De acuerdo, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: Serían iguales.
E: ¿Iguales? ¿Cuántos tiene el primero?
A: ¡Ah! bueno tiene más números el A que va desde el 1 hasta el 5000.
E: Y el otro empieza en 501 y va hasta 5000. ¿Cuántos más tiene A que B?
A: 500.
E: Vale. Vamos al C que es muy parecido, léelo.
A: Sea n el conjunto de número desde 1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Vale, pondríamos entonces.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Siguen adelante y aquí pon el número que te dé la gana.
A: *(Escribe 50)*
E: 50, luego los puntos suspensivos estos significan.
A: Del 5 hasta el 50.
E: ¿Y estos puntos suspensivos? *(Señala los últimos puntos suspensivos)*
A: Que llegan hasta el infinito.
E: Vale, vamos a ver lo que hay que hacer en el de abajo, en el D, que tiene mucha relación con lo anterior, léelo.
A: Sea n el conjunto de números desde 1 en adelante, a cada número le sumamos 500, representa ahora n+500.
E: En vez de 1 sería.
A: 501, 502, 503, 504.
E: Y del 50 por ejemplo si quieres…
A: 100.
E: ¿Qué le estás sumando? 100 no puede ser, si le estamos sumando 500.
A: ¡Ah!, 550.
E: Si quieres coger este de aquí, siguen en adelante, muy bien, a la vista de los resultados, ¿Quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Son iguales.
E: ¿Porqué?
A: Porque uno va desde el 1 hasta el 50.
E: No, no, no hasta el 50 no va.
A: Bueno van hasta el infinito y el otro también. La misma cantidad de números. *(II1**3**)*

*E(*III1*): Ficha Nivel 3, situación 1, lee el apartado A.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=10, a cada número le correspondemos su inversa, es decir 1/n. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Bien, entonces el primero ¿sería?
E: 1/1, en vez de 2, ½…
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9 y 1/10)*
E: Bien, vamos a ver el siguiente, sea el conjunto…
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=7, a cada elemento le correspondemos su inversa más 3, es decir, representa 1/n+3 ahora esos números en las casillas siguientes.
E: El primero sería…
A: *(Escribe ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10)*
E: El último porque es hasta el 7. ¿Qué le está pasando a los números, Fátima?
A: Que se van poniendo decimal.
E: Y ¿qué pasa con los decimales?, en este caso, ¿va creciendo o disminuyendo?
A: Va disminuyendo.
E: ¿Quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: Tiene más números el A.
E: Muy bien, vamos ahora al de abajo, apartado C, sea el conjunto de 1 en adelante a cada elemento le corresponde su inversa, vale, otra vez.
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼)*
E: Sigue en adelante y aquí puedes poner el que te dé la gana.
A: *(Escribe 1/50)*
E: Bueno, vamos a ver el apartado D, sea el conjunto de 1 en adelante.
A: *(Escribe ¼, 1/5, 1/6, 1/7)*
E: Y este, sería poner el correspondiente al de arriba o el que tú quieras.
A: *(Escribe 1/53)*
E: Bien, ¿qué va a pasar aquí, Fátima?, vamos a empezar a valorar un poquito, es decir, empieza en 1, va disminuyendo poquito a poco, ¿verdad? ¿A dónde llegará?
A: Al cero.
E: ¿Y aquí?
A: Y ahí van a llegar hasta el cero.
E: Bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: La misma cantidad de números.
E: ¿Por qué?
A: Porque uno va del 1 en adelante y el otro también, pero al segundo le sumas 3, entonces tiene mayor número el C, no son iguales.
E: ¿No son iguales o son iguales? Tú dirás.
A: No son iguales.
E: ¿Por qué no son iguales ahora?
A: Porque uno tiene más cantidad de números.
E: Pero esto es parecido al anterior, ¿no? ¿Por qué diciendo ahora 1/n sigues diciendo que tiene más cantidad que n?

A: Porque va desde el 1.
E: ¿Cómo?
A: Porque el D tiene 3 números menos que…
E: ¿No es la misma circunstancia anterior?
A: No tiene la misma cantidad de números.
E: ¿Qué diferencia hay entre este ejercicio y los anteriores? ¿Son números iguales, son números naturales?
A: No, son números decimales.
E: ¿Qué cambia con ellos, entonces?
A: Que van al cero, no sé…
E: Que van al cero, tú lo estás diciendo. Entonces, a la vista de los resultados, Fátima, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: El C.
E: ¿Por qué?
A: Porque el D tiene 3 números menos, porque va desde ¼ y el C va desde 1/1. *(III1B)*

*E(*III2*): Vamos a verlo de esta forma, este *(Se le pone la tarea III)*. Vamos a ir al de abajo, yo te lo he puesto arriba para que se vea, ¿vale?, este sería 1/1, que sería…1 ponlo… es lo mismo de antes.
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7)*
E: Yo te he puesto aquí 1/100.
A: *(Escribe 1/100)*
E: Y este ahora le vamos a sumar 3, luego sería, te lo he puesto ahí arriba.
A: *(Escribe 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10)*
E: Y este el que tú quieras, si quieres el correspondiente arriba.
A: *(Escribe 1/103)*
E: A la vista de los resultados ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Tiene más cantidad de números el C que D porque van a llegar a cero. *(III2B)*

6) <u>Alumno:</u> Pa.14,11 Nombre: Pablo Fecha de Nacimiento: 07/04/00

E: Entrevista nº 2 del día 22 de Abril, con Pablo B. R. de 3º A. Pablo, ¿qué edad tienes?
A: 14 años.
E: 14 años, ¿cuándo los cumples?
A: En mayo.
E: Muy bien, Pablo, mira es muy fácil lee el enunciado A e intenta contestarlo, en voz alta, por favor.
A: Sea el conjunto de números de nº 1 a nº 10, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien, luego aquí tendremos que poner.
A: El 1, lo pongo, ¿no?
A: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: Muy bien. Vamos al apartado B, léelo.
A: ¿Lo leo otra vez? Sea el conjunto de números desde nº 1 a nº 7. A cada número le sumamos 3 representa ahora n+3 en las casillas.
E: Parece ser que en vez de 1 hay que sumarle 3, con lo cual es…
A: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: Y ya era el último porque como era hasta el 7, Pablo, 7 más 3; 10, por eso te lo he puesto en sombreadito para que no sigas. A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: Tiene más cantidad de números el A.
E: Vamos a ver el apartado C, léelo.
A: Sea el conjunto de números desde nº 1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Luego aquí hay que poner.
A: 1, 2, 3, 4.
E: Podemos seguir en adelante y aquí pones el número que tú quieras.
A: ¿El que yo quiera? *(Escribe 99)*

E: Muy bien estos puntos suspensivos, ¿cuántos números hay ahí?, más o menos.
A: Pues habría noventa y…
E: Noventa y tantos, y ¿estos puntos suspensivos, ¿qué significa?
A: Que sigue adelante.
E: ¿Hacia dónde?
A: Hacia el 100, 101 y más.
E: Hacia más, hasta que me harte.
A: Hacia adelante.
E: Y ¿cuál es?
A: Infinito.
E: Vale, ten en cuenta eso, el apartado D, léelo.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. A cada número le sumamos 3. Representa ahora n+3 en las casillas siguientes.
E: Vale, en vez de 1 tiene que ser.
A: 4, 5, 6, 7.
E: Sigue adelante y ahora pon si quieres el correspondiente de arriba o sino el que tú quieras también.
A: Pongo 102.
E: Vale y sigue en adelante, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Son iguales, ¿no?
E: ¿Por qué?
A: Porque siguen hasta infinito los dos. *(I13)*

*E(*II1*): Ficha Nivel 2, situación 1, Pablo, lee el apartado A e intenta contestar.
A: Sea el conjunto de números desde nº 1 a nº 5000. Representa cada número en las siguientes casillas.
E: Muy bien, pues el primero sería…
A: 1, 2, 3, 4, 5.

E: Seguirían aquí, pero no vamos a ponerlos todos, entonces vamos a poner los tres últimos.
A: *(Escribe 4998, 4999, 5000)*
E: Aquí ya son números más grandes, apartado B.
A: Sea el conjunto de números desde nº 1 a nº 4500. A cada número le sumamos 500 representa ahora n+500 en las casillas.
E: Luego el primero sería…
A: *(Escribe 501, 502, 503, 504, 505)*
E: Y los 3 últimos, mira Pablo, el último es 4500 si le sumo 500 sería…
A: *(Escribe 5000, 4999, 4998)*
E: Vale, muy bien a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: El A.
E: El A, ¿qué?
A: Tiene más números.
E: ¿Cuántos más?
A: 500.
E: Vale. Vamos al apartado C y D, el apartado C.
A: Sea n el conjunto de número desde n 1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: El primero sería…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Sigue en adelante y pon el que te dé la gana.
A: Otra vez 99.
E: Siguen adelante y ahora el apartado D es muy parecido a los anteriores, ahora le vamos a sumar 500, en 1 sería…
A: *(Escribe 501, 502, 503, 504)*
E: Y este si quieres el correspondiente arriba o cualquier otro.
A: *(Escribe 599)*
E: Vale, y siguen adelante. A la vista de los resultados, ¿Quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: C, no…son iguales.
E: Son iguales, ¿por qué son iguales?
A: Porque esto continúa hasta infinito. *(II1**3**)*

E: Muy bien, Pablo, Ficha Nivel 3, Pablo, léelo e intenta contestar.
A: Sea el conjunto de números desde n 1 a n 10, a cada número le corresponde su inversa, es decir 1/n. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Vale, entonces el primero ¿sería?
A: 1, ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9 y 1/10.
E: Ves tú, que está poniendo los números decimales, ¿vale? Tú tienes que ver ahora, Pablo, que son números decimales que cada vez son más pequeñito, bien, vamos a ver el apartado B que es muy parecido a los anteriores, sea el conjunto…
A: Sea el conjunto de números desde n 1 a n 7, a cada elemento le corresponde su inversa más 3, es decir representa 1/n+3 ahora esos números en las casillas siguientes.
A: *(Escribe ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10)*
E: Entonces el último es 1/10 porque al sumarle 3, 1 /10. A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: A tiene más números.
E: Muy bien, vamos a ver el C.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante, a cada elemento le corresponde su inversa, es decir 1/n. Representa cada número.
E: Muy bien, otra vez lo mismo.
A: 1/1, ½, 1/3, ¼.
E: Sigue adelante y este pon el que te dé la gana.
A: 1/99.
E: Vale, como ves tú, lo va poniendo en decimales, bien, vamos al apartado D.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante, a cada número le corresponde su inversa más tres, es decir representa 1/n+3.
E: Vale, igual que este, sería entonces.
A: *(Escribe ¼, 1/5, 1/6, 1/7)*
E: Y este, sería…
A: *(Escribe 1/102)*
E: Has puesto el correspondiente al de arriba, bien, ¿ves tú que se están haciendo más pequeñitos? ¿Hasta dónde llegaría esto?
A: Hacia el infinito.
E: Sí, pero los números, ¿cómo serían? Iría hasta el infinito, pero los números se están disminuyendo.
A: A cero.
E: A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Son iguales. *(III1**3**)*
E: ¿Por qué?
A: Porque no van a llegar…
E: ¿Todos van a llegar?
A: No, nada, que nunca acaba ninguno, ¿no?
E: Nunca van a acabar, ¿no?

*E(*IV1*): Ficha Nivel 4, Pablo, lee el apartado A e intenta contestar.
A: Sea el conjunto de números desde n 1 a n 1000. A cada número le corresponde su inversa, es decir, 1/n. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Vale, sería entonces…
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼, 1/5)*
E: Bien, y los 3 últimos, cuáles serían, si quieres empezamos por el último.
A: *(Escribe1/1000, 1/999, 1/998)*
E: Vale, correcto. Vamos al aparatado B, muy parecido al anterior.
A: Sea el conjunto de números desde n 1 a n 500, a cada elemento le corresponde su inversa más 500, es decir, representa 1/n+500 ahora con

números en las casillas siguientes de números desde n 1 a…
E: El primero sería…
A: *(Escribe 1/501, 1/502, 1/503, 1/504, 1/505)*
E: Y los 3 últimos como va hasta el 500 y hay que sumarle 500, entonces sería…
A: 1/1000, 1/999, 1/998.
E: Bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: A.
E: Bien, vamos para el C y el D, que tiene mucho que ver con lo que estamos viendo ahora.
A: Sea el conjunto de números desde n 1 en adelante, a cada elemento le corresponde su inversa, es decir, 1/n, representa cada número.
E: El primero sería…
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼,)*
E: Y este por ejemplo…
A: *(Escribe1/99)*
E: Vale, 1/99, sigue en adelante. Ahora lo mismo, pero le sumo 500, entonces el primero sería…
A: *(Escribe 1/501, 1/502, 1/503, 1/504)*
E: Y este por ejemplo sería…
A: *(Escribe 1/599)*
E: A la vista de los resultados ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Son iguales. *(IV13)*
E: Y ¿por qué son iguales, Pablo?
A: Porque son…, es que a ver, iguales, tienen los mismos números.
E: Aunque lleguen al…
A: Al 0,000, así hasta… Sí.

7) <u>Alumno:</u> Mi.14,10 Nombre: Miryam Fecha de Nacimiento: 28/06/00

E: Entrevista nº 3 del día 22 de Abril con Miryam G. T. de 3º A. ¿Miryam, qué edad tienes?
A: 14.
E: 14 años, muy bien lee la Ficha Nivel 1 e intenta contestar, apartado A, en voz alta.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=10. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien, aquí.
A: *(Escribe 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Muy bien, ¿era fácil?, vamos a ver el apartado B; léelo.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=7. A cada número le sumamos 3. Representa, ahora n+3 en las casillas.
E: Luego el primeo sería 1 más 3.
A: 4. *(Escribe 4)*
E: El de 2 sería…
A: 5. *(Escribe 5)*
E: Siguiente…
A: 6, *(Escribe 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y no continúa, Miryam porque te he puesto hasta el 7, el último sería 7 más 3, 10, ¿vale? Por eso lo he puesto sombreado. Bien, a la vista de los resultados, Miriam, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son los dos iguales?
A: Son los dos iguales.
E: ¿Cuántos números tiene A?
A: El A tiene 10.
E: ¿B cuántos tiene?
A: 7.
E: Vale, tú respuesta es…
A: Tiene más A.
E: Vamos a ver el apartado C, otra vez, léelo.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien, el primero pongo…
A: 1, 2, 3, 4.
E: Siguen adelante y aquí ponemos el que tú quieras.
A: *(Escribe 10)*
E: Con lo cual, estos puntos suspensivos, ¿qué serían, Miryam?
A: 5, 6, 7, 8, y 9.
E: ¿Y estos puntos suspensivos qué significarán?
A: Los que van detrás.
E: Los que van detrás, ¿vale? ¿Qué hay más números, aquí o aquí. *(Señala los puntos suspensivos)*
A: Ahí. *(Señala los de la derecha)*
E: D, a ver que nos dice el apartado D.
A: Sea el conjunto desde n=1 en adelante, a cada número le sumamos 3, representa ahora n+3 en las casillas siguientes.
E: Muy bien, entonces serían…
A: 4, 5, 6, 7.
E: Siguen adelante y aquí pondríamos, si quieres el correspondiente al de arriba.
A: *(Escribe13)*
E: Y este sigue adelante, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son los dos iguales?
A: El D tiene más porque acaba en 13.
E: No, no, esto seguiría en adelante.
A: Entones tienen los mismos.
E: ¿Aunque este empieza en 1 y este empieza en 4?
A: Entonces el C tendría más.
E: ¿Cuánto más?
A: No, el D tendría más porque empieza en 4.
E: No, en cantidad de números no en casillas.
A: En cantidad de números tiene los dos lo mismo, porque tiene 4 espacios.
E: Esto sigue en adelante, ¿aunque aquí falte el 1, el 2 y el 3?

A: El C tiene más.
E: ¿Por qué?
A: Yo creo que sí porque empieza en 1 y termina en 4.
E: No termina en 4, eso para empezar.
A: Siguen adelante.
E: Ahí va, y ¿el otro empieza?
A: En 4 y siguen adelante.
E: ¿Por tanto?
A: El C tendrá más. *(I1B)*

*E(*I2*): Te voy a poner de esta forma, ¿vale? Vamos a ver ahora. Esto lo dejo como está, y decía bien claro 1, 2, 3.
A: 4, 5, 6 y 7.
E: Yo te he puesto, más bestia que tú, 100, significaría que aquí hay noventa y tantos y sigue en adelante. Y ahora lo mismo que tú has ido haciendo anteriormente, le ha sumado 4, 4, 5.
A: 6, 7, 8, 9 y 10.
E: Y este si quieres el correspondiente al de arriba sería…
A: *(Escribe 103)*
E: Vale, y siguen adelante, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más números C, D o son iguales?
A: El C.
E: El C, ¿qué?
A: Tiene más cantidad de números. *(I2B)*

8) <u>Alumno:</u> Jo.15,03 Nombre: José Mª Fecha de Nacimiento: 17/01/00

E: Entrevista nº 4 del día 22 de Abril con José Mª G. U. de 3º A, ¿qué edad tienes, José Mª?
A: 15 años.
E: 15 años, muy bien, José Mª. Lee el apartado A de la Ficha Nivel 1 e intenta contestar.
A: Sea el conjunto de números de n=1 a n=10 representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien, el primero sería.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4…10)*
E: Fácil, ¿no? Vamos al apartado B, léelo.
A: B, sea el conjunto de números desde n=1 a n=7. A cada número le sumamos 3, representa ahora n+3 en las casillas.
E: El primero sería…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7… 9, 10)*
E: Muy bien, vale, no continúa porque el último es 7, que se le ha sumado 3, ¿vale?, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: Son iguales.
E: ¿Son iguales? ¿Cuántos tiene el primero?
A: 10.
E: ¿Y el segundo?
A: Y el segundo 7.
E: ¿Es igual 10 que 7?
A: Porque si le quitas 3, como se le vuelve a sumar 3, pues es lo mismo.
E: Pero es la cantidad de números, no los números.
E: ¿A cuántos tiene?
A: A tiene 10 números.
E: ¿Y el B?
A: 7.
E: ¿Entonces?
A: Entonces A es mayor.
E: Vamos a ver el apartado C.
A: C, sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Luego el primero sería.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Sigue en adelante y aquí pon el número que te dé la gana.
A: *(Escribe 100)*
E: Muy bien y sigue adelante. Estos puntos suspensivos que están aquí, ¿qué significarán entonces?
A: Los números que hay de 4 hasta 1000.
E: Muy bien, y ¿los puntos que están aquí?
A: Desde 100 hasta el infinito.
E: Vamos a ver el apartado D, léelo.
A: D, sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. A cada número le sumamos 3. Representa ahora n+3 en las casillas siguientes.
E: Vale, el primero sería.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Sigue adelante y este le corresponderá…
A: *(Escribe 103)*
E: Vale y sigue en adelante, a la vista de los resultados ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Son iguales.
E: ¿Por qué?
A: Porque desde 7 hasta 103 hay la misma cantidad que desde 4 hasta 100, porque le sumamos 3.
E: Pero no es que se sume 3, ahora mismo, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Son iguales
E: ¿Por qué?
A: Porque…
E: ¿Aunque este empiece en 1 y este empiece en 4?
A: Como el de abajo se le suman 3. *(I12)*
E: Ahí va, ¿aunque le falte aquí el 1, el 2 y el 3? *(Señala el C)*
A: Como se le suman 3.

*E(*II1*): Bien, José Mª, Ficha Nivel 2, situación 1, apartado A, léelo e intenta contestar.

A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=5000. Representa cada número en las siguientes casillas.
E: Muy bien, pues el primero sería…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5)*
E: Seguirían adelante y ahora los tres últimos cuales serían, José Mª.
A: *(Escribe 4998, 4999, 5000)*
E: Vale, estos puntos suspensivos serán los cuatro mil novecientos y pico de en medio, vale, vamos al apartado B, léelo.
A: B, sea el conjunto de números desde n=1 a n=4500. A cada número le sumamos 500 representa ahora n+500 en las casillas.
E: Luego el primero sería…
A: *(Escribe 501, 502, 503, 504, 505)*
E: Y los 3 últimos, si quieres haz el último, 4500 más 500…
A: *(Escribe 5000, 4999, 4998)*
E: A la vista de los resultados, José Mª, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: Más cantidad de números, A.
E: Vale. Vamos al apartado C, léelo.
A: Sea el conjunto de número desde n=1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Luego el primero sería.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Sigue en adelante y pon el que te dé la gana.
A: *(Escribe 24)*
E: 24, muy bien, vamos al apartado D.
A: D, sea n el conjunto de números desde n=1 en adelante. A cada número le sumamos 500. Representa ahora n+500 en las casillas.
E: Serían…
A: *(Escribe 501, 502, 503, 504)*
E: Y este si quieres el correspondiente arriba, o si no da igual.
A: *(Escribe 24)*
E: No puede ser 24.
A: ¡Ah!, es verdad, *(escribe 524)*
E: Vale, el correspondiente a este. A la vista de los resultados, ¿Quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Son iguales.
E: ¿Aún empezando este en 1 y este en 501?
A: No, porque tiene 24 cifras, llegan hasta 24.
E: No llega hasta 24, sigue en adelante.
A: ¡Ah! es verdad.
E: Tú has puesto 24, pero podías haber puesto…
A: Ya, ya; el número que sea. Entonces… Tienen la misma cantidad, ¿no?
E: ¿Por qué?
A: Porque desde 1 hasta 24.
E: No, hasta 24 no, tú dices que 24, pero no.
A: Ya, la misma cantidad de números porque, aunque sume 500, llega hasta el número que yo he puesto, ¿no?
E: No es el que tú has puesto, es que están los puntos suspensivos ahí, entonces…
A: Sí, sí siguen. *(II13)*

*E(*III1*): Ficha Nivel 3, José Mª, lee el apartado A y contesta.
A: A, sea el conjunto de números desde n=1 a n=10, a cada número le corresponde su inversa, es decir 1/n. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Vale, el primero ¿sería?
A: *(Escribe ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/7, 1/9 y 1/10)*
E: Muy bien, ¿vale?, estamos viendo que está saliendo, ahora la diferencia que existe es que son números decimales, ¿vale?, y que van disminuyendo, ¿vale, José Mª?
E: Bien, apartado B, léelo.
A: B, sea el conjunto de números desde n=1 a n=7, a cada elemento le corresponde su inversa más 3, es decir representa 1/n+3 ahora esos números en las casillas siguientes.
E: El primero sería…
A: *(Escribe ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10)*
E: Como ves tú ahora son números decimales, se va haciendo cada vez más pequeñitos. ¿Quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: Tiene más cantidad de números A.
E: A, vamos hacer entonces el C y D.
A: C, sea el conjunto de números desde n=1 en adelante, a cada elemento le corresponde su inversa, es decir 1/n. Representa cada número.
E: Muy bien, el primero sería…
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼)*
E: Y este pon el que te dé la gana a ti.
A: *(Escribe 1/10)*
E: Bien, vamos al de abajo, D.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante, a cada número le corresponde su inversa más tres, es decir representa 1/n+3.
E: Vale.
A: *(Escribe ¼, 1/5, 1/6, 1/7)*
E: Y este, por ejemplo sería…
A: *(Escribe 1/10)*
E: Bien, a la vista de los resultados, hay que tener en cuenta una cosita, que esto va disminuyendo, ¿vale, José Mª? ¿Hasta dónde iría a parar?, 1, 0,5; 0,3…
A: Al cero.
E: A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Iguales no porque llegan al cero. *(III1B)*

E: Vamos a verlo así. Este lo dejamos así, y esta forma sería igual, vamos a ponerlo así, sería 1/1, el siguiente.
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7)*

E: Y este te he puesto, un poquito más bestia que tú, te he puesto 100, y abajo le estamos sumando 1, luego es ¼…
A: *(Escribe ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10)*
E: Y este si quieres poner el correspondiente arriba, 1/103.
A: *(Escribe 1/103)*
E: No importa porque si pones el 100, es que vendría por aquí *(señala los puntos suspensivos)*. Bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Son iguales.
E: ¿Por qué?
A: Porque al D se le suman las tres cifras que se le han quitado, como empieza en ¼ pues cuando le sumas 3 iguala al apartado C. *(III2A)*

*E(*III3*): Vamos a ver, igual ahora ¿vale?, es de otra forma, el apartado A, otra vez lo mismo…
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10)*
E: Y ahora abajo le estábamos sumando 3, con lo cual este sería…
A: *(Escribe ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10)*
E: En este caso tú dijiste que había más cantidad de números arriba que abajo. Vamos al C y el D.
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7)*
E: Y este pon el que te dé la gana a ti.
A: *(Escribe 1/10)*
E: Bien, y al de abajo le vamos sumando 3, luego el primero sería…
A: *(Escribe ¼, 1/5, 1/6)*
E: Y aquí por ejemplo sería, el correspondiente de este.
A: *(Escribe 1/13)*
E: A la vista de los resultados ¿quien tiene mayor cantidad de números C, D o son iguales?
A: Tiene más cantidad de números C, al llegar al cero. *(III3B)*
E: C tiene más cantidad de números.

9) <u>Alumno:</u> Ca.15,03 Nombre: Candela Fecha de Nacimiento: 08/01/00

E: Entrevista nº 5 del día 22 de Abril del 2015, con Candela G. E. de 3º A, ¿qué edad tienes, Candela?
A: 15.
E: 15 años, muy bien, Candela, lee la Ficha Nivel 1, apartado A e intenta contestar.
A: ¿Lo leo en alto?
E: En voz alta, por favor.
A: Sea el conjunto de números desde n=l a n=10, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Sería aquí el primero.
A: (Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9, 10)
E: Muy bien. Ha sido fácil, ¿no? Vamos a ver el apartado B, léelo.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=7. A cada número le sumamos 3. Representa ahora n+3 en las casillas.
E: El primero sería en vez de 1 sería…, hay que sumarle tres, con lo cual sería en vez de 1, en vez de 2,…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Este es el último, porque te he dicho hasta el 7, ¿vale?, que le sumamos 3 y es 10, de hecho te he puesto esto sombreadito para que tú no sigas. Bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: Iguales.
E: ¿Cuántos números tiene A?
A: A tiene 10.
E: Y B, ¿cuántos tiene?
A: 7.
E: ¿Son iguales?
A: No
E: ¿Quién tiene más?
A: El A.
E: Vamos al apartado C, Candela, léelo.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Serían…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Aquí sigue en adelante, y aquí pon el número que te dé la gana.
A: *(Escribe10)*
E: Vale, esto significa que estos puntos suspensivos, ¿Quiénes son, Candela?
A: Contiene a 6.
E: ¿Quién sería entonces?
A: El 5, 6, 7, 8 y 9.
E: Y ¿estos puntos suspensivos, Candela?
A: Infinitos.
E: Vamos a ver el apartado D lo que nos dice. Sea el conjunto…
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante, a cada número le sumamos 3. Representa, ahora n+3 en las casillas siguientes.
E: Vale, el primero sería.
A: *(Escribe 4, 5, 6 y 7)*
E: Muy bien, sigue adelante y este, tú puedes poner el correspondiente a este si quieres.
A: *(Escribe 10)*
E: Tú has cogido al que está aquí, el 7 más 3, 10 *(señala en los puntos suspensivos)* y siguen adelante, bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o los dos son iguales?
A: Mismas cantidades.

E: ¿Por qué son iguales en cantidad?
A: Porque en los dos hay los mismos.
E: ¿Los mismos?
A: No los mismos, los mismos números. *(I1**1**)*

*E(*II1*): Ficha Nivel 2, situación 1, lee el apartado a e intenta contestar, Candela.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=5000. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Luego el primero sería…Es del 1 al 5000.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5)*
E: Siguen adelante y los tres últimos, no vamos a estar toda la mañana poniendo números, ¿no?, el último si quieres, el ultimo sería…
A: *(Escribe 5000, 4999, 4998)*
E: Los puntos suspensivos que están ahí, pues serán desde el 5 hasta el 4998. Bien, vamos al apartado B.
A: Sea el conjunto desde n=1 a n=4500. A cada número le sumamos 500. Representa ahora n+500 en las casillas.
E: Luego el primero sería…
A: *(Escribe 501, 502, 503, 504 y 505)*
E: Y los 3 últimos, pues mira como el último es 4500.
A: 5000.
E: Y los anteriores.
A: *(Escribe 5000, 4999, 4998)*
E: Vale, a la vista de los resultados ¿Quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: Sí.
E: ¿Sí?, ¿cuánto tiene el primero?
A: El primero empieza en el 1.
E: ¿Hasta dónde?
A: 5000.
E: ¿Cuánto tiene entonces?
A: 5000.
E: Y el otro tiene del 501…
A: Entonces el primero tiene más números.
E: Vamos al apartado C.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien, y el primero…
A: *(Escribe1, 2, 3, 4)*
E: Sigue en adelante y aquí pones el número que tú quieras.
E: *(Escribe 10)*
E: Vale, y sigue adelante. Vamos a ver el apartado D.
A: Sea n el conjunto de números desde n=1 en adelante. A cada número le sumamos 500. Representa ahora n+500 en las casillas siguientes.
E: Luego sería, muy bien.
A: *(Escribe 501, 502, 503 y 504)*
E: Aquí si tú quieres pon el correspondiente a arriba, en adelante.
A: *(Escribe 510)*
E: Sigue adelante.
E: A la vista de los resultados, este empieza en 1 y este empieza en 501 en adelante, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: El C.
E: ¿Por qué?
A: Porque empieza en 1 hasta 10.
E: No, no este porque lo pusiste tú, sigue adelante.
A: Entonces tiene más el D
E: ¿El D tiene más? ¿Por qué?
A: No sé. *(II1B)*

*E(*II2*): Ahora te lo he puesto de esta 1, 2, 3; el siguiente sería…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Sigue adelante, yo te he puesto aquí 1000, un poco más bestia que tú, y sigue adelante. Y este vamos sumando 500; 501, 502, 503.
A: *(Escribe 503, 504, 505, 506, 507)*
E: Aquí puedes poner el correspondiente arriba si quieres o cualquier otro, da igual.
A: *(Escribe 1000)*
E: Por aquí estará, por ejemplo, el 500 y da 1000, porque le hemos sumado 500.
E: Bien, a la vista de los resultados, este empieza en 1 y en adelante y este empieza en 501 y en adelante, ¿quién tiene más cantidad de números el C o el D?
A: El C. *(II2B)*

10) __Alumno:__ Ma.14,10 Nombre: María Isabel Fecha de Nacimiento: 03/03/00

E: Entrevista nº 6 del día 22 de Abril del 2015 con Mª Isabel H. G. de 3º A, ¿qué edad tienes, Mª Isabel?
A: 14 años.
E: 14 años, ¿cuándo cumples los 15?
A: En junio.
E: Bien. Ficha Nivel 1, vamos a intentar leerlo en voz alta y contestarlo, apartado A.
A: ¿Lo leo?
A: Sea el conjunto de números desde nº l a nº 10, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Aquí habría que poner…
A: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: Muy bien. Vamos a ver el apartado B lo que nos dice.
A: Sea el conjunto de números desde nº 1 a nº 7. A cada número le sumamos 3. Representa ahora n+3 en las casillas.

E: Entonces ahora habría que sumarle 3.
A: En el primero pongo un 1, ¿no?
E: Si es 1 ahora le sumo 3 y se queda…
A: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: Y ya no seguimos más, porque como te he digo llega hasta el 7, 7 más 3, 10, ¿de acuerdo? Bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: La primera, A.
E: Lee el apartado C e intenta contestarlo.
A: Sea el conjunto de números desde nº 1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien serían…
A: 1, 2, 3, 4.
E: Aquí sigue en adelante, y aquí pon el que te dé la gana.
A: 29.
E: Un número bonito, ¿por qué?
A: No sé.
E: Y esto sigue adelante, ¿verdad? ¿Quién tiene más números aquí o aquí? *(Señala los puntos suspensivos)*
A: En el lado derecho.
E: En el derecho, aquí habría unos veinte y tantos, ¿verdad? y esto sigue adelante. Vamos al apartado D, léelo.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante, a cada número le sumamos 3. Representa, ahora n+3 en las casillas siguientes.
E: Vale, el primero sería.
A: Sería 4, 5, 6 y 7.
E: Sigue adelante.
A: ¿32?
E: Si quieres corresponder con el que está ahí, muy bien, a la vista de los resultados, Mª, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: El D.
E: El D, ¿qué?
A: Que tiene más números, ¿no?
E: ¿Por qué?
A: Bueno no, son iguales.
E: Son iguales, aunque empiece en 1, y este en 501 ¿por qué?
A: No sé, ¿por qué siguen? *(I11)*

*E(*II1*): Ficha Nivel 2, situación 1, María, lee el apartado A e intenta contestar.
A: Sea el conjunto de números desde nº 1 a nº 5000. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: El primero sería…
A: 1, 2, 3, 4, 5.
E: Vale y los tres últimos, vamos a poner el último.
A: 5000, 4999, 4998.
E: Perfecto, los puntos suspensivos que están ahí, pues significarán…
A: Pues que va desde el 5 hasta el 5000
E: Ahí está, para que vamos a estar toda la mañana poniéndolos, ¿vale? Bien, vamos al apartado B.
A: Sea el conjunto desde n=1 a n=4500. A cada número le sumamos 500. Representa ahora n+500 en las casillas.
E: Muy bien, luego el primero sería…
A: 501, 502, 503, 504 y 505
E: Y los 3 últimos, vamos a hacer el último, como el último fue el 4500 como le sumo 500, se quedará…
A: 5000.
E: Y el anterior se sabe lo que va a dar…
A: Pongo lo mismo, ¿no? 4999, 4998.
E: Vale, a la vista de los resultados ¿Quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: Son iguales.
E: ¿Cuánto tiene el primero?
A: Tiene 5000.
E: ¿Y el segundo?
A: Tiene menos.
E: No, tiene desde el 501 hasta 5000
A: 4500.
E: ¿Vale? apartado C.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien, y el primero sería…
A: 1, 2, 3, 4
E: Sigue en adelante y aquí pones el número que te dé la gana aquí.
A: 29.
E: Un número primo, muy bonito. Vale, vamos a ver el apartado D.
A: Sea n el conjunto de números desde n=1 en adelante. A cada número le sumamos 500. Representa ahora n+500 en las casillas siguientes.
E: Vale, el primero sería 1 más 500.
A: 501, 502, 503 y 504.
E: Y aquí sería.
A: 529.
E: Si pones el correspondiente a ese. Bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números, arriba, abajo o son iguales?, este empieza en 1 y en adelante y este empieza en 501 en adelante.
A: C.
E: C, ¿qué?
A: Que tiene más cantidad que D. *(II1B)*

*E(*II2*): Vamos a seguir, lo he puesto aquí de esta forma y he puesto aquí un número mayor; 1, 2, 3; sigue tú.
A: 4, 5, 6, 7.
E: Vale, yo te he puesto el 1000, en vez del 22, y este 500; 501, 502.
A: 503, 504, 505, 506, 507.

E: Y este si quieres corresponder el de aquí o el que tú quieras, sería entonces.
A: 1500.
E: 1500, y esto sigue adelante. Bueno, pues sabiendo que este empieza en 1 y en adelante y este empieza en 501 y en adelante, ¿quién tiene más cantidad de números el C o el D o son iguales?
A: C tiene más cantidad de número. *(II2B)*

11) <u>Alumno:</u> Al.14,10 Nombre: Álvaro Fecha de Nacimiento: 22/06/00

E: Entrevista nº 7 del día 22 de Abril del 2015, con Álvaro L. G. de 3ºA, ¿qué edad tienes, Álvaro?
A: 14.
E: 14 años. ¿Cuándo cumples los 15?
A: El 22 de junio.
E: Muy bien. Lee la Ficha de Nivel 1, el apartado A, e intente contestar.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=10, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien, y aquí pondríamos.
A: *(Escribe 1, 2, 3 ,4 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Muy bien, vamos a ver el apartado B ahora, ¿vale? B, Sea el conjunto, léelo.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=7. A cada número le sumamos 3. Representa, ahora n+3 en las casillas.
E: Vale, ahora le vamos a sumar 3, entonces, en vez de 1 es…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Muy bien, y ya no hay que seguir más porque te he dicho hasta el 7, ¿vale?, por eso te he puesto sombreadito ahí esto. A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales? Cantidad de números.
A: Tiene más el B.
E: ¿El B tiene más? ¿Cuánto tiene A?
A: Tiene más el A.
E: Tres más, ¿no? Vamos al apartado C, léelo.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Vale, empezamos entonces, igual que antes.
A: 1, 2, 3, 4. *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Pongo puntos suspensivos para no estar toda la mañana, ¿vale?, y aquí pon el que tú quieras.
A: *(Escribe 7)*
E: El 7, bueno entonces los puntos suspensivos estos serían entonces.
A: 5 y 6.
E: Podías haber puesto uno más grande, bueno da igual, y aquí sigue adelante. ¿Entiendes los puntos suspensivos estos de aquí? Aquí hay más números que aquí, ¿no?, Álvaro.
A: ¿Eh?
E: ¿Dónde hay más números entre estos puntos suspensivos o estos puntos suspensivos? *(Señala en la pantalla)*
E: En la derecha, ¿verdad? Vamos a ver el aparatado D que tiene mucho que ver con el anterior.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. A cada número le sumamos 3. Representa, ahora n+3 en las casillas siguientes.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Muy bien, si quiere ponerle el correspondiente al 7, ¡ah! muy bien, ¿vale?
A: *(Escribe 10)*
E: ¿Vale?, bien, a la vista de los resultados, Álvaro, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: El D.
E: D ¿qué?
A: Que tiene más números.
E: ¿Por qué?
A: Porque le hemos sumado 3 a cada número, entonces son más.
E: ¿Entonces suman más?
A: De los que están representados.
E: De los que están representados arriba, aquí falta el 1, el 2 y el 3 también, ¿entonces? Tienes que tener en cuenta también que van en adelante.
A: Claro, pero si ya están aquí representados, ¿no?, ¡ah! no, es que en los puntos suspensivos están…
E: Claro.
A: Entonces el C.
E: ¿El C?, ¿Por qué le falta entonces el primero?
A: No, porque están los puntos suspensivos por medio… Hay más en el D. *(I1B)*
E: ¿En el D tiene más?
A: Sí.
E: Venga vamos a verlo de otra forma.

*E(*I2*): Este primero, lo has hecho tú bien, sería del 1 al 10, ¿vale?, sería 1, 2, 3; sigue tú…
A: *(Escribe 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y el otro había que sumarle 3, luego es 4,…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y tú has dicho que tiene más cantidad el A que el B, vale, en concreto hay 3 menos aquí. Vale, ahora aquí, 1, 2, 3 sigue tú…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Yo te he puesto un número más grande, 100, vale, esto significa que hay ahí noventa y tantos y aquello sigue en adelante. Y este empieza con el número 4, porque 1 más 3, 4.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*

E: Y el 100 sería…
A: *(Escribe103)*
E: 103 y sigue adelante, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de número, C, D o son iguales?
A: Pero, ¿es que son infinitos los dos?
E: Sí.
A: Son iguales. *(I2A)*

*E(*I3*): Son iguales. Vamos a verlo así. Este, cómo sería de esta forma de distribuirlo, sería 1, 2, 3
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Muy bien, y el de abajo sería sumándole 3, pues sería 1 más tres, 4,…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y diríamos entonces que tiene más cantidad A que B, ¿vale? Vamos a ver el C, 1, 2, 3, sigue tú.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Pon el número que te dé la gana.
A: *(Escribe 54)*
E: Muy bien, sigue adelante y el de abajo lo construimos de la forma que sumándole 3, en vez de 1…
A: *(Escribe 4, 5, 6)*
E: Y en vez de 54.
A: *(Escribe 57)*
E: Bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de número, C, D o son iguales?
A: El C, tiene más números.
E: ¿Por qué?
A: Porque tiene 4, 5 y 6 y además tiene más números.
E: 4, 5, 6 está aquí. *(Señala el D)*
A: l de arriba también los tiene y además tiene el 7.
E: Pero, ¿siguen adelante?
A: Sí. *(I3B)*

12) <u>Alumno:</u> Su.14,05 Nombre: Cheyer Susana Fecha de Nacimiento: 22/11/00

E: Entrevista nº 8 del día 22 de Abril del 2015 con Susana O. M. de 3º A.
¿Qué edad tienes, Susana?
A: 14.
E: 14 años, ¿cuándo cumples los 15?
A: En noviembre.
E: ¡Ah!, todavía te queda. Muy bien, vamos a hacer esta ficha, Ficha Nivel 1, situación 1, lee el apartado A y contesta, sea…, en voz alta, por favor.
A: Sea el conjunto de números desde n1 a n10. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien, el primero sería.
A: *(Escribe 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Muy bien, vamos a ver el apartado B lo que nos dice, léelo en voz alta.
A: Sea el conjunto de números desde n1 a n7. A cada número le sumamos 3. Representa, ahora n+3 en las casillas.
E: Luego en vez de 1 ponemos…, sería 1 más 3.
A: 4. *(Escribe 4)*
E: El de 2 le sumo 3.
A: 5. *(Escribe 5)*
E: Siguientes…
A: 6 *(6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y no sigue adelante porque llega hasta el 7, ¿vale? el último sería 7 más 3, 10, por eso lo he puesto sombreado. Bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales? La misma cantidad, es decir, ¿cuántos números hay en A, Susana?
A: 10.
E: ¿Qué cantidad de números hay en B?
A: 7.
E: ¿Quién tiene más cantidad de números?
A: El primero.
E: Vale, era solamente eso, ¿vale? ¿Qué estabas haciendo?
A: Contándolos todos.
E: no, hombre. Tú estabas sumando 1, más 2, más 3 y eso, no es tan difícil Vamos al apartado C, sea el conjunto de 1 en adelante y hay que representarlos cada uno en las casillas, el primero sería…
A: 1, 2, 3, 4.
E: Siguen adelante y aquí pon el que tú quieras.
A: *(Escribe22)*
E: 22, eso significa que aquí en medio está del 5 hasta el 21, ¿estás de acuerdo conmigo? Y aquí que pasaría, como dice que sigue en adelante, ¿qué entiendes tú en adelante?
A: Desde el 23 hasta el 40 o 50.
E: ¿Y por qué hasta el 40 o 50?
A: Porque si hay desde el 5 hasta el 22…
E: No, no, estos puntos suspensivos, no son igual que estos puntos suspensivos de aquí, tú podías haber puesto aquí por ejemplo el 100, o el 1000, o 1000000, esto sigue en adelante. ¿Entonces?
A: Infinito.
E: Vamos al apartado D, léelo.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante, a cada número le sumamos 3, representa ahora n+3 en las casillas siguientes.
E: Muy bien, entonces 1 sería, en vez de 2,…
A: 4, 5, 6, 7.

E: Bien, ahora aquí si tú quieres pon el correspondiente a este, o cualquier otro, da igual.
A: *(Escribe 42)*
E: 42, ¿vale?, que sería, por ejemplo, arriba por aquí, que sería el 39 que más 3 sería 42, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: El D.
E: El D, ¿qué pasa?
A: Que tiene más números.
E: ¿Sí, por qué?
A: Les hemos…
E: Sí, pero el 4 está aquí, el 5 estará por aquí, 42 seguro que estará por aquí. *(Señala los puntos suspensivos)*
A: Sí, pero a partir de 4 para abajo no sabemos…
E: Claro, arriba está, es el 3, el 2 y el 1 y aquí no está, ¿entonces, son iguales?
A: No, el D es más grande. *(I1B)*

*E(*I2*): Vamos a ver ahora, empezamos igual que el anterior, 1, 2, 3, sigue tú.
A: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: Y aquí habría que sumarle 3, acuérdate, sería 1, 4, 5.
A: 6, 7, 8, 9 y 10.
E: Tú contestaste que el A tiene mayor cantidad de números que el B, ¿vale? Vamos a ver ahora esta representación, este sería de 1 en adelante, 1, 2, 3, sigue tú.
A: 4, 5, 6 y 7.
E: Y yo te he puesto más ganso que tú, te he puesto 100, aquí habría noventa y tantos y esto sigue adelante. Y ahora estamos sumando 3, ¿vale?, 1 más 3, 4, 5, serían…
A: 6, 7, 8, 9 y 10.
E: Y ahora pon el que tú quieras o el correspondiente a 100 que sería…
A: *(Escribe 200)*
E: 200, que sería de aquí el 197 más 3 sería 200, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Iguales.
E: ¿Aunque este empieza en 1 y este en 4?
A: Sí.
E: Vale, vamos a verlo ahora aquí, esto sería 1, 2, 3, sigue tú.
A: 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.
E: Abajo sería 1 más 3 que sería 4.
A: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: Y tú dijiste que el apartado A tiene mayor cantidad de números que el B. Vamos a ver el de abajo, 1, 2, 3, sigue tú.
A: 4, 5, 6 y 7.
E: Pon el que tú quieras aquí ahora.
A: El 100.
E: El 100, igual que el mío, siguen adelante, ¿vale? Y ahora le sumamos 3, en vez de 1 sería…
A: 4, 5, 6.
E: Y aquí el que tú quieras.
A: *(Escribe 200)*
E: A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Son iguales.
E: ¿Son iguales, aunque les falte el 1, el 2 y el 3?
A: El 4 representa lo anterior.
E: ¿el 4 representa lo anterior?
A: A ver no, pero tiene más el de abajo, no el de arriba, el de arriba.
E: ¿El de arriba tiene más cantidad de números?
A: Sí.
E: ¿Aunque sigan en adelante?
A: Sí. *(I2B)*

13) <u>Alumno:</u> Ma.14,09 Nombre: María Fecha de Nacimiento: 25/08/00

E: Entrevista nº 1 del día 29 de Abril del 2015 con María R. G. de 3º B.
María, ¿cuánta edad tienes?
A: 14.
E: 14 años. Muy bien, María, lee la Ficha Nivel 1 e intenta contestar, en voz alta, por favor.
A: Sea el conjunto de números de n 1 a n=10, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Aquí vamos a poner.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Era fácil, ¿no? Vamos a ver ahora el apartado B.
A: Sea el conjunto de números desde n= 1 a n= 7. A cada número le sumamos 3, representa ahora n+3 en las casillas.
E: En vez de 1 hay que sumarle 3, sería…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Termina aquí, porque te he dicho que como último número era el 7, al sumarle 3, queda 10. A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: Yo creo que A.
E: A, ¿por qué?
A: Porque el A tiene del 1 al 10 y el B nada más que del 4 al 10.
E: Vamos a ver el apartado C, léelo.
A: Sea el conjunto de números desde n 1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien, ¿qué significa en adelante, María?
A: Del 1, 2, 3 así. *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Seguiríamos poniendo números, aquí pon el que te dé la gana.

A: *(Escribe13)*
E: El 13, ¿vale?, y estos puntos suspensivos, serían…
A: Del 13 en adelante.
E: ¿Hasta dónde?
A: Hasta infinito también.
E: ¿Dónde hay más números, entre estos puntos suspensivos o entre estos puntos suspensivos?
A: En los segundos.
E: Muy bien, vamos a ver el apartado D, María.
A: Sea el conjunto de números desde n 1 en adelante. A cada número le sumamos 3. Representa ahora n+3 en las casillas siguientes.
E: Igual que el anterior, en vez de 1 sería…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: y este…
A: *(Escribe 16)*
E: A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: D.
E: D, ¿qué pasa?
A: Que empieza desde el 4 y llega hasta 16 o a infinito, bueno no, son iguales porque los dos son infinitos. *(I14)*

*E(*II1*): Ficha Nivel 2, situación 1, venga María, lee el apartado A e intenta contestar.
A: Sea el conjunto de números desde n= 1 a n= 5000. Representa cada número en las siguientes casillas.
E: Entonces sería…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5)*
E: No vamos a poner todos, y por ejemplo el último sería…
A: 5000.
E: ¿Y el anterior?
A: *(Escribe 4999, 4998)*
E: Y los puntos suspensivos éstos serían unos cuatro mil novecientos y pico, ¿vale? Vamos a ver el apartado B.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=4500. A cada número le sumamos 500. Representa ahora n+500 en las casillas.
E: En vez de 1 ponemos, en vez de 2…
A: *(Escribe 501, 502, 503, 504, 505)*
E: Y los 3 el último, pues a ver si lo sabemos decir, 4500 es el último.
A: Sería 5000 también.
E: 5000 y de forma intuitiva serían estos también.
A: 4999, 4998.
E: A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: Iguales
E: ¿Iguales?, ¿el primero dónde empieza?
A: ¡Ah!, en el 1, entonces el A tiene mayor número.
E: Muy bien, vamos a ver ahora los apartados C y D.

A: Sea el conjunto de números desde n 1 en adelante, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Entonces igual que el anterior, ¿verdad?
A: Sí. *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Sigue en adelante y aquí pon el que te dé la gana.
A: *(Escribe 25)*
E: 25, y siguen adelante. Y ahora le vamos a sumar, 500, léelo.
A: Sea el conjunto de números desde 1 en adelante, a cada número le sumamos 500. Representa ahora n+500 cada número en las casillas.
E: Vale, entonces sería…
A: *(Escribe 501, 502, 503, 504)*
E: Seguirían adelante.
A: *(Escribe 525)*
E: Vale, has puesto el correspondiente, bien a la vista de los resultados, María, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: El C.
E: El C, ¿qué?
A: No, son iguales porque son infinitos los dos. *(II14)*

*E(III1): Este es de cocientes pero no te preocupes que él lo hace todo. *(Refiriéndose al programa)*. Muy bien, Ficha Nivel 3, María, lee el apartado A e intenta contestar.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=10. A cada número le corresponde su inversa, es decir, 1/n. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Entonces en vez de 1 sería...
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10)*
E: Perfecto, vamos a ver el apartado B, sea el conjunto…
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=7, a cada elemento le correspondemos su inversa más 3, es decir, 1/n+3. Representa ahora esos números en las casillas siguientes.
E: En vez de 1 sería…
A: 1 partido de n más 3.
E: No ya pon 4.
A: *(Escribe ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10)*
E: Aquí la única diferencia que existe es que son números decimales, entonces lo que podemos ver, María, es, ¿qué está pasando con los números?
A: Que van disminuyendo.
E: Que van disminuyendo, ¿verdad?, bien. A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: A.
E: A, ¿tiene?
A: Más.
E: Vamos al apartado C y D.

A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante, a cada elemento le correspondemos su inversa, es decir, 1/n. Represéntalos.
E: Serían…
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼)*
E: Este pon el que te dé la gana a ti.
A: *(Escribe 1/8)*
E: Ok, vamos hacer el de abajo.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. A cada elemento le correspondemos su inversa más 3, es decir, 1/n+3.
E: El primero sería...
A: *(Escribe ¼, 1/5, 1/6, 1/7)*
E: Y aquí pon el que te e la gana.
A: *(Escribe 1/11)*
E:¿Qué pasaría, María, si vamos aumentando los números de abajo, que hemos dicho anteriormente, los números decimales cada vez, ¿qué son?
A: Más pequeños.
E: Más pequeños, y ¿hacia dónde iría?
A: No sé.
E: ¿No sabes?, si se van haciendo más pequeñitos, más pequeñitos,…
A: A cero, ¿no?
E: A cero, bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Son iguales.
E: ¿por qué son iguales?
A: Porque como tiene puntos suspensivos, serían infinitos los dos. *(III**14**)*
E: Aún llegando al cero, ¿no?
A: Sí.

*E(*IV1*): Ficha Nivel 4, lee el apartado A, María.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=1000. A cada número le corresponde su inversa, es decir 1/n. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien, otra vez lo mismo, sería…
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼, 1/5)*
E: Vamos a poner los 3 últimos, para no estar toda la mañana aquí poniendo, el último sería…
A: *(Escribe 1/1000, 1/999, 1/998)*
E: Vamos al de abajo.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=500. A cada elemento le correspondemos su inversa más 500, es decir, representa 1/n+500 ahora esos números en las casillas siguientes.
E: El primero sería…
A: *(Escribe 1/501, 1/502, 1/503, 1/504, 1/505)*
E: Vamos hacer los 3 últimos, como hay que llegar al 500 y se le suma 500, el último sería…
A: *(Escribe 1/1000, 1/999, 1/998)*
E: A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: A.
E: A. Terminamos entonces el C y el D
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante, a cada elemento le corresponde su inversa, es decir, 1/n. representa cada número
E: Aquí ponemos entonces...
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼)*
E: Aquí pones el que tú quieras
A: *(Escribe 1/24)*
E: Y siguen adelante, ¿vale? El apartado D; sea el conjunto de 1 en adelante.
A: A cada elemento le correspondemos su inversa más 500, es decir 1/n+500. Represéntalos.
E: El primero sería...
A: *(Escribe 1/501, 1/502, 1/503, 1/504)*
E: Y este era...
A: *(Escribe 1/524)*
E: Y sigue en adelante, ¿vale? De nuevo aparece lo mismo, los números se van haciendo cada vez más pequeños, pero a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Iguales.
E: Iguales, ¿por qué son iguales?
A: Porque son infinitos. *(IV**14**)*
E: Muy bien.

14) <u>Alumno:</u> Ca.14,10 Nombre: Carmen Fecha de Nacimiento: 05/06/00

E: Entrevista nº 2 del día 29 de Abril del 2015, con Carmen M. R. de 3ºB, ¿qué edad tienes, Carmen?
A: 14.
E: 14 años, ¿cuándo cumples los 15?
A: El 5 de junio.
E: Muy bien. Carmen, lee el apartado A de la Ficha de Nivel 1, e intenta contestar. En voz alta, por favor.
A: Sea el conjunto de números desde nº 1 a nº 10, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien, y aquí hay que poner.
A: *(Escribe 1, 2, 3 ,4 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Vamos a ver el apartado B, léelo Carmen
A: Sea el conjunto de números desde nº 1 a nº 7. A cada número le sumamos 3. Representa, ahora n+3 en las casillas.
E: En vez de 1 ponemos…hay que sumarle 3 al 1…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: No hay que seguir porque era del 1 al 7y hay que ir sumándole 3. A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: Son iguales.

E: Sí, ¿cuántos números tiene A?
A: 10.
E: ¿Y cuántos tiene B?
A: 7.
E: ¿Son iguales?
A: No, el A tiene más números.
E: Muy bien. Vamos al apartado C, léelo.
A: Sea el conjunto de números desde nº 1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Vale, entonces habría que poner aquí…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Siguen en adelante y aquí pon el número que tú quieras.
A: ¿El que yo quiera? *(escribe 6)*
E: El 6, con lo cual estos puntos suspensivos, ¿qué es?
A: El 5.
E: ¿Y estos puntos suspensivos?
A: 7 en adelante.
E: ¿Hasta dónde?
A: Hasta los que tú quieras.
E: Hasta los que tú quieras no.
A: Sí, hasta el 10, ¿no?
E: ¿Hasta el 10?, ¿aquí pone hasta el 10?
A: No, hasta los que tú quieras.
E: ¿Cuál quieres tú entonces?
A: ¿El siguiente?
E: No, ¿hasta dónde?
A: Pues el 7.
E: ¿El 17, por qué?
A: El 7.
E: ¿El 7, por qué?
A: Porque va delante del 6, el 7.
E: No, es que siguen adelante, no vamos a estar todo el tiempo poniendo los números, ¿no?, entonces.
A: Hasta lo que tú quieras.
E: Hasta lo que tú quieras no, ¿el 1000 podría ser?
A: Sí.
E: No, aquí quiero que veas que siguen adelante.
A: Pues más adelante.
E: ¿Cuál?
A: Pues un millón o lo que tú quieras, ¿no?
E: Un millón no, eso sigue adelante.
A: Pues más.
E: ¿Cuánto?
A: Infinito.
E: Infinito, no tiene porqué. Vamos a ver el apartado D, léelo.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. A cada número le sumamos 3. Representa, ahora n+3 en las casillas siguientes. Igual que el otro.
E: Igual que el otro, en vez de 1 sería…
A: 4, 5, 6, 7.
E: Y en vez de 6, si quieres.
A: *(Escribe 9)*
E: Siguen adelante, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Iguales.
E: ¿Iguales, aunque este empiece en 1 y este en 4?
A: Sí, ¿no?
E: No, pregunto.
A: O sea, el primero, el C empieza por el 1 hasta el infinito y el D empieza por el 4 hasta el infinito.
E: Y son iguales, ¿por?
A: No, tiene más el C, porque son más números. *(I1B)*

*E(*I2*): Vamos a verlo aquí, es lo mismo de antes, te lo he puesto de otra forma, ¿eh? 1, 2, 3; sigue tú.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y al de abajo le hemos sumado3, como has hecho tú, 4, 5…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: A la vista de los resultados, quién tiene más cantidad de números, tú me has dicho A. El de abajo está puesto del 1 en adelante 1, 2, 3; sigue tú…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Yo he sido un poco más bestia que tú, he puesto el 100, eso significa que esos puntos suspensivos de aquí son noventa y tantos, pero no vamos a estar toda la mañana poniendo y eso sigue en adelante, ¿cierto?
A: Sí.
E: Abajo hay que sumarle 3, en vez de 1, el 4, en vez del 2, 5…
A: *(Escribe 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y por ejemplo en vez de 100.
A: 103. *(Escribe103)*
E: Ahí va, y siguen adelante, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de número, C, D o son iguales?
A: El C.
E: El C, ¿por qué?
A: Porque tiene más números.

15) <u>Alumno:</u> An.15,03 Nombre: Ana Fecha de Nacimiento: 23/01/00

E: Entrevista nº 3 del día 29 de Abril, con Ana C. B. de 3º A. Ana, ¿qué edad tienes?
A: 15 años.
E: 15 años muy bien, pues lee la Ficha Nivel 1, apartado A e intenta contestar.
A: ¿Lo leo?
E: En voz alta si puede ser.

A: Sea el conjunto de números de nº 1 a nº 10, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien, luego aquí habría que poner.
A: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: Muy bien. Vamos a ver el apartado B lo que nos dice, léelo.
A: ¿Lo leo? Sea el conjunto de números desde nº 1 a nº 7. A cada número le sumamos 3 representa ahora n+3 en las casillas.
E: Entonces en vez de 1 hay que poner…
A: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: Y el último era el 7, se le suma 3; 10. A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: Más cantidad de números, el A.
E: Vamos a ver el apartado C ahora, léelo en voz alta e intenta contestar.
A: Sea el conjunto de números desde nº 1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Luego aquí hay que poner…
A: 1, 2, 3, 4.
E: Sigue en adelante, ¿verdad? y aquí pon el número que te dé la gana.
A: *(Escribe 8)*
E: 8, eso significa que los puntos suspensivos ¿son?
A: 5, 6 y 7.
E: Y estos puntos suspensivos, ¿qué significa?
A: 9 y 10.
E: Y por qué hasta el 10.
A: 9.
E: No, más en adelante.
A: ¡Ah!
E: ¿Tú sabes lo que significa en adelante?
A: Sí, que sigue.
E: Que sigue sin acabar, ¿vale?
E: Vale, vamos a ver el conjunto D, léelo.
A: Sea el conjunto de números desde 1 en adelante. A cada número le sumamos 3. Representa ahora n+3 en las casillas siguientes.
E: Vale, el primero sería…
A: 4, 5, 6, 7.
E: Si quieres poner el 8, le correspondería…
A: *(Escribe 11)*
E: Vale y esto seguiría en adelante, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Son iguales.
E: ¿Aunque este empiece en 1 y este en 4? *(Señala los dos apartados)*
A: Sí.
E: ¿Por qué?
A: Porque siguen hasta infinito. *(I1**3**)*

*E(*II1*):* Ficha Nivel 2, situación 1, lee el apartado A e intenta contestar, Ana.

A: Sea el conjunto de números desde 1 a 5000. Representa cada número en las siguientes casillas.
E: Muy bien, pues hay que poner…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5)*
E: Estaríamos toda la mañana poniéndolos, voy a poner los tres últimos, ¿vale?, el último sería…
A: *(Escribe 5000, 4999, 4998)*
E: Y los puntos suspensivo aquí, significa que habría unos cuatro mil novecientos y pico, ¿de acuerdo? Vamos a ver el apartado B lo que nos dice.
A: Sea el conjunto de números desde 1 a 4500. A cada número le sumamos 500, representa ahora n+500 en las casillas.
E: En vez de 1…
A: *(Escribe 501, 502, 503, 504, 505)*
E: Y ahora los 3 últimos, mejor hacerlo así, si el último es 4500 si le sumo 500 sería…
A: *(Escribe 5000, 4999, 4998)*
E: Muy bien a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: A.
E: A, muy bien. Vamos al apartado C, léelo.
A: Sea n el conjunto de número desde 1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: El primero sería…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Pon el que te dé la gana
A: 500.
E: Siguen adelante y ahora el apartado D, sea n
A: El conjunto de números desde 1 en adelante, a cada número le sumamos 500, representa ahora n+500
A: *(Escribe 501, 502, 503, 504)*
E: Y si quieres poner el correspondiente a 500 sería…
A: *(Escribe1000)*
E: Muy bien, a la vista de los resultados, ¿Quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Son iguales.
E: ¿Aunque este empiece en 1 y este en 501? *(Señala los dos apartados)*
A: Sí.
E: ¿Porqué?
A: Porque los dos son infinitos. *(II1**4**)*

*E(III1): Muy bien, Ficha Nivel 3, léelo e intenta contestar Ana.
A: Sea el conjunto de números desde 1 a 10, a cada número le corresponde su inversa, es decir 1/n. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Vale, entonces el primero ¿sería?
A: 1, ¿menos 1?
E: No.

A: ¿Por qué?, no lo entiendo.
E: Estamos haciendo la inversa, poniendo el número aquí abajo.
A: ¡Ah!, vale, vale, ya.
E: 1/1, en vez de 2, ½…
A: *(Escribe 1/1, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9 y 1/10)*
E: Muy bien, vamos a ver el apartado B, igual que el anterior, léelo.
A: Sea el conjunto de números desde 1 a 7, a cada elemento le corresponde su inversa más 3, es decir, representa 1/n+3 ahora esos números en las casillas siguientes.
E: En vez de 1 sería…
A: *(Escribe ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10)*
E: Aquí la única diferencia que existe es que son números decimales, ¿vale? ¿Qué le está pasando a los números, Ana?
A: Que se van volviendo más pequeños.
E: A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: A.
E: Muy bien, vamos a ver el apartado C, qué dice C.
A: Sea el conjunto de números desde 1 en adelante, a cada elemento le corresponde su inversa, es decir 1/n. Represéntalo.
E: Muy bien, otra vez lo mismo.
A: (Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼)
E: Aquí pon el que te de la gana,
A: 1/10.
E: Vale, y siguen adelante, vamos a ver el apartado D.
A: Sea el conjunto de números desde 1 en adelante, a cada número le corresponde su inversa más tres, es decir representa 1/n+3.
E: Vale, igual que este, sería…
A: *(Escribe ¼, 1/5, 1/6, 1/7)*
E: Y este, sería…
A: *(Escribe 1/13)*
E: No pasa nada que pongas el 10, porque a lo mejor es de uno de por aquí *(señala los puntos suspensivos)*. Bien, ¿qué le está pasando a los números de nuevo?
A: Se están poniendo más pequeños.
E: ¿Qué crees tú que va a llegar si vas poniendo el número mayor el de abajo? Cuanto mayor es el de abajo.
A: Más pequeño es el número.
E: Hasta llegar… ¿a cuál?
A: A infinito.
E: A ¿infinito va a llegar? Fíjate en los números, Ana, 1, 0,5, 0,3, 0,25, 0,10
A: 0,000…
E: Bien, a la vista de los resultados, teniendo en cuenta eso, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Son iguales.
E: ¿Aunque llegue al 0?
A: Sí.
E: ¿Aunque le falte aquí 3 números? *(Señala el apartado C)*
A: Sí.
E: La pregunta es, ¿por qué?
A: Porque siempre se pueden añadir ceros después de la coma.
E: ¿Después de la coma? Serían negativos entonces, y negativos no pueden ser, porque los que ponemos aquí abajo son todos positivos.
A: Pero siempre al añadir cero.
E: Entonces, a la vista de los resultados, ¿tendría la misma cantidad C que D?
A: No, no sé…. Tienen los dos iguales.
E: ¿Por qué?
A: Porque siempre puedes añadir ceros, no tiene límite.
E: Ten en cuenta,… Pero en cantidad dices tú que tiene la misma cantidad arriba que abajo, ¿por qué?
A: Yo que sé, porque.
E: ¿Por la misma razón que dijiste anteriormente?
A: Sí, ¿no?
E: Porque son, ¿qué?
A: Infinitos. *(III1**4**)*
E: ¿Aún acabando en cero?
A: Claro.

*E(*IV1*): Ficha Nivel 4, apartado A, léelo y contesta.
A: Sea el conjunto de números desde 1 a 1000. A cada número le correspondemos su inversa, es decir, 1/n. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien, sería…
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼, 1/5)*
E: Bien, y los 3 últimos, no vamos a estar toda la mañana, el último es 1000, lo cual el último sería y el anterior…
A: *(Escribe1/1000, 1/999, 1/998)*
E: Vale. Vamos al aparatado B, léelo.
A: Sea el conjunto de números desde 1 a 500, a cada elemento le corresponde su inversa más 500, es decir, representa 1/n+500 ahora con números en las casillas siguientes.
E: El primero sería…
A: *(Escribe 1/501, 1/502, 1/503, 1/504, 1/505)*
E: Y los 3 últimos como el último es 500, pues sería 1 partido…
A: *(Escribe 1/1000, 1/999, 1/998)*
E: Bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: B tiene más números.
E: ¿B? que va del 1 al 500.
A: No, si no, espérate… A
E: Bien, vamos al apartado C
A: Sea el conjunto de números desde 1 en adelante, a cada elemento le correspondemos su inversa, es decir, 1/n, representa cada número.
E: El primero sería…

A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼)*
E: Y este pon el que te dé la gana.
A: *(Escribe1/10)*
E: Vale, y esto sigue en adelante. Aquí empezaríamos entonces sumándole 1 abajo, ¿verdad?, 1 partido entonces…
A: *(Escribe1/501, 1/502, 1/503, 1/504)*
E: Y aquí pon el que te dé la gana, si quieres poner el correspondiente arriba…
A: *(Escribe 1/510)*
E: Entonces, mira tú lo que está pasando, otra vez lo estamos diciendo, que van disminuyendo, ¿vale? A la vista de los resultados ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: C tiene más números.
E: ¿C tiene más números?
A: Sí. *(IV1B)*

*E(*IV2*): Esto lo hemos puesto así para que lo veas mejor, ¿vale?, aunque el de arriba no lo vas hacer otra vez porque lo has hecho bien. Y abajo vamos a poner otra vez, 1/1…
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7)*
E: Y aquí sería 1/1000.
A: *(Escribe 1/1000)*
E: Y abajo era 1/501...
A: *(Escribe 1/501, 1/502, 1/503, 1/504, 1/505, 1/506, 1/507)*
E: Te lo he puesto así para que veas que van disminuyendo y este último sería 1/1500, ¿no?
A: *(Escribe 1/1500)*
E: Como ves tú esto va disminuyendo, a la vista de los resultados ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: C, son iguales... es que no sé si tienen final o no tiene final.
E: No tienen final.
A: Pues entonces son iguales.
E: ¿Por qué son iguales?
A: Porque son infinitos. *(IV2A)*

*E(*IV3*): Vamos a verlo así ahora, este lo mismo, ponlo otra vez.
A: *(Escribe ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10)*
E: Este le sumábamos 500, y era 501.
A: *(Escribe 1/501, 1/502, 1/503, 1/504, 1/505, 1/506, 1/507)*
E: Este lo habías hecho tú bien, a este, *(señala el B)*, le faltan 3 y… El de abajo, otra vez lo mismo.
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7)*
E: Este pon el que te dé la gana.
A: *(Escribe 1/ 10)*
E: Bien siguen adelante, y aquí pues le vamos sumando 500, 1 partido…
A: *(Escribe 1/504, 1/505, 1/506)*
E: Y aquí el que le corresponde a este, ¿cuál sería?
A: 1/510.
E: A la vista de los resultados ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Son iguales.
E: ¿Por qué?
A: Porque hay infinitos. *(IV3A)*

*E(*IV1'*): Volvemos, a una tarea parecida a la primera. Sea el conjunto de 1 hasta 1000, le corresponde ahora 1/n, este igual que el anterior, entonces sería…
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼, 1/5)*
E: Y ahora el último sería 1/1000, el anterior sería 1/999…
A: *(Escribe 1/1000, 1/999, 1/998)*
E: Y ahora este *(señala apartado B)*, vamos a sumarle 600, ¿vale?, en vez de 1 sería 1 partido.
A: *(Escribe 1/601, 1/602, 1/603, 1/604, 1/605)*
E: Y los 3 últimos, como el último es 400, el último será 1 partido…
A: *(Escribe 1/1000, 1/999, 1/998)*
E: A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: A.
E: Bien vamos hacer el C y el D para terminar, ¿vale? Sea el conjunto de 1 en adelante, a cada número le corresponde su inversa, 1/n, igual que el anterior, luego el primero sería…
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼, 1/5)*
E: Y este el que te dé la gana a ti, cualquiera.
A: *(Escribe 1/10)*
E: Vamos al apartado D, es lo mismo que hemos hecho anteriormente, pero ahora le vamos a sumar 600, luego el primero sería 1 partido…
A: *(Escribe 1/601, 1/602, 1/603, 1/604)*
E: Este le corresponderá entonces 1 partido…
A: *(Escribe 1/610)*
E: A la vista de los resultados ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Son iguales.
E: ¿Por qué?
A: Porque son infinitos. *(IV1'**4**)*
E: Muchísimas gracias, Ana.

16) <u>Alumno:</u> An.14,07 Nombre: Ana Fecha de Nacimiento: 05/10/00

E: Entrevista nº 4 del día 29 de Abril del 2015, con Ana R. C., Ana, ¿cuántos años tienes?
A: 14.
E: 14 años, ¿cuándo cumples los 15?
A: En octubre.
E: Muy bien, Ana, mira la Ficha Nivel 1, lee el apartado A en voz alta e intenta contestar.
A: Sea el conjunto de números desde nº 1 a nº 10, representa cada uno en las casillas siguientes.

E: ¿Lo entiendes entonces? Tienes que poner aquí.
A: *(Escribe 1, 2, 3 ,4 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Muy bien, vamos a ver el apartado B lo que nos dice.
A: Sea el conjunto de números desde nº 1 a nº 7. A cada número le sumamos 3. Representa, ahora n+3 en las casillas.
E: En vez de 1 hay que poner…
A: 3.
E: No, 4, hay que sumarle siempre 3, ¿vale?
A: ¡Ah!, vale, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: ¿Por qué 10? Porque el último es 7, más 3, 10. A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son los dos iguales?
A: ¿Más cantidad de números? El A
E: Muy bien. Vamos a ver el apartado C y D, ¿vale? Apartado C, léelo.
A: Sea el conjunto de números desde nº 1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Vale, 1, 2…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Eso es y aquí pon el que tú quieras.
A: ¿El que yo quiera? ¿De esos?
E: No, porque date cuenta que hemos puesto aquí puntos suspensivos, para no estar toda la mañana poniendo, ¿no? entonces aquí puedes poner tú…
A: 14.
E: Eso significa, Ana, que los puntos suspensivos, ¿qué son?
A: Que continúa hasta el 14.
E: Hasta el 14 y después hay otros puntos suspensivos, Ana, ¿qué significa eso?
A: Que siguen más.
E: Siguen más, ¿hacia dónde se dirigen?
A: Del 14 en adelante, ¿no?
E: Del 14 en adelante pero, ¿tendría fin?
A: No.
E: Vamos a ver el aparatado D, a ver cómo nos sale.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. A cada número le sumamos 3. Representa, ahora n+3 en las casillas siguientes.
E: En vez de 1 pongo…Hay que sumarle 3.
A: 4, 5, 6, 7.
E: Y si he puesto 14, pues aquí voy a poner…
A: 17.
E: Siguen adelante, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Iguales, ¿no?
E: ¿Aunque este empiece en 1 y este en 4?
A: No, el D.
E: El D.
A: El D que tiene más.
E: ¿Tiene más?
A: Cantidad de números.
E: ¿Por qué?
A: Porque el C empieza del 1 al 4 y el D del 4 al 7.
E: El C empieza del 1 en adelante y el D empieza del 4 en adelante.
A: ¿Dónde hay más números?
E: ¿Dónde hay más cantidad de números?
A: El C. *(I1B)*

*E(*I2*): Vamos a verlo aquí, Ficha Nivel 1, situación 2, esto lo hemos hecho anteriormente el 1, 2, 3; sigue tú…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y al de abajo le hemos sumado3, para 1, 4,…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: A la vista de los resultados, tú me has dicho que A tiene más cantidad de números que B, ¿vale?, en concreto 3. En el C hemos empezado el 1, 2, 3; sigue tú.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Yo he puesto puntos suspensivos y he sido un poquito más bestia que tú, he puesto el 100, luego aquí hay unos noventa y tantos, pero esto sigue en adelante, no acaba. El de abajo hay que concluirlo y entonces hay que sumarle 3, para 1 el 4, para 2, 5…
A: *(Escribe 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y para el 100, el correspondiente sería…
A: 103. *(Escribe103)*
E: Y eso siguen adelante, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de número C, D o son iguales?
A: El C. *(I2B)*

17) <u>Alumno:</u> Cr.15,04 Nombre: Cristina Fecha de Nacimiento: 06/01/00

E: Entrevista nº 6 del día 29 de Abril del 2015, con Cristina P. T. de 3º B, ¿qué edad tienes, Cristina?
A: 15.
E: 15 años. Bien, Cristina, lee el apartado A y el B de la ficha nivel 1 e intenta contestar.
A: ¿En voz alta?
E: En voz alta, sí.
A: Sea el conjunto de números de n 1 a n=10, representa cada número en las casillas siguientes. ¿Lo represento?
E: Sería entonces…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Perfecto. Vamos hacer el apartado B. Léelo en voz alta, por favor.

A: Sea el conjunto de números desde n 1 a n 7. A cada número le sumamos 3, representa ahora n+3 en las casillas.
E: En vez de 1 hay que sumarle 3, sería… 2 más 3, 5, hay que sumarle desde el 1 hasta el 7, entonces 1 le hemos sumado 3, 4; 2 le sumamos 3…
A: ¡Ah!, vale 5. *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: Los dos iguales.
E: ¿Iguales? ¿Cuántos números tiene el A?
A: 10.
E: ¿Y cuántos tiene el B?
A: 7.
E: ¿Son iguales?
A: Pero los valores son los mismos.
E: ¿Tienen la misma cantidad de números?
A: No.
E: Apartado C léelo en voz alta.
A: Sea el conjunto de números desde n 1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien, empezaríamos por…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Y este pon el que tú quieras.
A: ¿El número que yo quiera? *(Escribe10)*
E: Eso significa que los puntos suspensivos, Cristina, ¿qué serían?
A: 5, 6, 7, 8 y el 9.
E: Para no escribirlos todos pues hemos puesto puntos suspensivos. Y estos puntos suspensivos, ¿qué significa, Cristina?
A: Que siguen adelante.
E: Hasta dónde.
A: Hasta infinito.
E: Vamos a ver el apartado D.
A: Sea el conjunto de números desde n 1 en adelante. A cada número le sumamos 3. Representa ahora n+3 en las casillas siguientes.
E: Entonces igual que el de arriba, sumarle 3, sería…
A: ¡Ah!, ¿a 1 le sumo 3? *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Seguiríamos adelante y ahora tú aquí si quieres pon el representante de aquí.
A: *(Escribe 10)*
E: 10, del 7 de aquí *(señala los puntos suspensivos de arriba)* al sumarle 3, sería 10, y sigue adelante. A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Son iguales.
E: ¿Por qué?
A: Porque hay el mismo número de casillas.
E: No, no lo digo por las casillas, sino por cantidad de números. ¿Aunque uno empiece en 1 y otro empiece en 4?
A: No, entonces no tienen lo mismo, el D tendría más.
E: ¿El D tendría más?
A: Sí.
E: ¿Por qué?
A: No, mentira, me he equivocado, el C tendría más porque aquí sólo hay 4, va de 3 en 3 y el de arriba va de 1 en 1.
E: el de abajo va también de 1 en 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
A: Pero este empieza desde el 1.
E: ¿Aunque sigan en adelante?
A: El C tiene más. *(I1B)*

*E(*I2*): Vamos hacerlo de otra forma, Ficha Nivel 1, hemos puesto del 1 en adelante, 1, 2, 3 sigue tú…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: El de abajo había que sumarle 3; 1más 3, 4; 2 más 3, 5; 3 más 3…
A: *(Escribe 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Ves una relación que existe entre ellos, y a la vista de los resultados, me dijiste que más cantidad tenía este *(señala el apartado A)*, en concreto faltan 3 aquí *(señala apartado B)*. Vamos a ver el de abajo, el de abajo es de 1 en adelante, 1, 2, 3 sigue tú.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Y yo he sido un poquito más bestia, he puesto el 100, ¿vale?, pero puedes poner el número que te dé la gana, y sigue en adelante, sin acabar. Y ahora pues estamos diciendo que le estamos sumando 3, para 1, 4, para 2, 5…
A: *(Escribe 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y este si le ponemos el correspondiente al de arriba.
A: *(Escribe 100)*
E: Has puesto 100, pero si quieres poner el correspondiente al de arriba, sería el 103, para que siga la misma correspondencia, ¿no?
A: Pues lo ponemos. *(Escribe 103)*
E: Da igual si pones 100, tampoco pasa nada, habría sido algún número de por aquí *(señala los puntos suspensivos)*, que al sumarle 3 lo convierte en 100; si tú hubieras puesto por ejemplo el 120, sería el 117 de por aquí que se le suma 3, que siempre hay una correspondencia. A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Son iguales.
E: ¿Por qué?
A: Porque siempre va a ver un número que sumándole 3 va a ser igual, no, no tiene más C.
E: ¿Aunque no acabe?
A: Es que los números son infinitos, no tiene unos más que otros, son siempre infinitos
E: ¿Entonces?
A: Son los dos iguales.
E: Son iguales, ¿por qué?
A: Porque son infinitos. *(I2A)*

*E(*I3*): Vamos a ponerlo mejor ahora así, mira, 1, 2, 3 sigue tú.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Lo he puesto de otra forma, hay que sumarle 3; en vez de 1 sería 4…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: A la vista de los resultados, otra vez lo mismo, tiene más cantidad de números este que este *(señala el A)*. Vamos a ver el de abajo, 1, 2, 3 sigue tú…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Y aquí pon el que tú quieras.
A: *(Escribe 100)*
E: El 100, igual que el mío, y siguen adelante, ¿vale? Bueno pues ahora le sumamos 3, del 1 en adelante, en vez de 1 hay que poner…
A: *(Escribe 4, 5, 6)*
E: Y en vez de, el que quieras, si quieres el de arriba, pues el de arriba o el que tú quieras, a la vista de los resultados, ¿tiene la misma cantidad de números C que D o son iguales?
A: Son iguales.
E: ¿Por qué?
A: Por lo mismo, porque al final siempre van a llegar al infinito, va a haber infinitos números no se pueden contar cuál tiene más y cuál tiene menos. *(I3A)*

*E(*I1'*): Seguimos, vamos a ponerlo otra vez en el mismo orden, este era igual, el 1.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y el de abajo, lo he puesto muy fácil, es del 1 al 4 y le vamos a sumar 6, en vez de 1 sería…
A: 5.
E: 7.
A: No.
E: 1 más 6.
A: ¡Ah! que le sumamos 6, es que he sumado 4 más 1. *(Escribe 7, 8, 9, 10)*
E: Y no quiero que sigas más porque es hasta el 4, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: Iguales.
E: ¿Iguales, cuántos números hay en A?
A: 10.
E: ¿Cuántos números hay en B?
A: 4.
E: ¿Son iguales 10 que 4?
A: No, el A tiene más.
E: Bueno, te ha costado, ¿eh?
A: No, es que digo una cosa, es que si va 7, o sea, aquí ¿no hay más entre medio?
E: No, no.
A: ¡Ah!, vale, vale.
E: Ahora el C de 1 en adelante, 1.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Pon aquí el que te dé la gana.
A: *(Escribe 10)*
E: Y siguen adelante. Y ahora lo mismo que el anterior, pero le vamos a sumar 6, en vez de 1…
A: *(Escribe 7, 8, 9,10)*
E: En vez de 10.
A: *(Escribe 20)*
E: Vale, en adelante. ¿Quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: D.
E: D, ¿qué?
A: Que D tiene más números.
E: ¿Más números? ¿Aunque no termine nunca? Porque tú has puesto el 20 aquí.
A: Pues tiene los dos iguales, porque es que siguen adelante.
E: Entonces.
A: Tienen los dos iguales.
E: ¿Qué razón le podrías dar tú?
A: Porque siguen siendo infinitos, los números nunca terminan, siempre va tener los mismos números arriba que abajo porque siempre va a seguir, aunque a lo mejor va con uno más retrasado y otro más adelantado, siempre va a tener los mismos. *(I1'**3**)*

*E(*II1*): Ficha Nivel 2, Cristina, lee el apartado A e intenta contestar.
A: Sea el conjunto de números desde n 1 a n 5000. Representa cada número en las siguientes casillas.
E: Hay que poner aquí.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5)*
E: Y aquí podíamos estar toda la mañana, no vamos a estar toda la mañana, el último se sabe que es…
A: ¿El último de todos?
E: Sí, porque hay que llegar hasta 5000.
A: 5000.
E: ¿Y el anterior?
A: 4999, ¿lo pongo?
E: ¿Y el anterior?
A: 4998.
E: Ya hemos creado entonces el conjunto, ¿vale? Y los puntos suspensivos estos hay unos cuatro mil novecientos y pico, ¿vale?, para no estar toda la mañana. Vamos a ver lo siguiente, sea el conjunto del 1 al 4500 y ahora le sumamos 500, igual que el anterior, pero sumándole 500, en vez de poner 1 sumo 500, sería…
A: *(Escribe 501, 502, 503, 504, 505)*
E: Y ahora, vamos a ver, el último es 4500 pero como se le suma 500, el último será.
A: Pues…5000… 4999, 4998.
E: 4500 más 500.
A: 5500.
E: No, 5000, y el anterior.
A: 5000… 4999, 4998.
E: Vale, ya tenemos creado el segundo, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: El B.
E: El B ¿qué?

A: El B tiene más números porque le ha sumado 500.
E: Pero el 501 de aquí, estará por aquí en medio. *(Señala los puntos suspensivos del A)*
A: Tienen los dos los mismos números, porque los dos acaban en 500.
E: ¿Cuántos números hay aquí, desde el 1hasta dónde?
A: Al 5000.
E: ¿Cuántos números hay entonces?
A: 5000.
E: Y aquí hay del 501 al 5000.
A: El A tiene más números.
E: Venga menos mal. Vamos ahora al apartado C, Ana.
A: Cristina.
E: Cristina, perdón, léelo en voz alta.
A: Sea el conjunto de números de 1 en adelante, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Bien, entonces igual que el anterior 1…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Sigue en adelante y aquí pondríamos por ejemplo…
A: 5000.
E: Perfecto y sigue adelante, ¿vale? Y ahora le vamos a sumar, lo siguiente, sea n el conjunto.
A: El conjunto de números desde 1 en adelante, a cada número le sumamos 500. Representa ahora n+500 cada número en las casillas.
E: En vez de 1…
A: *(Escribe 501, 502, 503, 504)*
E: Y aquí pon si quieres el correspondiente al de arriba.
A: *(Escribe 5000)*
E: Bien a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Iguales.
E: ¿Por qué?
A: Porque el de arriba acaba en 5000.
E: No, siguen adelante.
A: No, digo en este *(señala el apartado A)*, y aquí siguen adelante, o sea que siguen siendo infinitos. *(II13)*

*E(*III1*): Ficha Nivel 3.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=10. A cada número le corresponde su inversa, es decir, 1/n. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Entonces el primero sería...
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10)*
E: Aquí lo único que está sacando son los números decimales. Vamos a ver el apartado B.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=7, a cada elemento le corresponde su inversa más 3, es decir, 1/n+3. Representa ahora esos números en las casillas siguientes.
E: Entonces sería el primero, 1 partido...
A: Pongo más 3.
E: No, ya 4.
A: Ya, 4. *(Escribe ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10)*
E: A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números decimales A, B o son iguales?
A: Los dos iguales.
E: ¿Cuántos números decimales tiene A?
A: Un montón.
E: Cuéntalos.
A: 10, ¿no?
E: Y, ¿cuántos tiene B?
A: 7.
E: ¿Es lo mismo 10 que 7, Cristina?
A: Noo…, son más 10, pero si los dos acaban en el mismo número.
E: No es que acabe, yo quiero saber la cantidad de números.
A: ¡Ah!, vale, pues tiene más A.
E: Vamos a ver ahora el C, léelo, Cristina.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante, a cada elemento le corresponde su inversa, es decir, 1/n. Represéntalos.
E: Muy bien.
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼)*
E: Aquí pon ahora el que te dé la gana.
A: *(Escribe 1/10)*
E: Bien, vamos a ver lo que nos dice el B.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. A cada elemento le corresponde su inversa más 3, es decir, 1/n+3.
E: El primero sería entonces...
A: *(Escribe ¼, 1/5, 1/6, 1/7)*
E: Y aquí pon el que tú quieras, si quieres el correspondiente a este…
A: *(Escribe 1/10)*
E: Aquí pasa una cosita, ¿qué le está pasando a todos los números decimales que están saliendo? ¿Van aumentando o van disminuyendo?
A: Que van disminuyendo.
E: Vale, cuanto más grande sea el número que esté abajo…
A: Disminuye.
E: Disminuye, y ¿hacia dónde iría?
A: Hacia dónde iría...
E: Sí, al ser el número más grande, ¿a qué número llegaría?
A: Hasta el infinito.
E: No, cuando se va haciendo muy grande de abajo, ¿qué le va pasando a los números decimales?
A: Que van disminuyendo.
E: ¿Hacia dónde llegarían?
A: A un número negativo, no se podría contar.
E: Un número negativo no, porque todos los números que estamos poniendo aquí son positivos.
A: ¡Ah!, pues hasta cero.

E: Bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: El C.
E: El C, ¿tiene?
A: El C tiene más números decimales. *(III1B)*

*E(*III2*): Vamos a verlo aquí, ¿vale?, *(Se le pone la tarea III2)* sería… pon tú, 1/1.
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10*)
E: Al de abajo había que sumarle 3, y sumar hasta el 7, ¼, 1/5.
A: *(Escribe ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10)*
E: Y aquí había más cantidad arriba que abajo. Y este lo mismo 1/1.
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7)*
E: Y yo te he puesto aquí 1/100
A: *(Escribe 1/100)*
E: Y abajo hay que sumarle 3, sería ¼…
A: *(Escribe ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10)*
E: Y ahí sería pues el que tú quisieras
A: *(Escribe 1/100)*
E: A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales? Observa los decimales.
A: El C. *(III2B)*

18) <u>Alumno:</u> Pa.15,01 Nombre: Pablo Fecha de Nacimiento: 07/04/00

E: Entrevista nº 5 del día 29 de Abril del 2015, con Pablo P. R. de 3ºB.
Pablo, ¿cuántos años tienes?
A: 15.
E: 15 años, muy bien. Pablo, vamos a hacer la Ficha de Nivel 1, vas a leer el apartado A, y vas a intentar contestar. Léelo en voz alta, por favor.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=10, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien, y aquí hay que poner entonces.
A: Los números, los voy poniendo, ¿no? *(Escribe 1, 2, 3 ,4 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Perfecto, vamos a ver el apartado B lo que nos dice, léelo en voz alta.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=7. A cada número le sumamos 3. Representa, ahora n+3 en las casillas
E: Muy bien, luego el primero sería…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Perfecto, ¿por qué el último es el 10?, porque nos ha dicho que era hasta el 7. A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: A.
E: Vamos a ver ahora el apartado C, léelo.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien, entonces el primero sería.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Siguen en adelante y aquí pon el número que te dé la gana.
A: ¿El que yo quiera? *(escribe100)*
E: Entonces estos puntos suspensivos serán…
A: Los números entre 4 y 100.
E: Exactamente del 5 al 99. Y estos puntos suspensivos, ¿adónde irían, Pablo?
A: Del 101 en adelante.
E: ¿Hasta dónde?
A: Hasta el infinito.
E: El apartado D, léelo y contesta.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. A cada número le sumamos 3. Representa, ahora n+3 en las casillas siguientes.
E: Entonces hay que sumarle 3, en vez de 1 es…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Y aquí tú si quieres pon el correspondiente ¿vale?
A: *(Escribe 100)*
E: Has puesto el 100, significa que es el correspondiente de aquí *(señala los puntos suspensivos)*, 97 le sumas 3 y da 100, pero da igual, ¿vale?, bien, a la vista de los resultados, Pablo, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: C tiene más números.
E: ¿Por qué?
A: Porque no le ha sumado 3, no va de 3 en 3
E: Lo que pasa que el 4 está aquí, no aquí, el 5 está aquí, no aquí *(señala las regletas)*
A: Entonces son iguales.
E: ¿Aunque este empiece en 1 y este en 4?
A: El C tiene más números.
E: El C tiene más números, en concreto, ¿cuántos números tendría?
A: 3 más
E: Aunque no se acaben.
A: *(Asiente con la cabeza) (I1B)*

*E(*I2*): Vamos a la situación 2, sería 1, 2, 3; este igual que el anterior, ¿vale, Pablo?
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y después había que sumarle 3, como has hecho tú, 4, 5…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: A la vista de los resultados, me dijiste que tenía más cantidad de números el A que el B. El C era 1, 2, 3; sigue tú.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Yo te he puesto el 100, y sigue en adelante, ¿vale? Y ahora para que veas la correspondencia para 1 era 4, para 2, 5, para 3 era…
A: *(Escribe 6, 7, 8, 9, 10)*

E: Y este sería, si quieres poner el correspondiente de 100 que está ahí, pues más 3, pues 103.
A: *(Escribe103)*
E: A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de número C, D o son iguales?
A: Iguales.
E: ¿Por qué?
A: Porque el C tiene 3 números más al empezar, pero el D tiene tres números más al terminar

E: Estos siguen adelante, no paran aquí, ten cuidado, no paran en 100 y 103
A: Entonces tiene más cantidad el C.
E: Vamos a ver si este va de 1 en adelante y este va de 4 hacia delante, no acaban. Entonces cuál es tu respuesta
A: El C.
E: El C, ¿tiene más cantidad de números?
A: Sí.
E: ¿Seguro?
A: Sí. *(I2B)*

CURSO: 4 º E. S. O.

1) Alumno: Ma.15, 09 Nombre: María de la Luz Fecha de Nacimiento: 04/08/99

E: Entrevista nº 2 del día 26 de Febrero del 2015, con Mª Luz M. F. de 4º A, ¿qué edad tienes? Mª Luz.
A: 14.
E: 14 años muy bien. Vamos al apartado A y B lo lees en voz alta y contesta.
A: Sea el conjunto de números de n=1 a n=10 representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien, luego aquí ¿qué hay que poner?
A: 1.
E: ¿Lo pones tú?
A: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: Muy bien. Vale. ¿Es fácil?
A: Sí.
E: Vamos al apartado B.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=7. A cada número le sumamos 3 representa ahora n+3 en las casillas.
E: En vez de 1, 2.
A: 4,5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: Ahora viene la pregunta ¿Tiene la misma cantidad de números A que B?
A: Pero en cuanto a la suma de…
E: No, números, ¿cuántos números tiene A?
A: 10.
E: ¿Cuántos números tiene B?
A: 7.
E: ¿Quién tiene más números?
A: A.
E: ¿Cuántos más?
A: 3.
E: Vale, muy bien. Vamos al apartado siguiente.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: En adelante, ¿tú lo entiendes?
A: Sí, a partir de 1.
E: Luego empezaríamos aquí.
A: 1, 2, 3, 4.
E: Vale, he puesto puntos suspensivos, eso indica que sigue adelante. Aquí pon tú el número que quieras.
A: 7.
E: Eso significa que aquí, ¿quién está?
A: 5 y 6.
E: Vale, podías haber puesto otro más grande. ¿Y estos puntos suspensivos de aquí?
A: Que continúa.
E: Continúa, vale, ¿quién tendrá más números estos puntos suspensivos o estos puntos suspensivos?
A: Los siguientes.
E: Muy bien. Pues el apartado D es muy sencillo.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. A cada número le sumamos 3. Representa ahora n+3 en las casillas siguientes.
E: Vale, la misma forma anterior, en vez de 1 ponemos…
A: 4, 5, 6, 7,…
E: Sigue adelante, si quieres poner el correspondiente a este, o cualquier otro, da igual, tú has puesto por correspondiente a 7, pero puedes poner, si tu pones por ejemplo el 9, aquí el correspondiente, si hubieras puesto por ejemplo 200, vendría aquí, luego sigue adelante.
E: A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad números C, D o son iguales?
A: Iguales.
E: Iguales. Uno empieza en 1 y otro en 4.
A: No lo sé. *(I1B)*

*E(*I2*): Vamos a verlo de otra forma. Lo he puesto de otra forma, el primero: 1, 2, 3,.. Sigue tú.
A: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: Perfecto, y aquí era 4, 5…
A: 6, 7, 8, 9, 10.
E: Tú me has contestado que tiene más el de arriba, tres más. El de abajo 1, 2, 3, sigue tú…
A: 4, 5, 6, 7.
E: Vale, yo te he puesto 100, en estos puntos suspensivos ahí en medio hay noventa y tantos; y esto ya va acabar. Y abajo, he puesto el correspondiente, en vez de 1, 4; en vez de 2, 5, en vez de 3…
A: 6, 7, 8, 9, 10.
E: Y aquí sería, si tú quieres poner el correspondiente, pero no tiene porque serlo; si es el correspondiente sería
A: 103.
E: Vale y aquí acaba. Este empieza y acaba, este empieza y acaba, este empieza y no acaba y este empieza y no acaba. A la vista de los resultados, C y D ¿quién tiene más cantidad C, D o son iguales?
A: Son iguales. (*I2A*)

*E(*I3*): Vamos a ver de otra forma. 1, 2, 3, sigue…
A: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: Y aquí los correspondientes, en vez de 4.
A: ¿A partir del 1? 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: Bueno vamos a ver el de abajo, 1, 2, 3, sigue tú.
A: 4, 5, 6, 7…
E: Y aquí pones el que tú quieras.
A: 100.
E: ¡Ea!, copiona… y sigue adelante, y aquí tengo que sumarle tres.

A: 4, 5, 6.
E: Sigue adelante y si aquí has puesto 100…
A: 103
E: A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad números C, D o son iguales?
A: C.
E: C ¿tiene más números? ¿Aunque no acaben?
A: Sí. *(Asiente con la cabeza) (I3B)*

2) <u>Alumno:</u> Al.16, 03 Nombre: Alba Fecha de Nacimiento: 05/02/99

E: Entrevista nº 3 del día 26 de Febrero 2015, con Alba C. E. de 4º A.
¿Qué edad tienes Alba?
A: 16.
E: 16, muy bien Alba léela en voz alta el apartado A y contesta.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=10. Represента cada número en las casillas siguientes. *(Escribe: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10)*
E: Muy bien, vamos al apartado B.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=7. A cada número le sumamos 3. Representa, ahora n+3 en las casillas. *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: La pregunta es, ¿tiene la misma cantidad de números A que B?
A: Sí.
E: Sí., ¿cuántos números tiene A?
A: ¡Ah! bueno eh… en las casillas tiene 10 números y en B tiene las casillas, Um… siete.
E: Siete, ¿luego?
A: O sea A tiene más números.
E: A tiene más números, ¿vale?, De hecho te lo he puesto aquí sombreado ¿vale?
A: Sí.
E: Tú,…, las casillas es para que tú pongas los números, evidentemente tú tienes que ver los numeritos, cantidad de números ¿eh?, no cantidad de casillas sino cantidad de números.
A: Cantidad de números.
E: Vamos a ir al apartado C, léelo.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: ¿En adelante se entiende lo que hay ahí?, sí, entonces aquí pondríamos…
A: 1, 2, 3, 4.
E: Te he puesto puntos suspensivos, y aquí puedes poner el número que te dé la gana.
A: 58.
E: Diferénciame entre estos puntos suspensivos y estos puntos suspensivos. *(Señalándole en la pantalla)*
A: Que estos puntos suspensivos están marcando unos números que está cerrado y que va del 4 hasta el 58.
E: Al cincuenta y tantos ¿no?, y estos de aquí.
A: Son hasta el infinito.
E: Vamos a ver el apartado D, dice… Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante y de la misma forma anterior vamos a sumarles 3, luego sería…ve poniendo.
A: 4, 5, 6, 7.
E: Seguiríamos, aquí.
A: El 61.
E: Has cogido el correspondiente de aquí arriba ¿no? Si hubiera puesto otro número al azar, por ejemplo el 52, o el 58 lo tendrías de alguno de por aquí ¿vale? *(Señalando la pantalla)*, y la pregunta es sencilla, ¿Tiene la misma cantidad de números C que D, o son iguales?
A: ¡Eh!…, aquí son iguales.
E: Iguales, ¿por qué?
A: Porque ambos son infinitos. *(I14)*

*E(*II1*): Lee Ficha Nivel 2, empezamos por el apartado A, sea el conjunto…
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=5000. Representa cada número en las casillas siguientes. *(Escribe 1, 2, 3 ,4 ,5)*
E: Y tenemos… *(Señalando con el cursor)*
A: 4998, 4999, 5000.
E: Vale, ahora vamos al apartado B.
A: Sea el conjunto de números n=1 a n=4500. Representa, ahora n+500 en las casillas siguientes.
E: El uno sería…
A: El 501, 502, 503, 504, 505.
E: Y los tres últimos cuales serían.
A: Pues serían el… ¿puedo empezar por el final?
E: Sí, si te parece más cómodo.
A: El 5000, eh…no, sería el 4500 otra vez.
E: No, a 4500 habría que sumarle 500, sería entonces.
A: ¡Ah!, 5000.
E: Y ya por lógica ¿no?
A: Sería 4999, y el 4998.
E: Que es, los números que están aquí, es decir, 4498 y 4499 le sumamos 500, ¿vale? Bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: Eh…, son iguales.
E: ¿Iguales? Mira a ver el primero, ¿empieza en…?
A: En 1.
E: Y termina…
A: 5000.
E: Y el otro empieza…
A: En 500.
E: y termina…

A: Pero ¿está contando números enteros?
E: Cantidad de números.
A: ¡Ah, cantidad de números!, Entonces el primero tiene más que el segundo.
E: ¿Cuántos números crees tú que tiene más el primero que el segundo?
A: 500.
E: 500, bueno, ¿convencida?
A: Sí.
E: Vamos para abajo. Sea el conjunto de n=1 en adelante, ídem de lo mismo que el anterior.
A: 1, 2, 3, 4.
E: Sigue adelante. Aquí puedes poner el que te dé la gana.
A: 96.
E: Y ya de la misma forma anterior.
A: Sea n el conjunto de números desde n=1 a n. Representa ahora n+500 cada número en las siguientes casillas.
E: Ponemos.
A: El 501, 502, 503, 504.
E: Aquí por ejemplo, ¿Qué podríamos poner?
A: 596.
E: A la vista de los resultados, ¿tiene la misma cantidad de números C que D?
A: Creo que sí, tienen la misma cantidad, porque van hasta el infinito.
E: ¿Aunque este empiece en 1 y este en 501?
A: Sí. *(II14)*

*E(*III1*): Ficha Nivel 3. Lee…
A: Sea el conjunto de números de n=1 a n=10, a cada número le corresponde su inverso, es decir 1/n. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Del 1 al 10, ¿hay que poner?
A: *(Escribe 1, ½, 1/3, ¼, 1/5,1/6,1/7,1/8,1/9,1/10)*
E: Ya he puesto yo los decimales para que tú los veas ¿vale?
A: Sí.
E: Sea el conjunto…
A: Sea el conjunto de números n=1 a n=7, a cada elemento le corresponde su inversa más 3, es decir, 1/n+3, representa ahora en las casillas siguientes.
E: ¿Cuál sería aquí?
A: Un tercio, no, un cuarto, un cuarto.
E: Un cuarto.
A: Un quinto, un sexto, *(escribe el resto hasta 1/10)*
E: Bien, a la vista de los resultados ¿quién tiene más cantidad de números A o B, o son iguales?
A: ¡Eh!… "¡ojú¡" ,es que … ¡eh!…
E: ¿Cuántos números tiene A?
A: A tiene, desde el 1 hasta el…
E: El uno partido…
A: ¡Ah!, a el 1/10.
E: Bueno, si no puedes contar los números.
A: ¡Ah!, diez.
E: ¿Y cuántos hay en el B?
A: Siete.
E: Ahora, sea el conjunto de números del 1 en adelante y le corresponde su inversa, ¿vale?, entonces habría que poner aquí… …
A: 1, ½, 1/3, ¼.
E: Sigue adelante.
A: 1/83.
E: Vamos con el apartado D, ¿vale? Sea el conjunto de n=1 en adelante, a cada número le corresponde la inversa.
A: ¼, 1/5, 1/6, 1/7.
E: Y aquí… *(Señala con el cursor)*
A: 1/86.
E: Bien, yo quiero que te fijes ahora en una cosa, este ahora empieza en 1, 0.5, 0.3, 0.25, 0.01 ¿qué va pasando aquí?
A: Que tiende a cero.
E: Que tiende a cero, y este de la misma forma, este corresponde a este ¿verdad?
A: Sí.
E: Empieza 0.25, 0.20, 0.16,… … y tiende a cero también ¿vale?
A: Sí.
E: Bien, a la vista de los resultados, teniendo en cuenta eso, que tienden a cero, los dos, pero que este empieza en 1 y este en 0,25; ¿quién tiene mayor cantidad de números C, D o son iguales?
A: Son,… son iguales, ¿no?, es que son infinitos. *(III14)*

*E(*IV1*): Ficha Nivel 4, lee Alba, apartado A
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=1000. A cada número le corresponde su inversa, es decir, 1/n. Representa cada número en las casillas siguientes.
A: 1, ½, 1/3, ¼, 1/5.
E: Por el último.
A: 1/1000, 1/999, 1/998.
E: *(Cambia el ajuste de decimales en cada celda para visualizar hasta 7 decimales)*
A: *(Asiente)*
E: Ahora, este. Sea el conjunto del 1 a 500… (Cambia el valor final en el enunciado de 500 a 4500), entonces el primero ¿sería?
A: Uno partido quinientos uno.
E: Eso es.
A: 1/502. *(Continúa escribiendo 1/503, 1/504 y 1/505)*
E: Y los tres últimos, pues no creo que tengas dificultad, ¿no?, ¿quieres empezar por el último?
A: Vale.
E: ¿Entonces sería?
A: Uno partido de… de 5000, ¿no?
E: Sí, ¿y el anterior?
A: Uno partido de 4500…, no, 4999, y uno partido de 4998.

E: Eso es, ¿vale?... Bien, a la vista de los resultados, quien tiene mayor cantidad de números A, B o son iguales
A: *(Se queda pensando)*
E: Este empieza en…
A: En 1 y termina en 0.001, el otro empieza en 0.001 y termina…
E: Y termina igual.
A: Siguen teniendo la misma cantidad.
E: ¿Por qué?
A: Tú siempre puedes encontrar un número entre dos, ¿no?
E: No, pero este va del uno al mil y…
A: ¿Solo los de las casillas?
E: Eso.
A: Entonces el primero tiene más.
E: Bueno, vamos al de abajo, ¿eh?, es lo mismo ¿vale?, ¿el primero sería?
A: ¡Eh!,… ¡ah!, vale, 1, 1/2, 1/3, ¼.
E: Ahí puedes poner el que te dé la gana
A: Uno partido de... 42.
E: Vale, y este empieza otra vez lo mismo, es decir, le vamos a sumar 500
A: 1/501, 1/502, 1/503, 1/504.
E: Y aquí el que tú quieras…
A: 1/542.
E: Todos estos, también van disminuyendo, le vamos a dar más decimales para que tu lo veas *(aumenta el valor del número de decimales en todas las celdas de la fila)*, esto empieza por…
A: Sí, sí.
E: Bien, el problema está otra vez en lo mismo, empieza disminuyendo, y ¿hasta dónde llegaría esto? Y este ídem de lo mismo. ¿Pasaría a cero?
A: No, porque…
E: Si los vamos disminuyendo, disminuyendo parece que van al cero, pero, ¿pasaría del cero?
A: Que se haría negativo.
E: ¿Y es posible que sean negativos?
A: No, los números que ponemos son todos positivos.
E: ¿Vale? a la vista de los resultados… ¿Quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: C tendría más cantidad que D. *(IV1B)*

*E(*IV2*): *(Se le pone la tarea IV2)*
El de arriba te he puesto otra forma de ponerlo, el de abajo.
A: *(Escribe 1, ½, 1/3,… 1/100)*
E: Aquí sería 1/501, 1/502.
A: *(Escribe 1/501, 1/502, 1/503…)*
E: Aquí tienes que poner el que corresponde u otro cualquiera, uno partido…
A: *(Escribe 1/600)*
E: Por poner uno.
A: Sí.
E: Vamos a ver ahora en otra disposición, este no vamos a hacer, aquí abajo pues, ahora hazlo tú, 1/1…
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼, 1/5,1/6, 1/7)*
E: Este pon el que tú quieras.
A: 1/61.
E: Eso va disminuyendo y aquí hay que sumarle 500, sería uno partido…
A: 1/501, 1/502, 1/503
E: Incluso el programa te va poniendo, y aquí por ejemplo el que tú quieras si quieres poner el de arriba.
A: 1/561.
E: Bien, a la vista de los resultados ¿quién tiene más cantidad de números?
A: Iguales. *(IV2A)*

*E(*IV3*): (Se le pone la tarea IV3) Ésta de ora disposición, hazla.
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3,1/4, 1/5, 1/6, 1/7)*
E: Vale, y ¿este?
A: *(Escribe 1/1000)*
E: ¿Los anteriores?
A: *(Escribe 1/999, 1/998, 1/997)*
E: Abajo lo mismo, pero sumando 500.
A: *(Escribe 1/501, 1/502, 1/503)*
E: Los últimos…
A: *(Escribe 1/999, 1/998, 1/997)*
E: La pregunta, otra vez la misma ¿tienen la misma cantidad de números?
A: El A tiene más.
E: Bien, ahora C y D.
A: *(Escribe 1/1, 1/2, 1/3 y 1/4)*
E: Y, ¿este?
A: *(Escribe 1/1000)*
E: Bien, abajo otra vez lo mismo pero sumándole 500, ¿1 partido?
A: *(Escribe 1/501, 1/502, 1/503)*
E: Muy bien, y este ¿por ejemplo?
A: *(Escribe 1/1500)*
E: Vale, mira los decimales que van apareciendo… ¿quién tiene más números arriba o abajo?
A: Los dos tienen la misma cantidad de decimales. *(IV3A)*

*E(*IV1'*): Bueno pues volvamos otra vez a lo último, a ver si ha quedado claro. Si lo ponemos en esta disposición, pues cómo quedaría… Del 1 hasta el 1000
A: 1, 2, ¡ay! perdón, ½, 1/3, ¼, 1/5.
E: Y estos tres últimos, que van hasta 1000, el último sería…
A: 1/1000, 1/999, 1/998.
E: Esto va disminuyendo. Y ahora este va del 1 al 400 y hay que sumarle 600. En vez de 1 sería…
A: *(Escribe 1/601, 1/602, 1/603, 1/604, 1/605)*
E: Y aquí los tres últimos, aquí sería 400+600 tendría que coincidir con el de arriba, entonces serían…
A: 1/1000, 1/999, 1/998.

E: Vale. Empieza y acaba, empieza y acaba, vale, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: ¡Hum!….es que este empieza…
E: Este empieza por aquí en medio, vale.
A: No sé, siempre a uno de arriba le va a corresponder uno de abajo.
E: Sí pero está fijo, lo cual, pero entre 0,200 y 250 no existe 240.
A: Vale, entonces el de arriba hay más números que abajo.
E: El de abajo vamos a ver la diferencia, la inversa de nuevo con lo cual sería…
A: 1, ½, 1/3, ¼.
E: Aquí puedes poner lo que tú quieras.
A: 1/75.
E: Vale, y abajo pues lo mismo.
A: 1/601, 1/602, 1/603, 1/604.
E: Aquí sería, si quieres poner como el de arriba.
A: 1/671.
E: Por ejemplo, ahí da igual…A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Ahí sí hay igual, misma cantidad infinita.
(IV14)

3) <u>Alumno:</u> Al.15, 09 Nombre: Alicia Fecha de Nacimiento: 25/08/99

E: Entrevista nº 4 del día 16 de febrero 2015 con Alicia Valdivia Cuenca, ¿vale? de 4º D, ¿qué edad tienes Alicia?
A: Quince.
E: Quince años. Muy bien Alicia, lee el apartado A y contéstalo, en voz alta.
A: Sea el conjunto de números desde n 1 a n 10, representa cada número en las casillas siguientes. ¡Hum!, uno, dos,…
E: Muy bien.
A: Tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve y diez.
E: Vale, ¿no?, vamos al apartado B, sea el conjunto… …
A: Sea el conjunto de números desde n igual a uno a n igual a siete, a cada número le sumamos tres. Representa ahora n+1 en las casillas. N uno
E: Uno, más tres.
A: Cuatro,… …
E: Cuatro
A: Ahora, cuatro más tres, siete.
E: No.
A: ¿No?, ah vale claro, entonces sería dos más tres, sería cinco.
E: Sí.
A: Eh… tres más dos sería ¿cinco?… *(Dudando)*
E: No, tres más tres…
A: Tres más tres, seis, ¡eh!… cuatro más tres, ¡eh! … siete
E: Y ya por lógica…
A: Sí, vale, ocho, nueve y diez.
E: ¿Porqué diez? porque sería el último.
A: Siete más tres son diez.
E: Vale, bien, a la vista de los resultados ¿quién tiene más cantidad de números A, B, o son los dos iguales?
A: ¡Eh! … realmente, ¡eh! … A tiene más números porque va del uno hasta el diez.
E: ¿Y B está?
A: Desde el cuatro hasta el diez.
E: Sí. ¿Cuántos números tiene entonces A más que B?
A: ¡Eh…tiene, tres números más.
E: Vamos a ver el apartado C, lee, sea el conjunto…
A: Sea el conjunto de números desde n igual a uno en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: ¿En adelante lo entiendes?
A: Creo que sí, a partir del uno, sería el dos ¿no?
E: No, el primer número es uno, ¿después?
A: El dos.
E: Sí.
A: El tres y el cuatro.
E: Bien, esto sí, ¿no?, te he puesto puntos suspensivos, ¿vale?, aquí tú puedes poner el número que te dé la gana.
A: El quince.
E: Diferénciame estos puntos suspensivos de estos.
A: Porque, ¡eh!... los de aquí serían en adelante del quince y los de aquí serían desde el cuatro hasta aquí.
E: Vale, aquí habría entonces once números o diez números y aquí, ¿habría?
A: ¡Eh!... infinitos.
E: Bien, vamos a ver el apartado D, que es muy parecido al anterior.
A: Sea el conjunto de números desde n igual a uno en adelante. A cada número le sumamos tres. Representa ahora n más tres en las casillas siguientes.
E: Vale.
A: Serían cuatro, cinco, seis y siete.
E: Vale, seguimos adelante, ¿verdad? Y aquí puedes poner el que tú quieras.
A: ¡Hum! … trece.
E: Tú has puesto parece ser, el trece que le correspondería por ejemplo de por aquí, sería por ejemplo del diez le sumamos tres, podíamos también haber puesto quince más tres. Bien,

analiza los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: ¡Eh! … tiene más cantidad de número C.
E: C, ¿porqué?
A: Porque C va desde el uno hasta… …realmente tienen los dos igual cantidad de números, es decir, ¿se refiere a todo, no?
E: Sí, a todo.
A: Entonces tienen los dos iguales porque ¿se cuentan todos, no? *(I12)*

*E(*II1*): Vale, bien, ficha Nivel 2, a ver qué tal ahora.
A: Sea el conjunto de números desde n igual a uno a n igual a cinco mil. Representa cada número en las casillas siguientes. ¡Eh!… ¿uno?
E: El uno.
A: El dos, tres, cuatro, cinco.
E: Siguiendo adelante.
A: Y entonces sería ahí… …
E: ¿El último?
A: Cinco mil, cuatro mil cuatrocientos noventa y nueve, cuatro mil novecientos noventa y ocho. *(Rellenando desde la última casilla hacia atrás)*
E: Entonces aquí en medio en estos puntos suspensivos se entiende que habrán unos cuatro mil novecientos números, ¿vale?
A: Sí.
E: Vamos a leer el apartado B, sea el conjunto… …
A: Sea el conjunto de números entre n igual a uno y n igual a cuatro mil quinientos. Representa ahora n más quinientos en las casillas siguientes. Entonces sería, ¡eh! … quinientos uno, eh… … quinientos dos, quinientos tres, quinientos cuatro y quinientos cinco.
E: Vale, sigue adelante, y ahora vamos a hacer los tres últimos ¿vale?
A: Vale.
E: Lo mejor es empezar por el último.
A: Lo que quería hacer ¡eh! … cinco mil ¿no?
E: ¿Y el anterior?
A: ¡Eh! … cuatro mil novecientos noventa y nueve. *(Rellenando también la casilla anterior con 4998)*
E: Por lógica ¿no?, muy bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: ¡Eh!…, tiene más en la A porque va desde el uno hasta el cinco mil.
E: Bueno, vamos a ir al apartado ahora, al C.
A: Sea n el conjunto de números desde n=1 a n. Representa cada número en la casilla siguiente.
E: Sería aquí…
A: Uno, dos, tres, cuatro.
E: Sigue adelante, ¿verdad?, aquí pon el número que te dé la gana.
A: Quince.
E: Y ahora el apartado D nos dice.
A: Sea n el conjunto de números desde n=1 a n. Representa ahora n+500 cada número en las casillas siguientes. Entonces serían quinientos uno, quinientos dos, quinientos tres, quinientos cuatro.
E: Sigue adelante, aquí pondrías el número que tú quieras o el que corresponda con el de arriba.
A: Eh… … por ejemplo quinientos quince.
E: Analiza los resultados, ¿tienen la misma cantidad de números C, D o son iguales?
A: ¡Eh!… tiene más números C.
E: C, ¿porqué?
A: No, no, espera que voy a mirar los números, porque el C va de uno al quince y el D va de …
E: No, no, no.
A: No C tiene más, porque tiene más números.
E: ¿Porque tiene qué?
A: ¡Eh!… un número más, ¡eh!… D tiene catorce y C tiene… espérate.
E: Empieza en uno y van hasta, ¿dónde?, hasta el quince no, ¿eh?
A: Es verdad, es decir que son infinitos.
E: Y el otro empieza en…
A: En quinientos uno y va hasta el infinito también, pero C tiene más porque empieza desde antes.
E: C tiene más porque ¿empieza?
A: En el uno. *(I1B)*

*E(*II2*): Vale, te voy a poner otra situación. Te lo he puesto de otra forma ¿vale? Este es el primero sería uno, dos, tres… …, este sería.
A: Cuatro, cinco, seis.
E: Y aquí los últimos serían cuatro mil novecientos noventa y ocho, este cuatro mil novecientos noventa y nueve y este último sería…
A: Cinco mil.
E: Y el otro habría que sumarle quinientos, entonces quinientos uno, quinientos dos, quinientos tres.
A: Quinientos cuatro, quinientos cinco, quinientos seis.
E: Y ahora aquí serían los últimos, cuatro mil novecientos noventa y ocho, cuatro mil novecientos noventa y nueve y para finalizar cinco mil. Y tú sabías que era A mayor cantidad que B, porque claro uno empieza en uno y acaba en cinco mil y este empieza en quinientos uno y acaba también en cinco mil, en concreto habría unos quinientos más arriba. Ok, y abajo sería uno, dos tres, sigue tú.
A: Cuatro, cinco, seis, siete.
E: Yo te he puesto… …, sigue adelante, yo te he puesto el número mil, ¿vale?, sigue adelante, y ahora…
A: Sí.
E: Y aquí en… Sería eso, quinientos uno, quinientos dos, ¿este sería?

A: Quinientos tres, quinientos cuatro, quinientos cinco, quinientos seis, quinientos siete.
E: ¿Este sería?
A:¡ Eh! … sería mil quinientos.
E: Por ejemplo, el mil cuatrocientos nos lo quitamos que sería el correspondiente de uno que va aquí. Muy bien, a la vista de los resultados, ¡eh!, viendo que este, este empezaba y acababa, este empezaba y acababa, este empezaba y no acaba y este empieza, pero no acaba, ¿Quién tiene más distancia de números en sentido creciente, o son los dos iguales?
A: Es que el C tiene mil números, no, tiene quinientos números más que el D.
E: ¿Aunque no acaben los dos?
A: Aunque no acaben los dos, siempre va a tener quinientos números más. *(II2B)*

4) <u>Alumno:</u> El.15, 07 Nombre: Elena Fecha de Nacimiento: 14/09/99

E: Entrevista nº 4 del día 4 de Marzo del 2015 con Elena P. R. de 4º B, ¿qué edad tienes Elena?
A: 15.
E: 15 años. Muy bien vamos a empezar con la ficha1, Nivel 1, léelo y contesta, en voz alta.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=10, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Ok.
A: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: Vale ¿era fácil? , bien vamos al apartado B
A: Sea el conjunto de números desde n =1 a n=7, a cada número le sumamos 3. Representa ahora n+3 en las casillas.
E: 1, más 3.
A: 4,…
E: 2 más 3.
A: Sí perdón, 5.
E: 3 más 3.
A: 6.
E: Sí.
A: ¡Eh!… 3 más 4, siete, 5 más 3, 8. *(Escribe 9 y 10)*
E: Claro porque el último es 7, se le suma 3, pues 10.
A: Sí, sí.
E: ¿Quién tiene más cantidad de números A, B, o son iguales?
A: ¡Eh!…, pero ¿más cantidad de números sumándolo todo? O de casillas.
E: No casillas sino números, ¿cuántos números hay arriba?
A: 10.
E: ¿Y abajo cuántos hay?
A: 7.
E: Vale, ¿quién tiene más cantidad de números?
A: El de arriba.
E: Muy bien, venga Elena, vamos a ver el de abajo, ¿vale?
A: Sea el conjunto de números desde n =1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
A: 1, 2, 3, 4.
E: Esto sigue en adelante, sino vamos a estar toda la mañana, elige uno al azar.
A: 45.
E: 45, esto significa que estos puntos suspensivos cuáles son…
A: 5, 6, 7, 8, hasta 45.
E: Hasta 44.
A: Si hasta 44.
E: Y estos puntos suspensivos, ¿qué significa?
A: Hasta infinito.
E: ¿Quién tiene más cantidad de números aquí o aquí? *(Señala la pantalla)*
A: Aquí, en el de la derecha.
E: Vamos a ver el apartado D.
A: Sea el conjunto de números desde n igual a 1 en adelante. A cada número le sumamos tres. Representa ahora n +3 en las casillas siguientes.
E: En vez de 1 sería.
A: Serían cuatro, cinco, seis y siete.
E: Vale, seguimos adelante, ¿verdad? Y este sería…
A: ¡Hum!…yo que sé… ¿56?
E: 56, que le corresponderá de aquí arriba el 53 lo más seguros. Bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: ¡Eh!… D.
E: ¿D?
A: D tiene más números.
A: Si hubiese puesto 45 tendría la misma cantidad, ¿no?
E: Uno empieza en 1.
A: No tendría más, yo creo que tiene más porque se le suman 3.
E: No, pero se le suman 3.
A: ¡Ah! es verdad el C sí, sí.
E: ¿El C tiene más números? ¿Aunque no tenga final?
A: Sí. *(I1B)*

*E(*I2*): Vamos a ver Elena, vamos a ponerlo de otra forma. Ficha Nivel 1, situación 2. Este el mismo que el anterior, el 1, el 2, el 3,…
A: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: Y aquí hay que sumarle 3, ¿vale? 1 más 3, 4; 2 más 3, 5
A: 6, 7, 8, 9, 10.
E: Y tú dijiste que este *(señala el de arriba)*, tiene más números que este *(señala el de abajo)*. Esto tiene un principio y un final, y este un

principio y un final, ¿qué pasa ahora aquí? Pues tenemos ahora aquí 1, 2, 3, sigue tú.
A: 4, 5, 6, 7.
E: Aquí seguiríamos, yo he sido un poco más bestia que tú, he puesto 100, aquí habría noventa y tantos números y aquí seguiría en adelante. Y aquí los correspondiente, para 1, 4, para 2…
A: 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: ¿Para 100?
A: 103, no 104.
E: 103 ¿no?, estamos sumando 3.
A: Sí, es verdad.
E: Aquí hay una correspondencia, entre una cosa y otra. Bien, aquí qué pasa, qué diferencia hay entre este y el anterior. Tiene principio, pero no tiene final, a la vista de los resultados ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Son iguales.
E: ¿Por qué?
A: Porque va del uno… o sea, va del 1 al 100 y el de abajo va de 4 a 103.
E: Pero hasta el infinito qué dices tú, podía haber puesto cien, mil, un millón.
A: Entonces el de arriba.
E: Aunque ¿no tenga fin?
A: Sí, porque en este va a contar 3. *(I2B)*

5) <u>Alumno:</u> Na.15, 11 Nombre: Natalia Fecha de Nacimiento: 27/05/99

E: Entrevista nº 1 del día 6 de Marzo del 2015 con Natalia V. P. de 4º B, Natalia ¿qué edad tienes?
A: 15 años.
E: 15, muy bien. Natalia, lee la pregunta en voz alta y contesta, ¿vale?
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=10, representa cada número en las casillas siguientes.
A: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: Vamos a ver el apartado B.
A: Sea el conjunto de números desde n =1 a n=7, a cada número le sumamos 3. Representa ahora n+3 en las casillas.
E: Sería 1 más 3, 2 más 3.
A: 4, 5, 6, 7, 8, 9 10.
E: 10 es el último porque es 7 al sumarle 3, el último es 10. La pregunta es fácil, ¿tiene la misma cantidad de números A que B, o son iguales?
A: No tienen la misma cantidad de números.
E: ¿arriba cuántos tiene?
A: Arriba pues…tiene cantidad de números.
E: ¿Y cuántos números tiene?
A: ¡Hum!…es que soy mala para comentar,..
E: Dime cuántos tiene, dímelo.
A: ¡Ah!, vale, hay 10.
E: Y abajo, ¿cuántos tiene?
A: Hay 7.
E: Vamos a ver el apartado C, de nuevo léelo.
A: Sea el conjunto de números desde n =1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Parece ser que van en adelante, ¿comprendes lo que es en adelante?
A: No.
E: Que sigue, que continúa.
A: Vale.
E: Al igual que pusimos en el A sería.
A: 1, 2, 3, 4.
E: Siguen adelante, aquí pones el número que tú quieras.
A: ¿El qué quiera? 12.
E: Entonces los puntos suspensivos significan…
A: 5, 6, 7, 8.
E: ¿Y estos puntos suspensivos?
A: 13, 14, 15.
E: ¿Hasta dónde?
A: Hasta infinito.
E: No tiene fin, tiene un principio pero no tiene fin.
A: Vale.
E: Vamos a ver el apartado D, que es muy parecido.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante, a cada elemento le sumamos 3. Representa ahora n+3 en las casillas siguientes. Sería 4, 5, 6, 7,…
E: Y este por ejemplo, sería…
A: 15.
E: Cogiendo con este de aquí arriba, ¿vale? A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Son iguales.
E: ¿Por qué?
A: Creo que son iguales, no lo sé. *(I11)*

*E(*II1*): Ficha Nivel 2, lee.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=5000. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Ya no es del 1 al 10, entonces tú tienes que poner aquí…
A: 1, 2, 3, 4, 5.
E: No vamos a estar toda la mañana poniendo, los tres últimos serían…
A: Pues 4998, 4999 y 5000.
E: Vale, entonces los puntos suspensivos de aquí serán unos cuatro mil novecientos noventa y tantos. Vamos a ver el B que es muy parecido al anterior.

A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=4500. A cada número le sumamos 500. Representa ahora n+500 en las casillas.
E: El primero sería…
A: 501, 502, 503, 504, 505.
E: Y ahora los tres últimos, el último es 4500, si le sumo 500 se queda entonces…
A: 5000.
E: Y los dos anteriores serán…
A: ¡Eh!… los dos anteriores… 4500.
E: No el anterior de 4500.
A: 4000.
E: No.
A: ¡Ah!, vale el anterior sería 4499.
E: Que al sumarlo será.
A: Que al sumarlo sería, ¡ah!, 4999.
E: Y aquí sería…
A: 4998.
E: A la vista de los resultados ¿quién tiene mayor cantidad de números A, B o son iguales?
A: La misma cantidad de números los dos, ¡eh!… ¿puede repetir la pregunta?
E: Sí, ¿quién tiene mayor cantidad de números A, B o son iguales?
A: No, A tiene mayor cantidad de números.
E: Vale. Vamos a ver el de aquí abajo, es muy parecido al anterior, C.
A: Sea el conjunto de n=1 en adelante, representa cada número en las casillas.
A: 1, 2, 3, 4.
E: Sigue adelante y aquí pon lo que tú quieras.
A: 14.
E: Por ejemplo 14, y aquello siguen adelante muy bien. Vamos a ver ahora el D.
A: Sea n el conjunto de números desde n=1 en adelante. A cada número le sumamos 500. Representa ahora n+500
A: 501, 502, 503, 504; sigo adelante hasta 514,
E: A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Tienen la misma cantidad de números los dos, creo que tienen la misma cantidad. *(II1**1**)*

*E(III1): Ficha Nivel 3. Léelo.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=10. A cada número le correspondemos su inversa, es decir, 1/n. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: En vez de 1 sería…
A: 1/10.
E: No, de 1 al 10.
A: 1/1, ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10.
E: Vamos al de abajo, el de abajo es muy parecido, ¿vale? Léelo.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=7. A cada número le corresponde su inversa más 3, es decir, representa 1/n+3 en las casillas siguientes.
E: Ahora el1 se lo vamos a poner aquí abajo, sería 1partido…
A: ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10.
E: Como ves aquí coincide con esta parte con el de arriba. Bien a la vista de resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: El apartado A.
E: Bueno vamos a ver ahora el C y D, muy parecido al anterior, seguro que tú vas a ir viendo una correspondencia con lo anterior. Apartado C.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. A cada elemento le corresponde su inversa, es decir, 1/n. Representa cada número.
E: Vale, entonces sería.
A: 1/1, ½, 1/3, ¼.
E: Sigue adelante y aquí pones el que tú quieras.
A: Vale 1/13.
E: Vale aquello sigue adelante. Vamos a ver el de abajo.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. A cada número le corresponde su inversa más 3, es decir, representa 1/n+3.
E: Casi igual que el anterior, cuál sería entonces el primer término.
A: ¼, 1/5, 1/6, 1/7.
E: Y aquí pues pones el que tú quieras.
A: 1/9.
E: No, date cuenta que si has cogido 1/9…
A: Con respecto al anterior, vale, sería 1/16.
E: Si hubieras cogido otro, Natalia, no habría pasado nada, hubiera correspondido uno de por aquí. Ahora quiero que pienses un poquito, la pregunta es siempre la misma, ¿quién tiene mayor cantidad de números C, D o son iguales? Pero ahora cambia un poco, porque si te das cuenta, hay un principio hasta un final, pero qué va pasando por momentos.
A: Que van disminuyendo.
E: ¿Hasta dónde llegan estos?
A: Hasta el infinito, ¿no?
E: No pueden dar negativos, porque los que estamos poniendo aquí abajo son todos…
A: Son todos positivos.
E: Hasta dónde llegan poquito a poco.
A: Hasta cero, ¿no?
E: Hasta el cero, pues a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Tiene mayor cantidad C. *(III1B)*

*E(*III2*): Vamos a mirarlo ahora aquí. Arriba sería 1/1, ½, 1/3.
A: ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9 y 1/10.
E: Y abajo, sería su correspondiente habría que sumarle siempre 3, para1, 4, para 2, 5.
A: 1/6, 1/7, 1/8, 1/9 y 1/10.
E: Tú dijiste que tenía más cantidad el primero que el segundo, estos tiene un principio y un final, un principio y un final. ¿Vale? El de abajo sigue la misma forma, 1/1, ½, 1/3, ¼…

A: ¼, 1/5, 1/6, 1/7.
E: Aquí te lo he puesto un poco más bestia que tú, he puesto 1/100, por lo tanto…
A: 1/100.
E: Como ves aquí se va disminuyendo, disminuyendo. Y aquí de la misma forma 1/n+3, ¼, 1/5.
A: Vale, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9 y 1/10.
E: Y aquí tú puedes poner bien el correspondiente al de arriba o el que tú quieras, de todas formas siempre va a ver una correspondencia, si quieres con el de arriba.
A: Vale, 1/103.
E: Vale, si hubiera puesto 1/105 pues estaría por aquí *(señala los puntos suspensivos)*, a la vista de los resultados, va disminuyendo y siguen adelante ¿quién tiene mayor cantidad de números C, D o son iguales?
A: C. *(III2B)*

6) <u>Alumno:</u> Pa.15, 10 Nombre: Palma Fecha de Nacimiento: 23/07/99

E: Entrevista nº 2 del día 6 de Marzo del 2015, con Palma R. F. de 4º B. Palma ¿qué edad tienes?
A: 15 años.
E: Muy bien. Palma, lee la ficha Nivel l, el apartado A y contesta en voz alta.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=10, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Entonces hay que poner aquí.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: ¿Fácil? Vamos a ver el apartado B, Palma. Lee en voz alta.
A: Sea el conjunto de números desde n =1 a n=7, a cada número le sumamos 3. Representa ahora n+3 en las casillas.
E: en vez de 1 sería 1 más 3, 2 más 3.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9 10)*
E: ¿por qué para en 10? Porque como el último es 7 al sumarle 3, el último es 10. ¿Cierto? Bien. A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A que B, o son iguales?
A: Tiene más A que B.
E: Vamos a ver el apartado C y D, léelo.
A: sea el conjunto de números desde n =1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: ¿Comprendes lo que es en adelante?
A: *(Niega con la cabeza)*
E: Que sigue, que continúa, no es como este que terminaba en 10, que sigue.
A: Vale, de 1 hasta infinito.
E: Eso, ¿entonces?
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Siguen adelante, aquí pones cualquier número, que tú quieras.
A: *(Escribe 8)*
E: 8, entonces los puntos suspensivos de aquí, Palma, ¿qué números son?
A: 5, 6, 7.
E: Vale, si hubieras puesto más grandes sería otro, y esto sigue adelante.
E: ¿Hasta dónde?
A: Hasta el infinito.
E: Vamos a ver el apartado D, nos dice ahora que…
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante, a cada número le sumamos 3. Representa ahora n+3 en las casillas siguientes.
E: Igual que el anterior, en vez de 1 sería…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Siguen adelante, y este por ejemplo sería…
A: *(Escribe 14)*
E: El 14, como es más 3, pues sería por aquí, el once, podías haber puesto el que corresponde, ¿vale? Estos tienen principio pero no tiene final, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Tiene más D, no, son lo mismo porque los dos van hasta infinito.
E: Aunque uno empieza en 1 y el otro en 4.
A: Aunque empiecen en 1 y en 4, ah claro porque los anteriores no se cuentan, ¿no?, al 4
E: Que falta ahí.
A: ¡Ah! bueno, entonces tiene más el C que el D. *(I1B)*
E: ¿Sí?
A: Sí.
E: ¿Aunque lleguen al infinito?
A: Sí, aunque lleguen al infinito.

*E(*I2*): Ficha Nivel1, situación 2. Vamos a ponerlo de otra forma 1, 2, 3, sigue tú.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Aquí hemos hecho la correspondencia, 1 más 3, 4, 5.
A: (*Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Así de esta forma me has dicho que había más cantidad en el apartado A que en B. Vamos a ver el de abajo, sería 1, 2, 3.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)*
E: Vale, yo te he puesto un número más bestia, así que en los puntos suspensivos habrá unos noventa, y siguen adelante. Y aquí va su correspondencia, el 1 con el 4, el 2, el 5…
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7,8, 9, 10)*
E: Y aquí el correspondiente ahí arriba, sumando 3.
A: *(Escribe 103)*

E: Podía haber puesto cualquiera pero he puesto ese, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: C tiene más que D.
E: ¿Por qué?
A: Porque C empieza en el 1, y con el 1, 2 y 3, aventaja a D. *(I2B)*

7) <u>Alumno:</u> La.16, 01 Nombre: Laura Fecha de Nacimiento: 17/04/99

E: Entrevista nº 3 del día 6 de Marzo del 2015, con Laura M. O. de 4º B.
¿Qué edad tienes Laura?
A: 15.
E: 15. Laura en voz alta lee la ficha Nivel 1, el apartado A, e intenta contestar.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=10, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Luego aquí hay que poner.
A: El 1, ¿lo pongo? *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: ¿Fácil?
A: Sea el conjunto de números desde n =1 a n=7, a cada número le sumamos 3. Representa ahora n+3 en las casillas.
E: 1, más 3.
A: 4, 5, 6, 7, 8, 9 10.
E: ¿Por qué 10 es el último? Porque es 7 al sumarle 3, el último es 10. A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A, B, o son iguales?
A: Tiene menos cantidad, lo que pasa que…
E: ¿Quién tiene menos cantidad?
A: A ver, en plan hay más números en el de arriba porque hay 10 números y abajo hay menos, lo que pasa es que de valor sí hay más.
E: No, no de valor, yo quiero saber el número de números.
A: En plan sin sumarlos ni nada, ¿no?
E: Exactamente.
A: Arriba hay más, ¿no?
E: ¿Cuántos habría más?
A: Arriba hay 10 números.
E: ¿Y abajo cuántos hay?
A: 7.
E: Vamos a ver el apartado C, léelo.
A: Sea el conjunto de números desde n igual a 1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: ¿Entiendes lo que es en adelante?
A: Sí, 2, 3, 4, 5.
E: Empieza por el 1, ¿vale?
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Siguen adelante, no vamos a estar toda la mañana poniendo números, y aquí pon el número que tú quieras
A: 32.
E: 32, eso significa que los puntos suspensivos de aquí serán.
A: Hasta el 32.
E: Ahí va, y aquí siguen adelante. ¿Qué diferencia hay entre estos puntos suspensivos y estos? *(Señala en la pantalla)*
A: De que en los segundos puntos son mayores los números y en los primeros no.
E: ¿Hasta dónde llegarán estos?
A: Hasta infinito.
E: Vamos a ver el apartado D.
A: Sea el conjunto de números desde n igual a 1 en adelante. A cada número le sumamos 3. Representa ahora n +3 en las casillas siguientes.
E: Si sumamos 3.
A: Serían 4, 5, 6 y 7.
E: Sigue adelante, y aquí por ejemplo puedes poner…
A: Le sumo 3 también. *(Escribe 35)*
E: Bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: El D tiene más cantidad de números porque llega hasta 35.
E: No, no llega hasta 35.
A: Bueno hay más, no, son iguales, si son infinitos.
E: ¿Aunque este empiece en 1 y este en 4?
A: No, tiene más el que empieza en 1, ¿no? Sí. *(I1B)*

*E(*I2*): *(Ficha Nivel 1, situación 2)* Otra forma, ya te he puesto los primeros 1, 2, 3, sigue tú.
A: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: y al de abajo aquí hay que sumarle 3, 4, 5.
A: *(Escribe 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Vale, y qué me dijiste anteriormente A tiene más cantidad que B. Vamos al C y D, sería igual, 1, 2, 3, sigue tú.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Yo he sido un poco más bestia, he puesto 100, podía haber puesto el número que me dé la gana, ¿vale?, y esto sigue en adelante, y aquí abajo le sumo 3 más 1, 4, 5.
A: *(Escribe 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y aquí puedes poner, bien el correspondiente de este o cualquiera…
A: Si son infinitos…
E: Ahí va.
A: Si le sumamos 3, pues 103.
E: Tú has cogido el correspondiente a este y sigue adelante. Tiene un principio pero no tiene final, a la vista de los resultados ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Pero cantidad de… ¿cómo arriba?
E: Claro.

A: Son iguales, tienen los mismos números.
E: ¿Aunque uno empiece en 1 y el otro en 4?
A: Eso es lo que… si empieza en 1 hasta infinito, tiene más números que el que empieza en 1 que el que empieza en 4, pero ahora mismo se ven las mismas columnas de números.
E: Y ¿tú dirías entonces?
A: Que el que empieza en 1 tiene más números.
E: ¿Cuántos más?
A: 3, porque empieza desde 1 y el otro desde 4. *(I2B)*

8) <u>Alumno:</u> Ju.15, 06 Nombre: Juan Manuel Fecha de Nacimiento: 24/06/99

E: Entrevista nº 4 del día 6 de Marzo 2015, con Juan Manuel T. R., ¿qué edad tienes, Juan?
A: 15.
E: 15. Mira, Juan, lee el apartado A e intenta contestarlo.
A: Sea el conjunto de números desde 1 a 10, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Entonces pondríamos aquí…
A: *(Escribe 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Vale ¿no?, vamos al de abajo, léelo
A: Sea el conjunto de números desde n =1 a n=7, a cada número le sumamos 3. Representa ahora n+3 en las casillas.
A: *(Escribe 4, 5, 6)* Me he equivocado.
E: No, date cuenta que sería 3 más 3, 4 más 3, ahora, 4 más 3, siete.
E: Vale, bien, a la vista de los resultados ¿quién tiene más cantidad de números A o B?
A: A.
E: Vamos a ver el apartado C, sea el conjunto desde 1 en adelante representa cada número en la casilla siguiente …sería entonces.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Siguen adelante, ¿verdad?, y aquí pones el número que tú quieras.
A: *(Escribe 5)*
E: ¿Tú crees que deberías poner el 5?
A: Sí.
E: Estos puntos suspensivos, ¿qué significan, Juan?
A: Que siguen.
E: Entonces no podrías poner el 5, podrías poner otro número.
A: *(Escribe 9)*
E: ¿Estos puntos suspensivos serían?
A: 5, 6, 7, 8.
E: Y si hubieras puesto un número más grande, Juanma, pues aquí habría más números, ¿vale?, pero aquí hay más puntos suspensivos, eso es que esto sigue, ¿hacia dónde?
A: A infinito.
E: Bien, ¿dónde hay más cantidad de números aquí o aquí? *(Señala la pantalla)*
A: La derecha.
E: Bien, vamos a ver el apartado D, que es muy parecido al que hemos hecho anteriormente.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Vale, siguen adelante y aquí puedes poner.
A: *(Escribe 12)*
E: Vale, tú has cogido el correspondiente, bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: D.
E: Tiene más, ¿por qué?
A: Eh…
E: ¿Dónde empieza este?
A: 1.
E: Y, ¿dónde termina?
A: Infinito.
E: ¿Dónde empieza el D?
A: En 4.
E: Y, ¿dónde termina?
A: Infinito.
E: ¿Quién tiene más C, D o son iguales?
A: C. *(I1B)*

*E(*I2*): Vamos a verlo de otra forma, *(se le pone la tarea I2)* esto sería 1, 2, 3, sigue tú.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y abajo le estamos sumando 3, ¿vale?, 4, 5.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Tú me has dicho que A tiene más cantidad que B, vamos a ver el apartado C y D. Hemos puesto el 1, 2, 3, sigue tú.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7)*
E: Siguen adelante, yo he puesto un número más grande, 100, pero podría ponerlo mucho más grande, eso significa que aquí hay noventa y tantos números y esto sigue en adelante, y el de abajo le vamos sumando 3, para 1; 4, para 2: 5, para el 3…
A: *(Escribe 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y aquí para el 100, si pongo el correspondiente sería…
A: 103.
E: Bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: C.
E: ¿Aunque no haya final?
A: Sí. *(I2B)*

9) <u>Alumno:</u> Ma.16, 02 Nombre: María José Fecha de Nacimiento: 15/04/99

E: Entrevista nº 1 del día 11 del 3 del 2015, con Mª José M. G. de 4º B, Mª José, ¿qué edad tienes?
A: 16.
E: 16 años. Muy bien, mira, Mª José, lee el apartado, la ficha nº1, apartado A e intenta contestar las preguntas, en voz alta.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=10, representa cada número en las casillas siguientes. ¡Hum!, 1.
A: *(Completa con 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Muy bien.
E: Vamos al segundo apartado.
A: Sea el conjunto de números desde n =1 a n=7, a cada número le sumamos 3. Representa ahora n+3 en las casillas.
E: El primero en vez de 1, hay que sumarle 3.
A: 4,…
E: Muy bien. Siguiente.
A: 7.
E: No, porque ese es el más, del 1 al 7, 2 más 3, coge el 2 suma 3 se queda.
A: ¡Ah!, vale. *(Escribe 5)*
E: 3 se le suma 3 se queda.
A: ¡Eh!… 6.
E: Sí, 4.
A: 7, 8, 9, 10.
E: Vale, y por qué 10, porque el último es 7, al sumarle 3.
E: La pregunta es sencilla, ¿quién tiene la misma cantidad de números A, que B?
A: ¡Eh!… sí.
E: Sí, ¿cuántos números tiene A?
A: 10.
E: Y ¿cuántos números tiene B?
A: ¡Ah!, claro.
E: Claro ¿qué?
A: Que no tienen la misma cantidad de números.
E: ¿Cuál tiene más?
A: El A.
E: El A, vale. Vamos a ver el apartado C, sea el conjunto de n en adelante, ahora ¿entiendes lo de en adelante?
A: Sí, 1, 2, 3. *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Siguen adelante, por eso he puesto puntos suspensivos, aquí pon el número que te dé la gana.
A: ¡Hum…! el 7.
E: 7 vas a poner, entonces los puntos suspensivos estos que son.
A: El 5 y 6.
E: Vale y estos puntos suspensivos seguirían adelante, ¿entiendes eso?
A: Sí.
E: ¿A dónde irían?
A: ¡Hum…! hasta el que yo quiera.
E: No, hasta el que yo quiera no.
A: El 8, el 9.
E: Qué vas a estar toda la mañana contando, ¿hasta dónde?
A: ¡Eh!…
E: ¿Se pararían, Mª José?
A: No.
E: No, ¿son los mismos números los que están aquí, que los que están aquí?
A: No.
E: ¿Cuál tiene más, estos puntos suspensivos o estos?
A: Esos. *(Señala los últimos)*
E: Bien, vamos a ver el de abajo
A: Sea el conjunto de números desde n igual a 1 en adelante. A cada número.
E: Igual que el anterior, a cada número le sumamos 3. En vez de 1 sería…
A: 4, 5, 6, 7.
E: Vale, seguiríamos, ¿verdad? Y aquí pondríamos el correspondiente de arriba, pues el de arriba.
A: ¡Uhm…! 10.
E: Tiene un principio pero no tiene un final. Bien la pregunta es sencilla, ¿tiene la misma cantidad de números C que D o son iguales?
A: ¡Eh!… tiene más C porque va del 1 hasta el infinito y el D va desde el 4 hasta el infinito.
E: Y qué crees que faltaría entonces.
A: El 1, 2 y 3. *(I1B)*

*E(*I2*): Vale. Esta es la misma pregunta que la anterior, ¿vale? te lo he puesto de otra forma. El primero sería 1, 2, 3, sigue tú.
A: *(Escribe 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Y el de abajo le vamos sumando 3, yo quiero que veas esta relación, si 1, 4, si el 2 el 5, si el 3.
A: 7, 8, 9, 10.
E: Y tú dijiste que tenía más cantidad de números A que el B, en concreto 3 números más. Aquí tiene un inicio, Mª José, y hay un final. Vale, ahora vamos para abajo, que sería 1, 2, 3, sigue tú.
A: 4, 5, 6, 7.
E: Yo he puesto, un poco más bestia que tú y he puesto 100. Es decir que aquí hay noventa y tantos números, pero podía haber puesto el número que me dé la gana, 10.000, 1.000.000, y esto sigue adelante. Bien, aquí quiero que veas la misma situación, cuando es 1 es 4, cuando es 2 es 5, cuando es 3 es 6.
A: 7, 8, 9, 10.
E: Vale, y tú puedes poner el correspondiente a este perfectamente
A: 103.
E: 103. Este conjunto tiene un inicio pero no tiene final. ¿Tiene la misma cantidad de números C que D o son iguales?
A: Parecen iguales. *(I2A)*

*E(*I3*): *(Se le pone la tarea I3)* Mira, Mª José, en este caso vamos a ponerlo de esta forma: 1, 2, 3
A: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: Y abajo, es lo mismo, solamente lo he puesto yo un poquito más desordenado, o al final, es decir, en vez de 1 es…
A: 7.
E: 4.
A: ¡Ah!, pero va con este.
E: No, lo que pasa que lo he puesto más diferentes.
A: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: Para que veas tú, que está al principio o al final, da igual; ¿quién tiene más cantidad de números?
A: El A.
E: El A, vale. Y ahora esto es el que hay que comparar con esto. Aquí tenemos el 1, 2, 3, sigue tú.
A: 4, 5, 6, 7.
E: Y este pon tú el número que tú quieras.
A: 10.
E: Tú has puesto el 10, no como yo que puse el 100, podías haber puesto el número tan grande como te dé la gana, vale y encima sigue adelante. Y ahora a cada uno de ellos voy sumándole 3. En vez de 1 pongo…
A: 4.
E: En vez de 2.
A: 5.
E: En vez de 3.
A: 6.
E: Y aquí el que tú quieras.
A: El 13.
E: Si hubieras puesto otro, a lo mejor sería el correspondiente de este aquí, o… Estos conjuntos tienen inicio, pero no tiene final. A la vista de los resultados y como el anterior, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: C tiene más cantidad de números.
E: ¿Por qué?
A: Porque C va desde 1 hasta el infinito y el D desde el 4 hasta el infinito.
E: ¿Faltarían algunos?
A: El 1, el 2 y el 3. *(I3B)*

10) <u>Alumno:</u> An.16, 05 Nombre: Andrés Fecha de Nacimiento: 29/01/99

E: Entrevista nº 2 del día 11 de Marzo del 2015, con Andrés R. R. Andrés, ¿qué edad tienes?
A: 16.
E: 16, muy bien. Lee la ficha número 1 intenta contestar la pregunta A y la B. En voz alta por favor.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=10, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Primero aquí.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Vamos a ver el apartado B, sea el conjunto… en voz alta Andrés.
A: Sea el conjunto de números desde n =1 a n=7, a cada número le sumamos 3. Representa ahora n+3 en las casillas.
E: Muy bien, en vez de 1, hay que sumarle 3.
A: *(4, 5, 6, 7, 8, 9 10)*
E: 10 es el último porque es 7 al sumarle 3, el último es 10. La pregunta es muy simple, ¿tiene la misma cantidad de números A que B, o son iguales?
A: Sí.
E: ¿Cuántos tiene A?
A: Cantidad de números 10.
E: ¿Y cuántos números tiene B?
A: Tiene 3 menos, tiene 7.
E: Vamos a ver el apartado C, de nuevo léelo.
A: Sea el conjunto de números desde n igual a 1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: ¿Entiendes lo que es en adelante?, que va aumentando.
A: Sí, que va aumentando, de 1 en adelante.
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Vamos a poner aquí los puntos suspensivos, pero siguen.
A: Y ahí n, ¿no?
E: Y ahí no n sino elige un número, el que tú quieras.
A: El que yo quiera. *(Escribe 1000)*
E: 1000, por ejemplo y aquí sigue adelante, luego en estos puntos suspensivos habrá unos novecientos y pico, ¿qué números hay más aquí o aquí? *(Señala en la pantalla)*
A: Números en la izquierda.
E: ¿Aquí donde estoy señalando yo?, o ¿estos de aquí?
A: Aquí en la derecha hay infinito claro.
E: Bien, ahora el proceso es el mismo que el anterior, ahora a cada uno le vamos a sumar 3, en este caso en vez de 1.
A: Serían 4, 5, 6 y 7.
E: Sigue adelante, y aquí por ejemplo puedes poner…
A: 1003, por ejemplo.
E: Si quiere relacionarlo con el de arriba estaría el 1003, si fuese otro estaría relacionado con el de arriba, y siguen en adelante. Bien, la pregunta es la misma que el anterior ¿tiene la misma cantidad de números C, D o son iguales?

A: Tiene más cantidad de números la de arriba, la C, porque va de 1 en 1 y la otra se va sumando 3 y se pierden los 3 primeros.
E: ¿Aunque uno tenga fin, uno y otro?
A: No sabría decir, tienen los mismos números… porque como le suma 3 llega a infinito, puede llegar a donde sea… *(I13)*

*E(*II1*): Vale, entonces crees que es la misma cantidad de números.*(Se le pone la Ficha Nivel 2, situación1)* Lee el apartado A y B.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=5000. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Vale, entonces sería…
A: 1, 2, 3, 4, 5.
E: No vamos a estar toda la mañana, los tres últimos serían.
A: 5000, 4999 y 4998.
E: Vale, ahora dice, sea el conjunto…
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=4500. A cada número le sumamos 500. Representa ahora n+500 en las casillas.
E: Ahora hay que sumarle 500, ¿vale?, en vez de 1.
A: 501, 502, 503, 504, 505.
E: Y ahora los tres últimos hay que tener cuidado que el último es 4500, si le sumo 500 el último será…
A: 5000, 4999,4998.
E: A la vista de los resultados ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: La misma cantidad.
E: En el apartado A, ¿cuántos hay?
A: La cantidad en A es mayor, porque en B empieza desde 500.
E: Vale, vamos a ver el de aquí abajo, es lo mismo, sea el conjunto de n=1 en adelante, ¿vale?, bueno pues nada lo mismo que el anterior.
A: 1, 2, 3, 4.
E: Sigue adelante.
A: *(Escribe 1000)*
E: Muy bien, ahora lo mismo que el anterior pero hay que sumarle 500.
A: *(Escribe 501, 502, 503, 504)*
E: Pones ahí, por ejemplo el que corresponde si quieres al de arriba.
A: *(Escribe 1500)*
E: A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Iguales porque aunque este empiece en 500, termina en 500, que tiene 500 números más que 1000, y continúan sin final. Yo creo que tienen los mismos. *(II13)*
E: Tienen inicio y no tiene final, ¿no?
A: Claro.

*E(*III1*): *(Se le pone la tarea III1)* Ficha Nivel 3, situación 1. Léelo Andrés.

A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=10. A cada número le correspondemos su inversa, es decir, 1/n. Representa cada número en las casillas siguientes.
A: *1/1, ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10.*
E: Vamos al apartado B, aquí lo que tienes que tener en cuenta, como ves tú, es que han salido todos los números decimales, ¿vale? Sea el conjunto de números desde 1 a 7, le corresponde su inversa más 3.
A: Su inversa más 3, ¿no?
E: El primer número será…
A: ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10.
E: Como ves con el de arriba, este es aquí. Bien a la vista de resultados, ¿quién tiene más cantidad de números?
A: El A.
E: Bien, vamos a ver ahora el C.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. A cada elemento le corresponde su inversa, es decir, 1/n. Representa cada número.
E: Vale, entonces 1/n es 1/1.
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼)*
E: Sigue adelante y aquí te inventas tú el que tú quieras.
A: *(Escribe1/1000)*
E: Ídem de lo mismo que el anterior, ahora le sumamos 3, entonces serían.
A: *(Escribe ¼, 1/5, 1/6, 1/7)*
E: Y aquí correspondería.
A: 1/1003.
E: Vale.
E: Aquí vamos a tener en cuenta una cosita, ¿qué está pasando con los números, Andrés?
A: Que van disminuyendo.
E: ¿Dónde crees tú que van a llegar estos?
A: Que van a los negativos.
E: Negativos no pueden dar porque están divididos por n y n son números enteros, naturales perdón, esto va ser siempre positivo, entonces ¿adónde van a parar?
E: 1, 0,5; 0,3; 0,001.
A: Hasta 0,001, hasta cero, ¿no?
E: ¿Y el de abajo?
A: Pues parece que también
E: Este es el que corresponde ahora, atendiendo a esa cuenta, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: El C, parece que tiene más porque empieza desde 1.
E: Pero tú tienes que tener en cuenta que estos puntos suspensivos para llegar a cero tienen que llegar adónde.
A: Tiene que llegar hasta el cero justo
E: Claro, ¿cómo se puede llegar hasta el cero? ¿Cómo podríamos llegar nosotros al cero? 1 partido, dividido por un número muy, muy grande.
A: Claro.

E: Pero si es un número muy grande, no llega al cero, ¿qué tendríamos que poner…?
A: ¿Para qué de cero?
E: Sí.
A: No sé.
E: Tú vas poniendo el número cada vez más grande aquí y el número se está haciendo cada vez más pequeñito, acercándose a cero, pero claro evidentemente es necesario un número grande, como se pueda. A la vista de los resultados, ¿quién tiene mayor cantidad de números C, D o son iguales?
A: ¡Eh...! yo creo que es mayor la C, creo que tiene más el de arriba. *(III1B)*

*E(III2): *(Se le pone la tarea III2)* Vamos a ver ahora, hemos hecho igual, 1/1, ½, 1/3, tú pon aquí.
A: *(Escribe ¼, 1/5, 1/6, 1/7,1/8, 1/9, 1/10)*
E: Donde tú lo ves también va disminuyendo, vamos a ponerle más decimales si no, no vamos a poder verlo. Y este era igual sumándole 3, ¼, 1/5, 1/6.
A: *(Escribe1/3, 1/5. 1/6)*
E: También va disminuyendo, pero tiene un principio y tiene un final. Y tú me dijiste que tenía mayor número el de arriba que el de abajo. Vamos a ver el de abajo. Pusiste 1/1, ½, 1/3…
A: *(Escribe ¼, 1/5, 1/6, 1/7)*
E: Yo te puesto 1/100, pero tú pusiste muy bien 1/1000, vamos a poner 1/100, y abajo le vamos sumando 3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7.
A: *(Escribe al mismo tiempo)*
E: Y aquí el correspondiente si quieres al de arriba…
A: 1/103, ¿no?
E: Vale, este es más pequeñito, voy a ponerle un decimal más para que se vea. Vemos que va disminuyendo tanto uno como otro, y existe una correspondencia arriba y abajo a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Son iguales. *(III2A)*

*E(*III3*): *(Se le pone la tarea III3)* Bueno. Vamos a verlo aquí ahora. Este lo hacemos 1/1…
A: *(Escribe ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10)*
E: Y abajo le vamos sumando 3 como hemos hecho anteriormente, entonces serían.
A: *(Escribe ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10)*
E: Muy bien, vale. Y tú en este momento, pues la distribución no es la misma, la izquierda que la derecha. Está claro que el apartado A, tiene más números, pues este igual, lo vamos a cambiar un poco, sigue siendo 1…
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7)*
E: Sigue adelante y aquí te inventas tú el que tú quieras.
A: *(Escribe 1/1000)*
E: Y abajo se le va sumando de nuevo 3, serían…
A: *(Escribe ¼, 1/5, 1/6)*
E: Y este último…
A: *(Escribe 1/1003)*
E: Aquí pone 0.00; pero siempre va a ver, vamos a poner un par de ellos *(aumenta los decimales)*. Y este igual, aquí no va a dar cero… A la vista de los resultados, ¿quién tiene mayor cantidad de números arriba, abajo o son iguales? La única diferencia que existe es que va a llegar a cero, va a llegar, pero para llegar al cero es necesario poner unos números muy, muy grandes.
A: Yo creo que igual. *(III3A)*
E: ¿Por la distribución dices tú? ¿Ha cambiado algo?
A: Sí.
E: ¿Arriba cambia mucho por la distribución?
A: *(Asiente con la cabeza)*
E: Por la izquierda y por la derecha, uno más abierto.

*E(*III1'*): Vamos a hacerlo otra vez*(Se le pone la tarea III1'),* y dice sea el conjunto de números de 1 a 10, a cada número le corresponde su inversa, 1/n.
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10)*
E: Abajo, ha cambiado, del 1 al 4, hay que sumarle 6.
A: *(Escribe 1/7, 1/8, 1/9, 1/10)*
E: No querrás seguir, porque llega hasta el 4, 4 más 6, 10. A la vista de los resultados, tiene un principio y tienen un final, ¿quién tiene mayor cantidad de números A, B o son iguales?
A: A tiene más números.
E: Vale. Ahora el de abajo, sea el conjunto de números, lo mismo que el anterior.
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼)*
E: Este sigue adelante.
A: *(Escribe 1/1000)*
E: Y ahora pues en vez del anterior que era sumándole 4 ahora le vamos a sumar 6
A: *(Escribe 1/7, 1/8, 1/9, 1/10)*
E: Y este si quieres puedes poner el correspondiente de arriba.
A: *(Escribe 1/1006)*
E: A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: ¡Eh...! Son iguales porque siguen adelante los dos sin terminar. *(III1'**3**)*

*E(*IV1*): *(Se le pone la tarea IV1)* Ficha Nivel 4. Lee el apartado A.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=1000. A cada número le corresponde su inversa, es decir, 1/n. Representa cada número en las casillas siguientes.

E: Y el primero…
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼,1/5)*
E: Y los tres últimos serían, vamos a empezar por el último si quieres.
A: *(Escribe 1/1000, 1/999, 1/998)*
E: Vamos a ver lo que viene ahora. Sea el conjunto de 1 hasta 500, es muy parecido. Antes te has dado cuenta, que se va repitiendo los conceptos anteriores.
A: *(Escribe 1/501, 1/502, 1/503, 1/504, 1/505)*
E: Ahora los 3 últimos pasa como anteriormente, el último es más fácil sería 500, pues el último sería…
A: *(Escribe 1/1000, 1/1999, 1/1998)*
E: A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números arriba, abajo o son iguales?
A: El de arriba.
E: Vamos a ver el de abajo.
A: La inversa ¿no? *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼)*
E: Y este último el que tú quieras.
A: *(Escribe 1/1000)*
E: Y este lo mismo que el anterior sumándole 500.
A: *(Escribe 1/501, 1/502, 1/503, 1/504)*
E: Si quieres poner el correspondiente, sería…
A: *(Escribe 1/1500)*
E: Bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene mayor cantidad de números arriba, abajo o son iguales?
A: Arriba tiene más, la C
E: Aunque estos siguen adelante...
A: Este va seguir siendo mayor porque empieza antes.
E: Aunque no tengan fin ninguno de los dos.
A: Los dos son iguales, si no tienen fin. *(IV13)*
E: ¿Estás seguro?
A: Sí.

11) Alumno: Ce.16, 01 Nombre: César Fecha de Nacimiento: 20/04/99

E: Entrevista nº 1 del día 25 del 3 del 2015, con César A. M. de 4º A, César, ¿qué edad tienes?
A: 15 años.
E: 15 años, muy bien. César, lee el enunciado e intenta contestar.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=10 representa cada número en las casillas siguientes.
E: Es fácil ¿no?
A: *(Rellena cada casilla con 1, 2, 3,… hasta 10)*
E: Vamos a ver ahora el apartado B.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=7, a cada número le sumamos tres. Representa ahora n+3 en las casillas.
A: *(Rellena las casillas con 4, 5, 6, … hasta 10)*
E: La pregunta es sencilla, ¿tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: No tiene la misma cantidad de números pero terminan.
E: ¿Quién tiene más números?
A: A.
E: En concreto tiene tres más. Bueno vamos a ver el apartado C y D.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante, representa cada número en las casillas siguientes.
E: ¿Entiendes lo de en adelante?
A: Más o menos *(Rellena cada casilla con 1, 2, 3, 4)*
E: Estos puntos suspensivos significan…
A: Que aquí hay números que no se representan.
E: Y aquí pon tú…
A: 10.
E: Vale, y aquí en medio, ¿están?
A: 5, 6, 7, 8, 9.
E: Muy bien, podías haber puesto otro número. ¿Y estos puntos suspensivos?
A: Hay que seguir la serie.
E: ¿Entonces?
A: Más infinito.
E: Vamos a ver el apartado D, igual que el apartado anterior Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. A cada número le sumamos 3. En vez de 1 ponemos…
A: *(Rellena con 4, 5, 6, 7)*
E: Sigue en adelante, y este pondríamos…
A: *(Escribe10)*
E: ¿Tiene la misma cantidad de números C que D, o son iguales?
A: Si los dos continuasen hasta el infinito, el que tendría más números sería el C porque empieza tres números antes.
E: ¿Y si no llegase al infinito?
A: Si los dos parasen en el mismo término correspondiente entonces el que más tiene es C.
E: Date cuenta que aquí empezaba y terminaba, empezaba y terminaba y aquí empieza y no termina, empieza y no termina. Entonces tu respuesta…
A: C. C tiene más números. *(I1B)*

*E(I2): *(Se le pone la tarea I2)* Venga vamos a la situación 2. Te lo he puesto de otra forma, Es lo mismo ¿vale? El primero va 1, 2, 3, 4. Pon ahí.
A: *(Rellena de 4, 5, 6, 7, 8, 9)*
E: Y abajo sumando 1, quiero que veas este correspondiente que hay. 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Y la respuesta tuya sigue siendo…
A: A.
E: A es mayor que B, en concreto tres números. Vamos a ver apartado C y D. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,

sigue adelante, y yo he sido un poquito más bestia, 100, aquí sigue en adelante y habría noventa y tantos y siguen adelante. Y ahora la correspondencia aquí.
A: *(Rellena 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Muy bien, y tú has puesto el correspondiente aquí. Si tu hubieras puesto otro número, por ejemplo el 107 o 200, alguno de por aquí le correspondería alguno aquí. A la vista de los resultados, ¿tiene la misma cantidad de números C, D o son iguales?
A: Sigo diciendo que C tiene más números. *(I2B)*

12) <u>Alumno:</u> Nu.15, 06 Nombre: Nuria Fecha de Nacimiento: 19/11/99

E: Entrevista nº 2 del día 25 del 3 de 2015, con Nuria de Andrés Masa, Nuria ¿qué edad tienes?
A: ¡Eh!, 15 años.
E: 15 años, muy bien. Mira, Nuria, lee el apartado A e intenta contestar.
A: Sea el conjunto de números de n=1 a n=10 representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien, entonces aquí pondríamos…
A: 1.
E: Y aquí…
A: Supongo que son diez casillas, *(completa con 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*, increíble.
E: Increíble ¿eh?, muy bien, hasta ahí bien, perfecto. Vamos a ver el apartado B un poquito más complicado, Nuria, si no esto parece… Bien, lee.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=7. A cada número le sumamos 3 representa ahora n+3 en las casillas.
E: Vale, entonces el primero sería…
A: 1.
E: No, es 1+3, luego sería…
A: 4.
E: ¿En vez de 2?
A: ¡Ah!, vale, vale, 5
E: Sí.
A: Y ya el 6, 7, 8, 9, 10.
E: Vale, ¿Por qué 10? porque el último es el 7, y le sumamos 3, te da 10, por eso te lo he puesto incluso sombreadito *(señalando las últimas tres casillas sombreadas)*. La pregunta del millón ¿Tiene la misma cantidad de números A que B o son iguales?
A: ¿Qué si tiene la misma cantidad de números o… continúa uno más que otro, o…?
E: Misma cantidad de números
A: ¡Ehm!, si la sucesión empieza en 1 y termina en 10 en A y en B empieza en 4 y termina en 10, en A hay más números.
E: Vale, ¿en concreto cuántos?
A: ¿Cuántos números de más hay?, ¡eh! 3.
E: Vale, bien. Vamos a ver el apartado C y D. Léelo.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Vale, bueno ¿comprendes lo de en adelante?
A: ¡Hem!, infinitamente hacia adelante.
E: Sigue adelante, muy bien, entonces el primero sería…
A: 1, 2, 3, 4, y ya luego… 100.
E: Por ejemplo 100, es decir significa que estos puntos suspensivos representan a unos noventa y tantos ¿no?, ¿y estos siguen?
A: Infinito.
E: Y abajo, pues parece ser ahora que le vamos a sumar 3, en vez de 1 ¿sería?
A: ¡Eh!, otra vez 4, 5, 6 y 7.
E: Vale, sigue adelante, y este con…
A: ¡Eh!, 103.
E: Vale, porque tú estás poniendo el correspondiente a arriba, si hubieras puesto otro número, Nuria, por ejemplo el 120 o 200, pues sería alguno de por aquí, ¿no?
A: Sí.
E: Bien, la pregunta ahora. ¿Tienen la misma cantidad de números C que D o son iguales?
A: Tienen la misma cantidad de números, bueno, no, o sea sí, los dos son infinitos, ¿no?, aunque D empiece más tarde los dos siguen infinitamente así que… *(I1**4**)*

*E(*II1*): *(Se le pone la tarea II1)* Muy bien, lee el otro. Ficha Nivel 2, léelo Nuria.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=5000. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien, ahora empezaríamos…
A: 1, 2, 3, 4, 5.
E: Bien y estos tres últimos porque no vamos a estar toda la mañana.
A: 4998, 4999 y 5000.
E: Bien, vamos a ver ahora lo que viene abajo ¿vale?, sea el conjunto…
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=4500. A cada número le sumamos 500. Representa ahora n+500 en las casillas.
E: Bueno, entonces en vez de 1 ahora habría que poner aquí…
A: 501.
E: Y aquí.
A: 502, 503, 504 y 505.
E: Vale, y estos tres últimos ¿cuales crees tú que serán?
A: ¡Eh!, si el último fue 4500 este sería 5000, es más fácil empezar por detrás.
E: Vale.

A: El anterior sería 4599, no, 4999.
E: Sí, 4999.
A: Sí. *(Completa con 4999 y la anterior con 4998)*
E: Muy bien, a la vista de los resultados ¿Quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: A.
E: A, vale… venga C, sea el conjunto de n=1 en adelante.
A: Representa cada número en las casillas siguientes. 1, 2, 3, 4.
E: Sigue adelante, pon aquí el que tú quieras.
A: 5000 y así va con los de arriba.
E: ¡Ya! Que bestia eres Nuria, muy bien, ¿vale? y sigue adelante ¿vale?, y abajo lee tú.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante, a cada número le sumamos 500. Representa ahora n+500, cada número en las casillas siguientes.
E: Vale, entonces el primero sería…
A: 501, 502, 503 y 504.
E: Sigue en adelante, aquí pondrías por ejemplo el correspondiente a arriba.
A: 5500.
E: Y estos seguirían adelante ¿vale? Bien, a la vista de los resultados ¿Quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Son iguales porque siguen hacia el infinito. *(II1**3**)*

*E(*III1*): Bien. Ficha Nivel 3, situación 1. Nuria, lee el apartado A e intenta contestar.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=10, a cada número le corresponde su inversa, es decir 1/n. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien, aquí hay que tener cuidado que es la inversa, ¿vale?, entonces habría que poner aquí…
A: Uno partido de uno.
E: Bien, escríbelo, no hace falta pararse en los cálculos, él mismo te los va a hacer, ¿vale?
A: Vale.
E: El siguiente sería…
A: Uno partido de dos. Pongo 1 y la barrita y 2.
E: Eso es, aquí es él el que trabaja ¿vale?
A: ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/7, 1/9 y 1/10.
E: Muy bien, vamos a ver, ahora muy parecido a los anteriores, sea el conjunto de números del 1 al 7 y ahora le vamos a sumar 3, pero a su inversa, ¿vale?
A: Vale.
E: Entonces ¿el primero sería?
A: 1 partido de 1, o sea de 1+1, ¡no! +3, uno partido de 4.
E: Uno partido de cuatro, sí, bien, uno partido…
A: Uno partido de… este sería el 2+3, 1/5.
E: Sí.
A: 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10.
E: Vale, te digo que te fijes ahora en una cosita ¿vale?, es igual que el anterior y aquí está este que está por aquí, y este está aquí y este está aquí *(señalando las posiciones que contienen números iguales en ambas filas)*, ¿vale? Bien, como siempre, el apartado…eh… la pregunta es sencilla, ¿Quién tiene más cantidad de números decimales el apartado A, el B o son iguales?
A: ¡Eh…! A,… bueno ¿de números decimales?
E: Sí, bueno número decimales no, números…
A: Es que me creí que era algo de trampa porque el A tiene un 1, pero no, yo creo que A tiene más.
E: A tiene más ¿no? ¿Cuánta cantidad de números tiene de más?
A: 3.
E: Muy bien. Vamos a ver el apartado C.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante, a cada número le corresponde su inversa, es decir 1/n.
E: Muy bien, parecido al anterior, entonces el primero sería…
A: Uno.
E: Uno, el siguiente…
A: ½, 1/3, ¼, uno partido de n…, 1/48.
E: Bueno, ahí está la cosa, vamos a ver ahora el apartado D, ¿vale?, lo mismo que el anterior que hay que sumarle 3 y su inversa. Entonces el primero sería…
A: ¼, 1/5, 1/6, 1/7.
E: Siguiendo adelante, aquí podríamos poner…
A: ¡Eh…! si antes hemos hecho uno partido…
E: 48, si quieres poner el correspondiente.
A: No mejor 1/47 ahí es más fácil y sería 1/50.
E: 1/50 vale. Bien, a la vista de los resultados ¿quién tiene más cantidad de números decimales apartado C, apartado D o son iguales?
A: Son iguales porque creo que tienen infinitos números. *(III1**4**)*
E: Vale, lo que sí quiero es que te fijes en una cosita ahora, a ver si cambia tu opinión, ¿qué es lo que está pasando con los numeritos, Nuria? Este es 1, 0.5, 0.3, 0.25…
A: Que cada vez son más pequeños.
E: ¿Dónde crees tú que va a llegar este?
A: al menos infinito, ¿no?
E: ¿Sí? ¿Van a salir negativos?
A: No.
E: No, porque los números que estamos poniendo aquí abajo ¿son…?
A: Positivos.
E: ¿Entonces?
A: ¡Eh…! a cero.
E: A cero, ¿vale?, se va paralizando, ¿y este?
A: A cero también.
E: A cero también, ¿vale?
A: Vale.
E Bien. A la vista de los resultados ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?

A: ¡Eh…! C, no, si los dos van a terminar llegando a cero, teniendo en cuenta que C empieza antes. Pero como son infinitos, los dos tienen la misma cantidad. *(III14)*
E: Pero llegan a cero.
A: Vale, vale,… pues iguales ¿no?

*E(*IV1*): Bien, Nuria, ficha Nivel 4, situación 1, lee el apartado A y empieza a contestar.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=1000, a cada número le corresponde su inversa, es decir 1/n. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Vale, bueno, entonces sería…
A: 1/1, ½, 1/3, ¼, 1/5.
E: Y los tres últimos, bueno vamos a hacer el último si quieres.
A: Es más fácil, 1/1000, 1/999, 1/998 *(completando desde atrás hacia delante)*
E: Vale, vamos al de abajo, lo mismo pero ahora le estamos sumando 500, el primero sería uno partido…
A: De 501.
E: Eso es, y el siguiente…
A: 1/502, 1/503, 1/504 y 1/505.
E: Y los tres últimos, pues pasaría lo mismo ¿no?, si el último es n=500, aquí hay que sumarle, con lo cual este sería…
A: Igual que el de arriba 1/1000.
E: Y este sería uno partido…
A: De novecientos…este sería... es que se me dan muy mal los cálculos, me lo voy a pensar.
E: No te preocupes, 999, ¿vale?
A: Vale 1/999
E: ¿Y el anterior?
A: 1/998
E: Aquí el problemilla es con el cálculo habría que poner…
A: *(Asiente)*
E: A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: Me lo voy a pensar, a ver…¡eh!…, me parece que A tiene más.
E: ¿A tiene más?, vamos a ver, este empieza por aquí, este empieza en 1 y termina en este ¿vale?, ¿cuántos números hay aquí?
A: ¡Eh…! de 1 a 1000, hay 1000 números.
E: ¿Y aquí cuantos números hay?
A: 500.
E: 500, en un principio en A.
A: A tiene más.
E: A tiene más, muy bien, ¿vale? Vamos el apartado C y D, ya tú lo lees y ya más o menos lo vas pasando. El primero sería…
A: ¡Eh…!voy a leer igualmente. Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante, a cada número le corresponde su inversa, es decir 1/n. *(Escribe ½ en la primera casilla, luego rectifica y completa con 1, ½, 1/3, 1/4)*
E: Vale y este pon el que te dé la gana.
A: 1/500.
E: Por ejemplo. Bien el apartado D, muy parecido a los anteriores, sea el conjunto desde n=1 en adelante y ahora más 500. Entonces el primero sería…
A: 1/501, 1/502, 1/503 y 1/504.
E: Y este por ejemplo, escribe el correspondiente a arriba.
A: 1/1000.
E: Y sigue adelante, ¿vale? A la vista de los resultados, ¿quien tiene mayor cantidad de números C, D o son iguales?
A: Me ha cambiado el número, pero son iguales, porque siguen.
E: ¿Por qué?
A: Porque siguen, y siguen y siguen y siguen… *(IV13)*

13) <u>Alumno:</u> Al.15, 06 Nombre: Álvaro Fecha de Nacimiento: 16/12/99

E: Entrevista nº 3 del día 25 del 3, con Álvaro E. M. de 4º A. Álvaro ¿qué edad tienes?
A: 15 años.
E: 15 años, muy bien. Mira, intenta leer el apartado A y el B y contestarlo. Venga el A.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=10 representa cada número en las casillas siguientes.
E: Un momento, ¿qué ponemos aquí?
A: *(Rellena cada casilla con 1, 2, 3,… hasta 10)*
E: Muy bien, vale, a la vista de los… vamos a ver ahora el apartado B, sea el conjunto…
A: Entonces lo tengo bien, ¿no?
E: Sí.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=7, a cada número le sumamos tres. Representa ahora n+3 en las casillas.
E: Muy bien.
A: *(Rellena las casillas con 4, 5, 6,… hasta 10)*
E: Vale, no hay que seguir porque el último es siete, se le suma tres, diez. A la vista de los resultados quien tiene más cantidad de números A, B o son iguales.
A: El A.
E: El A, vale, ¿cuántos tiene más A que B?
A: 3.
E: Vamos a ver el apartado C y D.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante, representa cada número en las casillas siguientes.
E: Bien entonces hay que poner…
A: *(Rellena cada casilla con 1, 2, 3, 4)*
E: Sigue en adelante, entiendes eso, ¿no? Puntos suspensivos, ahí pon el número que tú quieras.

A: *(Rellena con 8)*
E: El 8, esto significa que aquí habrá…
A: El 5, 6 y 7.
E: Vale, y esto sigue en adelante. ¿Qué significa que siga en adelante? Esto habrá…
A: Infinitos ¿no?
E: Bien, vamos a ver el apartado D.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. A cada número le sumamos 3. Representa ahora n+3 en las casillas siguientes.
E: Muy bien, tendrías que poner…
A: *(Rellena con 4, 5, 6, 7)*
E: Sigue en adelante, y esto pondríamos.
A: *(Escribe 9)*
E: El 9 ¿no?, sería del que corresponde por aquí, más concretamente al 6. A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Iguales.
E: Iguales, ¿porqué?
A: Porque hay cinco números aquí en el ordenador. *(Indica con el cursor) (I12)*
E: Vale, aunque este empiece en 1 y este empiece en 4, ¿sí?
A: Creo que sí.

*E(*II1*): *(Se le pone la tarea II1)* Muy bien, lee el otro. Ficha Nivel 2, léelo Álvaro.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=5000. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien, hay ahora más números.
A: *(Rellena cada casilla con 1, 2, 3, 4, 5)*
E: Estos tres últimos, cuando el último sería…
A: 5000. *(Rellena de atrás hacia delante con 5000, 4999, 4998)*
E: Los puntos suspensivos estos significan que habrá ahí cuatro mil novecientos noventa y… Vamos a ver el apartado B.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=4500. A cada número le sumamos 500. Representa ahora n+500 en las casillas.
E: Vale, entonces sería…
A: *(Rellena 501, 502, 503, 504, 505)*
E: Bien, y los tres últimos de aquí ¿cuales crees tú que serán?, el último es 4500, si le sumas 500 sería…
A: 5000.
E: Bien, y ya por lógica ¿no?
A: *(Rellena de atrás hacia delante con 5000, 4999, 4998)*
E: Bien, a la vista de los resultados ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: Iguales.
E: ¿iguales? ¿Este empieza?
A: Por 1.
E: ¿Y termina?
A: Por 5000.
E: ¿Y este empieza?
A: ¡Ah!, por 501, claro.
E: Claro, ¿Cuál tiene más entonces?
A: El A.
E: El A, vale. Vamos a ver el C y D aquí, ¿vale? Léelo.
A: Sea n el conjunto de números desde n=1 en adelante representa cada número en las casillas siguientes.
E: Ok.
A: *(Rellena con 1, 2, 3, 4)*
E: Y en adelante, ¿vale?, escribe aquí el número que tú quieras.
A: *(Escribe 9)*
E: Por ejemplo el 9, vale. Y abajo pues vamos a leerlo.
A: Sea n el conjunto de números desde n=1 en adelante. A cada número le sumamos 500. Representa ahora n+500 en las casillas.
E: Bueno, entonces sería.
A: *(Rellena con 501, 502, 503, 504)*
E: Si sigues adelante, a este le correspondería…
A: *(Escribe 509)*
E: Bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: El C.
E: El C, ¿por qué?
A: El C es el que más números tiene porque empieza desde el 1 y llega al infinito. *(II1B)*

*E(*II2*): Vale, *(Se le pone la tarea II2)*
Vamos a empezar el 2, vamos a intentar verlo de otra forma, mira este es como el que hemos hecho anteriormente, el 1, el 2, el 3, sigue tú.
A: *(Completa con 4, 5, 6)*
E: Y estos tres últimos 4998, 4999 y el último que tú has dicho sería el 5000.
A: *(Va rellenando con 4998, 4999 y 5000)*
E: Y estos igual, tú has dicho el 1, 501, el 2, 502, el 3…
A: *(Completa con 503, 504, 505, 506)*
E: Vale y estos son los tres últimos que ya lo habíamos hecho.
A: *(Completa con 4998, 4999, 5000)*
E: Vale, y tú has dicho que el que tenía más cantidad de números era el A. Vamos a ver el siguiente, el 1, el 2, el 3, sigue tú.
A: *(Completa con 4, 5, 6, 7)*
E: Yo he sido un poquito más bestia y he puesto 1000, ¿vale? En los puntos suspensivos estos habrá novecientos y pico y de aquí en adelante habrá infinitos. Y aquí los correspondientes al 1, 501, 2, 502, 3…
A: *(Completa con 503, 504, 505, 506, 507)*
E: Y por ejemplo el del mil sería…
A: *(Escribe 1500)*
E: ¿Quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: El C. *(II2B)*
E: ¿Tiene más cantidad de números?
A: Sí.

14) <u>Alumno:</u> Ju.15, 07 Nombre: Juan Fecha de Nacimiento: 31/10/99

E: Entrevista nº 4 del día 25 de Marzo del 2015, con Juan S. N. ¿Qué edad tienes, Juan?
A: 15.
E: 15 años, muy bien. Juan, lee el apartado A de la ficha 1 e intenta contestarla, en voz alta.
A: Sea el conjunto de números de n=1 a n=10 representa cada número en las casillas siguientes.
E: Vale, aquí pondríamos.
A: *(Completa con 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Muy bien, vamos a ver el apartado B que nos dice.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=7. A cada número le sumamos 3 representa ahora n+3 en las casillas.
E: Vale entonces hay que poner 1, en vez de 1, le sumamos 3, sería…
A: 3.
E: No.
A: Vale. *(Escribe 4)*
E: En vez de 2.
A: *(Completa con 5, 6, 7, 8, 9, 10)*
E: Bien, como aquí hay 7 al sumarle 3, es 10.
E: Bien, la pregunta es sencilla, ¿Tiene la misma cantidad de números A que B o son iguales?
A: *(Se queda pensando un tiempo)*
E: ¿Quién tiene más números?
A: A.
E: A, vale. Vamos a ver ahora el apartado C y D, léelo Juan.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Muy bien, luego aquí hay que poner…
A: *(Completa con 1, 2, 3, 4)*
E: Y aquí, el que tú quieras…
A: *(Rellena con 6 la casilla entre puntos suspensivos)*
E: ¿Entiendes tú los puntos suspensivos?
A: Sí, que ahí han pasado un montón de números.
E: O muchos números, ¿vale?, aquí tan solo al poner el 6 aquí debía de estar…
A: El 5.
E: El 5, pero podrías haber puesto un número mayor, ¿vale Juan?
A: Sí.
E: Y estos puntos suspensivos ¿tú los entiendes?
A: Sí, lo entiendo.
E: ¿Hasta dónde?
A: Al infinito.
E: Vale. Bien, vamos a ver el apartado D, muy parecido al anterior.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. A cada número le sumamos 3. Representa ahora n+3 en las casillas siguientes.
E: Vale, entonces en vez de 1 sería…
A: 4.
E: Eso es.
A: *(Completa con 4, 5, 6, 7)*
E: Y este, si tu quieres coger el correspondiente de arriba o cualquier otro vamos.
A: *(Intenta teclear, pero no se le permite introducir el dato)*
E: Bueno sería 9, ¿no?
A: 9, sí.
E: Bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Iguales, ¿no? Tienen la misma cantidad de números.
E: ¿Aunque uno empiece en 1 y el otro en 4?
A: Sí.
E: y ¿por qué? ¿Cuál es la explicación que darías Juan?
A: No sé, porque cuando pienso en la cantidad de números no pienso en el valor, pienso en las cantidades que hay. *(I12)*

*E(*II1*): Ficha Nivel 2, lee de nuevo, apartado A.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=5000. Representa cada número en las siguientes casillas, en las casillas siguientes.
E: Bueno esto sería aquí…
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4, 5)*
E: Sigue en adelante ahora y los tres últimos ¿cuáles serían?
A: Aquí sería…
E: El último sería…
A: *(Completa con 5000, 4999 y 4998 de atrás hacia delante)*
E: Vale, vamos a ver, el apartado B.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=4500. A cada número le sumamos 500. Representa ahora n+500 en las casillas.
A: *(Escribe 501, 502, 503, 504, 505)*
E: Y ahora los 3 últimos cuáles serían, porque el último sería 4500, sumamos 500, el último sería…
A: 4000.
E: No, 4500+500.
A: *(Escribe 5000, 4999,4998)*
E: Vale, a la vista de los resultados ¿Quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: Iguales, ¿no?
E: iguales, uno empieza en…
A: 1.
E: ¿Y termina?
A: 5000.
E: Otro empieza en…
A: 501.
E: ¿Y termina?
A: 5000, a lo mejor el primero tiene más números.
E: Vamos a ver el apartado C y D.

A: Sea n el conjunto de número desde n=1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Igual que el anterior ¿no?
A: *(Escribe 1, 2, 3, 4)*
E: Aquí puedes poner el que tú quieras, 6.
A: Sea n el conjunto de números desde n=1 en adelante. A cada número le sumamos 500. Representa ahora n+500. Representa ahora n+500.
E: Ahora sí.
A: *(Rellena el apartado D con 501, 502, 503, 504,… …, 506,…….)*
E: La pregunta, ¿Tiene la misma cantidad de números C que D?
A: Sí.
E: ¿Por qué?
A: Porque tienen 6 cifras ¿no?
E: No, aquí no hay 6, hay…
A: Ya,…Yo creo que da igual.
E: Por la misma razón que el anterior, ¿qué dijiste tú anteriormente?
A: Que no me había fijado en los números, sino en la cantidad de ellos. *(II12)*
E: Aunque aquí también había diferentes cantidades, pero claro…
A: Sí, pero había un rango mayor.
E: Como hay un principio y no hay final.

*E(*III1*): Bien. Ficha Nivel 3, situación 1. Juan, lee el apartado A e intenta contestar.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=10, a cada número le correspondemos su inversa, es decir 1/n. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Vale, el primero ¿sería?
A: Uno partido de 1.
E: Ponlo.
A: *(Escribe ½, 1/3, ¼…1/10)*
E: Lo único que pasa que son números decimales y el otro es muy parecido al que hicimos al principio, sea el conjunto del 1 al 7.
A: A cada elemento le corresponde su inversa más 3, es decir representa 1/n+3 ahora esos números en las casillas siguientes.
E: El primer número, el 1 sería…
A: ¡Eh!
E: ¼, ¿no?
A: Sí, sí.
E: El siguiente.
A: 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10.
E: Vale, A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números, en caso de decimales, A, B o son iguales?
A: ¡Eh!, el de arriba.
E: El de arriba, que tendría más cantidad de números ¿no?
A: Sí.
E: Vamos a ver el C y el D, Juan.

A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante, a cada número le correspondemos su inversa, es decir 1/n. Representa cada número.
E: Lo mismo que el anterior, ¿vale?
A: 1/1.
E: Sí, siguiente.
A: ½, 1/3, ¼.
E: Sigue en adelante, 1/10, por ejemplo, o el que tú quieras…
A: 1/10.
E: Bien, vamos al de abajo, es lo mismo.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante, a cada elemento le corresponde su inversa más tres, es decir representa 1/n+3.
E: Vale.
A: ¼, 1/5, 1/6, 1/7.
E: Y este, sería…
A: 1/13.
E: Si hubieras cogido otro no pasa nada, … a la vista de los resultados ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Son iguales.
E: Quiero que te fijes en una cosita, ¿qué está pasando con estos números? Juan.
A: Va disminuyendo.
E: Disminuyendo, ¿a dónde crees tú que llegaría?
A: Al cero.
E: Al cero, parece ser que se para, aún así, ¿sigues diciendo que este tiene la misma cantidad de números?
A: Entonces sería el primero. *(III1B)*

*E(*III2*): *(Se le pone la tarea III2)* Esto lo he puesto de todas formas yo ¿eh?, pon ahí 1, ½, 1/3…1/10. Aquí abajo, como lo has hecho muy bien, ¼ sería, 1/5, aquí 1/6, 1/7,...1/10.
A: *(Va escribiendo lo anterior)*.
E: El de abajo…. Ahora te he puesto aquí 1/100, un poco más bestia. El de abajo tú lo has estado haciendo muy bien.
A: *(Escribe ¼, 1/5, 1/6…1/10)*
E: Sería uno partido…
A: 13.
E: Y esto sigue en adelante, aquí la diferencia que existe es la forma.
E: A la vista de estos resultados, Juan, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Son iguales. *(III2A)*

*E(*III3*): *(Se le pone la tarea III3)* Bueno. Vamos a ver de otra forma, Juan. Este lo hacemos 1/1…
A: *(Escribe ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10)*
E: Y abajo le vamos sumando 3, entonces serían.
A: *(Escribe ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10)*

E: Como dijiste, está claro que el apartado A, tiene más números, pues este igual, lo vamos a cambiar un poco, sigue siendo 1…
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7)*
E: Sigue adelante y aquí pon tú el que tú quieras.
A: *(Escribe 1/100)*
E: Y abajo se le va sumando de nuevo 3, serían.
A: *(Escribe ¼, 1/5, 1/6)*
E: Y este último…
A: *(Escribe 1/103)*
E: Fíjate en los decimales que van dando. A la vista de los resultados, ¿quién tiene mayor cantidad de números arriba, abajo o son iguales?
A: Yo creo que igual. *(III3A)*

*E(III1'): Vamos a pasar a esta situación, distinta de la anterior, otra vez lo mismo, ¿vale? Es muy parecida. Léela por favor.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=10, a cada número le corresponde su inversa, es decir 1/n. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Vale.
A: 1/1, ½, 1/3, ¼, 1/5…1/10.
E: ¿Y abajo?
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=4, a cada elemento le correspondemos su inversa más 6, es decir, representa 1/n+6 ahora esos números en las siguientes casillas.
A: 1/7, 1/8, 1/9, 1/10.
E: Ya está, ¿no?, vale, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números, en el caso de decimales A, B o son iguales?
A: A.
E: A. ¿Vale? Vamos al apartado C ahora.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante, a cada elemento le correspondemos su inversa, es decir 1/n. Representa cada número.
E: Muy bien, entonces el primero.
A: 1/1, ½, 1/3, ¼.
E: Y este por ejemplo…
A: 1/8.
E: Vamos a ver qué pasa abajo, si le sumamos ahora 6, el primero sería…
A: 1/7, 1/8, 1/9, 1/10.
E: Vale, y este pues…
A: 1/14.
E: A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Iguales, porque continúan al infinito. *(III**13**)*

*E(*IV1*): Bien Juan, por último, ficha Nivel 4, situación 1, lee el apartado A y empieza a contestar.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=1000, a cada número le correspondemos su inversa, es decir 1/n. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Vale.
A: *(Escribe 1/1, ½, 1/3, ¼, 1/5)*
E: Y los tres últimos… El último sería.
A: 1/1000, 1/999, 1/998 *(completando desde atrás hacia delante)*
E: ¿Vale?, vamos abajo.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=500, a cada número le correspondemos su inversa más 500, es decir, representa 1/n+500 ahora esos números en las siguientes casillas.
E: Entonces el primero sería…
A: 1/501, 1/502, 1/503, 1/504 y 1/505
E: Eso es, y de los tres últimos, como el último es 500, al sumarle 500 sería uno partido…
A: 1/1000.
E: Y el anterior sería…
A: 1/999.
E: Eso es…
A: 1/998.
E: Perfecto, vale, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: ¡Eh…! son iguales.
E: Vamos al C y D, aquí hay un principio y tiene final, aquí hay un principio y no tiene final.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante, a cada número le corresponde su inversa, es decir 1/n. Representa cada número.
A: 1/1, ½, 1/3, ¼.
E: Vale, y este pues el que tú quieras.
A: 1/10.
E: Vamos al apartado D ahora.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante, a cada número le corresponde su inversa más 500, es decir. Representa 1/n+500.
E: Este igual que el anterior, vale, sería el primero…
A: 1/501, 1/502, 1/503, 1/504.
E: Puedes poner el que tú quieras, o el correspondiente al de arriba.
A: 1/510.
E: A la vista de los resultados ¿quién tiene mayor cantidad de números arriba, abajo o son iguales?
A: Son iguales, van al infinito, ¿no? *(IV1**3**)*

15) <u>Alumno:</u> Ju.16, 01 Nombre: Juan Manuel Fecha de Nacimiento: 01/04/99

E: Entrevista nº 1 del día 26 de Marzo del 2015, con Juan Manuel L. R. de 4º A, Juan, ¿cuántos años tienes?
A: 15.
E: 15 años muy bien. Lee el apartado A en voz alta y contesta.
A: Sea el conjunto de números de n=1 a n=10 representa cada número en las casillas siguientes.
E: Fácil ¿no?, ¿qué hay que poner entonces?
A: 1, 2, 3, 4…10.
E: Ha sido fácil ¿no, Juan?, eso es.
A: Sí.
E: B.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=7. A cada número le sumamos 3, representa ahora n+3 en las casillas.
E: En vez de 1.
A: 4.
E: En vez de 2.
A: 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: ¿Por qué es 10? porque el último es el 7, al sumarle 3, es 10.
E: ¿Tiene la misma cantidad de números A que B? o ¿hay uno que tiene mayor que otro?
A: ¿Cómo? No lo entiendo.
E: Sí, ¿cuántos números tiene A?
A: 10.
E: ¿Cuántos tiene B?
A: 7.
E: ¿Quién tiene más números?
A: A.
E: Vamos a ver ahora el de abajo, vale, Juan. Lee el C.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: En adelante, ¿entiendes cómo es en adelante?
A: Sucesivos ¿no?, ¿consecutivos?
E: Sí.
A: 1, 2, 3, 4.
E: Esto sigue en adelante y aquí pone el número que tú quieras.
A: ¿Infinito?
E: No, pon el número que tú quieras.
A: 50, por ejemplo.
E: Vale. Esto significa que estos puntos suspensivos.
A: Van del 5 al 49.
E: Perfecto. ¿Y estos puntos suspensivos, Juan?
A: Del 51 al infinito.
E: Eso es. Vamos a ver el apartado D.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante. A cada número le sumamos 3. Representa ahora n+3 en las casillas siguientes.
E: Muy bien, entonces en vez de 1 sería…
A: 4, 5, 6, 7,…53.
E: Tú has cogido el correspondiente al de arriba, si hubieras cogido otro no hubiera pasado nada, si tu hubieras puesto aquí el 68, pues estaría por aquí. A la vista de los resultados, ¿quién tiene más números C, D o son iguales?
A: Iguales, ¿no?
E: Aunque este empiece en 1 y este en 4, ¿Por qué?
A: Porque este termina en 50.
E: No, este no termina en 50.
A: Porque hay 1, 2, 3, 4.
E: Aquí no termina, ¿eh?, Juan.
A: Sí, sí, vale.
E: ¿Entonces?
A: … No lo pillo.
E: Es fácil, ¿no? Tú lo has dicho muy bien aquí, ¿quién tiene más cantidad de números? *(Señalando a los apartados A y B)*
A: El primero.
E: El primero, porque tiene un inicio y tiene un final, aquí también tiene un inicio y tiene un final, aquí…
A: ¡Ah!, infinito los dos, ¿no?
E: Aquí tiene un inicio, pero no tiene final y aquí tienes inicio, pero no tiene final, ¿entonces?
A: Pero, como no tienen final, el C tiene más ¿no? Porque empieza en 1, ¿no?
E: Tú lo decides.
A: El C. *(I1B)*
E: ¿El C tiene más cantidad que el D? Vale.
A: Vamos, digo yo.

*E(*I2*): *(Se le pone la tarea I2)* Bueno vamos a ponernos ahora aquí, a ver qué tal, te he puesto otra distribución, ¿vale?, es igual, de 1 en adelante, 1, 2, 3, aquí pongo yo 4…
A: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
E: Y aquí le vamos sumando 3, igual que anteriormente, si es 1, 4, si es 2, 5, ¿si es 3…?
A: 6.
E: ¿Si es 4?
A: 7.
E: Ok, ¿si es 5?
A: 8.
E: ¿Si es 6?
A: 9.
E: ¿Y, si es 7?
A: 10.
E: Vale, y tú ahora dirás lo mismo, que tiene A más cantidad que B.
A: Sí.
E: Bien, vamos a ver ahora aquí qué se forma *(señalando al apartado C)*, 1, 2, 3,…, sigue tú.
A: 4, 5, 6, 7.
E: Vale, yo he puesto aquí uno un poco más bestia que tú, 100, ¿vale?, en los puntos

suspensivos aquí habrá unos noventa y tantos, y en estos siguen adelante.
A: Sí.
E: Y ahora abajo le estamos sumando 3,…, 4, 5.
A: 4, 5, 6, 7, 8, 9 10.
E: y ahora este, ya te digo, ¿si quieres corresponder al 100 sería…?
A: 103.
E: 103, si tu coges otro tampoco pasa nada, ¿vale?, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números, C, D o son iguales?
A: ¡Eh…! Creo que son iguales. *(I2A)*

*E(*I3*): Seguimos entonces, vamos a ver cómo están distribuidos. Te los voy a distribuir de otra forma ¿vale Juan?, entonces este sería 1, 2, 3,…
A: 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.
E: Y ahora abajo otra vez lo mismo, sumándole 3, entonces ¿si es 1?
A: 4.
E: Vale, ¿si es 2?
A: 5, 6, 7, 8, 9 y 10.
E: Vale, te pregunto de nuevo, ¿quién tiene más cantidad de número A, B o son iguales?
A: A.
E: Vale, A ¿qué?
A: Que tiene más cantidad de números.
E: aunque esté puesto de otra forma ¿vale? Vamos a ver ahora el C y el D, 1, 2, 3, sigue tú…
A: 4, 5, 6, 7.
E: Pon el que tú quieras ahora.
A: (*Escribe 200)*
E: 200, vale, y abajo le vamos sumando 3, si es 1 ¿sería?
A: 4.
E: ¿Si es 2?
A: 5.
E: ¿Si es 3?
A: 6.
E: ¿Si es el que tú quieras?
A: *(Escribe 203)*
E: Vale, a la vista de los resultados, ¿Quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Pero ¿pueden seguir adelante?
E: Eso sigue en adelante claro.
A: ¡Ah!, pues entonces infinito, iguales. *(I3A)*
E: Son iguales.

*E(*I1'*): Ahora…*(Se le pone la tarea I1')*
Vamos de nuevo a repetir, léelo y contéstalo.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=10. Representa cada elemento en las siguientes casillas.
E: Vale.
A: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.
E: Vale y ¿ahora?
A: Sumándole 6, ¿no?
E: Sumándole 6, pero del 1 al 4, en vez de 1 sería…
A: 6.
E: No, sumando 6 a 1, bórralo con el cursor.
A: 7, 8, 9 y 10 ¿no?
E: Perfecto, en este caso era más complicado porque…, bueno más complicado, ¿quién tiene más cantidad de números A, B, o son iguales?
A: El A.
E: El A, vale vamos a ver ahora el C y el D. Sea el conjunto de 1 en adelante, representa cada elemento en cada casilla, ¿sería?
A: 1, 2, 3, 4…. 542.
E: Vale Sea el conjunto de 1 en adelante, a cada número le sumamos 6, venga vamos a ir poniéndolos.
A: 7, 8, 9, 10.
E: El siguiente sería…
A: 545.
E: Le sumamos 6.
A: ¡Ah! *(Rectifica y escribe 548)*
E: Vale, a la vista de los resultados, ¿Quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Iguales, ¿por qué?
E: Pueden seguir "pa'lante", entonces infinitos. Iguales. *(I1´**3**)*

*E(II1): Lee la siguiente tarea. *(Se le pone la tarea II1)*
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=5000. Representa cada elemento en las siguientes casillas.
E: Fácil ¿no?
A: 1, 2, 3, 4, 5.
E: Y ahora estos tres últimos cuales serían.
A: ¿5000, 5001 y 5002? ¿O cómo?
E: No, el último sería…
A: 5000.
E: Y el anterior sería…
A: *(Escribe 4999)*
E: Y el anterior…
A: *(Escribe 4998)*
E: Perfecto, vamos a ver, B.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=4500. A cada número le sumamos 500. Representa ahora n+500 en las casillas. *(Escribe 501, 502, 503, 504, 505)*
E: El último cuál sería a partir de 4500 más 500.
A: *(Escribe 5500)*
E: No.
A: *(Rectifica y escribe 5001)*
E: No.
A: ¿No?
E: El último es 4500, si le sumamos 500.
A: 5000.
E: Y por lógica los dos anteriores serían…
A: ¡Eh!, iguales que arriba, ¿no? *(Escribe de atrás adelante 4999 y 4998)*

E: Vale, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: A.
E: El A, ¿qué?
A: El A tiene más cantidad de números, porque va desde 1 al 5000.
E: Vale y entonces el B.
A: Va del 501 al 5000.
E: Muy bien, vamos a ver el C y D como aparece en los anteriores. El C…
A: Sea el conjunto de número desde n=1 en adelante. Represента cada número en las casillas siguientes. 1, 2, 3, 4.
E: Bueno y este puede marcar…
A: 423.
E: Muy bonito. *(Se rectifica el 423 para dejar 4235)*
A: *(Rellena el apartado D con 501, 502, 503, 504,… …, 4735,……..)*
E: Vale, a la vista de los resultados, Juan, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Iguales.
E: Iguales ¿por qué?
A: Porque no tiene fin, son infinitos. *(II**14**)*
E: ¿Aunque uno empiecen en el 1 y otro en 501?
A: Sí.

*E(III1): Ficha Nivel 3, lee el apartado A.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=10, a cada número le corresponde su inversa, es decir 1/n. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Vale, el primero ¿sería?
A: Uno partido de n ¿no?
E: Uno partido de uno.
A: ¡Ah!, bueno vale. *(Escribe 1)*
E: El siguiente sería…
A: ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/7, 1/9 y 1/10.
E: Perfecto, vamos a ver ahora el de abajo.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=7, a cada número le corresponde su inversa más 3, es decir, representa 1/n+3 ahora esos números en las casillas siguientes.
E: ¿Cuál sería el primero?
A: ¡Eh…! 1 partido de 3.
E: Tres más uno.
A: ¼.
E: Vale, el segundo…
A: 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10.
E: Vale, y ya no tienes más porque te ha dicho que iba hasta 7. A la vista de los resultados ¿Quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales? En este caso son números decimales.
A: ¡Eh!, el A.
E: El A, el A ¿qué?
A: El A tiene más cantidad de números.

E: Vamos a ver el C y el D. Venga sea el conjunto de números…
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante, a cada número le corresponde su inversa, es decir 1/n. Representa cada número.
E: Muy bien, el primero sería…
A: Uno partido de uno.
E: Sí.
A: ½, 1/3, ¼.
E: ¿Y este?
A: 1/20.
E: Bien, vamos al de abajo.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante, a cada número le corresponde su inversa más tres, es decir representa 1/n+3.
E: Vale.
A: ¼, 1/5, 1/6, 1/7.
E: Y este, sería por ejemplo el correspondiente de arriba.
A: 1/23.
E: Bueno. Bien, la pregunta va a ser la misma, pero yo quiero que te fijes en una cosita ahora, Juan, mira lo que está pasando con los numeritos como son la inversa…
A: Va bajando.
E: Está bajando cuando el orden va subiendo ¿no?, ¿hasta dónde iría?
A: Al menos infinito.
E: No.
A: No, al cero.
E: Al cero, porque negativo no puede ser ¿verdad?, porque los números que estamos poniendo son todos positivos.
A: Claro.
E: Bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Iguales, son las mismas cantidades. *(III**14**)*

*E(*IV1*): Apartado A, ficha Nivel 4.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=1000, a cada número le corresponde su inversa, es decir 1/n. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: Vale.
A: 1/1, ½, 1/3, ¼, 1/5.
E: Y los tres últimos…
A: 1/1000, 1/999, 1/998 *(Completando desde atrás hacia delante)*
E: ¿Vale?, vamos abajo.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 a n=500, a cada número le corresponde su inversa más 500, es decir, representa 1/n+500 ahora esos números en las siguientes casillas.
E: Entonces el primero sería…
A: 1/501, 1/502, 1/503, 1/504 y 1/505.
E: Eso es, y de los tres últimos, vamos a hacer el último si quieres, como el último de aquí sería 500, al sumarle 500 sería uno partido…
A: 1/1000.

E: Y el anterior sería…
A: 1/999.
E: Eso es, ¿y cuál es el anterior?
A: 1/998.
E: Vale, a la vista de los resultados, Juanma, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: ¡Eh…! la A.
E: La A, vale, muy bien, vamos al C y D, como en el anterior.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante, a cada número le corresponde su inversa, es decir 1/n. Representa cada número en las casillas siguientes.
E: *(Asiente)*
A: 1/1, ½, 1/3, ¼.
E: Vale, y este pues.
A: 1/85.
E: Vamos al apartado D ahora.
A: Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante, a cada número le corresponde su inversa más 500, es decir. Representa 1/n+500. 1/501, 1/502, 1/503 y 1/504.
E: Y este.
A: Uno partido de… ¿Cuál habíamos puesta antes? Bueno pongo… …
E: Puedes poner el que tú quieras, vamos tampoco, uno partido… 520, no 20 no era ¿no?
A: 1/585.
E: Ahí vale. Sería a lo mejor uno de por aquí. A la vista de los resultados ¿quien tiene mayor cantidad de números C, D o son iguales?
A: Infinitos.
E: ¿Infinitos?
A: Iguales, porque son infinitos y no tienen fin, por eso son infinitos. *(IV1**4**)*

16) __Alumno:__ Da.15, 02 Nombre: David Fecha de Nacimiento: 15/01/00

E: Entrevista nº 1 del día 7 de Marzo del 2015, con David M. R. de 4º A, David ¿cuántos años tienes?
A: 15.
E: Muy bien. Lee la ficha del Nivel 1 e intenta contestar en voz alta. Sea el conjunto de números de n=1 a n=10 representa cada número en las casillas siguientes. Sería…
A: *(Rellena cada casilla con 1, 2, 3,… hasta 10)*
E: Vamos al apartado B, sea el conjunto de números desde 1 a 7. A cada número le sumamos 3. Representa ahora n+3. 1 sumamos 3…
A: *(Rellena cada casilla con, 4, 5, 6, 7,…hasta 10)*
E: No es necesario seguir ¿no David?, por dos motivos porque lo he puesto sombreado y porque era del 1 al 7, sumándole 3., a la vista de los resultados, David, ¿quién tiene más cantidad números A, B o son iguales?
A: Pues…en cantidad sería, A tendría más que B.
E: ¿Cuántos más?
A: Tres números más.
E: Ok. Vamos al apartado C. Sea el conjunto de números desde n=1 en adelante.
Representa cada número en las casillas siguientes. ¿Entiendes en adelante?
A: Sí. *(Rellena las casillas con 1, 2, 3, 4).*
E: Aquí pones el número que te dé la gana, diez. Con lo cual los puntos suspensivos estos, ¿significa?
A: Que hay más números.
E: ¿Qué números serían aquí, David?
A: 5, 6, 7, 8, 9.
E: ¿Y los puntos suspensivos estos de aquí?
A: Desde 11 hasta más infinito.
E: Apartado D, igual que pasó anteriormente, sea el conjunto de números desde n=1 en adelante pero ahora le sumamos 3.
A: *(Rellena cada casilla con 4, 5, 6, 7)*
E: Sigue en adelante. Seguramente sería uno de por aquí, el 7 más 3… A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Son iguales.
E: ¿Por qué?
A: Porque llegan hasta más infinito.
E: ¿Aunque este empieza en 1 y este en 4?
A: Al llegar hasta más infinito, hay infinitos números por lo que da igual donde empieces. *(I1**4**)*

*E(*II1*): Bien. Ficha Nivel 2. Situación 1. Apartado A. Sea el conjunto desde 1 a 5000. Representa cada número en las casillas siguientes. Luego este sería…
A: *(Rellena con 1, 2, 3, 4, 5)*
E: Seguiríamos poniendo, y ahora ponemos los tres últimos, si quiere pon el último.
A: *(Rellena con 5000, 4999, 4998)*
E: Vamos al apartado B que es muy parecido al anterior. Sea el conjunto de 1 a 4500, pero ahora le vamos a sumar a cada uno de ellos 500. El primero sería…
A: *(Rellena con 501, 502, 503, 504, 505)*
E: ¿Y cuáles son los tres últimos? Bueno como el último es 4500, el último será…
A: *(Rellena con 5000, 4999, 4998)*
E: A la vista de resultados, ¿quién tiene más cantidad de números A, B o son iguales?
A: ¡Hum…! Tiene más números A.
E: Vale. ¿Cuánta cantidad, que cantidad más que B?
A: 500.

E: Vamos al apartado C. Muy parecido al de antes. Sea el conjunto de números desde n=1. Representa cada número en las casillas siguientes.
A: *(Rellena cada casilla con 1, 2, 3, 4)*
E: Sigue adelante, y aquí pon el número que te dé la gana, por ejemplo el 10. Ok. Vamos al apartado D. De la misma forma que el anterior. Sea el conjunto de 1 en adelante y a cada número le sumamos 1.
A: *(Rellena con 501, 502, 503, 504)*
E: A la vista de los resultados ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Serían iguales porque llegan hasta más infinito.
E: ¿Aunque uno empiece en 1 y otro en 501?
A: Llegan hasta infinito, hay infinitos números. *(II1**4**)*

*E(*III1*): Ficha Nivel 3. Situación 1. Sea el conjunto desde 1 a 10. A cada número le corresponde su inversa, o sea 1/n.
A:*(Rellena con ½, 1/3, ¼, ¼, 1/5…1/10)*
E: Bien, el mismo te lo está pasando. Y el último… A diferencia con el anterior es que son números…
A: Decimales,
E: Y aquí lo que estamos viendo también es, qué le pasa a los números
A: Que van disminuyendo,
E: Vamos a ver el apartado B, igual que el anterior. Ahora del 1 al 7 y se le suma más 3, pero su inversa entonces el primero sería…
A: *(Rellena con ¼, 1/5, 1/6…1/10)*
E: Bien, a la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números en el caso decimales, A, B o son iguales?
A: El A.
E: Vamos al apartado C y D. Sea el conjunto de números de 1 en adelante, a cada elemento le corresponde su inversa, igual que el anterior. Representa cada número. El primero sería…
A: *(Rellena con 1/1, ½…1/10)*
E: Vamos adelante ahora. Sea el conjunto ahora le vamos a sumar 3 a su inversa, sería 1/n+3. Luego sería el primero…
A: *(Rellena con ¼, 1/5, 1/6, 1/7…1/10)*
E: Has cogido el mismo. A la vista de los resultados y la diferencia que existe ahora es que parece ser que van disminuyendo, hacia dónde irían a parar…
A: A 0.
E: ¿Y estos?
A: A 0 también.
E: A la vista de los resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: C.
E: C ¿tiene más números?
A: Sí. *(III1B)*

*E(*III2*): *(Se le pone la tarea III2)* Esto te lo he puesto yo, esto no es necesario que lo pongamos, y ahora este igual…
A: *(Rellena con 1/1, ½, 1/3…1/100)*
E: Yo he puesto uno más bestia que tú, ¿vale? Pero para que vayas viendo que va disminuyendo, y este, pues nada, le hemos sumado 3, lo has hecho bien antes.
A: *(Rellena con ¼, 1/5, 1/6…1/100)*
E: Si quieres coger la correspondiente de arriba. Atendiendo a lo que estamos diciendo, que va tú me estás diciendo desde 1 a 0, y arriba del 0,25 al 0, pero esto hay aquí números que vayan por medio. ¿Cuántos números hay por aquí y por aquí?
A: Infinito.
E: Vale, a la vista de resultados, ¿quién tiene más cantidad de números C, D o son iguales?
A: Los tendría C. *(III2B)*
E: Los tendría C, ¿cuántos tendría C, más?
A: Estos más. *(Señala con el cursor los términos iniciales)*