

# ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN ARMADO

Problemas

**D13** Departamento de Ingeniería Civil,  
de Materiales y Fabricación



UNIVERSIDAD  
DE MÁLAGA

Curso  
2018-19



Miguel Troyano Moreno

Escuela de Ingenierías Industriales

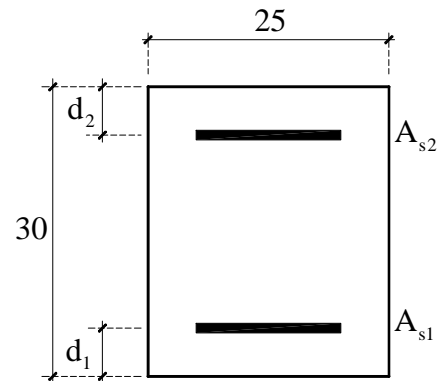
Universidad de Málaga

**PROBLEMA 06-001**

Determinar las cuantías límites de acero de la sección de la figura.

**Datos:**

Hormigón:	HA-25
Acero:	B 500S
Situación:	Persistente
Sección perteneciente a una viga	

**Valores de cálculo**

Primeramente debemos establecer los coeficientes parciales de seguridad para los materiales.

Según la Ficha 05 (seguridad) estos coeficientes serán:

➤ Coeficientes parciales de seguridad para materiales:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Estado Límite Último} \\ \text{Situación persistente} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \gamma_c = 1,50 \\ \gamma_s = 1,15 \end{array} \right.$$

y por lo tanto los valores de cálculo serán:

➤ Resistencia de cálculo del hormigón:  $f_{cd} = \alpha_{cc} \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = 0,85 \frac{25}{1,50} = 14,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

➤ Resistencia de cálculo del acero:  $f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{500}{1,15} = 434,8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

**Cálculo de las cuantías límites**

Según la Ficha 06 (cuantías límites):

**Armaduras mínimas geométricas**

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tipo de acero: B500S} \\ \text{Tipo de elemento estructural: Viga} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_{s1} \geq \frac{2,8}{1000} A_c \\ A_{s2} \geq 0,30 \cdot A_{s1} \end{array} \right.$$

Por lo tanto las armaduras geométricas mínimas que se han de colocar en la sección de hormigón serán:

$$A_{s1\min,g} = \frac{2,8}{1000} 25 \cdot 30 = 2,10\text{cm}^2$$

$$A_{s2\min,g} = 0,30 \cdot 2,10 = 0,63\text{cm}^2$$

### Armaduras mínimas mecánicas

Por tratarse de un problema de flexión, las armaduras mínimas tendrán que cumplir, con objeto de evitar la rotura frágil:

$$A_{s1} \geq 0,04 \frac{b \cdot h \cdot f_{cd}}{f_{yd}}$$

$$A_{s2} \geq 0,05 \frac{N_d}{f_{yd}}$$

Sustituyendo valores se obtiene:

$$A_{s1\min,m} = 0,04 \frac{25 \cdot 30 \cdot 14,2}{434,8} = 0,98\text{cm}^2$$

$$A_{s2\min,m} = 0 \text{ (al ser flexión simple : } N_d = 0)$$

### Armaduras mínimas definitivas:

Finalmente, las armaduras mínimas serán las que resulten mayores de las calculadas anteriormente:

$$A_{s1\min,g} > A_{s1\min,m} \Rightarrow A_{s1,\min} = 2,10\text{cm}^2$$

$$A_{s2\min,g} > A_{s2\min,m} \Rightarrow A_{s2,\min} = 0,63\text{cm}^2$$

**Armaduras máximas:**

Siguiendo las recomendaciones del Código Modelo CEB-FIP consideraremos unas cuantías máximas que vendrán dadas por:

$$A_{s1,m\acute{a}x} \leq 0,04 \cdot A_c$$

$$A_{s2,m\acute{a}x} \leq 0,04 \cdot A_c$$

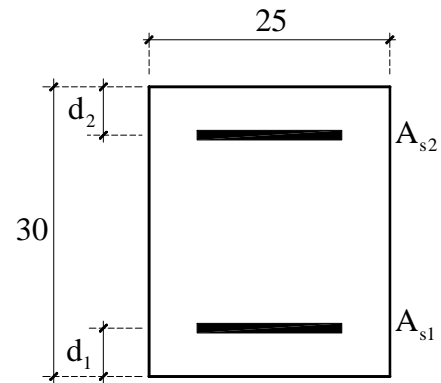
y por lo tanto estas armaduras serán:

$$A_{s1,m\acute{a}x} = A_{s2,m\acute{a}x} = 0,04 \cdot 25 \cdot 30 = 30\text{cm}^2$$

**PROBLEMA 06-002**

Determinar las cuantías límites de acero de la sección que se muestra en la figura, suponiendo que pertenece a un pilar que está sometido a los siguientes esfuerzos.

	$M_Q$ [kN · m]	$N_Q$ [kN]	$e_0$ [cm]
❶	10	100	10
❷	30	100	30
❸	50	100	50
❹	20	400	5
❺	50	600	8

**Datos:**

Hormigón: HA-25 (Con cemento CEM I)

Acero: B 500S

Situación: Persistente

**Valores de cálculo**

De la Ficha 05 (seguridad), se los coeficientes parciales de seguridad, tanto para materiales como para acciones:

- Coeficientes parciales de seguridad para materiales:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Estado Límite Último} \\ \text{Situación persistente} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \gamma_c = 1,50 \\ \gamma_s = 1,15 \end{array} \right.$$

- Coeficientes parciales de seguridad para acciones:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Estado Límite Último} \\ \text{Situación persistente} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Efecto Favorable} \left\{ \begin{array}{l} \gamma_G = 1,00 \\ \gamma_Q = 0,00 \end{array} \right. \\ \text{Efecto Desfavorable} \left\{ \begin{array}{l} \gamma_G = 1,35 \\ \gamma_Q = 1,50 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

y por lo tanto los valores de cálculo serán:

$$\blacktriangleright \text{Resistencia de cálculo del hormigón: } f_{cd} = \alpha_{cc} \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = 0,85 \frac{25}{1,50} = 14,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

➤ Resistencia de cálculo del acero:  $f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{500}{1,15} = 434,8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

➤ Esfuerzos de cálculo:  $M_d = M_G \cdot \gamma_G$  y  $N_d = N_G \cdot \gamma_G$

	$M_d$ [kN · m]	$N_d$ [kN]
❶	15	150
❷	45	150
❸	75	150
❹	30	600
❺	75	900
❻	75	1500

### Cálculo de las cuantías límites

Según la Ficha 06 (cuantías límites):

#### Armaduras mínimas geométricas

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tipo de acero: B500S} \\ \text{Tipo de elemento estructural: Pilar} \end{array} \right\} \Rightarrow A_s \geq \frac{4}{1000} A_c$$

donde  $A_s$  es la armadura longitudinal total:  $A_s = A_{s1} + A_{s2}$

Por lo tanto las armaduras geométricas mínimas que se han de colocar en la sección de hormigón serán:

$$A_{s,\text{mín g}} = \frac{4}{1000} 25 \cdot 30 = 3,00 \text{cm}^2$$

#### Armaduras mínimas mecánicas

Si se tratase de un problema de flexión, las armaduras mínimas tendrán que cumplir:

$$A_{s1} \geq 0,04 \frac{b \cdot h \cdot f_{cd}}{f_{yd}}$$

$$A_{s2} \geq 0,05 \frac{N_d}{f_{yd}}$$

En el supuesto de agotamiento por compresión, las armaduras mínimas tendrán que cumplir:

$$A_{s1} = A_{s2} \geq 0,05 \frac{N_d}{f_{yc,d}}$$

Sustituyendo valores se obtiene, en función del axil de cálculo las armaduras mínimas que se indican en la Tabla 1.

N <sub>d</sub> [kN]	A <sub>s2,mín m</sub> [cm <sup>2</sup> ]	A <sub>s1,mín m</sub> [cm <sup>2</sup> ]	
		Flexión	Compresión
150	0,17	1,15	0,17
600	0,69		0,69
900	1,04		1,04
1500	1,73		1,73
Tabla 1			

#### Armaduras mínimas definitivas:

Finalmente, las armaduras mínimas serán las que resulten mayores de las calculadas anteriormente, y que serán, en función del axil de cálculo, las que se indican en la Tabla 2, donde A<sub>s,mín</sub> es la armadura longitudinal **total** mínima a disponer.

N <sub>d</sub> [kN]	A <sub>s2,mín m</sub> [cm <sup>2</sup> ]	A <sub>s1,mín m</sub> [cm <sup>2</sup> ]		A <sub>s,mín</sub> [cm <sup>2</sup> ]
		Flexión	Compresión	
150	0,17	1,15	0,17	3,00
600	0,69		0,69	
900	1,04		1,04	
1500	1,73		1,73	
Tabla 2				

#### Armaduras máximas:

En el supuesto de agotamiento en flexión, siguiendo las recomendaciones del Código Modelo CEB-FIP las cuantías máximas que vendrán dadas por:

$$A_{s1,máx} \leq 0,04 \cdot A_c$$

$$A_{s2,máx} \leq 0,04 \cdot A_c$$

y por lo tanto estas armaduras serán:

$$A_{s1,m\acute{a}x} = A_{s2,m\acute{a}x} = 0,04 \cdot 25 \cdot 30 = 30\text{cm}^2$$

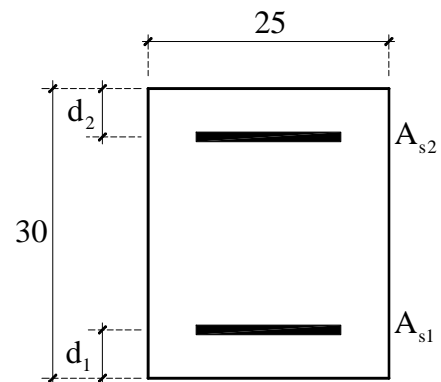
En el supuesto de agotamiento en compresión:

$$A_{s2,m\acute{a}x} = A_{s1,m\acute{a}x} = \frac{0,5 \cdot A_c \cdot f_{cd}}{f_{yc,d}} = \frac{0,5 \cdot 25 \cdot 30 \cdot 16,7}{400} \Rightarrow A_{s2,m\acute{a}x} = A_{s1,m\acute{a}x} = 15,63\text{cm}^2$$

## **PROBLEMA 08-001**

Dimensionar la sección indicada en la figura para los momentos flectores indicados en la siguiente tabla:

	Permanente: $M_G$ [kN · m]	Variable: $M_Q$ [kN · m]
❶	30,00	3,00
❷	30,00	13,67
❸	30,00	24,33
❹	30,00	35,00



### **Datos:**

Hormigón:	HA-25
Acero:	B 500S
Vida útil de proyecto:	100 años
Situación:	Persistente
Ambiente:	Ila
Sección perteneciente a una viga	

### **Valores de cálculo**

Primeramente debemos establecer los coeficientes parciales de seguridad, tanto para materiales como para acciones. Según la Ficha 05 (seguridad) estos coeficientes serán:

➤ Coeficientes parciales de seguridad para materiales:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Estado Límite Último} \\ \text{Situación persistente} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \gamma_c = 1,50 \\ \gamma_s = 1,15 \end{array} \right.$$

➤ Coeficientes parciales de seguridad para acciones:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Estado Límite Último} \\ \text{Situación persistente} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Efecto Favorable} \left\{ \begin{array}{l} \gamma_G = 1,00 \\ \gamma_Q = 0,00 \end{array} \right. \\ \text{Efecto Desfavorable} \left\{ \begin{array}{l} \gamma_G = 1,35 \\ \gamma_Q = 1,50 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

y por lo tanto los valores de cálculo serán:

➤ Resistencia de cálculo del hormigón:  $f_{cd} = \alpha_{cc} \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = 0,85 \frac{25}{1,50} = 14,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

➤ Resistencia de cálculo del acero:  $f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{500}{1,15} = 434,8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

➤ Esfuerzos de cálculo:  $M_d = M_G \cdot \gamma_G + M_Q \cdot \gamma_Q$ <sup>1</sup>

	$M_G$	$\gamma_G$	$M_Q$	$\gamma_Q$	$M_d$
❶	30,00	1,35	3,00	1,50	45,00
❷	30,00	1,35	13,67	1,50	61,00
❸	30,00	1,35	24,33	1,50	77,00
❹	30,00	1,35	35,00	1,50	93,00

### Cálculo de las cuantías límites

Según la Ficha 06 (cuantías límites):

### Armaduras mínimas geométricas

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tipo de acero: B500S} \\ \text{Tipo de elemento estructural: Viga} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} A_{s1} \geq \frac{2,8}{1000} A_c \\ A_{s2} \geq 0,30 \cdot A_{s1} \end{cases}$$

Por lo tanto las armaduras geométricas mínimas que se han de colocar en la sección de hormigón serán:

$$A_{s1\text{min,g}} = \frac{2,8}{1000} 25 \cdot 30 = 2,10 \text{cm}^2$$

$$A_{s2\text{min,g}} = 0,30 \cdot 2,10 = 0,63 \text{cm}^2$$

<sup>1</sup> En la práctica los coeficientes parciales de seguridad para acciones se introducen en la definición de las distintas combinaciones de acciones, de tal forma que del resultado de estas combinaciones se obtienen ya los esfuerzos de cálculo (mayorados).

Por otro lado se han tomado los coeficientes correspondientes a efecto desfavorable al ser las dos solicitaciones,  $M_G$  y  $M_Q$ , del mismo signo. Si las solicitaciones hubiesen tenido distinto signo, en general, para cada conjunto, habría que haber considerado dos combinaciones posibles, como en el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{l} M_G = 30 \\ M_Q = -25 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \text{❶ } M_d = 30 \cdot 1,35 & = 40,5 \text{ U} \\ \text{❷ } M_d = 30 \cdot 1,00 - 25 \cdot 1,50 & = -7,5 \text{ U} \end{cases}$$

**Armaduras mínimas mecánicas**

Por tratarse de un problema de flexión, las armaduras mínimas tendrán que cumplir, con objeto de evitar la rotura frágil:

$$A_{s1} \geq 0,04 \frac{b \cdot h \cdot f_{cd}}{f_{yd}}$$

$$A_{s2} \geq 0,05 \frac{N_d}{f_{yd}}$$

Sustituyendo valores se obtiene:

$$A_{s1min,m} = 0,04 \frac{25 \cdot 30 \cdot 14,2}{434,8} = 0,98 \text{cm}^2$$

$$A_{s2min,m} = 0 \text{ (al ser flexión simple : } N_d = 0 \text{)}$$

**Armaduras mínimas definitivas:**

Finalmente, las armaduras mínimas serán las que resulten mayores de las calculadas anteriormente:

$$A_{s1min,g} > A_{s1min,m} \Rightarrow A_{s1,min} = 2,10 \text{cm}^2$$

$$A_{s2min,g} > A_{s2min,m} \Rightarrow A_{s2,min} = 0,63 \text{cm}^2$$

**Armaduras máximas:**

Siguiendo las recomendaciones del Código Modelo CEB-FIP consideraremos unas cuantías máximas que vendrán dadas por:

$$A_{s1,máx} \leq 0,04 \cdot A_c$$

$$A_{s2,máx} \leq 0,04 \cdot A_c$$

y por lo tanto estas armaduras serán:

$$A_{s1,máx} = A_{s2,máx} = 0,04 \cdot 25 \cdot 30 = 30 \text{cm}^2$$

**Cálculo de los recubrimientos**

Se tiene que cumplir que (ver Fig. 1):

$$d_2 = d_1 \geq \begin{cases} r + \varnothing_t + \frac{1}{2}\varnothing \\ d_{pp} + \frac{1}{2}\varnothing \end{cases}$$

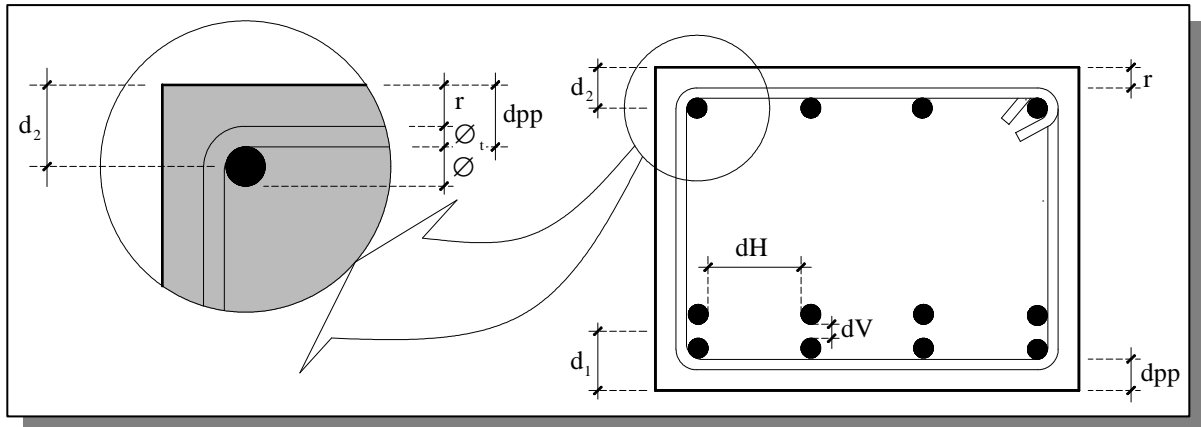


Fig. 1

Los valores mínimos de r y dpp vienen dados por EHE, y aparecen recogidos en la Ficha 04 (disposición general de armaduras):

$$d_{pp} \geq \varnothing^2$$

Ambiente : IIa

$$f_{ck} = 25 \frac{N}{mm^2}$$

Vida útil proyecto: 100 años

Cemento no especificado

Elemento in situ, Control Normal  $\Rightarrow \Delta r = 1cm$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow r_{\min} = 3,0cm \\ \Rightarrow r = 4,0cm \end{array} \right\}$$

y suponiendo que  $\varnothing_t \leq 8 \text{ mm}$  y  $\varnothing \leq 25 \text{ mm}$  (téngase en cuenta que estamos en un problema de dimensionamiento y todavía no se conocen las armaduras, por lo que es necesario estimar el diámetro de éstas), se tiene:

<sup>2</sup> No consideramos el tamaño máximo del árido porque lo normal es fijar éste en función de las distancias a los paramentos y distancias entre armaduras.

$$d_2 = d_1 \geq \left\{ \begin{array}{l} r + \varnothing_t + \frac{1}{2}\varnothing = 4 + 0,8 + \frac{1}{2}2,5 = 6,0\text{cm} \\ d_{pp} + \frac{1}{2}\varnothing = 2,5 + \frac{1}{2}2,5 = 3,7\text{cm} \end{array} \right\} \Rightarrow d_2 = d_1 = 6\text{cm}$$

### Cálculo de las variables dimensionales

Las variables dimensionales serán:

$$\delta_2 = \frac{d_2}{d}$$

$$\mu_1 = \frac{M_d}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}}$$

$$\omega_1 = \frac{A_{s1} \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} \text{ y } \omega_2 = \frac{A_{s2} \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}}$$

de las cuales las que son datos en el problema de dimensionamiento son:

$$\delta_2 = \frac{d_2}{d} = \frac{6}{30 - 6} = 0,25$$

$$\mu_1 = \frac{M_d}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}} \Rightarrow$$

	$M_d$	$\mu_1$
❶	45	0,221
❷	61	0,299
❸	77	0,377
❹	93	0,456

### Cálculo de los valores límites

De la Ficha 07 se obtienen:

$\xi_{\text{lím}}$	0,617
$\nu_{\text{lím}}$	0,493
$\mu_{\text{lím}}$	0,372

o bien analíticamente:

$$\xi_{lim} = \frac{1}{1 + 1,43 \cdot 10^{-3} \cdot f_{yd}} \Rightarrow \begin{cases} \nu_{lim} = 0,8 \cdot \xi_{lim} \\ \mu_{lim} = 0,8 \cdot \xi_{lim} \cdot (1 - 0,4 \cdot \xi) \end{cases}$$

●  $\mu_1 = 0,221 < \mu_{lim} = 0,372 \Rightarrow$  D.F.S.I

El momento exterior,  $\mu_1$ , es menor que el momento que puede aportar el hormigón sin que la armadura inferior deje de trabajar a su resistencia de cálculo,  $\mu_{lim}$ . Por lo tanto no necesitamos armadura de compresión para ayudar al hormigón  $\Rightarrow \omega_2 = 0$ .

De forma simplificada:  
 $\omega = \mu(1 + \mu) \Rightarrow \omega = 0,223$   
 $A_{s1} = 5,14\text{cm}^2$

La profundidad de la fibra neutra será:

$$\xi = 1,25 \left( 1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \mu_1} \right) = 1,25 \left( 1 - \sqrt{1 - 2 \cdot 0,221} \right) = 0,316 (< \xi_{lim})$$

y por lo tanto la armadura inferior será:

$$\omega_1 = 0,8 \cdot \xi = 0,8 \cdot 0,316 \Rightarrow \omega_1 = 0,252$$

Las armaduras de cálculo serán:

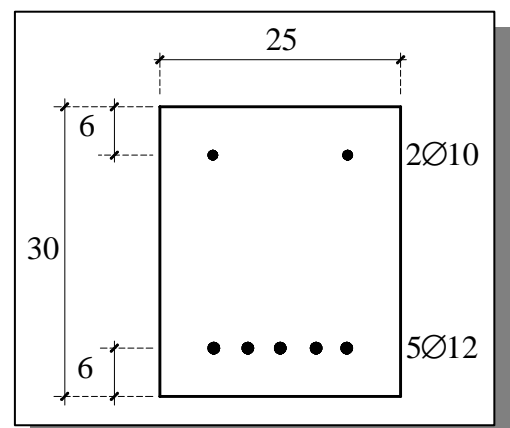
$$\omega_1 = \frac{A_{s1} \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} \Rightarrow A_{s1} = \omega_1 \frac{b \cdot d \cdot f_{cd}}{f_{yd}} = 0,252 \frac{25 \cdot 24 \cdot 14,2}{434,8} \Rightarrow A_{s1} = 4,94\text{cm}^2$$

$$\omega_2 = \frac{A_{s2} \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} \Rightarrow A_{s2} = 0\text{cm}^2$$

Finalmente las armaduras que es necesario disponer serán las mayores entre las mínimas y las de cálculo; es decir:

$$A_{s2} = 0,63 \text{ cm}^2 \Rightarrow \boxed{2\varnothing 10} \quad (1,57\text{cm}^2, b_{min} = 13\text{cm})$$

$$A_{s1} = 4,94 \text{ cm}^2 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{5\varnothing 12} \quad (5,65\text{cm}^2, b_{min} = 23\text{cm}) \\ \boxed{3\varnothing 16} \quad (6,03\text{cm}^2, b_{min} = 17\text{cm}) \\ \boxed{2\varnothing 20} \quad (6,28\text{cm}^2, b_{min} = 15\text{cm}) \end{cases}$$



Para la armadura superior se ha colocado la única opción posible, ya que el número mínimo de barras debe ser 2 y el diámetro mínimo de la armadura longitudinal es 10 mm. Por el contrario, para la armadura inferior existen varias posibilidades, para cada una de las cuales se ha indicado el número de barras, su diámetro, el área de acero que aporta ese conjunto de

barras y el ancho mínimo que debe de tener la sección de hormigón para que esa solución cumpla las disposiciones generales de armaduras que establece la EHE (ver Ficha 03). Finalmente la solución adoptada ha sido aquella que requiriendo un ancho mínimo menor que el de nuestra sección (25 cm. y por lo tanto las tres soluciones cumplen este requisito) tenga la menor sección de acero (este es un criterio puramente económico, que en determinadas circunstancias puede que no sea el más indicado).

②  $\mu_1 = 0,299 < \mu_{lim} = 0,372 \Rightarrow D.F.S.I$

De nuevo no es necesaria la armadura de compresión  $\Rightarrow \omega_2 = 0$ .

De forma simplificada:  
 $\omega = \mu(1 + \mu) \Rightarrow \omega = 0,318$   
 $A_{s1} = 7,34\text{cm}^2$

La profundidad de la fibra neutra será:

$$\xi = 1,25 \left(1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \mu_1}\right) = 1,25 \left(1 - \sqrt{1 - 2 \cdot 0,299}\right) = 0,457 (< \xi_{lim})$$

y por lo tanto la armadura inferior será:

$$\omega_1 = 0,8 \cdot \xi = 0,8 \cdot 0,457 \Rightarrow \omega_1 = 0,366$$

Las armaduras de cálculo serán:

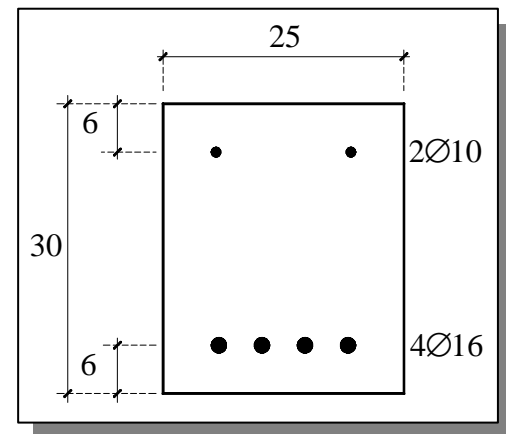
$$\omega_1 = \frac{A_{s1} \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} \Rightarrow A_{s1} = \omega_1 \frac{b \cdot d \cdot f_{cd}}{f_{yd}} = 0,366 \frac{25 \cdot 24 \cdot 14,2}{434,8} \Rightarrow A_{s1} = 7,16\text{cm}^2$$

$$\omega_2 = \frac{A_{s2} \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} \Rightarrow A_{s2} = 0\text{cm}^2$$

Finalmente las armaduras que es necesario disponer serán las mayores entre las mínimas y las de cálculo; es decir:

$$A_{s2} = 0,63 \text{ cm}^2 \Rightarrow \boxed{2\varnothing 10} \quad (1,57\text{cm}^2, b_{min} = 13\text{cm})$$

$$A_{s1} = 7,16 \text{ cm}^2 \Rightarrow \begin{cases} \cancel{7\varnothing 12} & (7,92\text{cm}^2, b_{min} = 29\text{cm}) \\ \boxed{4\varnothing 16} & (8,04\text{cm}^2, b_{min} = 21\text{cm}) \\ 3\varnothing 20 & (9,42\text{cm}^2, b_{min} = 19\text{cm}) \end{cases}$$



La forma de proceder para la elección del número y diámetros de las barras es la misma que en caso anterior

③  $\mu_1 = 0,377 > \mu_{lim} = 0,372 \Rightarrow D.F.S.II$

El momento exterior,  $\mu_1$ , es mayor que el momento que puede aportar el hormigón sin que la armadura inferior deje de trabajar a su resistencia de cálculo,  $\mu_{\text{lím}}$ . En esta situación la solución más económica se obtiene obligando al hormigón a absorber el máximo momento que puede soportar,  $\mu_{\text{lím}}$ , y disponiendo armadura de compresión para absorber el exceso de momento exterior. Por lo tanto la solución más económica se obtiene fijado la profundidad del eje neutro en  $\xi = \xi_{\text{lím}}$ .

La armadura de compresión será:

$$\omega_2 = \frac{\mu_1 - \mu_{\text{lím}}}{1 - \delta_2} = \frac{0,377 - 0,372}{1 - 0,25} \Rightarrow \omega_2 = 0,008$$

y la armadura inferior:

$$\omega_1 = \nu_{\text{lím}} + \omega_2 = 0,493 + 0,008 \Rightarrow \omega_1 = 0,501$$

Deshaciendo el cambio de variable obtenemos las armaduras de cálculo:

$$\omega_1 = \frac{A_{s1} \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} \Rightarrow A_{s1} = \omega_1 \frac{b \cdot d \cdot f_{cd}}{f_{yd}} = 0,501 \frac{25 \cdot 24 \cdot 14,2}{434,8} \Rightarrow A_{s1} = 9,80 \text{cm}^2$$

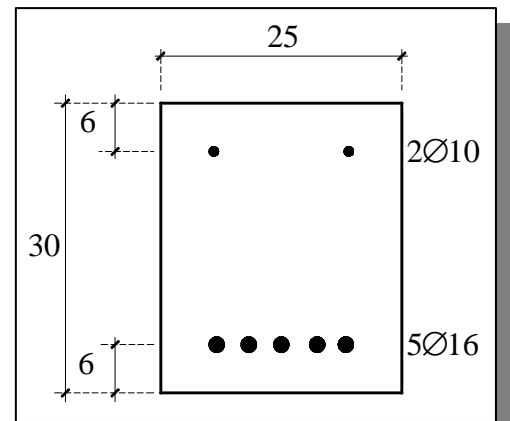
$$\omega_2 = \frac{A_{s2} \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} \Rightarrow A_{s2} = \omega_2 \frac{b \cdot d \cdot f_{cd}}{f_{yd}} = 0,008 \frac{25 \cdot 24 \cdot 14,2}{434,8} \Rightarrow A_{s2} = 0,15 \text{cm}^2$$

Finalmente las armaduras que es necesario disponer serán las mayores entre las mínimas y las de cálculo; es decir:

$$A_{s2} = 0,63 \text{ cm}^2 \Rightarrow \boxed{2\text{Ø}10} \quad (1,57\text{cm}^2, b_{\text{mín}} = 13\text{cm})$$

$$A_{s1} = 9,80 \text{ cm}^2 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{5\text{Ø}16} & (10,05\text{cm}^2, b_{\text{mín}} = 25\text{cm}) \\ \boxed{4\text{Ø}20} & (12,57\text{cm}^2, b_{\text{mín}} = 23\text{cm}) \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \mu_1 = 0,456 > \mu_{\text{lím}} = 0,372 \Rightarrow \text{D.F.S.II}$$



Al igual que en el caso anterior la solución más económica se obtiene fijando la profundidad del eje neutro en  $\xi = \xi_{\text{lím}}$ , y disponiendo armadura de compresión para absorber el exceso de momento exterior respecto del límite que puede absorber el hormigón.

La armadura de compresión será:

$$\omega_2 = \frac{\mu_1 - \mu_{\text{lím}}}{1 - \delta_2} = \frac{0,456 - 0,372}{1 - 0,25} \Rightarrow \omega_2 = 0,112$$

y la armadura inferior:

$$\omega_1 = \nu_{\text{lím}} + \omega_2 = 0,493 + 0,112 \Rightarrow \omega_1 = 0,606$$

Deshaciendo el cambio de variable obtenemos las armaduras de cálculo:

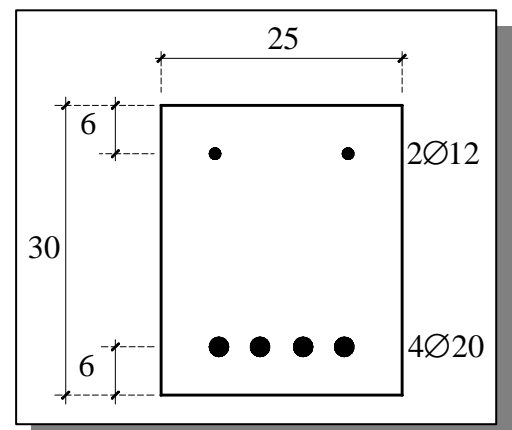
$$\omega_1 = \frac{A_{s1} \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} \Rightarrow A_{s1} = \omega_1 \frac{b \cdot d \cdot f_{cd}}{f_{yd}} = 0,606 \frac{25 \cdot 24 \cdot 14,2}{434,8} \Rightarrow A_{s1} = 11,84\text{cm}^2$$

$$\omega_2 = \frac{A_{s2} \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} \Rightarrow A_{s2} = \omega_2 \frac{b \cdot d \cdot f_{cd}}{f_{yd}} = 0,112 \frac{25 \cdot 24 \cdot 14,2}{434,8} \Rightarrow A_{s2} = 2,20\text{cm}^2$$

Finalmente las armaduras que es necesario disponer serán las mayores entre las mínimas y las de cálculo; es decir:

$$A_{s2} = 2,20 \text{ cm}^2 \Rightarrow 2\text{Ø}12 \quad (2,26\text{cm}^2, b_{\text{mín}} = 13\text{cm})$$

$$A_{s1} = 11,84 \text{ cm}^2 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{6\text{Ø}16} & (12,06\text{cm}^2, b_{\text{mín}} = 28\text{cm}) \\ \boxed{4\text{Ø}20} & (12,57\text{cm}^2, b_{\text{mín}} = 23\text{cm}) \end{cases}$$



**Nota:**

El dimensionamiento de esta sección imponiendo que  $A_{s2} = 0$ ; es decir, como si se tratase del caso D.F.S.I sería:

De la ecuación de equilibrio de momentos obtendríamos la profundidad de la fibra neutra:

$$\xi = 1,25 \left(1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \mu_1}\right) = 1,25 \left(1 - \sqrt{1 - 2 \cdot 0,456}\right) = 0,879 (> \xi_{\text{lim}})$$

Con esta profundidad de la fibra neutra la sección se agota en el dominio 4, donde la armadura inferior no trabaja a su límite elástico, por lo que la ecuación de equilibrio de fuerzas quedaría de la forma:

$$0 = 0,8 \cdot \xi - \rho_1 \cdot \omega_1 \Rightarrow \rho_1 \cdot \omega_1 = 0,8 \cdot 0,879 \Rightarrow \rho_1 \cdot \omega_1 = 0,703$$

La tensión con la que trabaja la armadura inferior la obtenemos de la ecuación de compatibilidad en el dominio 4:

$$\rho_1 = \frac{700}{f_{yd}} \frac{1 - \xi}{\xi} = \frac{700}{434,8} \frac{1 - 0,879}{0,879} \Rightarrow \rho_1 = 0,222$$

y por lo tanto la cuantía de acero será:

$$\omega_1 = \frac{0,703}{\rho_1} = \frac{0,703}{0,222} \Rightarrow \omega_1 = 3,16$$

y la armadura de cálculo en tracción será:

$$\omega_1 = \frac{A_{s1} \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} \Rightarrow A_{s1} = \omega_1 \frac{b \cdot d \cdot f_{cd}}{f_{yd}} = 3,16 \frac{25 \cdot 24 \cdot 14,2}{434,8} \Rightarrow A_{s1} = 61,83 \text{ cm}^2$$

obteniéndose una armadura de cálculo muy superior a la óptima ( $61,83 \gg 11,84 + 2,20$ )

## **PROBLEMA 08-002**

Determinar el momento flector de agotamiento (flexión simple) de la sección indicada en la figura para las armaduras indicadas en la siguiente tabla:

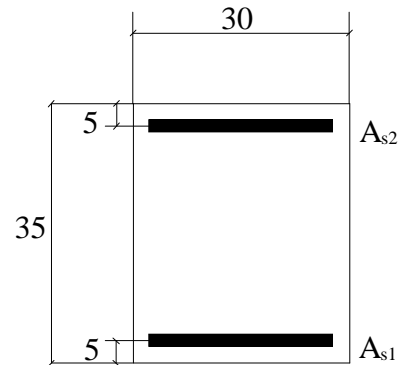
	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
A <sub>s2</sub>	4Ø16	2Ø16	-	-	-	-	-	2Ø16	2Ø20
A <sub>s1</sub>	2Ø16	2Ø16	2Ø16	4Ø16	6Ø16	5Ø25	5Ø25 + 2Ø16	5Ø25	5Ø25

### **Datos:**

Hormigón: HA-25

Acero: B 400S

Situación: Persistente



### **Valores de cálculo**

Los coeficientes parciales de seguridad, según la Ficha 05 (seguridad), serán:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Estado Límite Último} \\ \text{Situación persistente} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \gamma_c = 1,50 \\ \gamma_s = 1,15 \end{array} \right.$$

➤ Resistencia de cálculo del hormigón:  $f_{cd} = \alpha_{cc} \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = 0,85 \frac{25}{1,50} = 14,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

➤ Resistencia de cálculo del acero:  $f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{400}{1,15} = 347,8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

### **Cálculo de las variables dimensionales**

Las variables dimensionales serán:

$$\delta_2 = \frac{d_2}{d}$$

$$\mu_1 = \frac{M_u}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}}$$

$$\omega_1 = \frac{A_{s1} \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} \text{ y } \omega_2 = \frac{A_{s2} \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}}$$

de las cuales las que son datos en el problema de comprobación son:

$$\delta_2 = \frac{d_2}{d} = \frac{5}{35-5} = 0,17$$

		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Armadura superior	$A_{s2}$	4Ø16	2Ø16	-	-	-	-	-	2Ø16	2Ø20
	Sección [cm <sup>2</sup> ]	8,04	4,02	-	-	-	-	-	4,02	6,28
	$\omega_2 = \frac{A_{s2} \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}}$	0,219	0,110	-	-	-	-	-	0,110	0,171
Armadura inferior	$A_{s1}$	2Ø16	2Ø16	2Ø16	4Ø16	6Ø16	5Ø25	5Ø25 + 2Ø16	5Ø25	5Ø25
	Sección [cm <sup>2</sup> ]	4,02	4,02	4,02	8,04	12,06	24,54	28,56	24,54	24,54
	$\omega_1 = \frac{A_{s1} \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}}$	0,110	0,110	0,110	0,219	0,329	0,670	0,779	0,670	0,670

### Cálculo de los valores límites

De la Ficha 07 se obtienen:

$\xi_{lim}$	0,668
$\nu_{lim}$	0,534
$\mu_{lim}$	0,392

o bien analíticamente:

$$\xi_{lim} = \frac{1}{1 + 1,43 \cdot 10^{-3} \cdot f_{yd}} \Rightarrow \begin{cases} \nu_{lim} = 0,8 \cdot \xi_{lim} \\ \mu_{lim} = 0,8 \cdot \xi_{lim} \cdot (1 - 0,5 \cdot \xi_{lim}) \end{cases}$$

### Cálculo de $\xi^*$

Empezamos suponiendo que  $\xi^*$  se va a alcanzar en el dominio 2, en cuyo caso :

$$\xi^* = \frac{f_{yd} + 2.000 \cdot \delta_2}{f_{yd} + 2.000} \Rightarrow \xi^* = 0,290 < 0,290 \text{ (Límite Dominio 2)}$$

Como  $\xi^* = 0,290 > 0,259$ , este valor es erróneo y tenemos que calcularlo utilizando la expresión correspondiente a los dominios 3 y 4 :

$$\xi^* = \frac{700 \cdot \delta_2}{700 - f_{yd}} \Rightarrow 0,331$$

**Determinación del momento de agotamiento**

❶  $\omega_1 - \omega_2 = -0,110 < 0 \Rightarrow$  CFS - I

$$\mu_1 = \omega_1(1 - \delta_2) = 0,110(1 - 0,17) \Rightarrow \mu_1 = 0,091$$

$$M_1 = \mu_1 \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{cd} = 0,091 \cdot 0,30 \cdot 0,30^2 \cdot 14,2 = 0,035 \text{ MN} \cdot \text{m} \Rightarrow M_u = 35 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

Si no despreciamos la contribución del hormigón, y realizamos la comprobación como en el caso de CFS-II, tendremos:

$$\xi' = \frac{\omega_1 - \omega_2}{0,8} < 0 \Rightarrow \text{iteramos en el intervalo: } \begin{cases} \xi_{inf} = 0 \\ \xi_{sup} = \xi^* = 0,331 \end{cases}$$

$\xi''$	$\xi'' \leq 0,259 \Rightarrow \rho''_2 = \frac{2.000}{f_{yd}} \frac{\xi'' - \delta_2}{1 - \xi''}$ $\xi'' > 0,259 \Rightarrow \rho''_2 = \frac{700}{f_{yd}} \frac{\xi'' - \delta_2}{\xi''}$	error = $0,8 \cdot \xi'' + \rho''_2 \cdot \omega_2 - \omega_1$	$\xi_{inf}$	$\xi_{sup}$
			0,0000	0,3313
0,1656	-0,007	0,021	0,0000	0,1656
0,0828	-0,526	-0,159	0,0828	0,1656
0,1242	-0,279	-0,071	0,1242	0,1656
0,1449	-0,146	-0,026	0,1449	0,1656
0,1553	-0,077	-0,002	0,1553	0,1656
0,1605	-0,042	0,009	0,1553	0,1605
0,1579	-0,060	0,003	0,1553	0,1579
0,1566	-0,069	0,000	0,1553	0,1566

$$\left. \begin{matrix} \xi = 0,157 \\ \rho_2 = -0,069 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \mu_1 = 0,8 \cdot \xi \cdot (1 - 0,4 \cdot \xi) + \rho_2 \cdot \omega_2 \cdot (1 - \delta_2) \Rightarrow \mu_1 = 0,105$$

$$M_1 = \mu_1 \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{cd} = 0,105 \cdot 0,30 \cdot 0,30^2 \cdot 14,2 = 0,040 \text{ MN} \cdot \text{m} \Rightarrow M_u = 40 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

❷  $\omega_1 - \omega_2 = 0 \Rightarrow$  CFS - I

Se obtienen los mismos valores que en el caso anterior, al ser la armadura de tracción la misma:

$$\mu_1 = \omega_1(1 - \delta_2) = 0,110(1 - 0,17) \Rightarrow \mu_1 = 0,091 \Rightarrow M_u = 35 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

Si de nuevo NO despreciamos la contribución del hormigón, y realizamos la comprobación como en el caso de CFS-II, tendremos:

$$\xi' = \frac{\omega_1 - \omega_2}{0,8} = 0 \Rightarrow \text{iteramos en el intervalo: } \begin{cases} \xi_{\text{inf}} = 0 \\ \xi_{\text{sup}} = \xi^* = 0,331 \end{cases}$$

$\xi''$	$\xi'' \leq 0,259 \Rightarrow \rho''_2 = \frac{2.000 \xi'' - \delta_2}{f_{yd} (1 - \xi'')}$ $\xi'' > 0,259 \Rightarrow \rho''_2 = \frac{700 \xi'' - \delta_2}{f_{yd} \xi''}$	error = $0,8 \cdot \xi'' + \rho''_2 \cdot \omega_2 - \omega_1$	$\xi_{\text{inf}}$	$\xi_{\text{sup}}$
			0,0000	0,3313
0,1656	-0,007	0,022	0,0000	0,1656
0,0828	-0,526	-0,101	0,0828	0,1656
0,1242	-0,279	-0,041	0,1242	0,1656
0,1449	-0,146	-0,010	0,1449	0,1656
0,1553	-0,077	0,006	0,1449	0,1553
0,1501	-0,112	-0,002	0,1501	0,1553
0,1527	-0,095	0,002	0,1501	0,1527
0,1514	-0,103	0,000	0,1514	0,1527

$$\left. \begin{matrix} \xi = 0,151 \\ \rho_2 = -0,103 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \mu_1 = 0,8 \cdot \xi \cdot (1 - 0,4 \cdot \xi) + \rho_2 \cdot \omega_2 \cdot (1 - \delta_2) \Rightarrow \mu_1 = 0,104$$

$$M_1 = \mu_1 \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{cd} = 0,104 \cdot 0,30 \cdot 0,30^2 \cdot 14,2 = 0,040 \text{ MN} \cdot \text{m} \Rightarrow M_u = 40 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

③  $\omega_1 - \omega_2 = 0,110 < v_{\text{lim}} = 0,534 \Rightarrow \text{CFS - II}$

Además como no existe armadura de compresión,  $\omega_2 = 0$ , nos encontramos en el caso de CFS-II.a, donde la profundidad de la fibra neutra viene dada por:

$$\xi = \frac{\omega_1}{0,8} = \frac{0,110}{0,8} \Rightarrow \xi = 0,137$$

y el momento de agotamiento vale:

$$\mu_1 = 0,8 \cdot \xi \cdot (1 - 0,4 \cdot \xi) \Rightarrow \mu_1 = 0,104$$

$$M_1 = \mu_1 \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{cd} = 0,104 \cdot 0,30 \cdot 0,30^2 \cdot 14,2 = 0,040 \text{ MN} \cdot \text{m} \Rightarrow M_u = 40 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

④  $\omega_1 - \omega_2 = 0,219 < v_{\text{lim}} = 0,534 \Rightarrow \text{CFS - II}$

Al igual que el caso anterior, al no existir armadura de compresión,  $\omega_2 = 0$ , nos encontramos en el caso de CFS-II.a, donde la profundidad de la fibra neutra viene dada por:

$$\xi = \frac{\omega_1}{0,8} = \frac{0,214}{0,8} \Rightarrow \xi = 0,274$$

y el momento de agotamiento vale:

$$\mu_1 = 0,8 \cdot \xi \cdot (1 - 0,4 \cdot \xi) \Rightarrow \mu_1 = 0,195 \Rightarrow M_u = 75 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

$$\textcircled{5} \quad \omega_1 - \omega_2 = 0,329 < v_{\text{lím}} = 0,534 \Rightarrow \text{CFS - II}$$

De la misma forma que en los dos casos anteriores nos encontramos en el caso de CFS-II.a, y se tiene:

$$\xi = \frac{\omega_1}{0,8} = \frac{0,329}{0,8} \Rightarrow \xi = 0,411$$

y el momento de agotamiento vale:

$$\mu_1 = 0,8 \cdot \xi \cdot (1 - 0,4 \cdot \xi) \Rightarrow \mu_1 = 0,275 \Rightarrow M_u = 105 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

$$\textcircled{6} \quad \omega_1 - \omega_2 = 0,670 > v_{\text{lím}} = 0,534 \Rightarrow \text{CFS - III}$$

Nos encontramos en el CFS-III. En esta situación la sección se va a agotar en dominio 4, donde la armadura de tracción no trabaja a su límite elástico. Es necesario iterar en el intervalo definido por  $\xi_{\text{inf}} = \xi_{\text{lím}}$  y  $\xi_{\text{sup}} = \xi' < 1$ . La cota superior será:

$$\xi' = \frac{\omega_1 - \omega_2}{0,8} = \frac{0,670}{0,8} \Rightarrow \xi' = 0,837$$

y la iteración será:

$\xi''$	$\rho''_1 = \frac{700}{f_{yd}} \frac{1 - \xi''}{\xi''}$	error = $0,8 \cdot \xi'' + \omega_2 - \rho''_1 \cdot \omega_1$	$\xi_{\text{inf}}$	$\xi_{\text{sup}}$
			0,6680	0,8370
0,7524	0,662	0,158	0,6678	0,7524
0,7101	0,822	0,018	0,6678	0,7101
0,6890	0,909	-0,057	0,6890	0,7101
0,6995	0,864	-0,019	0,6995	0,7101
0,7048	0,843	0,000	0,7048	0,7101

$$\xi = 0,705 \Rightarrow \mu_1 = 0,8 \cdot \xi \cdot (1 - 0,4 \cdot \xi) + \rho''_2 \cdot (1 - \delta_2) = 0,405 \Rightarrow M_u = 155 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

En este dominio la armadura de tracción ( $A_{s1}$ ) no se aprovecha al máximo, al trabajar por debajo de su resistencia de cálculo  $f_{yd} = 347,8 \text{ MPa}$ . La tensión en el agotamiento de esta armadura será:  $\sigma_{s1} = \rho_1 \cdot f_{yd} = 0,842 \cdot 347,8 = 292,8 \text{ MPa}$

$$\textcircled{7} \quad \omega_1 - \omega_2 = 0,779 > v_{\text{lím}} = 0,534 \Rightarrow \text{CFS - III}$$

Al aumentar la armadura de tracción, el eje neutro aumenta aún más y por lo tanto seguiremos encontrándonos, al igual que en el caso  $\textcircled{6}$ , en el CFS-III, donde tenemos que iterar en el intervalo definido por  $\xi_{\text{inf}} = \xi_{\text{lím}}$  y  $\xi_{\text{sup}} = \xi' < 1$ . La cota superior será:

$$\xi' = \frac{\omega_1 - \omega_2}{0,8} = \frac{0,779}{0,8} \Rightarrow \xi' = 0,974$$

y la iteración será:

$\xi''$	$\rho''_1 = \frac{700(1-\xi'')}{f_{yd} \xi''}$	error = $0,8 \cdot \xi'' + \omega_2 - \rho''_1 \cdot \omega_1$	$\xi_{\text{inf}}$	$\xi_{\text{sup}}$
			0,6678	0,9740
0,9741	0,054	0,738	0,6678	0,9741
0,8210	0,439	0,315	0,6678	0,8210
0,7444	0,691	0,057	0,6678	0,7444
0,7061	0,838	-0,088	0,7061	0,7444
0,7253	0,762	-0,014	0,7253	0,7444
0,7348	0,726	0,022	0,7253	0,7348
0,7300	0,744	0,004	0,7253	0,7300
0,7276	0,753	-0,005	0,7276	0,7300
0,7288	0,749	0,000	0,7288	0,7300

$$\xi = 0,729 \Rightarrow \mu_1 = 0,8 \cdot \xi \cdot (1 - 0,4 \cdot \xi) + \omega_2 \cdot (1 - \delta_2) = 0,413 \Rightarrow M_u = 158 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

Observamos que efectivamente la profundidad del eje neutro aumenta (pasamos de  $\xi = 0,705$  a  $\xi = 0,729$ ), pero sin embargo el incremento en el momento de agotamiento es prácticamente despreciable (pasamos de  $M_u = 155 \text{ KN} \cdot \text{m}$  a  $M_u = 158 \text{ KN} \cdot \text{m}$ ). La justificación de esto es que la nueva armadura introducida ( $2\text{Ø}16$ ) no trabaja a su resistencia de cálculo y, además, hace que la anteriormente dispuesta ( $5\text{Ø}25$ ) disminuya también su resistencia. Efectivamente, la nueva tensión en el agotamiento de la armadura de tracción ( $5\text{Ø}25+2\text{Ø}16$ ) será:  $\sigma_{s1} = \rho_1 \cdot f_{yd} = 0,749 \cdot 347,8 = 260,4 \text{ MPa}$ .

Se puede aprovechar mejor el acero si introducimos la armadura  $2\text{Ø}16$  como armadura de compresión en vez de tracción, como se verá en el caso siguiente.

$$\textcircled{8} \quad \omega_1 - \omega_2 = 0,560 > v_{\text{lím}} = 0,534 \Rightarrow \text{CFS - III}$$

Al igual que en el caso  $\textcircled{6}$  nos encontramos en el CFS-III, donde tenemos que iterar en el intervalo definido por  $\xi_{\text{inf}} = \xi_{\text{lím}}$  y  $\xi_{\text{sup}} = \xi' < 1$ . La cota superior será:

$$\xi' = \frac{\omega_1 - \omega_2}{0,8} = \frac{0,560}{0,8} \Rightarrow \xi' = 0,6998$$

y la iteración será:

$\xi''$	$\rho''_1 = \frac{700(1-\xi'')}{f_{yd} \xi''}$	error = $0,8 \cdot \xi'' + \omega_2 - \rho''_1 \cdot \omega_1$	$\xi_{\text{inf}}$	$\xi_{\text{sup}}$
			0,6680	0,6998
0,6998	0,863	0,092	0,6678	0,6998
0,6838	0,930	0,034	0,6678	0,6838
0,6758	0,965	0,004	0,6678	0,6758
0,6718	0,983	-0,011	0,6718	0,6758
0,6738	0,974	-0,004	0,6738	0,6758
0,6748	0,970	0,000	0,6738	0,6748

$$\xi = 0,675 \Rightarrow \mu_1 = 0,8 \cdot \xi \cdot (1 - 0,4 \cdot \xi) + \omega_2 \cdot (1 - \delta_2) = 0,483 \Rightarrow M_u = 185 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

Si analizamos los tres últimos ejemplos observamos que con un incremento de acero igual ( $2\text{Ø}16$ ) obtenemos un mayor incremento en el momento de agotamiento en el caso  $\textcircled{8}$  que en el  $\textcircled{7}$  ( $M_u = 185 \text{ MPa}$  frente a  $M_u = 158 \text{ MPa}$ ). La justificación de esto es que en esta ocasión la armadura introducida en compresión (al mantenerse constante la armadura de tracción) hace que el hormigón deba soportar menos compresiones, disminuye su fibra neutra y consecuentemente aumenta la deformación de la armadura de tracción. Este último aumento de deformación hace finalmente que la tensión del acero de tracción se acerque a su resistencia de cálculo:  $\sigma_{s1} = \rho_1 \cdot f_{yd} = 0,970 \cdot 347,8 = 337,4 \text{ MPa}$ . Además, la armadura introducida en compresión, al agotarse la sección en dominio 4 trabaja a su resistencia de cálculo.

Si seguimos aumentando la armadura de compresión, la profundidad del eje neutro seguirá disminuyendo, hasta que se alcance el dominio 3, donde los dos grupos de armaduras, de tracción y compresión, trabajarán a su límite elástico. Esto sucede por ejemplo en el caso siguiente.

$$\textcircled{9} \quad \omega_1 - \omega_2 = 0,498 < v_{\text{lím}} = 0,534 \Rightarrow \text{CFS - II}$$

Nos encontramos en el caso de CFS-II donde la sección se va a agotar en el dominio 2 ó 3. Como tenemos armadura de compresión,  $\omega_2 \neq 0$ , nos encontramos en el caso CFS-II.b. Primeramente debemos determinar la profundidad de la fibra neutra en el supuesto de que las dos armaduras, la de compresión y la de tracción, se encuentran trabajando a su límite elástico (esto será cierto para la armadura de tracción, pero puede no serlo para la de compresión). Esta profundidad de la fibra neutra será:

$$\xi' = \frac{\omega_1 - \omega_2}{0,8} = \frac{0,498}{0,8} \Rightarrow \xi' = 0,623 > \xi^* = 0,331$$

al ser  $\xi' > \xi^*$ , la suposición de que las dos armaduras trabajan a su límite elástico es cierta, y por lo tanto la profundidad de la fibra neutra en el agotamiento será:

$$\xi = 0,623$$

Por último el momento de agotamiento será:

$$\mu_1 = 0,8 \cdot \xi \cdot (1 - 0,4 \cdot \xi) + \omega_2 \cdot (1 - \delta_2) = 0,517 \Rightarrow M_u = 197 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

### Resumen

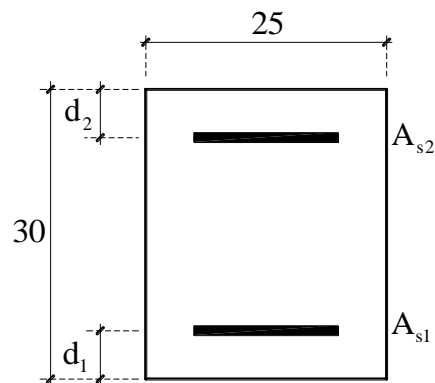
En la tabla siguiente se muestra la evolución de la profundidad de la fibra neutra,  $\xi$ , y el momento de agotamiento,  $M_u$ , para los distintos casos analizados:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$A_{s2}$	4Ø16	2Ø16	-	-	-	-	-	2Ø16	2Ø20
$A_{s1}$	2Ø16	2Ø16	2Ø16	4Ø16	6Ø16	5Ø25	5Ø25 + 2Ø16	5Ø25	5Ø25
$\xi$	0,157	0,151	0,137	0,274	0,411	0,837	0,974	0,675	0,623
$M_u$ [KN·m]	40	40	40	75	105	155	158	184	197

### **PROBLEMA 08-003**

Dimensionar la sección indicada en la figura para las solicitaciones variables, actuando simultáneamente, indicadas en la siguiente tabla:

	$M_Q$ [kN · m]	$N_Q$ [kN]	$e_0$ [cm]
❶	10	100	10
❷	30	100	30
❸	50	100	50
❹	20	400	5
❺	50	600	8



#### **Datos:**

Hormigón: HA-25 (Con cemento CEM I)

Acero: B 500S

Vida útil de proyecto: 100 años

Situación: Persistente

Ambiente: IIa

Sección perteneciente a un pilar

#### **Valores de cálculo**

De igual forma que en el problema N°1, de la Ficha 05 (seguridad), se obtiene:

- Coeficientes parciales de seguridad para materiales:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Estado Límite Último} \\ \text{Situación persistente} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \gamma_c = 1,50 \\ \gamma_s = 1,15 \end{array} \right.$$

- Coeficientes parciales de seguridad para acciones:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Estado Límite Último} \\ \text{Situación persistente} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Efecto Favorable} \left\{ \begin{array}{l} \gamma_G = 1,00 \\ \gamma_Q = 0,00 \end{array} \right. \\ \text{Efecto Desfavorable} \left\{ \begin{array}{l} \gamma_G = 1,35 \\ \gamma_Q = 1,50 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

y por lo tanto los valores de cálculo serán:

- Resistencia de cálculo del hormigón:  $f_{cd} = \alpha_{cc} \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = 0,85 \frac{25}{1,50} = 14,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$
- Resistencia de cálculo del acero:  $f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{500}{1,15} = 434,8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$
- Esfuerzos de cálculo:  $M_d = M_Q \cdot \gamma_Q$  y  $N_d = N_Q \cdot \gamma_Q$

	$M_d$ [kN · m]	$N_d$ [kN]
❶	15	150
❷	45	150
❸	75	150
❹	30	600
❺	75	900
❻	75	1500

### Cálculo de las cuantías límites

Según la Ficha 06 (cuantías límites):

### **Armaduras mínimas geométricas**

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tipo de acero: B500S} \\ \text{Tipo de elemento estructural: Pilar} \end{array} \right\} \Rightarrow A_s \geq \frac{4}{1000} A_c$$

donde  $A_s$  es la armadura longitudinal total:  $A_s = A_{s1} + A_{s2}$

Por lo tanto las armaduras geométricas mínimas que se han de colocar en la sección de hormigón serán:

$$A_{s,\text{mín g}} = \frac{4}{1000} 25 \cdot 30 = 3,00 \text{cm}^2$$

### Armaduras mínimas mecánicas

Por tratarse de un problema de flexión<sup>1</sup>, las armaduras mínimas tendrán que cumplir:

$$A_{s1} \geq 0,04 \frac{b \cdot h \cdot f_{cd}}{f_{yd}}$$

$$A_{s2} \geq 0,05 \frac{N_d}{f_{yd}}$$

Sustituyendo valores se obtiene, en función del axil de cálculo las armaduras mínimas que se indican en la Tabla 1.

$N_d$ [kN]	$A_{s2,mín}$ [cm <sup>2</sup> ]	$A_{s1,mín}$ [cm <sup>2</sup> ]
150	0,17	0,98
600	0,69	
900	1,04	
1500	1,73	
Tabla 1		

### Armaduras mínimas definitivas:

Finalmente, las armaduras mínimas serán las que resulten mayores de las calculadas anteriormente, y que serán, en función del axil de cálculo, las que se indican en la Tabla 2, donde  $A_{s,mín}$  es la armadura longitudinal **total** mínima a disponer.

$N_d$ [kN]	$A_{s2,mín}$ [cm <sup>2</sup> ]	$A_{s1,mín}$ [cm <sup>2</sup> ]	$A_{s,mín}$ [cm <sup>2</sup> ]
150	0,17	0,98	3,00
600	0,69		
900	1,04		
1500	1,73		
Tabla 2			

### Armaduras máximas:

Siguiendo las recomendaciones del Código Modelo CEB-FIP, y en el supuesto de flexión, consideraremos unas cuantías máximas que vendrán dadas por:

$$A_{s1,máx} \leq 0,04 \cdot A_c$$

$$A_{s2,máx} \leq 0,04 \cdot A_c$$

<sup>1</sup> Según el criterio de que las solicitaciones con excentricidad  $e_0 < \frac{h}{4} = 7,5$  cm corresponden a compresión compuesta, el problema 4 NO correspondería, en principio, a solicitaciones de flexión. Sin embargo, vamos a suponer que nos encontramos en problemas de flexión y una vez realizado los cálculos comprobamos esta suposición.

y por lo tanto estas armaduras serán:

$$A_{s1,m\acute{a}x} = A_{s2,m\acute{a}x} = 0,04 \cdot 25 \cdot 30 = 30\text{cm}^2$$

### Cálculo de los recubrimientos

Al igual que el problema N°1:

$$d_{pp} \geq \varnothing^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ambiente: IIa} \\ f_{ck} = 25 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ \text{Vida útil proyecto: 100 años} \\ \text{Cemento: CEM I} \\ \text{Elemento in situ, Control Normal} \Rightarrow \Delta r = 1\text{cm} \end{array} \right\} \Rightarrow r_{\text{mín}} = 2,5\text{cm} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Ambiente: IIa} \\ f_{ck} = 25 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ \text{Vida útil proyecto: 100 años} \\ \text{Cemento: CEM I} \\ \text{Elemento in situ, Control Normal} \Rightarrow \Delta r = 1\text{cm} \end{array}} \right\} \Rightarrow r = 3,5\text{cm}$$

y suponiendo que  $\varnothing_t \leq 8 \text{ mm}$  y  $\varnothing \leq 25 \text{ mm}$  (téngase en cuenta que estamos en un problema de dimensionamiento y todavía no se conocen las armaduras, por lo que es necesario estimar el diámetro de éstas), se tiene:

$$d_2 = d_1 \geq \left\{ \begin{array}{l} r + \varnothing_t + \frac{1}{2}\varnothing = 3,5 + 0,8 + \frac{1}{2}2,5 = 5,5\text{cm} \\ d_{pp} + \frac{1}{2}\varnothing = 2,5 + \frac{1}{2}2,5 = 3,7\text{cm} \end{array} \right\} \Rightarrow d_2 = d_1 = 5,5\text{cm}$$

### Cálculo de las variables adimensionales

Las variables adimensionales serán:

$$\delta_2 = \frac{d_2}{d}$$

$$\mu_1 = \frac{M_1}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}} \text{ con } M_1 = M_d + N_d \cdot \left( d - \frac{h}{2} \right) \quad \text{y} \quad v = \frac{N_d}{b \cdot d \cdot f_{cd}}$$

<sup>2</sup> No consideramos el tamaño máximo del árido porque lo normal es fijar éste en función de las distancias a los paramentos y distancias entre armaduras.

$$\omega_1 = \frac{A_{s1} \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} \quad y \quad \omega_2 = \frac{A_{s2} \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}}$$

de las cuales las que son datos en el problema de dimensionamiento son:

$$\delta_2 = \frac{d_2}{d} = \frac{5,5}{30 - 5,5} = 0,22$$

	$N_d$ [kN]	$v = \frac{N_d}{b \cdot d \cdot f_{cd}}$	$M_d$ [kN·m]	$M_1 = M_d + N_d \cdot \left(d - \frac{h}{2}\right)$ [Kn·m]	$\mu_1 = \frac{M_1}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}}$
❶	150	0,173	15	29,25	0,138
❷	150	0,173	45	59,25	0,279
❸	150	0,173	75	89,25	0,420
❹	600	0,691	30	87,00	0,409
❺	900	1,037	75	160,50	0,755

### Cálculo de los valores límites

De la Ficha 07 se obtienen:

$\xi_{\text{lím}}$	0,617
$v_{\text{lím}}$	0,493
$\mu_{\text{lím}}$	0,372

o bien analíticamente:

$$\xi_{\text{lím}} = \frac{1}{1 + 1,43 \cdot 10^{-3} \cdot f_{yd}} \Rightarrow \begin{cases} v_{\text{lím}} = 0,8 \cdot \xi_{\text{lím}} \\ \mu_{\text{lím}} = 0,8 \cdot \xi_{\text{lím}} \cdot (1 - 0,4 \cdot \xi) \end{cases}$$

❶  $v = 0,173$

$$\mu_1 = 0,138 < \mu_{\text{lím}} = 0,372 \Rightarrow \text{D.F.C-I}$$

Como el hormigón por si solo es capaz de absorber el momento exterior no es necesario colocar armadura de compresión  $\Rightarrow \omega_2 = 0$ .

La profundidad de la fibra neutra será:

$$\xi = 1,25(1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \mu_1}) = 1,25(1 - \sqrt{1 - 2 \cdot 0,138}) = 0,186 (< \xi_{lim})$$

y sustituyendo esta profundidad de la fibra neutra en la ecuación de equilibrio de fuerzas, queda para la armadura inferior:

$$\omega_1 = 0,8 \cdot \xi - v = 0,8 \cdot 0,186 - 0,173 = -0,024$$

Vamos a analizar los resultados que hemos obtenido. Para que el hormigón absorba el momento exterior  $\mu_1 = 0,138$  es necesario que la profundidad de la fibra neutra sea  $\xi = 0,186$ , para la cual, la resultante del paquete de compresiones es  $v_{cu} = 0,149$ , menor que el axil exterior,  $v = 0,173$ , y por lo tanto, la

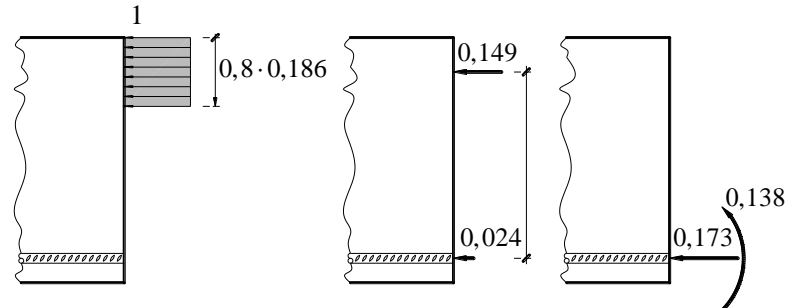


Fig. 1

armadura inferior tiene que trabajar a compresión para ayudar al hormigón a absorber este axil exterior. Como esto no es posible, la solución (de cálculo teórica) consiste en no disponer armadura. En esta situación, el hormigón evoluciona para absorber por sí solo el axil exterior aumentando la profundidad de la fibra neutra y, por lo tanto, aportando un momento mayor que el exterior. Efectivamente, de las ecuaciones de equilibrio se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} v &= 0,8 \cdot \xi \\ \mu_1 &= 0,8 \cdot \xi \cdot (1 - 0,4 \cdot \xi) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \xi = \frac{v}{0,8} = \frac{0,173}{0,8} = 0,216 \Rightarrow \mu_1 = 0,158 > 0,138$$

Por el contrario, si obligamos a que la sección se agote manteniendo el momento exterior, resulta que el axil de agotamiento es menor que el de cálculo. Efectivamente, para que la sección de hormigón absorba el momento exterior la profundidad de la fibra neutra tiene que ser (como hemos calculado anteriormente)  $\xi = 0,186$ , que equilibra el axil exterior:  $v = 0,8 \cdot \xi = 0,149 < 0,173$ . Además de esta situación de agotamiento la sección puede alcanzar una tercera manteniendo el momento exterior y soportando en este caso la sección un axil mucho mayor que el de cálculo.

Para estudiar estas tres situaciones de agotamiento planteamos las ecuaciones de equilibrio de la sección bruta de hormigón respecto al baricentro de la misma y adimensionalizando con el canto total h (Fig. 2):

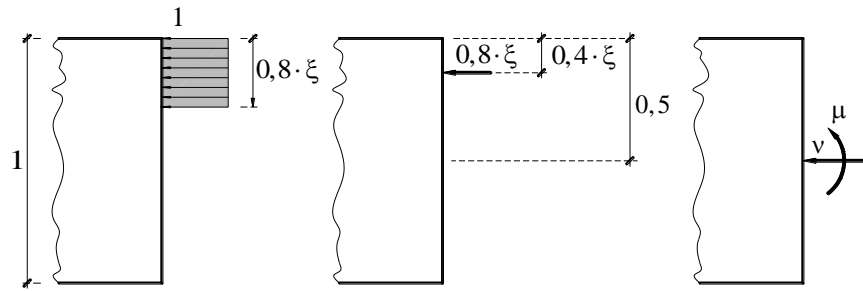


Fig. 2

$$\left. \begin{aligned} v &= 0,8 \cdot \xi \\ \mu &= \underbrace{0,8 \cdot \xi \cdot (0,5 - 0,4 \cdot \xi)}_{\mu_{cu0}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \xi = \frac{v}{0,8} \Rightarrow \mu = 0,5 \cdot v \cdot (1 - v)$$

con:

$$\bullet \quad v = \frac{N_d}{b \cdot h \cdot f_{cd}} \quad \bullet \quad \mu = \frac{M_d}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}} \quad \bullet \quad \xi = \frac{x}{h}$$

En la Fig. 3 se ha representado la curva  $\mu = \mu(v)$  que representa la respuesta del hormigón en agotamiento, y que tiene como puntos representativos:

- El momento se hace nulo para los puntos:
  - ①  $v = 0$  ( $\xi = 0$ )
  - ②  $v = 1$  ( $\xi \geq 1,25$ )<sup>3</sup>
- El máximo momento que es capaz de absorber el hormigón vale  $\mu = 0,125$ , que corresponde al punto:
  - ③  $v = 0,5$  ( $\xi = 0,625$ )

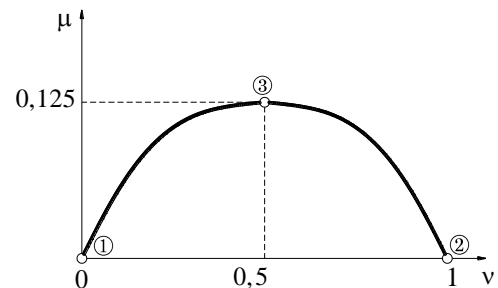


Fig. 3

<sup>3</sup> A partir de  $x > h$  ( $\xi > 1$ ) las ecuaciones de equilibrio utilizadas, en flexión, dejan de ser ciertas, ya que en compresión la profundidad de la fibra neutra es  $y = \left(1 - 0,2 \cdot \frac{h}{x}\right) \cdot h$ . En cualquier caso, este punto ②  $v = 1$  se produce igualmente, pero para una profundidad  $\xi = \infty$ .

En la Fig. 4 se han representado la situación de cálculo de la sección (punto ①) y las tres situaciones de agotamiento. El punto ② corresponde a la situación donde se mantiene el axil de cálculo y la ③ y ④ las que se obtienen manteniendo el momento de cálculo. Los valores numéricos son:

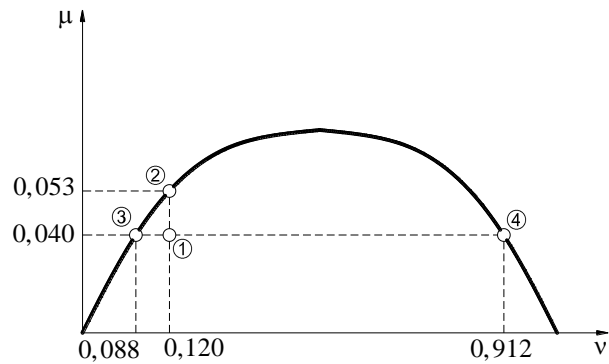


Fig. 4

- Situación de cálculo:

$$v = \frac{N_d}{b \cdot h \cdot f_{cd}} = 0,120 \quad \textcircled{1}$$

$$\mu = \frac{M_d}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}} = 0,040$$

- Situación de agotamiento con axil último igual al de cálculo:

$$\left. \begin{aligned} v &= 0,8 \cdot \xi \Rightarrow \xi = \frac{v}{0,8} = 0,150 \\ \mu &= 0,8 \cdot \xi \cdot (0,5 - 0,4 \cdot \xi) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mu = 0,053 \quad \textcircled{2}$$

- Situación de agotamiento con momento último igual al de cálculo:

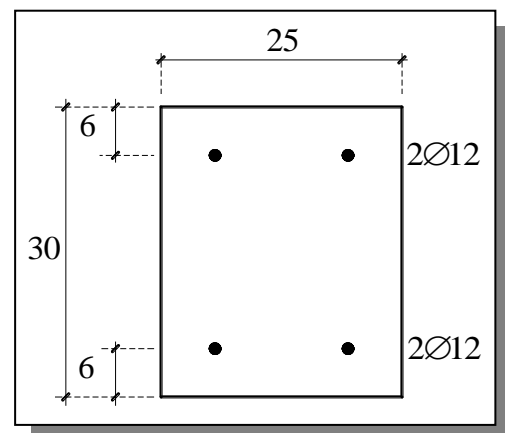
$$v = 0,8 \cdot \xi$$

$$\mu = 0,8 \cdot \xi \cdot (0,5 - 0,4 \cdot \xi) \Rightarrow \xi = 0,625 \left( 1 \mp \sqrt{1 - 8 \cdot \mu} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \xi &= 0,110 \\ \xi &= 1,140 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} v &= 0,088 \quad \textcircled{3} \\ v &= 0,912 \quad \textcircled{4} \end{aligned} \right.$$

En resumen la sección NO SE AGOTA para los esfuerzos dados, y las armaduras que disponemos son las mínimas<sup>4</sup>:

$$A_{s2} = 1,50 \text{ cm}^2 \Rightarrow \left\{ 2\text{Ø}12 \right\} \left( 2,26 \text{ cm}^2, b_{\text{mín}} = 13 \text{ cm} \right)$$

$$A_{s1} = 1,50 \text{ cm}^2 \Rightarrow \left\{ 2\text{Ø}12 \right\} \left( 2,26 \text{ cm}^2, b_{\text{mín}} = 13 \text{ cm} \right)$$



<sup>4</sup> Se han colocado barras Ø12 debido a que la Instrucción EHE establece este diámetro como diámetro mínimo para soportes.

$$\textcircled{2} \quad v = 0,173$$

$$\mu_1 = 0,279 < \mu_{\text{lím}} = 0,372 \Rightarrow \text{D.F.C - I}$$

Al igual que en el caso anterior no es necesaria la armadura de compresión  $\Rightarrow \omega_2 = 0$ .

La profundidad de la fibra neutra será:

$$\xi = 11,25 \left(1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \mu_1}\right) = 1,25 \left(1 - \sqrt{1 - 2 \cdot 0,279}\right) = 0,418 (< \xi_{\text{lím}})$$

y sustituyendo esta profundidad de la fibra neutra en la ecuación de equilibrio de fuerzas, queda para la armadura inferior:

$$\omega_1 = 0,8 \cdot \xi - v = 0,8 \cdot 0,418 - 0,173 = 0,162$$

Las armaduras de cálculo serán:

$$\omega_1 = \frac{A_{s1} \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} \Rightarrow A_{s1} = \omega_1 \frac{b \cdot d \cdot f_{cd}}{f_{yd}} = 0,162 \frac{25 \cdot 24,5 \cdot 14,2}{434,8} \Rightarrow A_{s1} = 3,23 \text{ cm}^2$$

$$\omega_2 = \frac{A_{s2} \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} \Rightarrow A_{s2} = 0 \text{ cm}^2$$

Finalmente las armaduras que son necesarias disponer serán las mayores entre las mínimas y las de cálculo; es decir<sup>4</sup>:

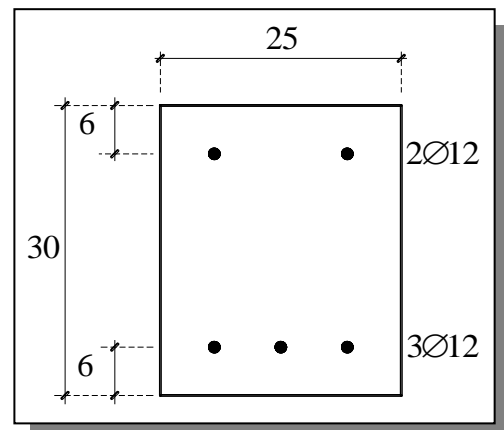
$$A_{s2} = 0,17 \text{ cm}^2 \Rightarrow \boxed{2\text{Ø}12} \quad (2,26 \text{ cm}^2, b_{\text{mín}} = 13 \text{ cm})$$

$$A_{s1} = 3,23 \text{ cm}^2 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{3\text{Ø}12} \quad (3,39 \text{ cm}^2, b_{\text{mín}} = 16 \text{ cm}) \\ \boxed{2\text{Ø}16} \quad (4,02 \text{ cm}^2, b_{\text{mín}} = 14 \text{ cm}) \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \quad v = 0,173$$

$$\mu_1 = 0,420 > \mu_{\text{lím}} = 0,372 \Rightarrow \text{D.F.C - II}$$

El momento exterior  $\mu_1$  no puede ser soportado por el hormigón, y por lo tanto disponemos armadura de compresión para ayudar al hormigón a soportar este momento. Hacemos trabajar al hormigón al máximo sin que la armadura de tracción deje de trabajar a su resistencia de



cálculo; es decir, fijamos la profundidad del eje neutro en  $\xi = \xi_{\text{lim}}$ . La armadura de compresión será:

$$\omega_2 = \frac{\mu_1 - \mu_{\text{lim}}}{1 - \delta_2} = \frac{0,420 - 0,372}{1 - 0,22} \Rightarrow \omega_2 = 0,062$$

y la armadura inferior será:

$$\omega_1 = v_{\text{lim}} + \omega_2 - v = 0,493 + 0,062 - 0,173 \Rightarrow \omega_1 = 0,383$$

Las armaduras de cálculo son por tanto:

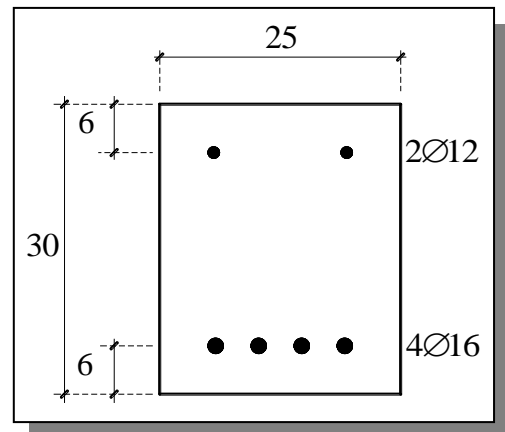
$$\omega_1 = \frac{A_{s1} \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} \Rightarrow A_{s1} = \omega_1 \frac{b \cdot d \cdot f_{cd}}{f_{yd}} = 0,383 \frac{25 \cdot 24,5 \cdot 14,2}{434,8} \Rightarrow A_{s1} = 7,64 \text{ cm}^2$$

$$\omega_2 = \frac{A_{s2} \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} \Rightarrow A_{s2} = \omega_2 \frac{b \cdot d \cdot f_{cd}}{f_{yd}} = 0,062 \frac{25 \cdot 24,5 \cdot 14,2}{434,8} \Rightarrow A_{s2} = 1,24 \text{ cm}^2$$

y finalmente las armaduras que son necesarias disponer serán las mayores entre las mínimas y las de cálculo; es decir:

$$A_{s2} = 1,24 \text{ cm}^2 \Rightarrow \boxed{2\varnothing 12} \quad (2,26 \text{ cm}^2, b_{\text{mín}} = 13 \text{ cm})$$

$$A_{s1} = 7,64 \text{ cm}^2 \Rightarrow \begin{cases} \cancel{7\varnothing 12} \quad (7,92 \text{ cm}^2, b_{\text{mín}} = 29 \text{ cm}) \\ \boxed{4\varnothing 16} \quad (8,04 \text{ cm}^2, b_{\text{mín}} = 21 \text{ cm}) \\ 3\varnothing 20 \quad (9,42 \text{ cm}^2, b_{\text{mín}} = 19 \text{ cm}) \\ 2\varnothing 25 \quad (9,82 \text{ cm}^2, b_{\text{mín}} = 16 \text{ cm}) \end{cases}$$



④  $v = 0,691$

$$\mu_1 = 0,409 > \mu_{\text{lim}} = 0,372 \Rightarrow \text{D.F.C} - \text{II}$$

Al igual que antes fijamos la profundidad del eje neutro en  $\xi = \xi_{\text{lim}}$ .

La armadura de compresión será:

$$\omega_2 = \frac{\mu_1 - \mu_{\text{lim}}}{1 - \delta_2} = \frac{0,409 - 0,372}{1 - 0,22} \Rightarrow \omega_2 = 0,048$$

y la armadura inferior será:

$$\omega_1 = v_{\text{lim}} + \omega_2 - v = 0,493 + 0,048 - 0,691 \Rightarrow \omega_1 = -0,150$$

Que la armadura de tracción salga negativa, significa que, para que se cumpla el equilibrio de fuerzas, ésta tendría que trabajar a compresión, situación que no es posible con  $\xi = \xi_{\text{lim}}$ . Si hacemos  $\omega_1 = 0$ , para que se cumpla el equilibrio de fuerzas el paquete de compresiones en el hormigón debe descender agotándose la sección en un dominio superior al 3. Por lo tanto dimensionamos la sección con  $\omega_1 = 0$  y permitiendo que el hormigón rebasa la profundidad  $\xi_{\text{lim}}$ . En esta nueva situación el hormigón va a absorber un mayor axil y momento, por lo que podremos obtener una armadura de compresión menor que la obtenida anteriormente ( $\omega_2 = 0,048$ ).

Para que el hormigón absorba todo el momento exterior, la profundidad de la fibra neutra tiene que ser:

$$\xi = 1,25 \cdot \delta_2 \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{v(1 - \delta_2) - \mu_1}{0,5 \cdot \delta_2^2}} \right) = 1,25 \cdot 0,22 \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{0,691(1 - 0,22) - 0,409}{0,5 \cdot 0,22^2}} \right) = 0,970 (> \xi_{\text{lim}})$$

Efectivamente la profundidad del eje neutro es superior al límite y al ser también  $\xi < 1$ , la sección se agota en el dominio 4, y por lo tanto se trata de un problema de flexión.

La armadura de compresión será:

$$\omega_2 = v - 0,8 \cdot \xi = 0,691 - 0,8 \cdot 0,970 = -0,085$$

Al igual que sucedía en el caso ❶ la sección NO SE AGOTA, y si calculamos al igual que entonces las situaciones de agotamiento que alcanza la sección cuando se mantiene el axil de cálculo y el momento de cálculo se obtiene:

- Situación de cálculo:

$$v = \frac{N_d}{b \cdot h \cdot f_{cd}} = 0,094 \quad \text{①}$$

$$\mu = \frac{M_d}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}} = 0,565$$

- Al agotarse la sección manteniendo el axil de cálculo:

$$\left. \begin{aligned} v = 0,8 \cdot \xi \Rightarrow \xi = \frac{v}{0,8} = \frac{0,565}{0,8} = 0,706 \\ \mu_1 = 0,8 \cdot \xi \cdot (0,5 - 0,4 \cdot \xi) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mu_1 = 0,123 > 0,094$$

- Al agotarse la sección manteniendo el momento de cálculo:

$$\left. \begin{aligned} v = 0,8 \cdot \xi \\ \mu = 0,8 \cdot \xi \cdot (0,5 - 0,4 \cdot \xi) \Rightarrow \xi = 0,625 \left( 1 \mp \sqrt{1 - 8 \cdot \mu} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} v = 0,281 & \text{③} \\ v = 0,569 & \text{④} \end{cases}$$

Si al igual que antes también obtenemos los esfuerzos baricentrales nos queda:

- Situación de cálculo:

$$v = \frac{N_d}{b \cdot h \cdot f_{cd}} = 0,480 \quad \textcircled{1}$$

$$\mu = \frac{M_d}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}} = 0,080$$

- Situación de agotamiento con axil último igual al de cálculo:

$$\left. \begin{aligned} v = 0,8 \cdot \xi \Rightarrow \xi = \frac{v}{0,8} = 0,600 \\ \mu = 0,8 \cdot \xi \cdot (0,5 - 0,4 \cdot \xi) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mu = 0,125 \quad \textcircled{2}$$

- Situación de agotamiento con momento último igual al de cálculo:

$$\left. \begin{aligned} v = 0,8 \cdot \xi \\ \mu = 0,8 \cdot \xi \cdot (0,5 - 0,4 \cdot \xi) \Rightarrow \xi = 0,625 (1 \mp \sqrt{1 - 8 \cdot \mu}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \xi = 0,250 \\ \xi = 1,000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 0,200 \quad \textcircled{3} \\ v = 0,800 \quad \textcircled{4} \end{cases}$$

En la Fig. 5 se han representado la situación de cálculo de la sección (punto ①) y las tres situaciones de agotamiento. El punto ② corresponde a la situación donde se mantiene el axil de cálculo y la ③ y ④ las que se obtienen manteniendo el momento de cálculo. Los valores numéricos son:

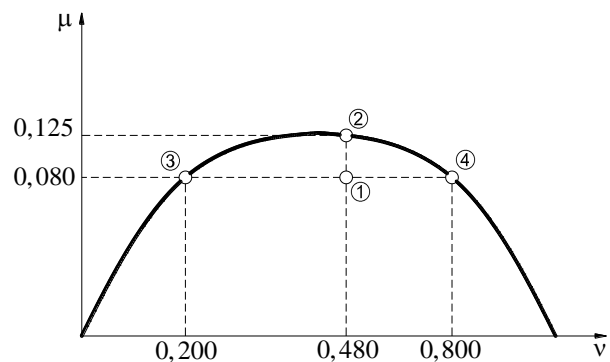
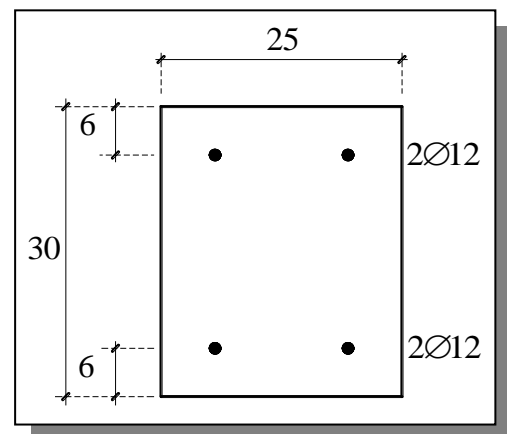


Fig. 5

En resumen, la sección NO SE AGOTA y las armaduras que disponemos son las mínimas:

$$A_{s2} = 1,50 \text{ cm}^2 \Rightarrow \{2\text{Ø}12\} \quad (2,26\text{cm}^2, b_{\text{mín}} = 13\text{cm})$$

$$A_{s1} = 1,50 \text{ cm}^2 \Rightarrow \{2\text{Ø}12\} \quad (2,26\text{cm}^2, b_{\text{mín}} = 13\text{cm})$$



$$\textcircled{5} \quad v = 1,037$$

$$\mu_1 = 0,755 > \mu_{\text{lim}} = 0,372 \Rightarrow \text{D.F.C} - \text{II}$$

Al igual que antes fijamos la profundidad del eje neutro en  $\xi = \xi_{\text{lim}}$

La armadura de compresión será:

$$\omega_2 = \frac{\mu_1 - \mu_{\text{lim}}}{1 - \delta_2} = \frac{0,755 - 0,372}{1 - 0,22} \Rightarrow \omega_2 = 0,494$$

y la armadura inferior será:

$$\omega_1 = v_{\text{lim}} + \omega_2 - v = 0,493 + 0,494 - 1,037 \Rightarrow \omega_1 = -0,050$$

De nuevo la armadura de tracción sale negativa, por lo que podemos hacer  $\omega_1 = 0$ , y obtener una solución más económica permitiendo al hormigón que sobrepase la profundidad límite. De esta forma el hormigón va a absorber un mayor axil y momento, por lo que podremos obtener una armadura de compresión menor que la obtenida anteriormente ( $\omega_2 = 0,420$ ).

Para que el hormigón absorba todo el momento exterior, la profundidad de la fibra neutra tiene que ser:

$$\xi = 1,25 \cdot \delta_2 \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{v(1 - \delta_2) - \mu_1}{0,5 \cdot \delta_2^2}} \right) = 1,25 \cdot 0,22 \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{1,037(1 - 0,22) - 0,755}{0,5 \cdot 0,22^2}} \right) = 0,763 (> \xi_{\text{lim}})$$

Efectivamente la profundidad del eje neutro es superior al límite y al ser también  $\xi < 1$ , la sección se agota en el dominio 4, y por lo tanto se trata de un problema de flexión.

La armadura de compresión será:

$$\omega_2 = v - 0,8 \cdot \xi = 1,037 - 0,8 \cdot 0,763 = 0,426 < 0,494$$

Las armaduras de cálculo serán:

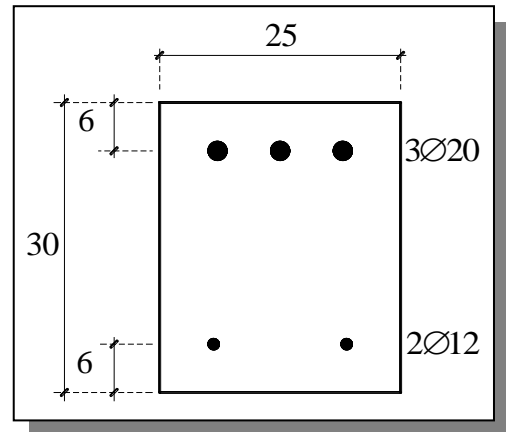
$$\omega_1 = \frac{A_{s1} \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} \Rightarrow A_{s1} = 0 \text{cm}^2$$

$$\omega_2 = \frac{A_{s2} \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} \Rightarrow A_{s2} = \omega_2 \frac{b \cdot d \cdot f_{cd}}{f_{yd}} = 0,426 \frac{25 \cdot 24,5 \cdot 14,2}{434,8} \Rightarrow A_{s2} = 8,51 \text{cm}^2$$

Finalmente las armaduras que son necesarias disponer serán las mayores entre las mínimas y las de cálculo; es decir:

$$A_{s2} = 8,51 \text{ cm}^2 \Rightarrow \begin{cases} \cancel{8\text{Ø}12} & (9,05\text{cm}^2, b_{\text{mín}} = 32\text{cm}) \\ 5\text{Ø}16 & (10,05\text{cm}^2, b_{\text{mín}} = 25\text{cm}) \\ \boxed{3\text{Ø}20} & (9,42\text{cm}^2, b_{\text{mín}} = 19\text{cm}) \\ 2\text{Ø}25 & (9,82\text{cm}^2, b_{\text{mín}} = 16\text{cm}) \end{cases}$$

$$A_{s1} = 0,98 \text{ cm}^2 \Rightarrow \boxed{2\text{Ø}12} \quad (2,26\text{cm}^2, b_{\text{mín}} = 13\text{cm})$$



## PROBLEMA 09-001

Dimensionar la sección indicada en la figura para las solicitaciones variables indicadas en la siguiente tabla:

	$M_Q$ [kN · m]	$N_Q$ [kN]	$e_0$ [cm]
❶	75	500	15
❷	100	750	13,33
❸	25	1000	2,5

### Datos:

Hormigón: HA-25 (Con cemento CEM I)

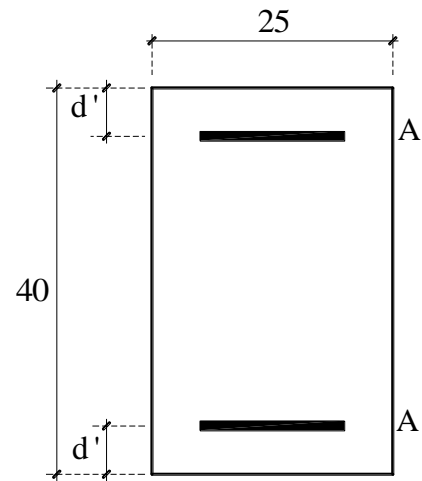
Acero: B 500S

Vida útil de proyecto: 100 años

Situación: Persistente

Ambiente: IIa

Sección perteneciente a un pilar



### Valores de cálculo

De igual forma que en el problema N°1, de la Ficha 05 (seguridad), se obtiene:

- Coeficientes parciales de seguridad para materiales:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Estado Límite Último} \\ \text{Situación persistente} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \gamma_c = 1,50 \\ \gamma_s = 1,15 \end{array} \right.$$

- Coeficientes parciales de seguridad para acciones:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Estado Límite Último} \\ \text{Situación persistente} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Efecto Favorable} \left\{ \begin{array}{l} \gamma_G = 1,00 \\ \gamma_Q = 0,00 \end{array} \right. \\ \text{Efecto Desfavorable} \left\{ \begin{array}{l} \gamma_G = 1,35 \\ \gamma_Q = 1,50 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

y por lo tanto los valores de cálculo serán:

➤ Resistencia de cálculo del hormigón:  $f_{cd} = \alpha_{cc} \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = 1,00 \frac{25}{1,50} = 16,7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ <sup>1</sup>

<sup>1</sup> Aunque se ha obtenido  $f_{cd}$  con  $\alpha_{cc}=1,00$ , los ábacos de interacción utilizados en este problema ya incluyen el coeficiente  $\alpha_{cc}=0,85$ , por lo que si realmente quisiéramos considerar  $\alpha_{cc} \neq 0,85$  tendríamos que obtener el valor de  $f_{cd}$  de la forma  $f_{cd} = \frac{\alpha_{cc} f_{ck}}{0,85 \gamma_c}$ .

➤ Resistencia de cálculo del acero:  $f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{500}{1,15} = 434,8 \frac{N}{mm^2}$

➤ Resistencia de cálculo del acero a compresión:  $f_{yc,d} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \leq 400 \frac{N}{mm^2} \Rightarrow f_{yc,d} = 400 \frac{N}{mm^2}$

➤ Esfuerzos de cálculo:  $M_d = M_Q \cdot \gamma_Q$  y  $N_d = N_Q \cdot \gamma_Q$

	$M_d$ [kN · m]	$N_d$ [kN]
❶	112,5	750
❷	150	1.125
❸	37,5	1.500

**Cálculo de las cuantías límites**

Según la Ficha 06 (cuantías límites):

**Armaduras mínimas geométricas**

Tipo de acero: B500S  
 Tipo de elemento estructural: Pilar }  $\Rightarrow A_{tot} \geq \frac{4}{1000} A_c$

donde  $A_{tot}$  es la armadura longitudinal total:  $A_{tot} = 2A$

Por lo tanto las armaduras geométricas mínimas que se han de colocar en la sección de hormigón serán:

$$A_{tot} \geq \frac{4}{1000} 25 \cdot 40 = 4,00 \text{ cm}^2$$

**Armaduras mínimas mecánicas**

➤ Si el agotamiento se produce en flexión:

$$A_{s1} \geq 0,04 \frac{b \cdot h \cdot f_{cd}}{f_{yd}}$$

$$A_{s2} \geq 0,05 \frac{N_d}{f_{yd}}$$

$N_d$ [kN]	$A_{s2,min,m}$ [cm <sup>2</sup> ]	$A_{s1,min,m}$ [cm <sup>2</sup> ]
750	0,86	1,53
1.125	1,29	
1.500	1,73	
Tabla 1a		

Sustituyendo valores se obtiene, en función del axil de cálculo, las armaduras mínimas que se indican en la Tabla 1a.

- Si el agotamiento se produce en compresión:

$$A_{s2} = A_{s2} \geq 0,05 \frac{N_d}{f_{yc,d}}$$

Sustituyendo valores se obtiene, en función del axil de cálculo, las armaduras mínimas que se indican en la Tabla 1b.

$N_d$ [kN]	$A_{s2,min,m}$ [cm <sup>2</sup> ]
750	0,94
1.125	1,41
1.500	1,88
Tabla 1b	

**Armaduras mínimas definitivas:**

Finalmente, las armaduras mínimas serán las que resulten mayores de las calculadas anteriormente, y que serán, en función del axil de cálculo y tipo de sollicitación, las que se indican en la Tabla 2, donde  $A_{tot,min}$  es la armadura

$N_d$ [kN]	Agotamiento en flexión			Agotamiento en compresión	
	$A_{tot,min}$	$A_{s2,min}$	$A_{s1,min}$	$A_{tot,min}$	$A_{s2,min} = A_{s1,min}$
750	4,00	0,86	1,53	4,00	0,94
1.125		1,29			1,41
1.500		1,73			1,88
Tabla 2. Secciones mínimas en [cm <sup>2</sup> ]					

longitudinal **total** mínima a disponer.

**Armaduras máximas:**

- Si el agotamiento se produce en flexión:

Siguiendo las recomendaciones del Código Modelo CEB-FIP consideraremos unas cuantías máximas que vendrán dadas por:

$$A_{s2,máx} = A_{s1,máx} = 0,04 \cdot A_c = 0,04 \cdot 25 \cdot 40 \Rightarrow A_{s2,máx} = A_{s1,máx} = 40 \text{ cm}^2$$

- Si el agotamiento se produce en compresión:

$$A_{s2,máx} = A_{s1,máx} = \frac{0,5 \cdot A_c \cdot f_{cd}}{f_{yc,d}} = \frac{0,5 \cdot 25 \cdot 40 \cdot 16,7}{400} \Rightarrow A_{s2,máx} = A_{s1,máx} = 19,17 \text{ cm}^2$$

### Cálculo de los recubrimientos

Al igual que el Problema 08-003 adoptamos los recubrimientos  $d' = 5,5 \text{ cm}^2$

### Selección del ábaco

Para el cálculo de las armaduras utilizando los diagramas de interacción debemos previamente seleccionar el que se ajusta a los parámetros de nuestra sección:

- ✓ Sección rectangular.
- ✓ Armadura simétrica a dos caras.
- ✓ Recubrimiento  $d' = 0,14 \cdot h^3$ .
- ✓ Acero:  $f_{yk} = 500 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

y seleccionamos el que se muestra en la Figura 1<sup>4</sup>.

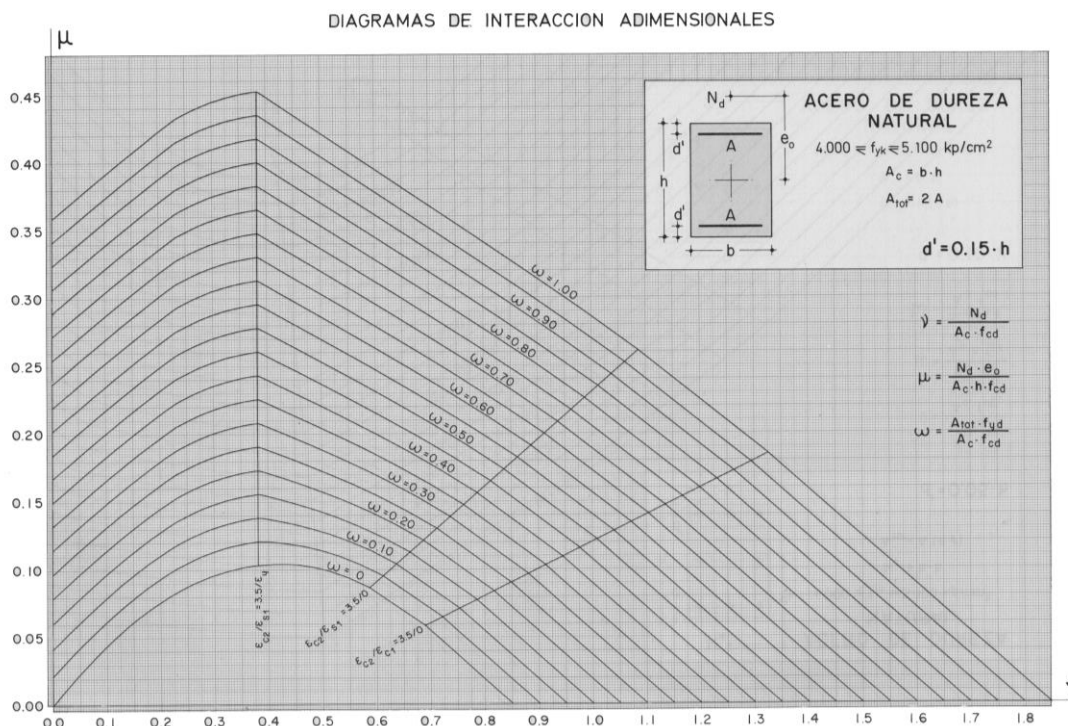


Figura 1. Diagramas de interacción

Del lado de la seguridad, de los recubrimientos disponibles (5%, 10% y 15%), hemos tomado el recubrimiento del 15%, ya que de esta forma calculamos con brazos mecánicos menores que los reales, y por lo tanto la sección calculada será menos resistente que la realmente ejecutada.

<sup>2</sup> Los recubrimientos los hemos denotado por  $d'$  porque así se hace en los ábacos de interacción (ver Figura 1).

<sup>3</sup>  $d'$  se corresponde con el recubrimiento mecánico de las armaduras, y  $h$  con el canto de la sección en el sentido de la flexión:  $\delta = \frac{d'}{h} = \frac{5,5}{40} = 0,14$ .

<sup>4</sup> Tomado de la publicación “Hormigón armado” de P. Jiménez Montoya, A. García Meseguer y F. Morán Cabré.

### Cálculo de las variables adimensionales

Los variables adimensionales que intervienen en el cálculo son:

$$\delta = \frac{d'}{h}$$

$$v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{N_d}{b \cdot h \cdot f_{cd}}$$

$$\mu = \frac{M_d}{A_c \cdot h \cdot f_{cd}} = \frac{M_d}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}}$$

$$\omega = \frac{A_{tot} \cdot f_{yd}}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{2 \cdot A \cdot f_{yd}}{b \cdot h \cdot f_{cd}}$$

de las cuales las que son datos en el problema de dimensionamiento son:

$$\delta = \frac{d'}{h} = \frac{5,5}{40} = 0,14$$

	$N_d$ [kN]	$v = \frac{N_d}{b \cdot h \cdot f_{cd}}$	$M_d$ [kN · m]	$\mu = \frac{M_d}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}}$
❶	750	0,450	112,5	0,169
❷	1.125	0,675	150	0,225
❸	1.500	0,900	37,5	0,056

### Cálculo de las armaduras

Entrando en el ábaco con los esfuerzos adimensionales se obtiene (ver Figura 2):

$$\text{❶ } \left. \begin{array}{l} v = 0,450 \\ \mu = 0,169 \end{array} \right\} \Rightarrow \omega = 0,22 \Rightarrow A_{tot} = \omega \frac{b \cdot h \cdot f_{cd}}{f_{yd}} = 0,22 \frac{25 \cdot 40 \cdot 16,7}{434,8} = 8,43$$

La sección ha disponer en cada cara será:

$$A = 4,22 \text{ cm}^2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4\emptyset 12 \quad (4,52 \text{ cm}^2, b_{\min} = 19 \text{ cm}) \\ 3\emptyset 16 \quad (6,03 \text{ cm}^2, b_{\min} = 17 \text{ cm}) \\ 2\emptyset 20 \quad (6,28 \text{ cm}^2, b_{\min} = 15 \text{ cm}) \end{array} \right.$$

$$\text{❷ } \left. \begin{array}{l} v = 0,675 \\ \mu = 0,225 \end{array} \right\} \Rightarrow \omega = 0,53 \Rightarrow A_{tot} = \omega \frac{b \cdot h \cdot f_{cd}}{f_{yd}} = 0,53 \frac{25 \cdot 40 \cdot 16,7}{434,8} = 20,32$$

La sección ha disponer en cada cara será:

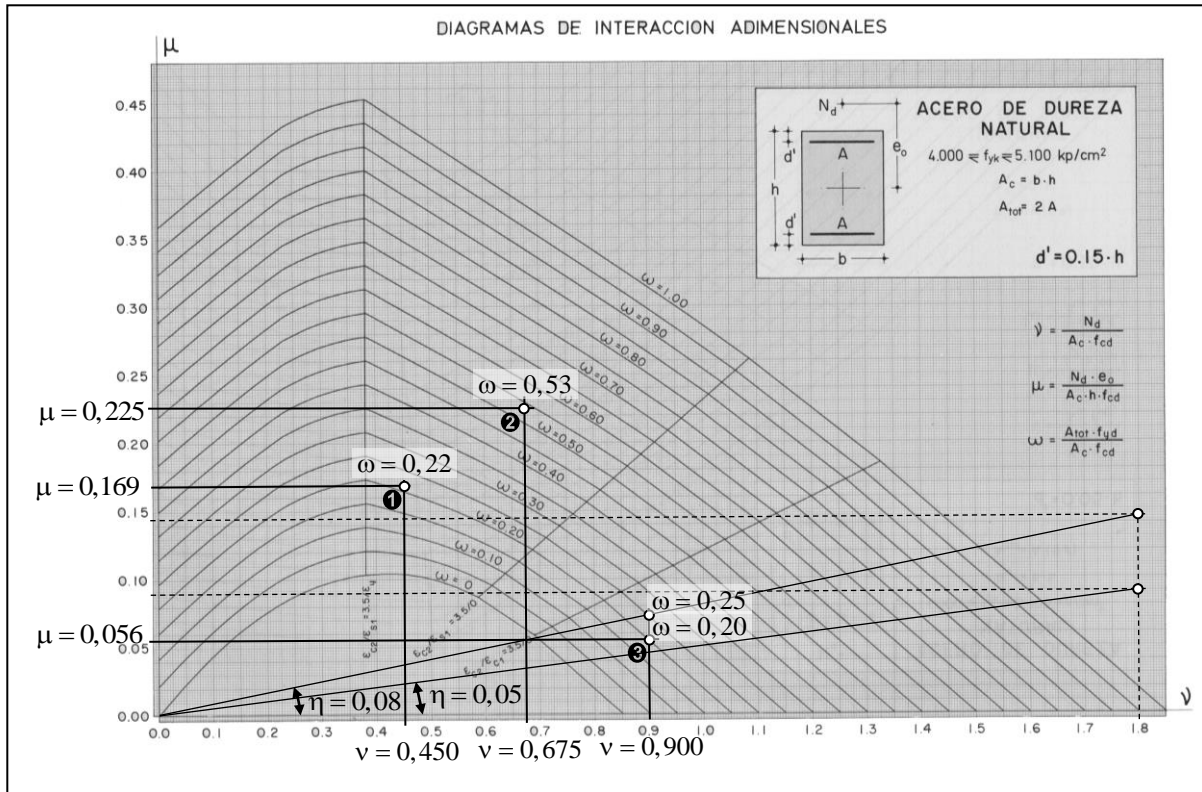


Figura 2.

$$A = 10,16 \text{ cm}^2 \Rightarrow \begin{cases} \cancel{9\text{Ø}12} & (10,17 \text{ cm}^2, b_{\min} = 35 \text{ cm}) \\ \cancel{6\text{Ø}16} & (12,06 \text{ cm}^2, b_{\min} = 28 \text{ cm}) \\ \boxed{4\text{Ø}20} & (12,56 \text{ cm}^2, b_{\min} = 23 \text{ cm}) \\ 3\text{Ø}25 & (14,73 \text{ cm}^2, b_{\min} = 21 \text{ cm}) \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \left. \begin{matrix} \nu = 0,900 \\ \mu = 0,056 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \omega = 0,20 \Rightarrow A_{rot} = \omega \frac{b \cdot h \cdot f_{cd}}{f_{yd}} = 0,20 \frac{25 \cdot 40 \cdot 16,7}{434,8} = 7,67$$

La sección ha disponer en cada cara será:

$$A = 3,83 \text{ cm}^2 \Rightarrow \begin{cases} 4\text{Ø}12 & (4,52 \text{ cm}^2, b_{\min} = 19 \text{ cm}) \\ \boxed{2\text{Ø}16} & (4,02 \text{ cm}^2, b_{\min} = 19 \text{ cm}) \end{cases}$$

**NOTA:**

la Instrucción EHE, en el Art. 42.2.1, establece que toda sección sometida a una sollicitación exterior de compresión  $N_d$  debe ser capaz de resistir dicha compresión con una excentricidad mínima, que viene dada por:

$$e_0 \geq \begin{cases} \frac{h}{20} \\ 2 \text{ cm} \end{cases}$$

donde dicha excentricidad debe ser contada a partir del centro de gravedad de la sección bruta y en la dirección más desfavorable de las direcciones principales y sólo en una de ella.

Si dibujamos en los ábacos de interacción una recta que pase por el origen y cuya pendiente sea:

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{N_d \cdot e_0}{\frac{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}}{N_d}} = \frac{e_0}{h} = \eta$$

resulta que los puntos situados por debajo de dicha recta no cumplen esta excentricidad mínima (zona sombreada de la Figura 3).

Si para una sollicitación dada por  $\nu_1$  y  $\mu_1$  se obtiene una cuantía de cálculo,  $\omega$ , que se encuentra en la zona sombreada del diagrama de interacción, para que se cumpla la especificación de la Instrucción referente a la excentricidad mínima, es necesario disponer la cuantía,  $\omega'$ , que se obtiene por intersección de la recta de pendiente  $\eta$  (correspondiente a excentricidad mínima) y la recta vertical correspondiente al axil  $\nu_1$ .

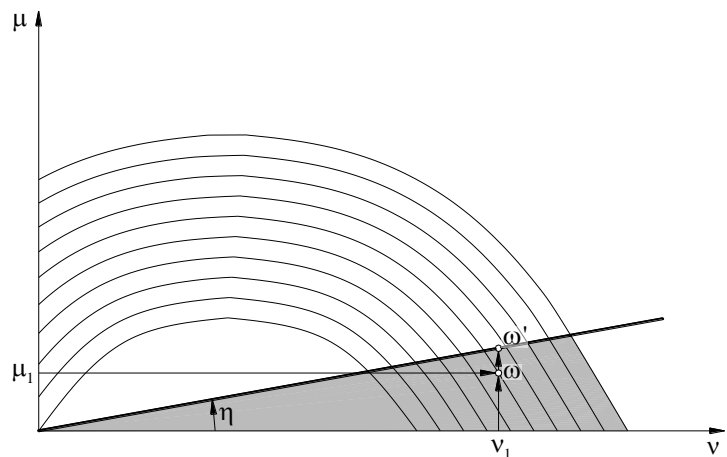


Figura 3

Para nuestro problema la excentricidad mínima es:

- En dirección vertical:  $e_0 \geq \begin{cases} \frac{h}{20} = \frac{40}{20} = 2 \text{ cm} \\ 2 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow e_0 \geq 2 \text{ cm} \Rightarrow \eta = \frac{2}{40} = 0,05$
- En dirección horizontal:  $e_0 \geq \begin{cases} \frac{h}{20} = \frac{25}{20} = 1,25 \text{ cm} \\ 2 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow e_0 \geq 2 \text{ cm} \Rightarrow \eta = \frac{2}{25} = 0,08$

En el caso ③ se cumple la excentricidad mínima en dirección vertical, pero no en la dirección horizontal. En este caso habría que determinar también la cuantía que cumple excentricidad mínima en dirección horizontal, para lo cual tendríamos que utilizar un ábaco con la disposición de armaduras tal y como se muestra en la Figura 4<sup>5</sup>. No obstante, si disponemos las armaduras en las esquinas (4 barras) podemos utilizar el ábaco anterior, en cuyo caso la cuantía necesaria para absorber la excentricidad mínima en las dos direcciones será:

$$\omega = 0,25 \Rightarrow A_{tot} = \omega \frac{b \cdot h \cdot f_{cd}}{f_{yd}} = 0,25 \frac{25 \cdot 40 \cdot 16,7}{434,8} = 9,58$$

y la sección ha disponer en cada cara:

$$A = 4,79 \text{ cm}^2 \Rightarrow \{2\text{Ø}20\} (6,28 \text{ cm}^2, b_{min} = 15 \text{ cm})$$

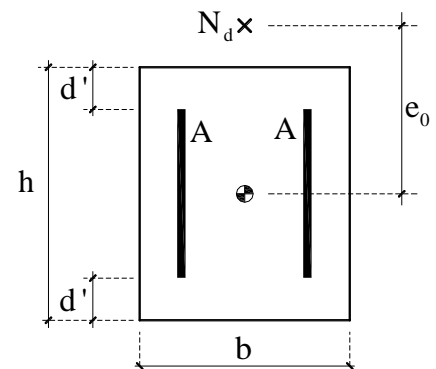


Figura 4.

<sup>5</sup> Otra solución sería disponer armadura simétrica en las cuatro caras.

## **PROBLEMA 09-002**

Comprobar, utilizando los diagramas de interacción, la siguiente sección de hormigón armado sometida a los esfuerzos de flexo-compresión recta que se indican en la Tabla 1:

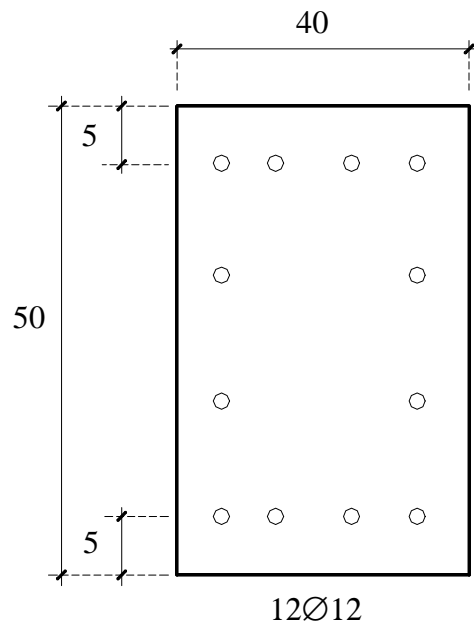
$M_Q$ [kN · m]	$N_Q$ [kN]	$e_0$ [cm]
50	1000	5
Tabla 1		

### **Datos:**

Hormigón: HA-25

Acero: B 500S

Situación: Persistente



### **Valores de cálculo**

De igual forma que en el problema N°1, de la Ficha 05 (seguridad), se obtiene:

- Coeficientes parciales de seguridad para materiales:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Estado Límite Último} \\ \text{Situación persistente} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \gamma_c = 1,50 \\ \gamma_s = 1,15 \end{array} \right.$$

- Coeficientes parciales de seguridad para acciones:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Estado Límite Último} \\ \text{Situación persistente} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Efecto Favorable} \left\{ \begin{array}{l} \gamma_G = 1,00 \\ \gamma_Q = 0,00 \end{array} \right. \\ \text{Efecto Desfavorable} \left\{ \begin{array}{l} \gamma_G = 1,35 \\ \gamma_Q = 1,50 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

y por lo tanto los valores de cálculo serán:

➤ Resistencia de cálculo del hormigón:  $f_{cd} = \alpha_{cc} \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = 1,00 \frac{25}{1,50} = 16,7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

➤ Resistencia de cálculo del acero:  $f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{500}{1,15} = 434,8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

- Esfuerzos de cálculo: Se muestran en la siguiente tabla:

$$N_d = N_Q \cdot \gamma_Q \Rightarrow N_d = 1.500 \text{ KN}$$

$$M_d = M_Q \cdot \gamma_Q \Rightarrow M_d = 75 \text{ KN}\times\text{m}$$

**Selección del ábaco**

Para el cálculo de las armaduras utilizando los diagramas de interacción debemos previamente seleccionar el que se ajusta a los parámetros de nuestra sección:

- ✓ Sección rectangular.
- ✓ Armadura simétrica a cuatro caras.
- ✓ Recubrimiento  $d' = 0,10 \cdot h^2$ .
- ✓ Acero:  $f_{yk} = 500 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

y seleccionamos el que se muestra en la Figura 1<sup>3</sup>.

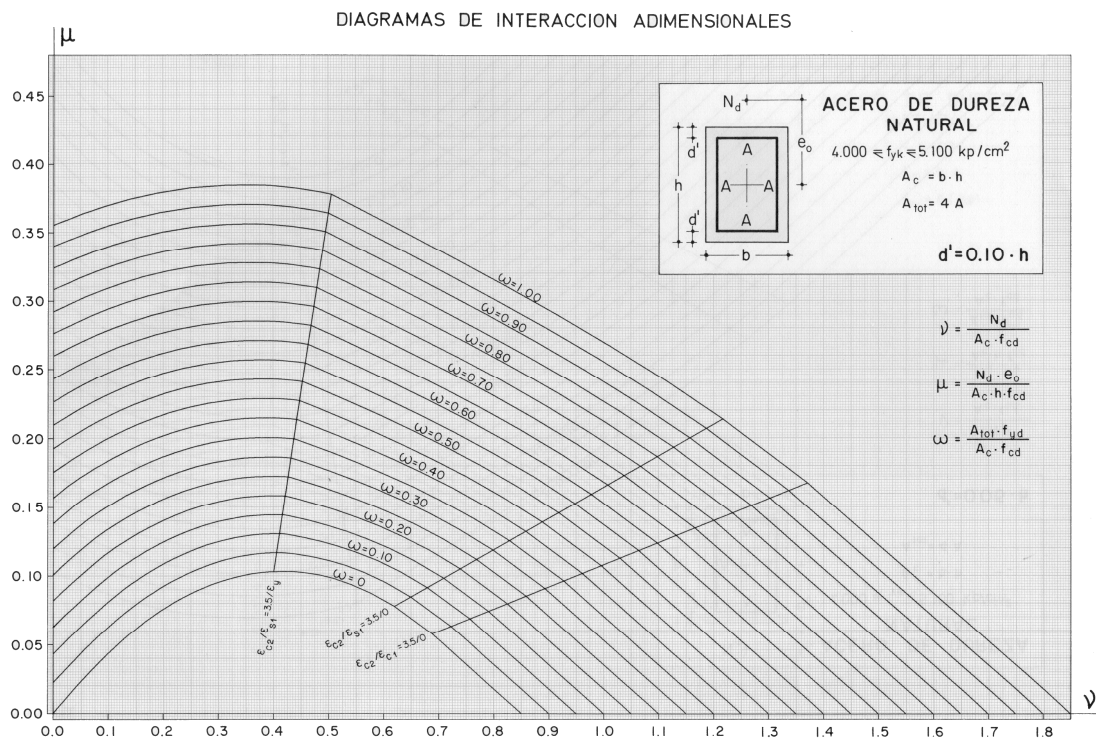


Figura 1. Diagramas de interacción

<sup>1</sup> Aunque se ha obtenido  $f_{cd}$  con  $\alpha_{cc}=1,00$ , los ábacos de interacción utilizados en este problema ya incluyen el coeficiente  $\alpha_{cc}=0,85$ , por lo que si realmente quisiéramos considerar  $\alpha_{cc} \neq 0,85$  tendríamos que obtener el valor de  $f_{cd}$  de la forma  $f_{cd} = \frac{\alpha_{cc} \cdot f_{ck}}{0,85 \gamma_c}$ .

<sup>2</sup>  $d'$  se corresponde con el recubrimiento mecánico y  $h$  con el canto de la sección, ambos en el sentido de la flexión:  $\delta = \frac{d'}{b} = \frac{5}{50} = 0,10$ .

<sup>3</sup> Tomado de la obra "Hormigón armado" de P. Jiménez Montoya, A. García Meseguer y F. Morán Cabré.

### Cálculo de las variables adimensionales

Los valores adimensionales son:

$$\delta = \frac{d'}{h} = \frac{5}{50} = 0,10$$

$$\nu = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{N_d}{b \cdot h \cdot f_{cd}} = \frac{1500}{40 \cdot 50 \cdot 16,7} [10] \Rightarrow \nu = 0,450$$

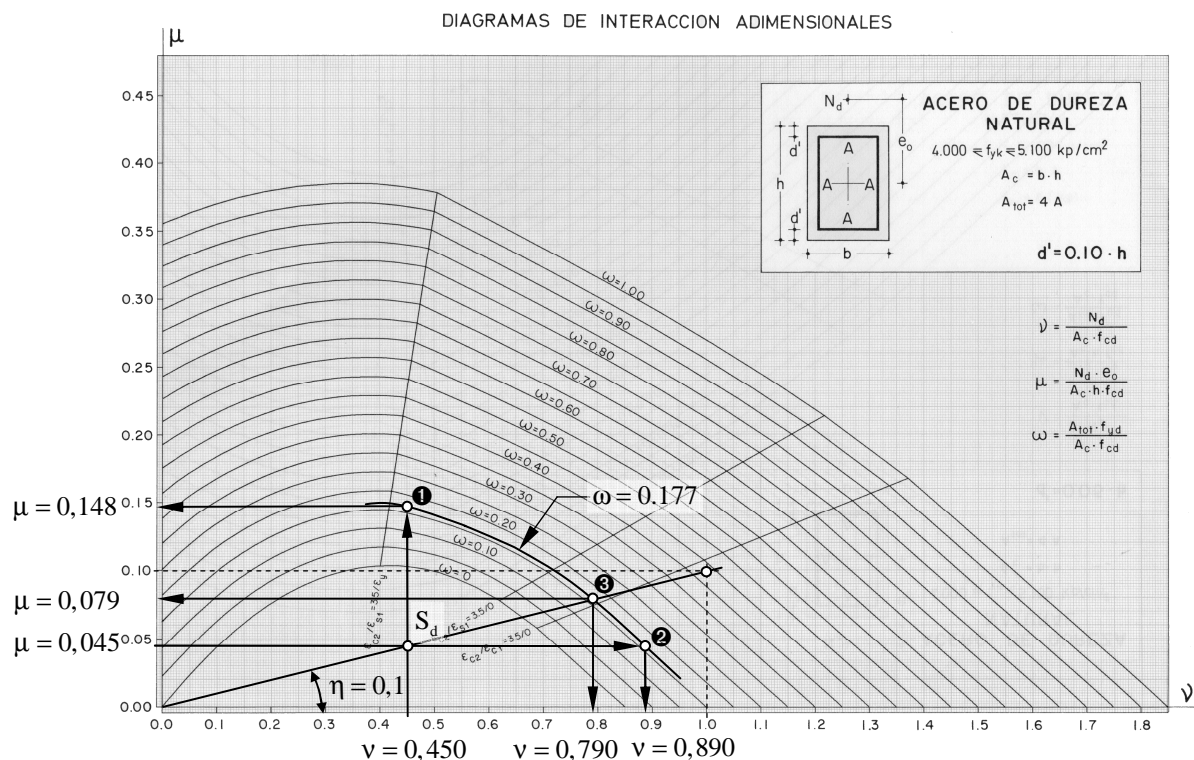
$$\mu = \frac{M_d}{A_c \cdot h \cdot f_{cd}} = \frac{M_d}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}} = \frac{75}{40 \cdot 50^2 \cdot 16,7} [1000] \Rightarrow \mu = 0,045$$

$$\eta = \frac{\mu}{\nu} = \frac{0,045}{0,450} \Rightarrow \eta = 0,1$$

$$\omega = \frac{A_{tot} \cdot f_{yd}}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{n \cdot A_{\emptyset} \cdot f_{yd}}{b \cdot h \cdot f_{cd}} = \frac{12 \cdot 1,13 \cdot 434,8}{40 \cdot 50 \cdot 16,7} \Rightarrow \omega = 0,177$$

### Comprobación de la sección

Como el punto de sollicitación  $S_d$  (ver Figura 2), definido por los esfuerzos  $\nu = 0,450$  y  $\mu = 0,045$  está contenido por la curva correspondiente a  $\omega = 0,177$ , la sección será segura para esos esfuerzos.



## Esfuerzos de agotamiento y Coeficientes de Uso

- ❶ Para el axil de cálculo dado.

Por la abscisa correspondiente al axil de cálculo  $\nu = 0,450$  se traza una recta vertical hasta que corte a la curva correspondiente a la cuantía  $\omega = 0,177$ . La ordenada de este punto corresponde con el momento de agotamiento de la sección para el axil dado (ver Figura 2):

$$\mu = 0,148 \Rightarrow M_u = \mu \cdot b \cdot h^2 \cdot f_{cd} = 0,148 \cdot 40 \cdot 50^2 \cdot 16,7 \left[ \frac{1}{1000} \right] \Rightarrow M_u = 247,7 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

El coeficiente de uso o utilización será:

$$CU = \frac{M_u}{M_d} = \frac{247,7}{75} \Rightarrow CU = 3,3$$

- ❷ Para el momento de cálculo dado.

Por la ordenada correspondiente al momento de cálculo  $\mu = 0,045$  se traza una recta horizontal hasta que corte a la curva correspondiente a la cuantía  $\omega = 0,177$ . La abscisa de este punto corresponde con el axil de agotamiento de la sección para el momento dado (ver Figura 2):

$$\nu = 0,890 \Rightarrow N_u = \mu \cdot b \cdot h \cdot f_{cd} = 0,890 \cdot 40 \cdot 50 \cdot 16,7 \left[ \frac{1}{10} \right] \Rightarrow N_u = 2.966,7 \text{ KN}$$

El coeficiente de uso o utilización será:

$$CU = \frac{N_u}{N_d} = \frac{2.966,7}{1500} \Rightarrow CU = 2,0$$

- ❸ Comprobar con la excentricidad dada.

Se traza una recta cuya pendiente sea  $\eta = \frac{\mu}{\nu} = 0,10$  hasta que corte a la curva correspondiente a la cuantía  $\omega = 0,177$ . La abscisa de este punto corresponde con el axil de agotamiento y la ordenada con el momento de agotamiento, de tal forma que la excentricidad en el agotamiento es la de cálculo (ver Figura 2):

$$\nu = 0,790 \Rightarrow N_u = \mu \cdot b \cdot h \cdot f_{cd} = 0,790 \cdot 40 \cdot 50 \cdot 16,7 \left[ \frac{1}{10} \right] \Rightarrow N_u = 2.633,3 \text{ KN}$$

$$\mu = 0,079 \Rightarrow M_u = \mu \cdot b \cdot h^2 \cdot f_{cd} = 0,079 \cdot 40 \cdot 50^2 \cdot 16,7 \left[ \frac{1}{1000} \right] \Rightarrow M_u = 131,7 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

El coeficiente de uso o utilización será:

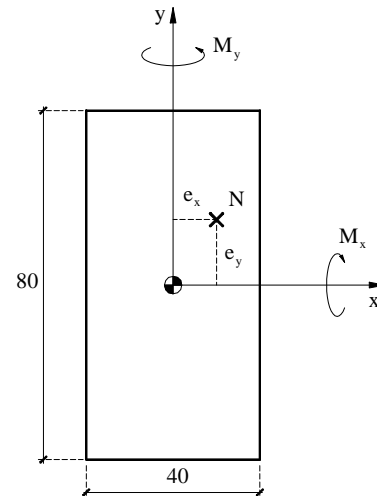
$$CU = \frac{N_u}{N_d} = \frac{2633,3}{1500} = \frac{M_u}{M_d} = \frac{131,7}{75} \Rightarrow CU = 1,8$$

## PROBLEMA 10-001

Para la sección indicada en la figura, que está sometida a los esfuerzos de la Tabla 1, se pide:

- 1.- Dimensionar con armadura simétrica a cuatro caras utilizando los diagramas de roseta.
- 2.- Dimensionar con armadura simétrica a cuatro caras utilizando el método de la EHE.
- 3.- Con la armadura obtenida en los apartados 1 y 2, obtener el axil de agotamiento para las excentricidades de los esfuerzos de la Tabla 1, utilizando la fórmula de Bresler.

$N_Q$ [kN]	1500
$M_{Qx}$ [kN · m]	150
$M_{Qy}$ [kN · m]	225
Tabla 1.	



### Datos:

Hormigón: HA-25 (Con cemento CEM I)  
Acero: B 400S  
Vida útil de proyecto: 100 años  
Situación: Persistente  
Ambiente: IIa  
Sección perteneciente a un pilar

### Valores de cálculo

De igual forma que en el problema N°1, de la Ficha 05 (seguridad), se obtiene:

- Coeficientes parciales de seguridad para materiales:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Estado Límite Último} \\ \text{Situación persistente} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \gamma_c = 1,50 \\ \gamma_s = 1,15 \end{array} \right.$$

- Coeficientes parciales de seguridad para acciones:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Estado Límite Último} \\ \text{Situación persistente} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Efecto Favorable} \left\{ \begin{array}{l} \gamma_G = 1,00 \\ \gamma_Q = 0,00 \end{array} \right. \\ \text{Efecto Desfavorable} \left\{ \begin{array}{l} \gamma_G = 1,35 \\ \gamma_Q = 1,50 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

y por lo tanto los valores de cálculo serán:

➤ Resistencia de cálculo del hormigón:  $f_{cd} = \alpha_{cc} \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = 1,00 \frac{25}{1,50} = 16,7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ <sup>1</sup>

➤ Resistencia de cálculo del acero:  $f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{400}{1,15} = 347,8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

➤ Esfuerzos de cálculo: Se muestran en la siguiente tabla:

$N_d = N_Q \cdot \gamma_Q [\text{kN}]$	2250
$M_{dx} = M_{Qx} \cdot \gamma_Q [\text{kN} \cdot \text{m}]$	225
$M_{dy} = N_{Qy} \cdot \gamma_Q [\text{kN} \cdot \text{m}]$	337.5

Tabla 2. Esfuerzos de cálculo

### Cálculo de las cuantías límites

Según la Ficha 06 (cuantías límites):

#### **Armaduras mínimas geométricas**

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tipo de acero: B400S} \\ \text{Tipo de elemento estructural: Pilar} \end{array} \right\} \Rightarrow A_{\text{tot}} \geq \frac{4}{1000} A_c$$

donde  $A_{\text{tot}}$  es la armadura longitudinal total. Para nuestra sección será:

$$A_{\text{tot}} \geq \frac{4}{1000} 40 \cdot 80 = 12,80 \text{cm}^2$$

#### **Armaduras mínimas mecánicas**

➤ Si el agotamiento se produce en flexión:

$$A_{s1} \geq 0,04 \frac{b \cdot h \cdot f_{cd}}{f_{yd}} \Rightarrow A_{s1} \geq 6,13 \text{cm}^2$$

$$A_{s2} \geq 0,05 \frac{N_d}{f_{yd}} \Rightarrow A_{s2} \geq 3,23 \text{cm}^2$$

<sup>1</sup> Aunque se ha obtenido  $f_{cd}$  con  $\alpha_{cc}=1,00$ , los ábacos de interacción utilizados en este problema ya incluyen el coeficiente  $\alpha_{cc}=0,85$ , por lo que si realmente quisiéramos considerar  $\alpha_{cc} \neq 0,85$  tendríamos que obtener el valor de  $f_{cd}$  de la forma  $f_{cd} = \frac{\alpha_{cc} \cdot f_{ck}}{0,85 \gamma_c}$ .

➤ Si el agotamiento se produce en compresión:

$$A_{s1} = A_{s2} \geq 0,05 \frac{N_d}{f_{yc,d}} \Rightarrow A_{s1} = A_{s2} \geq 3,23 \text{ cm}^2$$

**Armaduras mínimas definitivas:**

Finalmente, las armaduras mínimas serán las que resulten mayores de las calculadas anteriormente, y que serán, en función del tipo de sollicitación, las que se

Agotamiento en flexión			Agotamiento en compresión	
A <sub>tot,min</sub>	A <sub>s2,min</sub>	A <sub>s1,min</sub>	A <sub>tot,min</sub>	A <sub>s2,min</sub> = A <sub>s1,min</sub>
12,80	3,23	6,13	12,80	3,23
Tabla 2. Secciones mínimas en [cm <sup>2</sup> ]				

indican en la Tabla 2, donde A<sub>tot,min</sub> es la armadura longitudinal **total** mínima a disponer.

**Armaduras máximas:**

➤ Si el agotamiento se produce en flexión:

Siguiendo las recomendaciones del Código Modelo CEB-FIP consideraremos unas cuantías máximas que vendrán dadas por:

$$A_{s2,máx} = A_{s1,máx} = 0,04 \cdot A_c = 0,04 \cdot 40 \cdot 80 \Rightarrow A_{s2,máx} = A_{s1,máx} = 128 \text{ cm}^2$$

➤ Si el agotamiento se produce en compresión:

$$A_{s2,máx} = A_{s1,máx} = \frac{0,5 \cdot A_c \cdot f_{cd}}{f_{yc,d}} = \frac{0,5 \cdot 40 \cdot 80 \cdot 16,7}{347,8} \Rightarrow A_{s2,máx} = A_{s1,máx} = 76,8 \text{ cm}^2$$

**Cálculo de los recubrimientos**

Al igual que el Problema 08-003 adoptamos los recubrimientos  $d_x = d_y = 5,5 \text{ cm}$ <sup>2</sup>

**1.- DIMENSIONAMIENTO CON MÉTODO DE LOS DIAGRAMAS DE ROSETA**

Para el cálculo de las armaduras utilizando los diagramas de roseta debemos previamente seleccionar el que se ajusta a los parámetros de nuestra sección:

<sup>2</sup> d<sub>x</sub> hace referencia al recubrimiento de la armadura horizontal y d<sub>y</sub> al de la armadura vertical.

- ✓ Sección rectangular.
- ✓ Armadura simétrica a cuatro caras.
- ✓ Recubrimiento  $d_y = 0,07 \cdot h$  y  $d_x = 0,14 \cdot b$ .
- ✓ Acero:  $f_{yk} = 400 \frac{N}{mm^2}$

y seleccionamos el que se muestra en la Figura 1<sup>3</sup>.

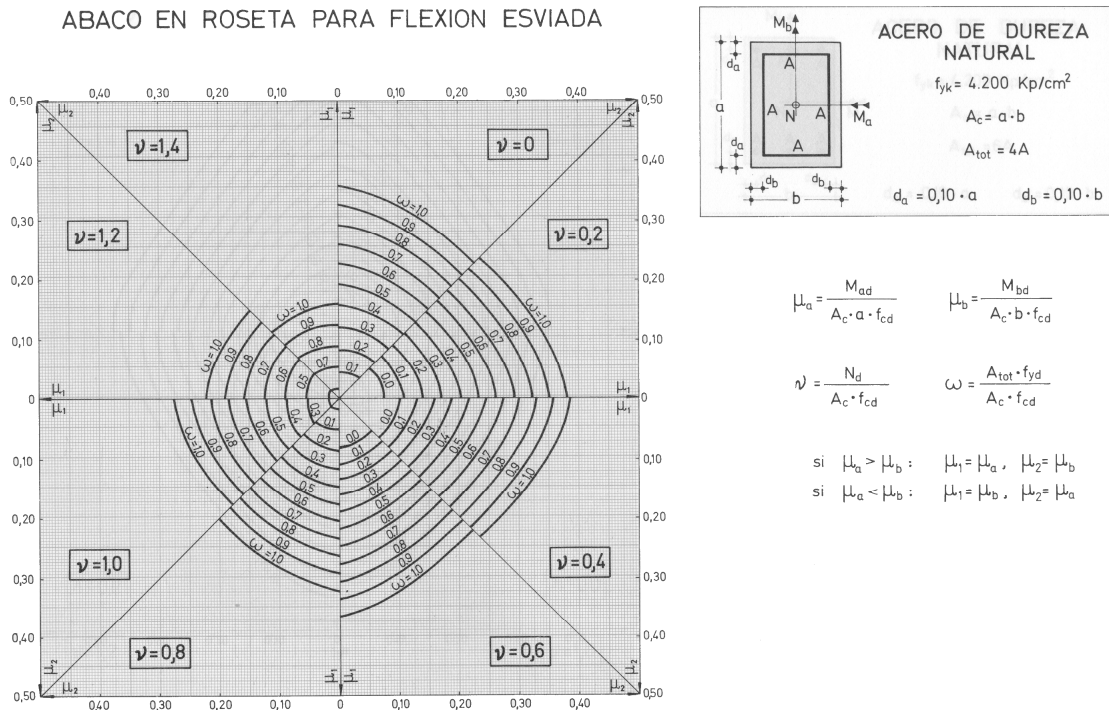


Figura 1.

Del lado de la seguridad deberíamos de haber cogido el ábaco correspondiente a un recubrimiento igual o superior al mayor de los recubrimientos de nuestra sección (14%), pero únicamente disponemos de ábacos con recubrimientos del 10%. El error que cometeremos será, en general, pequeño.

**Cálculo de las variables adimensionales**

Las variables adimensionales que intervienen en el cálculo son las siguientes:

$$\delta_a = \frac{d_a}{a} = \frac{d_y}{h} \quad \text{y} \quad \delta_b = \frac{d_b}{b} = \frac{d_x}{b}$$

$$\mu_a = \frac{M_{ad}}{A_c \cdot a \cdot f_{cd}} = \frac{M_{xd}}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}} \quad \text{y} \quad \mu_b = \frac{M_{bd}}{A_c \cdot b \cdot f_{cd}} = \frac{M_{yd}}{b^2 \cdot h \cdot f_{cd}}$$

<sup>3</sup> Tomado de la obra “Hormigón armado” de P. Jiménez Montoya, A. García Meseguer y F. Morán Cabré.

$$\nu = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{N_d}{b \cdot h \cdot f_{cd}}$$

$$\omega = \frac{A_{tot} \cdot f_{yd}}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{A_{tot} \cdot f_{yd}}{b \cdot h \cdot f_{cd}}$$

de las cuales las que son datos en el problema de dimensionamiento son:

$$\delta_a = \frac{d_a}{a} = 0,07 \quad \text{y} \quad \delta_b = \frac{d_b}{b} = 0,14$$

$$\mu_a = \frac{M_{ad}}{A_c \cdot a \cdot f_{cd}} = 0,053 \quad \text{y} \quad \mu_b = \frac{M_{bd}}{A_c \cdot b \cdot f_{cd}} = 0,158$$

$$\nu = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} = 0,422$$

**Cálculo de la cuantía de acero**

Como no existe el cuadrante correspondiente al axil adimensional  $\nu = 0,422$ , será necesario determinar las cuantías para el axil inferior,  $\nu = 0,4$ , y superior,  $\nu = 0,6$ , e interpolar posteriormente.

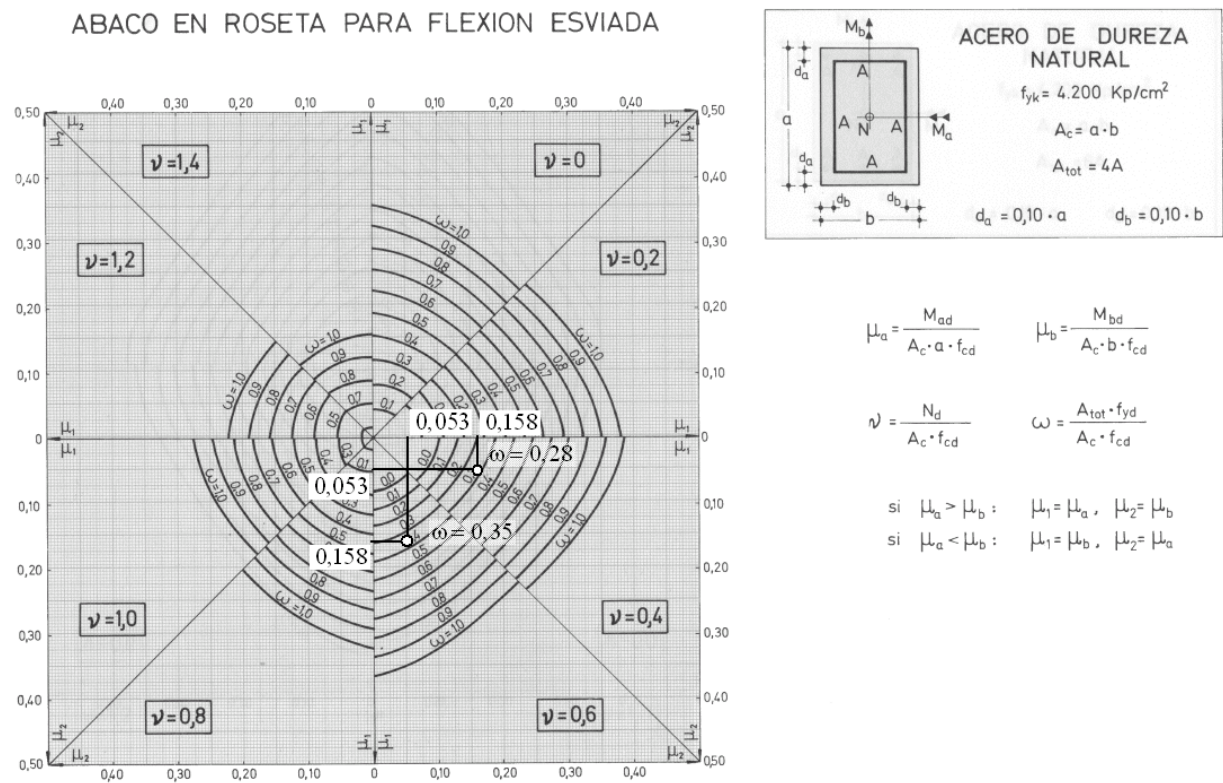


Figura 2.

□ Para  $v = 0,4$

$$\left. \begin{array}{l} \mu_1 = \mu_b = 0,158 \\ \mu_2 = \mu_a = 0,053 \end{array} \right\} \Rightarrow \omega = 0,28$$

□ Para  $v = 0,6$

$$\left. \begin{array}{l} \mu_1 = \mu_b = 0,158 \\ \mu_2 = \mu_a = 0,053 \end{array} \right\} \Rightarrow \omega = 0,35$$

Para  $v = 0,422$  interpolamos:

$$\omega = \omega_1 + \frac{\omega_2 - \omega_1}{v_2 - v_1} (v - v_1) \Rightarrow \omega = 0,29$$

### **Cálculo de la armadura**

La sección total de acero necesaria por cálculo será:

$$A_{tot} = \omega \frac{A_c \cdot f_{cd}}{f_{yd}} = 0,29 \frac{40 \cdot 80 \cdot 16,7}{347,8} \Rightarrow A_{tot} = 44,1 \text{ cm}^2$$

que cumple las cuantías límites, tanto mínimas como máximas, calculadas anteriormente, por lo que será la que dispondremos.

Para seleccionar finalmente la configuración de armado para cubrir la sección anterior chequearemos distintas alternativas, cada una de ellas para un determinado diámetro de barra,  $\emptyset$ . Para cada uno de éstos seguiremos el siguiente procedimiento.

□ Determinar el número de barras necesarias

$$n = \frac{A_{tot}}{A_{\emptyset}}$$

donde  $A_{\emptyset}$  es el área de acero de una barra del diámetro  $\emptyset$ .

□ Seleccionar el número,  $n^*$ , múltiplo de cuatro inmediatamente superior al calculado anteriormente, para permitir que la configuración de barras sea simétrica a cuatro caras.

□ Determinar la configuración de barras, que se indicará de la forma:

$$n_{esq} \emptyset D_{esq} + n_x \emptyset D_x + n_y \emptyset D_y$$

donde:

$n_{esq} \emptyset D_{esq}$ : indica el número y diámetro de las barras situadas en las equinas de la sección. Si se trata de barras aisladas  $n_{esq}$  será siempre 4, y si son barras agrupadas será múltiplo de cuatro.

$n_x \emptyset D_x$ : indica el número y diámetro de las barras situadas en las caras horizontales (x) de la sección.  $n_x$  será siempre múltiplo de 2.

$n_y \emptyset D_y$ : indica el número y diámetro de las barras situadas en las caras verticales (y) de la sección.  $n_y$  será siempre múltiplo de 2.

Para configuración simétrica a cuatro caras será siempre  $n_x=n_y$ . Además, para este problema,  $D_{esq}=D_x=D_y=\emptyset$ .

- Determinar el ancho mínimo para que la configuración de armado cumpla los requisitos normativos relativos a las distancias a los paramentos y distancias libres entre armaduras, de acuerdo a la Ficha 03 (Armaduras).

En la Tabla 3 se muestran las distintas configuraciones de armado. Se muestran en fondo gris las configuraciones que no entran, y en verde la configuración que mejor se ajusta a las necesidades de armado (menor sección de acero).

$\emptyset$ ( $A_{\emptyset}$ )	n	$n^*$ ( $A_{real}$ )	$n_{esq}\emptyset D_{esq} + n_x\emptyset D_x + n_y\emptyset D_y$	bmín (nº barras cara)
12 (1,13 cm <sup>2</sup> )	40	40 (45,2 cm <sup>2</sup> )	4Ø12 + 18Ø12 + 18Ø12	42 cm (11Ø12)
16 (2,01 cm <sup>2</sup> )	22	24 (48,2 cm <sup>2</sup> )	4Ø16 + 10Ø16 + 10Ø16	32 cm (7Ø16)
20 (3,14 cm <sup>2</sup> )	15	16 (50,2 cm <sup>2</sup> )	4Ø20 + 6Ø20 + 6Ø20	27 cm (5Ø20)
25 (4,91 cm <sup>2</sup> )	9	12 (58,9 cm <sup>2</sup> )	4Ø25 + 4Ø25 + 4Ø25	25 cm (6Ø25)

Tabla 3. Configuraciones de armado

## 2.- DIMENSIONAMIENTO CON EL MÉTODO DE LA INSTRUCCIÓN EHE

Este método consiste en transformar el problema de flexo-compresión esviada en otro de flexo-compresión recta, donde el axil actúa con una excentricidad ficticia en la dirección donde la excentricidad adimensional es mayor.

### Cálculo de la excentricidad ficticia

Los esfuerzos actuantes sobre la sección son equivalentes al axil actuando con las excentricidades:

$$e_x = \frac{M_y}{N} = \frac{225}{1500} \Rightarrow e_x = 15 \text{ cm}$$

$$e_y = \frac{M_x}{N} = \frac{150}{1500} \Rightarrow e_y = 10 \text{ cm}$$

y, en adimensionales:

$$\eta_x = \frac{e_x}{b} = \frac{15}{40} \Rightarrow \eta_x = 0,375$$

$$\eta_y = \frac{e_y}{h} = \frac{10}{80} \Rightarrow \eta_y = 0,125$$

Como  $\eta_x > \eta_y$ , se dimensionará a flexión recta con excentricidad en dirección  $x$  (momento según el eje  $y$ ), con una excentricidad ficticia de valor:

$$\eta'_x = \eta_x + \beta \cdot \eta_y$$

donde el porcentaje  $\beta$  es función del axil adimensional,  $\nu$ , y de la cuantía total de acero,  $\omega$ , y viene dado por los valores de la Tabla 4.

$\nu$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	$\geq 1$
$\omega < 0,2$	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,4	0,4
$0,2 \leq \omega \leq 0,6$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,5	0,5
$0,6 < \omega$	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,6	0,6

Tabla 4. Valores de  $\beta$

Como el caso de dimensionamiento no conocemos la cuantía de acero,  $\omega$  (es lo que queremos calcular), supondremos siempre que ésta estará en el intervalo  $0,2 \leq \omega \leq 0,6$ . Tendremos que comprobar esta hipótesis, y si no se cumple, volver a calcular entrando en la fila de la Tabla 4 según la cuantía obtenida.

Por otro lado, como  $\nu = 0,422$  tendremos que interpolar para determinar  $\beta$ :

$$\left. \begin{array}{l} \nu_1 = 0,4 \Rightarrow \beta_1 = 0,9 \\ \nu_2 = 0,5 \Rightarrow \beta_2 = 0,8 \end{array} \right\} \text{Para } \nu = 0,422 \Rightarrow \beta = \beta_1 + \frac{\beta_2 - \beta_1}{\nu_2 - \nu_1} (\nu - \nu_1) \Rightarrow \beta = 0,88$$

y la excentricidad ficticia será:

$$\eta'_x = 0,375 + 0,88 \cdot 0,125 \Rightarrow \eta'_x = 0,454$$

Por lo tanto, finalmente tenemos que dimensionar a flexo-compresión recta con armadura simétrica a cuatro caras, para soportar los esfuerzos:

$$\nu = 0,422$$

$$\mu = \eta'_x \cdot \nu = 0,454 \cdot 0,422 \Rightarrow \mu = 0,192$$

### Cálculo de la cuantía de acero

Utilizaremos los diagramas de interacción, por lo que debemos previamente seleccionar el que se ajusta a los parámetros de nuestra sección:

- ✓ Sección rectangular.
- ✓ Armadura simétrica a cuatro caras.
- ✓ Recubrimiento  $d' = 0,14 \cdot h^4$ .
- ✓ Acero:  $f_{yk} = 400 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

y seleccionamos el que se muestra en la Figura 3<sup>5</sup>. Del lado de la seguridad, de los recubrimientos disponibles (5%, 10% y 15%), hemos tomado el recubrimiento del 15%, ya que de esta forma calculamos con brazos mecánicos menores que los reales, y por lo tanto la sección calculada será menos resistente que la realmente ejecutada.

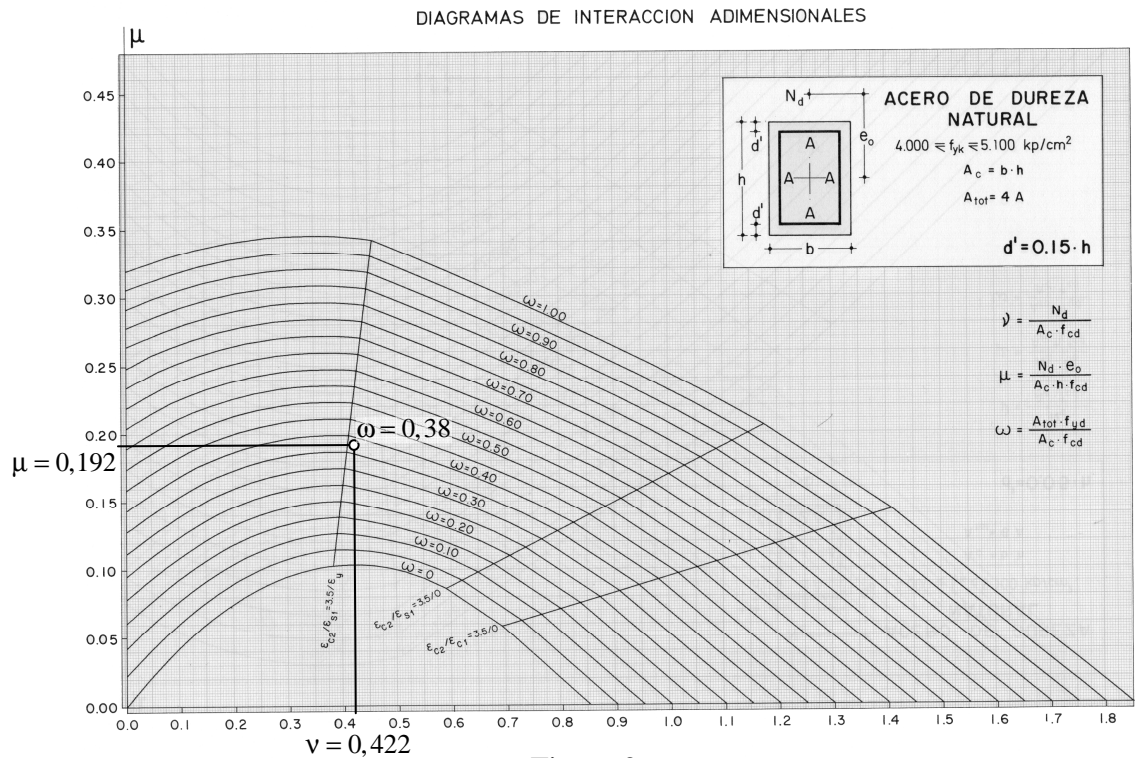
Entrando en el diagrama con los esfuerzos de cálculo<sup>6</sup>, se obtiene:

<sup>4</sup>  $d'$  se corresponde con el recubrimiento mecánico de las armaduras, y  $h$  con el canto de la sección en el sentido de la flexión. Como ésta se produce en torno al eje  $y$ , este canto se corresponde con el ancho de la sección, y por lo tanto el recubrimiento es  $\delta = \frac{d'}{b} = \frac{5,5}{40} = 0,14$

<sup>5</sup> Tomado de la obra "Hormigón armado" de P. Jiménez Montoya, A. García Meseguer y F. Morán Cabré.

<sup>6</sup> La definición de las variables adimensionales es la misma que la utilizada para obtener la excentricidad ficticia

$\omega = 0,38$



valor superior al obtenido con el método de los diagramas de roseta ( $\omega = 0,29$ ), ya que el método de la Instrucción EHE es un método aproximado, y, por lo tanto, debe calcular del lado de la seguridad.

**Cálculo de la armadura**

La sección total de acero necesaria por cálculo será:

$$A_{tot} = \omega \frac{A_c \cdot f_{cd}}{f_{yd}} = 0,38 \frac{40 \cdot 80 \cdot 16,7}{347,8} \Rightarrow A_{tot} = 58,3 \text{ cm}^2$$

A partir de aquí, para la determinación de la configuración de armado, se procede de igual forma que con el método de los diagramas de roseta.

$\varnothing (A_\varnothing)$	n	n* ( $A_{real}$ )	$n_{esq} \varnothing D_{esq} + n_x \varnothing D_x + n_y \varnothing D_y$	bmín (nº barras cara)
12 (1,13 cm <sup>2</sup> )	52	52 (58,8 cm <sup>2</sup> )	4 $\varnothing$ 12 + 24 $\varnothing$ 12 + 24 $\varnothing$ 12	51 cm (14 $\varnothing$ 12)
16 (2,01 cm <sup>2</sup> )	29	32 (64,3 cm <sup>2</sup> )	4 $\varnothing$ 16 + 14 $\varnothing$ 16 + 14 $\varnothing$ 16	39 cm (9 $\varnothing$ 16)
20 (3,14 cm <sup>2</sup> )	19	20 (62,8 cm <sup>2</sup> )	4 $\varnothing$ 20 + 8 $\varnothing$ 20 + 8 $\varnothing$ 20	31 cm (6 $\varnothing$ 20)
25 (4,91 cm <sup>2</sup> )	12	12 (58,9 cm <sup>2</sup> )	4 $\varnothing$ 25 + 4 $\varnothing$ 25 + 4 $\varnothing$ 25	25 cm (4 $\varnothing$ 25)

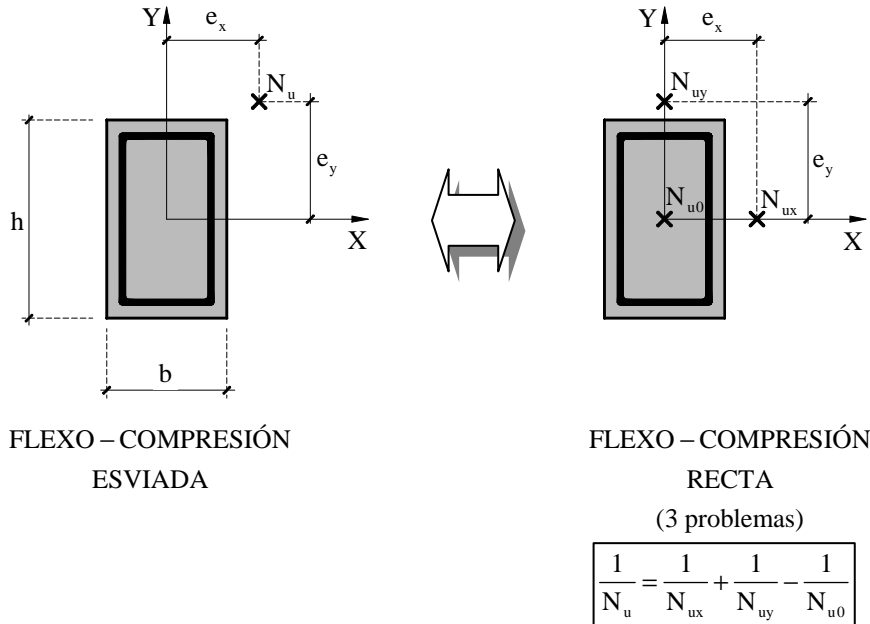
Tabla 5. Configuraciones de armado

**3.- COMPROBACIÓN CON LA FÓRMULA DE BRESLES**

Este método permite estimar, para una sección rectangular de hormigón armado, el esfuerzo axial de agotamiento,  $N_u$ , cuando éste actúa con excentricidades  $e_x$  y  $e_y$ , a partir de los tres axiles de agotamiento de la sección,  $N_{u0}$ ,  $N_{ux}$  y  $N_{uy}$ , cuando éstos actúan sin excentricidad

(compresión simple), únicamente con excentricidad  $e_x$  y únicamente con excentricidad  $e_y$ , respectivamente, a través de la fórmula de Bresler:

$$\frac{1}{N_u} = \frac{1}{N_{ux}} + \frac{1}{N_{uy}} - \frac{1}{N_{u0}}$$



- $N_u$ : Axil de agotamiento en flexo-compresión esviada, cuando actúa con las excentricidades ( $e_x, e_y$ )
- $N_{ux}$ : Axil de agotamiento en flexo-compresión recta, cuando actúa únicamente con la excentricidad  $e_x$ .
- $N_{uy}$ : Axil de agotamiento en flexo-compresión recta, cuando actúa únicamente con la excentricidad  $e_y$ .
- $N_{u0}$ : Axil de agotamiento en compresión simple, cuando actúa sin excentricidades.

Fig. 4. Fórmula de Bresler

### Determinación los axiles de agotamiento en flexo-compresión recta y compresión simple

Para determinar estos axiles de agotamiento utilizaremos los diagramas de interacción, por lo que debemos previamente seleccionar el que se ajusta a los parámetros de nuestra sección:

- ✓ Sección rectangular.
- ✓ Armadura simétrica a cuatro caras.
- ✓ Recubrimiento  $d' = 0,14 \cdot h^7$ .
- ✓ Acero:  $f_{yk} = 400 \frac{N}{mm^2}$

y seleccionamos, al igual que en apartado 2, el que se muestra en la Figura 3. De nuevo, del lado de la seguridad, de los recubrimientos disponibles (5%, 10% y 15%), hemos tomado el

<sup>7</sup>  $d'$  se corresponde con el recubrimiento mecánico de las armaduras, y  $h$  con el canto de la sección en el sentido de la flexión. En el caso de la flexión en el eje  $x$  el canto es  $h=80$  cm. ( $d' = 0,14 \cdot h$ ), en el caso de la flexión en el eje  $y$  el canto es  $b=40$ cm ( $d' = 0,07 \cdot b$ ), y en el caso de la compresión simple este dato no es significativo. Como los recubrimientos adimensionales son distintos en cada dirección, y al objeto de no tener que utilizar ábacos distintos, del lado de la seguridad, se considera el mayor de los dos.

recubrimiento del 15%, ya que de esta forma calculamos con brazos mecánicos menores que los reales, y por lo tanto la sección calculada será menos resistente que la realmente ejecutada.

Las variables adimensionales que intervienen en el cálculo son las siguientes:

$$\delta = \frac{d'}{h}$$

$$\nu = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} \quad \mu_x = \frac{N_d \cdot e_y}{A_c \cdot h \cdot f_{cd}} \quad \mu_y = \frac{N_d \cdot e_x}{A_c \cdot b \cdot f_{cd}}$$

$$\omega = \frac{A_{tot} \cdot f_{yd}}{A_c \cdot f_{cd}}$$

de las cuales las que son datos en el problema de comprobación son:

$$\delta = \frac{d'}{h} = 0,14$$

$$\eta_x = \frac{e_x}{b} = \frac{0,15}{40} = 0,375 \quad \text{y} \quad \eta_y = \frac{e_y}{h} = \frac{0,10}{80} = 0,125$$

$$\omega = \frac{A_{tot} \cdot f_{yd}}{A_c \cdot f_{cd}} = 0,29 \quad \text{y} \quad \omega = \frac{A_{tot} \cdot f_{yd}}{A_c \cdot f_{cd}} = 0,38$$

Entrando en los diagramas (ver Figura 5 y 6) con las excentricidades conocidas, se obtiene:

□ Para  $\omega = 0,29$

$$\left. \begin{array}{l} \eta = 0 \Rightarrow \nu_0 = 1,14 \\ \eta_x = 0,375 \Rightarrow \nu_x = 0,45 \\ \eta_y = 0,125 \Rightarrow \nu_y = 0,82 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu_x} + \frac{1}{\nu_y} - \frac{1}{\nu_0} \Rightarrow \nu = 0,39$$

□ Para  $\omega = 0,38$

$$\left. \begin{array}{l} \eta = 0 \Rightarrow \nu_0 = 1,23 \\ \eta_x = 0,375 \Rightarrow \nu_x = 0,49 \\ \eta_y = 0,125 \Rightarrow \nu_y = 0,89 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu_x} + \frac{1}{\nu_y} - \frac{1}{\nu_0} \Rightarrow \nu = 0,42$$

y deshaciendo el cambio de variable queda:

□ Para  $\omega = 0,29$

$$N_u = \nu \cdot A_c \cdot f_{cd} \Rightarrow N_u = 2.080 \text{ KN}$$

valor inferior a  $N_d = 2.250 \text{ KN}$  con el que se dimensionó la cuantía  $\omega = 0,29$  con el método de los ábacos de roseta en el apartado 1. Este resultado es lógico ya que este método es aproximado, y, por lo tanto, debe calcular del lado de la seguridad.

□ Para  $\omega = 0,38$

$$N_u = v \cdot A_c \cdot f_{cd} \Rightarrow N_u = 2.270 \text{ KN}$$

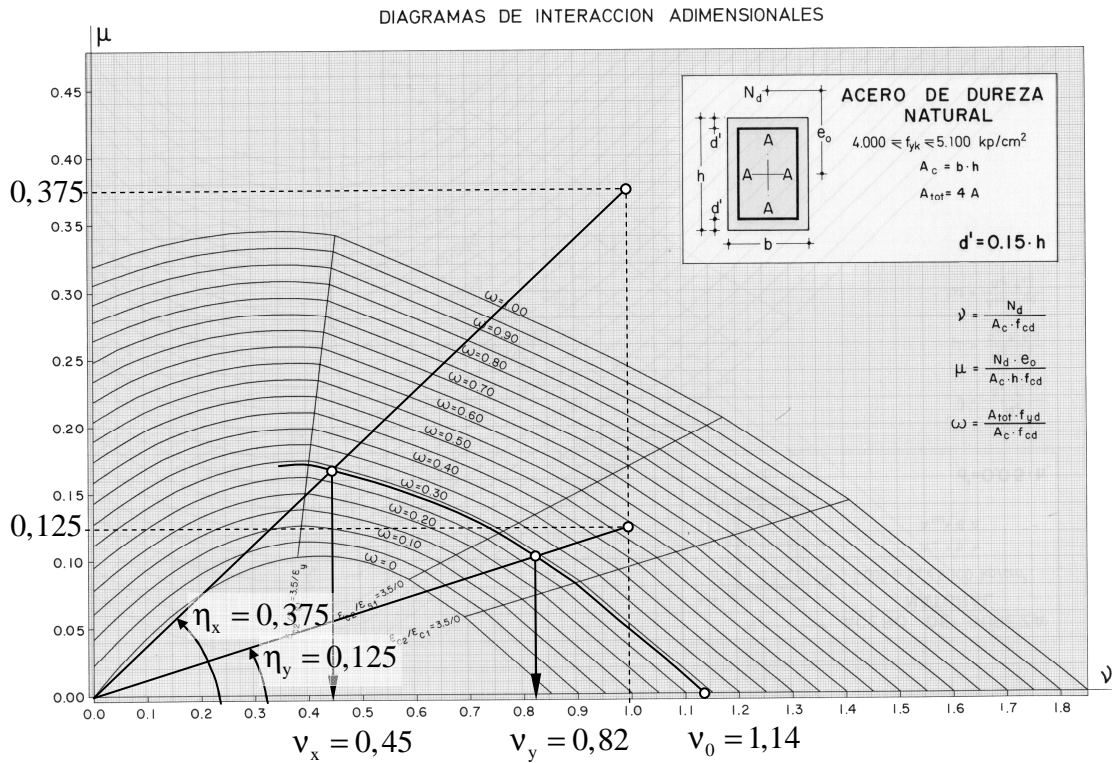


Figura 5.  $\omega = 0,29$

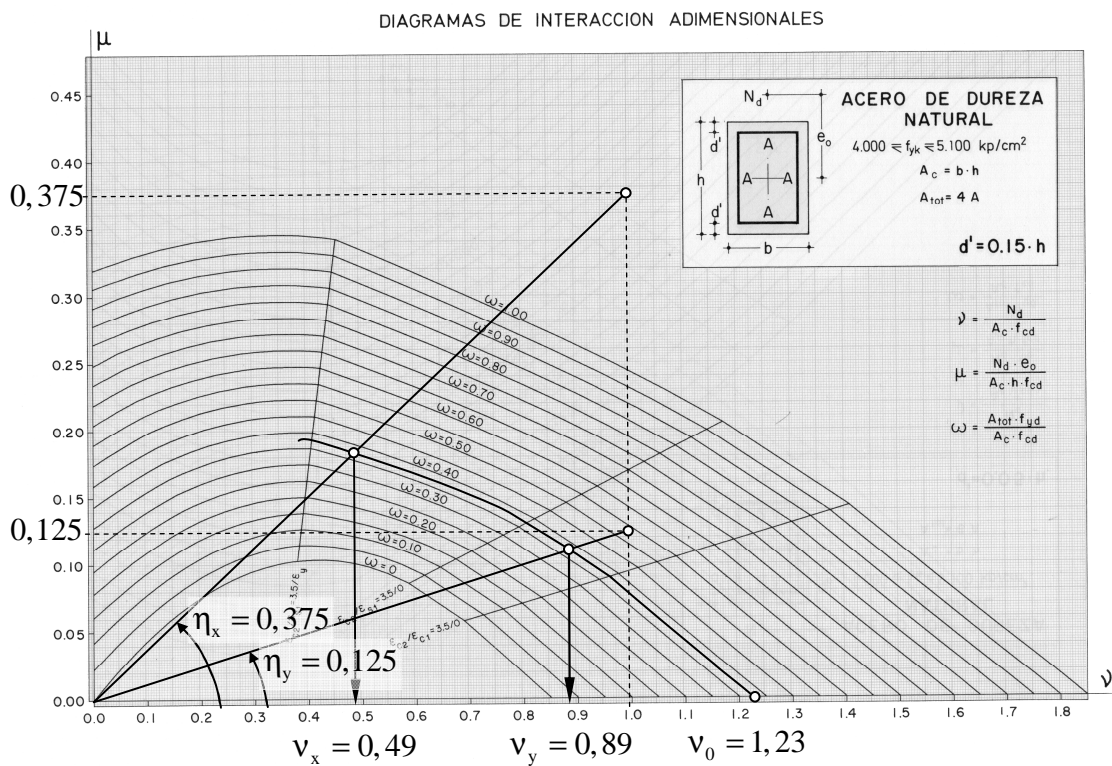
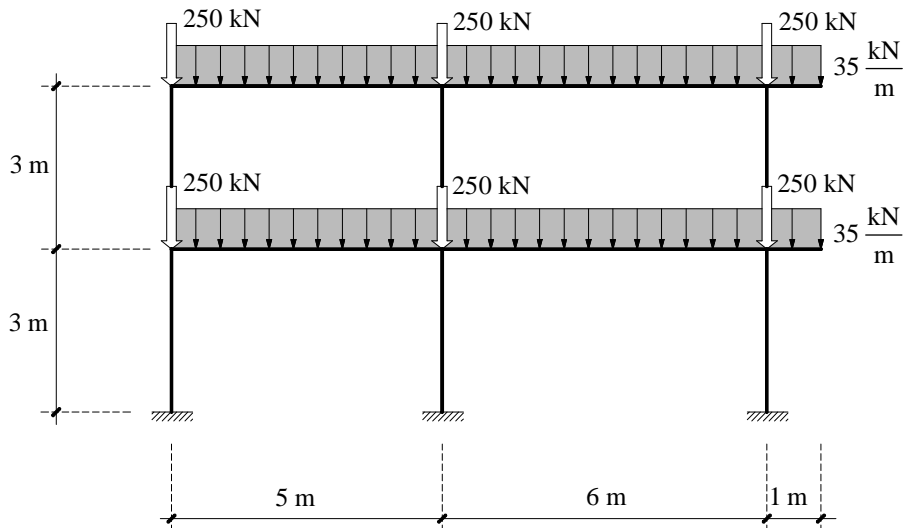


Figura 6.  $\omega = 0,38$

## PROBLEMA 17-001

Para el pórtico de hormigón armado de la figura, sometido a una carga vertical uniformemente distribuida de  $35 \text{ kN/m}$  actuando sobre los dinteles, y a unas cargas puntuales de  $250 \text{ kN}$  actuando sobre las cabezas de los pilares, todas de carácter variable, se pide comprobar y dimensionar las armaduras de la alineación de vigas de la primera planta.



### Datos:

Hormigón: HA-25 (CEM I)

Acero: B 400S

Vida útil de proyecto: 100 años

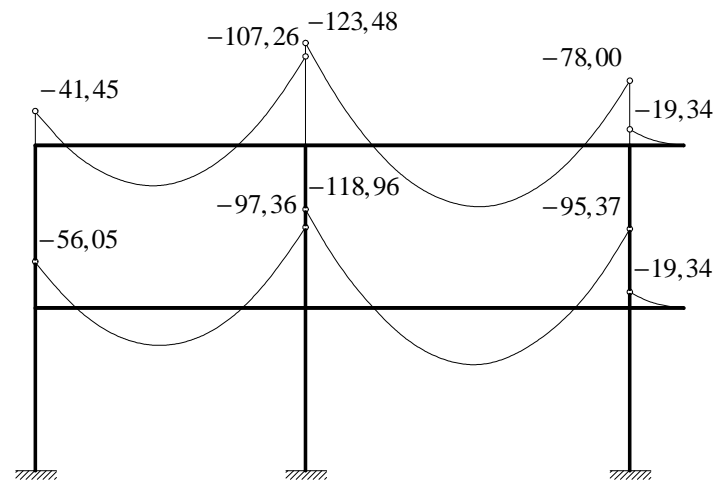
Situación: Persistente

Ambiente: IIa

Secciones:

Vigas:  $50 \times 30 \text{ [cm]}$

Pilares:  $40 \times 30 \text{ [cm]}$



(⊕) Momentos flectores en extremos de vigas [ $\text{kN} \cdot \text{m}$ ]

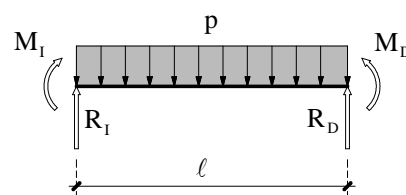
## 1. LEYES DE ESFUERZOS

Para determinar las leyes de esfuerzos planteamos el equilibrio de una porción de pieza, comprendida entre una sección de origen (apoyo izquierdo) y otra situada a una distancia  $x$ . Para poder realizar este equilibrio necesitamos conocer los esfuerzos en la sección de origen.

Conocemos los momentos flectores en extremos de vigas y el axil (constante) a lo largo de la misma. Necesitamos conocer el esfuerzo cortante en la sección de origen. Para conocer éste planteamos el equilibrio de la viga en su conjunto.

Haciendo equilibrio de momentos respecto al apoyo de la derecha se obtiene:

$$\begin{aligned} \circlearrowleft \sum M_{\text{apoyo der}} = 0 &\Rightarrow R_1 \cdot \ell + M_1 - p \frac{\ell^2}{2} - M_D = 0 \\ &\Rightarrow R_1 = \frac{M_D - M_1 + p \frac{\ell^2}{2}}{\ell} \end{aligned}$$



Esta reacción  $R_1$  coincide con el cortante en el apoyo izquierdo.

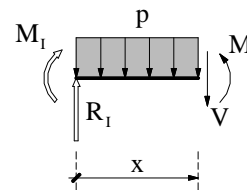
Finalmente las leyes de esfuerzos, planteando el equilibrio de la porción de pieza comprendida entre la sección de origen y la situada a una distancia  $x$ , quedan:

➤ Equilibrio de fuerzas verticales:

$$\downarrow \sum F_v = 0 \Rightarrow V + p \cdot x - R_1 = 0 \Rightarrow V = R_1 - p \cdot x$$

➤ Equilibrio de momentos respecto a la sección situada a una distancia  $x$ :

$$\circlearrowleft \sum M = 0 \Rightarrow M + p \frac{x^2}{2} - M_1 - R_1 \cdot x = 0 \Rightarrow M = M_1 + R_1 \cdot x - \frac{p}{2} x^2$$



Sustituyendo valores se obtienen las leyes que se indican en la Tabla 1. Hay que tener presente que la carga uniforme  $p$  es la suma de la carga exterior aplicada de 35 kN/m más el peso propio de la viga<sup>1</sup>, por lo que:

$$p = 35 + 0,50 \cdot 0,30 \cdot 24,5 = 38,68 \text{ kN/m}$$

Vano nº1	Vano nº2	Voladizo
$V = 88,44 - 38,68 \cdot x$	$V = 119,97 - 38,68 \cdot x$	$V = 38,68 - 38,68 \cdot x$
$M = -56,05 + 88,44 \cdot x - 19,34 \cdot x^2$	$M = -118,96 + 119,97 \cdot x - 19,34 \cdot x^2$	$M = -19,34 + 38,68 \cdot x - 19,34 \cdot x^2$
Tabla 1		

<sup>1</sup> Consideramos que el peso propio del hormigón armado es  $\gamma = 24,5 \text{ kN/m}^3$

## 2. CÁLCULOS PREVIOS

### 2.1 Valores de cálculo (Ficha 05: seguridad)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Estado Límite Último} \\ \text{Situación persistente} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \gamma_c = 1,50 \\ \gamma_s = 1,15 \end{array} \right.$$

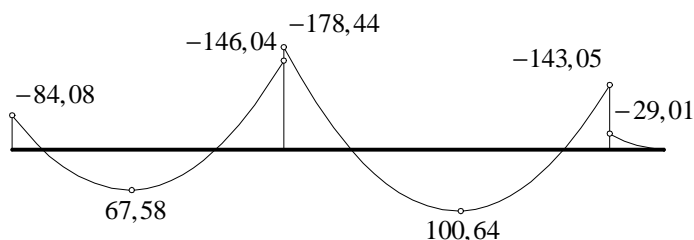
$$\left. \begin{array}{l} \text{Estado Límite Último} \\ \text{Situación persistente} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Efecto Favorable} \left\{ \begin{array}{l} \gamma_G = 1,00 \\ \gamma_Q = 0,00 \end{array} \right. \\ \text{Efecto Desfavorable} \left\{ \begin{array}{l} \gamma_G = 1,35 \\ \gamma_Q = 1,50 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

➤ Resistencia de cálculo a compresión del hormigón:  $f_{cd} = \alpha_{cc} \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = 0,85 \frac{25}{1,50} = 14,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

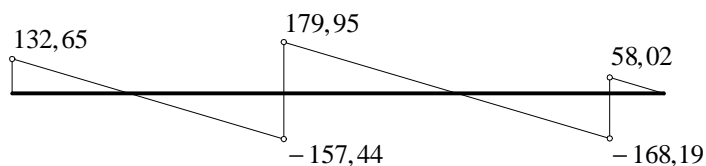
➤ Resistencia de cálculo del acero:  $f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{400}{1,15} = 347,8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

○ Para la armadura transversal  $f_{y90,d} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \not\geq 400 \Rightarrow f_{y90,d} = 347,8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

- Esfuerzos de cálculo<sup>2</sup>: Los esfuerzos que tienen que soportar las vigas de la alineación, una vez mayorados, son los de la figura, que de forma analítica vienen recogidos en las leyes de la Tabla 2. Además, se ha indicado el máximo momento flector a positivo que se produce en el



(⊕) Momentos flectores de **cálculo** [kN · m]



(⊕)↓ Esfuerzos cortantes de **cálculo** [kN]

<sup>2</sup> Por simplicidad, el peso propio de la estructura se ha considerado junto con la carga variable en una única hipótesis simple. Por lo tanto, los esfuerzos de cálculo se obtienen mayorando las leyes de esfuerzos de esta hipótesis simple por el coeficiente parcial de seguridad correspondiente a efecto desfavorable ( $\gamma_Q=1,50$ ). En caso de existir más de un estado de cargas, habría que obtener las envolventes de esfuerzos de acuerdo a las combinaciones que establece la Instrucción EHE.

vano, que se alcanza en la sección donde el cortante es nulo.

Vano nº1	Vano nº2	Voladizo
$V_d = 132,65 - 58,02 \cdot x$	$V_d = 179,95 - 58,02 \cdot x$	$V_d = 58,02 - 58,02 \cdot x$
$M_d = -84,08 + 132,65 \cdot x - 29,01 \cdot x^2$	$M_d = -178,44 + 179,95 \cdot x - 29,01 \cdot x^2$	$M_d = -29,01 + 58,02 \cdot x - 29,01 \cdot x^2$
TABLA 2		

## 2.2 Cálculo de los recubrimientos

Al igual que el Problema 08-003 adoptamos los recubrimientos  $d_1 = d_2 = 5,5\text{cm}$

## 3. COMPROBACIÓN DE LA SECCIÓN DE HORMIGÓN

Para que no se produzca el agotamiento por compresión oblicua en el alma, se tiene que cumplir, en ausencia de esfuerzo torsor, y **para las secciones situadas a partir de la cara del apoyo**:

$$V_d \leq V_{ul} = 0,30 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d$$

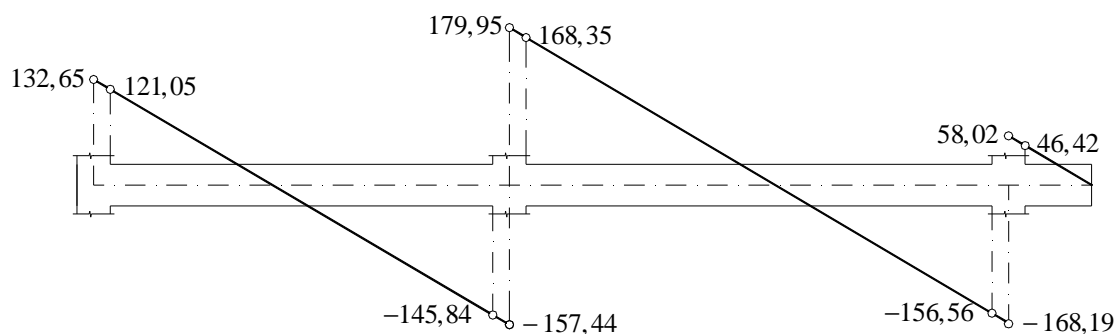
Teniendo presente que todas las vigas tienen la misma sección, sustituyendo valores se obtiene:

$$V_{ul} = 0,30 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d = 0,30 \cdot 14,2 \cdot 0,30 \cdot 0,445 \Rightarrow V_{ul} = 567,37 \text{ kN}$$

Como por otro lado tenemos que:

$$V_d \leq 179,95 \text{ kN}^3$$

resulta que se cumple esta comprobación.



Esfuerzos cortantes de **cálculo** [kN]

<sup>3</sup> Téngase presente que la comprobación con el cortante  $V_d$  hay que hacerla a partir de la cara del apoyo, y por lo tanto este cortante es inferior al máximo que se produce a eje de pilares.

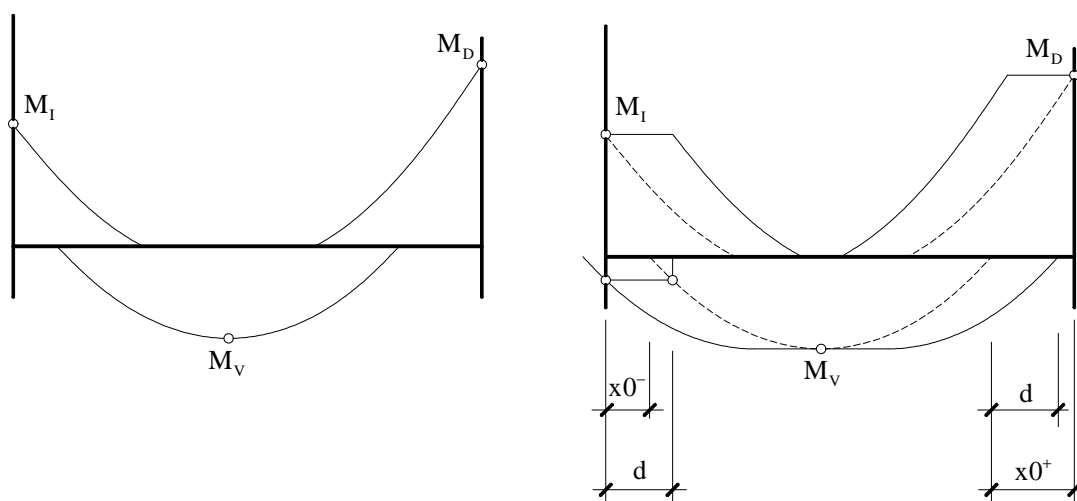
#### 4. DIMENSIONAMIENTO DE LA ARMADURA LONGITUDINAL

Los esfuerzos a considerar para el cálculo de la armadura longitudinal, de nuevo en ausencia de esfuerzo torsor, son el momento flector y el cortante (depreciamos el esfuerzo axial debido a su pequeña importancia, estando además del lado de la seguridad). La influencia del esfuerzo cortante la vamos a tener en cuenta desplazando la ley de momentos flectores una cantidad, del lado de la seguridad, igual al canto útil de la sección de la viga en el sentido más desfavorable. Así pues, el único esfuerzo a considerar va a ser el momento flector.

##### 4.1 Esfuerzos en las secciones críticas

Estas secciones críticas son, para cada uno de los vanos, las correspondientes a los apoyos y la más solicitada en el vano.

Los momentos flectores a los que están sometidas estas secciones críticas son los obtenidos del análisis estructural, y vienen recogidos en las envolventes estudiadas anteriormente. Además, hay que tener presente que el decalaje de las leyes de momentos flectores puede hacer que las secciones de los apoyos tengan que soportar un momento flector a positivo, siempre que estas secciones se encuentren del punto de corte de la flexión positiva a una distancia inferior al canto útil de la viga.



Para nuestro problema, los puntos de corte de la flexión positiva son:

➤ Vano nº1

$$M_d = -84,08 + 132,65 \cdot x - 29,01 \cdot x^2 \Rightarrow \begin{cases} x0^- = \frac{132,65 - \sqrt{132,65^2 - 4 \cdot 29,01 \cdot (84,08 + M_d)}}{2 \cdot 29,01} \\ x0^+ = \frac{132,65 + \sqrt{132,65^2 - 4 \cdot 29,01 \cdot (84,08 + M_d)}}{2 \cdot 29,01} \end{cases}$$

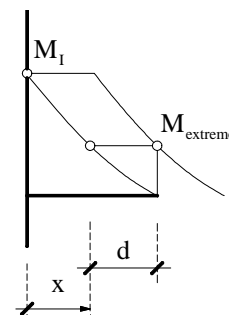
$$\text{Para } M_d = 0 \Rightarrow \begin{cases} x0^- = 0,76 > 0,445 \\ x0^+ = 1,19 > 0,445 \end{cases}$$

➤ Vano °2

$$M_d = -178,44 + 179,95 \cdot x - 29,01 \cdot x^2 \Rightarrow \begin{cases} x0^- = \frac{179,95 - \sqrt{179,95^2 - 4 \cdot 29,01 \cdot (178,44 + M_d)}}{2 \cdot 29,01} \\ x0^+ = \frac{179,95 + \sqrt{179,95^2 - 4 \cdot 29,01 \cdot (178,44 + M_d)}}{2 \cdot 29,01} \end{cases}$$

Para  $M_d = 0 \Rightarrow \begin{cases} x0^- = 1,24 > 0,445 \\ x0^+ = 1,04 > 0,445 \end{cases}$

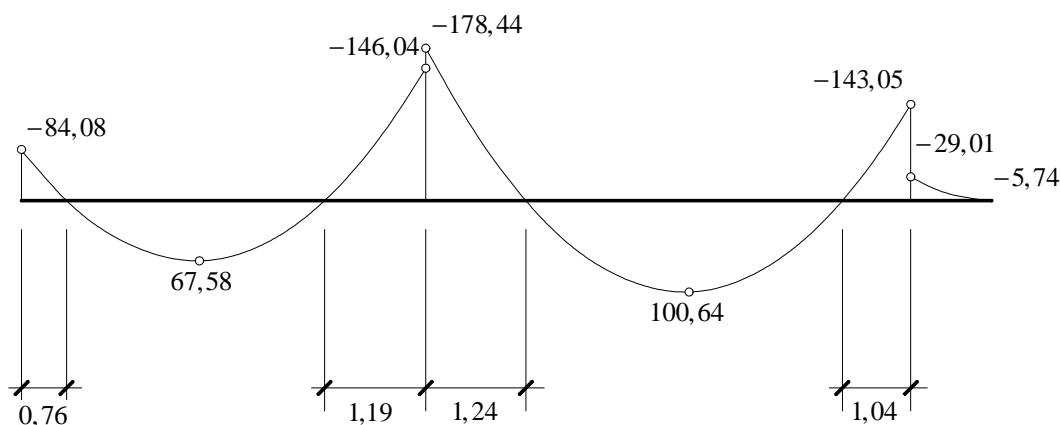
Una situación parecida sucede en los voladizos, donde el decalaje de la ley de momentos flectores hace que en el extremo del mismo, se tenga que soportar un momento flector, que es el correspondiente a una distancia  $d$  del extremo.



En nuestro problema:

$$x = 1 - 0,445 = 0,555 \text{ m} \Rightarrow M_{\text{extremo}} = -5,74 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Por lo tanto las secciones críticas, con sus correspondientes momentos flectores de cálculo a considerar, son las que se muestran en la siguiente figura:



(+) Momentos flectores de **cálculo** [kN · m]

#### 4.2 Cálculo de los valores límites

De la Ficha 07 obtienen:

$$\xi_{\text{lím}} = 0,668$$

$$v_{\text{lím}} = 0,534$$

$$\mu_{\text{lím}} = 0,392$$

o bien analíticamente:

$$\xi_{\text{lim}} = \frac{1}{1 + 1,43 \cdot 10^{-3} \cdot f_{yd}} \Rightarrow \begin{cases} v_{\text{lim}} = 0,80 \cdot \xi_{\text{lim}} \\ \mu_{\text{lim}} = 0,80 \cdot \xi_{\text{lim}} \cdot (1 - 0,4 \cdot \xi) \end{cases}$$

### 4.3 Cálculo de las cuantías límites (Ficha 06: cuantías límites)

Como las secciones de todos los vanos son las mismas, las cuantías límites coincidirán también para todos los vanos.

#### Armaduras mínimas geométricas

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tipo de acero: B400S} \\ \text{Tipo de elemento estructural: viga} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} A_{s1} \geq \frac{3,3}{1000} A_c \Rightarrow A_{s1} \geq 4,95 \text{ cm}^2 \\ A_{s2} \geq 0,30 \cdot A_{s1} \Rightarrow A_{s2} \geq 1,49 \text{ cm}^2 \end{cases}$$

#### Armaduras mínimas mecánicas

$$A_{s1} \geq 0,04 \frac{b \cdot h \cdot f_{cd}}{f_{yd}} \Rightarrow A_{s1} \geq 2,44 \text{ cm}^2$$

$$A_{s2} \geq 0,05 \frac{N_d}{f_{yd}} \Rightarrow A_{s2} \text{ inferior a la cuantía mínima geométrica}^4$$

#### Armaduras mínimas definitivas:

$$\text{Finalmente, las armaduras mínimas serán: } \begin{cases} A_{s1} \geq 4,95 \text{ cm}^2 \\ A_{s2} \geq 1,49 \text{ cm}^2 \end{cases}$$

#### Armaduras máximas:

$$A_{s2,\text{máx}} = A_{s1,\text{máx}} = 0,04 \cdot A_c \Rightarrow A_{s2,\text{máx}} = A_{s1,\text{máx}} = 60 \text{ cm}^2$$

### 4.4 Armaduras de cálculo en las secciones críticas

#### Vano n°1

- $M_1 = 84,08 \text{ kN} \cdot \text{m} \Rightarrow \mu_1 = \frac{M_1}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = 0,100$

<sup>4</sup> En las vigas, donde el esfuerzo axial es muy pequeño, puede prescindirse de realizar esta comprobación.

$$\bullet \mu_1 < \mu_{\text{lim}} \Rightarrow \begin{cases} \xi = 1,25 \cdot (1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \mu_1}) = 0,132 \Rightarrow & \omega_2 = 0 \Rightarrow & A_{s2} = 0 \\ & \omega_1 = 0,8 \cdot \xi = 0,105 \Rightarrow & A_{s1} = 5,73\text{cm}^2 \end{cases}$$

$$M_V = 67,58 \text{ kN} \cdot \text{m} \Rightarrow \mu_1 = \frac{M_V}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = 0,080$$

$$\mu_1 < \mu_{\text{lim}} \Rightarrow \begin{cases} \xi = 0,105 \Rightarrow & \omega_2 = 0 \Rightarrow & A_{s2} = 0 \\ & \omega_1 = 0,084 \Rightarrow & A_{s1} = 4,56\text{cm}^2 \end{cases}$$

$$\bullet M_D = 146,04 \text{ kN} \cdot \text{m} \Rightarrow \mu_1 = \frac{M_D}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = 0,174$$

$$\mu_1 < \mu_{\text{lim}} \Rightarrow \begin{cases} \xi = 0,240 \Rightarrow & \omega_2 = 0 \Rightarrow & A_{s2} = 0 \\ & \omega_1 = 0,192 \Rightarrow & A_{s1} = 10,44\text{cm}^2 \end{cases}$$

### Vano n°2

$$\bullet M_I = 178,44 \text{ kN} \cdot \text{m} \Rightarrow \mu_1 = \frac{M_I}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = 0,212$$

$$\mu_1 < \mu_{\text{lim}} \Rightarrow \begin{cases} \xi = 0,301 \Rightarrow & \omega_2 = 0 \Rightarrow & A_{s2} = 0 \\ & \omega_1 = 0,241 \Rightarrow & A_{s1} = 13,11\text{cm}^2 \end{cases}$$

$$\bullet M_V = 100,64 \text{ kN} \cdot \text{m} \Rightarrow \mu_1 = \frac{M_V}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = 0,120$$

$$\mu_1 < \mu_{\text{lim}} \Rightarrow \begin{cases} \xi = 0,160 \Rightarrow & \omega_2 = 0 \Rightarrow & A_{s2} = 0 \\ & \omega_1 = 0,128 \Rightarrow & A_{s1} = 6,95\text{cm}^2 \end{cases}$$

$$\bullet M_D = 143,06 \text{ kN} \cdot \text{m} \Rightarrow \mu_1 = \frac{M_D}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = 0,170$$

$$\mu_1 < \mu_{\text{lim}} \Rightarrow \begin{cases} \xi = 0,234 \Rightarrow & \omega_2 = 0 \Rightarrow & A_{s2} = 0 \\ & \omega_1 = 0,188 \Rightarrow & A_{s1} = 10,20\text{cm}^2 \end{cases}$$

### Voladizo

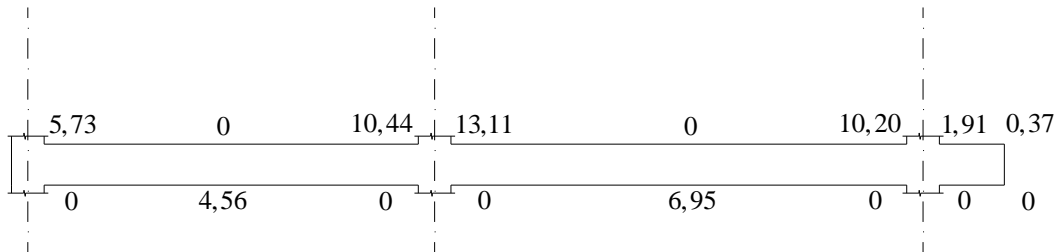
$$\bullet M_I = 29,01 \text{ kN} \cdot \text{m} \Rightarrow \mu_1 = \frac{M_I}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = 0,034$$

$$\mu_1 < \mu_{\text{lim}} \Rightarrow \begin{cases} \xi = 0,044 \Rightarrow & \omega_2 = 0 \Rightarrow & A_{s2} = 0 \\ & \omega_1 = 0,035 \Rightarrow & A_{s1} = 1,91\text{cm}^2 \end{cases}$$

$$\bullet M_{\text{extremo}} = 5,74 \text{ kN} \cdot \text{m} \Rightarrow \mu_1 = \frac{M_I}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = 0,007$$

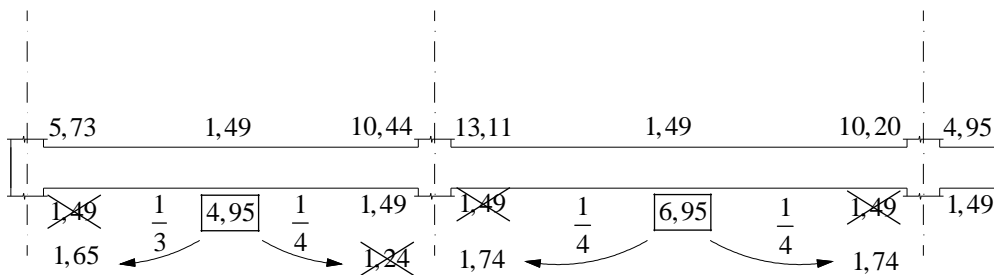
$$\mu_1 < \mu_{lim} \Rightarrow \begin{cases} \xi = 0,009 \Rightarrow & \omega_2 = 0 \Rightarrow A_{s2} = 0 \\ & \omega_1 = 0,007 \Rightarrow A_{s1} = 0,37\text{cm}^2 \end{cases}$$

En la figura siguiente se muestra un resumen con las armaduras de cálculo en las distintas secciones críticas.



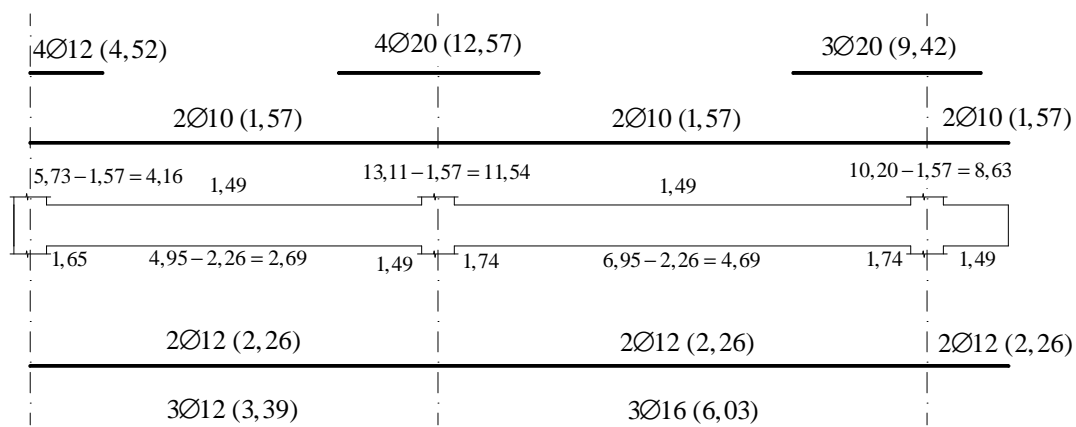
#### 4.5 Armaduras necesarias

Teniendo en cuenta las cuantías mínimas, y la cantidad de acero que hay prolongar desde el vano hasta los apoyos, las armaduras necesarias en cada una de las secciones críticas son las que se muestran en la siguiente figura:

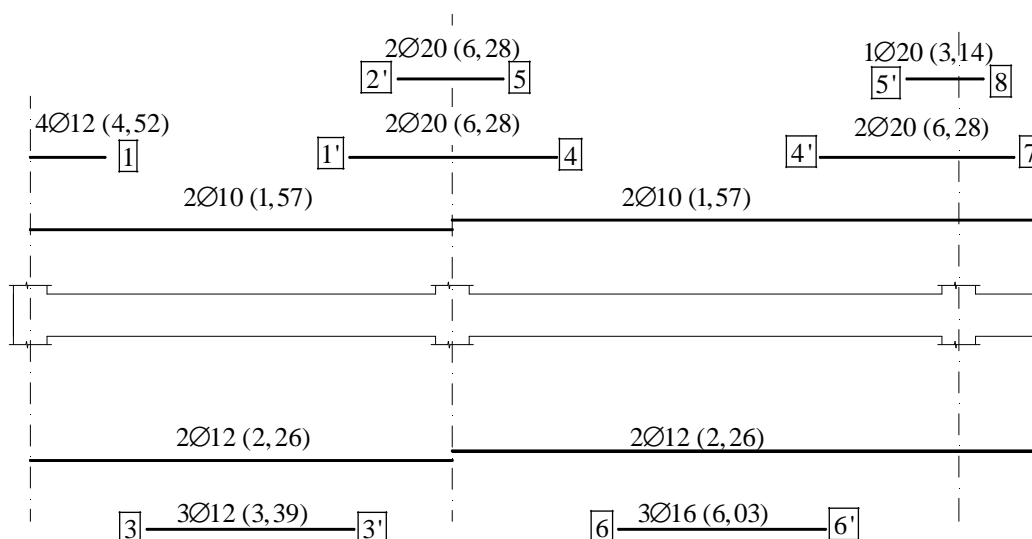


#### 4.6 Esquema de armado

A partir de las necesidades de armado en las secciones críticas se decide realizar el siguiente esquema de armado:



#### 4.7 Puntos de cortes



Para la determinación de los puntos de corte que se realizan en el esquema anterior, necesitamos calcular los siguientes momentos de agotamiento (para la obtención de estos momentos de agotamiento no se consideran las armaduras de compresión):

#### Momentos de agotamiento

##### Vano n° 1

Corte 1 y 1': 2Ø10.

$$A_{s1} = 1,57 \text{ cm}^2 \Rightarrow \omega_1 = \frac{A_{s1} \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} = 0,029 \Rightarrow \xi = \frac{\omega_1}{0,80} = 0,036 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_1 = 0,80 \cdot \xi (1 - 0,4 \cdot \xi) = 0,028 \Rightarrow M_u = \mu_1 \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{cd} = 23,96 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Corte 2': 2Ø10 + 2Ø20.

$$A_{s1} = 7,85\text{cm}^2 \Rightarrow \omega_1 = 0,144 \Rightarrow \xi = 0,181 \Rightarrow \mu_1 = 0,134 \Rightarrow M_u = 112,79 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Corte 3 y 3': 2Ø12.

$$A_{s1} = 2,26\text{cm}^2 \Rightarrow \omega_1 = 0,042 \Rightarrow \xi = 0,052 \Rightarrow \mu_1 = 0,041 \Rightarrow M_u = 34,28 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

### Vano nº 2

Corte 4 y 4': 2Ø10.

$$\text{Igual que 1 y 1'} \Rightarrow M_u = 23,96 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Corte 5 y 5': 2Ø10 + 2Ø20.

$$\text{Igual que 2'} \Rightarrow M_u = 112,79 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Corte 6 y 6': 2Ø12.

$$\text{Igual que 3 y 3'} \Rightarrow M_u = 34,28 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

### Voladizo

Corte 7: 2Ø10

$$\text{Igual que 1 y 1'} \Rightarrow M_u = 23,96 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Corte 8: 2Ø10 + 2Ø20

$$\text{Igual que 2'} \Rightarrow M_u = 112,79 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

En la tabla siguiente se muestra un resumen de los momentos de agotamiento:

Corte	Armadura	$A_{s1}$ [cm]	$M_u$ [kN · m]
1 y 1'	2Ø10	1,57	23,96
2'	2Ø10 + 2Ø20	7,85	112,79
3 y 3'	2Ø12	2,26	34,28
4 y 4'	2Ø10	1,57	23,96
5 y 5'	2Ø10 + 2Ø20	7,85	112,79
6 y 6'	2Ø12	2,26	34,28
7	2Ø10	1,57	23,96
8	2Ø10 + 2Ø20	7,85	112,79

**Puntos de corte teóricos****Vano nº 1**

$$M_d = -84,08 + 132,65 \cdot x - 29,01 \cdot x^2 \Rightarrow \begin{cases} x^- = \frac{132,65 - \sqrt{132,65^2 - 4 \cdot 29,01 \cdot (84,08 + M_u)}}{2 \cdot 29,01} \\ x^+ = \frac{132,65 + \sqrt{132,65^2 - 4 \cdot 29,01 \cdot (84,08 + M_u)}}{2 \cdot 29,01} \end{cases}$$

**Corte 1 y 1'**

$$2\emptyset 10 \Rightarrow M_u = -23,96 \text{ kN} \cdot \text{m} \Rightarrow x = \begin{cases} 0,51 & \boxed{1} \\ 0,94 & \boxed{1'} \end{cases}$$

**Corte 2'**

$$2\emptyset 10 + 2\emptyset 20 \Rightarrow M_u = -112,79 \text{ tm} \Rightarrow x = \begin{cases} -0,21 \\ 0,22 & \boxed{2'} \end{cases}$$

**Corte 3 y 3'**

$$2\emptyset 12 \Rightarrow M_u = 34,28 \text{ tm} \Rightarrow x = \begin{cases} 1,22 & \boxed{3} \\ 1,64 & \boxed{3'} \end{cases}$$

**Vano nº 2**

$$M_d = -178,44 + 179,95 \cdot x - 29,01 \cdot x^2 \Rightarrow \begin{cases} x0^- = \frac{179,95 - \sqrt{179,95^2 - 4 \cdot 29,01 \cdot (178,44 + M_u)}}{2 \cdot 29,01} \\ x0^+ = \frac{179,95 + \sqrt{179,95^2 - 4 \cdot 29,01 \cdot (178,44 + M_u)}}{2 \cdot 29,01} \end{cases}$$

**Corte 4 y 4'**

$$2\emptyset 10 \Rightarrow M_u = -23,96 \text{ kN} \cdot \text{m} \Rightarrow x = \begin{cases} 1,03 & \boxed{4} \\ 0,83 & \boxed{4'} \end{cases}$$

**Corte 5 y 5'**

$$2\emptyset 10 + 2\emptyset 20 \Rightarrow M_u = -112,79 \text{ tm} \Rightarrow x = \begin{cases} 0,39 & \boxed{5} \\ 0,19 & \boxed{5'} \end{cases}$$

Corte 6 y 6'

$$2\varnothing 12 \Rightarrow M_u = 34,28 \text{tm} \Rightarrow x = \begin{cases} 1,59 & \boxed{6} \\ 1,39 & \boxed{6'} \end{cases}$$

**Voladizo**

$$M_d = -29,01 + 58,02 \cdot x - 29,01 \cdot x^2 \Rightarrow x^- = \frac{58,02 - \sqrt{58,02^2 - 4 \cdot 29,01 \cdot (29,01 + M_u)}}{2 \cdot 29,01}$$

Corte 7

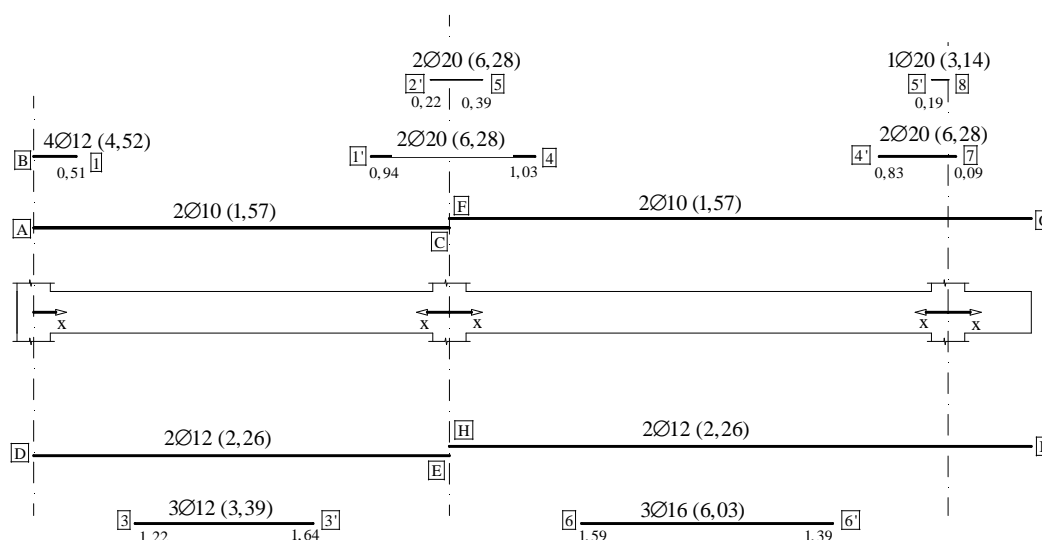
$$2\varnothing 10 \Rightarrow M_u = -23,96 \text{ kN} \cdot \text{m} \Rightarrow x = 0,09 \quad \boxed{7}$$

Corte 8

$$2\varnothing 10 + 2\varnothing 20 \Rightarrow M_u = -112,79 \text{ kN} \cdot \text{m} \Rightarrow x = -0,97 \Rightarrow x = 0,00 \quad \boxed{8}$$

Nota: Como se ha obtenido un valor de x negativo, significa que la armadura de 1 $\varnothing$ 20 del segundo corte del apoyo del voladizo no es necesaria para éste; es decir, el momento de cálculo en la sección de arranque del voladizo,  $M_d = -29,01 \text{ kN} \cdot \text{m}$ , es inferior al momento que absorben 2 $\varnothing$ 10 + 2 $\varnothing$ 20 ( $M_u = -112,79 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ). Por lo tanto, la armadura de 1 $\varnothing$ 20 se corta en el eje del apoyo ( $x = 0$ ).

En el esquema siguiente se muestran los puntos de corte teóricos referidos a la coordenada x que se indica.



**4.8 Longitudes de anclaje**

Para nuestro problema (Hormigón H-25 y Acero B-400S) las longitudes básicas de anclaje, en función del diámetro de la armadura y de la posición de adherencia, son las indicadas en la Tabla 3.

$\varnothing$	Posición I	Posición II
10	20	29
12	24	34
14	28	40
16	32	46
20	48	67
25	75	105

Tabla 3.  $\ell_b$  : Longitudes básicas de anclajes

#### 4.8.1 Puntos interiores

Para los cortes interiores la longitud de anclaje reducida será:

Corte	Pos	$\varnothing$	$\ell_b$	$A_s$	$A_{s,real}$	$\ell_b \frac{A_s}{A_{s,real}}$	$10\varnothing$	$\frac{1}{3}\ell_b$	$\ell_{b,neto}$
1	II	12	34	2 $\varnothing$ 10 1,57	2 $\varnothing$ 10+4 $\varnothing$ 12 6,07	9	12	11	15
1'	II	20	67	2 $\varnothing$ 10 1,57	2 $\varnothing$ 10+2 $\varnothing$ 20 7,85	13	20	22	22
2'	II	20	67	2 $\varnothing$ 10+2 $\varnothing$ 20 7,85	2 $\varnothing$ 10+4 $\varnothing$ 20 14,14	37	20	22	37
3. y 3'	I	12	24	2 $\varnothing$ 12 2,26	2 $\varnothing$ 12+3 $\varnothing$ 12 5,65	10	12	8	15
4 y 4'	II	20	67	2 $\varnothing$ 10 1,57	2 $\varnothing$ 10+2 $\varnothing$ 20 7,85	13	20	22	22
5	II	20	67	2 $\varnothing$ 10+2 $\varnothing$ 20 7,85	2 $\varnothing$ 10+4 $\varnothing$ 20 14,14	37	20	22	37
5'	II	20	67	2 $\varnothing$ 10+2 $\varnothing$ 20 7,85	2 $\varnothing$ 10+3 $\varnothing$ 20 11,00	48	20	22	48
6 y 6'	I	16	32	2 $\varnothing$ 12 2,26	2 $\varnothing$ 12+3 $\varnothing$ 16 8,29	9	16	11	16
7	II	20	67	2 $\varnothing$ 10 1,57	2 $\varnothing$ 10+2 $\varnothing$ 20 7,85	13	20	22	22

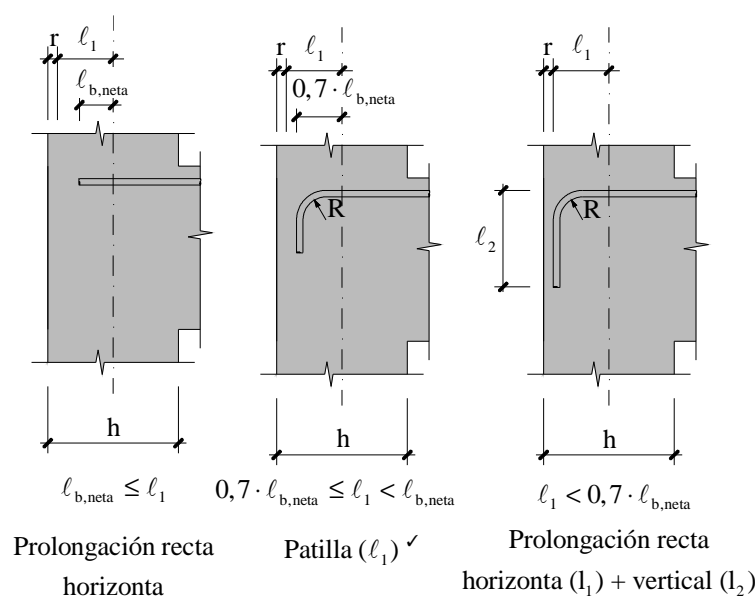
Para la determinación de los puntos de corte reales, le añadimos a los puntos de corte teóricos las longitudes netas de anclaje y el canto útil de la sección de la viga (esto último es equivalente a desplazar la envolvente de momentos flectores una distancia igual al canto útil en el sentido más desfavorable, para así tener en cuenta el efecto del cortante). Por lo tanto los puntos de corte reales serán:

Corte	Corte teórico	Longitud neta de anclaje	Canto útil	Corte real
1	0,51	0,15	0,445	1,11
1'	0,94	0,22	0,445	1,61
2'	0,22	0,37	0,445	1,04
3	1,22	-0,15	-0,445	0,62
3'	1,64	-0,15	-0,445	1,05
4	1,03	0,22	0,445	1,70
4'	0,83	0,22	0,445	1,49
5	0,39	0,37	0,445	1,21
5'	0,19	0,48	0,445	1,11
6	1,59	-0,16	-0,445	0,98
6'	1,39	-0,16	-0,445	0,78
7	0,09	0,22	0,445	0,76

#### 4.8.2 Apoyos

Para los anclajes en apoyos las longitudes netas de anclaje serán:

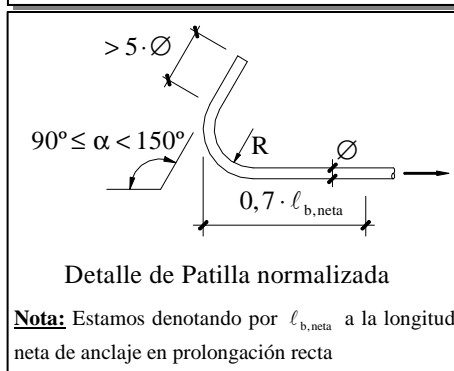
Corte	Pos.	Ø [mm]	ℓ <sub>b</sub>	A <sub>s</sub>	A <sub>s,real</sub>	ℓ <sub>b</sub> $\frac{A_s}{A_{s,real}}$	10Ø	$\frac{1}{3} \ell_b$	Prol. Recta horizontal ℓ <sub>b,neto</sub>	Patilla 0,7 · ℓ <sub>b,neto</sub>	Prol. Recta horizontal+vertical	
											ℓ <sub>1</sub>	ℓ <sub>2</sub>
A	II	10	29	5,73	2Ø10+4Ø12 6,07	27	10	10	27	19	16	8
B	II	12	34	5,73	2Ø10+4Ø12 6,07	32	12	11	32	22	16	11
C	II	10	29	10,44	2Ø10+4Ø20 14,14	21	10	10	21			
D	I	12	24	0	2Ø12 2,26	0	12	8	15		16	
E	I	12	24	0	2Ø12 2,26	0	12	8	15			
F	II	10	29	13,11	2Ø10+4Ø20 14,14	27	10	10	27			
G	I	10	20	0,37	2Ø10 1,57	5	10	7	15		0	15
H	I	12	24	0	2Ø12 2,26	0	12	8	15			
I	I	12	24	0	2Ø12 2,26	0	12	8	15		0	15
8	II	20	67	10,20	2Ø10+3Ø20 11,00	62	20	22	62		100	



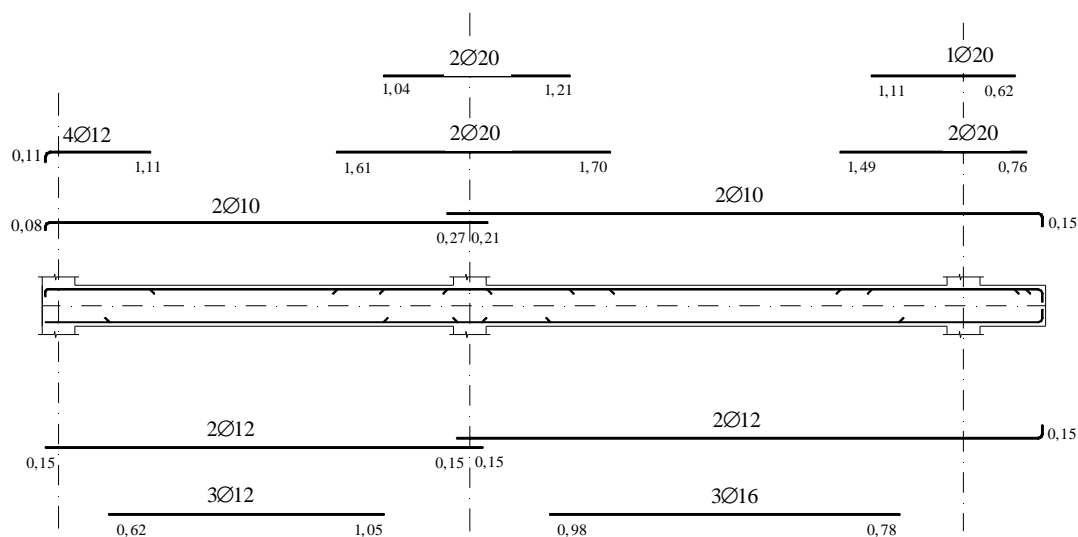
✓ Aunque el anclaje en patilla requiere únicamente una longitud igual a  $0,7 \cdot l_{b,net}$ , siendo  $l_{b,net}$  la longitud neta de anclaje en prolongación recta, es costumbre, y además buena práctica, prolongar la patilla hasta el extremo de la pieza (cumpliendo los recubrimientos).

h : Canto del soporte  
 r : recubrimiento ( $\geq 35$  mm)  
 $l_1 = \frac{h}{2} - r$  : espacio disponible para el anclaje  
 $l_2 \approx \begin{cases} l_{b,net} - l_1 & \text{Pos I} \\ (l_{b,net} - l_1) \cdot 0,7 & \text{Pos II} \end{cases}$   
 R : Radio de doblado

Patilla		Doblado en general		
$\varnothing < 20$ mm	$\varnothing \geq 20$ mm	$f_{yk}$	$\varnothing \leq 25$ mm	$\varnothing > 25$ mm
2 $\varnothing$	3,5 $\varnothing$	400	5 $\varnothing$	6 $\varnothing$
		500	6 $\varnothing$	7,5 $\varnothing$

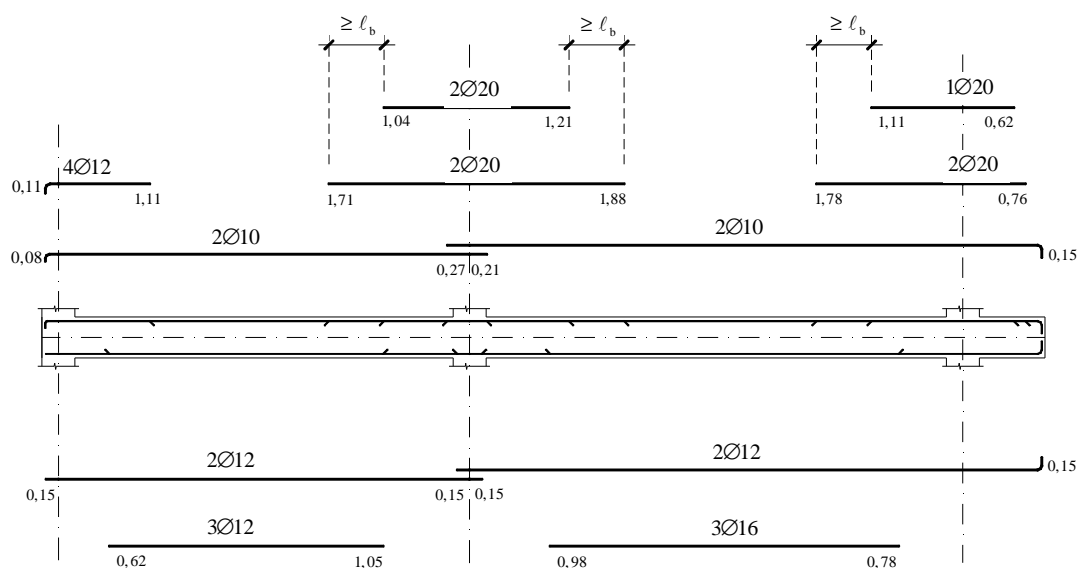


El esquema de armado con los correspondientes puntos de corte reales es el que se muestra en la siguiente figura:



Finalmente si obligamos a que la distancia entre puntos consecutivos de corte sea superior a la longitud básica de anclaje<sup>5</sup>, resulta el esquema de armado longitudinal definitivo que se muestra en la siguiente figura:

<sup>5</sup> La Instrucción EHE establece esta condición con carácter obligatorio para los anclajes de las barras perteneciente a un mismo grupo de barras, cuando éstas dejan de ser necesarias en secciones diferentes (Art. 66.5.1.3). Sin embargo, debido a que en la zona de anclaje de una armadura, la armadura pasante puede aumentar



## 5. DIMENSIONAMIENTO DE LA ARMADURA TRANSVERSAL

Para que no se produzca el agotamiento por tracción oblicua en el alma se tiene que cumplir, en ausencia de esfuerzo torsor, y **para las secciones situadas a partir de un canto útil<sup>6</sup> de la cara del apoyo**:

$$V_d \leq V_{u2} = V_{cu} + V_{su}$$

donde:

$V_{cu}$ : contribución del hormigón.

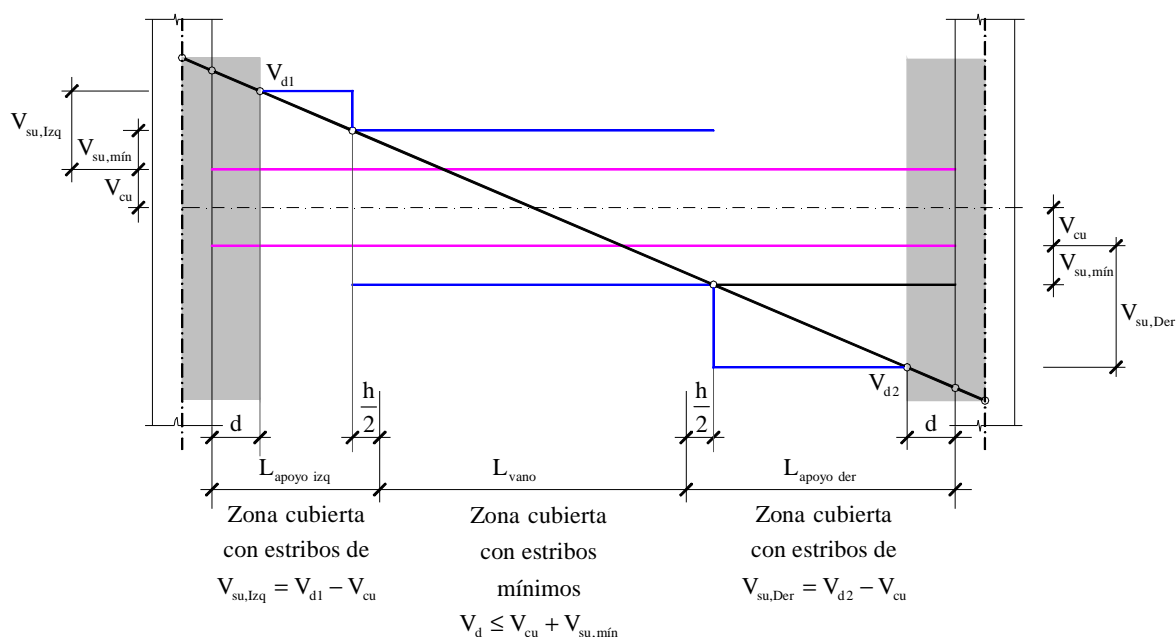
$V_{su}$ : contribución de la armadura transversal de la pieza.

Como el cortante no es constante a lo largo de las vigas, dividimos estas en tres zonas, tal y como se muestra en la figura siguiente<sup>7</sup>:

su tensión hasta alcanzar el límite elástico, ésta debería de anclarse a partir de este punto con su longitud básica y no con la neta.

<sup>6</sup> Canto útil de la viga que estamos estudiando

<sup>7</sup> Por simplicidad en el dibujo, se ha representado el cortante resistido por el hormigón,  $V_{cu}$ , con valor constante, aunque en general, como sucede en este problema, no lo será, al ser función de la cuantía de la armadura longitudinal de tracción.



- Vano. En esta zona los esfuerzos cortantes son pequeños y dispondremos la cuantía mínima establecida por la Instrucción EHE. Esta cuantía mínima resiste un cortante  $V_{su, mín}$ , que junto con el cortante que resiste el hormigón en dicha zona (función de la armadura longitudinal de tracción dispuesta en esta zona) determina la extensión de la misma,  $L_{vano}$ .
- Apoyos. Corresponde a las dos zonas extremas de la viga, donde la cuantía mínima puede no ser insuficiente para cubrir el esfuerzo cortante de cálculo. La comprobación se realiza a partir de un canto útil de la cara del soporte, aunque la armadura obtenida se prolonga hasta dicha cara.

Finalmente, como según EHE (Art. 44.2.3.4.1) debe prolongarse la colocación de la armadura transversal una longitud igual a medio canto de la pieza, más allá de la sección en la que teóricamente deja de ser necesaria, las longitudes que abarcan las tres zonas indicadas anteriormente son las que se indican en la figura anterior.

### 5.1 Cálculo de la contribución del hormigón

En secciones rectangulares ( $b=b_0$ ), suponiendo  $\theta = \theta_e = 45^\circ$  ( $\beta=1$ ), la contribución del hormigón a la resistencia a esfuerzo cortante, para una sección rectangular, viene dada por:

$$V_{cu} = \left[ \frac{0,15}{\gamma_c} \cdot \xi \cdot (100 \cdot \rho_l \cdot f_{cv})^{1/3} + 0,15 \cdot \sigma'_{cd} \right] b \cdot d$$

donde:

$$\xi = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \quad \text{con } d \text{ en mm.}$$

Al tener todas las vigas la misma sección, este parámetro vale para todas ellas:  
 $\xi = 1,67$

➤  $f_{cv}$  resistencia efectiva del hormigón a cortante en  $N/mm^2$  de valor  $f_{cv}=f_{ck}$  con  $f_{ck}$  no mayor de  $15 N/mm^2$  en el caso de control indirecto de la resistencia del hormigón.

➤  $\sigma'_{cd}$  tensión efectiva en la sección (positiva si es de compresión):  $\sigma'_{cd} = \frac{N_d}{A_c}$

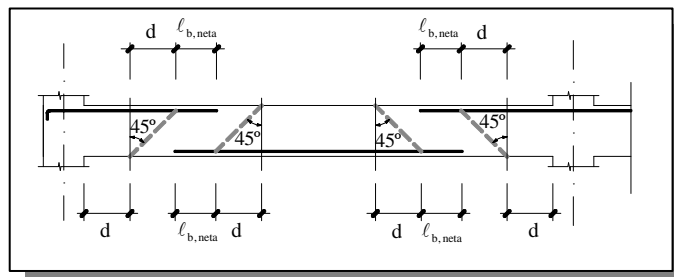
$N_d$  Esfuerzo axial de cálculo (positivo si es de compresión).

$A_c$  Área total de la sección de hormigón.

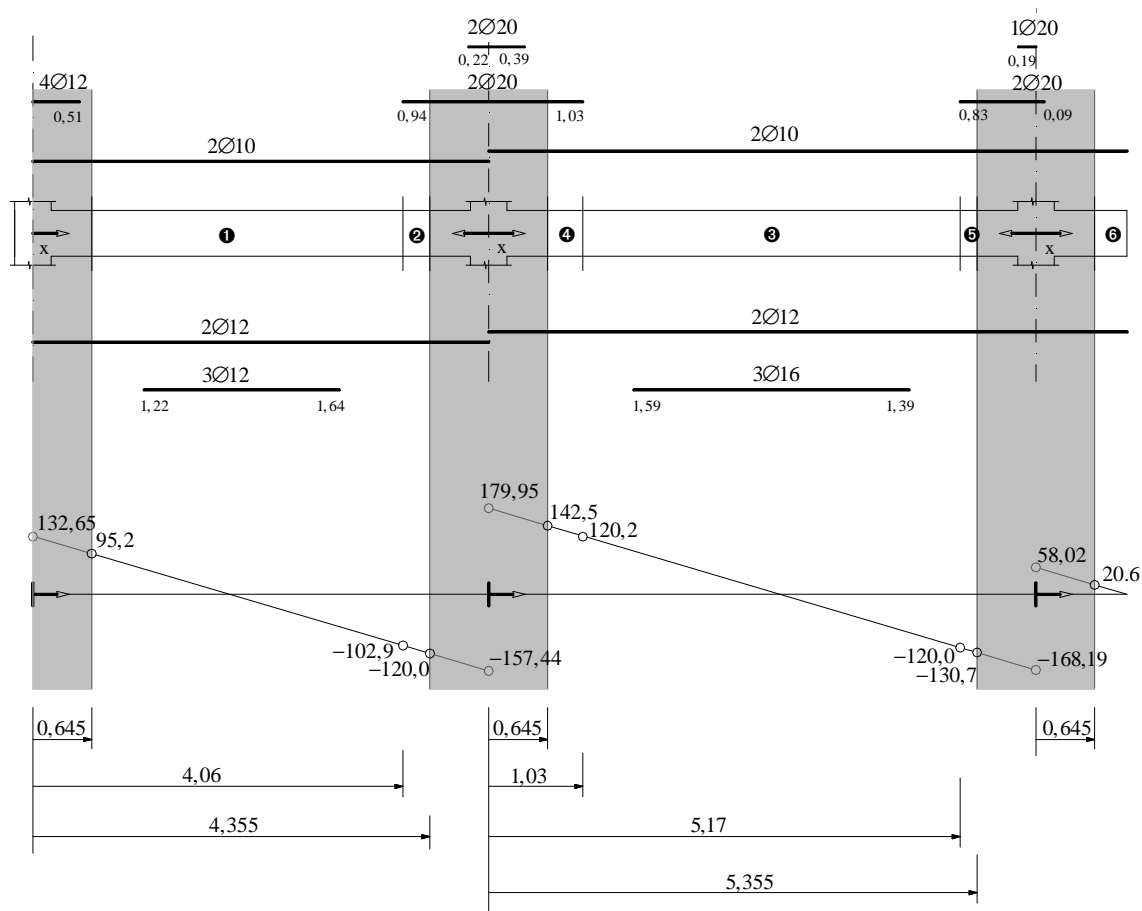
Al tener  $N_d=0$  en todas las vigas, este parámetro vale para todas ellas:  $\sigma'_{cd} = 0$

➤  $\rho_\ell$  Cuantía geométrica de la armadura longitudinal traccionada anclada a una distancia igual o mayor que  $d$  (canto útil de la viga) a partir de la sección de estudio:

$$\rho_\ell = \frac{A_s}{b_0 \cdot d} \not\leq 0,02$$



Como en las zonas de apoyo comentadas anteriormente la armadura longitudinal de tracción no es constante, para poder determinar la contribución del hormigón a la resistencia a cortante en estas zonas, tenemos que distinguir distintos tramos en las mismas, según la armadura longitudinal de tracción existente. De esta forma los tramos a considerar son los indicados en la figura siguiente, donde, además, se han indicado los cortantes máximos en dichos tramos.



Para la zona de vano la armadura longitudinal que consideramos para la determinación del cortante absorbido por el hormigón,  $V_{cu}|_{vano}$ , es únicamente la correspondiente al montaje inferior (armadura que se extiende a lo largo de toda la viga), ya que con este cortante y el absorbido por la cuantía mínima transversal, nos permite determinar la extensión de esta zona. Si considerásemos la armadura de refuerzo en vano para determinar  $V_{cu}|_{vano}$ , y determinamos con ella la extensión de la zona de vano, tendríamos que comprobar posteriormente que dicha armadura de refuerzo se extiende en toda esta zona.

Los valores de  $V_{cu}$  para los distintos tramos son los calculados en la siguiente tabla:

**Vano n°1**

Zona	Tramo	$\xi = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}}$	$A_s$	$\rho_\ell = \frac{A_s}{b_0 \cdot d} \neq 0,02$	$N_d$ [kN]	$\sigma'_{cd} = \frac{N_d}{A_c}$ [kN/mm <sup>2</sup> ]	$V_{cu, tramo}$ [kN]
Apoyo Izq.	❶	1,67	2Ø10 1,57 cm <sup>2</sup>	0,0012	0	0	32,0
Vano			2Ø12 2,26 cm <sup>2</sup>	0,0017			36,1
Apoyo Der.	❷		2Ø10 1,57 cm <sup>2</sup>	0,0012			32,0
	❸		2Ø10+2Ø20 7,85 cm <sup>2</sup>	0,0059			54,6

**Vano n°2**

Zona	Tramo	$\xi = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}}$	$A_s$	$\rho_\ell = \frac{A_s}{b_0 \cdot d} \neq 0,02$	$N_d$ [kN]	$\sigma'_{cd} = \frac{N_d}{A_c}$ [kN/mm <sup>2</sup> ]	$V_{cu, tramo}$ [kN]
Apoyo Izq.	❹	1,67	2Ø10 1,57 cm <sup>2</sup>	0,0012	0	0	32,0
	❺		2Ø10+2Ø20 7,85 cm <sup>2</sup>	0,0059			54,6
Vano			2Ø12 2,26 cm <sup>2</sup>	0,0017			36,1
Apoyo Der.	❻		2Ø10 1,57 cm <sup>2</sup>	0,0012			32,0
	❼	2Ø10+2Ø20 7,85 cm <sup>2</sup>	0,0059	54,6			

**Voladizo**

Zona	Tramo	$\xi = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}}$	$A_s$	$\rho_\ell = \frac{A_s}{b_0 \cdot d} \neq 0,02$	$N_d$ [kN]	$\sigma'_{cd} = \frac{N_d}{A_c}$ [kN/mm <sup>2</sup> ]	$V_{cu, tramo}$ [kN]
Apoyo Izq.	❽	1,67	2Ø10 1,57 cm <sup>2</sup>	0,0012	0	0	32,0

## 5.2 Cálculo de la armadura transversal

### 5.2.1 Cuantías mínimas. Armadura transversal en vanos.

➤ La cuantía mínima de las armaduras transversales debe ser tal que cumpla la relación:

$$\sum \frac{A_{\alpha} \cdot f_{y\alpha,d}}{\sin \alpha} \geq \frac{f_{ct,m}}{7,5} \cdot b_0$$

con:

- $f_{ct,m}$ : resistencia media a tracción del hormigón, de valor:

$$f_{ct,m} = 0,30f_{ck}^{2/3} \quad \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{ N/mm}^2$$

Para  $\alpha = 90^\circ$  y sección de hormigón rectangular queda:

$$A_{90} \geq \frac{f_{ct,m} \cdot b}{7,5 \cdot f_{y90,d}} \Rightarrow A_{90} \geq 2,95 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}}$$

➤ Por otro lado la separación máxima entre estribos debe cumplir la mínima de las condiciones siguientes:

$$s_t \leq 0,75 \cdot d \not\leq 60 \text{ cm} \quad \text{si } V_d \leq \frac{1}{5} V_{ul} \quad \Leftrightarrow \quad s_t \leq 33 \text{ cm} \quad \text{si } V_d \leq 113,5$$

$$s_t \leq 0,6 \cdot d \not\leq 45 \text{ cm} \quad \text{si } \frac{1}{5} V_{ul} < V_d \leq \frac{2}{3} V_{ul} \quad \Leftrightarrow \quad s_t \leq 26 \text{ cm} \quad \text{si } 113,5 < V_d \leq 378,2$$

$$s_t \leq 0,3 \cdot d \not\leq 30 \text{ cm} \quad \text{si } \frac{2}{3} V_{ul} < V_d \quad \Leftrightarrow \quad s_t \leq 13 \text{ cm} \quad \text{si } 378,2 < V_d$$

### 5.2.2 Armadura transversal en apoyos

#### Vano n°1

Zona	tramo	$ V_d $ [kN]	$V_{cu}$ [kN]	$V_{su} =  V_d  - V_{cu}$ [kN]	$A_{90} _{\text{tramo}} = \frac{ V_d  - V_{cu}}{0,9 \cdot d \cdot f_{y90,d}}$ [cm <sup>2</sup> /m]	$A_{90}$ [cm <sup>2</sup> /m]	Arm. Transv.
Apoyo Izq.	①	95,2	32,0	63,3	4,54	4,54	cØ8/22 (4,57 cm <sup>2</sup> /m)
Apoyo Der	①	102,9	32,0	71,0	5,09	5,09	cØ8/19 (5,29 cm <sup>2</sup> /m)
	②	120,0	54,6	65,1	4,69		

**Vano n°2**

Zona	tramo	$ V_d $ [kN]	$V_{cu}$ [kN]	$V_{su} =  V_d  - V_{cu}$ [kN]	$A_{90} _{tramo} = \frac{ V_d  - V_{cu}}{0,9 \cdot d \cdot f_{y90,d}}$ [cm <sup>2</sup> /m]	$A_{90}$ [cm <sup>2</sup> /m]	Arm. Transv.
Apoyo Izq.	③	120,2	32,0	88,2	6,33	6,33	1cØ8/15 (6,67, cm <sup>2</sup> /m)
	④	142,5	54,6	87,9	6,31		
Apoyo Der.	③	120,0	32,0	88,1	6,32	6,32	1cØ8/15 (6,67, cm <sup>2</sup> /m)
	⑤	130,7	54,6	76,1	5,46		

**Voladizo**

Zona	tramo	$ V_d $ [kN]	$V_{cu}$ [kN]	$V_{su} =  V_d  - V_{cu}$ [kN]	$A_{90} _{tramo} = \frac{ V_d  - V_{cu}}{0,9 \cdot d \cdot f_{y90,d}}$ [cm <sup>2</sup> /m]	$A_{90}$ [cm <sup>2</sup> /m]	Arm. Transv.
Apoyo Izq.	⑥	20,6	32,0	< 0	Cuantías mínimas	2,95	1cØ8/30 <sup>8</sup> (3,33 cm <sup>2</sup> /m)

**5.3 Longitud de las zonas de armado transversal**

La zona de vano donde se extiende la armadura mínima transversal corresponde a la que verifica la desigualdad:

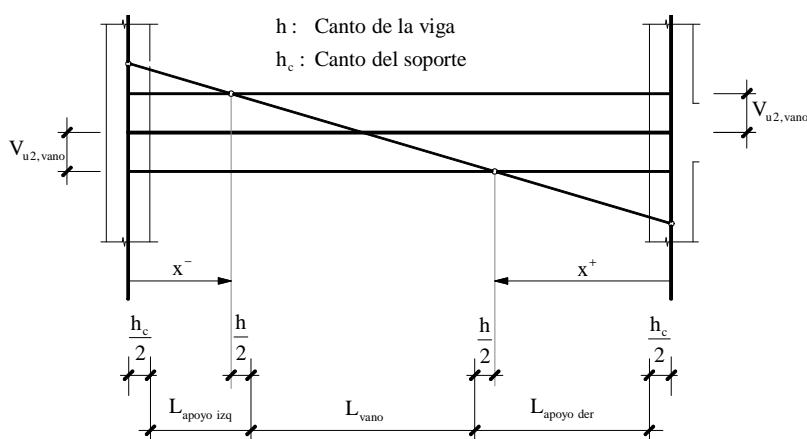
$$|V_d| \leq V_{u2,vano}$$

donde:

$$V_{u2,vano} = V_{cu,vano} + V_{su,mín}$$

Los valores del cortante absorbido por el hormigón en la zona de vano fueron

determinados con anterioridad en el apartado 5.1. Por lo tanto necesitamos determinar  $V_{su,mín}$ , que corresponde con el cortante absorbido por la armadura transversal mínima:



<sup>8</sup> La cuantía mínima de 2,95 cm<sup>2</sup>/m la podemos cubrir con cØ6 a 19 cm (2,98 cm<sup>2</sup>/m). No obstante, como hemos optado por disponer el mismo montaje en el vano n°2 y el voladizo, con objeto de montar la armadura longitudinal con una misma jaula, se ha optado por poner, al igual que en el vano n°2, cercos de diámetro 8 a la separación máxima permitida.

$$V_{su,mín} = 0,9 \cdot d \cdot A_{90,mín} \cdot f_{y90,d}$$

La armadura transversal mínima será la mayor entre la determinada anteriormente en el apartado 5.2.1, y la que corresponde al tipo de estribo empleado en la viga, situado a la separación máxima permitida. En la tabla siguiente se determina esta armadura transversal mínima:

Viga	$A_{90} \geq \frac{f_{ct,m} \cdot b}{7,5 \cdot f_{y90,d}}$ [cm <sup>2</sup> /m]	Nº ramas n	Diámetro estribo Ø [mm]	Separación Máxima ❶ s <sub>t</sub> [m]	$A_{90,mín} = \frac{n \cdot \frac{\pi \cdot \varnothing^2}{4}}{s_t}$ [cm <sup>2</sup> /m]	A <sub>90,mín</sub> [cm <sup>2</sup> /m]
Vano nº1	2,95	2	8	30	3,35	3,35
Vano nº2	2,95	2	8	30	3,35	3,35

❶ Se ha limitado la separación máxima a s<sub>t</sub> ≤ 30 cm. tal y como establecía la instrucción EHE-98. Esta limitación también la establece la EHE-08 cuando existe armadura longitudinal necesaria por compresión.

Para esta armadura mínima, el cortante que provoca el agotamiento por tracción en el alma en la zona de vano es:

Viga	A <sub>90,mín</sub> [cm <sup>2</sup> /m]	V <sub>su,mín</sub> [kN]	V <sub>cu,vano</sub> [kN]	V <sub>u2,vano</sub> [kN]
Vano nº1	3,35	46,7	36,1	82,8
Vano nº2	3,35	46,7	36,1	82,8

Observamos que el cortante V<sub>u2,mín</sub> es inferior a 113,5 kN, y por lo tanto la separación máxima, s<sub>t</sub> = 30 cm, empleada en la determinación de la cuantía mínima de armadura transversal es correcta.

La zona donde teóricamente el cortante puede ser soportado por la cuantía mínima viene dada por puntos:

➤ Vano nº1

$$V_d = 132,65 - 58,02 \cdot x \quad \begin{cases} V_d = V_{u2,vano} \Rightarrow x = 0,86 \text{ m} \Rightarrow x^- = 0,86 \text{ m} \\ V_d = -V_{u2,vano} \Rightarrow x = 3,09 \text{ m} \Rightarrow x^+ = 1,91 \text{ m} \end{cases}$$

➤ Vano nº2

$$V_d = 179,96 - 58,02 \cdot x \quad \begin{cases} V_d = V_{u2,vano} \Rightarrow x = 1,68 \text{ m} \Rightarrow x^- = 1,68 \text{ m} \\ V_d = -V_{u2,vano} \Rightarrow x = 3,91 \text{ m} \Rightarrow x^+ = 2,09 \text{ m} \end{cases}$$

Finalmente las longitudes que abarcan las distintas zonas de armado transversal serán:

➤ Vano nº1

$$L_{apoyo \text{ izq}} = x^- - \frac{h_c}{2} + \frac{h}{2} = 0,86 - \frac{0,40}{2} + \frac{0,50}{2} \Rightarrow L_{apoyo \text{ izq}} = 0,91 \text{ m}$$

$$L_{vano} = L - (x^- + x^+) - h = 5 - (0,86 + 1,91) - 0,50 \Rightarrow L_{vano} = 1,73 \text{ m}$$

$$L_{\text{apoyo der}} = x^+ - \frac{h_c}{2} + \frac{h}{2} = 1,91 - \frac{0,40}{2} + \frac{0,50}{2} \Rightarrow L_{\text{apoyo izq}} = 1,96 \text{ m}$$

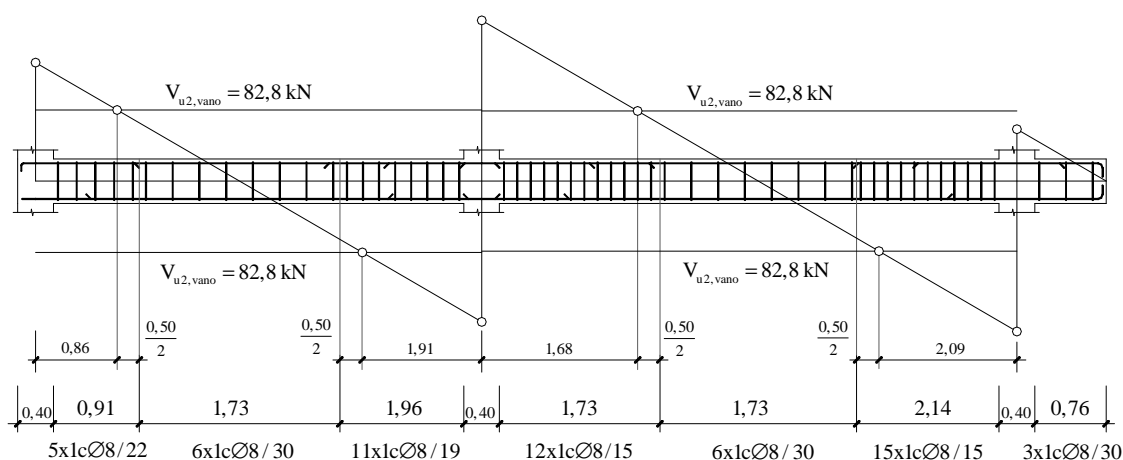
➤ Vano n°2

$$L_{\text{apoyo izq}} = x^- - \frac{h_c}{2} + \frac{h}{2} = 1,68 - \frac{0,40}{2} + \frac{0,50}{2} \Rightarrow L_{\text{apoyo izq}} = 1,73 \text{ m}$$

$$L_{\text{vano}} = L - (x^- + x^+) - h = 6 - (1,68 + 2,09) - 0,50 \Rightarrow L_{\text{vano}} = 1,73 \text{ m}$$

$$L_{\text{apoyo der}} = x^+ - \frac{h_c}{2} + \frac{h}{2} = 2,09 - \frac{0,40}{2} + \frac{0,50}{2} \Rightarrow L_{\text{apoyo izq}} = 2,14 \text{ m}$$

El esquema de armado transversal es el que se muestra en la siguiente figura:



Finalmente en la página siguiente se muestra el esquema de armado longitudinal y transversal definitivo.

