



UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Departamento de Tecnología Electrónica

TESIS DOCTORAL

Estabilidad en Sistemas Neuronales Realimentados.
Aplicación al Control

MIGUEL ALEJANDRO ATENCIA RUIZ

MÁLAGA, 2.004

D. Gonzalo Joya Caparrós, Profesor Titular del Departamento de Tecnología Electrónica de la Universidad de Málaga, como director de la Tesis Doctoral de D. Miguel Alejandro Atencia Ruiz,

CERTIFICA:

Que D. Miguel Alejandro Atencia Ruiz, Ingeniero en Informática y Licenciado en Ciencias Matemáticas, ha realizado en el Departamento de Tecnología Electrónica de la Universidad de Málaga, bajo su dirección, el trabajo de investigación correspondiente a su Tesis Doctoral titulado:

Estabilidad en Sistemas Neuronales Realimentados. Aplicación al Control

Revisado el presente trabajo, estima que puede ser presentado al Tribunal que ha de juzgarlo. Y para que conste, autorizo la defensa de esta Tesis Doctoral en la Universidad de Málaga.

Málaga, a 7 de Junio de 2.004

Dr. Gonzalo Joya Caparrós

Para Alba con Amor

- ... debo averiguar la verdad. Debo averiguarla.
- ¿Debéis? ¿Quién os lo exige ahora?
- Nadie nos exige que sepamos, Adso. Hay que saber, eso es todo, aún a riesgo de equivocarse.

El nombre de la rosa
UMBERTO ECO

Se ha convertido ya en un tópico, al terminar una tesis, expresar el agradecimiento al director por su apoyo. Puedo afirmar que, en este caso, el reconocimiento a Gonzalo Joya es más que una fórmula de cortesía. Gracias por su ayuda, su verdadera dirección y, no menos importante, su amistad.

Gracias a mis padres, que me enseñaron el valor de la educación y el conocimiento. Gracias a Amor y Alba, a quienes espero poder compensar por el tiempo perdido.

La investigación aquí presentada ha sido parcialmente financiada por los proyectos del Ministerio de Ciencia y Tecnología (antes CICYT) números TIC91-0965, TIC95-0589, TIC98-0562 y TIC01-1758, así como por fondos FEDER.

El carácter multidisciplinar de la tesis se refleja en la variedad de personas que, de una forma u otra, han contribuido a este trabajo. Gracias a los compañeros y amigos de los Departamentos de Ingeniería de Sistemas y Automática, Lenguajes y Ciencias de la Computación, Matemática Aplicada y Tecnología Electrónica de la Universidad de Málaga. Me gustaría destacar a Juan Ignacio Ramos, que con una frase resuelve un problema, Paco Villatoro, que lo sabe todo, Inmaculada Pérez de Guzmán, que me permitió compartir la importancia de la docencia, Francisco Sandoval, sin cuya exigencia esta tesis no se habría terminado, Paco García Lagos, incansable trabajador, Inmaculada de las Peñas, también novel...

A los mencionados y a los que, con las prisas, se me olvidan,

mi agradecimiento

Resumen

Esta tesis presenta un estudio de las redes neuronales de Hopfield, en cuanto a su capacidad para resolver problemas de optimización. El análisis teórico de las características de estos sistemas se aborda con rigor matemático, al tiempo que se obtienen conclusiones de orden práctico sobre su eficiencia como método computacional de optimización. Los problemas que son objeto de estudio provienen de dos ámbitos distintos: la optimización combinatorial y la identificación de sistemas dinámicos. Con respecto al primero, si bien la aplicación de las redes de Hopfield a optimización combinatorial no es nueva, existían aún lagunas en la fundamentación de la metodología de optimización con redes de Hopfield, habiéndose justificado un gran número de resultados con argumentos exclusivamente empíricos. Por tanto, la tesis incluye el estudio teórico de las características de estos sistemas, de forma que las aplicaciones posteriores estén fundadas sobre bases sólidas. Este estudio comienza con una descripción, en base a trabajos previos, de la metodología de optimización con redes de Hopfield, distinguiendo las diversas formulaciones que de este paradigma se han propuesto, así como las limitaciones de cada una, determinando que la formulación continua de Abe puede aplicarse directamente a optimización combinatorial, gracias a la forma multilineal de su función de Lyapunov. Por tanto, se adopta la formulación de Abe como objeto de investigación en el resto de la tesis, dividiendo su examen en dos partes: análisis dinámico del modelo continuo y estudio de la discretización. En el caso del modelo continuo, se demuestra que los puntos fijos interiores, que son soluciones no factibles del problema, son inestables, siempre que sean hiperbólicos. Para los puntos fijos interiores no hiperbólicos, también se demuestra que son inestables en el caso particular de redes de orden dos con tres neuronas, conjeturando su inestabilidad en el caso general. Las aportaciones presentadas, junto con la ya conocida de poseer función de Lyapunov, garantizan la capacidad de las redes de Hopfield continuas para resolver problemas de optimización combinatorial, justificando el estudio de su discretización, con objeto de realizar una implementación en ordenador. El análisis del proceso de discretización de la

red continua de Hopfield comienza con la formulación explícita del modelo discreto como la iteración de una única función, lo que permite interpretar el modelo, bien como un método numérico no estándar, bien como un sistema dinámico discreto. De esta forma, es posible aplicar las técnicas conocidas del análisis numérico y la teoría de sistemas dinámicos. Se demuestra que la red discretizada es una aproximación de primer orden del modelo continuo. Asimismo, los modelos continuo y discreto comparten los mismos puntos fijos, así como el carácter estable o inestable de tales puntos. Sin embargo, con determinadas condiciones, la red discretizada puede poseer soluciones periódicas, por lo que no puede garantizarse, en general, la existencia de función de Lyapunov, lo que penaliza severamente su capacidad de optimización. Con respecto al problema de la identificación de sistemas dinámicos, se propone un novedoso método de estimación on-line de parámetros, basado en la metodología de optimización con redes de Hopfield continuas. Se demuestra que, en el caso de parámetros constantes, la estimación proporcionada converge al valor real de los parámetros, con la condición de excitación persistente, mientras que, cuando los parámetros varían de forma continua, la estimación converge a un entorno del valor del parámetro. El proceso de demostración de los resultados teóricos proporciona indicaciones sobre cómo mejorar la eficiencia práctica del estimador. Se presentan simulaciones de diversos sistemas robóticos y epidemiológicos, confirmando los hallazgos teóricos. Se observa que el método propuesto es especialmente adecuado para la identificación de sistemas mecánicos, mientras que, en el caso del modelo epidemiológico, se obtienen resultados satisfactorios si el número de parámetros a estimar es reducido. Se propone una extensión del método de estimación con redes de Hopfield, mediante redes de alto orden, que permite tratar el caso de sistemas no linealmente parametrizados, para el que existen pocos métodos disponibles.

Palabras clave

Redes Neuronales de Hopfield; Optimización Combinatorial; Sistemas Dinámicos; Estabilidad; Métodos Numéricos para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias; Identificación; Control Adaptativo

Abstract

This thesis presents a study of Hopfield neural networks, aimed at assessing their ability to solve optimization problems. The theoretical analysis of these systems is performed with strict mathematical rigour, whereas practical conclusions are attained about their efficiency as a computational optimization method. The problems involved arise in two different contexts: combinatorial optimization and identification of dynamical systems. With respect to the former, although the application of Hopfield networks to optimization is not new, the methodology was still lacking a solid background, hence a large number of results have been solely based upon empirical arguments. Therefore, the thesis includes the theoretical study of the characteristics of these systems, so that subsequent applications are founded on a firm basis. This study starts from a description, based on previous work, of the optimization methodology with Hopfield networks, emphasizing the distinct formulations of the paradigm, as well as the limitations of each one. In particular, the Abe formulation can be directly applied to combinatorial optimization, since its Lyapunov function is multilinear. Thus, the Abe formulation is examined in the rest of the thesis and this research is divided into two parts: dynamical analysis of the continuous model and study of the discretization. As for the continuous model, the interior fixed points, which are unfeasible, are proved to be unstable, as long as they are hyperbolic. In the event of non-hyperbolic interior fixed points, they are proved to be unstable in the particular case of second order networks with three neurons, whereas the instability of these interior equilibria in a general setting is conjectured. The presented contributions, together with the already known existence of a Lyapunov function, support the ability of continuous Hopfield networks to solve combinatorial optimization problems, thus justifying the study of their discretization, in order to build a computer implementation. The analysis of the discretization process of the continuous network starts from the explicit formulation of the discrete model as the iteration of a single function, hence the model can be interpreted either as a non-standard numerical method, or as a discrete dynamical system. This te-

chnique allows for the application of known results from numerical analysis and dynamical systems theory. The discretized network is proved to be a first order approximation of the continuous one. Further, the continuous and discrete models share the same fixed points, as well as the stability or instability of these points. However, under some conditions, periodic solutions may appear in the discretized network, so that, in general, the existence of a Lyapunov function cannot be guaranteed, which is a major obstacle for the optimization ability. With respect to the problem of dynamical systems identification, a novel method of on-line parameter estimation is proposed, based upon the optimization methodology with Hopfield networks. In the event of constant parameters, the provided estimation is proved to converge to the real value of parameters, under the condition of persistent excitation, whereas in the case of time-varying parameters the estimation converges to a region around the parameter. The proving procedure of the theoretical results provides some hints to enhance the practical efficiency of the neural estimator. Simulations of several mechanical and epidemiological systems are presented, which confirm the theoretical results. The proposed method is particularly well suited to mechanical systems whereas its application to the epidemiological model is satisfactory as long as the number of estimated parameters is reduced. In order to deal with non-linearly parameterized systems, an extension of the estimation method is formulated by means of higher order Hopfield networks.

Keywords

Hopfield Neural Networks; Combinatorial Optimization; Dynamical Systems; Stability; Numerical Methods for Ordinary Differential Equations; Identification; Adaptive Control

Índice general

Resumen	IX
Abstract	XI
Índice general	XIII
Índice de tablas	XVII
Índice de figuras	XIX
Lista de abreviaturas	XXI
1. Las redes de Hopfield de alto orden para optimización	1
1.1. Introducción	1
1.2. La metodología de optimización con redes de Hopfield	5
1.3. Formulaciones de las redes de Hopfield para optimización	12
1.3.1. Formulación discreta de Hopfield	13
1.3.2. Formulación continua de Hopfield	15
1.3.3. Formulación de Abe para redes de Hopfield	19
1.4. Estructura de la tesis y publicaciones relacionadas	21
2. Análisis dinámico de la red de Hopfield continua	27
2.1. Introducción	27
2.2. La formulación de Abe de las redes de Hopfield para optimización	31
2.3. Estabilidad del modelo de Abe de alto orden	34

2.4. Acotación del estado en el hipercubo	42
2.5. Estudio de los puntos fijos interiores no hiperbólicos	45
2.6. Conclusiones y líneas futuras	48
3. Discretización de la red de Hopfield de alto orden	51
3.1. Introducción	52
3.2. Discretización de la red de Hopfield continua de alto orden . . .	55
3.3. Acotación del estado en el hipercubo	59
3.4. Propiedades numéricas de la discretización	61
3.4.1. Orden y consistencia	62
3.4.2. Convergencia	66
3.5. Propiedades dinámicas de la discretización	68
3.5.1. Preservación de los puntos fijos	68
3.5.2. Estabilidad de los puntos fijos	70
3.5.3. Soluciones periódicas	73
3.6. Conclusiones y líneas futuras	78
4. Redes de Hopfield para Identificación de Sistemas Dinámicos	81
4.1. Introducción	81
4.2. Revisión bibliográfica de identificación	84
4.2.1. Identificación clásica y notación	84
4.2.2. Identificación con inteligencia computacional	89
4.3. Formulación de la red neuronal de Hopfield para estimación de parámetros	90
4.4. Análisis de estabilidad y convergencia	93
4.4.1. Estabilidad con parámetros constantes	96
4.4.2. Convergencia de la estimación y excitación persistente .	102
4.4.3. Acotación del error en el caso de parámetros variables .	106
4.5. Identificación de sistemas mecánicos	113
4.5.1. Identificación del modelo del brazo de un robot	113
4.5.2. Identificación del modelo de un brazo flexible	118
4.6. Estimación de parámetros de la epidemia de VIH-SIDA en Cuba	124
4.6.1. Introducción y revisión histórica del problema	124

4.6.2. Modelo de la epidemia de VIH-SIDA en Cuba	125
4.6.3. Estimación en el modelo de VIH-SIDA con redes de Hop- field	128
4.7. Extensión a sistemas no linealmente parametrizados	135
4.7.1. Descripción del método	135
4.7.2. Ejemplo de aplicación	138
4.8. Conclusiones y líneas futuras	141
5. Conclusiones	145
A. Resultados matemáticos utilizados	151
B. Cálculos auxiliares	157
Bibliografía	161

Índice de tablas

1.1. Resultados de simulación del modelo discreto de Hopfield para tres casos particulares de los problemas DEP, HCP y kCP ($k = 5$)	15
1.2. Resultados de simulación del modelo de Abe para el problema DEP, con distintos valores de paso Δt	21
4.1. Valores numéricos de los parámetros físicos	114
4.2. Valores numéricos de los parámetros formales	115
4.3. Valores numéricos de los parámetros formales para el modelo del brazo flexible. Diseño experimental con parámetros constantes a trozos	121
4.4. Valores “reales” de los parámetros y sus rangos previstos para el modelo de VIH-SIDA	128
4.5. Parámetros formales para el modelo de VIH-SIDA	130
4.6. Valores numéricos de los parámetros para el sistema no-LIP	141

Índice de figuras

1.1. Estructura de la tesis y relación entre los distintos capítulos . .	6
1.2. Representación del hipercubo de estados y los valores correspondientes de la energía, para una red discreta con 3 neuronas	15
4.1. Representación esquemática de las hipótesis del Teorema 4.3. La gráfica d) muestra cómo es posible satisfacer simultáneamente todas las condiciones	109
4.2. Se incumple la condición (4.46) del Teorema 4.3 porque el parámetro varía en un rango excesivamente amplio. Es preciso reescalar el parámetro	111
4.3. Se incumple la condición (4.48) del Teorema 4.3 porque el valor inicial queda excesivamente lejos del parámetro, que debe ser reescalado	111
4.4. Se incumple la condición (4.49) del Teorema 4.3 porque el valor inicial queda excesivamente lejos del parámetro, que debe ser reescalado	112
4.5. Modelo del brazo de un robot	114
4.6. Identificación del brazo robótico. La estimación de la red de Hopfield, para cada parámetro individual, converge más rápido que el gradiente con $k = 10$ y oscila menos que con $k = 100$. El error de predicción de la red, integrado sobre el tiempo, es similar al gradiente con $k = 100$ e inferior a $k = 10$	117
4.7. Un manipulador con un solo brazo flexible	119

4.8. Resultados de simulación en presencia de parámetros que varían con el tiempo: a) Cambios repentinos de los parámetros (columna de la izquierda) b) Variación continua de los parámetros (columna de la derecha)	123
4.9. Estados del sistema de VIH-SIDA generados como datos de test	129
4.10. Simulación del método de estimación de parámetros con redes de Hopfield para el modelo de VIH-SIDA	132
4.11. Simulación del método de estimación de parámetros para el modelo de VIH-SIDA con número de parámetros reducido . . .	134
4.12. Red de Hopfield de alto orden para identificación de un sistema que no está en la forma lineal en los parámetros. Las dos primeras gráficas comparan la estimación de cada parámetro con su valor real. La gráfica c) muestra que el error de predicción de salida es casi idénticamente nulo, comparado con la magnitud de la propia salida	142

Lista de abreviaturas

POC	Problema de Optimización Combinatorial
TSP	Travelling Salesman Problem (Problema del viajante)
HCP	Hamiltonian Cycle Problem (Problema del ciclo Hamiltoniano)
kCP	k -Colouring Problem (Problema del mapa de k colores)
DEP	Diophantine Equation Problem (Problema de la ecuación diofántica)
EDO	Ecuación Diferencial Ordinaria
LS	Least Squares (Mínimos cuadrados)
LIP	Linear In the Parameters (Forma lineal en los parámetros)

Capítulo 1

Las redes de Hopfield de alto orden para optimización

1.1. Introducción

La presente tesis está dedicada al estudio de los sistemas recurrentes enmarcados en el paradigma neuronal de Hopfield. Los objetivos últimos son de naturaleza práctica: determinar la capacidad de estos sistemas para resolver problemas provenientes de diversas disciplinas, como la optimización y la ingeniería de control; analizar las dificultades que presenta la aplicación de las redes de Hopfield a tales problemas; y proporcionar o, al menos, sugerir soluciones que permitan solventar las dificultades. En concreto, se aplicarán las redes de Hopfield, incluyendo los modelos de alto orden, a problemas de optimización combinatorial y al problema de la identificación paramétrica de sistemas dinámicos. Con objeto de que las redes de Hopfield constituyan métodos adecuados para la solución de estos problemas, cumpliendo con los objetivos prácticos antes mencionados, es preciso un riguroso estudio teórico de las características de los sistemas en cuestión, de forma que las aplicaciones posteriores estén fundadas sobre bases sólidas. Se pretende, así, evitar una tendencia frecuente en la literatura sobre redes de Hopfield, a saber, la excesiva dependencia de argumentos empíricos que dan lugar a métodos aplicables

sólo a problemas particulares. Estos dos factores, falta de fundamentación rigurosa y de aplicabilidad general, son los causantes de un cierto escepticismo en cuanto a la capacidad de estos sistemas para resolver problemas de tamaño real, en aplicaciones industriales o empresariales. Por el contrario, el objetivo de este trabajo es mostrar el potencial de las redes de Hopfield en aplicaciones del mundo real, mediante una combinación de argumentos teóricos bien fundamentados y resultados prácticos satisfactorios.

Los problemas de optimización combinatorial (POC) surgen como un caso particular, de gran importancia, de la programación no lineal [81]. Pueden definirse como problemas de programación 0-1 cuya función objetivo es multilínea, en los que el crecimiento del tamaño de problema conlleva un incremento, de magnitud factorial, del coste computacional de la solución. Se trata de cuestiones de profundo impacto, tanto en diversas disciplinas científicas como en aplicaciones de la ingeniería. Por una parte, desde el punto de vista teórico, conforman un argumento central de la teoría de la complejidad computacional, ya que la mayoría de ellos son problemas *NP*-completos [38]. Asimismo, su estudio está relacionado con otras disciplinas teóricas, como la teoría de grafos. Por otra parte, desde el punto de vista práctico, su relevancia se deriva del hecho de que muchos POC constituyen una descripción abstracta de importantes aplicaciones del mundo real. Por ejemplo, el problema del viajante de comercio puede modelar el problema de enrutado en redes de comunicaciones y los problemas de bipartición de un grafo y del mapa de k colores son aplicables al diseño de circuitos integrados.

Las técnicas clásicas de solución de POC, fundamentadas en argumentos algebraicos, siguen presentando importantes limitaciones, en especial cuando se afrontan problemas de gran tamaño. Por tanto, cuando Tank y Hopfield [109] aplicaron el paradigma de las redes neuronales al problema del viajante de comercio (TSP¹), se despertó un gran entusiasmo, ya que se comprobó que se trataba de un método competitivo con las técnicas tradicionales, como las de *ramificación y acotación*. Aunque el sistema neuronal de Hopfield había sido

¹Se adoptan, al abreviar el nombre de los problemas, las siglas de los términos ingleses, ampliamente aceptados. Por ejemplo, TSP: Travelling Salesman Problem.

originalmente propuesto como modelo de memoria asociativa [46], rápidamente derivó en una herramienta ampliamente utilizada en la solución de problemas de optimización, habiendo dado lugar, en las dos últimas décadas, a centenares de publicaciones [100]. Sin embargo, siempre ha existido controversia en torno a la capacidad de las redes de Hopfield para resolver POC, ya que a menudo los resultados no respondieron a las expectativas creadas. El artículo fundacional de esta corriente crítica [115] se basaba en la imposibilidad de reproducir los resultados experimentales de Tank y Hopfield, dando lugar al desarrollo de modelos alternativos [37], en los que, no obstante, se trasluce la inspiración tomada de la red de Hopfield. Además, aparecieron contribuciones que tratan de mejorar la calidad de las soluciones al TSP, mediante una elección óptima de los parámetros [73, 74]. Lamentablemente, estas mejoras son dependientes del problema particular, de forma que los resultados no se pueden extrapolar a casos más generales. Más aún, dado que el TSP se resuelve mediante redes de primer orden, se ha prestado escasa atención a las redes de alto orden, que se pueden aplicar a una clase más amplia de importantes problemas. En cambio, trabajos más recientes [2, 113, 27] han proporcionado fundamentos teóricos que justifican una reconsideración de los sistemas de Hopfield en cuanto a su aplicación a problemas de optimización, al tiempo que han aparecido múltiples aplicaciones prácticas, por ejemplo [25, 100]. En consecuencia, puede afirmarse que el marco teórico general de las redes de Hopfield de alto orden está, aún, incompleto, siendo necesario el establecimiento de unas bases sólidas capaces de explicar tanto los éxitos como las deficiencias observadas en las aplicaciones. En lo posible, esta teoría debería ser de aplicabilidad general a un rango amplio de POC, no dependiendo de las peculiaridades de problemas particulares, así como permitir la reproducibilidad de los experimentos implementados. La presente tesis, en sus Capítulos 2 y 3, aspira a contribuir al establecimiento de tal teoría.

Por su parte, la identificación de sistemas dinámicos [66] puede definirse como el establecimiento del modelo de un sistema, a partir de la observación de sus entradas y salidas. Se trata de un problema que ha surgido independientemente en distintos contextos, tales como el análisis estadístico de series

temporales y la teoría de la señal. En el marco de la ingeniería de control ha sido objeto de intensa investigación, dada su utilidad para construir sistemas de control adaptativo [95, 70]. Sin embargo, no existen aún técnicas de identificación paramétrica, en el caso de sistemas no lineales, que produzcan resultados adecuados con carácter general. En el Capítulo 4, la representación del problema de la estimación de parámetros como un problema de optimización, sugiere la adaptación del paradigma neuronal de Hopfield a la identificación de sistemas y se presentan y analizan distintas aplicaciones a sistemas mecánicos y epidemiológicos, que muestran la validez y limitaciones de la técnica propuesta.

Desde un punto de vista epistemológico, puede afirmarse que el hilo conductor de la presente tesis es la sinergia entre el modelo neuronal de Hopfield, considerado como método de optimización, y la teoría de sistemas dinámicos. Por una parte, las técnicas propias de la teoría de sistemas dinámicos son las herramientas adecuadas para el estudio de la red de Hopfield, al tratarse de un sistema recurrente. Gracias a estas técnicas, se puede evaluar la capacidad de la red de Hopfield para resolver problemas de optimización, así como indicar caminos de solución de las limitaciones encontradas. Por otra parte, el problema de la identificación, que surge en el ámbito de la ingeniería de sistemas, encuentra una solución inspirada por la aplicación previa de las redes de Hopfield a optimización. Más aún, las redes de Hopfield presentan un alto interés como sistemas dinámicos en sí mismos, de forma que el estudio de sus características de convergencia, existencia y localización de estados estables, así como la descripción de nuevos métodos numéricos que preserven la función de Lyapunov, podría extenderse a otros sistemas similares, de interés físico o matemático. Se establece, así, un camino de ida y vuelta entre la teoría de sistemas y el paradigma neuronal, con beneficios mutuos. Por último, no puede dejar de mencionarse la importancia de una tercera disciplina, a saber, el análisis numérico, en tanto que el estudio de los métodos numéricos no es sino una forma de tratar los sistemas dinámicos discretos. En este sentido, el presente trabajo puede enmarcarse dentro de una novedosa corriente que analiza los métodos numéricos en cuanto a su capacidad para preservar las

propiedades dinámicas de los sistemas continuos [105].

El resto de este capítulo introductorio está dedicado a presentar una visión organizada del proceso de solución de un problema de optimización mediante redes de Hopfield. En particular, el análisis de las distintas formulaciones que se han propuesto de los sistemas neuronales de Hopfield, es una tarea fundamental para que una posible aplicación práctica pueda asentarse sobre una base teórica sólida, evitando así confusiones frecuentemente encontradas en la literatura. Una exposición más detallada, de carácter tutorial, puede encontrarse en [21]. Así, en la Sección 1.2, se describe la metodología de optimización de manera genérica, usando diversos ejemplos como ilustración, mientras que en la Sección 1.3 se presentan las distintas formulaciones existentes de los sistemas de Hopfield, estudiando la aplicabilidad y limitaciones en el uso de cada una de estas formulaciones. El análisis realizado en las secciones 1.2 y 1.3, basado en trabajos previos del autor y otras referencias bibliográficas, constituye el punto de partida de la presente tesis, al identificar las líneas de investigación abiertas. En consecuencia, en la Sección 1.4 se propone el programa de investigación que constituye la estructura de la presente tesis. El Capítulo 2 se dedica al análisis dinámico de la red continua de Hopfield, en la formulación de Abe, mientras que el Capítulo 3 estudia el proceso de discretización. Por su parte, el Capítulo 4 analiza la aplicación del modelo de Hopfield a la identificación de sistemas dinámicos. Las conclusiones finales de la tesis se recogen en el Capítulo 5. La Figura 1.1 presenta un esquema general de la relación entre los distintos capítulos. En la Sección 1.4, al establecer la estructura de la tesis, se referencian también las publicaciones del autor relacionadas con el trabajo presentado.

1.2. La metodología de optimización con redes de Hopfield

En esta sección se describe la metodología de aplicación de los sistemas neuronales de Hopfield a la solución de un problema de optimización combinatorial. La exposición permitirá diferenciar los aspectos dependientes del

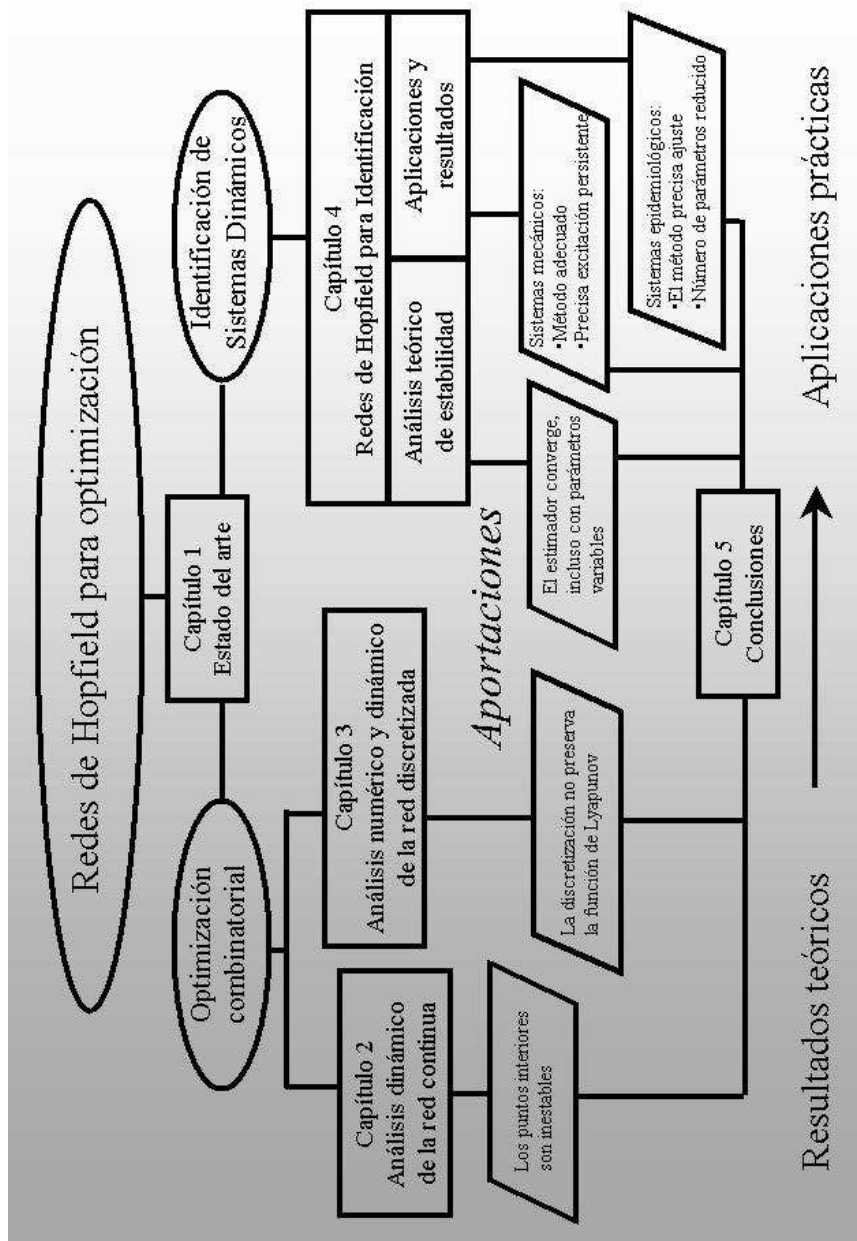


Figura 1.1: Estructura de la tesis y relación entre los distintos capítulos

problema de la cuestión de la capacidad genérica de las redes de Hopfield como método de optimización. La evaluación de esta capacidad genérica es objeto de estudio en la presente tesis, mientras que los heurísticos únicamente aplicables a problemas particulares quedan fuera de su ámbito.

En general, podemos describir una red neuronal de Hopfield como un sistema recurrente, es decir, un sistema dinámico discreto o continuo, compuesto de n elementos de proceso o neuronas. En cada instante temporal, la salida de la neurona i -ésima se refleja en un valor de estado s_i , $i = 1 \dots n$. Desde el punto de vista dinámico, las redes de Hopfield son sistemas estables, ya que poseen una función de Lyapunov V , también llamada *función de energía* del sistema. Con las matizaciones que se introducen en la siguiente sección, puede decirse que esta función tiene la siguiente forma:

$$V(\mathbf{s}) = - \sum_{q=1}^r \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_q) \in C_q^n \\ i \neq i_1, i_2, \dots, i_q}} w_{i i_1, i_2, \dots, i_q} s_i s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_q} + \sum_{i=1}^n b_i s_i \quad (1.1)$$

donde r es el orden de la red, $w_{i i_1, i_2, \dots, i_q}$ es el peso de la conexión de orden q desde el conjunto de neuronas $i_1 \dots i_q$ a la neurona i , b_i es un valor de *bias* o sesgo y C_q^n representa el conjunto de combinaciones de q elementos elegidos de entre los n primeros números naturales. Obsérvese que, para el modelo original de Hopfield (de primer orden), la energía se obtiene al sustituir $r = 1$ en la Ecuación (1.1):

$$V(\mathbf{s}) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} s_i s_j + \sum_{i=1}^n b_i s_i \quad (1.2)$$

que es una función cuadrática, con las particularidades de ser $w_{ii} = 0$ y $w_{ij} = w_{ji}$, como consecuencia de haber usado combinaciones en el sumatorio de la Ecuación (1.1). Estas condiciones coinciden con las requeridas por Hopfield para demostrar que la Ecuación (1.2) define una función de Lyapunov para la red de primer orden.

Por su parte, los problemas de optimización que consideraremos están descritos por una función objetivo E , no restringida, que incluirá como términos de penalización cualquier restricción que deba ser considerada. La solución del

problema viene dada por un valor de las variables $\mathbf{s}$, tal que el objetivo E sea mínimo. En el caso particular de problemas de optimización combinatorial, E será una función multilineal de variables bivaluadas, imponiéndose la restricción $s_i \in \{-1, 1\} \forall i$, o bien $s_i \in \{0, 1\} \forall i$. A grandes rasgos, la metodología de optimización con redes de Hopfield consiste en la identificación de la función objetivo del problema E con la función de Lyapunov V , con objeto de obtener el valor numérico de pesos y bias; a continuación, se deja evolucionar la red neuronal, de acuerdo con su dinámica, hasta alcanzar un estado de equilibrio que, por definición de función de Lyapunov, será un mínimo, posiblemente local, de la función objetivo. En consecuencia, la solución proporcionada por la red es el estado en el que se estabiliza el sistema.

Concretando, la metodología de aplicación de un sistema neuronal de Hopfield a la solución de un problema de optimización combinatorial sigue los siguientes pasos:

1. Descripción clara del problema abordado, indicando tanto el objetivo de minimización como las restricciones que deben ser consideradas.
2. Propuesta de una topología particular del sistema de Hopfield que pueda modelar el problema descrito.
3. Formulación matemática de la función objetivo, así como de las restricciones del problema. Estas últimas deben ser incorporadas a la función objetivo como términos de penalización, de forma que cualquier solución no factible suponga un aumento en el valor de la función objetivo.
4. Identificación de la función de coste con la función de Lyapunov de la red de Hopfield, teniendo esta última la forma de la Ecuación (1.1).
5. Determinación del valor de los pesos $w_{i_1 i_2 \dots i_q}$ y los bias b_i del sistema, a partir de la identificación entre los coeficientes de cada producto $s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_q}$, en las expresiones de E y V .

Para ilustrar la aplicación a optimización combinatorial de las redes de Hopfield, describiremos este proceso a partir de tres ejemplos bien conocidos y

cuya solución presenta dificultades [38]: el Problema del Viajante de Comercio (TSP, Traveling Salesman Problem en su notación inglesa), la Coloración de un Mapa con k Colores (kCP, k Color Problem) y la resolución de ecuaciones diofánticas (DEP, Diophantine Equation Problem).

El TSP [109, 44] puede ser descrito como el problema de encontrar un trayecto de longitud mínima que recorra un conjunto de c ciudades, volviendo a la de origen, de manera que cada ciudad es visitada una única vez. Se dispone de una medida de distancia entre cada par de ciudades. Para la solución del TSP, se construye una red de Hopfield formada por una matriz cuadrada de $n = c \times c$ neuronas, en la que cada fila representa una ciudad y cada columna representa un orden de visita. Con esta representación, una solución válida vendrá dada por un estado de equilibrio en el que habrá activada (es decir, tendrá valor de salida 1) una única neurona por fila (cada ciudad se visita una sola vez) y por columna (dos ciudades no pueden visitarse a la vez). Una variante del TSP es el problema del Circuito Hamiltoniano (HCP), consistente en encontrar, si existe, un circuito que pase una y sólo una vez por cada nodo de un grafo no totalmente conectado. El HCP puede ser modelado como un caso particular del TSP, adjudicando distancia 0 al arco entre dos nodos conectados y distancia 1 al arco entre dos nodos no conectados. La función objetivo del TSP puede expresarse como:

$$E = \frac{A}{2} \sum_i \left(\sum_x s_{xi} - 1 \right)^2 + \frac{B}{2} \sum_x \left(\sum_i s_{xi} - 1 \right)^2 + \frac{C}{2} \sum_x \sum_{y \neq x} \sum_i d_{xy} s_{xi} (s_{y,i+1} + s_{y,i-1}) \quad (1.3)$$

donde d_{xy} representa la medida de distancia entre las ciudades asociadas a las filas x e y , mientras que A , B y C son constantes que deben ser fijadas. El primer sumando incorpora la restricción de que dos neuronas de una misma columna no deben estar activadas a la vez, es decir, dos ciudades no pueden ser visitadas a la vez. El segundo sumando incorpora la restricción de que dos neuronas de una misma fila no deben estar activadas a la vez, es decir, una

ciudad no puede visitarse dos veces. Finalmente, el tercer sumando representa el recorrido total del trayecto, el cual se calcula sumando las distancias entre ciudades asociadas a dos neuronas activadas en columnas consecutivas de la red. Tras las adecuadas operaciones algebraicas, la Ecuación (1.3) se reduce a la forma cuadrática de la Ecuación (1.2), obteniéndose así el valor de los pesos w_{ij} y los bias b_i .

El kCP [107] consiste en colorear cada una de las p regiones de un mapa con uno de entre k colores, de manera que dos regiones con frontera común no tengan el mismo color. La correspondiente red se construye como una matriz de $p \times k$ elementos, en la que cada fila representa una región y cada columna un color. Así, la neurona (i, j) activada indica que la región i debe ser coloreada con el color j . En este caso, una solución válida vendrá dada por un estado de equilibrio en el que cada columna tendrá una sola neurona activada (cada región se pinta de un solo color) y en el que dos columnas correspondientes a regiones contiguas no pueden tener activadas la neurona de la misma fila (dos regiones contiguas no pueden tener el mismo color). La función objetivo puede expresarse como:

$$E = \frac{A}{2} \sum_i \left(\sum_x s_{ix} - 1 \right)^2 + \frac{B}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \sum_x t_{ij} s_{ix} s_{jx} \quad (1.4)$$

donde t_{ij} vale 1 si las regiones i y j tienen frontera común y 0 en otro caso, mientras que A y B son constantes que deben ser fijadas. El primer sumando incorpora la restricción de que debe haber exactamente una neurona activada en cada fila, ya que, si no, una misma región tendría asignado más de un color o ninguno. El segundo sumando indica que dos neuronas de una misma columna no deben estar activadas a la vez si corresponden a filas de regiones con frontera común. Simples manipulaciones algebraicas reducen la Ecuación (1.4) a la forma multilineal de la función objetivo V que, al igual que en el caso del TSP, resulta ser cuadrática y, por tanto, corresponde a una red de primer orden.

Por último, el DEP puede ser descrito como el problema de encontrar una solución, formada por números naturales, a una ecuación algebraica, es

decir, polinomial. Como caso particular, considérese el siguiente ejemplo [56]: encontrar una solución x, y de la ecuación $ax^2 + by = c$, siendo $a = 1$, $b = 3$, $c = 37$. Una red de Hopfield para este problema se construye con n neuronas, almacenando las m primeras los dígitos binarios de x , y las $n - m$ restantes los dígitos de y , de forma que:

$$x = \sum_{i=0}^{m-1} 2^i \frac{s_i + 1}{2} ; \quad y = \sum_{i=m}^{n-1} 2^{i-m} \frac{s_i + 1}{2} \quad (1.5)$$

Este problema puede ser reformulado como la optimización de la función

$$E = (ax^2 + by - c)^2 \quad (1.6)$$

que, tras las operaciones adecuadas, encaja en la forma de la Ecuación (1.1), siendo el orden $r = 3$.

De la presentación hecha de la metodología de optimización con redes de Hopfield, cabe destacar dos aspectos. Por una parte, la bondad de los resultados obtenidos en un problema concreto depende críticamente del modelado del problema, así como del ajuste de determinados parámetros, como las constantes A , B y C en el TSP y el kCP. El estudio de estas cuestiones, dependientes del problema, no arroja luz sobre la capacidad de la metodología en general. Es decir, no debiera culparse a las redes de Hopfield por la incapacidad para resolver problemas inadecuadamente modelados o en los que el ajuste de los parámetros es problemático. En concreto, en [113] se ha sugerido que el modelado del TSP, tan ampliamente utilizado como banco de pruebas para evaluar la capacidad de las redes de Hopfield, es especialmente inadecuado, ya que eleva el coste del problema al requerir $n = c^2$ neuronas para problemas de tamaño c . Por otra parte, de la exposición de la anterior metodología, se concluye que la red debe tener unas características dinámicas específicas: las salidas de las neuronas deben ser bivaluadas y la función de Lyapunov debe ser multilineal. Dado que la red discreta de Hopfield [46] tiene estas características, cabe preguntarse por la necesidad de definir redes continuas que, además, son computacionalmente más costosas. Sin embargo, existen otras formulacio-

nes del paradigma que, a pesar de producir salidas continuamente valuadas en un intervalo, pueden ser utilizadas para la resolución de los problemas de optimización combinatorial descritos, incluso con mejores resultados que el paradigma discreto. El estudio de las formulaciones de las redes de Hopfield se realiza en la siguiente sección, estableciendo claramente las limitaciones y modo de aplicación de cada una. Nótese que, en lo sucesivo, se abordarán este tipo de cuestiones, de carácter metodológico y aplicabilidad general, quedando fuera del ámbito de la presente tesis los aspectos dependientes de problemas particulares.

1.3. Formulaciones de las redes de Hopfield para optimización

En esta sección se establecen las distintas formulaciones de las redes de Hopfield existentes, mostrando, en base a trabajos previos, las limitaciones que cada una de las formulaciones presenta en cuanto a su aplicación a optimización, así como las estrategias que se han desarrollado para afrontar tales problemas. Si bien, en principio, cualquiera de las tres formulaciones es válida para resolver problemas de optimización, los resultados mostrados justifican que el resto de la tesis se centre en el estudio de la formulación continua de Abe. La ventaja principal que resulta de esta elección es que, a diferencia de la formulación continua de Hopfield, la función de Lyapunov de la formulación de Abe coincide exactamente con la forma multilineal de los problemas de optimización combinatorial, al tiempo que la aparición de mínimos locales no resulta un problema tan crítico como en la formulación discreta. También se verá que los dos problemas cruciales de la formulación de Abe son la posible existencia de puntos fijos estables en el interior del hipercubo, y la distorsión que surge al discretizar las ecuaciones continuas para su implementación en un ordenador, lo que justifica el estudio de estas cuestiones en los Capítulos 2 y 3, respectivamente.

Podemos encontrar diferentes formulaciones como resultado de una particular definición de cada uno de los elementos que intervienen en el modelo: *función de activación* de cada neurona, *ecuaciones dinámicas*, y *función de*

Lyapunov o función de energía. Naturalmente, estos elementos están interrelacionados entre sí, de manera que no es posible definirlos todos de manera independiente. Aquí se describen las tres formulaciones más significativas o generales, existiendo otras, por ejemplo [37], que pueden considerarse, en último término, variaciones de las descritas.

1.3.1. Formulación discreta de Hopfield

En 1982, Hopfield [46] propuso un sistema neuronal recurrente con objeto de modelar el comportamiento de una memoria asociativa natural. La red neuronal estaba basada en el modelo de neurona propio de la época: el modelo de McCulloch y Pitts. De acuerdo con este modelo, la función de activación de la neurona y la dinámica de activación vienen descritas por las Ecuaciones (1.7) y (1.8), respectivamente.

$$s_i = \text{sgn}(u_i) \quad (1.7)$$

$$u_i(t+1) = \sum_{j=1}^n w_{ij} s_j(t) - b_i \quad (1.8)$$

A partir de estas definiciones, Hopfield propuso la función de energía de la Ecuación (1.9), probando que se trata de una función de Lyapunov del sistema dadas las siguientes condiciones: ausencia de autoconexiones, es decir, $w_{ii} = 0$ para todo i ; conexionado simétrico, es decir, $w_{ij} = w_{ji}$ para todo i, j ; y dinámica asíncrona, es decir, en cada instante de tiempo sólo una variable i cambia su valor.

$$V = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_j w_{ij} s_i s_j + \sum_i b_i s_i \quad (1.9)$$

El modelo descrito puede ser extendido al caso de alto orden [57], resultando entonces definido por las siguientes ecuaciones:

$$s_i = \text{sgn}(u_i) \quad (1.10)$$

$$u_i(t+1) = \sum_{q=1}^r \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_q) \in C_q^n \\ i \neq i_1, i_2, \dots, i_q}} w_{i i_1 i_2 \dots i_q} s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_q} - b_i \quad (1.11)$$

$$V(\mathbf{s}) = - \sum_{q=1}^r \sum_i \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_q) \in C_q^n \\ i \neq i_1, i_2, \dots, i_q}} w_{i i_1, i_2, \dots, i_q} s_i s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_q} + \sum_i b_i s_i \quad (1.12)$$

El hecho de que la función de Lyapunov de la red discreta, dada por la Ecuación (1.9), coincide con la forma multilineal de la función objetivo de un problema de optimización combinatorial, permitió aplicar directamente el modelo de Hopfield a optimización, aplicación que finalmente ha resultado más fructífera que la inicialmente expuesta de memoria asociativa.

La formulación discreta podría parecer, a primera vista, la más apropiada para la resolución de problemas de optimización combinatorial, ya que tanto las características de sus funciones de activación (bivaluadas) como de su función de Lyapunov coinciden exactamente con las requeridas en optimización. Sin embargo, esta formulación proporciona los peores resultados en la práctica debido a la frecuente evolución hacia mínimos locales correspondientes a soluciones no factibles. Este fenómeno se explica porque, al ser la evolución asíncrona, la red sólo puede evolucionar desde un vértice a alguno de sus contiguos. Por tanto, si todos los vértices contiguos tienen mayor energía que el estado actual, la red no evolucionará aunque haya estados más alejados con menor energía. Además, la evolución del sistema depende de forma crítica de la secuencia de neuronas activadas, como se ilustra en la Figura 1.2: comenzando en el estado A, se llegará al estado B o C dependiendo de qué neurona haya sido activada en primer lugar. Estas dificultades se formalizan en el resultado que demuestra, de forma rigurosa, la posibilidad de existencia de mínimos locales con radio de convergencia nulo [114], es decir, que dado un estado con menor energía que todos sus vecinos, la red no tiene forzosamente que evolucionar hacia él a partir de cualquiera de sus vecinos. En consecuencia, en el peor de los casos, el número de pasos de evolución del sistema hasta encontrar una solución correcta será del orden $O(2^n)$.

También de forma empírica se ha estudiado la aplicación del sistema discreto de Hopfield a varios problemas de optimización [59]. Los resultados obtenidos, que se reproducen en la Tabla 1.1, muestran, en casi todos los casos, que se obtiene un estado que, no sólo no es óptimo, sino que ni siquiera es

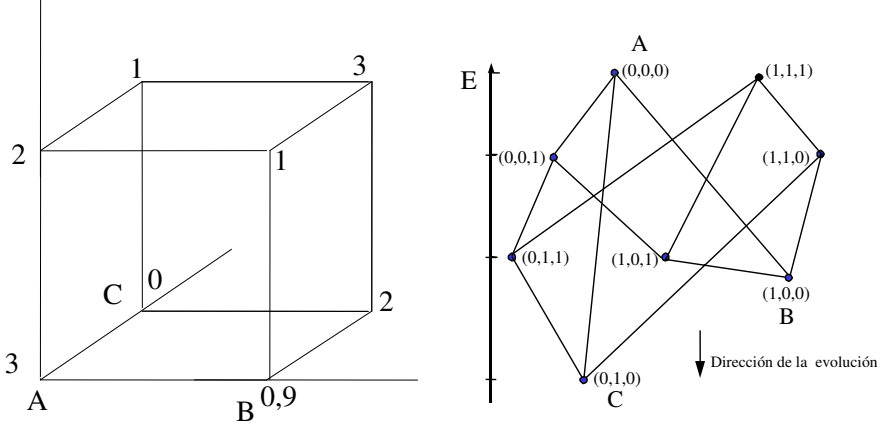


Figura 1.2: Representación del hipercubo de estados y los valores correspondientes de la energía, para una red discreta con 3 neuronas

Tabla 1.1: Resultados de simulación del modelo discreto de Hopfield para tres casos particulares de los problemas DEP, HCP y kCP ($k = 5$)

	DEP	HCP	kCP
Porcentaje de soluciones válidas	38 %	0 %	0 %
Número medio de pasos de simulación	10	33	56

una solución factible. Nótese que, en el caso de los problemas HCP y kCP, los resultados se han promediado sobre distintos valores de los parámetros A , B y C , con objeto de compensar el efecto de elecciones particulares de los parámetros.

1.3.2. Formulación continua de Hopfield

En [47] se propone una posible implementación eléctrica del modelo discreto previamente formulado. La dinámica del sistema y la función de activación de cada elemento, que se derivan de las características eléctricas del circuito descrito, vienen dadas por las Ecuaciones (1.13) y (1.14), respectivamente.

$$\frac{du_i}{dt} = -u_i + \sum_j w_{ij} s_j - b_i \quad (1.13)$$

$$s_i = g\left(\frac{u_i}{\beta}\right) \quad (1.14)$$

donde g es una función monótona creciente y saturada², mientras que β es un parámetro que regula la pendiente de esta función. A partir de estas ecuaciones, Hopfield dedujo la función de Lyapunov de la red:

$$V = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_j w_{ij} s_i s_j + \sum_i I_i s_i + \beta \sum_i \int_0^{s_i} g^{-1}(s_i) ds_i \quad (1.15)$$

También este modelo fue extendido al caso de alto orden [94, 57], que queda definido por:

$$s_i = g\left(\frac{u_i}{\beta}\right) \quad (1.16)$$

$$\frac{du_i}{dt} = -u_i + \sum_{q=1}^r \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_q) \in C_q^n \\ i \neq i_1, i_2, \dots, i_q}} w_{i i_1, i_2, \dots, i_q} s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_q} - b_i \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} V(s) = & - \sum_{q=1}^r \sum_i \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_q) \in C_q^n \\ i \neq i_1, i_2, \dots, i_q}} w_{i i_1, i_2, \dots, i_q} s_i s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_q} + \sum_i b_i s_i \\ & + \beta \sum_i \int_0^{s_i} g^{-1}(s) ds \end{aligned} \quad (1.18)$$

Desde el punto de vista de la metodología de optimización expuesta en la Sección 1.2, la formulación continua de Hopfield presenta un severo inconveniente: su función de Lyapunov, dada por la Ecuación (1.15), ya no coincide con la función objetivo propia de los problemas de optimización que estamos considerando, sino que incluye un término integral. La consecuencia dinámica de la aparición del término integral es la existencia de estados de equilibrio estables en el interior del hipercubo de estados. No obstante, este modelo se puede aplicar a optimización gracias a un resultado [113] que prueba que el sistema dado por las ecuaciones (1.13), (1.14) y (1.15) converge hacia un esta-

²Es decir, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |g(x)| < \infty$. Típicamente, g es, o bien una función sigmoide, de forma que $g(x) \in (0, 1)$, o bien la tangente hiperbólica, que da lugar a $g(x) \in (-1, 1)$.

do $\mathbf{e} + o(\beta)$, donde $\mathbf{e}$ es un vértice del hipercubo de estados que constituye un mínimo para el término multilineal de la función de Lyapunov. El anterior resultado sugiere establecer una estrategia de evolución descrita por el siguiente algoritmo:

1. Identificar la función objetivo sólo con la parte multilineal de la función de Lyapunov.
2. Inicializar el sistema en un estado aleatorio y un valor elevado de β .
3. Dejar evolucionar al sistema hasta que alcance un punto de equilibrio. (Previsiblemente, éste será un punto interior del hipercubo y, por tanto, no válido como solución)
4. Si la distancia entre el equilibrio alcanzado y un vértice es menor que un error umbral prefijado,
entonces
 el mínimo se ha encontrado y coincide con el vértice. *FIN*
si no
 disminuir β y volver al paso 3

El principal inconveniente de esta estrategia es la necesidad de alcanzar un punto de equilibrio antes de cambiar el valor de β , ya que en la región próxima a un mínimo la convergencia del sistema se hace más lenta. Por el contrario, se ha propuesto otra estrategia de evolución, aplicable en aquellos casos en los que se tenga conocimiento del valor mínimo $V_{\min}$ de la función objetivo, por ejemplo $V_{\min} = 0$ en el problema kCP. En esencia, esta estrategia permite detectar con antelación si un estado estable va a ser, o no, una solución aceptable, en base al teorema, demostrado en [59], que establece que la suma de términos integrales está acotada superiormente por el valor $CI_{\beta} = n \beta \ln 2$, alcanzándose tal cota superior precisamente en los vértices. Por tanto, en un vértice que sea solución del problema, el valor de la función de Lyapunov ha de ser $V = V_{\min} + CI_{\beta}$. Entonces, si para un particular β_1 el sistema evoluciona hasta encontrar un estado con energía V_{β_1} , que verifique $V_{\beta_1} < V_{\min} + CI_{\beta_1}$, implica que el sistema ya no puede alcanzar la solución, dado que ésta tiene mayor valor de energía que el estado actual. En consecuencia, debe disminuirse el parámetro β hasta

alcanzar un valor β_2 , de forma que el estado para el nuevo sistema verifique $V_{\beta_2} > V_{\min} + CI_{\beta_2}$. Es decir, sin modificar el estado, la energía debe superar el mínimo $V_{\min}$ al menos en una cantidad CI_{β_2} . Formalmente, esta estrategia puede ser descrita por el siguiente algoritmo:

1. Identificar la función objetivo sólo con la parte multilineal de la función de Lyapunov.
2. Inicializar el sistema en un valor aleatorio y un β elevado.
3. Para cada estado de la evolución:

si $V_{\beta_1} \geq V_{\min} + CI_{\beta_1}$ *entonces*
 si la distancia entre este punto y un vértice es menor
 que un umbral de error prefijado *entonces*
 el mínimo se ha encontrado y coincide con el vértice. *FIN*
 si no
 volver al paso 3
si $V_{\beta_1} < V_{\min} + CI_{\beta_1}$ *entonces*
 disminuir β y volver al paso 3

Esta nueva estrategia se ha comprobado empíricamente [55, 59], mostrando las simulaciones una considerable reducción en el número de pasos necesarios para alcanzar un mínimo global, es decir, la solución correcta del problema. Dependiendo del problema, esta reducción estuvo entre el 90 % y el 40 % de los pasos necesarios con la estrategia tradicional. Asimismo, para todos los conjuntos de parámetros en los que la estrategia tradicional alcanzó una solución factible, también lo hizo la nueva. Sin embargo, la nueva estrategia presenta el inconveniente de que es necesario calcular el valor de la función de Lyapunov del sistema para cada estado, lo que incrementa el tiempo de cómputo de cada iteración, no disponiendo de resultados definitivos acerca de si la reducción del número de pasos compensa por el mayor coste computacional de cada paso. Además, es preciso conocer el valor mínimo de la función objetivo, lo cual no es posible en todos los problemas.

1.3.3. Formulación de Abe para redes de Hopfield

La formulación de Abe [1], a diferencia de la de Hopfield, estuvo desde el principio enfocada la resolución de un problema de optimización, en concreto, minimizar la función:

$$V = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_j w_{ij} s_i s_j + \sum_i b_i s_i \quad (1.19)$$

donde los w_{ij} y b_i son parámetros y las s_i son las variables de la función. Para resolver el problema desde una perspectiva neuronal, se define un sistema de unidades funcionales dadas por la siguiente función de activación:

$$s_i = g\left(\frac{u_i}{\beta}\right) \quad (1.20)$$

donde g es una función derivable monótonamente creciente (por ejemplo, una función sigmoide o tangente hiperbólica) y β es un parámetro que regula la pendiente de dicha función. La dinámica de este sistema viene dada por la condición de gradiente $\frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial s_i}$, que garantiza que el sistema evoluciona en la dirección de disminución de la función objetivo³. Sustituyendo en la condición de gradiente la expresión de V , dada por la Ecuación (1.19), obtenemos la dinámica del modelo:

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_j w_{ij} s_j - b_i \quad (1.21)$$

Como en el caso de las formulaciones discreta y continua de Hopfield, la extensión a alto orden de la formulación de Abe es directa [57], dando lugar a las siguientes definiciones:

$$s_i = g\left(\frac{u_i}{\beta}\right) \quad (1.22)$$

³Esta definición de sistema de gradiente es equivalente a afirmar que el sistema posee una función de Lyapunov [45].

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_{q=1}^r \sum_{\substack{(i_1, i_2 \dots i_q) \in C_q^n \\ i \neq i_1, i_2 \dots i_q}} w_{i i_1, i_2 \dots i_q} s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_q} - b_i \quad (1.23)$$

$$V(\mathbf{s}) = - \sum_{q=1}^r \sum_i \sum_{\substack{(i_1, i_2 \dots i_q) \in C_q^n \\ i \neq i_1, i_2 \dots i_q}} w_{i i_1, i_2 \dots i_q} s_i s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_q} + \sum_i b_i s_i \quad (1.24)$$

Es digno de resaltar que las funciones de Lyapunov del modelo de Abe y del modelo discreto de Hopfield son formalmente coincidentes, y coincidentes a su vez con la forma multilineal de las funciones objetivos de los problemas de optimización combinatorial. En cualquier caso, debe observarse que la similitud entre las ecuaciones (1.19) y (1.9) de ambos modelos es puramente formal, ya que en la primera los elementos s_i pueden tomar un continuo de valores en un intervalo, mientras que en la segunda son funciones bivaluadas, es decir, $s_i \in \{0, 1\}$ o $s_i \in \{-1, 1\}$.

En principio, puede pensarse que el principal obstáculo para la aplicación de la formulación de Abe a optimización combinatorial es la aparición de funciones de activación continuas, lo que implica la posible existencia de equilibrios estables en el interior del hipercubo. Sin embargo, en el caso de redes de primer orden, con la condición de que no existan autoconexiones en la red ($w_{ii} = 0$), se demuestra [2] que los únicos puntos fijos estables del sistema corresponden a vértices del hipercubo de estados. Además, puesto que ahora, a diferencia de lo que ocurre con el modelo discreto, la evolución es continua, la dependencia de su trayectoria con el orden de activación de las neuronas es despreciable. Estos resultados favorecen el uso de este modelo en la resolución de problemas de optimización combinatorial ya que, en definitiva, la dinámica de la red garantiza la búsqueda de un mínimo en los vértices, a pesar de que la red parta de un estado en el interior del hipercubo. No obstante, en el caso de redes de alto orden, está aún sin resolver la cuestión de la existencia de puntos fijos estables en el interior del hipercubo. Este aspecto es uno de los principales objetos de estudio del Capítulo 2.

El otro problema fundamental de aplicación de esta formulación proviene de su implementación en un computador. La simulación por ordenador

Tabla 1.2: Resultados de simulación del modelo de Abe para el problema DEP, con distintos valores de paso Δt

Tamaño de paso	$\Delta t = 1$	$\Delta t = 0,1$	$\Delta t = 0,01$
Soluciones correctas (% mínimo global)	6 %	40 %	100 %
Número medio de pasos de simulación	191	6.856	13.198
Número medio de pasos para soluciones correctas	1.983	13.198	51.389

de las ecuaciones continuas implica la discretización de la dinámica mediante métodos numéricos, los cuales no garantizan la preservación de la función de Lyapunov. En [59], se comprobó experimentalmente que la diferencia entre la trayectoria continua y la discretizada depende del valor del tamaño del paso de discretización Δt . La Tabla 1.2 reproduce los porcentajes de soluciones correctas obtenidas para distintos valores de paso, en el caso de una red de Hopfield de tercer orden para la solución de un DEP, como el descrito en la Sección 1.2. La tabla muestra también el número medio de pasos de evolución hasta un estado estable cualquiera y hasta un estado que representa una solución correcta del problema, para cada Δt . Puede apreciarse que la probabilidad de caída en mínimos locales, que no son válidos como solución del problema, se reduce mediante la selección de un valor muy pequeño de Δt , a costa de un mayor número de pasos de simulación, lo que implica un mayor coste computacional y tiempo de respuesta. En el Capítulo 3 se estudia este fenómeno con argumentos rigurosos y se sugieren líneas de investigación para su solución.

1.4. Estructura de la tesis y publicaciones relacionadas

Se ha presentado en el presente capítulo introductorio una descripción lo más sistemática posible de las distintas formulaciones de los sistemas neuro-

nales de Hopfield y su aplicación a problemas de optimización. Tras resumir la metodología de aplicación de un sistema genérico de Hopfield a problemas de optimización combinatorial, se describen las tres formulaciones que consideramos más generales del sistema de Hopfield: la formulación discreta de Hopfield, la formulación continua de Hopfield y la formulación de Abe. Cualquiera de estas formulaciones puede ser aplicada a un problema particular de optimización, pero es necesario conocer las limitaciones de cada formulación, así como las estrategias que pueden ser aplicadas en cada caso. La formulación discreta resulta ser muy sensible a la aparición de mínimos locales, presentando una muy baja eficiencia. La formulación continua de Hopfield presenta el inconveniente de la existencia de un término integral en la función de energía, imposible de asimilar a ningún término en la función objetivo, por lo que los puntos estables se encuentran en el interior del hipercubo. No obstante, la aplicación de esta formulación es posible mediante el uso de una estrategia de modificación progresiva de la pendiente de la función de activación, de manera que los estados estables del sistema se desplacen a un entorno tan pequeño como queramos de un vértice solución del problema. El precio a pagar por esta estrategia es un mayor coste computacional. La formulación de Abe tiene la ventaja de que su función de energía coincide exactamente con la forma de la función objetivo del problema, por lo que, en el caso de redes de orden uno, se garantiza su convergencia hacia una solución factible del problema, la cual vendrá representada por un vértice del hipercubo de estados. No obstante, la posible existencia de puntos fijos interiores estables, en el caso de alto orden, era hasta ahora una cuestión abierta, cuya solución se desarrolla en la presente tesis. El otro gran problema de aplicación de esta formulación se deriva de su implementación en un ordenador digital, ya que no se ha demostrado que la red discretizada tenga función de Lyapunov. Este hecho justifica que el Capítulo 3 se dedique al análisis del proceso de discretización. Estos resultados, que motivan el presente trabajo, pueden encontrarse en publicaciones previas del autor [56, 57, 58, 11, 59, 17], así como en la tesis del director [55]. Una exposición de carácter tutorial, presentada en forma resumida en [60], se ha publicado en [21].

Como resumen del estudio previo de la aplicación de las redes de Hopfield a optimización, puede afirmarse que estos sistemas constituyen métodos adecuados para la resolución de problemas de optimización combinatorial, siempre que su uso sea coherente con sus propiedades. Por tanto, las críticas a la mala calidad de los resultados se deben a un uso espurio del modelo, más que a una deficiencia intrínseca del mismo. La presente tesis aspira a contribuir al uso sistemático de las redes de Hopfield a optimización, proponiendo que la investigación en este ámbito debería seguir el siguiente programa de cuatro etapas:

1. Análisis de la red continua, definida por una ecuación diferencial.
2. Discretización, que da lugar a un sistema discreto.
3. Selección de parámetros de diseño, relacionados con una implementación particular.
4. Heurísticos que mejoren la eficacia en un problema particular.

Un gran número de publicaciones abordan los pasos tercero y cuarto de la anterior enumeración, relativos a aspectos particulares de la implementación [11] y el problema [73, 25], mientras que son escasos los resultados que establecen fundamentos sólidos, con total generalidad. En particular, a menudo se mezclan conceptos provenientes de distintas formulaciones, resultando en un uso incoherente del modelo.

Con respecto a la organización de la presente tesis, cabe mencionar que existe una línea conductora del conjunto del trabajo, a saber, la aplicación de las redes de Hopfield a optimización. No obstante, se ha realizado un esfuerzo por mantener, dentro de lo posible, la independencia de cada capítulo. El punto de partida, de acuerdo con la exposición de la metodología de optimización realizada en el presente capítulo, es el establecimiento del modelo usado en lo sucesivo: la formulación continua de Abe de las redes de Hopfield de alto orden.

En el Capítulo 2, se estudian los aspectos dinámicos de la formulación continua de Abe, que corresponden a la primera etapa del programa de cuatro

pasos arriba descrito. En particular, se demuestra que los puntos fijos interiores son inestables, con la única posible excepción de puntos no hiperbólicos. Esta propiedad ya había sido probada en el caso de redes de primer orden, pero el procedimiento usado no era generalizable a redes de alto orden. La inestabilidad de los equilibrios interiores, junto con la existencia de una función de Lyapunov multilínea, permite considerar a las redes de Hopfield, en la formulación de Abe, como métodos apropiados para la solución de problemas de optimización combinatorial. Con respecto a los puntos fijos no hiperbólicos, se conjetura que son también inestables, aunque la demostración presentada se restringe al caso de redes de orden dos con tres neuronas. Estos resultados se han presentado en las publicaciones [17, 19].

El Capítulo 3 trata el segundo punto del programa de cuatro etapas arriba descrito, es decir, una vez establecida la capacidad del modelo continuo de Abe, se estudia la discretización derivada de su implementación en un ordenador. En particular, se pretende evaluar si cada una de las propiedades favorables del modelo continuo se preserva tras la discretización. Una aportación crucial es la formulación del sistema discretizado como la iteración de una única función, ya que esto permite aplicar técnicas conocidas del análisis numérico y la teoría de sistemas dinámicos discretos. Se comprueba que los estados de la red discreta están acotados por el hipercubo, que sus puntos fijos coinciden con los de la red continua y que la estabilidad, o inestabilidad, de los equilibrios también se preserva. Sin embargo, la estructura de gradiente puede quedar destruida debido a la aparición de soluciones periódicas, lo que implicaría que la red no podría poseer ninguna función de Lyapunov. Este resultado clave sugiere la búsqueda de nuevos métodos numéricos que preserven la función de Lyapunov, así como las demás propiedades favorables de la red continua. El estudio presentado puede encontrarse en la publicación [18], mientras que algunos resultados exploratorios de métodos numéricos alternativos han aparecido en [12, 13, 14].

El Capítulo 4 constituye un cambio de orientación, ya que abandona el campo de la optimización combinatorial, para abordar el problema de la identificación paramétrica de sistemas dinámicos. No obstante, existe un nexo de

unión con la exposición previa, ya que este problema puede describirse como un problema de optimización, al que se aplica la metodología antes presentada utilizando la formulación de Abe de sistemas neuronales de Hopfield. Se formula, así, un método de estimación de parámetros basado en una red de Hopfield adaptada, cuyos pesos y bias varían con el tiempo, debido a su definición a partir de los estados y salidas del sistema a identificar. Un riguroso estudio teórico muestra la convergencia del estimador al valor de los parámetros, en el caso de parámetros constantes, o a un entorno acotado de los parámetros, cuando éstos varían con el tiempo. Para confirmar empíricamente los hallazgos teóricos, se ha simulado la aplicación del método a tres sistemas dinámicos diferentes, provenientes del campo de la robótica y la epidemiología: un modelo de la epidemia de VIH-SIDA en Cuba, un manipulador rígido con un solo brazo y un modelo simplificado de un manipulador con brazo flexible. El método propuesto se adapta especialmente bien a las características de los sistemas mecánicos, incluso en el caso de parámetros variables con el tiempo. En el caso del modelo del VIH-SIDA, se obtienen buenos resultados siempre que el número de parámetros a estimar sea reducido. Por último, el método propuesto se extiende al caso de sistemas en los que los parámetros no aparezcan en forma lineal, lo que requiere el empleo de redes de alto orden. Los resultados expuestos se encuentran publicados en [20, 16, 15, 22].

Finalmente, el Capítulo 5 recoge las conclusiones del trabajo realizado y las principales líneas de investigación futuras.

Capítulo 2

Análisis dinámico de la red de Hopfield continua

Resumen del capítulo

Este capítulo presenta un análisis dinámico de las redes de Hopfield de alto orden, en la formulación de Abe, con objeto de determinar la capacidad de estos sistemas para resolver problemas de optimización. Se demuestra que los puntos fijos interiores, que son no factibles, son inestables, siempre que sean hiperbólicos. Esta propiedad de la red, junto con la ya conocida de poseer una función de Lyapunov, permite afirmar que las redes continuas son una metodología apropiada para la solución de problemas de optimización combinatorial. Desde el punto de vista dinámico, el único caso no cubierto por los resultados presentados es la posible existencia de puntos fijos interiores no hiperbólicos. Se prueba que estos puntos son inestables en redes con tres neuronas y orden dos, proponiendo la conjetura de que también son inestables en el caso general.

2.1. Introducción

Este capítulo prueba de forma rigurosa la capacidad de las redes de Hopfield de alto orden, en la formulación de Abe [1], para resolver problemas de

optimización. Por tanto, el presente capítulo estaría centrado en el primer paso de los cuatro que componen el programa de investigación expuesto en la Sección 1.4 (ver página 23). Habitualmente, los problemas de optimización combinatorial (POC) presentan dos características fundamentales [113]:

- La función objetivo V es multilineal. En particular, la función objetivo es cuadrática en el caso más simple, que es también el mejor estudiado.
- Las soluciones $\mathbf{s}$ se encuentran en puntos discretos $s_i \in \{-1, 1\} \forall i$, es decir, en los vértices del hipercubo unitario¹.

Como se vio en el capítulo anterior, la formulación de Abe tiene la ventaja de que su función de Lyapunov es multilineal, no incluyendo el término integral que sí está presente en la formulación original de Hopfield [47]. Por consiguiente, la función de Lyapunov de Abe puede hacerse coincidir exactamente con la función objetivo de un POC. Desde el punto de vista dinámico, la presencia del término integral impide que los vértices del hipercubo unitario sean puntos fijos estables, lo que obstaculiza la aplicación de la formulación de Hopfield a POC. En cambio, la formulación de Abe, en la que todos los vértices son puntos fijos estables, garantiza, en principio, la convergencia a un vértice. Sin embargo, pueden existir puntos fijos interiores que, en caso de ser estables, abrirían la posibilidad de una solución espuria -no factible- del problema. Por tanto, el principal resultado del presente capítulo es la demostración de que tales puntos fijos interiores son inestables, con la condición de que sean hiperbólicos, es decir, que el jacobiano del sistema no se anule en tales puntos. Este resultado ya fue probado en el caso de redes de primer orden [2], mediante un procedimiento que no es posible extender al caso de alto orden. Por el contrario, en el presente análisis, la conclusión para redes de orden uno se obtiene como un corolario del teorema general. En resumen, asumiendo la propiedad de hiperbolicidad de los puntos fijos, quedan completamente establecidas las propiedades dinámicas del sistema, en la máxima generalidad:

- Los vértices son puntos fijos estables.

¹Existe una formulación alternativa con $s_i \in \{0, 1\} \forall i$.

- Todo punto fijo que no sea un vértice es inestable.
- El sistema posee una función de Lyapunov válida dentro del hipercubo unitario.
- El estado está acotado dentro del hipercubo unitario.

Debido a estas propiedades, puede afirmarse que las redes continuas son una metodología apropiada, de aplicabilidad general, para la solución de problemas de optimización combinatorial. Con respecto al caso no cubierto por los anteriores resultados -la posible existencia de puntos fijos interiores no hiperbólicos- se demuestra que esta circunstancia sólo puede darse cuando el hessiano de la función objetivo se anula. Se conjetura que, en el caso general, estos puntos fijos no hiperbólicos, en los que se anula el hessiano, también son inestables, completando así el cuadro dinámico de la formulación de Abe. No obstante, dada la dificultad del tratamiento de los puntos no hiperbólicos, no ha sido posible proporcionar una demostración general de esta conjetura. Sí se prueba, en cambio, en el caso particular de redes con tres neuronas y orden dos.

Desde un punto de vista epistemológico, la aplicación de las redes de Hopfield continuas a problemas de optimización implica la definición de un sistema dinámico, cuyo comportamiento a largo plazo “resuelve” el problema. Es interesante constatar que este enfoque de resolución de problemas mediante la noción de sistema dinámico, no es, en absoluto, nuevo. De hecho, se han obtenido avances significativos en el campo de los métodos numéricos para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), mediante la aplicación del siguiente esquema conceptual:

1. Analizar las propiedades cualitativas de la EDO continua.
2. Preservar tales propiedades en la discretización, es decir, en el método numérico.

El representante paradigmático de esta corriente, que procura la sinergia entre la teoría de sistemas dinámicos y el análisis numérico, es el libro de Stuart y Humphries [105], del que se ha obtenido un considerable número de ideas

que inspiran la presente tesis. También dentro de este marco de aplicación de la teoría de sistemas dinámicos, se han presentado resultados concernientes al problema de encontrar raíces singulares de ecuaciones [88]. No deja de ser notable que la especial dificultad de las raíces singulares proviene del hecho de corresponder a puntos no hiperbólicos, cuyo estudio también ha constituido un desafío en el presente trabajo. Por último, en el campo de la optimización, se han construido sistemas dinámicos adecuados para la solución de problemas de optimización, tanto sin restricciones [97] como con restricciones [98], dando lugar al llamado “enfoque EDO de programación no lineal”. Este enfoque-EDO ha dado lugar a métodos que, en comparación con las técnicas tradicionales, como la programación secuencial cuadrática, proporcionan resultados favorables. Sin embargo, los sistemas dinámicos definidos dentro de este enfoque-EDO no son aptos para tratar las restricciones de la forma $|s_i| = 1$, requeridas en POC. La optimización combinatorial, por tanto, continúa siendo un campo caracterizado por la ausencia de resultados definitivos, en el que las redes de Hopfield podrían llegar a ser métodos altamente eficientes. En este sentido, nuestro análisis de las redes de Hopfield de alto orden, con las herramientas de la teoría de sistemas dinámicos, constituye la semilla de un prometedor *enfoque EDO de optimización combinatorial*.

Los resultados expuestos en el presente capítulo, que se recogen en la publicación [19], se estructuran como se describe a continuación. En primer lugar, en la Sección 2.2, se fija la notación para el resto del capítulo. Asimismo, se realiza una revisión bibliográfica de la formulación de Abe de las redes de Hopfield continuas, resaltando la escasez de contribuciones que traten redes de alto orden con suficiente rigor teórico. En la Sección 2.3, mediante técnicas de la teoría de sistemas dinámicos, se analiza la red de Hopfield continua, en la formulación de Abe, procurando el máximo rigor y generalidad. Para ello, en primer lugar, es preciso reescribir las ecuaciones de la red como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, en lugar de la formulación algebraico-diferencial habitual. El principal resultado de esta sección es que los puntos interiores hiperbólicos son inestables. Otro importante hecho se demuestra en la Sección 2.4: los estados permanecen acotados dentro del hipercubo unitario.

Aunque este hecho es ya conocido, no resulta evidente en la EDO formulada en la Sección 2.3. El interés de este resultado sólo se apreciará al estudiar su discretización en el Capítulo 3, ya que, si el método numérico no preserva la acotación en el hipercubo, aparecen inestabilidades que destruyen la eficacia de la red. El análisis de los puntos fijos interiores se retoma en la Sección 2.5, pero ahora se centra la atención en los puntos no hiperbólicos. El caso no hiperbólico es mucho más difícil, y la inestabilidad de estos puntos fijos interiores se demuestra sólo en el caso particular de una red de segundo orden con tres neuronas, dejando abierta la conjetura de esta inestabilidad en el caso general. Finalmente, la Sección 2.6 presenta las conclusiones del capítulo, así como algunas líneas de investigación futura.

2.2. La formulación de Abe de las redes de Hopfield para optimización

En esta sección se establecen las ecuaciones que definen la dinámica de la red de Hopfield de alto orden, en la formulación de Abe, y que se estudian en el resto del capítulo. Asimismo se revisan los resultados obtenidos hasta el momento sobre el análisis dinámico del sistema, así como la relación de estos resultados con la capacidad de resolver problemas de optimización combinatorial. En su formulación original [1], la red de Abe es un sistema continuo tanto en el tiempo como en los estados, definido por la siguiente ecuación:

$$\frac{du_i}{dt} = net_i; \quad s_i(t) = \tanh\left(\frac{u_i(t)}{\beta}\right) \quad (2.1)$$

La expresión net_i representa una función del estado $\mathbf{s}$, que proporciona la entrada a la neurona i :

$$net_i = \sum_{j=1}^n w_{ij} s_j - b_i \quad (2.2)$$

donde n es el número de neuronas de la red, w_{ij} es el peso que pondera la conexión de la neurona i a la j y b_i es un valor de *bias* o sesgo, siendo constantes los valores de los pesos y el bias. Obsérvese que el valor de net_i se calcula simplemente como una suma ponderada de las señales s_j procedentes

de cada neurona j de las restantes. La generalización a alto orden de esta red [94, 57] se obtiene añadiendo a dicha suma los productos de señales de otras neuronas, también ponderados, resultando en la siguiente definición de net_i :

$$net_i = \sum_{q=1}^r \sum_{\substack{(i_1, i_2 \dots i_q) \in C_q^n \\ i \neq i_1, i_2 \dots i_q}} w_{i i_1, i_2 \dots i_q} s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_q} - b_i \quad (2.3)$$

donde r es el orden de la red, $w_{i i_1, i_2 \dots i_q}$ es el peso de la conexión de orden q desde el conjunto de neuronas $i_1 \dots i_q$ a la neurona i y C_q^n representa el conjunto de combinaciones de q elementos elegidos de entre los n primeros números naturales. Obsérvese que cuando el orden es uno, al sustituir $r = 1$ en la Ecuación (2.3), se obtiene la red original de primer orden, Ecuación (2.2).

El sistema definido por las Ecuaciones (2.1) y (2.3) es globalmente asintóticamente estable, es decir, sus soluciones convergen a alguno de sus puntos fijos (véanse, por ejemplo, los textos [45, 112, 62] para las definiciones y resultados básicos de la teoría de sistemas dinámicos, de los que se ha incluido un breve extracto en el Apéndice A). Este hecho se demostró mediante la definición de una función de Lyapunov, dada por la siguiente expresión:

$$V(\mathbf{s}) = - \sum_{q=1}^r \sum_i \sum_{\substack{(i_1, i_2 \dots i_q) \in C_q^n \\ i \neq i_1, i_2 \dots i_q}} w_{i i_1, i_2 \dots i_q} s_i s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_q} + \sum_i b_i s_i \quad (2.4)$$

que, en el caso de primer orden, se reduce a una función cuadrática al sustituir $r = 1$:

$$V(\mathbf{s}) = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_j w_{ij} s_i s_j + \sum_i b_i s_i \quad (2.5)$$

El hecho de que V es realmente función de Lyapunov del sistema puede demostrarse observando que se cumple la siguiente condición: $\frac{\partial V}{\partial s_i} = -net_i = -\frac{du_i}{dt}$. Por tanto, teniendo en cuenta que la derivada de la función tangente hiperbólica es siempre positiva, la derivada temporal de V resulta ser:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial s_i} \frac{ds_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial s_i} \frac{ds_i}{du_i} \frac{du_i}{dt} = - \sum_{i=1}^n net_i \frac{1}{\beta} \tanh' \left(\frac{u_i(t)}{\beta} \right) net_i$$

$$= -\frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^n (net_i)^2 \tanh' \left(\frac{u_i(t)}{\beta} \right) \leq 0 \quad (2.6)$$

que es la principal condición para que V sea función de Lyapunov, como se observa en el Lema A.1.

La metodología de aplicación de la redes de Hopfield [109] a POC consiste en hacer coincidir la función de Lyapunov de la red con la función objetivo del problema y dejar evolucionar el sistema hasta que se alcance un equilibrio. Como ya se ha dicho, la función objetivo de los POC es multilineal, por lo que, en la formulación de Abe, la coincidencia puede hacerse completamente ya que la función de Lyapunov, dada en la Ecuación (2.4), también es multilineal. Obsérvese que las características de la función objetivo de los POC [113] dan lugar, como consecuencia de la aplicación de esta metodología, a las propiedades de los pesos de la red:

- Cada producto de las variables $s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_q}$, ponderado por el coeficiente $w_{i_1, i_2 \dots i_q}$, es un único sumando de la función objetivo. Por tanto, los pesos con los mismos subíndices, en diferente orden, coinciden.
- La función objetivo no incluye potencias superiores a 1 de ninguna variable ya que, como las soluciones están en los vértices, se cumple $s_i^2 = 1$ y las potencias se podrían simplificar. En consecuencia, no existen auto-pesos en la definición de la red, es decir, si $i = i_j$ para algún $j \in 1 \dots q$, entonces $w_{i i_1, i_2 \dots i_q} = 0$.

Con respecto a las referencias bibliográficas relativas a la formulación de Abe, es notable el escaso número de estudios teóricos publicados, comparados con la abundancia de contribuciones recientes sobre la formulación de Hopfield (por ejemplo, los artículos [27, 61] y las referencias que contienen). No obstante, un estudio detallado de las aplicaciones encontradas en la literatura permite detectar que muchas aplicaciones prácticas están, en realidad, basadas en la formulación de Abe, aunque en su lugar se referencia la formulación original de Hopfield. En el campo de los trabajos de aplicación a POC, es preciso mencionar las publicaciones de Takefuji et al. [107, 25]. Estos trabajos,

que constituyen aportaciones importantes desde el punto de vista práctico, presentan algunas lagunas en los aspectos teóricos. Así, las soluciones son dependientes de los problemas concretos, careciendo de aplicabilidad general, y los aspectos de implementación se resuelven por prueba y error, careciendo de un soporte teórico riguroso. Por otra parte, centrándonos en los estudios teóricos, en general no existen trabajos que traten adecuadamente el proceso de discretización que, como veremos en el Capítulo 3, es crucial para la implementación de la red en un ordenador. De hecho, el trabajo del propio Abe [2] simplemente no menciona la necesidad de discretizar, aunque es evidente que el método se implementa en un ordenador digital, mientras que en otras publicaciones [73] la elección del tamaño del paso de discretización no tiene fundamento teórico riguroso. Por tanto, pensamos que existe un importante vacío en la fundamentación teórica de las redes de Hopfield, en la formulación de Abe. Este trabajo constituye una aportación a dicha fundamentación, orientada a obtener métodos eficientes, rigurosamente basados en la teoría, para la solución de problemas de optimización combinatorial generales. En particular, el presente capítulo aborda el estudio del modelo continuo, sentando así las bases para el análisis del proceso de discretización que resulta de la implementación de la red en un ordenador, análisis que se afronta en el Capítulo 3.

2.3. Estabilidad del modelo de Abe de alto orden

En esta sección se demuestra una de las principales contribuciones del capítulo, a saber, que, bajo la hipótesis de hiperbolicidad, no hay puntos fijos estables aparte de los vértices. En el caso de las redes de primer orden, este resultado, ya conocido, se obtiene como un corolario. Las técnicas usadas, linealización y estudio local de los autovalores, son herramientas conocidas en el análisis dinámico de las EDO. Sin embargo, se observa que la Ecuación (2.1), que define la red, no es estrictamente una EDO, sino que tiene una ecuación no diferencial: la que proporciona el estado s_i en función del potencial u_i . Por tanto, en primer lugar, es preciso reformular la ecuación de la red como una

única EDO, que se obtiene por la aplicación de la regla de la cadena de la diferenciación:

$$\frac{ds_i}{dt} = \frac{ds_i}{du_i} \frac{du_i}{dt} = \frac{1}{\beta} (1 - s_i^2) \text{net}_i \quad (2.7)$$

Así pues, ésta es la ecuación que se estudiará en el resto del capítulo y que, por brevedad de notación en lo sucesivo, reescribimos definiendo una función auxiliar $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\frac{ds_i}{dt} = f_i(\mathbf{s}) \quad ; \quad f_i(\mathbf{s}) = \frac{1}{\beta} (1 - s_i^2) \text{net}_i \quad (2.8)$$

La existencia de una función de Lyapunov implica que el comportamiento a largo plazo del sistema es simple [45]: para todo estado inicial, el sistema se aproxima a un punto que pertenece al conjunto de puntos fijos². Por tanto, el análisis del sistema debe comenzar por determinar los puntos fijos, ya que la solución proporcionada por la red es el valor del estado cuando se alcanza un equilibrio. Planteando la ecuación $f_i(\mathbf{s}) = 0$, se observa que los puntos fijos pueden clasificarse en tres categorías:

- Los vértices del hipercubo unitario, dados por $1 - s_i^2 = 0$, es decir, $\mathbf{s} \in \{-1, 1\}^n$.
- Los puntos fijos interiores, caracterizados por $\text{net}_i = 0 \forall i$.
- Los puntos mixtos, que cumplen $|s_i| = 1 \forall i \in I$ y $\text{net}_i = 0 \forall i \notin I$ para algún subconjunto $I \subsetneq \{1 \dots n\}$. Estos puntos, que tienen una mezcla de las propiedades de las dos clases anteriores, se sitúan sobre caras del hipercubo.

No debe perderse de vista que el objetivo último es la solución de un problema de optimización combinatorial, en el que las soluciones $\mathbf{s}$ cumplen $|s_i| = 1 \forall i$. Por tanto, el equilibrio alcanzado por la red debe encontrarse en un vértice, y las otras dos categorías de puntos fijos son soluciones espurias, que corresponden a valores no factibles del POC. En consecuencia, para garantizar que

²En particular, no puede existir ninguna solución periódica. Este resultado será de gran importancia en el Capítulo 3, donde se demuestra que, al discretizar, pueden aparecer soluciones periódicas, por lo que no puede existir ninguna función de Lyapunov

la convergencia se produce hacia un vértice, debe demostrarse que todos los demás puntos fijos son inestables. Éste es el resultado principal de esta sección: los puntos interiores son inestables. Para probar este hecho, se precisa calcular el jacobiano de la función f , definida en la Ecuación (2.8). Dado que no existen autopesos, se cumple la condición $\frac{\partial net_i}{\partial s_i} = 0$, de forma que el jacobiano resulta ser:

$$\mathbf{J}(\mathbf{s}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial s_j} \right)_{ij} ; \quad \frac{\partial f_i}{\partial s_i} = -\frac{2}{\beta} s_i net_i ; \quad \frac{\partial f_i}{\partial s_j} = \frac{1}{\beta} (1 - s_i^2) \frac{\partial net_i}{\partial s_j} \quad j \neq i \quad (2.9)$$

A continuación se prueba un lema auxiliar, de carácter técnico:

Lema 2.1.

El jacobiano $\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})$ de la función f en un punto fijo interior $\boldsymbol{\xi}$ es una matriz con diagonal nula. Además, $\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})$ es diagonalizable y todos sus autovalores son reales.

Demostración. Sea $\boldsymbol{\xi}$ un punto fijo interior. Entonces, se cumple $net_i = 0 \forall i$. Sustituyendo la condición $net_i = 0$ en la definición del jacobiano, Ecuación (2.9), se obtiene $\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})_{ii} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial s_i} \right|_{\mathbf{s}=\boldsymbol{\xi}} = 0$, por tanto la diagonal del jacobiano se anula. Para probar la segunda afirmación del lema, utilizaremos el Lema B.1, para cuya aplicación se definen las dos matrices $\mathbf{D}(\mathbf{s})$, $\mathbf{H}(\mathbf{s})$:

$$\mathbf{D}(\mathbf{s}) = \frac{1}{\beta} \text{diag} (1 - s_i^2) ; \quad \mathbf{H}(\mathbf{s}) = \left(\frac{\partial net_i}{\partial s_j} \right)_{ij} \quad (2.10)$$

Es decir, teniendo en cuenta que la diagonal se anula, el jacobiano se puede expresar como el producto $\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{D}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{H}(\boldsymbol{\xi})$. Como $\boldsymbol{\xi}$ no es un vértice, se cumple $s_i^2 < 1 \forall i$, es decir, $1 - s_i^2 > 0 \forall i$ por lo que todos los elementos de la diagonal de la matriz $\mathbf{D}(\boldsymbol{\xi})$ son estrictamente positivos. Por otra parte, la función de Lyapunov V , definida en la Ecuación (2.4), cumple $\frac{\partial V}{\partial s_i} = -net_i$, por lo que puede escribirse:

$$h_{ij} = \frac{\partial net_i}{\partial s_j} = -\frac{\partial^2 V}{\partial s_i \partial s_j} \quad (2.11)$$

Por tanto, la matriz $\mathbf{H}$ es simétrica, ya que, como es sabido, el orden de derivación parcial se puede cambiar sin afectar el valor de la derivada. Aplicando directamente el Lema B.1, dado que los elementos de la diagonal de $\mathbf{D}(\boldsymbol{\xi})$ son positivos y $\mathbf{H}$ es simétrica, resulta que el jacobiano es diagonalizable con autovalores reales. $\square$

Observación. En la prueba del anterior lema, es importante resaltar la definición de la matriz $\mathbf{H}(\mathbf{s})$. En efecto, como se observa en la Ecuación (2.11), $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ es el hessiano, cambiado de signo, de la función objetivo $V(\mathbf{s})$, en un punto $\mathbf{s}$. Esta matriz hessiana desempeñará un importante papel en el análisis dinámico de la red.

A continuación se enuncia y demuestra el teorema principal de esta sección, concerniente a la inestabilidad de los puntos fijos interiores:

Teorema 2.1.

Sea V la función objetivo de un problema de optimización combinatorial, que pretendemos resolver mediante una red neuronal definida por las Ecuaciones (2.1) y (2.3). Dado un punto interior $\boldsymbol{\xi}$, si el hessiano de $V(\mathbf{s})$ en el punto $\boldsymbol{\xi}$ es distinto de la matriz nula, entonces el punto $\boldsymbol{\xi}$ es inestable.

Demostración. En el lema anterior se demostró que el jacobiano $\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})$ evaluado en el punto interior $\boldsymbol{\xi}$ es una matriz con diagonal nula. Ahora bien, es un resultado conocido del álgebra lineal [41] que, para toda matriz, la suma de los autovalores coincide con su traza. Por tanto, la suma de los autovalores del jacobiano es cero. En consecuencia, existirán autovalores positivos y negativos, salvo que todos los autovalores sean cero. En el primer caso, en particular, existirá al menos un autovalor positivo, lo que, según el Lema A.2, implica que el punto $\boldsymbol{\xi}$ sea inestable, concluyendo así la demostración. Veamos que el segundo caso (todos los autovalores nulos) conduce a la anulación del jacobiano. En efecto, vimos en el lema anterior que el jacobiano $\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})$ es semejante a una matriz diagonal $\mathbf{A}$. Los elementos diagonales a_{ii} de $\mathbf{A}$ coinciden con sus autovalores y, dado que los autovalores son invariantes de semejanza, coincidirán también con los autovalores de $\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})$. Si todos los autovalores de $\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})$ son nulos, entonces la matriz $\mathbf{A}$ es la matriz nula. La semejanza de $\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})$ y $\mathbf{A}$ puede

expresarse mediante la identidad $\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{B}$ para alguna matriz no singular $\mathbf{B}$. Por tanto, si $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ entonces también se cumple $\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0}$. Por otra parte, el jacobiano puede expresarse como el producto $\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{D}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{H}(\boldsymbol{\xi})$, donde la matriz $\mathbf{D}(\boldsymbol{\xi})$ es no singular, ya que $\boldsymbol{\xi}$ no es un vértice. Es decir, se tiene la igualdad $\mathbf{H}(\boldsymbol{\xi}) = (\mathbf{D}(\boldsymbol{\xi}))^{-1} \mathbf{J}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0}$, luego la matriz $\mathbf{H}(\boldsymbol{\xi})$ también se anula. Por último, como se mencionó anteriormente, la matriz $\mathbf{H}(\boldsymbol{\xi})$ no es más que el hessiano de V , cambiado de signo, en el punto $\boldsymbol{\xi}$. Se concluye que, si todos los autovalores del jacobiano se anulan, el hessiano de V es la matriz nula, lo que entra en contradicción con el enunciado. Por tanto, debe existir algún autovalor positivo y el punto interior $\boldsymbol{\xi}$ es inestable. $\square$

Observación. El objetivo del Teorema 2.1, que acabamos de demostrar, no es proporcionar una condición que se compruebe sobre cada red de Hopfield en particular. En efecto la condición de anulación del hessiano no es fácil de testar, ya que esto implicaría encontrar el punto fijo interior mediante la resolución de un sistema no lineal de ecuaciones. Por el contrario, se pretende que el teorema sirva como una confirmación rigurosa del hecho, observado en las aplicaciones prácticas, de que, en general, no aparecen puntos fijos interiores estables. Conjeturamos que incluso la condición de anulación del hessiano no es necesaria para la inestabilidad de los puntos fijos interiores, y el teorema presentado podría refinarse eliminando dicha condición. Obsérvese que la condición $\mathbf{H}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0}$ implica que el jacobiano de f se anula en el punto $\boldsymbol{\xi}$, por lo que $\boldsymbol{\xi}$, en la nomenclatura de la teoría de sistemas dinámicos, se denomina un punto fijo no hiperbólico. Es bien sabido que el análisis de la estabilidad de los puntos fijos no hiperbólicos es extremadamente difícil ya que, a diferencia del caso hiperbólico, las técnicas de linealización no proporcionan información sobre el comportamiento del sistema no lineal. En consecuencia, en la Sección 2.5 se recurre a herramientas de análisis más avanzadas en un intento de refinar el Teorema 2.1 y omitir la condición $\mathbf{H} \neq \mathbf{0}$.

En el caso particular de las redes de primer orden, el hecho de que los puntos fijos interiores son inestables ya había sido probado [2], si bien las técnicas usadas no admitían una fácil extensión a redes de alto orden. Por el

contrario, en nuestro análisis, el resultado para redes de orden uno se obtiene simplemente particularizando el Teorema 2.1:

Corolario 2.1.

Sea un problema de optimización combinatorial cuya función objetivo V es una función cuadrática, como en la Ecuación (2.5). Sea una red neuronal de orden uno que soluciona dicho problema, definida por las Ecuaciones (2.1) y (2.2). Si V no es constante, entonces los puntos fijos interiores al hipercubo son inestables.

Demostración. Procederemos por reducción al absurdo. Supóngase que el punto ξ es un punto fijo interior estable. Entonces, por el Teorema 2.1, resulta que el hessiano de $V(\mathbf{s})$ en el punto ξ es la matriz nula. Por otra parte, si la función objetivo es cuadrática, entonces su hessiano es constante, por lo que $\mathbf{H}$ resulta ser la matriz nula en todo punto. Por tanto, el gradiente ∇V es constante, ya que el hessiano de V es nulo. La caracterización de ξ como punto fijo, implica que el gradiente se anula en ξ : $\nabla V(\xi) = 0$. Pero como el gradiente es constante, se concluye que el gradiente de V es cero en todo punto, lo que implica que la función objetivo V es constante. Esto contradice la hipótesis, luego no puede existir un punto fijo interior que sea estable. $\square$

Observación. Evidentemente, si la función objetivo V de un problema es constante, todos los puntos son mínimos de V , luego el problema de minimización es trivial: todo punto es solución. Otra forma de razonar que la aparición de puntos fijos interiores estables sólo puede darse en problemas triviales, se obtiene observando que, en el caso de redes de primer orden, el hessiano de V coincide con la matriz de pesos $\mathbf{W}$. Si el hessiano se anula, no existen conexiones entre neuronas y la red está desconectada. En resumen, según el anterior corolario, al aplicar las redes de Hopfield de primer orden, en la formulación de Abe, a un problema práctico de optimización, en ningún caso aparecerán puntos fijos interiores que sean estables.

A continuación se analizan los puntos fijos mixtos, dados por $|s_i| = 1 \ \forall i \in I$ y $net_i = 0 \ \forall i \notin I$, para algún subconjunto $I \subsetneq \{1 \dots n\}$. Estos puntos pueden

considerarse puntos interiores en la cara en la que se encuentran, que es un hipercubo de dimensionalidad reducida:

Lema 2.2.

Considérese un punto fijo ξ que cumple $|\xi_i| = 1 \ \forall i \in I \subsetneq \{1 \dots n\}$. Si el hessiano de $V(\mathbf{s})$ en el punto ξ es no singular, entonces ξ es inestable.

Demostración. Procederemos por reducción al absurdo, probando que al suponer que ξ sea estable resulta una contradicción. El punto fijo ξ se encuentra en una cara $\mathcal{S}$ del hipercubo, definida por $\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \mid x_i = \xi_i \ \forall i \in I\}$. Podemos, por tanto, considerar la red neuronal reducida que resulta al sustituir $s_i = \xi_i$, para los subíndices $i \notin I$, en la Ecuación (2.3). El espacio de estados de dicha red es el hipercubo de dimensionalidad reducida $\mathcal{S}$. Suponiendo ahora que ξ es estable, entonces el punto ξ es un punto fijo estable de la red reducida, resultando que es un punto interior del hipercubo $\mathcal{S}$. Aplicando el Teorema 2.1, restringido al hipercubo $\mathcal{S}$, se observa que se cumple $h_{ij} = 0 \ \forall i, j \in I$, es decir, una submatriz de $\mathbf{H}(\xi)$ es la matriz nula. Asimismo, de la Ecuación (2.9), se deduce $h_{ij} = 0 \ \forall i \notin I \ \forall j \in I$, ya que las filas $i \notin I$ corresponden a $|\xi_i| = 1$. Por tanto, para cada $j \in I$, la columna j -ésima del hessiano $\mathbf{H}(\xi)$ está formada por ceros, lo que implica que el hessiano es singular. Esto contradice la hipótesis, por lo que se concluye que el punto ξ debe ser inestable. $\square$

Observación. Sobre la condición del anterior lema, puede realizarse un comentario similar a la observación que sigue al Teorema 2.1: la condición de no singularidad del hessiano no es fácil de probar para cada red concreta, pero en aplicaciones prácticas parece darse la inestabilidad de los puntos interiores a caras del hipercubo.

En particular, para redes de orden uno, ya fue demostrada la inestabilidad de los puntos mixtos [2], que aquí resulta como un simple corolario:

Corolario 2.2.

Considérese una red de primer orden con un punto fijo estable ξ situado sobre una cara $\mathcal{S}$ del hipercubo. Entonces, la función objetivo $V(\mathbf{s})$ tiene el mismo valor en todos los puntos $\mathbf{s}$ de $\mathcal{S}$.

Demostración. La afirmación del corolario resulta de aplicar la prueba del Corolario 2.1, restringida al hipercubo de dimensionalidad reducida $\mathcal{S}$. $\square$

Observación. Desde el punto de vista de la optimización, el corolario anterior sugiere un algoritmo práctico: si, en lugar de converger a un vértice, la red de primer orden se estabiliza en un punto situado en una cara $\mathcal{S}$, en la que los puntos $\mathbf{s} \in \mathcal{S}$ satisfacen $|s_i| = 1 \ \forall i \in I$, entonces las variables s_i con $i \notin I$ pueden ser modificadas sin afectar el valor de la función objetivo. En particular, se pueden redondear, de forma que se obtenga un vértice, que será una solución factible, en lugar del punto fijo interior (por tanto, no factible) que se había obtenido. En otras palabras, en redes de orden uno, la posible existencia de puntos fijos estables en caras del hipercubo se puede soslayar fácilmente sin afectar a la calidad de la solución obtenida.

Dicho con brevedad, los resultados de esta sección permiten afirmar que las redes de Hopfield continuas de alto orden, en la formulación de Abe, resultan, en principio, algoritmos apropiados para la solución de POC, ya que los únicos puntos fijos que pueden ser estables son vértices. Los corolarios para redes de primer orden son similares a los resultados ya conocidos [2] que, sin embargo, están referidos a la función de transferencia lineal a trozos, en lugar de a la tangente hiperbólica que se usa en el presente trabajo, además de emplear una técnica que no puede ser extendida a alto orden. Por tanto, los resultados generales en redes de alto orden son novedosos. Por otra parte, es importante mencionar que estos resultados dependen de forma crítica de la ausencia de autopesos, ya que sólo en este caso se satisface la condición $\frac{\partial net_i}{\partial s_i} = 0$ que da lugar a la anulación de la diagonal del jacobiano. Existen resultados experimentales [4, 3] que sugieren que la red resulta más eficiente cuando se permite la existencia de autopesos, pero los algoritmos definidos, que sólo se aplican a redes de primer orden, tienen la complicación adicional de que han de tratar puntos fijos interiores estables, además de no ser aplicables en general, debido a su naturaleza empírica y dependiente del problema. Por el contrario, en el Capítulo 4 se verá una aplicación que no cae dentro del marco de la optimización combinatorial, sino que puede ser clasificada como

optimización continua. En este caso, se *requiere* la existencia de autopesos, ya que se pretende obtener soluciones interiores.

Por último, por completitud, caracterizamos los vértices estables:

Lema 2.3.

Un vértice ξ es asintóticamente estable si $\xi_i \text{ net}_i|_{s=\xi} > 0 \forall i$.

Demostración. Un vértice ξ se caracteriza por la condición $|\xi_i| = 1 \forall i$. Sustituyendo directamente esta condición en la Ecuación (2.9), se obtiene el valor del jacobiano evaluado en un vértice, obteniéndose la matriz diagonal $\frac{1}{\beta} \text{diag} \left(-2 \xi_i \text{ net}_i|_{s=\xi} \right)$, cuyos autovalores son sus elementos diagonales. Por tanto, si $\xi_i \text{ net}_i|_{s=\xi} > 0 \forall i$ todos los autovalores son negativos, luego el vértice es estable. $\square$

En resumen, la inestabilidad de los puntos fijos que no son vértices, junto con la existencia de una función de Lyapunov, garantiza que el sistema converge hacia un vértice estable. Por tanto, en principio, la red proporciona una solución factible del problema, no existiendo soluciones interiores, que serían no factibles.

2.4. Acotación del estado en el hipercubo

El objetivo de esta sección es hacer énfasis en un hecho frecuentemente no mencionado, por obvio: el estado de la red permanece acotado dentro del hipercubo unitario. Existen dos razones fundamentales para estudiar esta propiedad. Por una parte, su interés metodológico, para mantener el máximo rigor en el desarrollo teórico. Por otra parte, es importante tener en mente que esta propiedad debe conservarse al realizar la discretización, estudio que se efectuará en el Capítulo 3.

Las referencias encontradas en la literatura despachan habitualmente la cuestión de la estabilidad de las redes de Hopfield, en vista de la existencia de una función de Lyapunov, Ecuación (2.4). Sin embargo, como se observa en el Lema A.1, la función V no satisface las condiciones para ser función de Lyapunov, ya que, en general, no será definida positiva. Más aún, la derivada

temporal de V , dada por $\frac{dV}{dt} = -\sum (1 - s_i^2) \text{net}_i^2$ no es semidefinida negativa, ni siquiera localmente en un entorno de un vértice estable, ya que para todo punto con $|s_i| > 1$, se tendrá $\frac{dV}{dt} > 0$. La idea que subyace a la adopción de esta función como función de Lyapunov³ es el hecho de que los estados $\mathbf{s}$ de la red permanecen acotados por el hipercubo cerrado $\mathcal{C} = [-1, 1]^n$. En efecto, cuando se restringe el análisis al hipercubo $\mathcal{C}$, ambos requisitos de las funciones de Lyapunov se satisfacen: en primer lugar, como $\mathcal{C}$ es compacto, V alcanza un mínimo V_m en $\mathcal{C}$, de forma que la función $V - V_m$ es definida positiva; en segundo lugar, dentro del hipercubo se cumple que $|s_i| \leq 1 \forall \mathbf{s} \in \mathcal{C}$ por lo que la derivada temporal de $V - V_m$, que coincide con la de V , es semidefinida negativa. En consecuencia, la función $V - V_m$ puede ser considerada la función de Lyapunov de la red, siempre que se cumpla el requisito de acotación en el hipercubo $\mathcal{C}$. Desde un punto de vista teórico, metodológico, la omisión de la mención de este requisito resulta notable. En la práctica, sin embargo, es comprensible ya que, como el rango de la función tangente hiperbólica es $(-1, 1)$, el hecho de que la acotación se satisface es evidente en la formulación habitual, dada en la Ecuación (2.1). No obstante, deja de ser obvio cuando la dinámica del sistema se representa con una EDO, como en la Ecuación (2.8), por lo que, con objeto de mantener el máximo rigor, repetiremos la prueba en este caso:

Lema 2.4.

El hipercubo cerrado $[-1, 1]^n$ es invariante para la Ecuación (2.8).

Demostración. Si $|s_i| = 1$, se sigue de la Ecuación (2.8) que se cumple $\frac{ds_i}{dt} = 0$, independientemente de los valores s_j , $j \neq i$. En consecuencia, la trayectoria del vector de estados no puede cruzar los hiperplanos $s_i = 1$ y $s_i = -1$. Por tanto, para todo estado inicial interior al hipercubo $\mathbf{s}(0) \in [-1, 1]^n$, la trayectoria permanece acotada por el hipercubo cerrado, es decir, $\mathbf{s}(t) \in [-1, 1]^n \forall t \geq 0$. $\square$

Observación. Una consecuencia obvia del anterior lema es que el estado inicial

³Naturalmente, aparte de la autoridad de Hopfield.

debe elegirse en el interior del hipercubo $\mathcal{C}$, dado que, debido a la invariancia de $\mathcal{C}$, el estado permanecerá acotado dentro de $\mathcal{C}$. Habitualmente, se elige el estado inicial aleatoriamente según una distribución uniforme en el hipercubo. Por otra parte, cuando se afronta una implementación práctica de las redes de Hopfield, no puede despreciarse la importancia del requisito de acotación dentro del hipercubo. Pudiera ocurrir que, debido a errores de redondeo o discretización, el estado escapara del hipercubo. Si esto ocurriera, los resultados serían impredecibles y, probablemente, erróneos. Para ilustrar este efecto, dado un vértice inestable ξ , considérese el sistema unidimensional obtenido al fijar todas las variables, excepto $x \equiv \xi_1$:

$$\frac{dx}{dt} = net_1 (1 - x^2) \quad (2.12)$$

donde net_1 , al no depender de $x = \xi_1$, es una constante. Supóngase, por fijar ideas, que es $\xi_1 = 1$ (el razonamiento con $\xi_1 = -1$ es similar) y elíjase el estado inicial ligeramente fuera del hipercubo: $x_{t=0} = 1 + \epsilon$ con $\epsilon > 0$. Dado que ξ es inestable, net_1 es una constante negativa, por lo que $\frac{dx}{dt} > 0$, lo que implica que x crece ilimitadamente. En términos de la teoría de sistemas dinámicos, se hablaría de que la variedad inestable de ξ está conectada al infinito. Este simple ejemplo muestra por qué, en una implementación práctica, debe cuidarse que no exista la posibilidad de que el estado escape fuera del hipercubo. En el Capítulo 3 se presentarán ejemplos de métodos numéricos que, al no preservar esta propiedad, producen resultados poco satisfactorios.

En resumen, tres propiedades son cruciales para garantizar la eficiencia como método de optimización de las redes de Hopfield: la existencia de función de Lyapunov, la inestabilidad de los puntos fijos interiores y la acotación en el hipercubo. Una implementación que no preserve *las tres* propiedades al discretizar la Ecuación (2.8) producirá resultados erróneos, como se verá en el Capítulo 3.

2.5. Estudio de los puntos fijos interiores no hiperbólicos

El objetivo de esta sección es ahondar en el análisis de los puntos fijos interiores y, en última instancia, tratar de demostrar su inestabilidad en todos los casos. Ya se ha demostrado, en el Teorema 2.1, que la condición de hiperbolicidad de los puntos interiores garantiza su inestabilidad, por lo que en la presente sección nos centramos en el caso en que el hessiano de la función objetivo se anule en el punto fijo. También se ha mencionado que esto sólo puede ocurrir en redes de alto orden. La falta de experiencia en la aplicación de la formulación de Abe a problemas de alto orden es la razón de la ausencia de resultados en este área. Conjeturamos que, en redes de alto orden, todos los puntos fijos interiores no hiperbólicos son inestables. Sin embargo, la demostración de esta conjetura, con la máxima generalidad, resulta ser un problema extremadamente complejo, por lo que el estudio se restringirá a la red de alto orden más simple posible, es decir, a las redes de segundo orden con tres neuronas. Nótese que esta forma de abordar el problema está inspirada por fructíferas contribuciones que analizan la estabilidad de redes particularmente simples [110]. Incluso la red simplificada con tres neuronas posee una dinámica compleja, ya que el jacobiano tiene un autovalor nulo con multiplicidad tres. De hecho, el estudio de estas *triple zero degeneracies*⁴ es una línea de intensa investigación entre la comunidad científica de sistemas dinámicos [8].

En primer lugar, se demostrará que tales puntos fijos interiores no hiperbólicos pueden, efectivamente, ocurrir, estableciendo condiciones suficientes para su existencia. A continuación, se muestra la inestabilidad de tal punto interior por medio de una simplificación ad-hoc, ya que las técnicas clásicas de linealización, como es bien sabido, no dan información sobre el sistema no lineal en las cercanías de un punto no hiperbólico. Es importante resaltar que el análisis es posible gracias a la simetría de las ecuaciones, requiriéndose que los pesos sean simétricos, como hemos venido asumiendo a lo largo del capítulo. Recuérdesse que la EDO de una red de Hopfield de alto orden, en general,

⁴Excepcionalmente, se ha mantenido la nomenclatura inglesa, por no encontrar una traducción eufónica.

viene dada por $\frac{d s_i}{d t} = \frac{1}{\beta} (1 - s_i^2) \text{net}_i$. Por tanto, las ecuaciones de la red de tres neuronas resultan ser:

$$\begin{aligned}\frac{d s_1}{d t} &= \frac{1}{\beta} (1 - s_1^2) (w_{12} s_2 + w_{13} s_3 + w_{123} s_2 s_3 - b_1) \\ \frac{d s_2}{d t} &= \frac{1}{\beta} (1 - s_2^2) (w_{12} s_1 + w_{23} s_3 + w_{123} s_1 s_3 - b_2) \\ \frac{d s_3}{d t} &= \frac{1}{\beta} (1 - s_3^2) (w_{13} s_1 + w_{23} s_2 + w_{123} s_1 s_2 - b_3)\end{aligned}\tag{2.13}$$

Supongamos que existe un punto fijo interior, llamémosle ξ , que por tanto estará caracterizado por la condición $\text{net}_i = 0 \forall i$. Además, asumimos que el hessiano de la función objetivo se anula en el punto ξ . Recuérdese que el hessiano coincide con el jacobiano, dado por la Ecuación (2.9), de la función $f = \frac{d s}{d t}$. Como ξ es interior al hipercubo, es decir, $|\xi_i| < 1$, para que el jacobiano se anule se requiere que se cumpla $\frac{\partial \text{net}_i}{\partial s_j} = 0 \forall i \neq j$. Combinando las dos condiciones $\text{net}_i = 0$, $\frac{\partial \text{net}_i}{\partial s_j} = 0$, un cálculo algebraico proporciona las relaciones:

$$b_1 = \frac{w_{12} w_{13}}{w_{123}}, \quad b_2 = \frac{w_{12} w_{23}}{w_{123}}, \quad b_3 = \frac{w_{13} w_{23}}{w_{123}}\tag{2.14}$$

así como:

$$\xi_1 = -\frac{w_{23}}{w_{123}}, \quad \xi_2 = -\frac{w_{13}}{w_{123}}, \quad \xi_3 = -\frac{w_{12}}{w_{123}}\tag{2.15}$$

Con estos cálculos previos, resulta sencilla la demostración del siguiente lema:

Lema 2.5.

Dada una red neuronal de segundo orden con tres neuronas, existe un punto fijo interior ξ , definido en la Ecuación (2.15), si se cumple que $|w_{ij}| < |w_{123}| \forall i, j$ y se satisfacen las condiciones de la Ecuación (2.14). Además, el hessiano de la función objetivo se anula en ξ .

Demostración. Como se observa en la Ecuación (2.15), la condición $|w_{ij}| < |w_{123}|$ implica $|\xi_i| < 1$, de forma que el punto ξ es interior al hipercubo unitario.

Por sustitución directa de las Ecuaciones (2.14) y (2.15) se comprueba tanto que ξ es un punto fijo, como que $\left. \frac{\partial net_i}{\partial s_j} \right|_{s=\xi} = 0$, de forma que el hessiano de la función objetivo se anula en ξ . $\square$

A continuación, demostramos la inestabilidad del punto ξ , cuya existencia se ha comprobado en el lema anterior. Para simplificar los cálculos, trasladamos el punto fijo al origen mediante la transformación lineal $x = s - \xi$. Por tanto, la dinámica, Ecuación (2.13), se reduce a:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{1}{\beta} (1 - (x_1 + \xi_1)^2) w_{123} x_2 x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{1}{\beta} (1 - (x_2 + \xi_2)^2) w_{123} x_1 x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &= \frac{1}{\beta} (1 - (x_3 + \xi_3)^2) w_{123} x_1 x_2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Considérense ahora los términos de orden más bajo, que determinan completamente el comportamiento de la red en un entorno del origen⁵:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &\approx \frac{1}{\beta} (1 - \xi_1^2) w_{123} x_2 x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &\approx \frac{1}{\beta} (1 - \xi_2^2) w_{123} x_1 x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &\approx \frac{1}{\beta} (1 - \xi_3^2) w_{123} x_1 x_2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

A continuación, derivando la primera ecuación y sustituyendo en las otras dos, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= \frac{w_{123}}{\beta} (1 - \xi_1^2) \left(\frac{dx_2}{dt} x_3 + x_2 \frac{dx_3}{dt} \right) \\ &= \frac{w_{123}}{\beta} (1 - \xi_1^2) \left(\frac{1}{\beta} (1 - \xi_2^2) w_{123} x_1 x_3^2 + \frac{1}{\beta} (1 - \xi_3^2) w_{123} x_1 x_2^2 \right) \\ &= \left[\frac{w_{123}^2}{\beta^2} (1 - \xi_1^2) ((1 - \xi_2^2) x_3^2 + (1 - \xi_3^2) x_2^2) \right] x_1 \end{aligned} \quad (2.18)$$

⁵Incidentalmente, nótese que las ecuaciones que se obtienen no son más que la forma normal en la variedad central [42].

Como la expresión completa entre corchetes que aparece en la última línea de la anterior ecuación es positiva, se concluye que el comportamiento de la red en un pequeño entorno del origen es cualitativamente similar al del siguiente sistema, más simple:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = k x_1 \quad (2.19)$$

donde k es una constante positiva. La solución analítica del sistema dado en la Ecuación (2.19) es:

$$x_1 = e^{\sqrt{k}t} + e^{-\sqrt{k}t} \quad (2.20)$$

lo que muestra que x_1 es inestable en el origen. Por simetría, lo mismo puede decirse de x_2 y x_3 , por lo que se concluye que la red de segundo orden con tres neuronas es inestable en los puntos fijos interiores. Se han realizado simulaciones numéricas que sugieren que lo mismo ocurre en casos más generales, pero una demostración rigurosa se deja abierta para futuras investigaciones, debido a su extremada complejidad.

2.6. Conclusiones y líneas futuras

Este capítulo acomete un estudio exhaustivo de las redes de Hopfield de alto orden, en la formulación de Abe, con objeto de determinar su capacidad para resolver problemas de optimización combinatorial. El análisis se centra en el modelo continuo, mientras que los aspectos relativos a la discretización se dejan para el siguiente capítulo. Con objeto de aplicar las herramientas conocidas de la teoría de sistemas dinámicos, la red se formula como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, evitando la presencia explícita de las variables de potencial u_i . Se destacan las principales características de este sistema:

- Existe una función de Lyapunov.
- El estado está acotado por el hipercubo unitario.
- Los puntos fijos interiores, que son puntos no factibles del problema de optimización, son inestables, bajo la hipótesis de hiperbolicidad.

Las dos primeras propiedades eran conocidas desde la introducción de las redes de Hopfield. La tercera propiedad había sido demostrada en el caso particular de redes de primer orden [2], mediante técnicas que no es posible extender a redes de alto orden. La demostración de la inestabilidad de los puntos fijos interiores de redes de alto orden, expuesta en el presente capítulo, es novedosa. A la vista de estas propiedades, puede afirmarse que las redes continuas de alto orden constituyen una metodología adecuada para la solución de problemas de optimización combinatorial generales. La conclusión práctica es que los métodos numéricos que implementen las ecuaciones continuas en un ordenador digital deben preservar estas propiedades favorables, lo cual no ocurre en las implementaciones habituales. Tanto para el estudio de la ecuación continua, como de los métodos numéricos, puede obtenerse una comprensión más profunda del comportamiento del sistema si se considera que las redes de Hopfield vienen dadas por ecuaciones algebraico-diferenciales [26], en lugar de ecuaciones diferenciales ordinarias, aunque el estudio de las dificultades adicionales planteadas por las ecuaciones algebraico-diferenciales requiere un análisis más detallado.

Por su parte, el único aspecto dinámico que no se ha clarificado completamente es la posible existencia de puntos fijos interiores no hiperbólicos, dado que su análisis es extremadamente difícil. Sin embargo, merecen investigación futura, al menos, por dos razones prácticas, aparte de su interés teórico:

- Cuando el sistema continuo se discretiza, pueden existir bifurcaciones complejas que se ramifican a partir de los puntos no hiperbólicos, dando lugar a soluciones periódicas o incluso a la aparición de trayectorias caóticas, con atractores extraños.
- Como los puntos fijos interiores son puntos de silla, sus variedades estables separan las cuencas de atracción de los vértices estables [17]. Este análisis podría ser extendido al caso no hiperbólico.

En el presente capítulo se completa el análisis de los puntos fijos interiores no hiperbólicos en el caso particular de redes de segundo orden con tres neuronas, estableciendo las condiciones para su existencia y demostrando su inestabilidad. Se propone la conjetura de que los puntos fijos interiores no hiperbólicos son inestables en el caso general.

Capítulo 3

Discretización de la red de Hopfield de alto orden

Resumen del capítulo

Tras haber determinado, en el capítulo anterior, la eficacia como método de optimización de la red continua de Hopfield de alto orden, en la formulación de Abe, en el presente capítulo se estudia si las propiedades favorables del modelo continuo se conservan cuando la red se discretiza para ser implementada en un ordenador. La red discretizada se formula como un método numérico no estándar. Desde el punto de vista numérico, la red discreta es una aproximación de orden uno de la continua. Por su parte, el análisis dinámico muestra que la estabilidad de los puntos fijos se preserva. Sin embargo, salvo que se elija un tamaño de paso extremadamente pequeño, el sistema discreto deja de poseer función de Lyapunov, ya que pueden aparecer soluciones periódicas. Estos resultados sugieren que para aumentar la eficacia de las redes de Hopfield como método de optimización, se hace necesario buscar métodos numéricos que preserven tanto la función de Lyapunov como las demás propiedades favorables de las redes continuas.

3.1. Introducción

Este capítulo estudia la influencia del proceso de discretización en las características numéricas y dinámicas de la red de Hopfield de alto orden, en la formulación de Abe, con objeto de determinar si el modelo continuo da lugar a un método eficiente de optimización combinatorial cuando se implementa en un ordenador. En este sentido, el presente capítulo constituye el núcleo del segundo paso de los cuatro que componen el programa de investigación expuesto en la Sección 1.4 (ver página 23). Como ya se ha mencionado, la aplicación de las redes de Hopfield a los problemas de optimización combinatorial (POC) ha abierto una prometedora vía para superar las limitaciones de los métodos clásicos. Sin embargo, diversos autores han criticado la falta de reproducibilidad de los experimentos y la pérdida de eficacia en el caso de POC de gran tamaño. A la vista de los resultados del Capítulo 2, en el que se ha demostrado que la red continua de Hopfield, en la formulación de Abe, tiene propiedades teóricas que garantizan su eficiencia como método de optimización, planteamos que el origen de las dificultades está en la implementación en un ordenador del modelo continuo. En efecto, el ordenador, por su propia naturaleza¹, es un dispositivo digital, es decir, que funciona en tiempo discreto. Por tanto, aunque este proceso no siempre se explicita adecuadamente, se hace necesario el empleo de un método numérico para discretizar las ecuaciones diferenciales del modelo continuo, obteniendo así un sistema dinámico en tiempo discreto, pero con estados continuos. La única alternativa a la implementación digital sería la construcción, mediante dispositivos electrónicos analógicos, de un modelo de la red neuronal. Aunque se han publicado avances en este sentido [40], la simulación por ordenador sigue siendo la implementación preferida, debido a su mayor flexibilidad y menor coste. Por otra parte, como ya se ha mencionado, este trabajo se enmarca en el contexto de afrontar el diseño de los métodos computacionales mediante el planteamiento de un sistema dinámico continuo adecuado, en primer lugar, seguido del estudio de métodos numéricos que preservan las propiedades cualitativos del modelo continuo. Este enfoque ya ha producido interesantes resultados en otros ámbitos [105, 97, 98].

¹Nos referimos, naturalmente, a la noción comúnmente aceptada de ordenador, con la arquitectura de von Neumann.

El punto de partida del presente capítulo está constituido por las propiedades del modelo continuo, demostradas en el Capítulo 2. Así, una vez elegida la formulación de Abe, por coincidir su función de Lyapunov con la estructura multilínea de la función objetivo habitual de los POC, se establecieron las siguientes propiedades:

- Los vértices son puntos fijos estables.
- Todo punto fijo que no sea un vértice es inestable, siempre que sea hiperbólico.
- El sistema posee una función de Lyapunov válida dentro del hipercubo unitario.
- El estado está acotado dentro del hipercubo unitario.

Se hace notar que, en lo sucesivo, se asume la hipótesis de hiperbolicidad, que garantiza la inestabilidad de los puntos fijos interiores. Con objeto de dilucidar si estas propiedades se conservan en la red discretizada, se realiza un estudio, que puede dividirse en las tres etapas siguientes:

- En primer lugar, la red que resulta de la discretización se formula explícitamente como un sistema discreto, dado por una única función. Esta novedosa expresión del proceso de discretización, aunque comúnmente empleada, no se formula explícitamente, constituyendo aquí una aportación clave, ya que permite aplicar las técnicas conocidas en análisis numérico y teoría de sistemas dinámicos.
- A continuación, se demuestra que, independientemente del tamaño de paso, los puntos fijos, así como su estabilidad o inestabilidad, se preservan tras la discretización. Además, los estados de la red en tiempo discreto permanecen acotados dentro del hipercubo unitario, al igual que ocurría con los estados del modelo continuo.
- Finalmente, se demuestra que, salvo que se elija un tamaño de paso suficientemente pequeño, pueden aparecer soluciones periódicas. En consecuencia, la red no puede poseer ninguna función de Lyapunov, por lo que, al no poderse garantizar la estabilidad, la capacidad de resolver problemas de optimización queda destruida.

El último punto de esta enumeración es la contribución clave del capítulo: *la discretización puede destruir el carácter de sistema gradiente que posee la red continua*. En la práctica, la dificultad de determinar anticipadamente cómo de pequeño debe elegirse el tamaño de paso, para preservar la función de Lyapunov, fuerza la elección de un tamaño de paso excesivamente pequeño, produciendo una convergencia demasiado lenta y, en definitiva, empeorando la eficiencia hasta llegar a un extremo inaceptable. Aunque, en principio, nuestra investigación tiene un carácter teórico, se alcanzan importantes consecuencias prácticas: la aplicabilidad de las redes de Hopfield a problemas de optimización podría ser mejorada mediante el empleo de un método numérico que preserve todas las propiedades favorables de la red continua, al tiempo que requiera un tiempo de computación razonable. En la última sección de este capítulo se presentan algunos trabajos exploratorios de esta línea de investigación.

Los resultados expuestos en el presente capítulo, que se recogen en la publicación [18], se estructuran como se describe a continuación. En primer lugar, en la Sección 3.2, se formula explícitamente la iteración discreta que resulta al aplicar el proceso habitual de discretización de la red continua, demostrando que la función que se itera es discontinua. El objetivo de la Sección 3.3, que puede considerarse similar a la Sección 2.4 del capítulo anterior, es mostrar que los estados del sistema discreto permanecen acotados por el hipercubo unitario, cosa que no ocurre con otros métodos numéricos. Un estudio riguroso del sistema discreto, con las herramientas del análisis numérico, se completa en la Sección 3.4. Dado que el sistema discreto resulta ser una aproximación de primer orden de la ecuación diferencial que define a la red continua, puede afirmarse, desde el punto de vista numérico, que esta aproximación no es mejor que la regla de Euler, que es computacionalmente más simple. Sin embargo, en la Sección 3.5, se emplean las técnicas de la teoría de sistemas dinámicos con objeto de demostrar que la red discretizada preserva la estabilidad, o inestabilidad, de los puntos fijos, a diferencia de la mayoría de los métodos numéricos estándar, incluyendo a la regla de Euler. Esta superioridad inicial, no obstante, queda empañada por la posible existencia de soluciones periódicas, de lo que se deduce que el sistema no puede poseer ninguna función de Lyapunov. En

consecuencia, la Sección 3.6, además de presentar las conclusiones del capítulo, dedica un espacio considerable a sugerir direcciones en las que pudieran hallarse métodos de discretización mejorados, que preserven la estabilidad, la función de Lyapunov y la acotación en el hipercubo.

3.2. Discretización de la red de Hopfield continua de alto orden

En esta sección se define explícitamente la discretización de la red continua de Hopfield de alto orden, en la formulación de Abe. Esta formalización rigurosa es necesaria para afrontar el objetivo del capítulo: determinar si las propiedades favorables de la red continua se preservan tras la discretización. En primer lugar, para facilitar la referencia, reescribimos la dinámica del modelo continuo, definida por un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO):

$$\frac{du_i}{dt} = net_i; \quad s_i(t) = \tanh\left(\frac{u_i(t)}{\beta}\right) \quad (3.1)$$

donde net_i es la entrada multilineal a la neurona i que, en redes de alto orden, viene dada por:

$$net_i = \sum_{q=1}^r \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_q) \in C_q^n \\ i \neq i_1, i_2, \dots, i_q}} w_{i i_1, i_2, \dots, i_q} s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_q} - b_i \quad (3.2)$$

siendo n el número de neuronas, r el orden de la red, $w_{i i_1, i_2, \dots, i_q}$ el peso de la conexión de orden q desde las neuronas $i_1 \dots i_q$ a la neurona i , b_i es el bias de la neurona i , y C_q^n representa el conjunto de combinaciones de q elementos elegidos de entre los primeros n números naturales. Como ya se ha mencionado, la estabilidad de la red se demuestra por la existencia de una función de Lyapunov:

$$V(\mathbf{s}) = - \sum_{q=1}^r \sum_i \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_q) \in C_q^n \\ i \neq i_1, i_2, \dots, i_q}} w_{i i_1, i_2, \dots, i_q} s_i s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_q} + \sum_i b_i s_i \quad (3.3)$$

La metodología de optimización con redes de Hopfield consiste en hacer coincidir la función de Lyapunov de la red con la función objetivo del problema, dejando, a continuación, que la red evolucione hasta estabilizarse. Por tanto, resulta crítico que la red discreta tenga exactamente la misma función de Lyapunov. Son también fundamentales las propiedades dinámicas, reseñadas en el Capítulo 2, a saber: que los puntos interiores sean inestables y que el estado permanezca acotado por el hipercubo unitario. El estudio de la conservación de estas propiedades tras la discretización es el objeto del resto del capítulo.

Con objeto de estudiar el sistema dinámico discreto que resulta al discretizar la Ecuación (3.1) que define la red continua, formulamos explícitamente la red discreta como una iteración funcional, mediante un procedimiento matemático simple. Esta formulación como la iteración de una única función, por lo que sabemos, es novedosa y, pese a su simplicidad, es una de las contribuciones clave del presente capítulo, ya que permite la aplicación de las técnicas de la teoría de sistemas dinámicos y el análisis numérico al estudio de las redes de Hopfield en tiempo discreto. No obstante, en primer lugar, la dinámica definida por la Ecuación (3.1) debe reescribirse como la EDO equivalente:

$$\frac{ds_i}{dt} = \frac{ds_i}{du_i} \frac{du_i}{dt} = \frac{1}{\beta} (1 - s_i^2) \text{net}_i \quad (3.4)$$

Al igual que se hizo en el Capítulo 2, definimos una función auxiliar $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ para facilitar la notación:

$$\frac{ds_i}{dt} = f_i(\mathbf{s}) \quad ; \quad f_i(\mathbf{s}) = \frac{1}{\beta} (1 - s_i^2) \text{net}_i \quad (3.5)$$

A la hora de reproducir los resultados de la literatura, que frecuentemente no dan detalles del método empleado para la discretización de la Ecuación (3.5), el enfoque más evidente es la simple sustitución de la derivada $\frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ por la diferencia finita $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, lo que daría lugar a la siguiente dinámica discreta:

$$s_i(t+1) = s_i(t) + \Delta t \frac{1}{\beta} (1 - s_i^2(t)) \text{net}_i(t) \quad (3.6)$$

Este enfoque, que podríamos llamar ingenuo, no es más que la regla de Euler (el método numérico más antiguo y mejor estudiado para la solución de EDO) y proporciona una aproximación razonable siempre que se asigne un valor pequeño, aunque no nulo, al tamaño de paso Δt . Sin embargo, cualquier simulación sencilla con la iteración definida por la Ecuación (3.6), muestra rápidamente la aparición de inestabilidades y resultados erróneos, resultados que no coinciden con los presentados en la literatura. En realidad, observando los resultados publicados, se puede intuir que la aproximación $\frac{ds}{dt} \approx \frac{\Delta s}{\Delta t}$ no se está realizando sobre la EDO, Ecuación (3.5), sino, en su lugar, en la dinámica de dos pasos definida por la Ecuación (3.1). Por tanto, la verdadera dinámica discreta encontrada en las referencias viene dada por:

$$u_i(t+1) = u_i(t) + \Delta t \text{net}_i(t); \quad s_i(t+1) = \tanh\left(\frac{u_i(t+1)}{\beta}\right) \quad (3.7)$$

Aunque las dos dinámicas continuas, Ecuaciones (3.1) y (3.5), son totalmente equivalentes, no puede decirse lo mismo de sus correspondientes discretizaciones, Ecuaciones (3.6) y (3.7). Procedemos ahora a formular la Ecuación (3.7) como la iteración de una única función, para facilitar su estudio analítico. Recuerdese la conocida fórmula de la tangente hiperbólica de la suma de dos funciones:

$$\tanh(a+b) = \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b} \quad (3.8)$$

Con esta fórmula, la Ecuación (3.7) se convierte en:

$$\begin{aligned} s_i(t+1) &= \tanh\left(\frac{u_i + \Delta t \text{net}_i}{\beta}\right) = \tanh\left(\frac{\beta \text{atanh } s_i}{\beta} + \frac{\Delta t \text{net}_i}{\beta}\right) \\ &= \frac{\tanh(\text{atanh } s_i) + \tanh\left(\frac{\Delta t}{\beta} \text{net}_i\right)}{1 + \tanh(\text{atanh } s_i) \tanh\left(\frac{\Delta t}{\beta} \text{net}_i\right)} = \frac{s_i + \tanh\left(\frac{\Delta t}{\beta} \text{net}_i\right)}{1 + s_i \tanh\left(\frac{\Delta t}{\beta} \text{net}_i\right)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde se ha omitido la dependencia del tiempo para simplificar la notación. Dado que esta ecuación no coincide con ningún método numérico estándar conocido, realizaremos su estudio exhaustivo como la iteración discreta de

una función. No obstante, en primer lugar, se efectuará una simplificación, sin pérdida de generalidad: es evidente en la última ecuación que los papeles desempeñados por el parámetro β y el tamaño de paso Δt pueden compilarse en un único parámetro. Por tanto, en el resto del capítulo, asumimos el valor $\beta = 1$ y el único parámetro que puede elegirse libremente es el paso Δt . Con esta simplificación, la dinámica discreta queda definida por la iteración:

$$s_i(t+1) = g_i(\mathbf{s}) \quad ; \quad g_i(\mathbf{s}) = \frac{s_i + \tanh(\Delta t \, net_i)}{1 + s_i \tanh(\Delta t \, net_i)} \quad (3.10)$$

donde la función auxiliar g juega un papel similar para el modelo discreto al de la función f de la red continua, definida por la Ecuación (3.5). Esta novedosa formulación será el objeto de estudio del resto del capítulo y, en particular, se analizará si las propiedades de la Ecuación (3.1), vistas en el Capítulo 2, se preservan tras la discretización.

Una vez definido el sistema dinámico discreto por la iteración de la función g , dada en la Ecuación (3.10), cabe preguntarse si se trata de una función bien definida, continua y diferenciable de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$. Sin embargo, no es necesario estudiar el espacio $\mathbb{R}^n$ completo, ya que, debido a la presencia de la tangente hiperbólica, los estados no pueden salir del hipercubo unitario, hecho que se probará rigurosamente en la Sección 3.3. Por otra parte, es evidente que la Ecuación (3.10) define una función continuamente diferenciable en el interior del hipercubo ya que, cuando es $|s_i| < 1$, el denominador no puede anularse. Por consiguiente, los únicos puntos en los que la función g no está definida son los que satisfacen $1 + s_i \tau_i = 0$, siendo $\tau_i = \tanh(\Delta t \, net_i)$. Es decir, si consideramos que el rango de existencia de los estados es el hipercubo cerrado $\mathbf{s} \in [-1, 1]^n$, entonces las singularidades ocurren en los puntos donde $(s_i, \tau_i) = \pm(1, -1)$ para alguna neurona i . A continuación se demuestra que, aunque la función g está acotada, su límite en tales puntos no existe, de forma que aparecen discontinuidades esenciales. Podría parecer que estos puntos, en los que $|\tau_i| = 1$, carecen de interés ya que no corresponden a estados pertenecientes a $\mathbb{R}^n$, puesto que $|\tanh(\Delta t \, net_i)| = 1$ implica $|net_i| = \infty$ en aritmética exacta. Sin embargo, en operaciones computacionales prácticas, es frecuente

que aparezca el resultado $|\tanh(x)| = 1$, debido a la precisión limitada del ordenador. Por tanto, la importancia de los puntos $\tau_i \in [-1, 1]$ se debe a que, al considerarlos, se obtiene una cierta robustez con respecto a errores de redondeo.

Lema 3.1.

Sea $\mathbf{s}$ un punto $(s_i, \tau_i) = \pm(1, -1)$ para algún i , donde $\tau_i = \tanh(\Delta t \text{net}_i)$. La función g , definida en la Ecuación (3.10), es discontinua en el punto $\mathbf{s}$.

Demostración. Sea $\mathbf{s}$ un punto con $(s_i, \tau_i) = (1, -1)$ (la prueba para el otro punto, con signos cambiados, es similar). Si la función g pudiera definirse de forma continua, los límites que se aproximan a $\mathbf{s}$ por los ejes s_i y τ_i deberían coincidir:

$$\lim_{s_i \rightarrow 1} \lim_{\tau_i \rightarrow -1} \frac{s_i + \tau_i}{1 + s_i \tau_i} = -1; \quad \lim_{\tau_i \rightarrow -1} \lim_{s_i \rightarrow 1} \frac{s_i + \tau_i}{1 + s_i \tau_i} = 1 \quad (3.11)$$

Dado que los límites difieren, la función g es discontinua, y la singularidad no es evitable. $\square$

Observación. La consecuencia práctica del anterior lema es que, en una implementación del método definido por la Ecuación (3.10), debe especificarse qué valor de límite se adoptará. En lo sucesivo, asumimos $s_i(t+1) = s_i(t)$ cuando $s_i \tau_i = -1$, de forma que la función g sea continua en la variable s_i . De esta forma, como se mostrará en la Sección 3.5.1, la red discreta preserva los puntos fijos del sistema continuo.

3.3. Acotación del estado en el hipercubo

En esta sección se demuestra que ninguna sucesión de estados puede escapar al exterior del hipercubo, bajo la aplicación de la iteración funcional dada por la Ecuación (3.10). La misma propiedad de invariancia se demostró para la dinámica continua en el Lema 2.4. La preservación de esta propiedad es una ventaja crucial de la discretización definida por la Ecuación (3.10). Esta ventaja es evidente al comparar con un método numérico estándar, en el que,

a no ser que se elija un tamaño de paso extremadamente pequeño, las variables crecen sin límite. El hecho de que las trayectorias de estados que se inician en el interior del hipercubo, es decir, que cumplen $|s_i| < 1$, permanecen acotadas por el hipercubo, es evidente al observar la Ecuación (3.7), ya que el rango de la función tangente hiperbólica es $(-1, 1)$. Sin embargo, deja de ser evidente en la formulación de un solo paso, dada por la Ecuación (3.10). Esto es similar a lo que ocurriría con la dinámica continua, al comparar la formulación clásica algebraico-diferencial, Ecuación (2.1), y la EDO, Ecuación (2.8). Por tanto, para mantener el máximo rigor en la formulación de la discretización, debe demostrarse que el hipercubo acota las trayectorias del sistema discreto dado por la Ecuación (3.10). Por otra parte, incluimos en el estudio los puntos de la frontera del hipercubo, es decir, los que satisfacen $|s_i| = 1$. Estos puntos pueden darse en la implementación computacional de la red y, al considerarlos, se obtiene una cierta robustez frente a errores de redondeo, como se mencionó en los comentarios previos al Lema 3.1, de la Sección 3.2.

Lema 3.2.

El hipercubo cerrado $\mathcal{C} = [-1, 1]^n$ es invariante bajo la acción de la iteración de la función $\mathbf{g}$, definida en la Ecuación (3.10).

Demostración. Sea $x = s_i$, $\tau_i = \tanh(\Delta t \text{net}_i)$ y considérese, en primer lugar, el caso $|\tau_i| < 1$. Se define la función $f(x) = \frac{x + \tau_i}{1 + x \tau_i}$. Entonces, su derivada es $f'(x) = \frac{1 - \tau_i^2}{(1 + x \tau_i)^2} \geq 0$, $\forall x \in [-1, 1]$, $\tau_i \in (-1, 1)$ por lo que $f(x)$ es monótona creciente. Teniendo en cuenta el valor en los extremos, $f(-1) = -1$ y $f(1) = 1$, así como que f es creciente, se concluye que $f(x) \in [-1, 1]$, $\forall x \in [-1, 1]$. En segundo lugar, si $|\tau_i| = 1$ y $s_i \tau_i \neq -1$, entonces $|g_i(\mathbf{s})| = 1$. Finalmente, si $s_i \tau_i = -1$ hemos asumido, como se razonó en la observación que sigue al Lema 3.1, que se define $g_i(\mathbf{s}) = s_i$. Por consiguiente, en cualquier caso, $s_i(t) \in \mathcal{C} \forall i$ implica $\mathbf{s}(t+1) \in \mathcal{C} \forall i$. $\square$

Observación. El lema anterior tiene dos implicaciones prácticas. Por una parte, la necesidad, evidente a todas luces, de elegir estados iniciales en el interior del hipercubo, garantizando de esta forma que la trayectoria completa está aco-

tada. Por otra parte, a la hora de demostrar cualquier propiedad de la red, podemos restringir el estudio a puntos del hipercubo compacto $\mathcal{C}$, en lugar de extenderlo al espacio completo $\mathbb{R}^n$. En particular, para chequear que una función es función de Lyapunov, las condiciones sólo necesitan verificarse en los puntos de $\mathcal{C}$. De hecho, ya hemos hecho uso de la propiedad de acotación al restringir, en la Sección 3.2, el estudio de la continuidad de la función g al hipercubo cerrado.

3.4. Propiedades numéricas de la discretización

En esta sección estudiamos las propiedades de la red de Hopfield discreta, en la formulación de Abe, con las herramientas del análisis numérico. La iteración funcional definida por la Ecuación (3.10) se considera como un método numérico, no estándar, para la solución de la EDO, Ecuación (3.5), y se determinan las propiedades de tal método:

- El método dado por la Ecuación (3.10) es consistente de orden uno.
- El método dado por la Ecuación (3.10) es convergente.

Se llega a estas dos conclusiones mediante el procedimiento, habitual en análisis numérico, de calcular, respectivamente, una cota del error local (en un solo paso) y del error global (tras un número finito de pasos). A pesar de la naturaleza teórica de estos resultados, puede sacarse una conclusión de orden práctico: si la red discreta, definida por la Ecuación (3.10), funciona satisfactoriamente, no es como consecuencia de una extraordinaria precisión numérica. En otras palabras, desde el punto de vista numérico, la iteración no es mejor que la regla de Euler clásica, ya que ambas son aproximaciones de orden uno. En consecuencia, el comportamiento favorable del método se debe a que preserva las propiedades cualitativas: acotación en el hipercubo y estabilidad de los puntos fijos. Es más, las posibles mejoras de la discretización se obtendrán al diseñar métodos numéricos con mejores propiedades dinámicas, por ejemplo, ausencia de ciclos, en lugar de mayor precisión numérica, ya que, como vemos, éste último no es un elemento determinante.

3.4.1. Orden y consistencia

En esta sección se demuestra que la iteración definida por la Ecuación (3.10) constituye un método consistente, es decir, que un paso del sistema discreto tiende a la trayectoria continua a medida que $\Delta t \rightarrow 0$. Además, el método es de orden uno, es decir, el error local es del mismo orden de magnitud que el cuadrado del tamaño de paso: $e_{\Delta t} = O(\Delta t^2)$. El procedimiento empleado es estándar en los textos sobre métodos numéricos para EDO (por ejemplo, véase [39, 43] para nomenclatura y fundamentos del tema) y consiste en el desarrollo de Taylor de la solución exacta, así como de la aproximación discreta. La diferencia entre estas dos trayectorias, tras un único paso de tiempo, es el error local.

En primer lugar, considérese la solución de la Ecuación (3.5), asumiendo $\beta = 1$, como se mencionó en el párrafo anterior a la Ecuación (3.10). La solución exacta $\mathbf{s}(t)$ de la Ecuación (3.5) puede considerarse una función (vectorial) del tiempo, de forma que se puede obtener su desarrollo de Taylor en torno a un punto t_0 . Mediante la aplicación de la regla de la cadena de la derivación, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d s_i}{d t} &= f_i & \frac{d \mathbf{s}}{d t} &= \mathbf{f} \\ \frac{d^2 s_i}{d t^2} &= \frac{d f_i}{d t} = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial s_j} \frac{d s_j}{d t} = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial s_j} f_j & \frac{d^2 \mathbf{s}}{d t^2} &= \mathbf{J} \mathbf{f} \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde $\mathbf{J}$ es el jacobiano de la función $\mathbf{f}$ en el punto $\mathbf{s}(t)$. Recuérdese que el jacobiano, cuyo cálculo ya se efectuó en la Ecuación (2.9) del Capítulo 2, es:

$$\mathbf{J}(\mathbf{s}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial s_j} \right)_{ij} ; \quad \frac{\partial f_i}{\partial s_i} = -2 s_i \text{net}_i ; \quad \frac{\partial f_i}{\partial s_j} = (1 - s_i^2) \frac{\partial \text{net}_i}{\partial s_j} \quad j \neq i \quad (3.13)$$

Por tanto, a la vista de la Ecuación (3.12), la expresión general de la serie de Taylor de la solución exacta, hasta segundo grado, puede escribirse en forma vectorial como:

$$\mathbf{s}(t + \Delta t) = \mathbf{s} + \Delta t \mathbf{f} + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{J} \mathbf{f} + O(\Delta t^3) \quad (3.14)$$

A continuación, se desarrolla la aproximación discreta dada por la función $\mathbf{g}$, definida en la Ecuación (3.10). Con objeto de simplificar los cálculos, se define una función escalar auxiliar φ_s :

$$\varphi_s(x) = \frac{s + \tanh(x)}{1 + s \tanh x} \quad (3.15)$$

de forma que, para un paso Δt dado, cada componente de la función $g_i(\mathbf{s})$ puede definirse en términos de φ_s de la forma: $g_i(\mathbf{s}) = \varphi_{s_i}(\Delta t \text{net}_i)$. El cálculo de las derivadas de φ_s proporciona:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_s}{dx} &= \frac{(1-s^2)(1-\tanh^2 x)}{(1+s \tanh x)^2} = 1 - \varphi_s^2 \\ \frac{d^2\varphi_s}{dx^2} &= -2 \frac{(1-s^2)(1-\tanh^2 x)(s + \tanh x)}{(1+s \tanh x)^3} = -2\varphi_s \frac{d\varphi_s}{dx} \end{aligned} \quad (3.16)$$

de manera que el desarrollo de φ_s en torno al origen resulta:

$$\begin{aligned} \varphi_s(x) &= \varphi_s(0) + \frac{d\varphi_s}{dx}(0)x + \frac{d^2\varphi_s}{dx^2}(0)\frac{x^2}{2} + O(x^3) \\ &= s + (1-s^2)x - 2s(1-s^2)\frac{x^2}{2} + O(x^3) \end{aligned} \quad (3.17)$$

expresión que proporciona el desarrollo de la función g :

$$\begin{aligned} g_i(\mathbf{s}) &= \varphi_{s_i}(\Delta t \text{net}_i) = s_i + (1-s_i^2)\text{net}_i \Delta t \\ &\quad - 2s_i(1-s_i^2)\text{net}_i^2 \frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Conviene ahora reescribir este desarrollo en términos de la dinámica continua, Ecuación (3.5), y su jacobiano, Ecuación (3.13), de manera que puede expresarse, en forma vectorial, como:

$$\mathbf{g}(\mathbf{s}) = \mathbf{s} + \Delta t \mathbf{f} + \frac{\Delta t^2}{2} \text{diag}(\mathbf{J}) \mathbf{f} + O(\Delta t^3) \quad (3.19)$$

Al efectuar la diferencia entre el desarrollo de la función discreta, Ecuación (3.19), y el desarrollo de la solución exacta, Ecuación (3.14), se obtiene la

estimación del error local de truncamiento:

$$e_{\Delta t} = \frac{\Delta t^2}{2} (\mathbf{J} - \text{diag}(\mathbf{J})) \mathbf{f} + O(\Delta t^3) \quad (3.20)$$

Así pues, para probar que el error local está acotado, basta con demostrar la acotación del jacobiano $\mathbf{J}$, lo que hacemos mediante un lema auxiliar:

Lema 3.3.

Los valores de potencial neuronal net_i , definidos en la Ecuación (3.2), así como sus derivadas, están acotados para todo estado $\mathbf{s}$.

Demostración. El resultado es evidente, toda vez que el estado $\mathbf{s}$ permanece acotado por $|s_i| \leq 1$ y las funciones net_i son polinomiales:

$$\begin{aligned} |net_i| &= \left| \sum_{q=1}^r \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_q) \in C_q^n \\ i \neq i_1, i_2, \dots, i_q}} w_{i i_1, i_2, \dots, i_q} s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_q} - b_i \right| \\ &\leq \sum_{q=1}^r \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_q) \in C_q^n \\ i \neq i_1, i_2, \dots, i_q}} |w_{i i_1, i_2, \dots, i_q}| + |b_i| \end{aligned} \quad (3.21)$$

y, para $j \neq i$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial net_i}{\partial s_j} \right| &= \left| \sum_{q=0}^{r-1} \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_q) \in C_q^n \\ i, j \neq i_1, i_2, \dots, i_q}} w_{i j i_1, i_2, \dots, i_q} s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_q} \right| \\ &\leq \sum_{q=0}^{r-1} \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_q) \in C_q^n \\ i, j \neq i_1, i_2, \dots, i_q}} |w_{i j i_1, i_2, \dots, i_q}| \end{aligned} \quad (3.22)$$

□

En lo que sigue, facilitará la notación darle nombre a las cotas calculadas en el lema anterior:

$$|net_i| \leq net_i^{\max} \quad ; \quad \left| \frac{\partial net_i}{\partial s_j} \right| \leq dnet_{ij}^{\max} \quad (3.23)$$

de forma que ahora la demostración del siguiente teorema es directa:

Teorema 3.1.

El método numérico definido por la función g , dada en la Ecuación (3.10), es consistente de orden uno para la aproximación de la EDO de la Ecuación (3.5).

Demostración. La expresión del error local se calculó en la Ecuación (3.20):

$$e_{\Delta t} = \frac{\Delta t^2}{2} (\mathbf{J} - \text{diag}(\mathbf{J})) \mathbf{f} + O(\Delta t^3) \quad (3.24)$$

Para acotar, en norma, este error local, elegimos, por simplicidad, la norma infinito, ya que en un espacio vectorial de dimensión finita todas las normas son equivalentes:

$$\begin{aligned} \|e_{\Delta t}\|_{\infty} &\leq \frac{\Delta t^2}{2} \|\mathbf{J} - \text{diag}(\mathbf{J})\|_{\infty} \|\mathbf{f}\|_{\infty} + O(\Delta t^3) \\ &= \frac{\Delta t^2}{2} \left(\max_i \sum_{j \neq i} |\mathbf{J}_{ij}| \right) \left(\max_i |(1 - s_i^2) \text{net}_i| \right) + O(\Delta t^3) \\ &\leq \frac{\Delta t^2}{2} \left(\max_i \sum_{j \neq i} \left| (1 - s_i^2) \frac{\partial \text{net}_i}{\partial s_j} \right| \right) \left(\max_i |\text{net}_i| \right) + O(\Delta t^3) \quad (3.25) \\ &\leq \frac{\Delta t^2}{2} \left(\max_i \sum_{j \neq i} \left| \frac{\partial \text{net}_i}{\partial s_j} \right| \right) \left(\max_i |\text{net}_i| \right) + O(\Delta t^3) \\ &\leq \frac{\Delta t^2}{2} \left(\max_i \sum_{j \neq i} d \text{net}_{ij}^{\max} \right) \left(\max_i \text{net}_i^{\max} \right) + O(\Delta t^3) \end{aligned}$$

Por tanto, existe un tamaño de paso máximo Δt_c y una constante C tales que se cumple:

$$\|e_{\Delta t}\| \leq C \Delta t^2 \quad \forall \Delta t \leq \Delta t_c \quad (3.26)$$

lo cual demuestra que el método es de orden uno. En particular, se cumple que $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \|e_{\Delta t}\| \rightarrow 0$ de manera que el método es consistente. $\square$

Observación. El sentido del Teorema 3.1, que se acaba de demostrar, es, en cierta forma, garantizar la “bondad” del método definido por la Ecuación

(3.10), ya que todo método bien definido ha de ser consistente. Sin embargo, puede obtenerse una conclusión práctica relativa a su exactitud numérica: al ser de orden uno, el error cometido es del mismo orden de magnitud que el de cualquier otro método de orden uno. Cabe, pues, cuestionar si sería preferible aplicar, por ejemplo, la regla de Euler a la EDO dada por la Ecuación (3.5), evitando así el mayor coste computacional provocado por la evaluación de la función tangente hiperbólica. Sin embargo, es frecuente encontrar en los textos de análisis numérico la afirmación de que un método no debería escogerse atendiendo exclusivamente a su precisión. En concreto, en nuestro caso, es mucho más importante preservar las propiedades dinámicas, como la estabilidad de los puntos fijos, ya que la solución viene dada por el comportamiento a largo plazo del sistema, careciendo de relevancia el error local. En la Sección 3.5 se tratará este tema, demostrando que la estabilidad de los puntos fijos se preserva, lo que da al método definido por la Ecuación (3.10) una significativa ventaja sobre la regla de Euler y otros métodos estándar.

3.4.2. Convergencia

En esta sección se demuestra la convergencia del método, es decir, que la diferencia entre la trayectoria del sistema discreto y la solución exacta, tras cualquier número *finito* de pasos, está acotada y tiende a cero cuando $\Delta t \rightarrow 0$. Nótese que esto es muy diferente de probar que las trayectorias están próximas durante un intervalo *infinito*. Esta última propiedad está relacionada con la estabilidad a largo plazo, y es un concepto procedente de la teoría de sistemas dinámicos, mientras que la convergencia hace referencia a la precisión numérica.

Las técnicas habituales para demostrar la convergencia de un método numérico hacen uso, o bien de la acotación de la EDO, o bien de la continuidad Lipschitz de la función que define el sistema discreto. Dado que ya hemos demostrado en el Lema 3.1 que la función g de la discretización es discontinua, se recurre aquí a la primera opción, basada en que la función f de la EDO esté acotada. El resultado básico puede encontrarse en los textos habituales de análisis numérico, y lo reproducimos como Teorema A.1 en el Apéndice A,

siendo una de las condiciones que el error local esté acotado por la cantidad $C \Delta t^{p+1}$. En el Teorema 3.1 demostramos que, efectivamente, esta acotación del error local se satisface con orden $p = 1$, por lo que sólo resta por demostrar la otra condición del Teorema A.1, a saber, que el jacobiano de la EDO está acotado:

Lema 3.4.

El método numérico dado por la Ecuación (3.10) es convergente. En particular, el error global tras k pasos (es decir, después de un tiempo $t = k \Delta t$) está acotado por:

$$\|\mathbf{s}(t) - \mathbf{s}_k\| \leq \Delta t \frac{C}{L} (e^{Lt} - 1) \quad (3.27)$$

donde la definición de C se encuentra en la Ecuación (3.26), el valor de L es $L = 2 \max_i net_i^{\max} + \max_i \sum_{j \neq i} dnet_{ij}^{\max}$ y las cotas $net_i^{\max}$ y $dnet_{ij}^{\max}$ se definen en la Ecuación (3.23).

Demostración. Recuértese de la Ecuación (3.13) la expresión del jacobiano:

$$\mathbf{J}(\mathbf{s})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial s_j} = \begin{cases} -2 s_i net_i & \text{si } i = j \\ (1 - s_i^2) \frac{\partial net_i}{\partial s_j} & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (3.28)$$

Entonces, utilizando la norma infinito:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{J}\|_{\infty} &= \max_i \sum_j |\mathbf{J}_{ij}| = \max_i \left(|\mathbf{J}_{ii}| + \sum_{j \neq i} |\mathbf{J}_{ij}| \right) \leq \max_i |\mathbf{J}_{ii}| + \max_i \sum_{j \neq i} |\mathbf{J}_{ij}| \\ &\leq 2 \max_i |net_i| + \max_i \sum_{j \neq i} \left| \frac{\partial net_i}{\partial s_j} \right| \leq 2 \max_i net_i^{\max} + \max_i \sum_{j \neq i} dnet_{ij}^{\max} \end{aligned} \quad (3.29)$$

y el enunciado queda demostrado sin más que aplicar el Teorema A.1. $\square$

Observación. La cota del error global que aparece en el Teorema 3.29 no es particularmente ajustada, por lo que carece de utilidad como medida práctica de la exactitud de la aproximación. De hecho, podría haberse obtenido una

cota más rigurosa empleando la norma logarítmica y acotando ambos términos simultáneamente, dado que el máximo se obtiene en el punto $s_i = 0$ para J_{ij} y en el punto $s_i = 1$ para J_{ii} . Sin embargo, nuestro objetivo en esta sección no era otro que presentar, por primera vez, una prueba rigurosa de que la implementación discreta, que habitualmente se realiza, de las redes de Hopfield es una aproximación razonable de la EDO continua, al menos cuando $\Delta t \rightarrow 0$. Sin embargo, no se garantiza que se preserve el comportamiento cualitativo del sistema continuo, durante un intervalo de tiempo arbitrariamente largo, con un valor no nulo de Δt . En la siguiente sección se estudiarán estos aspectos dinámicos, demostrándose que, en particular, se pierde la función de Lyapunov.

3.5. Propiedades dinámicas de la discretización

En esta sección se estudia el comportamiento a largo plazo de la iteración discreta dada por la Ecuación (3.10). En particular, se determina si las propiedades cualitativas más importantes (puntos fijos y su estabilidad, así como existencia de una función de Lyapunov) del modelo de Hopfield continuo se preservan tras la discretización. Nótese que, especialmente, la cuestión de la preservación de la función de Lyapunov no es, en absoluto, trivial. De hecho, el diseño de métodos numéricos que hereden la función de Lyapunov de la EDO es una activa línea de investigación [105].

3.5.1. Preservación de los puntos fijos

Como ya se ha mencionado, una vez que la red neuronal se estabiliza en un punto fijo, su estado representa la solución del problema que se trataba de resolver. Por tanto, es crucial el estudio de los puntos fijos del sistema y, en particular, si los puntos fijos de la red continua coinciden con los de la discretización. A la hora de estudiar los puntos fijos, es importante notar que, en una implementación práctica, debido a errores de redondeo, pueden obtenerse puntos con $|s_i| = 1$. En tales puntos, como se demostró en el Lema 3.1, la función $\mathbf{g}$ que define el sistema discreto es discontinua. Por tanto, se debe completar la definición de la función $\mathbf{g}$, de forma que se tengan en cuenta

estos puntos límite, dando lugar a la siguiente ecuación:

$$g_i(\mathbf{s}) = \begin{cases} \frac{s_i + \tau_i}{1 + s_i \tau_i} & \text{si } s_i \tau_i \neq -1 \\ s_i & \text{si } s_i \tau_i = -1 \end{cases} ; \quad \tau_i = \tanh(\Delta t \text{net}_i) \quad (3.30)$$

Para facilitar la referencia, se reescribe la EDO de la red continua, dada por la Ecuación (3.5):

$$\frac{ds_i}{dt} = (1 - s_i^2) \text{net}_i \quad (3.31)$$

Entonces, se obtiene fácilmente el lema que establece que el sistema discreto replica exactamente los puntos fijos del sistema continuo:

Lema 3.5.

Los puntos fijos de la red continua, definida por la Ecuación (3.5), coinciden con los de la red discreta, dada por la iteración de la función g , definida en la Ecuación (3.30).

Demostración. Si ξ es un punto fijo de la dinámica continua entonces, o bien se cumple $|\xi_i| = 1$, o bien se tiene que $\text{net}_i|_{\mathbf{s}=\xi} = 0$. En el primer caso, resulta:

$$\xi_i = 1 \Rightarrow g_i(\xi) = \frac{1 + \tau_i|_{\mathbf{s}=\xi}}{1 + \tau_i|_{\mathbf{s}=\xi}} = 1 \quad (3.32)$$

y

$$\xi_i = -1 \Rightarrow g_i(\xi) = \frac{-1 + \tau_i|_{\mathbf{s}=\xi}}{1 - \tau_i|_{\mathbf{s}=\xi}} = -1 \quad (3.33)$$

En el segundo caso, se anula la expresión $\tau_i|_{\mathbf{s}=\xi} = 0$, ya que $\tanh(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, por lo que se satisface $g_i(\xi) = \xi_i$. Se concluye que, para todas las componentes i , se satisface $g_i(\xi) = \xi_i$ de forma que ξ es también un punto fijo de la iteración discreta. Para ver la implicación en dirección opuesta, considérese un estado ξ que sea un punto fijo de la red discreta: $g(\xi) = \xi$. Si $\xi_i \tau_i|_{\mathbf{s}=\xi} = -1$, a partir de $|\tau_i| \leq 1$ se obtiene $|\xi_i| = 1$, lo que implica $\left. \frac{ds_i}{dt} \right|_{\mathbf{s}=\xi} = 0$. En otro

caso, si $\xi_i \tau_i|_{s=\xi} \neq -1$, la condición de punto fijo es:

$$\xi_i = \frac{\xi_i + \tau_i|_{s=\xi}}{1 + \xi_i \tau_i|_{s=\xi}} \quad (3.34)$$

que, tras la manipulación algebraica siguiente:

$$\xi_i + \xi_i^2 \tau_i|_{s=\xi} = \xi_i + \tau_i|_{s=\xi} \Rightarrow (\xi_i^2 - 1) \tau_i|_{s=\xi} = 0 \quad (3.35)$$

resulta que, o bien $\tau_i|_{s=\xi} = 0$, o bien $|\xi_i| = 1$, implicando, ambos, la igualdad $\left. \frac{ds_i}{dt} \right|_{s=\xi} = 0$. Por tanto, ξ es un punto fijo de la Ecuación (3.5). $\square$

La conclusión es que los puntos fijos son preservados exactamente, es decir, la discretización no provoca la aparición de equilibrios espurios. No obstante, no se ha determinado aún si los puntos mantienen su carácter estable o inestable, siendo éste el objeto de la siguiente sección.

3.5.2. Estabilidad de los puntos fijos

En esta sección se demuestra que la red discreta preserva la estabilidad de los puntos fijos, es decir, un punto fijo de la red discreta es estable si y sólo si el correspondiente equilibrio es un punto estable de la dinámica continua. Este resultado, junto con los de la Sección 3.5.1, permite asegurar la equivalencia de los respectivos conjuntos de puntos fijos estables. En particular, se asegura la inexistencia de puntos fijos interiores que no sean estables, propiedad que ya se demostró para la red continua en el Teorema 2.1 del Capítulo 2. En este sentido, la red discreta presenta un comportamiento igual de satisfactorio que la continua. Obsérvese, no obstante, que no se ha establecido aún la convergencia de la red a un punto fijo y, de hecho, como se verá en la Sección 3.5.3, no puede garantizarse.

En la presente sección se analiza la estabilidad de los puntos fijos del modelo discreto, por medio de la técnica clásica de linealización y subsiguiente estudio de los autovalores. Como establece el Lema A.3, un punto fijo de un sistema dinámico discreto es estable si todos los autovalores del jacobiano de la función,

en dicho punto, son menores que uno, en valor absoluto. Por tanto, en primer lugar, procedemos a calcular el jacobiano de la función g , dada en la Ecuación (3.10), que define el sistema discreto. Los cálculos se simplifican gracias a la observación $\frac{\partial \tau_i}{\partial s_i} = 0$, ya que, debido a la ausencia de autopesos, se cumple $\frac{\partial net_i}{\partial s_i} = 0$. Por otra parte, cuando $i \neq j$, se obtiene $\frac{\partial \tau_i}{\partial s_j} = (1 - \tau_i^2) \Delta t h_{ij}$, donde $h_{ij} = \frac{\partial net_i}{\partial s_j}$ es el hessiano, cambiado de signo, de la función objetivo, como ya se definió en la Ecuación (2.11) del Capítulo 2. Haciendo uso de estos cálculos parciales, se obtiene directamente:

$$\frac{\partial g_i}{\partial s_i} = \frac{1 - \tau_i^2}{(1 + s_i \tau_i)^2} = \frac{(1 - \tau_i)(1 + \tau_i)}{(1 + s_i \tau_i)^2} \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial s_j} = \frac{\partial g_i}{\partial \tau_i} \frac{\partial \tau_i}{\partial s_j} = \frac{1 - \tau_i^2}{(1 + s_i \tau_i)^2} \Delta t (1 - s_i^2) h_{ij} \quad i \neq j \quad (3.37)$$

Puede, ya, obtenerse de forma simple la demostración del siguiente resultado:

Lema 3.6.

Sea ξ un vértice del hipercubo. Entonces, ξ es un punto fijo estable de la función discreta, dada en la Ecuación (3.10), si y sólo si es un equilibrio estable de la red continua, definida por la Ecuación (3.5).

Demostración. Al sustituir la condición de vértice, $|\xi_i| = 1 \forall i$, en la Ecuación (3.37) resulta $\frac{\partial g_i}{\partial s_j} = 0 \forall i \neq j$, de forma que el jacobiano de la función discreta, evaluado en un vértice, es la matriz diagonal $\mathbf{T}$, definida como:

$$T_{ii} = \frac{(1 - \tau_i)(1 + \tau_i)}{(1 + \xi_i \tau_i)^2} \quad (3.38)$$

Nótese que se ha omitido el subíndice $\mathbf{s} = \xi$ tras τ_i , para mayor claridad de la notación. Supóngase que ξ es un vértice estable de la red continua, entonces se cumple $\xi_i net_i|_{\mathbf{s}=\xi} > 0 \forall i$, como se demostró en el Lema 2.3. Más aún, dado que $\tanh(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$, también se cumple $\xi_i \tau_i > 0 \forall i$ si el vértice ξ es estable. Considérese el caso $\xi_i = 1$, entonces $\tau_i > 0$ y $T_{ii} = \frac{1 - \tau_i}{1 + \tau_i}$, expresión

que, a su vez, puede derivarse con respecto a τ_i , obteniéndose:

$$\frac{dT_{ii}}{d\tau_i} = \frac{-2}{(1 + \tau_i)^2} < 0 \quad \text{si } \xi_i = 1 \quad (3.39)$$

de manera que T_{ii} es estrictamente decreciente con respecto a τ_i . Como es $T_{ii} = 1$ cuando $\tau_i = 0$ y $T_{ii} = 0$ cuando $\tau_i = 1$, se concluye que $0 \leq T_{ii} < 1$ siempre que $\tau_i > 0$. En particular, $|T_{ii}| < 1$. Considérese, ahora, el otro caso, $\xi_i = -1$, que implica $\tau_i < 0$ y $T_{ii} = \frac{1 + \tau_i}{1 - \tau_i}$. Entonces, la derivada de T_{ii} es:

$$\frac{dT_{ii}}{d\tau_i} = \frac{2}{(1 - \tau_i)^2} > 0 \quad \text{si } \xi_i = -1 \quad (3.40)$$

de manera que T_{ii} es estrictamente creciente con respecto a τ_i . Al igual que antes, la acotación $0 \leq T_{ii} < 1$ es consecuencia de ser $\tau_i < 0$ y del valor en los extremos, $T_{ii} = 0$ cuando $\tau_i = -1$ y $T_{ii} = 1$ cuando $\tau_i = 0$. En particular, también se cumple $|T_{ii}| < 1$ cuando $\xi_i = -1$. Por tanto, se satisface $|T_{ii}| < 1 \forall i$. Como $\mathbf{T}$ es una matriz diagonal, sus autovalores son sus elementos diagonales, cuyo valor absoluto acabamos de demostrar que es menor que uno. Por consiguiente, el vértice $\boldsymbol{\xi}$ es estable. Finalmente, si $\boldsymbol{\xi}$ es un vértice inestable de la red continua, entonces se cumple $\xi_i \text{ net}_i|_{\mathbf{s}=\boldsymbol{\xi}} < 0$, al menos para un índice i , y la repetición del razonamiento anterior conduce a la conclusión $|T_{ii}| > 1$, por lo que $\boldsymbol{\xi}$ es un punto inestable de la iteración discreta. $\square$

Habiendo demostrado que la estabilidad de los vértices se preserva, independientemente del tamaño de paso, se procede a estudiar los puntos fijos que no son vértices. Recuérdesse que se asume que el hessiano de la función objetivo V es no singular, de manera que se cumpla el Teorema 2.1, es decir, los puntos interiores son inestables en la red continua.

Lema 3.7.

Todo punto fijo $\boldsymbol{\xi}$ que no sea un vértice es un punto inestable de la red discretizada.

Demostración. Obsérvese, en primer lugar, que, como consecuencia de ser $\boldsymbol{\xi}$

un punto fijo que no es vértice, se cumple $net_i|_{s=\xi} = 0$, lo que, a su vez, implica $\tau_i|_{s=\xi} = 0$. Sustituyendo en la Ecuación (3.36), se obtiene $\frac{\partial g_i}{\partial s_i}\bigg|_{s=\xi} = 1$, mientras que de la Ecuación (3.37) resulta $\frac{\partial g_i}{\partial s_j}\bigg|_{s=\xi} = \Delta t (1 - \xi_i^2) h_{ij}|_{s=\xi}$. Con objeto de simplificar la notación, escribiremos el jacobiano $\mathbf{J}_d$ de la red discreta en función del jacobiano $\mathbf{J}$ de la red continua, dado por la Ecuación (3.13). Se obtiene, así, la igualdad: $\mathbf{J}_d(\xi) = \mathbf{I} + \Delta t \mathbf{J}(\xi)$. Por tanto, los autovalores de $\mathbf{J}_d(\xi)$ pueden calcularse como $\lambda'_i = 1 + \Delta t \lambda_i$ donde los valores λ_i son los autovalores del jacobiano del modelo continuo. Asumiendo que el hessiano es no singular, se cumple el Teorema 2.1, de forma que el jacobiano $\mathbf{J}(\xi)$ en un punto fijo ξ que no sea vértice debe tener, al menos, un autovalor positivo, llamémosle $\lambda_i > 0$. Entonces, el correspondiente autovalor de la red discreta es $\lambda'_i = 1 + \Delta t \lambda_i > 1$, lo que demuestra que ξ es un punto inestable. $\square$

En resumen, tanto los puntos fijos como su estabilidad se preservan tras la discretización, independientemente del tamaño de paso. Sin embargo, no puede aún afirmarse que el comportamiento dinámico del sistema discreto sea idéntico al del continuo, ya que podrían aparecer trayectorias más complejas. De hecho, en la próxima sección demostramos que, debido a la aparición de soluciones periódicas, la red discreta deja de constituir un sistema de gradiente, por lo que no puede poseer función de Lyapunov.

3.5.3. Soluciones periódicas

En esta sección, por medio de un análisis de bifurcaciones, se enuncian condiciones suficientes para la destrucción de la estructura de gradiente. Se demuestra que, en general, a no ser que se impongan condiciones restrictivas en el tamaño de paso, aparecen soluciones cíclicas, de periodo dos. Dado que no pueden ocurrir soluciones periódicos en un sistema de gradiente, la aparición de trayectorias cíclicas implica que la red discreta no puede poseer ninguna función de Lyapunov, por lo que no se puede garantizar su convergencia a un punto fijo. Se mostró anteriormente que, cuando la red se aplica a un problema

de optimización, la solución proporcionada se representa por el punto fijo al que la red converge. Por tanto, la capacidad de resolver problemas de optimización de la red depende de forma crítica de la existencia de una función de Lyapunov. En consecuencia, la aparición de soluciones periódicas destruye la capacidad de la red de Hopfield como método de optimización, desde un punto de vista teórico. Éste es el resultado principal del capítulo: *la discretización que se emplea habitualmente de la red de Hopfield continua no preserva la minimización del gradiente de la función objetivo*. Las consecuencias prácticas también pueden vislumbrarse: aunque se han publicado simulaciones con resultados satisfactorios, en ellas se selecciona el tamaño de paso “suficientemente pequeño” mediante prueba y error. Esta falta de fundamento teórico para la elección del tamaño de paso es una situación altamente insatisfactoria ya que, por una parte, habrá que repetir el proceso de tanteo para cada problema en particular y, por otra, ante el riesgo de destruir la función de Lyapunov, se hará una elección conservadora, de un tamaño de paso extremadamente pequeño, dando lugar a una convergencia muy lenta del sistema.

Se demuestra, a continuación, la existencia de soluciones periódicas mediante el estudio de las bifurcaciones que doblan el periodo. Para ello, se hará uso de uno de los teoremas básico de la teoría de bifurcaciones, que se reescribe como Teorema A.2 en el Apéndice A, para facilitar la referencia. Con objeto de aplicar el Teorema A.2, obsérvese en primer lugar que la dinámica discretizada, definida en la Ecuación (3.10), puede expresarse en la forma $h(\mathbf{s}(t+1), \mathbf{s}(t); \Delta t) = \mathbf{0}$, definiendo la función h como:

$$h(\mathbf{y}, \mathbf{z}; \Delta t) = \mathbf{y} - g(\mathbf{z}; \Delta t) \quad (3.41)$$

Recuérdese también que, tal como se calculó en la prueba del Lema 3.7, el jacobiano de $g(\mathbf{x}; \Delta t)$ en un punto fijo interior viene dado por la matriz $I + \Delta t \mathbf{J}$, siendo $\mathbf{J}$ el jacobiano de la red continua, dado en la Ecuación (3.13). Sea ξ un punto fijo interior, por lo que los jacobianos de la función h , definida en la Ecuación (3.41), son:

$$\mathbf{J}_y(\xi, \xi; \Delta t) = I, \quad \mathbf{J}_z(\xi, \xi; \Delta t) = - (I + \Delta t \mathbf{J}) \quad (3.42)$$

y la matriz $\mathbf{A}$ del Teorema A.2 resulta ser:

$$\mathbf{A}(\Delta t) = \mathbf{J}_y(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}; \Delta t) - \mathbf{J}_z(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}; \Delta t) = 2\mathbf{I} + \Delta t \mathbf{J} \quad (3.43)$$

Por otra parte, se demostró en el Teorema 2.1 que, en un punto fijo interior, el jacobiano $\mathbf{J}$ debe tener tanto autovalores positivos como negativos. Por tanto, debe existir un autovalor negativo mínimo (con valor absoluto máximo), llámese λ , y se asume que es simple. El razonamiento de la prueba es que, a medida que Δt se incrementa desde cero, el correspondiente autovalor del sistema discreto $\lambda' = 1 + \Delta t \lambda$ decrece desde 1. Cuando $\Delta t_0 = -\frac{2}{\lambda}$, entonces $\lambda'_i = -1$ dando lugar a una bifurcación que dobla el periodo. En el siguiente teorema se prueba este hecho de forma rigurosa:

Teorema 3.2.

Sea V la función objetivo de un problema de optimización, y sea una red de Hopfield continua, cuya dinámica viene dada por la Ecuación (3.1). Asíumase que existe un punto fijo interior $\mathbf{s}$, que el hessiano de $V(\mathbf{s})$ en el punto $\mathbf{s}$ no es singular y que los autovalores del hessiano son simples. Considérese la discretización dada por la Ecuación (3.10). Con estas condiciones, existe un valor límite Δt_0 tal que para valores mayores del tamaño de paso, $\Delta t > \Delta t_0$, la función V no es función de Lyapunov del sistema discretizado. Más aún, existen soluciones periódicas y la red discreta no puede poseer ninguna función de Lyapunov.

Demostración. En un punto fijo interior $\mathbf{s}$, el hessiano de V es el jacobiano $\mathbf{J}$ del sistema continuo, cambiado de signo. Por tanto, la afirmación del teorema resulta, simplemente, chequeando las condiciones del Teorema A.2, haciendo uso de los cálculos del párrafo anterior.

Para probar la primera condición, a saber, que existe un vector $\boldsymbol{\theta}$ tal que $\text{Null}(\mathbf{A}(\Delta t_0)) = \text{span}(\boldsymbol{\theta})$, considérese un vector $\boldsymbol{\theta} \in \text{Null}(\mathbf{A}(\Delta t_0))$. Tomando $\Delta t_0 = -\frac{2}{\lambda}$, se obtiene

$$\mathbf{A}(\Delta t_0) \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \implies 2\boldsymbol{\theta} + \Delta t_0 \mathbf{J} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \implies \mathbf{J} \boldsymbol{\theta} = -\frac{2}{\Delta t_0} \boldsymbol{\theta} \quad (3.44)$$

es decir, $\boldsymbol{\theta}$ es un autovector de $\mathbf{J}$ correspondiente al autovalor $\lambda = -\frac{2}{\Delta t_0}$. Como se ha asumido que éste es un autovalor simple, el autoespacio correspondiente tiene dimensión 1, lo que demuestra que $\text{Null}(\mathbf{A}(\Delta t_0)) = \text{span}(\boldsymbol{\theta})$.

Con respecto a la segunda condición del Teorema A.2, la no singularidad de $\mathbf{J}_y(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}; \Delta t_0) + \mathbf{J}_z(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}; \Delta t_0)$, resulta fácilmente ya que hemos asumido que el hessiano de V , y por tanto el jacobiano $\mathbf{J}$ de la red continua, es no singular. Entonces, se tiene:

$$\mathbf{J}_y(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}; \Delta t_0) + \mathbf{J}_z(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}; \Delta t_0) = -\Delta t_0 \mathbf{J} \quad (3.45)$$

que es no singular y, por lo tanto, inversible.

Finalmente, se procede a chequear la tercera condición:

$$\left(\left. \frac{\partial \mathbf{A}(\mu)}{\partial \mu} \right|_{\mu=\mu_0} \right) \cdot \boldsymbol{\theta} \notin \text{Range}(\mathbf{A}(\mu_0)) \quad (3.46)$$

para lo que es preciso calcular la derivada de $\mathbf{A}$ con respecto al tamaño de paso: $\frac{\partial \mathbf{A}(\Delta t)}{\partial \Delta t} = \mathbf{J}$. De esta forma, la condición requerida se reduce a $\mathbf{J} \boldsymbol{\theta} \notin \text{Range}(2\mathbf{I} + \Delta t_0 \mathbf{J})$. Se procede por contradicción: supongamos que $\mathbf{J} \boldsymbol{\theta} \in \text{Range}(2\mathbf{I} + \Delta t_0 \mathbf{J})$, entonces existe un vector $\boldsymbol{\psi}$ tal que:

$$(2\mathbf{I} + \Delta t_0 \mathbf{J}) \boldsymbol{\psi} = \mathbf{J} \boldsymbol{\theta} \quad (3.47)$$

Se escoge un autovector *por la izquierda* $\boldsymbol{\nu}$ de $\mathbf{J}$ correspondiente al mismo autovalor λ : $\boldsymbol{\nu}^\top \mathbf{J} = -\frac{2}{\Delta t_0} \boldsymbol{\nu}^\top$. Si se multiplica este vector por la Ecuación (3.47), se tiene:

$$\boldsymbol{\nu}^\top (2\mathbf{I} + \Delta t_0 \mathbf{J}) \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\nu}^\top \mathbf{J} \boldsymbol{\theta} \quad (3.48)$$

Ahora, el lado izquierdo de la Ecuación (3.48), resulta:

$$\boldsymbol{\nu}^\top (2\mathbf{I} + \Delta t_0 \mathbf{J}) \boldsymbol{\psi} = (2\boldsymbol{\nu}^\top + \Delta t_0 \boldsymbol{\nu}^\top \mathbf{J}) \boldsymbol{\psi} = \left(2\boldsymbol{\nu}^\top + \Delta t_0 \frac{-2}{\Delta t_0} \boldsymbol{\nu}^\top \right) \boldsymbol{\psi} = 0 \quad (3.49)$$

mientras que el lado derecho de la misma Ecuación (3.48) proporciona:

$$\boldsymbol{\nu}^\top \mathbf{J} \boldsymbol{\theta} = \lambda \boldsymbol{\nu}^\top \boldsymbol{\theta} \quad (3.50)$$

ya que $\boldsymbol{\theta}$ es un autovector (por la derecha) de $\mathbf{J}$. Las dos últimas ecuaciones deben coincidir entre sí, ya que son iguales, respectivamente, a los lados izquierdo y derecho de la Ecuación (3.48). Por tanto, se cumple $\lambda \boldsymbol{\nu}^\top \boldsymbol{\theta} = 0$, es decir, los vectores $\boldsymbol{\theta}$ y $\boldsymbol{\nu}$ son ortogonales. Por otra parte, como $\mathbf{J}$ es diagonalizable y hemos asumido que λ es un autovalor simple, existirán $n - 1$ autovectores independientes correspondientes a los $n - 1$ autovalores distintos de λ . Por el Lema A.4, $\boldsymbol{\nu}$ será ortogonal a estos $n - 1$ autovectores. Concluimos que, en total, $\boldsymbol{\nu}$ es ortogonal a n autovectores independientes, de forma que, añadiendo $\boldsymbol{\nu}$ a estos n autovectores, podría formarse un conjunto de $n + 1$ vectores independientes, lo cual es una contradicción, ya que la dimensión del espacio es n . Por tanto, la suposición hecha $\mathbf{J} \boldsymbol{\theta} \in \text{Range}(2\mathbf{I} + \Delta t_0 \mathbf{J})$ debe ser falsa.

Habiendo demostrado todas las condiciones del Teorema A.2, queda demostrada la eventual aparición de una solución de periodo dos, por lo que ni V , ni ninguna otra función, pueden ser funciones de Lyapunov del sistema discreto. $\square$

Observación. Dicho con sencillez, el Teorema 3.2 significa que la implementación habitual en ordenador (por tanto, discreta) de las redes de Hopfield continuas no puede, en general, poseer una función de Lyapunov, lo que supone un grave obstáculo para su aplicación a optimización. Este hecho explica por qué muchas aplicaciones de las redes de Hopfield requieren ajustes ad-hoc del tamaño de paso, así como otros detalles de implementación. Obsérvese en la prueba del anterior teorema que el punto de bifurcación Δt_0 depende del autovalor λ del hessiano de la función objetivo, en el punto fijo interior, por lo que no puede calcularse previamente con un coste computacional razonable. Por tanto, en la práctica, será preciso elegir un tamaño de paso mucho menor de lo necesario para garantizar la preservación de la función de Lyapunov. Esta elección conservadora da lugar a una convergencia lenta y, en definitiva,

a una eficiencia pobre de la red de Hopfield.

En resumen, en esta sección se han estudiado los pros y los contras de la discretización habitual de las redes de Hopfield continuas. Con respecto a la estabilidad de los puntos fijos, la discretización tiene un comportamiento satisfactorio, ya que la red discreta replica exactamente los puntos fijos del sistema continuo, así como su estabilidad o inestabilidad. Sin embargo, cuando se adopta un punto de vista global, sale a la luz un inconveniente oculto: la estructura de gradiente se pierde debido a la existencia de soluciones periódicas. En la siguiente sección, se discuten algunas líneas de investigación para solventar esta situación.

3.6. Conclusiones y líneas futuras

En este capítulo, se ha realizado un estudio riguroso de la discretización de las redes continuas de Hopfield, con objeto de determinar su capacidad para resolver problemas de optimización combinatorial. Se parte del estudio realizado en el Capítulo 2, en el que se mostró que la red continua era una metodología adecuada para resolver problemas de optimización, debido a sus características dinámicas. En consecuencia, el enfoque del presente capítulo hace énfasis en la preservación de tales propiedades cualitativas tras la discretización que resulta al implementar la red continua en un ordenador digital. El proceso de discretización, habitualmente encontrado en las referencias, consiste en la sustitución de la derivada por la diferencia finita en la dinámica continua, dando lugar a dos etapas en cada paso de simulación: cálculo del potencial y aplicación de la función tangente hiperbólica. Aquí, se formula explícitamente, mediante la aplicación de una única iteración funcional, el sistema discreto que resulta de esta sustitución. Desde el punto de vista numérico, el sistema discretizado es una aproximación de primer orden de la red continua, es decir, el error de discretización se encuentra en el mismo orden de magnitud que el de la regla de Euler. A continuación, desde el punto de vista dinámico, se demuestra que la red discreta hereda algunas propiedades favorables de la continua: los puntos fijos interiores son inestables y los estados permanecen acotados por

el hipercubo unitario. Sin embargo, la función objetivo deja de ser función de Lyapunov del sistema discreto, ya que aparecen soluciones periódicas, a no ser que se seleccione un tamaño de paso suficientemente pequeño. Este resultado explica la razón de muchos resultados de simulación no satisfactorios, que se deben a la elección de un tamaño de paso excesivo, destruyéndose la función de Lyapunov, o demasiado pequeño, provocando una convergencia excesivamente lenta.

Con objeto de superar la dificultad fundamental, es decir, de obtener una red discreta con la misma función de Lyapunov que la continua, puede pensarse en dos prometedoras direcciones:

- Una línea es la búsqueda del valor del tamaño de paso donde ocurre la bifurcación. Por debajo de tal valor se recupera la estructura de gradiente. Esta tarea puede ser abordada, bien mediante prueba y error para cada problema en particular, bien por ulteriores estudios analíticos, de forma que pudiera seleccionarse un tamaño de paso óptimo.
- Otra estrategia es el empleo de un método numérico que preserve la función de Lyapunov, en lugar de la discretización habitual, presentada aquí.

A continuación se resumen brevemente algunos trabajos exploratorios en la segunda de las direcciones de investigación mencionadas. La elección más evidente, a la hora de seleccionar un método numérico, es un método estándar, cuyas propiedades son bien conocidas y de los que existen implementaciones muy eficientes. En particular, el análisis numérico señala la existencia de métodos que preservan la estabilidad de sistemas *lineales*. Estos métodos, llamados A-estables, tienen, no obstante, el inconveniente de ser implícitos, es decir, en cada paso de tiempo es preciso resolver un sistema no lineal de ecuaciones, lo que impone un coste computacional añadido. Se ha conjeturado que estos métodos A-estables también preservarían la función de Lyapunov en el caso *no lineal*. Esta conjetura sugirió la aplicación de la regla de Euler hacia atrás, que es un método A-estable, a las redes de Hopfield [13]. Las simulaciones mostraron que la regla de Euler hacia atrás era superior a la implementación

habitual, aunque los resultados no son definitivos. Otro intento emplea métodos no estándar, que han sido específicamente diseñados con el objetivo de preservar la función de Lyapunov, por medio de la noción de gradiente discreto [75]. Cuando uno de estos métodos no estándar se aplica a redes de Hopfield de primer orden, se obtiene el método estándar denominado regla trapezoidal [14], que también es un método implícito. En todas estas tentativas, se observó una dificultad crítica en los métodos implícitos: la iteración que resuelve el sistema de ecuaciones introduce una fuente de error adicional. De hecho, si el tamaño de paso es excesivo, la iteración puede no converger, o incluso converger a un punto fuera del hipercubo, donde, como hemos visto, la función de Lyapunov no es válida. Este fenómeno resalta la importancia de preservar *las dos* propiedades críticas, estabilidad y acotación en el hipercubo, con objeto de reproducir el comportamiento dinámico correcto de la red continua. Por una parte, la implementación habitual, estudiada en este capítulo, no preserva la función de Lyapunov porque la ecuación diferencial se discretiza mediante la regla de Euler, que no es un método A-estable. Por otra parte, los estados del sistema discreto que resulta de un método numérico estándar no permanecen acotados por el hipercubo. En consecuencia, un enfoque razonable sería utilizar un método numérico A-estable para la ecuación diferencial y, entonces, aplicar la función tangente hiperbólica. De hecho, si consideramos que la definición de la red de Hopfield es, en realidad, una ecuación algebraico-diferencial, el método expuesto es conocido, recibiendo el nombre de método de espacio de estados [28]. Por tanto, parece razonable que el marco adecuado para el estudio de las redes de Hopfield es el de las ecuaciones algebraico-diferenciales, en lugar del de las ecuaciones diferenciales ordinarias, y su análisis requiere investigación adicional para afrontar las dificultades que presentan las ecuaciones algebraico-diferenciales y su tratamiento numérico.

Capítulo 4

Redes de Hopfield para Identificación de Sistemas Dinámicos

Resumen del capítulo

En este capítulo se aplican las redes neuronales de Hopfield al problema de estimación de parámetros, en el contexto de identificación de sistemas dinámicos. Como la red resultante resulta tener pesos que varían con el tiempo, no le son aplicables las pruebas de convergencia desarrolladas para el modelo tradicional, por lo que se realiza un estudio analítico que prueba la convergencia del nuevo modelo. Asimismo, para sistemas mecánicos y epidemiológicos, se muestra con simulaciones que se obtienen buenos resultados en cuanto a la predicción de la salida de los sistemas. Cuando los estados presentan suficiente variabilidad, también se obtienen estimaciones precisas de los parámetros, incluso en el caso de parámetros variables, por lo que el método resulta especialmente adecuado para identificación on-line.

4.1. Introducción

La identificación de un sistema puede definirse como el establecimiento de su comportamiento interno, mediante la observación de las entradas y salidas

medibles [111, 66]. En el contexto de los sistemas dinámicos, la identificación produce como resultado un *modelo* del sistema. Este proceso de identificación puede ser clasificado en base a varios criterios:

El tipo de modelo. Existen diversas representaciones de modelos, pero una división fundamental puede establecerse entre los modelos basados en el dominio de las frecuencias y aquéllos en los que aparece explícitamente el tiempo. En el primer caso, los modelos se formulan mediante una *función de transferencia* o alguna extensión de este concepto. Por el contrario, en el dominio del tiempo, un modelo generalmente consiste en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs), aunque existen casos más complejos que precisan ecuaciones en derivadas parciales, ecuaciones integro-diferenciales, ecuaciones funcionales, etc. Dichas ecuaciones describen la evolución del *estado* del sistema, por lo que los modelos en el dominio del tiempo a menudo reciben el nombre de representaciones en el *espacio de estados* o *espacio de fases*. Siguiendo la tónica habitual del presente trabajo, este capítulo se ciñe a modelos representados mediante EDOs, las cuales proporcionan una formulación adecuada para el estudio de las redes de Hopfield. Asimismo, esta elección se une a la tendencia actual que muestra una cierta preponderancia de los modelos en espacio de estados sobre las formulaciones en el dominio de la frecuencia [99].

El conjunto de modelos candidatos. Una etapa muy importante del proceso de identificación (la más importante y la más difícil según algunos autores [66]) es la selección de una familia de modelos que se presuponen aceptables, de entre el conjunto infinito de modelos posibles. A menudo, gracias al conocimiento de las leyes físicas o por la intuición de expertos humanos, será posible la construcción de un modelo que refleje el comportamiento cualitativo del sistema con suficiente precisión. En este caso, la identificación culminaría con el cálculo del valor numérico de determinados parámetros del modelo, que habitualmente representarían magnitudes físicas. De esta forma, se obtiene un modelo concreto de entre la familia paramétrica de modelos candidatos, por lo que suele ha-

blarse de *estimación de parámetros* o *identificación paramétrica*. Por el contrario, en ocasiones no se dispone de ningún criterio para el proceso de modelado, por lo que es habitual la utilización de modelos lineales, debido a su simplicidad, dando lugar a técnicas que entroncan directamente con la regresión estadística. En este marco, métodos como ARX y sus variantes han tenido amplia difusión, estando incluso implementadas en paquetes de *software* matemático, p.ej. **Matlab** [67].

El instante en que se implementa la identificación. En algunas ocasiones, se dispone de un conjunto de datos, extraídos de las mediciones de un sistema, a partir de los cuales se desea obtener una estimación de los parámetros, que será un valor constante. En este caso, la estimación se realiza en *batch*, es decir, una sola vez tras haber finalizado la evolución del sistema. Por el contrario, cuando se obtiene una estimación variable, que evoluciona simultáneamente con el sistema, se habla de estimación *on-line*. Esta última es especialmente adecuada en dos ámbitos: cuando es preciso realizar el seguimiento de parámetros variables; y cuando el sistema evoluciona continuamente, en distintas situaciones, de forma que es necesario mantener indefinidamente el ajuste de la estimación. Los métodos on-line han de tener un coste computacional reducido ya que, en caso contrario, no podría realizarse la estimación a una velocidad suficiente, en comparación con la evolución dinámica del sistema.

En este capítulo se propone un nuevo método de identificación paramétrica de modelos en el espacio de estados, centrando las aportaciones en tres aspectos principales:

- Se formula el método sobre la base de las redes de Hopfield continuas. Al estar basado en sistemas continuos, el estimador propuesto permite tratar, de forma natural, el problema de la estimación on-line.
- Se realiza un análisis teórico de estabilidad y convergencia del nuevo método. Este análisis no se reduce trivialmente al ya conocido para las redes de Hopfield, pues la red neuronal que implementa el estimador posee pesos que varían con el tiempo.

- Se simula la aplicación del método a diversos sistemas mecánicos y epidemiológicos, comparándolo con el conocido método de gradiente. Los resultados de la simulación muestran la eficacia del estimador neuronal y confirman los hallazgos teóricos.

Estas aportaciones, que se han presentado en varias publicaciones [20, 16, 15, 22], se estructuran como sigue. En primer lugar, en la Sección 4.2, se realiza una revisión de métodos de identificación, con especial referencia a los métodos paramétricos on-line, así como alternativas recientemente propuestas basadas en técnicas de inteligencia computacional. También se fijan algunos aspectos de notación básicos para el resto del capítulo. A continuación, en la Sección 4.3, se formula el método de estimación de parámetros on-line sobre la base de la metodología de optimización con redes neuronales de Hopfield. Las propiedades de estabilidad y convergencia del método propuesto se estudian en la Sección 4.4. Dado que la red resultante tiene pesos variables con el tiempo, sus propiedades dinámicas son notablemente complejas, por lo que las demostraciones teóricas de la Sección 4.4 conforman una parte importante del capítulo. Las dos siguientes secciones ilustran el método propuesto con aplicaciones muy diferentes: sistemas mecánicos, en la Sección 4.5 y la evolución de la epidemia de VIH-SIDA en Cuba, en la Sección 4.6. En el segundo caso, se presentan varias peculiaridades, siendo la más importante la necesidad de adaptar el método para la identificación de un sistema definido en tiempo discreto. Una posible extensión a sistemas que no admiten la forma lineal en los parámetros se muestra en la Sección 4.7. Por último, la Sección 4.8 recoge las conclusiones del capítulo.

4.2. Revisión bibliográfica de identificación

4.2.1. Identificación clásica y notación

Una de las mayores dificultades a la hora de hacer una revisión bibliográfica en el campo de la identificación, es la variedad de enfoques que se han aplicado a este problema. Una parte significativa de las aportaciones vienen del campo

de la teoría de la señal, con un marcado énfasis en los aspectos estadísticos [66]. Otra corriente estudia los métodos de identificación como auxiliares para ser incluidos en un sistema de control adaptativo [95, 70]. Muchos resultados importantes han aparecido referidos a aplicaciones concretas, por ejemplo en el campo de la robótica [99], aunque podrían ser extendidos a casos más generales. Por último, algunos autores hacen énfasis en los aspectos de implementación algorítmica, analizando los métodos iterativos de resolución y, por tanto, adoptando la nomenclatura y las técnicas del análisis numérico [96].

Centrando el estudio en la estimación paramétrica on-line, los principales métodos clásicos pueden clasificarse en dos grandes grupos: las técnicas de mínimos cuadrados y el método de gradiente. Las técnicas de mínimos cuadrados (*Least Squares*, LS) tienen una larga historia, ya que se remontan a los trabajos de Laplace, Legendre y Gauss a principios del siglo XIX¹. En principio, el método LS se formula en batch y, a pesar de haber sido extensamente investigado y haberse propuesto diversas variantes [66], la aplicación del método LS a estimación on-line es aún una cuestión abierta. Por su parte, el método de gradiente [95, 99] se ha utilizado ampliamente en el contexto del control adaptativo [70, 72] ya que, en principio, resulta adecuado para realizar estimación on-line.

A continuación se formula matemáticamente el problema de la identificación paramétrica de sistemas dinámicos, fijando la notación para el resto del capítulo. Posteriormente, se describe brevemente el método de gradiente y sus limitaciones. Para formular un método de identificación, se parte de un sistema dinámico general², del que se supone conocido un modelo:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\theta}(t)) \quad (4.1)$$

donde $\mathbf{x}$ es el vector de estados del sistema, $\mathbf{u}$ es un vector de entradas³ y $\boldsymbol{\theta}$

¹Legendre publica su trabajo en 1805, pero ya en septiembre de 1801 Gauss menciona el método al calcular el ajuste de los datos observados a la trayectoria elíptica de un asteroide.

²A menudo, el sistema se denomina *planta* en la literatura de ingeniería de control.

³A lo largo de este capítulo se reserva la letra u para representar la entrada al sistema, como es habitual en los textos de control, mientras que el potencial de la neurona i se denota p_i .

es un vector de parámetros cuyo valor numérico se desconoce. Nótese que, por simplicidad de notación, la dependencia del tiempo se ha omitido y, salvo que se quiera enfatizar explícitamente, se omitirá en la sucesivo. El objetivo de la estimación es producir una trayectoria de valores estimados $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$, de forma que se minimice, en cada instante t , el *error de estimación*:

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (4.2)$$

Dado que este error es desconocido, ya que en su definición aparece el propio valor de los parámetros que se desean estimar, la mayoría de los métodos utilizan como medida de la bondad de la estimación el *error de predicción* de la salida:

$$\mathbf{e} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (4.3)$$

donde el término $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ es la salida predicha, es decir, la salida que proporcionaría el sistema si el valor estimado de los parámetros fuera el correcto.

El método de gradiente se basa en una idea sencilla de exponer: la estimación debe evolucionar en el sentido y dirección en que disminuya el error de predicción. Es un hecho conocido del análisis matemático, que la dirección de máxima pendiente de una función vectorial viene dada por el gradiente, con signo negativo si la pendiente debe ser en sentido descendente. Por tanto, el método de gradiente queda definido por la siguiente ecuación dinámica:

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = -\frac{k}{2} \nabla (\mathbf{e}^\top \mathbf{e}) \quad (4.4)$$

donde $\mathbf{e}$ se considera función de la estimación $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ y k es una constante de proporcionalidad. Obsérvese que la expresión $\mathbf{e}^\top \mathbf{e}$ no es más que la norma del vector $\mathbf{e}$, elevada al cuadrado para que forme una función derivable con respecto a cada variable $\hat{\theta}_i$.

En muchas ocasiones, por ejemplo en el campo de la robótica, la ecuación de un sistema dinámico puede reorganizarse de forma que la dependencia de los parámetros sea lineal y, en este caso, decimos que el sistema está en la forma *lineal en los parámetros* (*Linear In the Parameters*, LIP). El presente trabajo se restringe a sistemas en la forma LIP, a excepción de la Sección 4.7 que

estudia una extensión del método propuesto a sistemas no-LIP. Es importante mencionar que la linealidad se refiere a la dependencia de los parámetros, pero que el sistema en sí presenta una dinámica *no lineal*, por lo que la restricción a sistemas LIP no supone que el problema de la identificación sea en modo alguno trivial.

En el caso LIP, la ecuación del sistema dinámico resulta ser:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) (\boldsymbol{\theta}^{\text{nom}} + \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{c}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (4.5)$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz y $\mathbf{c}$ un vector, ambos independientes de los parámetros $\boldsymbol{\theta}$. Un importante aspecto de notación es la introducción del vector de parámetros nominales $\boldsymbol{\theta}^{\text{nom}}$ en la Ecuación (4.5). Este vector $\boldsymbol{\theta}^{\text{nom}}$, supuesto conocido al comenzar la estimación, debe corresponder al valor más probable a priori de los parámetros. De esta forma, la magnitud estimada corresponde, en realidad, a la desviación del nominal, en lugar de a los verdaderos parámetros. La introducción de los valores nominales tiene la ventaja de que las estimaciones permanecen acotadas en un intervalo centrado en cero que, como se verá posteriormente, es el posible rango de soluciones dadas por la red de Hopfield. Para simplificar aún más la notación, pueden agruparse todos los términos que no contienen parámetros en un vector $\mathbf{y}$, de forma que la ecuación del sistema dinámico queda como:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) (\boldsymbol{\theta}^{\text{nom}} + \boldsymbol{\theta}) \quad (4.6)$$

Obsérvese que esta ecuación tiene el aspecto formal de una relación (lineal) entrada-salida de los parámetros al vector $\mathbf{y}$ que, por esta razón, en ocasiones será denominado *vector de salida*. No obstante, esto no implica que $\mathbf{y}$ deba corresponder a la salida física del sistema, sino que se ha introducido arbitrariamente con el único objeto de que la manipulación algebraica dé lugar a la forma estándar de la Ecuación (4.6). Por su parte, el error de predicción viene dado, en el caso LIP, por:

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) (\boldsymbol{\theta}^{\text{nom}} + \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (4.7)$$

En lo sucesivo se omitiré, por simplicidad, la dependencia de $\mathbf{A}$ de los vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{u}$. Combinando las Ecuaciones (4.6) y (4.7) con la definición del error de estimación dado en la Ecuación (4.2), se obtiene una relación matricial entre ambos errores:

$$\mathbf{e} = \mathbf{A} (\boldsymbol{\theta}^{\text{nom}} + \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{A} (\boldsymbol{\theta}^{\text{nom}} + \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{A} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{A} \tilde{\boldsymbol{\theta}} \quad (4.8)$$

Habitualmente, el método de gradiente se usa para la estimación de parámetros en sistemas que están en la forma LIP, por lo que resulta conveniente reescribir la Ecuación (4.4) en el caso LIP. En primer lugar, obsérvese que, por la Ecuación (4.8), se tiene que $\mathbf{e}^\top \mathbf{e} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \tilde{\boldsymbol{\theta}}$, lo que muestra que $\mathbf{e}^\top \mathbf{e}$ es una forma cuadrática respecto al vector $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$, definida por la matriz simétrica $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$. Por tanto, según el Lema B.5, el gradiente de $\mathbf{e}^\top \mathbf{e}$ respecto al vector $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ es $2 \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \tilde{\boldsymbol{\theta}}$. Por otra parte, por la definición del vector $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$, Ecuación (4.2), y dado que el valor de los parámetros no depende de la estimación, se tiene la igualdad:

$$\frac{\partial (\mathbf{e}^\top \mathbf{e})}{\partial \hat{\theta}_i} = \frac{\partial (\mathbf{e}^\top \mathbf{e})}{\partial \tilde{\theta}_i} \frac{\partial \tilde{\theta}_i}{\partial \hat{\theta}_i} = - \frac{\partial (\mathbf{e}^\top \mathbf{e})}{\partial \tilde{\theta}_i} \quad (4.9)$$

Por tanto, el gradiente de $\mathbf{e}^\top \mathbf{e}$ respecto a la estimación $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, es el mismo que con respecto a $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$, cambiado de signo, es decir, $\nabla (\mathbf{e}^\top \mathbf{e}) = -2 \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \tilde{\boldsymbol{\theta}}$. Sustituyendo en la Ecuación (4.4), el método de gradiente queda, en el caso LIP, como:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} &= -\frac{k}{2} \nabla (\mathbf{e}^\top \mathbf{e}) = -\frac{k}{2} (-2 \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \tilde{\boldsymbol{\theta}}) = k \mathbf{A}^\top \mathbf{e} \\ &= k \mathbf{A}^\top (\mathbf{y} - \mathbf{A} (\boldsymbol{\theta}^{\text{nom}} + \hat{\boldsymbol{\theta}})) \\ &= k \left[-(\mathbf{A}^\top \mathbf{A} \boldsymbol{\theta}^{\text{nom}} - \mathbf{A}^\top \mathbf{y}) - \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \hat{\boldsymbol{\theta}} \right] \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde la tercera igualdad resulta de la Ecuación (4.8); la cuarta hace uso de la Ecuación (4.7); y la quinta es una mera manipulación algebraica. Obsérvese que la Ecuación (4.10) es una ecuación diferencial *lineal*, aunque de coeficientes variables, ya que en la definición de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{y}$ intervienen las entradas $\mathbf{u}$ y los estados $\mathbf{x}$. El principal inconveniente del método de gradiente es la dificultad del ajuste de la constante k . En principio, parece lógico pensar que una valor

alto incrementa la velocidad de convergencia y, por tanto, disminuye más rápidamente el error de estimación. Efectivamente, esto es así hasta cierto punto, pero si el valor de k es excesivamente grande, pueden producirse violentas oscilaciones que perjudican la eficiencia de estimación [99]. En consecuencia, para cada aplicación debe realizarse una elección de k por prueba y error que no siempre proporciona los resultados deseados.

4.2.2. Identificación con inteligencia computacional

Como se ha visto en la sección anterior, los métodos clásicos de identificación presentan ciertas limitaciones. En concreto, las técnicas de mínimos cuadrados tienen dificultades para realizar identificación on-line, mientras que el método de gradiente requiere un ajuste empírico de la ganancia. A la vista de estas limitaciones, en las últimas dos décadas se han propuesto múltiples alternativas, a menudo basadas en las técnicas de *Inteligencia Computacional*. En el campo de las Redes Neuronales, desde el artículo fundacional de Narendra y Parthasarathy [77], se han publicado literalmente cientos de contribuciones, hasta el punto de que algunos autores la consideran una disciplina madura para su aplicación industrial [49]. Sin embargo, la mayoría de las aportaciones están basadas en redes multicapa que precisan algoritmos de aprendizaje de alto coste computacional, lo que resulta inviable en la estimación on-line. Así por ejemplo, en [29] se realiza una revisión de la identificación neuronal centrada en el perceptrón multicapa y las redes de base radial, en [86] se estudian las redes de Elman y Jordan, mientras que la más reciente [79] se basa exclusivamente en el perceptrón, haciendo mayor énfasis en las aplicaciones posibles. Por su parte, en [87] se presenta un estimador que no precisa aprendizaje, pero se trata de una identificación de "caja negra", que no proporciona el valor numérico de los parámetros. Todos estos textos, especialmente el último, contienen numerosas referencias, mereciendo citarse los trabajos del grupo de Christodoulou [64]. Es interesante mencionar una línea de trabajo distinta [117, 30], en la que se emplean redes neuronales para obtener un controlador por linealización [78] de un sistema desconocido, aunque no se obtiene explícitamente un modelo del sistema. También es necesario continuar el estu-

dio de la complejidad de los algoritmos de control neuronal [50]. Una reciente línea de investigación [90, 89] se asemeja a la nuestra en el sentido de utilizar modelos parcialmente conocidos, pero la incertidumbre no se presenta en forma de parámetros desconocidos, sino de funciones no lineales que se aproximan mediante redes multicapa, existiendo nuevamente el problema del coste computacional.

A raíz del éxito de las técnicas de control borroso (véase, por ejemplo, [32, 82]), se diseñaron métodos de identificación, fundamentados principalmente en los trabajos de Takagi y Sugeno [106]. Se han publicado tanto aplicaciones a diversos problemas [5, 92], como resultados rigurosos [108, 116], si bien el modelo resultante consiste en un conjunto de reglas borrosas, aptas para integrarse en un sistema de control borroso, pero que no proporcionan el valor numérico de los parámetros. Es interesante mencionar que muchas de estas aplicaciones [63, 118] incluyen un componente neuronal, dando lugar a prometedoras técnicas híbridas.

Por último, cabe reseñar algunas aportaciones en el marco de los algoritmos genéticos [6, 68, 84], si bien su alto coste computacional resulta de nuevo un obstáculo insalvable para su utilización en sistemas on-line. También en este caso se observa una marcada tendencia hacia la aparición de modelos híbridos [85, 36] con componentes genéticos, neuronales y borrosos.

4.3. Formulación de la red neuronal de Hopfield para estimación de parámetros

Como se vio en la sección anterior, aparecen dificultades en el funcionamiento on-line de los métodos actuales de estimación de parámetros. En esta sección se propone un nuevo método cuya idea clave es combinar dos hechos fundamentales: la estimación de parámetros puede formularse como la minimización del error de predicción, definido en la Ecuación (4.3); y las redes de Hopfield son capaces de resolver problemas de optimización. Aunque cabría la posibilidad de aplicar a este problema un método clásico de optimización, estos métodos, en principio, no son adecuados cuando la función objetivo varía

con el tiempo. En cambio, las redes neuronales de Hopfield constituyen algoritmos de optimización cuya formulación se realiza de manera natural en tiempo continuo, de forma que su aplicación al problema de la estimación parece natural.

Para presentar el método propuesto, se recuerda, por facilidad de referencia, la metodología de optimización con redes de Hopfield expuesta en capítulos anteriores. La dinámica de una red de Hopfield de primer orden, en la formulación de Abe [1], viene dada por el siguiente sistema de EDOs:

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_{j=1}^n w_{ij} s_j - b_i; \quad s_i = \tanh\left(\frac{p_i}{\beta}\right) \quad i = 1 \dots n \quad (4.11)$$

donde p_i es el potencial de la neurona i (denominado u_i en anteriores capítulos). Los resultados de los Capítulos 1 y 2 permitían concluir que esta formulación es adecuada para resolver problemas de optimización donde la función objetivo tiene la forma:

$$V = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_j w_{ij} s_i s_j + \sum_i b_i s_i = -\frac{1}{2} \mathbf{s}^\top \mathbf{W} \mathbf{s} + \mathbf{s}^\top \mathbf{b} \quad (4.12)$$

Por otra parte, considérese un sistema dinámico, en la forma lineal en los parámetros, como en la Ecuación (4.6), y se define la función objetivo dada por el cuadrado de la norma del error de predicción $V = \frac{1}{2} \|\mathbf{e}\|^2$ que, tras algunos cálculos, resulta:

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{e}^\top \mathbf{e} = \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\theta}}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\boldsymbol{\theta}}^\top \left(\mathbf{A}^\top \mathbf{A} \boldsymbol{\theta}^{\text{nom}} - \mathbf{A}^\top \mathbf{y} \right) + \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A} \boldsymbol{\theta}^{\text{nom}}\|^2 \quad (4.13)$$

donde el último sumando no depende de la estimación $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ y, por tanto, es despreciado. Obsérvese la coincidencia estructural de las dos últimas ecuaciones, lo que sugiere la definición de una red de Hopfield cuyos estados $\mathbf{s}$ representan en cada instante la estimación propuesta $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, y cuyos pesos y bias vienen dados por:

$$\mathbf{W} = -\mathbf{A}^\top \mathbf{A} \quad \mathbf{b} = \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \boldsymbol{\theta}^{\text{nom}} - \mathbf{A}^\top \mathbf{y} \quad (4.14)$$

Es interesante observar que la red propuesta, obtenida por un razonamiento totalmente distinto, da lugar a la misma Ecuación (4.10) que define el método de gradiente, si bien con dos diferencias fundamentales: en el sistema de Hopfield ya no aparece la constante k ; y en la ecuación de los estados de la red neuronal aparece la función tangente hiperbólica.

A la hora de realizar la implementación del método propuesto, deben tenerse en cuenta sus características, algunas de las cuales ya se observan en la definición:

- No aparece la constante de ganancia k , cuyo ajuste es uno de las principales dificultades con el método de gradiente.
- Los pesos y bias de la red no son constantes, sino que varían en el tiempo, ya que en su definición aparecen la matriz $\mathbf{A}$ y el vector $\mathbf{y}$ que a su vez dependen de los estados y entradas del sistema. Este hecho incrementa notablemente la complejidad del estudio de la estabilidad del método, al que se dedica la siguiente sección.
- La presencia de la función tangente hiperbólica, conlleva que los estados de la red (y, por tanto, las posibles soluciones) estén restringidos al hipercubo unitario: $\hat{\boldsymbol{\theta}} \in [-1, 1]^n$. Por tanto, para que la red alcance una solución correcta, es preciso que ésta esté acotada. Si el rango de los parámetros no coincide con el intervalo $[-1, 1]$, puede aplicarse una transformación de escala, junto con la definición de valores nominales, pero, en todo caso, debe conocerse a priori el rango de posible existencia de los valores de los parámetros. En el caso de los sistemas mecánicos, este requerimiento no tiene excesiva trascendencia, ya que los parámetros representan magnitudes físicas (masas, longitudes, etc.) de las que es habitual conocer un rango de existencia. En contrapartida, se obtiene la importante ventaja de que la estimación permanece acotada, a diferencia del método de gradiente, que a menudo debe ser complementado con algoritmos de normalización o proyección [95], que incrementan el coste computacional y dificultan el estudio teórico de la estabilidad.

También resulta notable que, a diferencia de las redes de Hopfield en su formulación habitual, la red adaptada a estimación posee autopesos, es decir, los elementos diagonales w_{ii} de la matriz $\mathbf{W}$ no son nulos. La ausencia de autopesos era requerida en los problemas de optimización combinatorial, ya que garantizaba que las soluciones se daban en los vértices, como se demostró en el Capítulo 2. En cambio, la solución del problema de estimación ocurre en un punto interior, por lo que la aparición de autopesos es *necesaria*.

4.4. Análisis de estabilidad y convergencia

Una vez formulado, en la sección anterior, el método de estimación mediante redes de Hopfield, es preciso analizar la estabilidad del sistema obtenido. Este análisis no se reduce al visto en capítulos anteriores, ya que el estimador neuronal presenta varias características distintivas frente a las redes de Hopfield estándar. Por una parte, a diferencia de lo habitual en los problemas de optimización combinatorial, el óptimo buscado no se encuentra en un vértice del hipercubo, sino en un punto interior. La existencia de puntos interiores estables, que parece contradecir lo establecido en el Capítulo 2, se debe a la aparición de autopesos como se observa en la Ecuación (4.14). Por otra parte, y más importante, está el hecho de que los pesos dependen de la matriz $\mathbf{A}$ que, a su vez, depende del estado dinámico del sistema $\mathbf{x}$. Por tanto, los pesos son variables en el tiempo y, en consecuencia, la red propuesta es un sistema *no autónomo*⁴. Es sabido que el análisis de la estabilidad de los sistemas no autónomos es considerablemente más complicado que el de las ecuaciones autónomas (véase, por ejemplo, [112]), no obstante se obtendrán resultados que proporcionen una visión cualitativa del comportamiento del método propuesto. Para ello, se hará a menudo referencia a los resultados incluidos en el Apéndice A.

A continuación, se realizan algunos cálculos previos que nos permitirán aplicar la teoría de la estabilidad al método de identificación propuesto. En primer lugar, se expresa el estimador neuronal, dado por la Ecuación (4.11),

⁴También llamado *no estacionario* o simplemente *variable en el tiempo*.

como una única EDO mediante la aplicación de la regla de la cadena de la derivación

$$\begin{aligned}\frac{ds_i}{dt} &= \frac{ds_i}{dp_i} \frac{dp_i}{dt} = \frac{1}{\beta} \left(1 - \tanh^2 \left(\frac{p_i}{\beta} \right) \right) \left(\sum_j w_{ij} s_j - b_i \right) \\ &= \frac{1}{\beta} (1 - s_i^2) \left(\sum_j w_{ij} s_j - b_i \right)\end{aligned}\tag{4.15}$$

que, en forma vectorial, y teniendo en cuenta que los estados $\mathbf{s}$ de la red neuronal representan en cada instante la estimación $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, resulta:

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = \frac{1}{\beta} \mathbf{D} (\mathbf{W} \hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{b})\tag{4.16}$$

donde la matriz diagonal $\mathbf{D} = (d_{ij})$ viene dada por

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 - \hat{\theta}_i^2 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}\tag{4.17}$$

estando los pesos $\mathbf{W}$ y bias $\mathbf{b}$ definidos según la Ecuación (4.14).

El método propuesto se evalúa en función de su habilidad para disminuir el error de estimación, dado en la Ecuación (4.2), por lo que estudiaremos el sistema dinámico que define la evolución de este error:

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} - \frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} - \frac{1}{\beta} \mathbf{D} (\mathbf{W} \hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{b})\tag{4.18}$$

Esta ecuación puede simplificarse sustituyendo la definición de los pesos según la Ecuación (4.14), obteniendo la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{\boldsymbol{\theta}}}{dt} &= \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} - \frac{1}{\beta} \mathbf{D} \left(-\mathbf{A}^\top \mathbf{A} \hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \boldsymbol{\theta}^{\text{nom}} + \mathbf{A}^\top \mathbf{y} \right) \\ &= \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} - \frac{1}{\beta} \mathbf{D} \mathbf{A}^\top \left(-\mathbf{A} \left(\hat{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\theta}^{\text{nom}} \right) + \mathbf{y} \right)\end{aligned}\tag{4.19}$$

$$= \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} - \frac{1}{\beta} \mathbf{D} \mathbf{A}^\top \mathbf{e} = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} - \frac{1}{\beta} \mathbf{D} \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \tilde{\boldsymbol{\theta}}$$

donde se han usado las dos expresiones para el error de predicción, Ecuaciones (4.7) y (4.8).

El objetivo del resto de esta sección es evaluar la eficiencia del estimador propuesto, demostrando que el error de estimación es “pequeño”, en algún sentido que es necesario precisar formalmente desde el punto de vista dinámico. Así, podrán aparecer varias clases de comportamiento, según se impongan al sistema requisitos más o menos exigentes.

- Si se asume que los parámetros son constantes, se podrá demostrar que el error de estimación converge hacia un punto, aunque no necesariamente el origen, es decir: $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\boldsymbol{\theta}} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}_\infty$. Este comportamiento garantiza, al menos, que el error de predicción de salida converge a cero, como se verá en la Sección 4.4.2, si bien la posibilidad de que el error de estimación se mantenga en un valor elevado no es satisfactoria.
- En el caso más restrictivo, además de exigir que los parámetros sean constantes, se asume que el sistema presenta la propiedad de *excitación persistente*, tal como se definirá en su momento. Entonces, puede probarse que el error de estimación es asintóticamente estable, es decir, converge a cero: $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}$. Éste es el comportamiento más favorable del estimador, pues garantiza la obtención del valor correcto de los parámetros, siempre que se deje transcurrir un tiempo suficiente para permitir la convergencia de la estimación.
- Una vez asumida la condición de excitación persistente, si se admite la posibilidad de parámetros variables, se podrá probar que el error de estimación, a partir de un cierto instante, permanece acotado en un entorno del origen, es decir, $\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\| < C \ \forall t > T$. Aunque este comportamiento no garantiza la obtención de estimaciones exactas, su importancia se deriva de que el valor de la cota C puede manipularse con un diseño adecuado del estimador. Por tanto, de acuerdo con el análisis realizado en la Sección 4.4.3, cuando la eficiencia del estimador no es adecuada, se dispone de criterios de diseño para optimizarlo.

Una definición formal de los conceptos de estabilidad y estabilidad asintótica puede encontrarse en el Apéndice A o, con más detalle, en los textos de teoría de sistemas dinámicos [45, 112, 62].

4.4.1. Estabilidad con parámetros constantes

En esta sección se asume que el valor real de los parámetros $\boldsymbol{\theta}$ es constante, es decir, $\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} = \mathbf{0}$, con lo que la Ecuación (4.19), que rige la dinámica del error, se reduce ahora a:

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = -\frac{1}{\beta} \mathbf{D}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{A}^\top(t) \mathbf{A}(t) \tilde{\boldsymbol{\theta}} \quad (4.20)$$

donde se ha mostrado explícitamente la dependencia, bien del tiempo, bien del error, para enfatizar la naturaleza no autónoma del sistema. Con objeto de demostrar que el error converge a un punto fijo se utilizará el Lema A.5, para lo cual, la cuestión crítica es encontrar una función V que cumpla las condiciones de dicho lema. En particular, la condición más difícil de demostrar suele ser la negatividad de la derivada de V : $\frac{dV}{dt} \leq 0$. En lo sucesivo, esta derivada se calculará frecuentemente, haciendo uso de la regla de la cadena de la derivación:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial \tilde{\theta}_i} \frac{d\tilde{\theta}_i}{dt} = (\nabla V)^\top \frac{d\tilde{\boldsymbol{\theta}}}{dt} \quad (4.21)$$

A la hora de acometer la búsqueda de una función de Lyapunov para el sistema dado por la Ecuación (4.20), parece lógico comenzar intentando aplicar la función habitualmente usada para el estudio del método de gradiente [99]. Esta función es la norma del error al cuadrado, es decir, $V = \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \tilde{\boldsymbol{\theta}}$. Sin embargo, la derivada temporal de esta función, en el caso del estimador dado por la Ecuación (4.20), puede ser positiva. Para comprobarlo, se calcula en primer lugar el gradiente ∇V , observando que V es una forma cuadrática con respecto al vector $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$, definida por la matriz identidad dividida por dos. Por tanto, según el Lema B.5, el gradiente de V es $\nabla V = \tilde{\boldsymbol{\theta}}$, con lo que se obtiene la derivada temporal de V sustituyendo en la Ecuación (4.21):

$$\frac{dV}{dt} = (\nabla V)^\top \frac{d\tilde{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \frac{d\tilde{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = -\frac{1}{\beta} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \mathbf{D} \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \tilde{\boldsymbol{\theta}} \quad (4.22)$$

donde la última igualdad resulta al sustituir la dinámica del error según la Ecuación (4.20). Es fácil encontrar ejemplos numéricos para los que la anterior expresión es positiva, resultando $\frac{dV}{dt} \geq 0$, lo que impide aplicar los resultados estándar de estabilidad. En otras palabras, la norma del error de estimación no siempre decrece con el tiempo. Por tanto, se hace preciso buscar otra función candidata a ser función de Lyapunov, cosa que haremos mediante el *método del gradiente variable*, descrito en [62], pág. 120. Este método sugiere elegir primero una función vectorial $\mathbf{g}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$ tal que se cumpla:

$$\left(\mathbf{g}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})\right)^\top \left(\frac{d\tilde{\boldsymbol{\theta}}}{dt}\right) \leq 0 \quad (4.23)$$

y, a continuación, considerando esta función como el gradiente de V , obtener V por integración de las ecuaciones $\frac{\partial V}{\partial \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i} = g_i(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$, comprobando por último que la función V obtenida sea acotada inferiormente. Volviendo al estimador dado por la Ecuación (4.20), la elección más obvia para el gradiente es $\mathbf{g}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{D}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}$ ya que, entonces, resulta:

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{g}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})\right)^\top \left(\frac{d\tilde{\boldsymbol{\theta}}}{dt}\right) &= \left(\mathbf{D}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}\right)^\top \frac{d\tilde{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = -\frac{1}{\beta} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \mathbf{D}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \tilde{\boldsymbol{\theta}} \\ &= -\frac{1}{\beta} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \tilde{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{1}{\beta} \|\mathbf{A} \tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

La integración de la función $\mathbf{g}$ puede realizarse componente a componente, es decir, planteando la siguiente ecuación en una sola variable:

$$\frac{\partial V}{\partial \tilde{\theta}_i} = g_i(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{\tilde{\theta}_i}{1 - \tilde{\theta}_i^2} \quad (4.25)$$

cuya resolución es un simple ejercicio de integración, que se ha desarrollado en el Lema B.2, lo que sugiere la definición de la siguiente función, candidata

a ser función de Lyapunov:

$$\begin{aligned}
 V(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = & -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \ln \left[\left(1 - (\theta_i - \tilde{\theta}_i)\right)^{1-\theta_i} \left(1 + (\theta_i - \tilde{\theta}_i)\right)^{1+\theta_i} \right] \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \ln \left[(1 - \theta_i)^{1-\theta_i} (1 + \theta_i)^{1+\theta_i} \right]
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

El segundo sumando, que es constante, se ha incluido con objeto de que V sea siempre positiva, ya que es el valor mínimo del primer sumando, cambiado de signo, como se prueba en el Lema B.3, aunque, por simplicidad, también se podría haber sustituido por la cota $n \ln 2$ (ver Lema B.4). Incidentalmente, obsérvese que esta función es instrumental en las demostraciones que se presentan a continuación, pero no puede calcularse en la práctica ya que el verdadero valor de los parámetros $\boldsymbol{\theta}$, y por tanto, también el error de estimación, es desconocido.

En lo que sigue, mediante una secuencia de lemas, probaremos que la función V cumple las condiciones para la aplicación del Lema A.5, lo que demostrará la estabilidad del método. Comenzando con la primera condición, a saber, la acotación de V , se puede probar:

Lema 4.1.

La función V definida en la Ecuación (4.26) está acotada inferiormente.

Demostración. Por sustitución directa en la definición de V , se tiene $V(\mathbf{0}) = 0$ y, según el Lema B.3, $V(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) > V(\mathbf{0}) = 0$, $\forall \tilde{\boldsymbol{\theta}} \neq \mathbf{0}$. Se concluye la afirmación del lema. $\square$

Con respecto a la segunda condición del Lema A.5, la negatividad de la derivada temporal de V , ha de cumplirse como consecuencia del razonamiento que nos ha llevado a la construcción de V , Ecuación (4.24). Formalmente, tenemos:

Lema 4.2.

La derivada respecto al tiempo de la función V de la Ecuación (4.26) es semidefinida negativa.

Demostración. Por la forma en que ha sido construida la función V , o por cálculo directo, es evidente que:

$$\frac{\partial V}{\partial \tilde{\theta}_i} = \frac{\tilde{\theta}_i}{1 - \tilde{\theta}_i^2} \quad (4.27)$$

o, en forma matricial, $\nabla V = \mathbf{D}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}$. La derivada de V , según la Ecuación (4.21), se calcula como:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= (\nabla V)^\top \frac{d\tilde{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = -\frac{1}{\beta} \left(\mathbf{D}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}} \right)^\top \mathbf{D} \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \tilde{\boldsymbol{\theta}} \\ &= -\frac{1}{\beta} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \mathbf{D}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \tilde{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{1}{\beta} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \tilde{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{1}{\beta} \|\mathbf{A} \tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

donde la tercera igualdad es consecuencia de ser $\mathbf{D}$ una matriz diagonal, de forma que su inversa también es diagonal y, en particular, simétrica. Por otra parte, de esta misma expresión, se deduce inmediatamente que en el origen se anula la derivada:

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}=\mathbf{0}} = 0 \quad (4.29)$$

con lo que se concluye que $\frac{dV}{dt}$ es semidefinida negativa. $\square$

Finalmente, se procede a demostrar la continuidad uniforme de la derivada de V , para lo que, según la observación que sigue al Lema A.5, basta con demostrar la acotación de la derivada segunda. En el caso que nos ocupa, la derivada segunda es la derivada de la función $\Upsilon(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, t) = \frac{dV}{dt}$ que se calculó en la Ecuación (4.28), donde se observa que Υ es una forma cuadrática respecto al vector $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$, definida por la matriz simétrica $-\frac{1}{\beta} \mathbf{A}^\top \mathbf{A}$. Por tanto, según el Lema B.5, su gradiente viene dado por:

$$\nabla \Upsilon = -\frac{2}{\beta} \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \tilde{\boldsymbol{\theta}} \quad (4.30)$$

La derivada de Υ se calcula ahora directamente por la regla de la cadena, prestando atención al hecho de que Υ depende del tiempo no sólo a través de

$\tilde{\boldsymbol{\theta}}$, sino también por la matriz $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 V}{dt^2} &= \frac{d\Upsilon}{dt} = \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} + (\nabla \Upsilon)^\top \frac{d\tilde{\boldsymbol{\theta}}}{dt} \\
 &= -\frac{1}{\beta} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \frac{d\mathbf{A}^\top}{dt} \frac{d\mathbf{A}}{dt} \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \left(-\frac{2}{\beta} \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \tilde{\boldsymbol{\theta}} \right)^\top \left(-\frac{1}{\beta} \mathbf{D} \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \tilde{\boldsymbol{\theta}} \right) \\
 &= -\frac{1}{\beta} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \frac{d\mathbf{A}^\top}{dt} \frac{d\mathbf{A}}{dt} \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \frac{2}{\beta^2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \tilde{\boldsymbol{\theta}} \quad (4.31)
 \end{aligned}$$

Así pues, simplemente imponiendo al sistema a estimar los requisitos necesarios, podemos demostrar el siguiente lema:

Lema 4.3.

Sea un sistema dinámico en la forma LIP, como en la Ecuación (4.6), que cumple las siguientes condiciones:

1. *Todas las componentes de la matriz $\mathbf{A}$ son funciones derivables, con derivadas continuas, de los estados $\mathbf{x}$ y de la entrada $\mathbf{u}$.*
2. *La entrada $\mathbf{u}$ al sistema y su derivada temporal permanecen acotadas.*
3. *Si la entrada $\mathbf{u}$ es acotada en todo instante, entonces también permanecen acotados los estados y las salidas.*

Entonces la función $\frac{dV}{dt}$, donde V se ha definido en la Ecuación (4.26), es uniformemente continua respecto al tiempo.

Demostración. Las condiciones impuestas garantizan que todos los términos de la Ecuación (4.31) son acotados. En efecto, por la Condición 2, la entrada $\mathbf{u}$ es acotada. Por la Condición 3, también son acotados los estados. Por tanto, todas las componentes de la matriz $\mathbf{A}$ son acotadas en todo instante. Por otra parte, la derivada temporal de cada componente a_{ij} de la matriz $\mathbf{A}$, por la regla de la cadena, tendrá la forma de un producto:

$$\frac{da_{ij}}{dt} = \sum_k \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} + \sum_k \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_k} \frac{du_k}{dt} \quad (4.32)$$

donde las derivadas de las a_{ij} han de ser acotadas, por la Condición 1; las derivadas de las entradas u_k son acotadas, por la Condición 2; y las derivadas de los estados x_k también han de ser acotadas, ya que la Condición 3 impone la acotación de la salida $\mathbf{y}$ que depende de las derivadas de los estados. Por último, la estimación permanece acotada en el intervalo $[-1, 1]$, por la presencia de la tangente hiperbólica en la definición, lo que implica que el error de estimación es acotado y también lo es la matriz $\mathbf{D}$, dada su definición. En resumen, todos los términos de la Ecuación (4.31) son acotados, por lo que la derivada temporal de V es uniformemente continua. $\square$

Observación. Desde un punto de vista teórico, sería deseable relajar las condiciones del anterior Lema, y obtener un conjunto de condiciones mínimo y no redundante, por ejemplo, sustituyendo la Condición 1 por la continuidad Lipschitz de la matriz $\mathbf{A}$ respecto a los estados. En la práctica, sin embargo, este esfuerzo resulta poco productivo, ya que los sistemas encontrados habitualmente en aplicaciones prácticas y, en concreto, los sistemas presentados como ejemplos en el resto del capítulo, cumplen las condiciones enunciadas. Asimismo, la Condición 3 puede caracterizarse, de forma más compacta, mediante las definiciones de estabilidad en el sentido entrada-a-estado y en el sentido entrada-a-salida. Pensamos que ello no aporta nada desde el punto de vista de la claridad expositiva, dado que, por una parte, existen diferentes definiciones de estos conceptos de estabilidad y, por otra, estas definiciones requieren un elevado desarrollo matemático. La introducción de los necesarios conceptos avanzados del análisis funcional nos apartaría de la línea, más clara, de la estabilidad en el sentido de Lyapunov, que hemos seguido en todo el trabajo. No obstante, el lector interesado puede consultar los trabajos de Sontag sobre estabilidad entrada-a-estado [101, 102] o entrada-a-salida [103], o un resumen reciente en el texto de Khalil ([62], Capítulo 5).

Compilando todos los resultados de la sección, se prueba el siguiente

Teorema 4.1.

Sea un sistema dinámico en la forma LIP, como en la Ecuación (4.6), que cumpla las condiciones del Lema 4.3. Si los parámetros son constantes, la

estimación con redes de Hopfield converge a un valor finito, en el que se anula el error de predicción: $\mathbf{e} = \mathbf{0}$.

Demostración. En los Lemas 4.1, 4.2 y 4.3 se demuestra que se cumplen las condiciones del Lema A.5, con la función de Lyapunov V dada por la Ecuación (4.26). Por tanto, se concluye que el estado tiende a un valor finito y la derivada de V tiende a cero. Pero la expresión de esta derivada, Ecuación (4.28), no es más que $-\frac{1}{\beta}\|\mathbf{e}\|^2$, por tanto $\mathbf{e}$ se anula en este valor límite. $\square$

Observación. Aunque el anterior teorema exige que los parámetros sean constantes, puede considerarse también aplicable al caso de parámetros que varían repentinamente, siempre que el tiempo que transcurra entre saltos sea suficiente para permitir la convergencia de la estimación.

El modelo de la epidemia de VIH-SIDA, presentado en la Sección 4.6, es un ejemplo de un sistema al que es posible aplicar el Teorema 4.1. En las simulaciones, en particular, se observará que puede anularse el error de predicción aunque la estimación no converja al valor real del parámetro, mientras que, si el número de parámetros es reducido, la estimación es satisfactoria. La explicación teórica de este fenómeno se encuentra en la segunda observación tras el Teorema 4.2.

4.4.2. Convergencia de la estimación y excitación persistente

En la sección anterior se ha demostrado la convergencia del método a un punto, aunque este punto puede no corresponder a una estimación exacta. En otras palabras, es posible que el error de predicción se anule, $\|\mathbf{e}\| = 0$, pero no así el error de estimación, $\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\| \neq 0$, de forma que la estimación es incorrecta: $\boldsymbol{\theta} \neq \hat{\boldsymbol{\theta}}$. Es sabido que este problema, ya observado en otros métodos de estimación, puede ser solventado exigiendo requisitos adicionales al sistema, por ejemplo, si el sistema tiene entradas, se impone que éstas satisfagan la condición de *excitación persistente* [95] o que sean *señales suficientemente ricas* [76]. Dicho en forma poco rigurosa, estas condiciones equivalen a una especie de *no anulación*, a lo largo del tiempo, de los estados. Intuitivamente,

puede razonarse que, si las entradas no son suficientemente complejas, entonces el sistema no explora todo el espacio de estados, por lo que las observaciones que realiza el estimador no son suficientemente variadas para aprender el valor del parámetro.

Con objeto de garantizar la convergencia de la estimación al valor de los parámetros, se definirá una condición similar a la de excitación persistente, pero que, a diferencia de ésta, puede ser aplicada a sistemas con entradas o sin entradas. Desde un punto de vista matemático, la no convergencia a cero del error de estimación se debe a que no se ha demostrado que la derivada de la función de Lyapunov sea definida negativa, sino sólo semidefinida negativa. Dado que el error de predicción $\mathbf{e}$ sí converge a cero y viene dado por $\mathbf{e} = \mathbf{A}\tilde{\boldsymbol{\theta}}$, para garantizar que el error de estimación $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ también tienda al origen basta imponer que $\mathbf{A}$ sea, de alguna forma, distinta de cero, en el sentido que precisamos en el siguiente teorema:

Teorema 4.2.

Sea un sistema en la forma LIP, como en la Ecuación (4.6), que cumpla las condiciones del Lema 4.3. Sea la matriz $\mathbf{B}(t) = \mathbf{A}^\top(t) \mathbf{A}(t)$, donde $\mathbf{A}(t)$ viene dado en la Ecuación (4.6). Supóngase que, en todo instante t , los autovalores $\lambda_1(t) \dots \lambda_n(t)$ de la matriz $\mathbf{B}(t)$ están acotados inferiormente:

$$\lambda_i(t) \geq \lambda_{\min} > 0 \quad i = 1 \dots n, \quad \forall t \quad (4.33)$$

Entonces, si los parámetros son constantes, el método de estimación con redes de Hopfield converge al valor exacto de los parámetros.

Demostración. Ya se ha demostrado, en el Teorema 4.1, que el estimador converge a un valor finito y, además, la derivada de V tiende a cero. Esta derivada se calculó en la Ecuación (4.28):

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\beta} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \tilde{\boldsymbol{\theta}} \quad (4.34)$$

Dado que la matriz $\mathbf{B} = \mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ es simétrica, por el Lema A.7, tiene n autovalores reales, posiblemente repetidos. Consideremos, sin pérdida de generalidad,

que los autovalores, en cada instante t , están ordenados:

$$\lambda_1(t) \leq \lambda_2(t) \leq \dots \leq \lambda_n(t) \quad (4.35)$$

También por ser $\mathbf{B}$ simétrica, según el Teorema A.4, se cumple:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\beta} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \tilde{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{1}{\beta} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \mathbf{B} \tilde{\boldsymbol{\theta}} \leq -\frac{\lambda_1(t)}{\beta} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \tilde{\boldsymbol{\theta}} \leq -\frac{\lambda_{\min}}{\beta} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \tilde{\boldsymbol{\theta}} \quad (4.36)$$

Por el enunciado del teorema tenemos $\lambda_{\min} > 0$ y, dado que β es positivo, resulta, siempre que el error de estimación $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ no sea nulo:

$$\frac{dV}{dt} \leq -\frac{\lambda_{\min}}{\beta} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \tilde{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{\lambda_{\min}}{\beta} \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 < 0 \quad (4.37)$$

Es decir, los únicos puntos en los que se anula la derivada de V son aquéllos con $\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\| = 0$. Como la derivada de V tiende a 0, se concluye que el error de estimación $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ también tiende a $\mathbf{0}$. $\square$

Observación (1). La condición que hemos impuesto, $\lambda_i(t) > 0 \forall i \forall t$ es más restrictiva que otras que se encuentran en la literatura, ya que exige la *no anulación* de $\mathbf{B} = \mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ en todo momento. Compárese, por ejemplo, con la condición de excitación persistente definida en [99]:

$$\int_t^{t+T} \mathbf{B}(t) dt \geq \alpha \mathbf{1} \quad \forall t \quad (4.38)$$

siendo α , T constantes positivas y $\mathbf{1}$ la matriz identidad, condición que puede expresarse intuitivamente como una no anulación de $\mathbf{B}$ en promedio, pero permite que $\mathbf{B}$ se anule en algún instante. En las simulaciones que se realizarán posteriormente, se observa que la condición impuesta en el Teorema 4.2 no es necesaria, ya que se obtienen estimaciones satisfactorias sin que se haya demostrado $\lambda_i(t) > 0 \forall i \forall t$ para cada sistema particular. Por tanto, la debilitación de esta condición es una línea que requiere mayor investigación en el futuro.

Observación (2). Por lo que respecta a la comprobación de la condición $\lambda_{\min} >$

0 para un sistema concreto, no resulta nada fácil, al igual que ocurre con las condiciones similares encontradas en la literatura. Sin embargo, haremos algunas observaciones que indiquen, al menos de forma cualitativa, qué sistemas presentarán más dificultades para su identificación. Como se ha demostrado en el Teorema 4.1, el error de predicción $\mathbf{e}$ tiende a anularse en todos los casos, incluso aunque no se anule el error de estimación $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$. Dado que el error de predicción, según la Ecuación (4.8), puede expresarse como $\mathbf{e} = \mathbf{A}\tilde{\boldsymbol{\theta}}$, cualquier vector no nulo $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ que sea ortogonal a todas las filas de $\mathbf{A}$ daría lugar a $\mathbf{e} = \mathbf{0}$. Como $\mathbf{A}$ define la dinámica del sistema, parece razonable pensar que las filas de $\mathbf{A}$ serán linealmente independientes, ya que las salidas responden a magnitudes distintas. Por tanto, un error no nulo $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ debe ser un vector de dimensión n , ortogonal a m vectores independientes, siendo n el número de columnas de $\mathbf{A}$ y m su número de filas. Es evidente que tal vector no puede existir si $m \geq n$, pues si existiera permitiría formar una base de $m + 1$ vectores independientes en un espacio n -dimensional. Es decir, la condición $m \geq n$ basta para concluir que el error de estimación debe converger a cero. Si se observa que n es el número de parámetros a estimar y m el número de ecuaciones en la definición del sistema, se obtiene así una directriz para obtener una estimación convergente: si el número de parámetros es inferior al número de ecuaciones del sistema, entonces el error de estimación converge a cero. Por supuesto, ésta no es una condición necesaria, como se observa en las aplicaciones a sistemas mecánicos presentadas en el resto de este capítulo. Los resultados de las simulaciones de sistemas mecánicos son satisfactorios, aunque el número de ecuaciones es menor que el de parámetros, siempre que las entradas sean suficientemente complejas. Sin embargo, esta observación sí resultará muy útil en la estimación del modelo de la epidemia de VIH-SIDA ya que, al no tener entradas, no puede obligarse al sistema a tener una dinámica compleja mediante excitación persistente. En cambio, se obtienen resultados satisfactorios siempre que el número de parámetros a estimar sea reducido.

Los modelos de sistemas mecánicos, que se presentan en la Sección 4.5, son ejemplos de aplicación del Teorema 4.2. En las simulaciones, se observará que, introduciendo una señal de entrada suficientemente compleja, el error de esti-

mación converge a cero con bastante rapidez, en comparación con el método de gradiente.

4.4.3. Acotación del error en el caso de parámetros variables

Cuando el valor real de los parámetros varía con el tiempo, la estimación se hace mucho más difícil, dado que el estimador debe reflejar fielmente estas variaciones. Si el valor de los parámetros es constante a trozos, es decir, presenta saltos en ocasiones poco frecuentes y no varía entre salto y salto, entonces podemos considerar que en cada salto se tiene un sistema distinto, con parámetros constantes, y aplicar los resultados de la sección anterior. Un ejemplo de este comportamiento podría ser el brazo de un robot que suelta una carga. Sin embargo, si el valor de un parámetro se modifica de forma continua, introduce un nuevo efecto dinámico en el sistema que no puede ignorarse. Por ejemplo, esto ocurre con un coeficiente de fricción que evoluciona con la temperatura o una longitud que se modifica debido a vibraciones producidas por una perturbación externa.

En esta sección consideramos la situación en la que los parámetros se modifican continuamente, pero con variación acotada: $\left\| \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} \right\| \leq C$. Tal como en la sección anterior, asumimos la condición $\lambda_{\min} > 0$, similar a la de excitación persistente, siendo $\lambda_{\min}$ el mínimo autovalor de la matriz $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$, donde $\mathbf{A}$ define al sistema dinámico, mediante la Ecuación (4.6). Pretendemos ahora, con objeto de aplicar el Teorema A.3, encontrar una función escalar $V(\mathbf{x}, t)$ cuya derivada temporal sea negativa, *siempre que el estado esté fuera de un determinado entorno del origen*. Dado que no exigimos ahora que la derivada sea, ni siquiera, semidefinida negativa, podemos recurrir a una función de Lyapunov más sencilla que la usada en secciones anteriores. En concreto, usamos la función habitualmente encontrada en la literatura, que es la norma del error de estimación: $V = \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \tilde{\boldsymbol{\theta}}$. En primer lugar, observamos que la función V no depende explícitamente del tiempo, por lo que la primera condición de la Ecuación (A.9), en el Teorema A.3, se cumple trivialmente, con $\alpha_1(x) = \alpha_2(x) = \frac{1}{2} x^2$, ya que entonces se tiene $\alpha_1(\|\mathbf{x}\|) = V(\mathbf{x}, t) = \alpha_2(\|\mathbf{x}\|)$.

Por lo que respecta a la segunda condición, debemos calcular la derivada de V . Como en las secciones anteriores, consideramos el sistema dinámico cuyo estado es el error de estimación, pero ahora teniendo en cuenta la variación de los parámetros, de forma que la dinámica del error viene dada por la Ecuación (4.19). Entonces, la derivada de V es:

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{dV}{d\tilde{\boldsymbol{\theta}}} \right)^\top \left(\frac{d\tilde{\boldsymbol{\theta}}}{dt} \right) = \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \frac{d\tilde{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} - \frac{1}{\beta} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \mathbf{D} \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \tilde{\boldsymbol{\theta}} \quad (4.39)$$

Con respecto al primer sumando, no es más que el producto escalar del error de estimación por la derivada de los parámetros, estando esta última acotada por C , por lo que:

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} \leq \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\| \left\| \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} \right\| \leq C \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\| \quad (4.40)$$

Para estudiar el signo del segundo sumando, supongamos, por un momento, que la estimación se anula, $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}$ y, por tanto, $\mathbf{D} = \mathbf{1}$. Entonces, como se vio en la sección anterior, se tiene:

$$-\frac{1}{\beta} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \tilde{\boldsymbol{\theta}} \leq -\frac{\lambda_{\min}}{\beta} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \tilde{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{\lambda_{\min}}{\beta} \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 < 0 \quad (4.41)$$

La presencia de la matriz $\mathbf{D}$ introduce una perturbación en la expresión anterior, hasta el punto de que puede cambiar su signo. Sin embargo, por el Lema B.1, el espectro de la matriz $\mathbf{D} \mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ es, cualitativamente, como el de $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$, es decir, la matriz $\mathbf{D} \mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ es diagonalizable y todos sus autovalores son reales. Por continuidad (ver Apéndice D de [48]), si $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ está próximo a $\mathbf{0}$, digamos $|\hat{\theta}_i| < \hat{\theta}_{\max} \forall i$ con $\hat{\theta}_{\max} > 0$, entonces será $\mathbf{D} \approx \mathbf{1}$ y el producto será una ligera perturbación sobre el que se obtendría si fuera $\mathbf{D} = \mathbf{1}$, es decir:

$$-\frac{1}{\beta} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \mathbf{D} \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \tilde{\boldsymbol{\theta}} \approx -\frac{1}{\beta} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \tilde{\boldsymbol{\theta}} \quad (4.42)$$

y si medimos con una constante $\varepsilon > 0$ la magnitud de la perturbación, se puede escribir

$$-\frac{1}{\beta} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \mathbf{D} \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \tilde{\boldsymbol{\theta}} = \varepsilon \left(-\frac{1}{\beta} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \tilde{\boldsymbol{\theta}} \right) \leq -\frac{\varepsilon \lambda_{\min}}{\beta} \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 \quad (4.43)$$

Por tanto, siempre que $|\hat{\theta}_i| < \hat{\theta}_{max} \forall i$, se satisface:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} - \frac{1}{\beta} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \mathbf{D} \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \tilde{\boldsymbol{\theta}} \leq C \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\| - \frac{\varepsilon \lambda_{\min}}{\beta} \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 \\ &= \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\| \left(C - \frac{\varepsilon \lambda_{\min}}{\beta} \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\| \right) \end{aligned} \quad (4.44)$$

de manera que si el error cumple $\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\| > \frac{\beta C}{\varepsilon \lambda_{\min}}$ se tiene $\frac{dV}{dt} < -\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|$. Queda, así, desbrozada la demostración del siguiente teorema:

Teorema 4.3.

Sea un sistema en la forma LIP, como en la Ecuación (4.6), que cumpla las condiciones del Teorema 4.2, y en el que los parámetros varían con el tiempo con velocidad de variación acotada: $\left\| \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} \right\| \leq C$. Sea $\hat{\theta}_{max} > 0$ el máximo valor de la estimación tal que la expresión $-\frac{1}{\beta} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \mathbf{D} \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \tilde{\boldsymbol{\theta}}$ siga siendo negativa, es decir, que para un determinado valor de perturbación $\varepsilon > 0$, se cumple:

$$|\hat{\theta}_i| < \hat{\theta}_{max} \quad \forall i \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{\beta} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \mathbf{D} \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \tilde{\boldsymbol{\theta}} \leq -\frac{\varepsilon \lambda_{\min}}{\beta} \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 \quad (4.45)$$

Supóngase que se dan las siguientes condiciones:

- El valor de los parámetros permanece, en todo instante, acotado dentro de un intervalo $\theta_i \in \mathcal{I}_{\boldsymbol{\theta}} = [\theta_{min}, \theta_{max}] \quad \forall i$, siendo

$$\mathcal{I}_{\boldsymbol{\theta}} \subset [-\hat{\theta}_{max}, \hat{\theta}_{max}] \quad (4.46)$$

- Sea $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ el dominio de valores del error $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ permisibles según las anteriores condiciones, es decir, si $\tilde{\boldsymbol{\theta}} \in \mathcal{D}$ entonces se garantiza $|\hat{\theta}_i| < \hat{\theta}_{max} \quad \forall i$, siempre que se cumpla $\theta_i \in \mathcal{I}_{\boldsymbol{\theta}} \quad \forall i$. Sea B_r la máxima bola contenida en $\mathcal{D}$, que es no vacía, ya que puede tomarse

$$r = \min \left(\left| -\hat{\theta}_{max} - \theta_{min} \right|, \left| \hat{\theta}_{max} - \theta_{max} \right| \right) \quad (4.47)$$

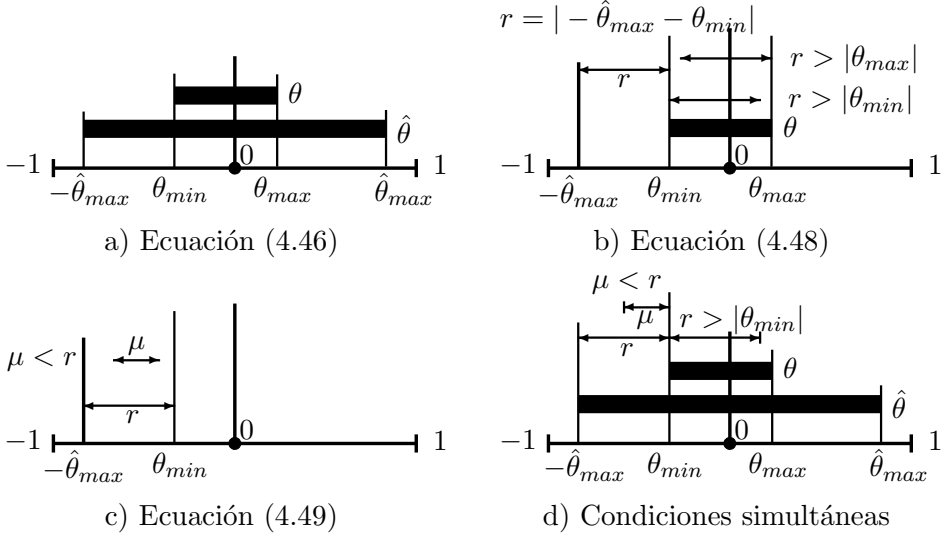


Figura 4.1: Representación esquemática de las hipótesis del Teorema 4.3. La gráfica d) muestra cómo es posible satisfacer simultáneamente todas las condiciones

y supongamos:

$$\max(|\theta_{\min}|, |\theta_{\max}|) < r \quad (4.48)$$

■ Sea $\mu = \frac{\beta C}{\varepsilon \lambda_{\min}}$ y supongamos que se cumple:

$$\mu < r \quad (4.49)$$

Entonces, tomando el origen como valor inicial del método de estimación con redes de Hopfield, el error de estimación permanece acotado por $\|\tilde{\theta}\| \leq \mu$, a partir de un instante $T > 0$.

Demostración. Se procede comprobando que se cumple cada una de las hipótesis del Teorema A.3. En primer lugar, la definición de $\mathcal{D}$ garantiza que puede definirse la función de Lyapunov $V = \frac{1}{2} \tilde{\theta}^\top \tilde{\theta}$, ya que, siempre que $\tilde{\theta} \in \mathcal{D}$, se cumplen las condiciones de la Ecuación (A.9) con $\alpha_1(x) = \alpha_2(x) = \frac{1}{2} x^2$, $W_3(x) = \|x\|$, como se calculó en el párrafo anterior. La definición de B_r garantiza $B_r \subset \mathcal{D}$. Además, al ser $\alpha_1 = \alpha_2$, por la hipótesis $\mu < r$ se tiene

$\mu < r = \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$. Por último, veamos que el error de estimación inicial cumple $\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t=0)\| \leq r = \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$. En efecto, como, por hipótesis, la estimación inicial es el origen, $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t=0) = \mathbf{0}$, resulta $\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t=0)\| = \|\boldsymbol{\theta}(t=0)\|$, y como los parámetros permanecen acotados en todo instante, es $\|\boldsymbol{\theta}(t=0)\| \in [\theta_{min}, \theta_{max}]$. Pero la condición $\max(|\theta_{min}|, |\theta_{max}|) < r$ tiene el sentido de que los parámetros no pueden alejarse del origen más de una distancia r y, en particular para $t=0$, $\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t=0)\| = \|\boldsymbol{\theta}(t=0)\| \leq r$, como queríamos demostrar. Se completan así las hipótesis del Teorema A.3, por lo que se concluye que, a partir de un instante T , el error está acotado por $\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\| \leq \mu = \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu))$ $\square$

Observación (1). Las Figuras 4.1.a), 4.1.b) y 4.1.c) representan una interpretación geométrica de las condiciones del anterior teorema, Ecuaciones (4.46), (4.48), (4.49), respectivamente. Asimismo, dado que cabe cuestionar la compatibilidad de las hipótesis del teorema, la Figura 4.1.d) muestra cómo es posible que todas las condiciones del teorema se satisfagan simultáneamente. Se estudiará, a continuación, en qué casos puede fallar alguna de las condiciones y, desde el punto de vista del diseño del estimador, se explicará qué características de diseño deben reajustarse para permitir la aplicación del teorema.

En primer lugar, puede ocurrir que la acotación de los parámetros sea excesivamente laxa, no satisfaciendo la Ecuación (4.46), como se observa en la Figura 4.2. Por supuesto, siempre será conveniente que el rango de variación de los parámetros sea conocido a priori con la mayor precisión posible. Este conocimiento podría obtenerse del sentido físico de los parámetros, mediante experimentos o métodos estadísticos. Pero si no es posible afinar más este rango, puede redefinirse el sistema con una reparametrización $\boldsymbol{\theta}' = k \boldsymbol{\theta}$, siendo $k < 1$. Este cambio de escala tiene el efecto de disminuir el tamaño del intervalo $\mathcal{I}_{\boldsymbol{\theta}}$, pudiendo así conseguirse $\mathcal{I}_{\boldsymbol{\theta}} \subset [-\hat{\theta}_{max}, \hat{\theta}_{max}]$.

Puede también darse el caso de que no se cumpla la condición (4.48), con el efecto de que el origen, que es el estado inicial, queda excesivamente lejos del valor real de los parámetros. Esta situación se representa en la Figura 4.3. También ahora, un mayor conocimiento a priori del sistema contribuye a solucionar este problema, no sólo, como antes, reduciendo el intervalo $\mathcal{I}_{\boldsymbol{\theta}}$,

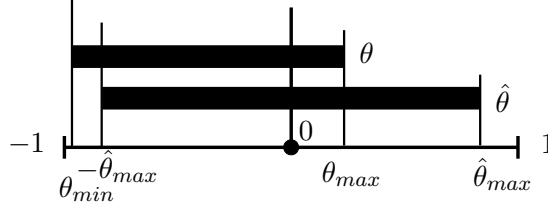


Figura 4.2: Se incumple la condición (4.46) del Teorema 4.3 porque el parámetro varía en un rango excesivamente amplio. Es preciso reescalar el parámetro

sino también “acercándolo” al origen, mediante una definición más precisa de los valores nominales θ^{nom} . Si no se dispone de este conocimiento, habrá que recurrir a reescalar el valor de los parámetros, como se explicó en el párrafo anterior.

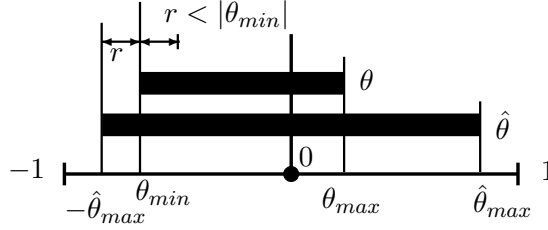


Figura 4.3: Se incumple la condición (4.48) del Teorema 4.3 porque el valor inicial queda excesivamente lejos del parámetro, que debe ser reescalado

Por último, la condición (4.49) puede incumplirse como resultado de un valor demasiado pequeño de r , o demasiado grande de μ , como se observa en la Figura 4.4. El primer caso es similar a la situación de los dos párrafos anteriores, sugiriendo que sería conveniente un mayor conocimiento del rango de variación de los parámetros y del valor nominal esperado, por lo que mejora con un cambio de escala de los parámetros. Más interesante aún es el segundo caso, tanto por el significado físico de las variables que están dando lugar a un valor alto de μ , como por la regla de diseño que se obtiene. En efecto, la definición de $\mu = \frac{\beta C}{\varepsilon \lambda_{\min}}$ sugiere que, o bien el valor de C es excesivo, o bien $\varepsilon \lambda_{\min}$ es demasiado pequeño. Como C es la cota de la derivada temporal

de los parámetros, un valor alto indica que la variación de los parámetros es demasiado rápida, y sería conveniente incorporar al modelo esta variación y considerarla parte de la dinámica del sistema. Por su parte, un valor pequeño de $\varepsilon \lambda_{\min}$, como se explicó en la Observación (2) al Teorema 4.2, es causado por una insuficiente complejidad de la entrada o por un número excesivo de parámetros a estimar. Con respecto al criterio de diseño del estimador, es claro que un valor reducido de β beneficia el cumplimiento de la condición $\mu < r$. Si bien, en teoría, β puede disminuirse cuanto sea preciso, en la práctica, un valor muy pequeño puede provocar grandes oscilaciones de la estimación, que serían indeseables, por ejemplo, si el estimador va a integrarse en un bucle de control. También, si β es muy pequeño, podrían aparecer inestabilidades numéricas en una implementación computacional del estimador. Sólo en estos casos críticos sería previsible la incapacidad del estimador neuronal de proporcionar una estimación adecuada, debido a la insuficiente información disponible a priori.

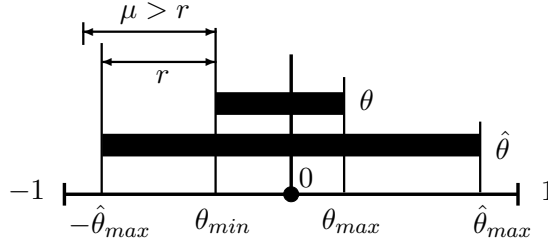


Figura 4.4: Se incumple la condición (4.49) del Teorema 4.3 porque el valor inicial queda excesivamente lejos del parámetro, que debe ser reescalado

Observación (2). Es importante resaltar que μ , aparte de aparecer en las condiciones del Teorema 4.3, resulta ser la cota del error de estimación. Por tanto, incluso aunque las hipótesis del teorema se satisfagan, es importante disminuir el valor de μ cuanto sea posible, pues se obtiene así una estimación más precisa de los parámetros.

Observación (3). Otra cuestión que plantea el Teorema 4.3 es la verificación práctica de sus hipótesis. En un sistema real no resultará fácil calcular $\lambda_{\min}$ ni, menos aún, ε y $\hat{\theta}_{\max}$, dada la forma no constructiva de su definición. El teorema, por tanto, no proporciona un método algorítmico de diseño, sino una

regla intuitiva que nos da una noción de cómo disminuir el error, mediante el cambio de escala de los parámetros y la disminución del valor de β . Además, el teorema saca a la luz aquellas características de los problemas que los harán especialmente “duros” para el estimador: desconocimiento del rango de los parámetros, variación de los parámetros demasiado rápida, falta de excitación persistente y excesivo número de parámetros a estimar.

4.5. Identificación de sistemas mecánicos

4.5.1. Identificación del modelo del brazo de un robot

Para ilustrar la eficacia del método propuesto, se aplicará a un modelo simplificado del brazo de un robot [104]. Es sabido que cualquier sistema mecánico puede ponerse en la forma LIP [99], por lo que puede aplicarse directamente el estimador neuronal propuesto en la sección anterior. La identificación de sistemas mecánicos ha recibido considerable atención, especialmente desde la aparición de algoritmos de linealización por retroalimentación [54, 78] que permiten aplicar las técnicas de control lineal, muy precisas, siempre que se disponga de un completo conocimiento del modelo de la planta.

El sistema que se utilizará como ejemplo [20] representa un manipulador idealizado con una única unión (Figura 4.5), que puede ser modelado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{\nu}{m l^2} x_2 + \frac{1}{m l^2} u\end{aligned}\tag{4.50}$$

donde x_1 es el ángulo que forma el manipulador con la vertical, x_2 es la velocidad angular, g es la aceleración gravitatoria, l es la longitud del manipulador, ν es el coeficiente de fricción, m es la masa desplazada en el extremo del brazo y u es el par aplicado por el motor, que podemos considerar una señal de control o entrada. Se observa que este modelo no es lineal en los parámetros

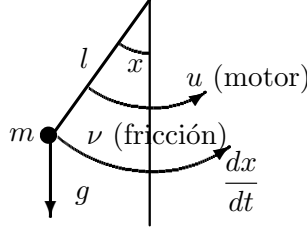


Figura 4.5: Modelo del brazo de un robot

físicos g , l , ν , m ; sin embargo, realizando las transformaciones

$$y = \frac{dx_2}{dt}$$

$$\boldsymbol{\theta}^{\text{nom}} + \boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} -\frac{g}{l} & -\frac{\nu}{m l^2} & \frac{1}{m l^2} \end{pmatrix}^{\top} \quad (4.51)$$

$$\mathbf{A} = (\sin x_1 \quad x_2 \quad u)$$

el modelo queda en la forma estándar $y = \mathbf{A} (\boldsymbol{\theta}^{\text{nom}} + \boldsymbol{\theta})$, como se vio en la Ecuación (4.6).

En la Tabla 4.1 se muestran los valores de los parámetros elegidos para simular el experimento. Se consideran conocidos unos determinados valores nominales de los parámetros que tienen significación física l , ν y m , asumiendo constante la gravedad g . Sin embargo, por errores de medida o variaciones impredecibles, el sistema está operando con unos valores reales distintos de los esperados, siendo esta desviación desconocida la que se pretende estimar. Además, para evaluar la capacidad del estimador para reaccionar a parámetros variables, supondremos que el sistema está sometido a una carga variable, que en el instante $t = 15 \text{ s}$ pasa bruscamente de ser 2 kg mayor que el valor nomi-

Tabla 4.1: Valores numéricos de los parámetros físicos

Parámetro	$g \text{ (m s}^{-2}\text{)}$	$l \text{ (m)}$	$\nu \text{ (kg m}^2 \text{ s}^{-1}\text{)}$	$m \text{ (kg)}$
Valor nominal	9,8	1	1	2
Valor real inicial	=	1,1	1,2	4
Valor real ($t = 15 \text{ s}$)	=	=	=	1

Tabla 4.2: Valores numéricos de los parámetros formales

Parámetro	θ_1	θ_2	θ_3
Valor nominal (θ^{nom})	-9,8	-0,5	0,5
Desviación real inicial ($\theta_{t=0}$)	0,89	0,25	-0,29
Desviación real en $t = 15 \text{ s}$ ($\theta_{t=15}$)	=	-0,49	0,33

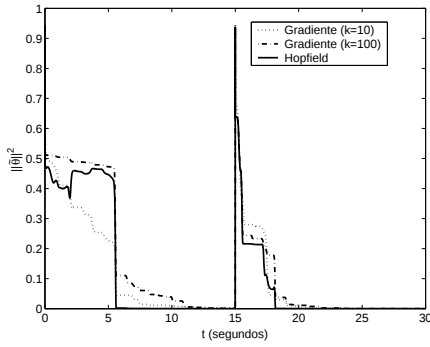
nal, a ser 1 *kg* menos que el valor nominal. Para pasar la ecuación a la forma lineal en los parámetros, se define un vector de parámetros formales θ , como se indicó en la Ecuación (4.51), resultando en los valores numéricos mostrados en la Tabla 4.2. Asimismo, se ha calculado un vector de valores nominales θ^{nom} correspondiente a los valores nominales de los parámetros físicos. Obsérvese, por tanto, que los valores θ producidos por el estimador no son los verdaderos valores de los parámetros, sino la desviación de los parámetros con respecto a sus valores nominales. Esta transformación se realiza con objeto de que la estimación correcta se mantenga en todo momento dentro del intervalo $[-1, 1]$, de forma que pueda ser alcanzada por los estados de la red neuronal que, por su propia dinámica, no pueden escapar del hipercono unitario. Con respecto a la inicialización de los estados de las neuronas, se realiza, por simplicidad, a valores nulos, es decir, la estimación inicial de la desviación es $\theta_{t=0} = \mathbf{0}$, por lo que los valores estimados de los parámetros coinciden, inicialmente, con los nominales. Esta elección, además, está justificada por ser el valor nominal el que se espera con la información disponible a priori, de forma que si no existieran errores de medida ni variaciones, los verdaderos valores de los parámetros coincidirían con los nominales.

Por lo que respecta a la señal de control u , por una parte, como mencionamos en la sección anterior, debe proporcionar excitación persistente. Por otra parte, no es conveniente que tenga excesiva amplitud. Estos dos criterios pueden lograrse definiendo la señal como suma de sinusoides desplazadas según la fase de Schroeder, introduciendo tres funciones sinusoidales en la suma, dado que deseamos estimar tres parámetros. En consecuencia, se adopta la siguiente

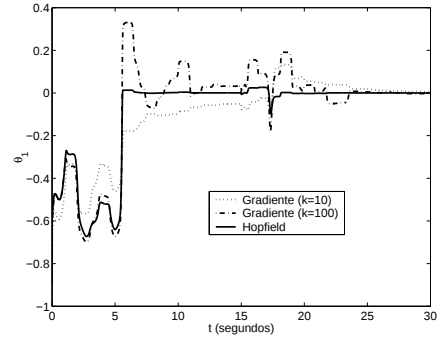
definición [66]:

$$u(t) = 2 (\sin(2t) + \sin(2t - 2\pi/3) + \sin(5t - 2\pi)) \quad (4.52)$$

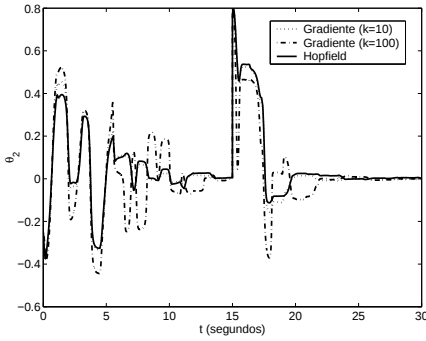
Se han simulado dos realizaciones del método de gradiente con ganancias $k = 10$ y $k = 100$, así como una red de Hopfield, en la que se adoptó arbitrariamente el valor $\beta = 0,01$. Las simulaciones se han implementado en el entorno **Matlab**, que hace uso de métodos numéricos muy eficientes, de tamaño de paso variable, para la solución numérica de las ecuaciones diferenciales. Se ha comparado la eficacia del nuevo algoritmo con el método de gradiente mediante representaciones gráficas, reunidas en la Figura 4.6. En la gráfica a) se muestra el cuadrado de la norma del error de estimación $\|\tilde{\theta}\|^2$ para los dos algoritmos de gradiente y para la red de Hopfield, observándose que la red neuronal obtiene resultados mejores que el método de gradiente con $k = 100$. Aunque la selección $k = 10$ mejora ligeramente la exactitud del estimador de gradiente, la red de Hopfield aún presenta menor error en la mayoría de los instantes. Asimismo, el error de estimación de la red neuronal se anula completamente después de un corto periodo transitorio. Esta rápida respuesta es una importante ventaja si el estimador se va a usar en sistemas que incluyen parámetros que varíen rápidamente, o en sistemas en tiempo real. Comparamos también la dinámica de los estimadores individualmente para cada uno de los tres parámetros, en las gráficas b), c) y d) de la Figura 4.6. A grandes rasgos, se observa un periodo transitorio, hasta aproximadamente $t = 5s$, durante el que los tres estimadores oscilan. Seguidamente, la red de Hopfield converge al valor real; el estimador de gradiente con $k = 100$ oscila repetidas veces; y el método de gradiente con $k = 10$ también converge, pero la convergencia es más lenta que con la red neuronal. Por ejemplo, en la gráfica b), de la estimación de θ_1 , ninguna de las realizaciones del método de gradiente se ha estabilizado en el valor real cuando ocurre la variación de carga en el instante $t = 15s$, mientras que el estimador neuronal proporcionaba error nulo desde el instante $t = 7s$. Este ejemplo ilustra el problemático ajuste de la ganancia k requerido por el método de gradiente, ya que un valor alto provoca un comportamiento



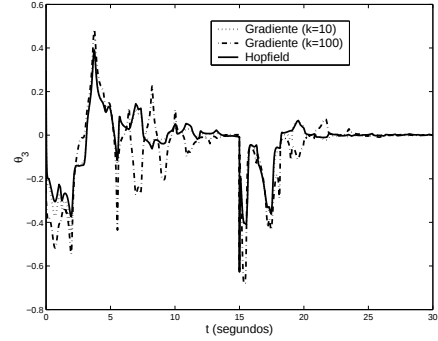
a) Norma del error de estimación



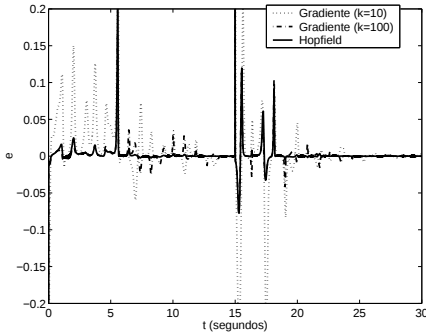
b) Estimaciones obtenidas para θ_1



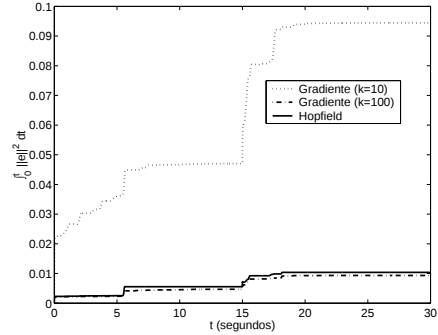
c) Estimaciones obtenidas para θ_2



d) Estimaciones obtenidas para θ_3



e) Errores de predicción



f) Integral de los errores de predicción

Figura 4.6: Identificación del brazo robótico. La estimación de la red de Hopfield, para cada parámetro individual, converge más rápido que el gradiente con $k = 10$ y oscila menos que con $k = 100$. El error de predicción de la red, integrado sobre el tiempo, es similar al gradiente con $k = 100$ e inferior a $k = 10$

oscilatorio indeseable, mientras que un valor pequeño conlleva una respuesta en exceso lenta. Como contraste, la red neuronal converge rápidamente y sus oscilaciones están adecuadamente amortiguadas. Esto último puede suponer una ventaja si el estimador es parte de un sistema de control adaptativo, ya que las oscilaciones podrían entrar en el bucle de control produciendo la pérdida de estabilidad global del controlador. Por último, se analiza el error de predicción, tal como se definió en la Ecuación (4.7). La comparación entre los tres algoritmos estudiados se muestra en la gráfica e). Dado que las diferencias son pequeñas en algunos casos, para mayor claridad de representación, se muestra en la gráfica f) la integral, a lo largo del tiempo, de estos errores. Tanto la red de Hopfield como el método de gradiente con $k = 100$ producen una predicción de la salida bastante buena, mientras que el gradiente con $k = 10$ acumula un error significativo, que se incrementa severamente después del cambio de carga producido en el instante $t = 15$ s.

En resumen, la simulación del manipulador ha mostrado que el algoritmo de estimación basado en redes neuronales de Hopfield, en comparación con el conocido método de gradiente, presenta una convergencia más rápida, así como una reducción de las oscilaciones. Por ello, proporciona una estimación paramétrica on-line bastante precisa que, asimismo, da lugar a una predicción de la salida con poco error.

4.5.2. Identificación del modelo de un brazo flexible

En esta sección se aplica el método propuesto de identificación neuronal a un sistema mecánico más complejo, al tiempo que se considera la posibilidad de parámetros que varíen de forma continua en el tiempo [15]. El sistema en estudio es un manipulador con un único brazo, pero en este caso se supone que el enlace presenta una cierta flexibilidad. Las estructuras flexibles resultan ser considerablemente más complicadas que los manipuladores rígidos, no obstante su estudio es necesario para obtener modelos realistas de los sistemas mecánicos. Por esta razón, los robots con uniones y brazos flexibles reciben cada vez más atención por parte de la comunidad científica (véase, por ejemplo [24] y otros artículos en el mismo número especial). Dado que el interés de la simula-

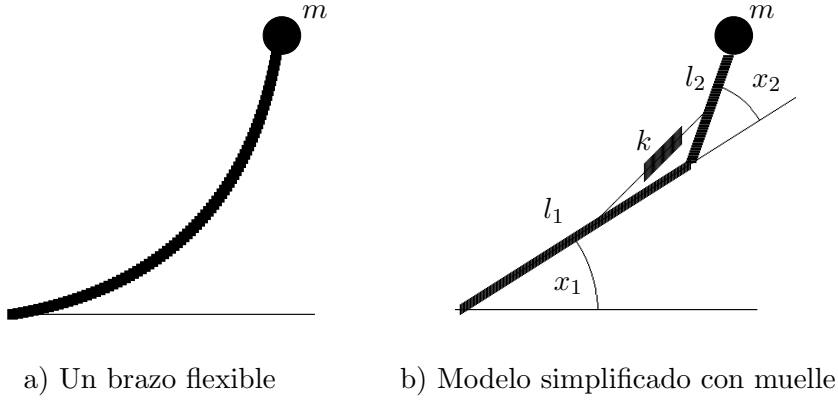


Figura 4.7: Un manipulador con un solo brazo flexible

ción está centrado en ilustrar las características del método de estimación con redes neuronales, no se pretende desarrollar un modelo extremadamente preciso, por lo que se considera un modelo simplificado, que puede ser expresado mediante ecuaciones diferenciales ordinarias, evitando así las complicaciones adicionales de los sistemas en derivadas parciales. Incluso con esta simplificación, el modelo presenta una dinámica fuertemente no-lineal, que es un banco de pruebas adecuado para el método propuesto. Por otra parte, el modelo expuesto puede ser expresado en la forma lineal en los parámetros (LIP), como ocurre, en general, en el ámbito de la robótica [104].

La flexibilidad de un brazo puede modelarse mediante una unión con un muelle, como se muestra en la Figura 4.7, donde m es la masa situada al final del brazo, k es la constante de recuperación del muelle, l_1 es la longitud desde el motor (que se supone fijo) a la unión y l_2 es la longitud desde la unión a la masa en rotación. Mediante esta simplificación, se obtiene el siguiente modelo [80]:

$$\begin{pmatrix} \alpha + \gamma \cos x_2 & \alpha + \frac{1}{2}\gamma \cos x_2 \\ \alpha + \frac{1}{2}\gamma \cos x_2 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d^2 x_1}{dt^2} \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} \end{pmatrix} + \quad (4.53)$$

$$\begin{pmatrix} -\gamma \sin x_2 \left(\frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} + \frac{1}{2} \left(\frac{dx_2}{dt} \right)^2 \right) \\ \frac{1}{2} \gamma \sin x_2 \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -k x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde $\alpha = m l_2^2$, $\gamma = m l_1 l_2$ y u es el par ejercido por el motor. A partir de este modelo, la forma LIP

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) (\boldsymbol{\theta}^{\text{nom}} + \boldsymbol{\theta}) \quad (4.54)$$

se obtiene trivialmente tras la manipulación algebraica resultante de la definición de los parámetros $\boldsymbol{\theta}^{\text{nom}} + \boldsymbol{\theta} = (\alpha \ \gamma \ k)^\top$, la matriz $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

siendo:

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{21} = \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{d^2 x_2}{dt^2} \\ a_{12} &= \frac{d^2 x_1}{dt^2} \cos x_2 + \frac{1}{2} \cos x_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} - \sin x_2 \left(\frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} + \frac{1}{2} \left(\frac{dx_2}{dt} \right)^2 \right) \\ a_{22} &= \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 x_1}{dt^2} \cos x_2 + \sin x_2 \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 \right) \\ a_{13} &= 0 \\ a_{23} &= -x_2 \end{aligned} \quad (4.56)$$

y el vector $\mathbf{y} = (u \ 0)^\top$. Como en la sección anterior, el vector de valores nominales $\boldsymbol{\theta}^{\text{nom}}$ se elige de forma que coincida con el valor esperado de los parámetros. Por tanto, el resultado de la estimación es la desviación del nominal, en lugar del propio valor del parámetro. Asimismo, consideramos medibles todos los componentes de la matriz $\mathbf{A}$ y del vector $\mathbf{y}$, suposición que puede ser considerada realista en el caso de los sistemas mecánicos, tal y como se hizo en la sección anterior.

Tabla 4.3: Valores numéricos de los parámetros formales para el modelo del brazo flexible. Diseño experimental con parámetros constantes a trozos

Parámetro	θ_1	θ_2	θ_3
Valor nominal (θ^{nom})	1	2	2,4
Desviación real inicial ($\theta_{t=0}$)	-0,25	-0,5	-0,4
Desviación real en $t = 4\pi$ s ($\theta_{t=4\pi}$)	0,25	0,5	=

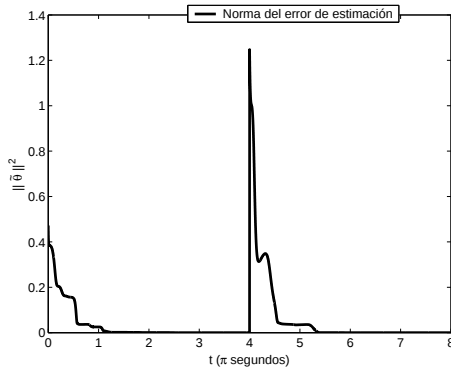
El método de estimación neuronal descrito en la Sección 4.3 ha sido aplicado al modelo de un enlace flexible, y se evalúa la eficacia del método mediante representaciones gráficas. La simulación de las ecuaciones diferenciales, tanto las del sistema como las del estimador, se implementa en el entorno **Matlab**, haciendo uso de los eficientes métodos numéricos que esta herramienta incorpora. En una primera etapa, se asigna a los parámetros un valor constante: $m = 3$, $l_1 = 1$, $l_2 = 0,5$, $k = 2$, y las ecuaciones del sistema se simulan desde $t = 0$ hasta $t = 4\pi$. Con el objetivo de determinar la capacidad del estimador para estimar parámetros que sufren cambios repentinos, la masa se ha cambiado al valor $m = 5$ en el instante $t = 4\pi$, simulando de esta forma que el robot recoge una nueva carga, continuando la simulación en el intervalo desde $t = 4\pi$ hasta $t = 8\pi$. Finalmente, los valores nominales son $\theta^{\text{nom}} = (1 \ 2 \ 2,4)^\top$ de forma que la desviación de los parámetros con respecto a los valores reales no supera en ningún caso la unidad, en valor absoluto. Se garantiza así que los estados de las neuronas, que permanecen en el intervalo unitario $s_i \in [-1, 1]$, pueden alcanzar la solución correcta. Estas asignaciones numéricas se resumen en la Tabla 4.3. En una segunda etapa, se ha adoptado un entorno experimental distinto, con el objetivo de determinar si el estimador es capaz de estimar parámetros que varían de forma continua, aunque lenta. El parámetro l_1 se ha definido como $l_1 = 1,2 + 0,05 \sin t/10$, para simular un cambio estructural en las propiedades del enlace, debido a la temperatura, vibración o alguna otra influencia externa. Se han mantenido las asignaciones $m = 3$, $l_2 = 0,5$, $k = 2$, así como la de los valores nominales de la Tabla 4.3. En ambos experimentos, las velocidades iniciales son nulas $\left(\frac{dx_1}{dt} \ \frac{dx_2}{dt}\right) = \mathbf{0}$ y las posiciones se ajustan

tan inicialmente a $(x_1 \ x_2) = (0 \ \pi/8)$, de forma que el estado inicial no sea un punto de equilibrio. Con respecto a la señal de control u , se ha definido como una suma de sinusoides en fase de Schroeder con el objetivo, al igual que en la sección anterior, de proporcionar excitación persistente al sistema:

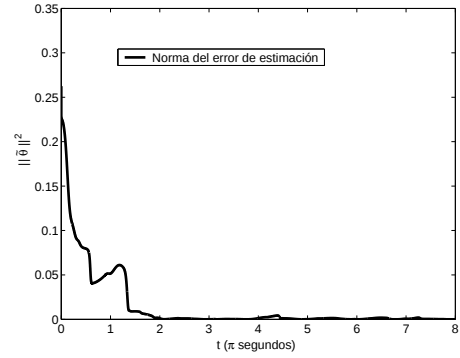
$$u = \frac{1}{2} (\sin(2t) + \sin(2t - 2\pi/3) + \sin(5t - 2\pi)) \quad (4.57)$$

Los resultados de simulación para las dos configuraciones experimentales se muestran en la Figura 4.8. El error de predicción e tiende a cero muy rápidamente, por lo que no se ha representado. En la columna izquierda de la Figura 4.8, el primer gráfico representa el error de estimación $\|\theta - \hat{\theta}\|^2$, que converge a cero tras un breve transitorio. Asimismo, cuando ocurre un cambio brusco de los parámetros, el estimador es capaz de recuperarse rápidamente, a pesar de que el error instantáneo crece incluso por encima del inicial. Debajo, los gráficos a.2) y a.3) muestran cómo el estimador sigue adecuadamente las variaciones de los parámetros. En la columna de la derecha, el gráfico b.1) presenta el error de estimación, que de nuevo se estabiliza en un entorno de cero. El gráfico central muestra claramente un buen ajuste de la estimación al parámetro que varía de forma continua. Como comparación, en el gráfico inferior se ha cambiado la definición del parámetro a $l_1 = 1,2 + 0,05 \sin t$, es decir, la frecuencia de variación es un orden de magnitud mayor. En este caso, se observa un error de estimación importante, explicable porque la frecuencia del parámetro está en el mismo rango que la frecuencia del sistema dinámico. La aparición de este problema, común a todos los métodos de estimación, sugiere que la variación del parámetro constituye una dinámica no modelada que debería haberse incorporado al modelo.

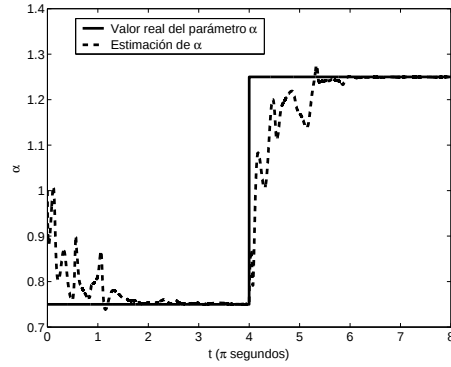
En resumen, a las conclusiones de la sección anterior puede añadirse que el estimador con redes de Hopfield propuesto también presenta buenos resultados cuando se aplica a sistemas donde los parámetros varían de forma continua, siempre que su frecuencia de variación sea considerablemente más lenta que la del propio sistema. Estas simulaciones, que confirman los resultados teóricos de la Sección 4.4, muestran que el estimador neuronal es especialmente adecuado



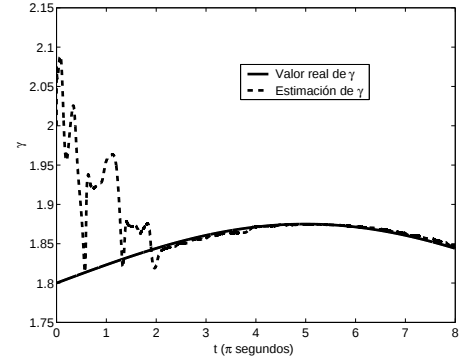
a.1) Error de estimación



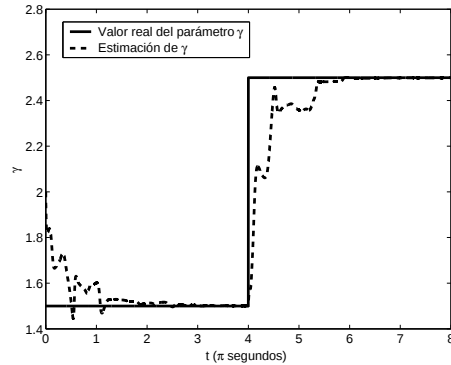
b.1) Error de estimación



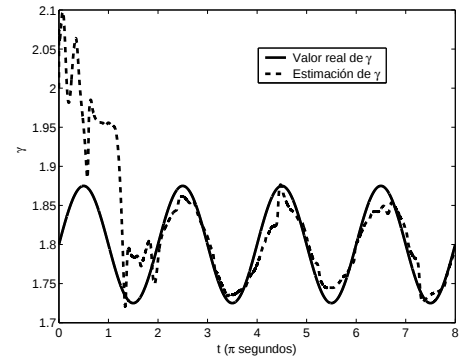
a.2) Estimación de α



b.2) Variación lenta de γ



a.3) Estimación de γ



b.3) Variación rápida de γ

Figura 4.8: Resultados de simulación en presencia de parámetros que varían con el tiempo: a) Cambios repentinos de los parámetros (columna de la izquierda) b) Variación continua de los parámetros (columna de la derecha)

para la identificación de sistemas mecánicos ya que en éstos, por una parte, se dispone de medidas de los estados y sus derivadas y, por otra, se puede introducir una entrada suficientemente compleja de forma que se cumpla la condición de excitación persistente.

4.6. Estimación de parámetros de la epidemia de VIH-SIDA en Cuba

4.6.1. Introducción y revisión histórica del problema

En esta sección se muestra otra aplicación del método de estimación de parámetros mediante redes de Hopfield. Aunque, en principio, la metodología se implementa de forma similar a la vista en la sección anterior, el problema propuesto presenta características que requieren adaptaciones del algoritmo de estimación. El sistema en cuestión es un modelo de la propagación de la epidemia de VIH-SIDA en Cuba, que se diferencia de las aplicaciones en robótica vistas anteriormente en los siguientes aspectos:

- El modelo surge de la intuición de especialistas y de la comparación con otros modelos similares propuestos en epidemiología. En el caso de los sistemas mecánicos, los modelos se obtienen de las leyes físicas, sin ambigüedad y con total exactitud.
- Los datos observados se obtienen de muestreos en el marco de estadísticas sanitarias, que están siempre sujetas a un cierto margen de error. Por el contrario, los sensores actualmente usados en robótica pueden proporcionar medidas muy precisas de casi todas las magnitudes físicas necesarias, como velocidad, posición, aceleración, rotación, etc.
- Las estadísticas epidemiológicas se realizan con una periodicidad que suele ser, como mucho, semanal, llegando en algunos casos al periodo anual. Por tanto, el sistema es intrínsecamente discreto, a diferencia de los sistemas mecánicos para los que la formulación continua dada por la

ecuación diferencial puede considerarse una aproximación razonable, ya que es posible obtener medidas con intervalos de, incluso, nanosegundos.

Las características mencionadas, permiten hacerse una idea de que la estimación de parámetros del modelo de la epidemia cubana de VIH-SIDA es una tarea especialmente ardua para el método de estimación neuronal. Los resultados presentados confirman efectivamente que el estimador con redes de Hopfield encara importantes dificultades en este caso. No obstante, se trata de una tarea fructífera, por varias razones. En primer lugar, la validación de un modelo epidemiológico preciso tiene una importancia obvia, ya que permitiría poner a prueba la eficacia de las decisiones tomadas por las autoridades sanitarias. Específicamente, en el caso de Cuba, es necesario determinar si el programa de *seguimiento de contactos* supone una ayuda en la lucha contra la enfermedad. De hecho, la importancia del tema es tal, que en el año 2003 ha tenido lugar una Sesión Especial en la International Work-Conference on Artificial Neural Networks (IWANN 03) dedicada a proponer soluciones del problema de identificación del modelo de la epidemia cubana de VIH-SIDA con distintos métodos de inteligencia computacional [91, 93, 84], entre los que se enmarca el presente trabajo [16]. Por otra parte, este problema se convierte en un formidable banco de pruebas para los métodos de estimación con redes neuronales, así como para su comparación con otras técnicas. De esta forma, se obtendrá una adecuada perspectiva de las principales potencialidades del método propuesto, así como de sus limitaciones o de aquellos aspectos que requieren una investigación más profunda, aportando una contribución a la información disponible para una óptima selección del método de identificación adecuado para cada problema particular.

4.6.2. Modelo de la epidemia de VIH-SIDA en Cuba

Las enfermedades infecciosas tienen un tremendo impacto en la historia humana, habiéndose intentado su modelado matemático desde hace siglos, tanto desde el punto de vista analítico como estocástico. Prueba de ello es la abundante bibliografía sobre el tema, entre la que puede reseñarse, por ejemplo,

la monografía [23] y las recientes referencias [33, 34, 35, 7]. En comparación con otras grandes epidemias de la humanidad, la extensión del SIDA es un fenómeno relativamente reciente, careciéndose aún de explicación satisfactoria para muchos de los factores que influyen en el desarrollo de la enfermedad. Por tanto, la construcción de modelos de la epidemia de VIH-SIDA sería una valiosa herramienta para predecir el avance de la infección, así como para evaluar las políticas de las autoridades sanitarias. Una característica crucial del SIDA con severas consecuencias epidemiológicas es su periodo de incubación extremadamente largo, a la par que variable de un individuo a otro. Este hecho, unido a la alta capacidad infecciosa del virus cuando se realizan prácticas de riesgo, conlleva que los individuos infectados por el VIH, que permanecen en una etapa subclínica y asintomática, y que pueden no ser conscientes de su propia infección, constituyen una rápida vía de transmisión de la enfermedad. Por el contrario, el contagio es menos probable cuando los síntomas resultan aparentes, es decir durante la etapa clínica propiamente denominada SIDA. Una línea de lucha contra la enfermedad, que apunta directamente a la evitación del contagio durante la etapa subclínica, es la búsqueda activa de individuos infectados por el VIH. En el marco de este programa, adoptado por las autoridades cubanas, cuando un enfermo infectado por el VIH es detectado, bien por pasar a la fase sintomática, bien por solicitar asistencia sanitaria, se le pide que identifique a todas sus parejas sexuales, a las cuales se les practica un análisis para determinar si son portadores del virus. En este caso, éstos, a su vez, declaran a sus parejas sexuales, constituyendo una cadena de detección a la que debe su nombre el programa: *seguimiento de contactos*. Asimismo, todos los individuos seropositivos reciben información sobre las medidas profilácticas que deben adoptar para evitar ser propagadores de la enfermedad.

Un equipo formado por médicos y matemáticos cubanos ha elaborado un modelo de la evolución de la epidemia de VIH-SIDA en el caso específico de Cuba, con objeto tanto de predecir el crecimiento de la infección como de evaluar el programa de seguimiento de contactos. Este modelo, que es una ligera extensión de los propuestos en [69, 10, 52, 9, 51], se define por el siguiente

sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= (\lambda - k_1 - \beta - \mu) x + \lambda' (y_1 + y_2) - k_2 \frac{x(y_1 + y_2)}{x + y_1 + y_2} \\
 \frac{dy_1}{dt} &= (-\mu - \beta') y_1 + k_2 \frac{x(y_1 + y_2)}{x + y_1 + y_2} \\
 \frac{dy_2}{dt} &= k_1 x + (-\mu - \beta') y_2 \\
 \frac{dz}{dt} &= \beta x + \beta' (y_1 + y_2) - \mu' z
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

donde t es el tiempo en años, x es el número de individuos infectados por el VIH pero no detectados, $(y_1 + y_2)$ es el tamaño de la población seropositiva conocida, y z es el número de pacientes de SIDA que están en la etapa clínica, con síntomas aparentes. La población infectada conocida se divide en dos subpoblaciones y_1 , y_2 , dependiendo de si la infección fue descubierta por medio del programa de seguimiento de contactos (y_1), o bien por azar, un *screening*, o algún otro modo (y_2). Este modelo contiene diversos parámetros, siendo los más importantes la tasa de detección de la infección asociada al programa de seguimiento (k_2) y la tasa de detección no relacionada con el programa (k_1). En cuanto a los restantes parámetros, λ y λ' miden la tasa de contagio producida por infectados por el VIH identificados y no identificados, respectivamente; β y β' representan la tasa de paso a la etapa clínica de SIDA por parte de infectados por el VIH identificados y no identificados, respectivamente; y μ , μ' indican la tasa de mortalidad de infectados por el VIH y enfermos de SIDA, respectivamente.

Con objeto de disponer de una serie suficientemente amplia de datos de prueba, en lugar de recurrir a datos reales históricos, se resolvieron las ecuaciones del modelo con un método numérico [83], habiendo obtenido previamente valores razonables de los parámetros mediante técnicas de regresión estadística. Estos valores, que se aceptan como reales para la simulación, se muestran en la Tabla 4.4, junto con un intervalo de confianza, o bien la desviación estándar estimada. Por otra parte, la consideración de dos distintas subpoblaciones y_1 , y_2 no tiene ningún efecto en la estimación de los parámetros, por lo que introducimos el nuevo estado $y = y_1 + y_2$ y lo sustituimos en el modelo

Tabla 4.4: Valores “reales” de los parámetros y sus rangos previstos para el modelo de VIH-SIDA

Parámetro	Valor, $t \in [0, 2]$	Intervalo	Dev. Est.	Valor, $t \in [2, 4]$
λ	0.5594	[0.535, 0.585]		0.5628
μ	0.0053		0.00254	0.0053
μ'	0.76	[0.66, 0.85]		0.72
$b = \frac{1}{\beta}$	8.82		0.214	8.97
$b' = \frac{1}{\beta'}$	7.41		0.13	7.64
$r = \frac{\lambda'}{\lambda}$	0.0482		0.0295	0.0482
k_1	0.2161		0.0195	0.2328
k_2	0.2322		0.0096	0.2614

dato por la Ecuación (4.58). Así pues, en lo sucesivo, nos atenemos al correspondiente sistema con sólo tres ecuaciones. Los datos de prueba se obtuvieron simulando este modelo, partiendo de los estados iniciales $x_0 = 250$, $y_0 = 94$, $z_0 = 3$, durante el intervalo de $t = 0$ a $t = 2$, obteniendo de este modo una secuencia de 200 valores del vector de estados. En este instante, se modificó el valor de los parámetros como se indica en la última columna de la Tabla 4.4, y se calculó una nueva secuencia de 200 estados, correspondiente al intervalo $t = [2, 4]$. Este cambio de parámetros simula una eventual mejora en el programa de búsqueda activa, así como avances médicos que puedan retrasar el desarrollo de síntomas y disminuir la mortalidad. La serie de evolución de los estados obtenida como resultado de esta simulación se muestra en la Figura 4.9.

4.6.3. Estimación en el modelo de VIH-SIDA con redes de Hopfield

Con objeto de aplicar el método de estimación descrito en la Sección 4.3 al modelo dado por la Ecuación (4.58), es preciso transformar éste en la forma

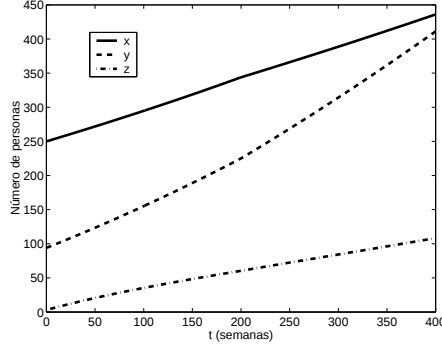


Figura 4.9: Estados del sistema de VIH-SIDA generados como datos de test

lineal en los parámetros. De resultados de esta transformación, se obtiene la siguiente expresión para el modelo:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\theta}; \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x & y & -\frac{xy}{x+y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{xy}{x+y} & y & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & y & z \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

donde $\mathbf{x} = (x, y, z)^\top$ es el vector de estados y se ha definido un vector de parámetros formales $\boldsymbol{\theta}$. Los valores numéricos asignados a estos parámetros formales para la generación de datos de prueba, obtenidos de los correspondientes parámetros reales, se muestran en la Tabla 4.5. Dado que los valores de los parámetros se encuentran en el intervalo $[-1, 1]$ no es necesario realizar ninguna transformación y puede asumirse que los valores nominales son nulos, simplificando la notación.

En principio, la aplicación de la metodología de estimación con redes de Hopfield al modelo dado por la Ecuación (4.59), definiendo el vector de salida como $\mathbf{y} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$, se reduce al cálculo de los pesos correspondientes, de acuerdo con la Ecuación (4.14). Sin embargo, al realizar la implementación se observa una dificultad fundamental: no se dispone de las derivadas de los estados. En ocasiones, puede soslayarse esta dificultad bien calculando las derivadas a partir de los estados mediante un método de derivación numérica, o bien

Tabla 4.5: Parámetros formales para el modelo de VIH-SIDA

Definición	Valor nominal, $t \in [0, 2]$	Valor nominal, $t \in [2, 4]$
$\theta_1 = \lambda - k_1 - \beta - \mu$	0.2246	0.2132
$\theta_2 = \lambda'$	0.0270	0.0271
$\theta_3 = k_2$	0.2322	0.2614
$\theta_4 = -\mu - \beta'$	-0.1403	-0.1362
$\theta_5 = k_1$	0.2161	0.2328
$\theta_6 = \beta$	0.1134	0.1115
$\theta_7 = \beta'$	0.1350	0.1309
$\theta_8 = -\mu'$	-0.7600	-0.7200

aplicando un método de observación o filtrado [65]. Sin embargo, en este caso, la serie de datos no se ha obtenido con una frecuencia suficiente como para que el modelo continuo, dado por la Ecuación (4.58), constituya una aproximación aceptable. En su lugar, debe formularse explícitamente un modelo discreto:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \Delta t \mathbf{A}(\mathbf{x}_n) \boldsymbol{\theta} \quad (4.60)$$

el cual es, simplemente, la solución de la ecuación diferencial del modelo mediante la regla de Euler, que es el método numérico más simple. Dado que disponemos de una secuencia de 400 valores en el intervalo $t \in [0, 4]$, el tamaño de paso debe fijarse a $\Delta t = 0,01$. Por tanto, el error de predicción en el instante $n+1$ es $\mathbf{e}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n - \Delta t \mathbf{A}(\mathbf{x}_n) \hat{\boldsymbol{\theta}}$, de forma que la identificación de la función de Lyapunov $V = \frac{1}{2} \mathbf{e}^\top \mathbf{e}$ con la forma estándar de una red de Hopfield, dada por la Ecuación (4.12), proporciona los pesos y los bias:

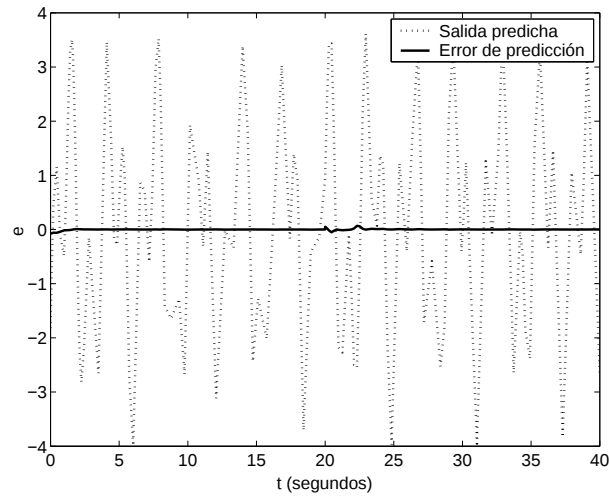
$$\mathbf{W} = -(\Delta t)^2 \mathbf{A}^T \mathbf{A} \quad \mathbf{b} = -\Delta t \mathbf{A}^T (\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) \quad (4.61)$$

donde, como en el caso continuo, se ha despreciado un término que no depende de la estimación $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

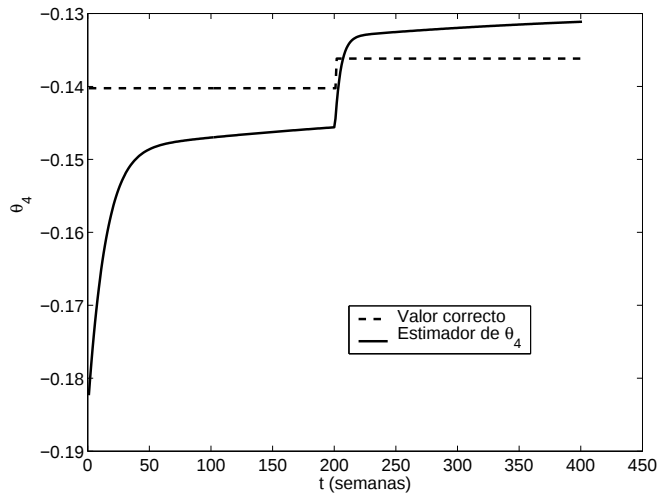
Para realizar el experimento simulado, se asignaron valores iniciales que

presentaran un 30 % de error relativo sobre los valores correctos mostrados en la Tabla 4.5. Se resolvió numéricamente la Ecuación (4.16) que define el comportamiento dinámico de la red neuronal, usando el mismo tamaño de paso que en la generación de los datos de prueba: $\Delta t = 0,01$. El factor β de corrección de la pendiente se eligió, por simplicidad, como $\beta = 1$ para todas las neuronas. El error de predicción se muestra en la Figura 4.10.a), resultando visible que, cuando la red alcanza un estado estacionario, aproximadamente en el instante $t = 0,5$, el error es aproximadamente nulo. Asimismo, tras el cambio brusco de los parámetros en $t = 2$, la red se estabiliza rápidamente de nuevo.

Por lo que respecta a la estimación del valor de los parámetros, en la Figura 4.10.b) se muestra, como ejemplo, la estimación del cuarto componente $\hat{\theta}_4$ del vector de parámetros, junto con su valor real θ_4 , evidenciando un error de estimación muy severo. En lo que sigue se tratará de explicar esta aparente contradicción (buena predicción con pobres estimaciones) al tiempo que se proponen algunas ideas para su solución. En primer lugar, es bien conocido en la literatura sobre ingeniería de control [99, 66] que la entrada al sistema debe proporcionar *excitación persistente*, de forma que la dinámica del sistema sea tan compleja, que la única manera de cancelar el error de predicción es producir una estimación exacta de los parámetros. En caso contrario, muchas combinaciones de valores incorrectos de los parámetros pueden producir, sin embargo, una predicción exacta. Este es un inconveniente común de todos los métodos de estimación, ya que el criterio de optimización es el error de predicción y, cuándo éste es anulado, el método considera alcanzado el objetivo. Es obvio de la observación de la Figura 4.9 que los estados del sistema no tienen una dinámica especialmente compleja. Dado que el modelo de VIH-SIDA que estamos tratando no tiene entradas, esta idea no proporciona soluciones, pero sí arroja alguna luz sobre la raíz del problema: hay "demasiados" valores de los parámetros que producen predicción correcta, en parte debido a que hay "demasiados" parámetros que estimar. Esta intuición es consistente con la segunda observación tras el Teorema 4.2. Aunque, en principio, los parámetros que aparecen en el modelo no se pueden ignorar, no todos los parámetros son



a) Valor absoluto del error de predicción



b) Estimación de θ_4 y su valor real

Figura 4.10: Simulación del método de estimación de parámetros con redes de Hopfield para el modelo de VIH-SIDA

igualmente importantes ya que, por ejemplo, las tasas de mortalidad pueden ser estimadas de estadísticas globales de las que disponemos de un número suficiente. Por el contrario, las tasas de detección k_1 , k_2 no sólo son más difíciles de obtener debido a ser peculiares del modelo cubano, sino que también son especialmente importantes porque proporcionan una medida de la eficiencia del programa de seguimiento de contactos. Estas ideas llevan a un nuevo diseño experimental, que proporciona un indicio de solución.

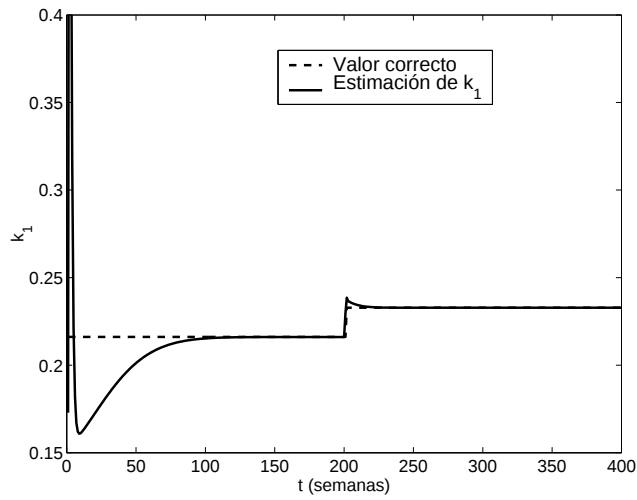
En una nueva configuración de las simulaciones, con objeto de mejorar los resultados de la estimación, se dieron por conocidos los valores de todos los parámetros, a excepción de k_1 y k_2 . Observando el modelo de la epidemia dado por la Ecuación (4.58), resulta evidente que la ecuación diferencial en z no proporciona información sobre los parámetros a estimar y puede ser despreciada. Asimismo, recordamos que los estados y_1 y y_2 se unen en uno solo $y = y_1 + y_2$, de forma que, con estas consideraciones, se reescribe el modelo, aislando los parámetros a estimar, para mayor facilidad de referencia:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -k_1 x - k_2 \frac{xy}{x+y} + (\lambda - \beta - \mu)x + \lambda' y \\ \frac{dy}{dt} &= +k_1 x + k_2 \frac{xy}{x+y} + (-\mu - \beta') y\end{aligned}\tag{4.62}$$

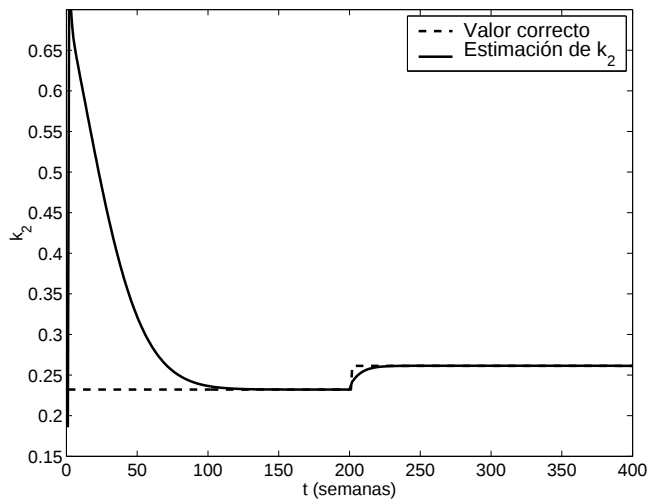
El modelo anterior se pasa a la forma LIP, tras la definición del vector de parámetros $\boldsymbol{\theta} = (k_1 \ k_2)$, así como la matriz $\mathbf{A}$ y el vector $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -x & -\frac{xy}{x+y} \\ x & \frac{xy}{x+y} \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} - (\lambda - \beta - \mu)x - \lambda' y \\ \frac{dy}{dt} - (-\mu - \beta') y \end{pmatrix}\tag{4.63}$$

Incidentalmente, obsérvese que el vector $\mathbf{y}$ no tiene por qué corresponder a la salida, en un sentido físico, sino que puede definirse arbitrariamente, siempre que con ello se obtenga la acomodación matemática del modelo a la forma LIP. Con la anterior definición, se repitió el diseño de la red, de acuerdo con la Ecuación (4.61), que proporciona los pesos y los bias. Para la simulación, se utilizaron los mismos valores de los parámetros k_1 y k_2 dados en la Tabla



a) Estimación de k_1 y su valor real



b) Estimación de k_2 y su valor real

Figura 4.11: Simulación del método de estimación de parámetros para el modelo de VIH-SIDA con número de parámetros reducido

4.4, incluso con el cambio en el instante $t = 2$. Asimismo, se asignó un valor inicial a la estimación con un 30 % de error relativo sobre el valor real. Tras diversas pruebas, se eligió el factor de pendiente $\beta = 0,2$, ya que se observó que con $\beta = 1$ la convergencia era en exceso lenta. En la Figura 4.11 se muestra la estimación obtenida de los parámetros. A diferencia de la configuración anterior, la red de Hopfield proporciona un valor estimado que converge al valor real, aunque sería deseable que la convergencia fuera aún más rápida. En principio, parece lógico pensar que la disminución del valor de la pendiente β acelera la convergencia, sin embargo, si β cae por debajo de cierto límite, se produce la desestabilización completa de la red neuronal. La selección de un valor óptimo de β queda como línea de futura investigación.

En resumen, el método propuesto de estimación de parámetros mediante redes neuronales de Hopfield puede aplicarse a modelos como el del VIH-SIDA en Cuba, que han de formularse en tiempo discreto. Se obtienen buenos resultados en cuanto al error de predicción, pero para obtener estimaciones adecuadas, el número de parámetros a estimar debe ser moderado, en comparación con el número de estados del modelo. Las simulaciones confirman los resultados teóricos de la sección 4.4.

4.7. Extensión a sistemas no linealmente parametrizados

4.7.1. Descripción del método

Cuando la formulación del conocimiento del que disponemos sobre el sistema da lugar a un modelo en el que los parámetros no entran linealmente, no es posible aplicar los métodos de identificación descritos en secciones anteriores. Para manejar modelos que no estén en la forma lineal en los parámetros (LIP), una posibilidad es intentar proceder a su reducción a la forma LIP, como en el ejemplo de la Sección 4.5.1, pero esto no siempre es factible. También se han propuesto mecanismos de estimación de sistemas no-LIP en el contexto del control adaptativo [71], pero no se obtiene un valor numérico de los

parámetros ya que el estimador es parte indisoluble del controlador⁵. Puede afirmarse que el problema de la identificación paramétrica de sistemas no-LIP es una cuestión abierta para la que no hay aún respuesta adecuada. En esta sección, proponemos una extensión de la red de Hopfield para estimación de parámetros, que puede ser aplicada a modelos que no estén en la forma LIP. El problema con el estimador neuronal, tal como se propuso en la Sección 4.3, es que la función de Lyapunov de la red de Hopfield de primer orden tiene una forma característica, que encaja sólo en la expresión del error de predicción si el sistema está en la forma LIP. Para solventar el caso no-LIP, proponemos un modelo basado en redes de Hopfield de alto orden, por lo que recordamos brevemente las características de estas redes [57]. En primer lugar, su dinámica puede definirse con el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_{q=1}^r \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_q) \in C_q^n \\ i \neq i_1, i_2, \dots, i_q}} w_{i i_1, i_2, \dots, i_q} s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_q} - b_i ; \quad s_i = \tanh\left(\frac{p_i}{\beta}\right) \quad (4.64)$$

donde la expresión C_q^n representa las combinaciones de los n primeros naturales tomados de q en q . Es preciso señalar una pequeña pero importante diferencia con la formulación de las redes de Hopfield de alto orden para optimización "estática", vistas en capítulos anteriores: *ahora pueden existir autopesos no nulos*. Por su parte, la función de Lyapunov de la red neuronal

$$V(\mathbf{s}) = - \sum_{q=1}^r \sum_i \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_q) \in C_q^n \\ i \neq i_1, i_2, \dots, i_q}} w_{i i_1, i_2, \dots, i_q} s_i s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_q} + \sum_i b_i s_i \quad (4.65)$$

pertenece al conjunto de las funciones multilineales de orden, en principio, arbitrario, en lugar de al conjunto muy restringido de funciones cuadráticas, que podían ser minimizadas por redes de primer orden. Esta extensión del conjunto de funciones que pueden encajar en la forma de la función de Lyapunov

⁵Esta técnica se denomina *control directo*, en contraposición al *control indirecto*, donde en una primera etapa se realiza explícitamente la estimación, que es luego usada para ajustar el controlador.

de la red neuronal no es aún satisfactoria, ya que no permite tratar el caso no lineal en su máxima generalidad. No obstante, sí es cierto que cualquier función puede ser *aproximada*, con un nivel de exactitud arbitrario, por una función multilineal, que no es otra que el polinomio de Taylor de la función original. Este hecho elemental del análisis matemático constituye la base del método propuesto: *aproximar la función no lineal por una multilineal, que es luego optimizada por una red de Hopfield de alto orden.*

A continuación se describe en detalle la aplicación de redes de Hopfield de alto orden a la estimación de parámetros que entran no linealmente en la ecuación del sistema. Tal como vimos en la Sección 4.2, un sistema dinámico general puede representarse con la EDO $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\theta})$, siendo $\boldsymbol{\theta}$ el vector de parámetros. En cada instante, una medida de la bondad de una estimación concreta $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ es el error de predicción, dado por $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$. Supongamos, por simplicidad de notación, que el valor esperado de los parámetros es nulo, pudiendo existir alguna pequeña desviación desconocida, que es precisamente lo que se desea estimar. Entonces, el polinomio de Taylor alrededor del punto $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}$, del error de predicción $\mathbf{e}$, considerado como función de la estimación $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, producirá una aproximación aceptable de $\mathbf{e}$. La expansión formal de Taylor resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) &\approx \mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{0}) - \sum_i \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \hat{\theta}_i} \right|_{\hat{\theta}_i=0} \\ &- \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left. \frac{\partial^2 \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \hat{\theta}_i \partial \hat{\theta}_j} \right|_{\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j=0} - \dots \end{aligned} \quad (4.66)$$

que puede, en principio, realizarse hasta un orden arbitrario, incrementando así la bondad de la aproximación. Por último, al igual que en el caso LIP, definimos como función objetivo de la minimización el cuadrado de la norma del error de predicción: $V = \mathbf{e}^\top \mathbf{e}$. Esta función resulta ser multilineal, por lo que puede hacerse coincidir con la energía de la red de alto orden dada por la Ecuación (4.65), obteniendo de esta forma el valor de los pesos y los bias. Obsérvese que la suposición de que el valor probable de los parámetros

está cercano al origen no supone pérdida de generalidad, dado que si el valor esperado de los parámetros fuera un vector no nulo θ^{nom} , se realiza la transformación $\theta' = \theta - \theta^{\text{nom}}$, de forma que el valor esperado de los nuevos parámetros θ' se sitúa en el origen.

Las características del método descrito en el párrafo anterior son muy similares a las del propuesto para el caso LIP en la Sección 4.3, con la salvedad del error adicional introducido por la aproximación del error de predicción por su polinomio de Taylor. En particular, dado que la estimación es representada por los estados de la red neuronal, que están restringidos al hipercubo unitario, es preciso que el valor real de los parámetros pertenezca al intervalo $[-1, 1]$. Alternativamente, si se conocen cotas de los parámetros, los cuales, por tanto, pertenecen a algún intervalo compacto conocido, éste puede trasladarse al intervalo unitario $[-1, 1]$ mediante la oportuna transformación lineal, de forma totalmente idéntica a la vista en la Sección 4.3.

4.7.2. Ejemplo de aplicación

Como ejemplo para ilustrar el método de estimación de parámetros en sistemas no-LIP mediante redes de Hopfield de alto orden, consideremos el siguiente sistema artificial, es decir, que no es producto del modelado de ningún proceso físico. Se trata de un sistema con una sola entrada u y un solo estado x :

$$y = \frac{dx}{dt} = f(x, u, \theta) = u + x \theta_1 e^{\theta_2 x} \quad (4.67)$$

donde $\theta = (\theta_1, \theta_2)^\top$ es el vector de parámetros. Este sistema fue propuesto en [71] (Ejemplo 6.1), donde se afirma que no existe ninguna alternativa viable de estimación, proponiéndose un método de control adaptativo directo, es decir, que no proporciona el valor numérico de los parámetros. En particular, este sistema no puede pasarse a la forma LIP, por lo que no le son aplicables los métodos vistos en la Sección 4.2. A continuación se presenta la técnica de identificación para este problema basada en el método de estimación con redes de Hopfield de alto orden. Asumiendo que el valor esperado de los parámetros es nulo, se calculan las derivadas parciales de la función f , hasta segundo

orden, y se evalúan en el origen:

$$\begin{aligned}
 f(x, u, \boldsymbol{\theta}) &= u + x \theta_1 e^{\theta_2 x} & f(x, u, \mathbf{0}) &= u \\
 \frac{\partial f}{\partial \theta_1} &= x e^{\theta_2 x} & \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \Big|_{\theta_1, \theta_2=0} &= x \\
 \frac{\partial f}{\partial \theta_2} &= \theta_1 x^2 e^{\theta_2 x} & \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \Big|_{\theta_1, \theta_2=0} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_1^2} &= 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_1^2} \Big|_{\theta_1, \theta_2=0} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} &= x^2 e^{\theta_2 x} & \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \Big|_{\theta_1, \theta_2=0} &= x^2 \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_2^2} &= \theta_1 x^3 e^{\theta_2 x} & \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_2^2} \Big|_{\theta_1, \theta_2=0} &= 0
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

por lo que, teniendo en cuenta la simetría de las derivadas segundas, el polinomio de Taylor de segundo grado en el punto $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$ resulta ser:

$$f(x) \approx u + x \theta_1 + \frac{1}{2} x^2 \theta_1 \theta_2 + \frac{1}{2} x^2 \theta_1 \theta_2 = u + x \theta_1 + x^2 \theta_1 \theta_2 \tag{4.69}$$

Finalmente, se construye la función objetivo aproximada como el cuadrado del error de predicción:

$$\begin{aligned}
 V = e^2 &= \left(y - f(x, u, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \right)^2 \approx \left(y - u - x \hat{\theta}_1 - x^2 \hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2 \right)^2 \\
 &= (2 u x - 2 x y) \hat{\theta}_1 + x^2 \hat{\theta}_1^2 + (2 u x^2 - 2 x^2 y) \hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2 \\
 &\quad + 2 x^3 \hat{\theta}_1^2 \hat{\theta}_2 + x^4 \hat{\theta}_1^2 \hat{\theta}_2^2 + V_1
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

donde el término V_1 no depende de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, por lo que puede despreciarse sin por ello afectar la estimación obtenida. Comparando esta última ecuación con la función de Lyapunov de una red de Hopfield de alto orden, mostrada en la Ecuación (4.65), particularizada para orden $r = 3$, se obtienen los valores de los pesos y los bias (los valores nulos se han omitido):

$$b_1 = -(2 u x - 2 x y)$$

$$\begin{aligned}
w_{11} &= -2x^2w_{12} = w_{21} = -(2ux^2 - 2x^2y) \\
w_{112} &= w_{211} = -2x^3w_{1122} = w_{2112} = -x^4
\end{aligned} \tag{4.71}$$

A modo de inciso, cabe comentar que es posible obtener directamente las ecuaciones dinámicas de la red neuronal, sin necesidad de dar explícitamente los valores de los pesos y los bias, de forma que en algunos casos se facilitan los cálculos. Para ello, recuérdese que la dinámica de la red de Abe venía caracterizada a partir de su función de energía por la relación típica de los sistemas de gradiente: $\frac{\partial V}{\partial \hat{\theta}_i} = -\frac{dp_i}{dt}$. De esta forma, la derivación de la función V obtenida en la Ecuación (4.70), sustituyendo $y = \frac{dx}{dt}$, produce las ecuaciones de la red neuronal:

$$\begin{aligned}
\frac{dp_1}{dt} &= -\frac{\partial V}{\partial \hat{\theta}_1} = 2x \frac{dx}{dt} - 2ux - 2x^2\hat{\theta}_1 \\
&\quad + \left(2x^2 \frac{dx}{dt} - 2ux^2\right) \hat{\theta}_2 - 4x^3\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2 - 2x^4\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2^2 \\
\frac{dp_2}{dt} &= -\frac{\partial V}{\partial \hat{\theta}_2} = \left(2x^2 \frac{dx}{dt} - 2ux^2\right) \hat{\theta}_1 - 2x^3\hat{\theta}_1^2 - 2x^4\hat{\theta}_1^2\hat{\theta}_2
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Por supuesto, el sistema dinámico obtenido es idéntico al que resultaría de sustituir los valores de pesos y bias, mostrados en la Ecuación (4.71).

La eficiencia del algoritmo basado en redes de Hopfield de alto orden y la aproximación de Taylor, ha sido comprobada sobre el sistema descrito por la Ecuación (4.67). Se asignaron a los parámetros los valores numéricos indicados en la Tabla 4.6, incluyendo un cambio brusco de los parámetros en el instante $t = 20$ s, con objeto de evaluar la capacidad del método propuesto de estimar correctamente parámetros variables. La señal de entrada u se definió como una suma de sinusoides en fase de Schroeder, tal como se explicó en la Sección 4.5.1. Tras las simulaciones iniciales, que mostraron una pobre estimación del parámetro θ_2 , se conjeturó que este resultado poco satisfactorio era debido a la pequeña participación del parámetro θ_2 en el valor del error de predicción. Véase, por ejemplo, que el polinomio de Taylor de e dado por la Ecuación (4.66) no contiene términos lineales ni cuadráticos en θ_2 , lo que provoca que

Tabla 4.6: Valores numéricos de los parámetros para el sistema no-LIP

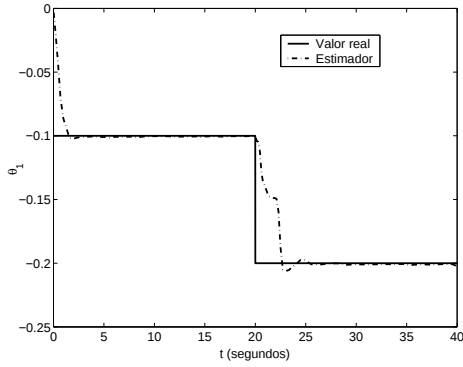
Parámetro	θ_1	θ_2
Desviación real inicial	-0,1	0,1
Desviación real ($t = 20\text{ s}$)	-0,2	-0,1

los bias b_2 y los autopesos w_{22} sean nulos. Para compensar este factor, dando mayor importancia relativa a la estimación de este parámetro, se usó un valor distinto de β para cada neurona ya que, de este modo, como se observa en la Ecuación (4.64), se modifica la velocidad de variación de la estimación correspondiente. Tras varios ensayos, se eligieron los valores $\beta_1 = 1$ y $\beta_2 = 0,05$ para las ecuaciones de $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$, respectivamente. En la Figura 4.12 se muestran los resultados de la simulación, mediante representaciones gráficas de los valores reales de los parámetros y de la correspondiente estimación. Se observa que la estimación de θ_1 es bastante precisa, mientras que la estimación de θ_2 presenta serios errores transitorios, aunque finalmente converge al valor correcto. Por otra parte, la capacidad del estimador neuronal de predecir la salida es excelente, ya que en la gráfica no se distinguen la salida real y la predicha, siendo el error de predicción casi idénticamente nulo. Esto es, obviamente, consecuencia de haber utilizado el error de predicción como función objetivo de la optimización.

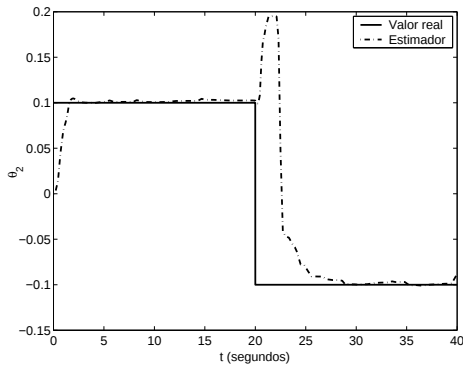
En resumen, el método de estimación de parámetros mediante redes neuronales de Hopfield de alto orden obtiene una estimación aceptable de parámetros y una predicción de la salida muy buena, en el caso de sistemas que no están en la forma lineal en los parámetros, que hasta ahora no habían podido tratarse con otro método. Es preciso realizar un estudio más profundo para encontrar un método analítico de ajuste óptimo del valor de la pendiente β , así como el orden apropiado hasta el que debe realizarse la expansión de Taylor.

4.8. Conclusiones y líneas futuras

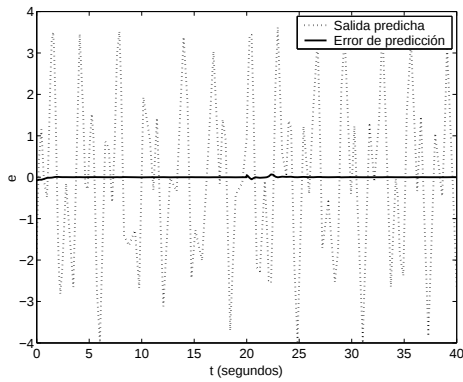
En este capítulo se ha presentado una nueva técnica de identificación paramétrica de sistemas dinámicos. El fundamento del método propuesto es la



a) Estimación de θ_1



b) Estimación de θ_2



c) Error de predicción

Figura 4.12: Red de Hopfield de alto orden para identificación de un sistema que no está en la forma lineal en los parámetros. Las dos primeras gráficas comparan la estimación de cada parámetro con su valor real. La gráfica c) muestra que el error de predicción de salida es casi idénticamente nulo, comparado con la magnitud de la propia salida

metodología de optimización con redes de Hopfield, tomando como función objetivo el error de predicción de la salida. Dado que el error de predicción, debido a la continua evolución del estado del sistema, es una magnitud que varía con el tiempo, los pesos y bias de la red de Hopfield resultante también son variables. En consecuencia, las clásicas pruebas de estabilidad aplicadas al modelo de Hopfield, basadas en una función de Lyapunov semidefinida positiva, no son suficientes para garantizar la convergencia de la estimación. Por tanto, se hace preciso un estudio de estabilidad completo, dividido en dos casos. Por una parte, cuando los parámetros son constantes, se ha demostrado la convergencia de la estimación al valor exacto de los parámetros. Por otra parte, en el caso de parámetros variables, se ha demostrado que el error de estimación se aproxima asintóticamente a un entorno acotado del origen. Estos resultados, pese a su naturaleza teórica, proporcionan guías de actuación para mejorar el estimador, si su eficiencia no es satisfactoria: los parámetros se pueden reescalar, para que el rango de posibles valores no sea excesivo; la predicción a priori de los parámetros, en forma de valores nominales, debería ser tan exacta como sea posible; la señal de entrada al sistema debe proporcionar excitación persistente; el número de parámetros a estimar debe ser reducido, en comparación con el número de ecuaciones; por último, el valor de la pendiente β se puede reducir, de forma que aumente la ganancia del estimador. A diferencia de los métodos basados en mínimos cuadrados, el estimador con redes de Hopfield se formula de forma natural en el caso de parámetros variables, mientras que no presenta el problemático ajuste de la ganancia, típico del método de gradiente. Mediante simulaciones, se ha evaluado la eficacia del método propuesto para la identificación de dos clases muy distintas de sistemas: sistemas mecánicos y epidemiológicos. En el caso de los sistemas robóticos, los resultados son satisfactorios, debido a las peculiaridades de estos sistemas: se dispone de un modelo exacto, basado en leyes físicas; el estado y sus derivadas son medibles por medio de sensores; las medidas pueden obtenerse con altas frecuencias de muestreo, de forma que, en la práctica, estos sistemas pueden considerarse continuos; y el significado físico de los parámetros permite disponer de valores nominales a priori, con bastante aproximación. Los resultados de la aplicación a sistemas robóticos muestran que, en presencia de excitación

persistente, tanto el error de predicción como el de estimación, convergen a cero siempre que los parámetros puedan ser considerados constantes. Cuando los parámetros varían de forma continua, el error de estimación permanece acotado en un entorno de cero, cuyo tamaño depende, no sólo de la amplitud de variación de los parámetros, sino también de su frecuencia. Estos resultados empíricos confirman lo predicho por el análisis teórico. Por su parte, el caso del modelo de la epidemia de VIH-SIDA reúne diversas peculiaridades, por lo que su tratamiento es más difícil. En particular, debe reformularse el método para poder tratar sistemas discretos. Además, al no disponer de entradas, no puede imponerse la condición de excitación persistente. En consecuencia, los resultados de simulación muestran que, si el número de parámetros a estimar es excesivo, la estimación no converge. En cambio, al restringir los parámetros estimados a los dos más importantes, el error de estimación converge a cero. Nuevamente, este hallazgo empírico confirma los resultados teóricos. Por último, se ha definido una extensión del método al caso de sistemas no linealmente parametrizados, de forma que ahora se requieren redes de alto orden. Dada la escasez de métodos disponibles para tratar este tipo de sistemas, los resultados son prometedores.

En el futuro, es preciso extender la aplicación del método de estimación con redes de Hopfield a sistemas más complejos, con objeto de evaluar su eficacia, así como analizar si los costes computacionales son aceptables. En particular, dentro de los sistemas robóticos, es fundamental aplicar el estimador a sistemas con múltiples grados de libertad, así como aquéllos en los que no se dispone de medidas de todos los estados, sino que algunos deberían obtenerse mediante derivación numérica o técnicas de filtrado. Asimismo, una línea prometedora es el diseño de un sistema de control adaptativo, en el que el resultado de la identificación se use para calcular la señal de control más adecuada en cada situación. No obstante, la integración del estimador con el controlador requiere un cuidadoso estudio de estabilidad del sistema global. Por su parte, en el caso de los sistemas epidemiológicos, una línea interesante es la aplicación del método a series de datos reales, de forma que, por una parte, se obtengan conclusiones sobre la evolución de la propia epidemia, mientras que, por otra parte, pueda realizarse una evaluación entre distintos modelos disponibles.

Capítulo 5

Conclusiones

En la presente tesis se aborda un estudio teórico de las redes de Hopfield de alto orden, así como de su capacidad práctica para resolver problemas de optimización, provenientes de dos ámbitos distintos. Por una parte, se evalúa la aplicabilidad de las redes de Hopfield a problemas de optimización combinatorial. Si bien el paradigma neuronal de Hopfield ha sido frecuentemente aplicado a optimización combinatorial, existían aún lagunas en la fundamentación de la metodología de optimización con redes de Hopfield, habiéndose justificado un gran número de resultados con argumentos exclusivamente empíricos. Por otra parte, se presenta un nuevo método de identificación paramétrica de sistemas dinámicos. Aunque la identificación puede formularse como un problema de optimización, se trata de una tarea proveniente del ámbito de la teoría de sistemas dinámicos y que encuentra una expresión concreta en el contexto de la ingeniería de control. El método de identificación propuesto supone una modificación crítica del modelo neuronal de Hopfield, ya que aparecen pesos que varían con el tiempo, por lo que se presenta un riguroso estudio de estabilidad y convergencia. Asimismo, se realizan simulaciones de la aplicación del método propuesto a diversos sistemas mecánicos y epidemiológicos, mostrando la eficiencia del método, así como confirmando las características reveladas en el análisis teórico.

La tesis comienza presentando una revisión del estado del arte del paradig-

ma de Hopfield aplicado a optimización, en base a trabajos previos del propio autor y otras publicaciones. Así, en el Capítulo 1 se recoge una descripción de la metodología de optimización con redes de Hopfield y se distinguen las distintas formulaciones que de este paradigma se han propuesto, así como las limitaciones de cada una. La formulación discreta de Hopfield obtiene pobres resultados, debido a su alta probabilidad de caída en mínimos locales. La formulación continua de Hopfield requiere del uso de una estrategia de incremento progresivo de la pendiente de la función de transferencia, dado que, para cualquier valor finito de esta pendiente, los puntos fijos no se encuentran en los vértices. Este tipo de estrategias incrementan el coste computacional del modelo, perjudicando su eficiencia. Finalmente, la formulación de Abe puede aplicarse directamente a optimización, de forma que se adopta como objeto de estudio en el resto de la tesis.

En el Capítulo 2 se estudia el modelo continuo de Hopfield, en la formulación de Abe, realizando las siguientes aportaciones:

- Se formula el sistema de Hopfield como un único sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Al derivar las ecuaciones del modelo, dejan de aparecer explícitamente las variables que representan los potenciales de las neuronas, así como la función de transferencia, quedando, como únicos estados del sistema, las salidas. De esta forma se facilita la aplicación de las técnicas conocidas para el análisis de sistemas dinámicos.

- Se demuestra que los puntos fijos interiores hiperbólicos son inestables.

Con la condición de hiperbolicidad, los únicos equilibrios estables se encuentran en los vértices, que son soluciones factibles del problema de optimización combinatorial.

- Para los puntos fijos interiores no hiperbólicos, también se demuestra que son inestables en el caso particular de redes de orden dos con tres neuronas.

Se conjetura que la inestabilidad de todos los puntos interiores, incluso

los no hiperbólicos, se cumple en general, es decir, que la condición de hiperbolicidad se podría omitir.

Las aportaciones presentadas, junto con la ya conocida de poseer función de Lyapunov, garantizan la capacidad de las redes de Hopfield continuas para resolver problemas de optimización combinatorial, justificando el estudio de su discretización, con objeto de realizar una implementación en ordenador.

En el Capítulo 3, el análisis del proceso de discretización de la red continua de Hopfield, proporciona los siguientes resultados:

- Se formula explícitamente el modelo discreto como la iteración de una única función.

Al expresar la red discretizada como un sistema definido por una iteración funcional, se puede interpretar el modelo, bien como un método numérico no estándar, bien como un sistema dinámico discreto. De esta forma, es posible aplicar las técnicas conocidas del análisis numérico y la teoría de sistemas dinámicos.

- Se demuestra que la red discretizada es una aproximación de primer orden del modelo continuo.

Desde el punto de vista numérico, por tanto, la discretización no estándar que se encuentra en la literatura no es mejor, por ejemplo, que la regla de Euler, más simple computacionalmente. En cambio, los resultados experimentales indican la superioridad de la red discretizada, lo que justifica el estudio de las propiedades dinámicas, para confirmar que éstas son el origen del mejor comportamiento del modelo discreto frente a los métodos estándares.

- Se demuestra que la red discretizada tiene los mismos puntos fijos que la red continua. Asimismo, se preserva su estabilidad o inestabilidad.

Dado que, en particular, los puntos fijos interiores son inestables, el sistema discreto tiene las mismas características favorables, desde el punto de vista de la estabilidad, que la red continua.

- Se demuestra que, con determinadas condiciones, la red discretizada puede poseer soluciones periódicas.

Dado que un sistema de gradiente no puede tener trayectorias periódicas, este resultado demuestra que el proceso de discretización, en general, destruye la función de Lyapunov y, por tanto, la capacidad de optimización de las redes de Hopfield se ve severamente penalizada.

En el Capítulo 4 se propone un novedoso método de identificación paramétrica de sistemas dinámicos, basado en la metodología de optimización con redes de Hopfield. En particular, se realizan las siguientes aportaciones:

- Se presenta el método de estimación de parámetros, formulado como una red de Hopfield continua con pesos y bias variables con el tiempo.

La formulación continua del método propuesto permite, en principio, tratar el caso de parámetros variables de forma natural, a diferencia de las técnicas de mínimos cuadrados.

- Se demuestra que, en el caso de que los parámetros sean constantes, la estimación proporcionada por la red de Hopfield converge al valor real de los parámetros, con la condición de excitación persistente.

El resultado obtenido puede aplicarse también al caso de parámetros que varían de forma repentina, siempre que el intervalo entre saltos sea suficiente para permitir la convergencia del estimador.

- En el caso de parámetros variables, se demuestra que la estimación converge a un entorno del valor del parámetro.

El proceso de demostración de este resultado proporciona indicaciones sobre cómo mejorar la eficiencia del estimador. Asimismo, se observa que el tamaño de la región acotada a la que converge el estimador depende, no sólo de la amplitud de la variación de los parámetros, sino de su frecuencia.

- Se presentan simulaciones de diversos sistemas robóticos y epidemiológicos, confirmando los hallazgos teóricos.

Se observa que el método propuesto es especialmente adecuado para la identificación de sistemas mecánicos, debido a las peculiaridades de estos sistemas, como la existencia de un modelo preciso y la disponibilidad de medidas de las variables. Asimismo, los resultados de la simulación muestran que el estimador neuronal propuesto se compara favorablemente con el conocido método de gradiente. En el caso del modelo epidemiológico, se obtienen resultados satisfactorios si el número de parámetros a estimar es reducido.

- Se propone una extensión del método de estimación con redes de Hopfield para tratar el caso de sistemas no linealmente parametrizados.

Mediante redes de Hopfield de alto orden, se puede contemplar el caso no linealmente parametrizado, para el que existen pocos métodos disponibles.

Con respecto a las líneas de trabajo futuro, los aspectos de la presente tesis en los que podría profundizarse son los siguientes:

- Demostrar la conjetura de que los puntos fijos interiores de la red continua de Hopfield, en la formulación de Abe, son inestables incluso en el caso no hiperbólico.
- Diseñar métodos numéricos que preserven la función de Lyapunov del modelo continuo, ya sea éste formulado bien como una ecuación diferencial ordinaria, bien como una ecuación algebraico-diferencial.
- Aplicar el método de identificación paramétrica con redes de Hopfield a sistemas más complejos, con limitaciones realistas, por ejemplo: identificar mecanismos robóticos con múltiples grados de libertad, en los que no se disponga de algunos de los estados; o estimar parámetros en modelos epidemiológicos haciendo uso de datos reales, que contienen inexactitudes, con el objetivo de validar el propio modelo.
- Integrar el estimador neuronal en un sistema de control adaptativo, analizando la estabilidad del sistema completo en bucle cerrado.

Apéndice A

Resultados matemáticos utilizados

Con objeto de que el texto sea autocontenido, se incluyen aquí algunos resultados estándar mencionados previamente.

La teoría de los sistemas dinámicos se estructura en torno al concepto de estabilidad. Las definiciones y resultados básicos pueden encontrarse en cualquier texto elemental sobre sistemas no lineales o ecuaciones diferenciales, por ejemplo, [45, 112, 62]. En todo caso, por completitud, se reproducen aquí las definiciones fundamentales:

Definición A.1. El punto fijo $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ del sistema no lineal $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ es estable si, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que la trayectoria $\mathbf{x}(t)$, solución del sistema, cumple

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{A.1})$$

Definición A.2. El punto fijo $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ del sistema no lineal $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ es asintóticamente estable si es estable y, además, δ puede elegirse de forma que

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (\text{A.2})$$

Los dos siguientes resultados son las herramientas básicas del análisis clási-

co de estabilidad de sistemas dinámicos. Estos lemas encuentran su aplicación en el análisis de estabilidad de la red continua, en el Capítulo 2:

Lema A.1 (Teorema 4.1 en [62], pág. 114).

Sea $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ un punto fijo del sistema no lineal $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ y $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene el origen. Sea $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable que cumple:

$$V(\mathbf{0}) = 0 \quad ; \quad V(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D} - \mathbf{0} \quad (\text{A.3})$$

y

$$\frac{dV}{dt} \leq 0 \quad \forall \mathbf{x}(t) \in \mathcal{D} \quad (\text{A.4})$$

Entonces, el origen es estable. Si, además,

$$\frac{dV}{dt} < 0 \quad \forall \mathbf{x}(t) \in \mathcal{D} - \mathbf{0} \quad (\text{A.5})$$

entonces el origen es asintóticamente estable.

Lema A.2 (Teorema 4.7 en [62], pág. 139).

Sea $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ un punto fijo del sistema no lineal $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, donde $\mathbf{f}$ es continuamente diferenciable. Sea $\mathbf{A}$ la matriz jacobiana de la función $\mathbf{f}$ en el origen:

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \quad (\text{A.6})$$

Entonces, el origen es asintóticamente estable si la parte real de todos los autovalores de $\mathbf{A}$ es negativa, e inestable si la parte real de, al menos, un autovalor de $\mathbf{A}$ es positiva.

La versión discreta del lema anterior permite determinar la estabilidad de la red discretizada, en el Capítulo 3:

Lema A.3 (Sección 5.9 en [112], pág. 264).

El punto fijo $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ del sistema discreto $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ es asintóticamente estable si la parte real de todos los autovalores del jacobiano de $\mathbf{f}$ es menor que uno, en valor absoluto.

Observación. Tradicionalmente, los resultados sobre estabilidad se establecen en el origen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Sin embargo, pueden ser extendidos fácilmente a otro punto fijo cualquiera $\mathbf{x}^*$, considerando un nuevo sistema, dado por $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{y} + \mathbf{x}^*)$, mediante el cambio de variables $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$, de forma que el nuevo sistema tiene el correspondiente punto fijo en el origen.

El siguiente resultado es básico para demostrar que la red discretizada, presentada en el Capítulo 3 como un método numérico para la solución de la ecuación continua, es un método convergente:

Teorema A.1 (Teorema 3.4 en [43], pág. 160).

Sea U un entorno de $\{t, \mathbf{x}(t) \mid \mathbf{x}_0 \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_M\}$, donde $\mathbf{x}(t)$ es la solución exacta de la ecuación diferencial $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, y supóngase que en U existe una cota del jacobiano de $\mathbf{f}$: $\|\mathbf{J}_f\| \leq L$. Sea g la función que define un método numérico $\mathbf{x}_{k+1} = g(\mathbf{x}_k)$, que aproxima la ecuación diferencial con error local acotado: $\|e_{\Delta t}\| \leq C \Delta t^{p+1}$. Entonces, el error global puede ser acotado mediante la expresión:

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_k\| \leq \Delta t^p \frac{C}{L} (e^{Lt} - 1) \quad (\text{A.7})$$

donde $t = k \Delta t$ y $\mathbf{x}_k = \underbrace{g \circ g \circ \dots \circ g}_{k \text{ veces}}(\mathbf{x}_0; \Delta t)$ es la trayectoria discreta tras k pasos del método numérico.

El teorema que se presenta a continuación es la herramienta clave para demostrar la aparición de soluciones periódicas en la red discretizada, que es el resultado principal del Capítulo 3. Puede encontrarse en los textos de estabilidad avanzada [42] o en las publicaciones de análisis dinámico de métodos numéricos [53]:

Teorema A.2 (Lema 2.2 en [53]).

Sea $h(\mathbf{x}(t+1), \mathbf{x}(t); \mu) = \mathbf{0}$ la ecuación que define, de forma implícita, un sistema dinámico discreto, donde μ es un parámetro y la función $h(\mathbf{y}, \mathbf{z}; \mu)$ es suficientemente diferenciable con respecto a las tres variables: μ , $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$. Sea $\mathbf{x}^*$ un punto fijo, es decir, se satisface $h(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*; \mu) = \mathbf{0} \quad \forall \mu$, y se asumen las siguientes condiciones:

1. Existe un vector θ tal que $\text{Null}(\mathbf{A}(\mu_0)) = \text{span}(\theta)$ donde la matriz $\mathbf{A}$ está definida por $\mathbf{A}(\mu) = \mathbf{J}_y(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*; \mu) - \mathbf{J}_z(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*; \mu)$, y los símbolos $\mathbf{J}_y$ y $\mathbf{J}_z$ representan los jacobianos de h con respecto a la primera y segunda variables, respectivamente.
2. La matriz $\mathbf{J}_y(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*; \mu_0) + \mathbf{J}_z(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*; \mu_0)$ es inversible.
3. Se cumple que: $\left(\frac{\partial \mathbf{A}(\mu)}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\mu_0} \right) \cdot \theta \notin \text{Range}(\mathbf{A}(\mu_0))$

Entonces, para $\epsilon \ll 1$, existe una solución de periodo dos, de la forma:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^* + \epsilon(-1)^t + O(\epsilon^2) \quad (\text{A.8})$$

para $\mu = \mu_0 + O(\epsilon)$.

El siguiente lema es auxiliar en la demostración del Teorema 3.2, en el Capítulo 3:

Lema A.4 (Teorema 1.4.7 en [48], pág. 59).

Dada una matriz $\mathbf{A}$, todo autovector (por la derecha) de $\mathbf{A}$, correspondiente a un autovalor λ , es ortogonal a todo autovector por la izquierda de $\mathbf{A}$ correspondiente a un autovalor $\mu \neq \lambda$.

Para el estudio del método de estimación con redes de Hopfield, descrito en el Capítulo 4, no es posible utilizar el conocido Teorema de LaSalle-Krasovskii, que aparece en los textos elementales sobre estabilidad (p.ej. [62], pág. 128), ya que nos encontramos ante un sistema no autónomo. Por ello, es preciso recurrir a resultados más complejos, que establecen un principio de invariancia similar para esta clase de sistemas:

Lema A.5 (Lema 4.3 en [99], pág. 125).

Si una función escalar $V(\mathbf{x}, t)$ cumple:

- $V(\mathbf{x}, t)$ está acotada inferiormente.
- $\frac{dV(\mathbf{x}, t)}{dt}$ es semidefinida negativa.

- $\frac{dV(\mathbf{x}, t)}{dt}$ es uniformemente continua en el tiempo.

entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dV(\mathbf{x}, t)}{dt} = 0$ y $V(\mathbf{x}, t)$ converge a un valor límite finito.

Observación. Es trivial demostrar, mediante el teorema del valor medio de la derivación, que una condición suficiente para la continuidad uniforme de una función es la acotación de su derivada. Por tanto, como se comenta en [99], el teorema anterior puede aplicarse también si la tercera condición (la continuidad uniforme de $\frac{dV(\mathbf{x}, t)}{dt}$) se sustituye por la acotación de la derivada segunda de V con respecto al tiempo.

Es importante señalar que el anterior resultado deriva directamente del Lema de Barbalat que, por su interés histórico y bibliográfico, se enuncia a continuación:

Lema A.6 (Lema de Barbalat, [99], pág. 123; véase una versión equivalente en [62], pág. 323).

Si una función real de variable real $f(x)$ cumple:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) < \infty$, y
- $\frac{df(x)}{dx}$ es uniformemente continua

entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{df(x)}{dx} = 0$.

En el caso de parámetros variables, es posible demostrar que el error permanece acotado, para lo que es preciso el resultado que se reseña a continuación y que, a su vez, requiere una definición previa:

Definición A.3. Una función continua $\alpha : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$ se dice que pertenece a la clase $\mathcal{K}$ si es estrictamente creciente y $\alpha(0) = 0$.

Teorema A.3 (Teorema 4.18 en [62], pág. 172).

Sea un sistema dinámico no autónomo dado por la ecuación $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}, t)$. Sea, además, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene al origen, V una función diferenciable con derivadas continuas y B_r una bola de radio r en torno al origen. Si

- La función V cumple

$$\alpha_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(\mathbf{x}, t) \leq \alpha_2(\|\mathbf{x}\|)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \cdot f(\mathbf{x}, t) \leq -W_3(\mathbf{x}), \quad \forall \|\mathbf{x}\| \geq \mu > 0 \quad (\text{A.9})$$

$\forall t \geq 0$ y $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}$, donde α_1 y α_2 pertenecen a la clase $\mathcal{K}$ y W_3 es continua y definida positiva.

- $B_r \subset \mathcal{D}$.
- $\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$.
- El estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ satisface $\|\mathbf{x}(t_0)\| \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$

Entonces, existe $T \geq 0$ tal que la solución del sistema cumple:

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)), \quad \forall t \geq t_0 + T \quad (\text{A.10})$$

Los dos siguientes lemas se refieren a las matrices simétricas y son necesarios para probar la anulación del error del método de estimación con redes de Hopfield presentado en el Capítulo 4.

Lema A.7 (Teorema 4.1.5 en [48], pág. 171).

Toda matriz simétrica es diagonalizable y sus autovalores son reales.

Teorema A.4 (Teorema de Rayleigh-Ritz, [48], pág. 176).

Dada una matriz simétrica $\mathbf{A}$, para todo vector $\mathbf{v}$, el valor de la forma cuadrática $\mathbf{v}^\top \mathbf{A} \mathbf{v}$ cumple:

$$\lambda_{\min} \mathbf{v}^\top \mathbf{v} \leq \mathbf{v}^\top \mathbf{A} \mathbf{v} \leq \lambda_{\max} \mathbf{v}^\top \mathbf{v} \quad (\text{A.11})$$

siendo $\lambda_{\min}$ y $\lambda_{\max}$ los autovalores mínimo y máximo de $\mathbf{A}$, respectivamente.

Apéndice B

Cálculos auxiliares

En esta sección se incluyen algunos resultados que no presentan dificultad, aunque pueden no resultar evidentes a primera vista, por lo que se han incluido para favorecer la completitud del trabajo. No obstante, se ha considerado preferible no incluirlos en el texto para no romper la continuidad de la exposición.

El siguiente lema se utiliza repetidas veces en el Capítulo 2, para estudiar los autovalores del jacobiano de la red de Hopfield de alto orden, así como en la Sección 4.4.3 del Capítulo 4, al demostrar la convergencia del método de estimación con redes de Hopfield.

Lema B.1.

Sea $\mathbf{B}$ una matriz simétrica y $\mathbf{D}$ una matriz diagonal con $d_{ii} > 0 \forall i$. Entonces $\mathbf{D}\mathbf{B}$ es diagonalizable y todos sus autovalores son reales.

Demostración. Como los elementos d_{ii} de la diagonal de $\mathbf{D}$ son positivos, la matriz $\mathbf{D}$ es definida positiva. En consecuencia, existe la matriz $\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}$, así como su inversa $\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}$. Por tanto, es posible establecer la siguiente identidad [31]:

$$\mathbf{D}\mathbf{B} = \mathbf{D}^{\frac{1}{2}} \mathbf{D}^{\frac{1}{2}} \mathbf{B} \mathbf{D}^{\frac{1}{2}} \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{B.1})$$

lo que muestra que la matriz $\mathbf{D}\mathbf{B}$ es semejante a $\mathbf{D}^{\frac{1}{2}} \mathbf{B} \mathbf{D}^{\frac{1}{2}}$. Pero esta última matriz, evidentemente, es simétrica, por lo que, por el Lema A.7, es diago-

nalizable y sus autovalores son reales. Lo mismo, por tanto, puede decirse de $\mathbf{DB}$, ya que las transformaciones de semejanza conservan los autovalores y la forma de Jordan, diagonal en este caso. $\square$

Los tres siguientes lemas se relacionan con la función de Lyapunov que se define en la Sección 4.4 para demostrar la estabilidad del método de estimación con redes de Hopfield.

Lema B.2.

Sea la función $f(x) = \frac{x}{1 - (a - x)^2}$, siendo a una constante. Su integral es:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= -\frac{1-a}{2} \ln(1 - (a - x)) - \frac{1+a}{2} \ln(1 + (a - x)) \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left[(1 - (a - x))^{1-a} (1 + (a - x))^{1+a} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Demostración. La descomposición en factores simples proporciona:

$$\frac{x}{1 - (a - x)^2} = -\frac{1-a}{2(1 - (a - x))} + \frac{1+a}{2(1 + (a - x))} \quad (\text{B.3})$$

de forma que la integral es:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= -\frac{1-a}{2} \int \frac{dx}{1 - (a - x)} + \frac{1+a}{2} \int \frac{dx}{1 + (a - x)} \\ &= -\frac{1-a}{2} \ln(1 - (a - x)) - \frac{1+a}{2} \ln(1 + (a - x)) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

y la otra expresión resulta de las propiedades de los logaritmos. $\square$

Lema B.3.

La función $f(x) = -\frac{1}{2} \ln \left[(1 - (a - x))^{1-a} (1 + (a - x))^{1+a} \right]$ presenta un mínimo en $x = 0$ para todo valor $a \in (-1, 1)$.

Demostración. Del lema anterior, resulta que la derivada de $f(x)$ es $f'(x) =$

$\frac{x}{1 - (a - x)^2}$, que se anula en $x = 0$. La segunda derivada es, por tanto,

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \frac{x}{1 - (a - x)^2} = \frac{1 - (a - x)^2 - x(2(a - x))}{(1 - (a - x)^2)^2} \quad (\text{B.5})$$

que en el extremo $x = 0$ se reduce a:

$$f''(0) = \frac{1 - a^2}{(1 - a^2)^2} = \frac{1}{1 - a^2} \geq 0 \quad (\text{B.6})$$

ya que $a^2 \leq 1$. □

Lema B.4.

La función $g(a) = -\frac{1}{2} [(1 - a) \ln(1 - a) + (1 + a) \ln(1 + a)]$ está acotada inferiormente por el valor $-\ln 2$ en el intervalo $[-1, 1]$.

Demostración. La derivada de $g(a)$ es:

$$g'(a) = -\frac{1}{2} (-\ln(1 - a) - 1 + \ln(1 + a) + 1) = -\frac{1}{2} (-\ln(1 - a) + \ln(1 + a)) \quad (\text{B.7})$$

que se anula cuando $1 - a = 1 + a$, es decir, en $a = 0$. La segunda derivada es:

$$g''(a) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - a} + \frac{1}{1 + a} \right) = -\frac{1}{1 - a^2} \leq 0 \quad (\text{B.8})$$

por lo que el punto $a = 0$ es un máximo y los mínimos se alcanzarán en los extremos del intervalo $a = \pm 1$. Por ejemplo, en $a = 1$, tenemos:

$$\begin{aligned} g(1) &= \lim_{a \rightarrow 1} -\frac{1}{2} [(1 - a) \ln(1 - a) + (1 + a) \ln(1 + a)] \\ &= \lim_{a \rightarrow 1} -\frac{1}{2} \frac{\ln(1 - a)}{\frac{1}{1 - a}} - \ln 2 = \lim_{a \rightarrow 1} -\frac{1}{2} \frac{-\frac{1}{1 - a}}{\frac{1}{(1 - a)^2}} - \ln 2 \\ &= \lim_{a \rightarrow 1} \frac{1}{2} (1 - a) - \ln 2 = -\ln 2 \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

donde el límite se ha calculado por la regla de L'Hôpital. El desarrollo sería similar para el otro punto, $a = -1$. $\square$

Observación. La función $g(a)$ del lema anterior es el valor que toma la función $f(x)$ del Lema B.3 en el mínimo $x = 0$. La importancia del lema anterior, por tanto, es que la función $f(x)$ está acotada inferiormente para todo x y todo $a \in [-1, 1]$.

El siguiente lema es de aplicación en el estudio de la estabilidad del método de estimación con redes de Hopfield, realizado en el Capítulo 4. En concreto, permite calcular fácilmente el gradiente de una función de Lyapunov definida por una forma cuadrática.

Lema B.5.

Sea la forma cuadrática $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^\top \mathbf{A} \mathbf{v}$, donde $\mathbf{A}$ es una matriz simétrica. El vector gradiente de la función f viene dado por:

$$\nabla f = 2 \mathbf{A} \mathbf{v} \quad (\text{B.10})$$

Demostración. Expresando la función con las componentes v_i del vector $\mathbf{v}$ y los elementos a_{ij} de la matriz $\mathbf{A}$, se tiene, dada la simetría de $\mathbf{A}$:

$$f(\mathbf{v}) = \sum_i a_{ii} v_i^2 + 2 \sum_i \sum_{j>i} a_{ij} v_i v_j \quad (\text{B.11})$$

de forma que las derivadas parciales de f son:

$$\frac{\partial f}{\partial v_i} = 2 a_{ii} v_i + 2 \sum_{j \neq i} a_{ij} v_j = 2 \sum_j a_{ij} v_j \quad (\text{B.12})$$

Por tanto, el vector gradiente, cuya fila i es la derivada parcial respecto a v_i , resulta:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial v_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial v_n} \right)^\top = 2 \mathbf{A} \mathbf{v} \quad (\text{B.13})$$

$\square$

Bibliografía

- [1] Abe, S.: 1989, Theories on the Hopfield Neural Networks, *Proc. IEE International Joint Conference on Neural Networks*, Vol. I, pp. 557–564.
- [2] Abe, S.: 1993, Global Convergence and Suppression of Spurious States of the Hopfield Neural Networks, *IEEE Trans. on Circuits and Systems-I* **40**(4), 246–257.
- [3] Abe, S.: 1996, Convergence Acceleration of the Hopfield Neural Network by Optimizing Integration Step Sizes, *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics B* **26**(1), 194–201.
- [4] Abe, S. y Gee, A. H.: 1995, Global Convergence of the Hopfield Neural Network with Nonzero Diagonal Elements, *IEEE Trans. on Circuits and Systems-II* **42**(1), 39–45.
- [5] Abonyi, J., Nagy, L. y Szeifert, F.: 1999, Adaptive fuzzy inference system and its application in modelling and model based control, *Chemical Engineering Research & Design* **77**(A4), 281–290.
- [6] Al-Duwaish, H.: 2000, A genetic approach to the identification of linear dynamical systems with static nonlinearities, *International Journal of Systems Science* **31**(3), 307–313.
- [7] Alfonseca, M., Martínez-Bravo, M. T. y Torrea, J. L.: 2000, Mathematical Models for the Analysis of Hepatitis B and AIDS Epidemics, *Simulation* **74**(4), 219–226.

- [8] Algaba, A., Merino, M., Freire, E., Gamero, E. y Rodríguez-Luis, A.: 2003, Some results on Chua's equation near a triple-zero linear degeneracy, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **13**(3), 583–608.
- [9] Arazoza, H. y Lounes, R.: 2002, A non-linear model for a sexually transmitted disease with contact tracing, *Mathematical Medicine and Biology: A Journal of the IMA* **19**(3), 221–234.
- [10] Arazoza, H., Lounes, R., Hoang, T. y Interián, Y.: 2000, Modeling HIV Epidemic Under Contact Tracing-The Cuban Case, *Journal of Theoretical Medicine* **2**, 267–274.
- [11] Atencia, M. A., Joya, G. y Sandoval, F.: 2000, A Formal Model for Definition and Simulation of Generic Neural Networks, *Neural Processing Letters* **11**(2).
- [12] Atencia, M. A., Joya, G. y Sandoval, F.: 2001, Numerical implementation of continuous Hopfield networks for optimization, *Proc. European Symposium on Artificial Neural Networks (ESANN 2001)*, pp. 359–364.
- [13] Atencia, M. A., Joya, G. y Sandoval, F.: 2002, Continuous-state Hopfield Dynamics Based on Implicit Numerical Methods, en J. R. Dorronsoro (ed.), *Artificial Neural Networks (ICANN 2002). Lecture Notes on Computer Science*, Vol. 2415, Springer, pp. 1365–1370.
- [14] Atencia, M. A., Joya, G. y Sandoval, F.: 2003a, Combinatorial Optimization via Discrete Gradient Implementation of Hopfield Neural Networks, *6th International Conference of Operations Research (OR 2003), La Habana (Cuba)*.
- [15] Atencia, M. A., Joya, G. y Sandoval, F.: 2003b, Hopfield Neural Networks for Parametric Identification of a Robotic System, *Proc. Engineering Application of Neural Networks Conference (EANN 2003), Málaga (Spain)*, pp. 311–318.
- [16] Atencia, M. A., Joya, G. y Sandoval, F.: 2003c, Modelling the HIV-AIDS Cuban Epidemics with Hopfield Neural Networks, en J. Mira y J. R.

- Álvarez (eds), *Artificial Neural Nets. Problem Solving Methods. Lecture Notes on Computer Science (IWANN 2003)*, Vol. 2687, Springer, pp. 449–456.
- [17] Atencia, M. A., Joya, G. y Sandoval, F.: 2003d, Spurious minima and basins of attraction in higher-order Hopfield networks, en J. Mira y J. R. Álvarez (eds), *Computational Methods in Neural Modeling. Lecture Notes on Computer Science (IWANN 2003)*, Vol. 2686, Springer, pp. 350–357.
- [18] Atencia, M. A., Joya, G. y Sandoval, F.: 2004a, Discretization of Continuous Higher Order Hopfield Networks for Combinatorial Optimization, *Neural Computation (enviado)*.
- [19] Atencia, M. A., Joya, G. y Sandoval, F.: 2004b, Dynamical Analysis of Continuous Higher Order Hopfield Networks for Combinatorial Optimization, *Neural Computation (enviado)*.
- [20] Atencia, M. A., Joya, G. y Sandoval, F.: 2004c, Gray Box Identification with Hopfield Neural Networks, *Revista Investigacion Operacional* **25**(1), 54–60.
- [21] Atencia, M. A., Joya, G. y Sandoval, F.: 2004d, Optimización con sistemas neuronales de Hopfield. Aplicación a la Identificación Paramétrica de Sistemas Dinámicos, en G. Joya, M. Atencia, A. Ochoa y S. Allende (eds), *Optimización Inteligente*, SPICUM, pp. 3–42.
- [22] Atencia, M. A., Joya, G. y Sandoval, F.: 2004e, Parametric Identification of Robotic Systems with Stable Time-varying Hopfield Networks, *Neural Computing & Applications* **13**(2), En imprenta.
- [23] Bailey, N. T.: 1975, *The mathematical theory of infectious diseases and its applications*, Ch. Griffin and Company LTD.
- [24] Benosman, M., Boyer, F., Le Vey, G. y Primault, D.: 2002, Flexible Links Manipulators: from Modelling to Control, *Journal of Intelligent and Robotic Systems* **34**(4), 357–379.

- [25] Bharitkar, S., Tsuchiya, K. y Takefuji, Y.: 1999, Microcode Optimization with Neural Networks, *IEEE Trans. on Neural Networks* **10**(3), 698–703.
- [26] Brenan, K., Campbell, S. y Petzold, L.: 1995, *Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations*, SIAM.
- [27] Chen, T. y Amari, S.-I.: 2001, New theorems on global convergence of some dynamical systems, *Neural Networks* **14**, 251–255.
- [28] Ciarlet, P. y Lions, J.: 2002, *Handbook of Numerical Analysis*, Vol. 8, Elsevier.
- [29] Cichocki, A. y Unbehauen, R.: 1993, *Neural Networks for Optimization and Signal Processing*, Wiley.
- [30] Delgado, A., Kambhampati, C. y Warwick, K.: 1995, Dynamic Recurrent Neural-Network for System-Identification and Control, *IEE Proc. on Control Theory and Applications* **142**(4), 307–314.
- [31] Demmel, J.: 2000, Hermitian Eigenproblems, *Z. Bai, J. Demmel, J. Dongarra, A. Ruhe, H. van der Vorst, editors. Templates for the Solution of Algebraic Eigenvalue Problems: A Practical Guide*, SIAM, pp. 11–14.
- [32] Driankov, D., Hellendoorn, H. y Reinfrank, M.: 1996, *An introduction to fuzzy control*, Springer.
- [33] Esteva, L. y Vargas, C.: 1998, Analysis of a Dengue disease transmission model, *Mathematical Biosciences* **150**(2), 131–151.
- [34] Esteva, L. y Vargas, C.: 1999, A model for dengue disease with variable human population, *Journal of Mathematical Biology* **38**(3), 220–240.
- [35] Esteva, L. y Vargas, C.: 2000, Influence of vertical and mechanical transmission on the dynamics of dengue disease, *Mathematical Biosciences* **167**(1), 51–64.

- [36] Farag, W., Quintana, V. y Lambert-Torres, G.: 1998, A genetic-based neuro-fuzzy approach for modeling and control of dynamical systems, *IEEE Trans. on Neural Networks* **9**(5), 756–76.
- [37] Galán-Marín, G. y Muñoz Pérez, J.: 2001, Design and analysis of maximum Hopfield networks, *IEEE Trans. on Neural Networks* **12**(2), 329–339.
- [38] Garey, M. y Johnson, D.: 1979, *Computers and intractability. A guide to the Theory of NP-Completeness*, W.H. Freeman and Company.
- [39] Gear, C.: 1971, *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall.
- [40] Ghanemi, S. y Mohamed, B.: 2001, A VLSI systolic implementation of the Hopfield and back-propagation neural algorithms, *Kybernetes* **30**(1), 35–47.
- [41] Golub, G. H. y van Loan, C. F.: 1996, *Matrix computations*, The Johns Hopkins University press.
- [42] Guckenheimer, J. y Holmes, P.: 1997, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer.
- [43] Hairer, E., Nørsett, S. y Wanner, G.: 1987, *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff problems*, Springer.
- [44] Hertz, J., Krogh, A. y Palmer, R.: 1991, *Introduction to the theory of neural computation*, Addison-Wesley.
- [45] Hirsch, M. W. y Smale, S.: 1974, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press.
- [46] Hopfield, J.: 1982, Neural Networks and physical systems with emergent collective computational abilities, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **79**, 2554–2558.

- [47] Hopfield, J.: 1984, Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **81**, 3088–3092.
- [48] Horn, R. A. y Johnson, C. R.: 1985, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press.
- [49] Hrycej, T.: 1997, *Neurocontrol: towards an industrial control technology*, John Wiley & Sons.
- [50] Hrycej, T.: 2001, Estimates of average complexity of neurocontrol algorithms, *Neural Networks* **14**, 1089–1098.
- [51] Hsieh, Y.-H., Arazoza, H., Lee, S.-M. y Chen, C. W. S.: 2002, Estimating the number of Cubans infected sexually by human immunodeficiency virus using contact tracing data, *International Journal of Epidemiology* **31**(3), 679–683.
- [52] Hsieh, Y.-H., Chen, C. W. S., Lee, S.-M. y Arazoza, H.: 2001, On the recent sharp increase in HIV detections in Cuba, *AIDS* **15**(3), 426–428.
- [53] Iserles, A., Peplow, A. y Stuart, A.: 1991, A unified approach to spurious solutions introduced by time discretisation. Part I: Basic theory, *SIAM J. Numer. Anal.* **28**(6), 1723–1751.
- [54] Isidori, A.: 1989, *Nonlinear Control Systems*, Springer.
- [55] Joya, G.: 1997, *Contribuciones de las redes neuronales artificiales de alto orden al diseño de sistemas autónomos*, Tesis Doctoral, Departamento de Tecnología Electrónica, Universidad de Málaga.
- [56] Joya, G., Atencia, M. A. y Sandoval, F.: 1991, Application of High-order Hopfield Neural Networks to the Solution of Diophantine Equations, en A. Prieto (ed.), *Artificial Neural Networks. Lecture Notes on Computer Science (IWANN 1991)*, Vol. 540, Springer, pp. 395–400.

- [57] Joya, G., Atencia, M. A. y Sandoval, F.: 1997a, Associating arbitrary-order energy functions to an artificial neural network. Implications concerning the resolution of optimization problems, *Neurocomputing* **14**, 139–156.
- [58] Joya, G., Atencia, M. A. y Sandoval, F.: 1997b, Hopfield neural networks applied to optimization problems: some theoretical and simulation results, *Biological and Artificial Computation: From Neuroscience to Technology. Lecture Notes on Computer Science (IWANN 1997)*, Vol. 1240, Springer, pp. 556–565.
- [59] Joya, G., Atencia, M. A. y Sandoval, F.: 2002, Hopfield Neural Networks for Optimization: Study of the Different Dynamics, *Neurocomputing* **43**(1–4), 219–237.
- [60] Joya, G., Atencia, M. A. y Sandoval, F.: 2003, Hopfield Neural Networks for Optimization. Study of the different dynamics and Identification Applications (Tutorial), *Proc. Engineering Application of Neural Networks Conference (EANN 2003), Málaga (Spain)*, pp. xvi–xxiv.
- [61] Juang, J.-C.: 1999, Stability Analysis of Hopfield-Type Neural Networks, *IEEE Trans. on Neural Networks* **10**(6), 1366–1374.
- [62] Khalil, H. K.: 2002, *Nonlinear Systems*, Prentice Hall.
- [63] Kim, J. y Kasabov, N.: 1999, HyFIS: adaptive neuro-fuzzy inference systems and their application to nonlinear dynamical systems, *Neural Networks* **12**(9), 1301–1319.
- [64] Kosmatopoulos, E. B., Polycarpou, M. M., Christodoulou, M. A. y Ioannou, P. A.: 1995, High-Order Neural Network Structures for Identification of Dynamical Systems, *IEEE Trans. on Neural Networks* **6**(2), 422–431.
- [65] Krener, A. y Isidori, A.: 1983, Linearization by output injection and nonlinear observers, *Systems and Control Letters* **3**, 47–52.
- [66] Ljung, L.: 1999, *System Identification. Theory for the User*, Prentice Hall.

- [67] Ljung, L.: 2003, *System Identification Toolbox User's Guide*.
- [68] López, A. y Sánchez, L.: 2003, Genetic search of block-based structures of dynamical process models, **2686**, 526–533.
- [69] Lounes, R. y Arazoza, H.: 1999, A two-type model for the Cuban national programme on HIV AIDS, *IMA Journal of Mathematics Applied in Medicine and Biology* **16**(2), 143–154.
- [70] Marino, R.: 1997, Adaptive Control of Nonlinear Systems: Basic results and Applications, *Annual Reviews in Control* **21**, 55–66.
- [71] Marino, R. y Tomei, P.: 1993, Global Adaptive Output-Feedback Control of Nonlinear Systems, Part II: Nonlinear Parameterization, *IEEE Trans. on Automatic Control* **38**(1), 33–48.
- [72] Marino, R. y Tomei, P.: 1995, *Nonlinear Control Design*, Prentice Hall.
- [73] Matsuda, S.: 1998, Optimal Hopfield Network for Combinatorial Optimization with Linear Cost Function, *IEEE Trans. on Neural Networks* **9**(6), 1319–1330.
- [74] Matsuda, S.: 2002, “Optimal” Neural Representation of Higher Order for Traveling Salesman Problems, *Electronics and Communications in Japan, Part 2* **85**(9), 32–42.
- [75] McLachlan, R., Quispel, R. y Robidoux, N.: 1999, Geometric integration using discrete gradients, *Philos. Trans. of the Royal Society of London Series A* **357**(1754), 1021–1045.
- [76] Michel, A. y Miller, R.: 1990, An invariance theorem with applications to adaptive control, *IEEE Trans. on Automatic Control* **35**(6), 744–748.
- [77] Narendra, K. S. y Parthasarathy, K.: 1990, Identification and control of dynamical systems using neural networks, *IEEE Trans. on Neural Networks* **1**, 4–27.

- [78] Nijmeijer, H. y van der Schaft, A.: 1990, *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer.
- [79] Nørgaard, M., Ravn, O., Poulsen, N. y Hansen, L.: 2000, *Neural Networks for Modelling and Control of Dynamic Systems*, Springer.
- [80] Ostrowski, J.: 2003, *Nonlinear Control Theory*.
- [81] Pardalos, P. M. y Resende, M. G.: 2002, *Handbook of Applied Optimization*, Oxford University Press.
- [82] Passino, K. M. y Yurkovich, S.: 1998, *Fuzzy control*, Addison-Wesley.
- [83] Pedroso-Rodríguez, L. M.: 2002, *Aplicación de Algoritmos Evolutivos a la solución del problema de Estimación de Parámetros en modelos definidos por Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Tesis de Diploma, Fac. Mat. Comp., Universidad de La Habana.
- [84] Pedroso-Rodríguez, L. M., Marrero, A. y Arazoza, H.: 2003, Nonlinear Parametric Model Identification using Genetic Algorithms, en J. Mira y J. R. Álvarez (eds), *Artificial Neural Nets. Problem Solving Methods. Lecture Notes on Computer Science (IWANN 2003)*, Vol. 2687, Springer, pp. 473–480.
- [85] Petridis, V., Paterakis, E. y Kehagias, A.: 1998, Hybrid neural-genetic multimodal parameter estimation algorithm, *IEEE Trans. on Neural Networks* **9**(5), 862–876.
- [86] Pham, D. y Liu, X.: 1995, *Neural Networks for Identification, Prediction and Control*, Springer.
- [87] Poznyak, A. S., Sanchez, E. y Yu, W.: 2001, *Differential Neural Networks for Robust Nonlinear Control*, World Scientific Publishing.
- [88] Riaza, R. y Zufiria, P. J.: 2002, Discretization of implicit ODEs for singular root-finding problems, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **140**, 695–712.

- [89] Rico-Martínez, R., Anderson, J. y Kevrekedis, I.: 1994, Continuous-time nonlinear signal processing: A neural network based approach for gray box identification, *Proc. IEEE Workshop on Neural Networks for Signal Processing*, pp. 596–605.
- [90] Rivera-Sampayo, R. y Vélez-Reyes, M.: 2001, Gray-Box Modeling of Electric Drive Systems Using Neural Networks, *Proc. IEEE International Conference on Control Applications*, pp. 146–151.
- [91] Ruano, A.: 2003, Comparison of Neural Models, Off-line and On-line Learning Algorithms for a Benchmark Problem, en J. Mira y J. R. Álvarez (eds), *Artificial Neural Nets. Problem Solving Methods. Lecture Notes on Computer Science (IWANN 2003)*, Vol. 2687, Springer, pp. 457–464.
- [92] Ruiz-Gómez, J., López-Baldán, M. y García-Cerezo, A.: 2002, Fuzzy Modelling of a Ternary Batch Distillation Column, *International Journal of Computer Research* **11**(3), 347–355.
- [93] Ruiz-Gómez, J., López-Baldán, M. y García-Cerezo, A.: 2003, Input-Output Fuzzy Identification of Nonlinear Multivariable Systems. Application to a Case of AIDS Spread Forecast, en J. Mira y J. R. Álvarez (eds), *Artificial Neural Nets. Problem Solving Methods. Lecture Notes on Computer Science (IWANN 2003)*, Vol. 2687, Springer, pp. 481–488.
- [94] Samad, T. y Harper, P.: 1990, High-order Hopfield and Tank optimization networks, *Parallel Computing* **16**, 287–292.
- [95] Sastry, S. y Bodson, M.: 1989, *Adaptive Control: Stability, Convergence, and Robustness*, Prentice-Hall.
- [96] Schittkowski, K.: 2002, *Numerical Data Fitting in Dynamical Systems*, Kluwer Academic Publishers.
- [97] Schropp, J.: 1995, Using dynamical systems methods to solve minimization problems, *Applied Numerical Mathematics* **18**, 321.335.

- [98] Schropp, J.: 2000, One-step and multistep procedures for constrained minimization problems, *IMA Journal of Numerical Analysis* **20**(1), 135–152.
- [99] Slotine, J.-J. y Li, W.: 1991, *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall.
- [100] Smith, K. A.: 1999, Neural networks for combinatorial optimization: A review of more than a decade of research, *INFORMS Journal on Computing* **11**(1), 15–34.
- [101] Sontag, E. D.: 1989, Smooth stabilization implies coprime factorization, *IEEE Trans. on Automatic Control* **34**(4), 435–443.
- [102] Sontag, E. D.: 1995, On the Input-to-State Stability Property, *European Journal of Control* **1**(1), 24–36.
- [103] Sontag, E. D. y Wang, Y.: 1999, Notions of Input to Output Stability, *Systems & Control Letters* **38**(4-5), 235–248.
- [104] Spong, M. W. y Vidyasagar, M.: 1989, *Robot dynamics and control*, John Wiley & Sons.
- [105] Stuart, A. y Humphries, A.: 1996, *Dynamical systems and numerical analysis*, Cambridge University Press.
- [106] Takagi, T. y Sugeno, M.: 1985, Fuzzy Identification of Systems and its Application to Modelling and Control, *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics* **15**, 116–132.
- [107] Takefuji, Y. y Lee, K. C.: 1991, Artificial Neural networks for Four-Coloring Map Problems and K-Colorability Problems, *IEEE Trans. on Circuits and Systems* **38**(3), 326–333.
- [108] Tan, S. y Yu, Y.: 1996, Adaptive fuzzy modeling of nonlinear dynamical systems, *Automatica* **32**(4), 637–643.
- [109] Tank, D. y Hopfield, J.: 1985, 'Neural' Computation of Decisions in Optimization Problems, *Biological Cybernetics* **52**, 141–152.

- [110] Tiño, P., Horne, B. y Giles, C.: 2001, Attractive Periodic Sets in Discrete-Time Recurrent Networks (with Emphasis on Fixed-Point Stability and Bifurcations in Two-Neuron Networks), *Neural Computation* **13**(6), 1379–1414.
- [111] Unbehauen, H.: 1996, Some New Trends in Identification and Modeling of Nonlinear Dynamical Systems, *Applied Mathematics and Computation* **78**, 279–297.
- [112] Vidyasagar, M.: 1993, *Nonlinear systems analysis*, Prentice Hall.
- [113] Vidyasagar, M.: 1995, Minimum-seeking properties of analog neural networks with multilinear objective functions, *IEEE Trans. on Automatic Control* **40**(8), 1359–1375.
- [114] Vidyasagar, M.: 1998, Are Analog Neural Networks Better Than Binary Neural Networks?, *Circuits, Systems and Signal Processing* **17**(2), 243–270.
- [115] Wilson, G. y Pawley, G.: 1988, On the Stability of the Travelling Salesman Problem Algorithm of Hopfield and Tank, *Biological Cybernetics* **58**(1), 63–70.
- [116] Xie, W. y Rad, A.: 1999, Fuzzy on-line identification of SISO nonlinear systems, *Fuzzy Sets and Systems* **107**(3), 323–334.
- [117] Yesildirek, A. y Lewis, F.: 1995, Feedback Linearization Using Neural Networks, *Automatica* **31**(11), 1659–1664.
- [118] Zhou, S. y Xu, L.: 2001, A new type of recurrent fuzzy neural network for modeling dynamic systems, *Knowledge-Based Systems* **14**(5-6), 243–251.