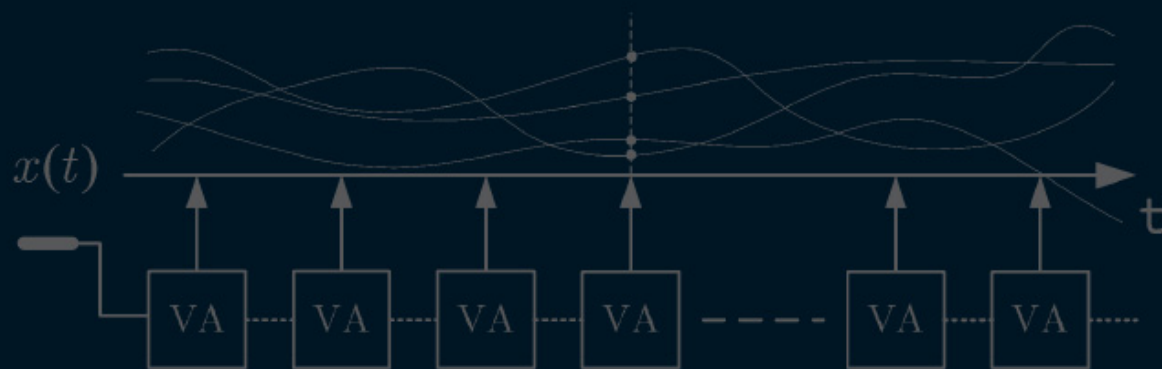


Jesús López
Eduardo Martos

Señales aleatorias

Teoría y ejercicios resueltos



 **Alfaomega**

 **marcombo**
ediciones técnicas

JESÚS LÓPEZ FERNÁNDEZ
EDUARDO MARTOS NAYA

SEÑALES ALEATORIAS
TEORÍA Y PROBLEMAS
RESUELTOS

 **marcombo**
ediciones técnicas

Señales aleatorias
Teoría y ejercicios resueltos

Primera edición, 2011

© 2011 Jesús López Fernández, Eduardo Martos Naya

© 2011 MARCOMBO, S.A.
Gran Via de les Corts Catalanes, 594
08007 Barcelona
www.marcombo.com

Edición revisada en 2026

Diseño de la cubierta: NDENU DISSENY GRÀFIC

«Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra sólo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra».

ISBN-13: 978-84-267-1690-3

D.L.: SE-6275-2010
Impreso en Publidisa
Printed in Spain

A Eva. J. López

A Ana. E. Martos

Índice general

Prólogo	III
1. Variables Aleatorias	1
1.1. Teoría básica de probabilidad	1
1.2. Variables aleatorias unidimensionales	3
1.3. Variables aleatorias bidimensionales y N dimensionales	11
1.4. Teorema de la Probabilidad Total	21
1.5. Teorema de Bayes	22
1.6. Teoremas asintóticos	22
Ejercicios	25
2. Caracterización de señales aleatorias	113
2.1. Herramientas para el estudio de señales aleatorias . . .	113
2.2. Señales aleatorias: definición	114
2.3. Caracterización señales aleatorias	115
2.4. Estacionariedad y ergodicidad	116
2.5. Relaciones estadísticas entre señales	119
2.6. Potencia y densidad espectral de potencia	120
Ejercicios	123
3. Procesado de señales aleatorias	191
3.1. Señales aleatorias y sistemas LTI: Análisis	191
3.2. Señales aleatorias discretas y sistemas LTI: Diseño. Fil- tros de Wiener	193
Ejercicios	197
Bibliografía	245

Prólogo

El presente libro es el resultado de más de diez años de experiencia docente de los autores en la materia de las señales aleatorias y el procesado estadístico de señales, llevada a cabo en el departamento de Ingeniería de Comunicaciones de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Telecomunicación de la Universidad de Málaga.

Aunque ha sido escrito en el contexto de la ingeniería de telecomunicación, la temática que en él se trata es fundamental para el resto de las ingenierías y titulaciones de carácter científico.

Aun siendo muy extensa la bibliografía existente relativa a esta materia, no existe un texto exclusivo dedicado a la resolución detallada de ejercicios dirigido a estudiantes de nivel universitario, algo que consideramos esencial para afianzar conceptos y vislumbrar el alcance y la aplicabilidad de los mismos. Con el presente libro pretendemos cubrir, en parte, esa carencia.

Es importante resaltar que en ningún caso se plantea como libro principal para el estudio de esta disciplina, pues, aunque incluye una introducción teórica a cada tema, su enfoque es primordialmente práctico y debe, por tanto, ser combinado con otros textos que cubran los conceptos teóricos con suficiente amplitud.

Se asume que el estudiante de este libro tiene los conocimientos de matemáticas correspondientes a un primer curso de ingeniería, así como de teoría básica de señales y sistemas que incluya los dominios transformados (Laplace, Z, Fourier).

El libro está estructurado en tres capítulos. Cada capítulo se divide, a su vez, en una parte de teoría y otra de ejercicios. Cada parte de teoría sintetiza de forma breve los conceptos y las expresiones que son necesarias para la resolución de los correspondientes ejercicios. Creemos importante advertir al lector de que el objetivo de la parte

teórica es establecer la notación y servir de consulta rápida y cómoda. No debe ser, por tanto, empleada como iniciación en los conceptos teóricos.

El primer capítulo está dedicado a variables aleatorias. Dado que las señales aleatorias se modelan en base a variables aleatorias, el dominio de éstas es crucial para abordar satisfactoriamente el estudio de las señales. La selección de los contenidos teóricos y de los ejercicios en este capítulo está fuertemente sesgada a su inmediata aplicación al campo de la caracterización y procesado de señales aleatorias.

En el segundo capítulo se presenta el modelo y las propiedades de las señales aleatorias, introduciéndose las funciones de autocorrelación y densidad espectral de potencia como herramientas imprescindibles para su caracterización. En la parte de ejercicios se aplican estas ideas al estudio de las señales más empleadas en los sistemas de comunicaciones, como son las señales digitales en una amplia variedad de formatos, así como al estudio de las señales de ruido.

El modelado y la caracterización de señales tiene sentido en la medida en que permiten el posterior diseño de sistemas que las procesen con un determinado fin. Siguiendo esta idea se presenta el tercer capítulo, que consta de dos secciones. En la primera se trata el análisis de una señal aleatoria a su paso por un sistema lineal e invariante en el tiempo para, a continuación, abordar en la segunda sección el diseño de sistemas desde un punto de vista estadístico. El procesado estadístico de señales es una materia muy amplia y, en algunos casos, ciertamente compleja. En este libro pretendemos ofrecer una primera aproximación al problema en un marco sencillo en el que se pongan de manifiesto las particularidades específicas de este tipo de diseño. Para ello, nos centramos en el diseño de filtros discretos de *Wiener* con respuesta al impulso finita, cuyas aplicaciones, aun siendo muy sencillos, son extensas.

Por último, quisiéramos desde aquí invitar al lector a hacernos llegar todas las sugerencias que crea oportunas sobre posibles aspectos que permitan mejorar esta obra.

Málaga, Mayo de 2010
Jesús López y Eduardo Martos
email: jlf@ic.uma.es, eduardo@ic.uma.es

Capítulo 1

VARIABLES ALEATORIAS

1.1. Teoría básica de probabilidad

1.1.1. Definiciones y Axiomas

Un *suceso* elemental es cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Un *espacio muestral* es el conjunto de todos los sucesos elementales asociados a un experimento aleatorio.

Un *suceso* es cualquier subconjunto de un espacio muestral.

La *probabilidad* es una función que asigna un número real a cualquier suceso y que cumple los axiomas a continuación indicados.

Dado un espacio muestral, S , y dos sucesos, A y B , se establecen los siguientes axiomas:

$$1) \Pr(A) \geq 0. \quad (1.1)$$

$$2) \Pr(S) = 1. \quad (1.2)$$

$$3) \Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B), \text{ si } A \cap B = \emptyset. \quad (1.3)$$

A partir de los axiomas anteriores se pueden demostrar las siguientes expresiones:

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B). \quad (1.4)$$

$$\Pr(\bar{A}) = 1 - \Pr(A). \quad (1.5)$$

$$\Pr(\emptyset) = 0. \quad (1.6)$$

1.1.2. Probabilidad condicional

Dados dos sucesos A y B , la probabilidad de que ocurra A dado que ha ocurrido B se llama probabilidad del suceso A condicionada al suceso B , se denota como $\Pr(A|B)$ y se calcula según la expresión

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}, \quad (1.7)$$

donde se asume que $\Pr(B) \neq 0$.

Dos sucesos A y B son independientes si y sólo si la ocurrencia de B no influye sobre la probabilidad de que ocurra A . Matemáticamente equivale a que $\Pr(A|B) = \Pr(A)$ que, combinado con (1.7), significa

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B). \quad (1.8)$$

1.1.3. Teorema de la probabilidad total

Una *partición* de un espacio muestral S consiste en un conjunto de sucesos disjuntos tales que la unión de todos ellos es el espacio muestral completo. En concreto, el conjunto de sucesos $\{B_1, \dots, B_N\}$ constituirá una partición del espacio S si se cumplen las dos condiciones siguientes:

$$B_i \cap B_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j, \quad (1.9)$$

$$\bigcup_{i=1}^N B_i = S. \quad (1.10)$$

Sea el conjunto de sucesos $\{B_1, \dots, B_N\}$ una partición de un espacio muestral S . El teorema de la probabilidad total establece que

$$\Pr(A) = \sum_{i=1}^N \Pr(A|B_i) \cdot \Pr(B_i). \quad (1.11)$$

1.1.4. Teorema de Bayes

Sea el conjunto de sucesos $\{B_1, \dots, B_N\}$ una partición de un espacio muestral S . El teorema de Bayes establece que

$$\Pr(B_m|A) = \frac{\Pr(A|B_m) \cdot \Pr(B_m)}{\sum_{i=1}^N \Pr(A|B_i) \cdot \Pr(B_i)}. \quad (1.12)$$

1.2. Variables aleatorias unidimensionales

1.2.1. Definición

Dado un experimento aleatorio, una variable aleatoria X se define como una función que asigna un número real a cada posible resultado del experimento. Desde un punto de vista práctico, una variable aleatoria se debe entender como una variable que puede tomar diferentes valores o un rango de valores, cada uno de los cuales con una determinada probabilidad.

1.2.2. Función densidad de probabilidad y función distribución de probabilidad

La función densidad de probabilidad (*fdp*) de una variable aleatoria X es aquella función $f_X(x)$, que cumple que

$$\Pr(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx, \quad \forall a < b. \quad (1.13)$$

La probabilidad de que la variable aleatoria tome valores en un intervalo $(a, b]$ se obtiene integrando la *fdp* en dicho intervalo.

La *fdp* de una variable aleatoria cumple las siguientes propiedades:

$$1) \quad f_X(x) \geq 0. \quad (1.14)$$

$$2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1. \quad (1.15)$$

La función distribución de probabilidad (*Fdp*) de una variable aleatoria X se define como

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x). \quad (1.16)$$

La *Fdp* de una variable aleatoria cumple las siguientes propiedades:

$$1) F_X(x) \text{ no decrece.} \quad (1.17)$$

$$2) 0 \leq F_X(x) \leq 1. \quad (1.18)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1. \quad (1.19)$$

La relación entre $f_X(x)$ y $F_X(x)$ es

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du \Rightarrow f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}. \quad (1.20)$$

1.2.3. Tipos de variables aleatorias

Discretas

Son aquellas que sólo toman valores en un conjunto finito (o infinito numerable) de puntos de la recta real. La *Fdp* de estas variables es una función escalonada y, por tanto, la *fdp* está formada exclusivamente por funciones delta de *Dirac*. Un ejemplo de ambas funciones se muestra en la figura T.1.1.

Continuas

Son aquellas que toman valores en un rango continuo de la recta real. La *Fdp* es una función continua y, por tanto, la *fdp* no contiene funciones delta de *Dirac*, como se puede observar en la figura T.1.2.

Mixtas

Son una combinación entre una variable discreta y otra continua. La *Fdp* es la suma de una función escalonada y una función continua. La *fdp* es una función que contendrá deltas de *Dirac*. Ver figura T.1.3.

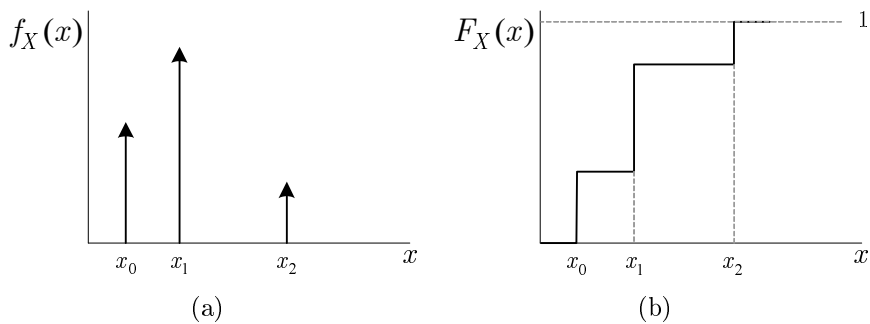


Figura T1.1 a) f_{dp} y b) F_{dp} de una variable aleatoria discreta.

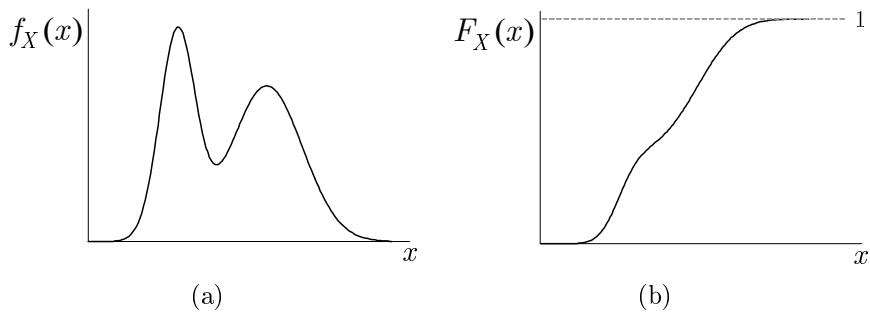


Figura T1.2 a) f_{dp} y b) F_{dp} de una variable aleatoria continua.

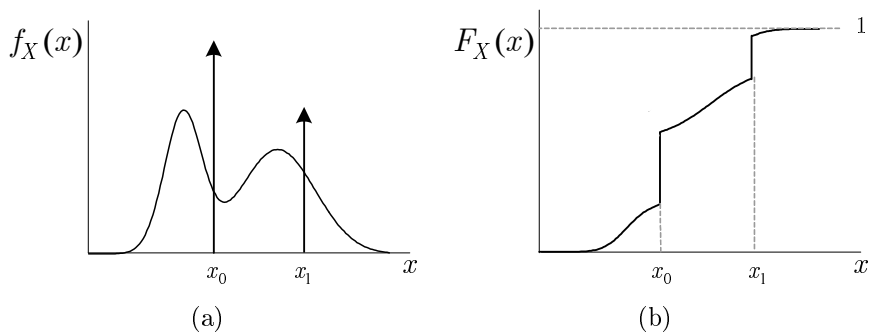


Figura T1.3 a) f_{dp} y b) F_{dp} de una variable aleatoria mixta.

1.2.4. Funciones densidad de probabilidad más frecuentes

Uniforme

Es una variable aleatoria continua con parámetros a y b , cuya fdp viene dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{resto de valores,} \end{cases} \quad (1.21)$$

y cuyo aspecto se muestra en la figura T1.4.

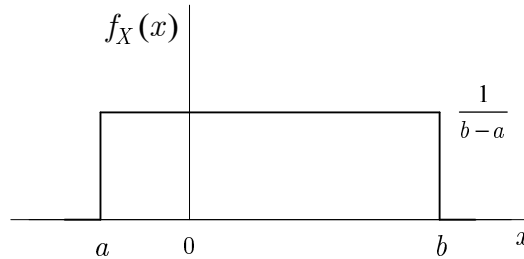


Figura T1.4: Función densidad de probabilidad uniforme.

Poisson

Es una variable aleatoria discreta con parámetro λ , cuya fdp viene dada por

$$f_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \delta(x - k), \quad (1.22)$$

cuyo aspecto se muestra en la figura T1.5.

Gaussiana o normal

Es una variable aleatoria continua con parámetros μ y σ , cuya fdp viene dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad (1.23)$$

cuyo aspecto se muestra en la figura T1.6.

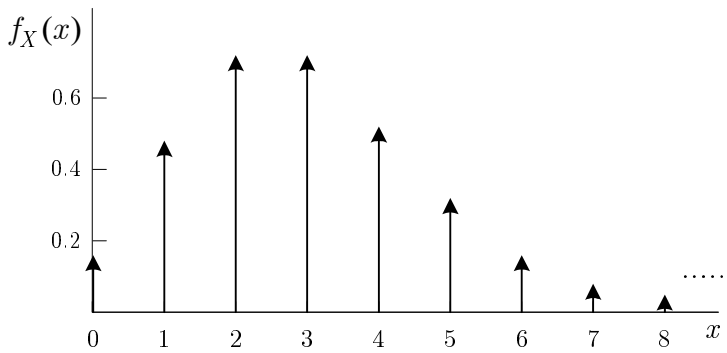


Figura T1.5: Función densidad de probabilidad de Poisson con $\lambda = 3$.

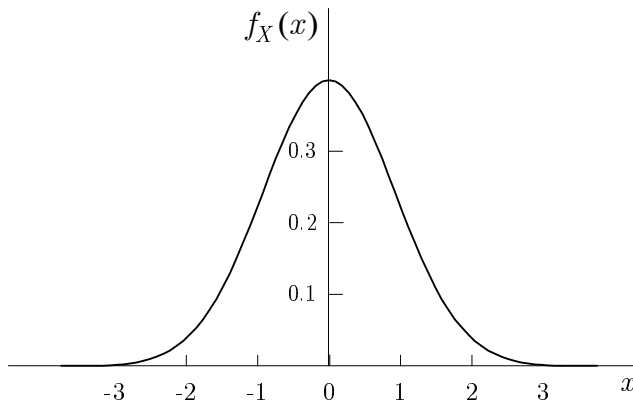


Figura T1.6: Función densidad de probabilidad gaussiana con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.

La notación $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ se emplea para indicar una variable gaussiana con parámetros μ y σ . Para calcular probabilidades relacionadas con una variable gaussiana, dado que no es posible obtener una expresión analítica para la integral (1.13), se recurre a la función $Q(\cdot)$ definida como

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2/2} du. \tag{1.24}$$

Propiedades de la función $Q(\cdot)$:

$$1) Q(x) + Q(-x) = 1. \quad (1.25)$$

$$2) \Pr(X \geq x) = Q\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right). \quad (1.26)$$

$$3) F_X(x) = 1 - Q\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right). \quad (1.27)$$

Rayleigh

Es una variable aleatoria continua, con parámetro σ , cuya f_{dp} viene dada por

$$f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2}, \quad x \geq 0, \quad (1.28)$$

cuyo aspecto se muestra en la figura T1.7.

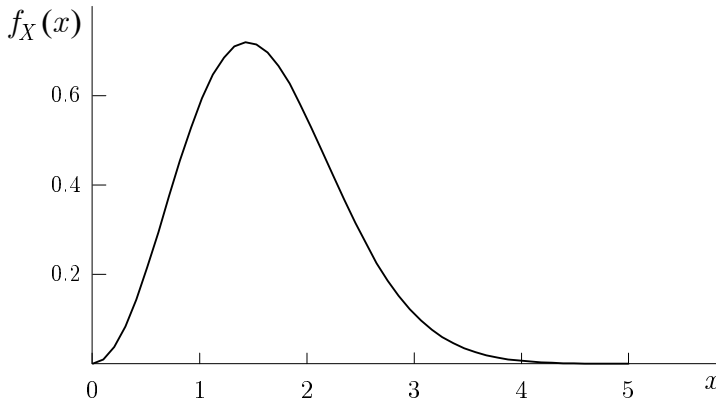


Figura T1.7: Función densidad de probabilidad de Rayleigh con $\sigma = 1$.

1.2.5. Operador esperanza: momentos

La esperanza de una función $g(\cdot)$ de una variable aleatoria X es una operación lineal definida como

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx. \quad (1.29)$$

La media de una variable aleatoria X viene dada por

$$\bar{x} = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx. \quad (1.30)$$

En el caso de que la variable aleatoria sea discreta con

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^N \Pr(X = x_i) \delta(x - x_i), \quad (1.31)$$

el cálculo de la esperanza se reduce a multiplicar cada posible valor por su probabilidad.

$$\bar{x} = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \sum_{i=1}^N \Pr(X = x_i) \delta(x - x_i) dx = \sum_{i=1}^N x_i \cdot \Pr(X = x_i). \quad (1.32)$$

Los momentos no centrales de orden n de una variable aleatoria X se definen como

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx. \quad (1.33)$$

El momento más utilizado, además de la media, es el momento de orden 2, denominado valor cuadrático medio

$$\overline{x^2} = E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx. \quad (1.34)$$

Los momentos centrales de orden n de una variable aleatoria se definen como

$$E[(X - \bar{x})^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^n f_X(x) dx. \quad (1.35)$$

El momento central más utilizado es el momento central de orden 2, denominado varianza

$$\sigma_X^2 = E[(X - \bar{x})^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f_X(x) dx. \quad (1.36)$$

La raíz cuadrada de la varianza es la desviación típica σ_X .

$$\sigma_X = \sqrt{E[(X - \bar{x})^2]}. \quad (1.37)$$

La relación entre los momentos de orden 2 es

$$\overline{x^2} = \sigma_X^2 + \bar{x}^2. \quad (1.38)$$

La media y la varianza de las variables aleatorias presentadas en el apartado anterior se muestran en la tabla T.1.1 en función de los parámetros que las definen.

Tabla T1.1: Media y varianza de variables aleatorias.

Variable	Media	Varianza
Uniforme	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Poisson	λ	λ
Gaussiana	μ	σ^2
Rayleigh	$\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$\frac{4-\pi}{2}\sigma^2$

1.2.6. Función característica

Dada una variable aleatoria X con f_{dp} $f_X(x)$, se define la función característica de dicha variable como

$$\Phi_X(\omega) = E[e^{j\omega X}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} f_X(x) dx. \quad (1.39)$$

La función $\Phi_X(-\omega)$ corresponde a la transformada de Fourier de $f_X(x)$. La función $f_X(x)$ se puede obtener a partir de $\Phi_X(\omega)$ mediante

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega x} \Phi_X(\omega) d\omega. \quad (1.40)$$

La función característica permite obtener los momentos de una variable aleatoria mediante la expresión

$$E[X^k] = (-j)^k \left. \frac{d^k}{d\omega^k} \Phi_X(\omega) \right|_{\omega=0}. \quad (1.41)$$

La función característica de una variable gaussiana $X \sim \mathcal{N}(\bar{x}, \sigma_X)$ es

$$\Phi_X(\omega) = \exp\left(j\bar{x}\omega - \frac{\omega^2\sigma_X^2}{2}\right). \quad (1.42)$$

1.2.7. Transformación de variables aleatorias

Dada una variable aleatoria Y definida como una función $g(\cdot)$ de otra variable aleatoria X , es decir $Y = g(X)$, existen dos métodos sistemáticos para calcular la f_{dp} de Y .

Método directo

Consiste en aplicar la expresión

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right|, \quad (1.43)$$

donde $g^{-1}(y)$ es la función inversa de $g(x)$.

En el caso de que la función $g(\cdot)$ no tenga inversa pero se pueda dividir en tramos en los que sí la tenga, la nueva f_{dp} se puede calcular aplicando (1.43) a cada tramo y sumando los resultados.

Método indirecto

Consiste en calcular previamente la F_{dp} mediante el siguiente cálculo de probabilidades

$$F_Y(y) = \Pr(Y \leq y) = \Pr(g(X) \leq y) \quad (1.44)$$

y posteriormente derivar con respecto a y para obtener la f_{dp} .

1.3. Variables aleatorias bidimensionales y N dimensionales

1.3.1. Función densidad de probabilidad y distribución de probabilidad conjunta

La función densidad de probabilidad de una variable aleatoria bidimensional (X, Y) es aquella función $f_{XY}(x, y)$ que cumple que

$$\Pr((X, Y) \in R) = \iint_R f_{XY}(u, v) du dv, \quad (1.45)$$

siendo R cualquier recinto del plano x - y . Esta función también recibe el nombre de *fdp* conjunta. La *fdp* de una variable aleatoria bidimensional cumple las siguientes propiedades:

$$1) f_{XY}(x, y) \geq 0, \quad \forall x, y. \quad (1.46)$$

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx dy = 1. \quad (1.47)$$

La *Fdp* de una variable aleatoria bidimensional (X, Y) se define como

$$F_{XY}(x, y) = \Pr(X \leq x, Y \leq y). \quad (1.48)$$

La *Fdp* de una variable aleatoria bidimensional cumple las siguientes propiedades:

$$1) 0 \leq F_{XY}(x, y) \leq 1, \quad \forall x, y. \quad (1.49)$$

$$2) \lim_{(x,y) \rightarrow (-\infty, -\infty)} F_{XY}(x, y) = 0. \quad (1.50)$$

$$3) \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} F_{XY}(x, y) = 1. \quad (1.51)$$

La relación entre $f_{XY}(x, y)$ y $F_{XY}(x, y)$ es

$$F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{XY}(u, v) du dv \Rightarrow f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y}. \quad (1.52)$$

Las definiciones anteriores se pueden generalizar para el caso de N variables aleatorias, X_1, \dots, X_N . Se define la *fdp* conjunta N -dimensional, $f_{X_1, \dots, X_N}(x_1, \dots, x_N)$, como aquella función que cumple

$$\Pr((X_1, \dots, X_N) \in R) = \int \cdots \int_R f_{X_1 \dots X_N}(x_1, \dots, x_N) dx_1 \cdots dx_N, \quad (1.53)$$

siendo R cualquier recinto del espacio N -dimensional.

Se define la *Fdp* conjunta N -dimensional como

$$F_{X_1 \dots X_N}(x_1, \dots, x_N) = \Pr(X_1 \leq x_1, \dots, X_N \leq x_N). \quad (1.54)$$

1.3.2. Función densidad de probabilidad marginal

La función densidad de probabilidad marginal de una variable aleatoria X que forma parte de una variable bidimensional (X, Y) se calcula integrando la *fdp* conjunta respecto a la variable Y ,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy. \quad (1.55)$$

De forma análoga se obtiene la función densidad de probabilidad marginal de la variable Y . Este procedimiento es generalizable de forma inmediata para el caso de variables de mayor dimensión.

1.3.3. Función densidad de probabilidad condicional

La variable aleatoria X condicionada a que ha ocurrido un suceso A se denota como $X|A$. Su *fdp* recibe el nombre de función densidad de probabilidad condicional y se denota como $f_{X|A}(x)$. La expresión de esta *fdp* es diferente según sea la naturaleza del suceso A .

El caso más relevante es aquel en el que el suceso A es del tipo $A \equiv (Y = y)$, donde Y es otra variable aleatoria. En este caso se tiene la función densidad de probabilidad de la variable aleatoria X condicionada a que la variable Y ha tomado un determinado valor y , y se calcula como

$$f_{X|Y}(x, y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}, \quad (1.56)$$

donde se asume que $f_Y(y) \neq 0$.

1.3.4. Operador esperanza: momentos

La esperanza de una función de dos variables aleatorias es una función lineal definida como

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{XY}(x, y) dx dy. \quad (1.57)$$

Una forma práctica de calcular la esperanza es

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} E[g(X, Y)|Y] f_Y(y) dy, \quad (1.58)$$

siendo la función $E[g(X, Y)|Y]$ la esperanza de $g(X, Y)$ condicionada a Y , definida como

$$E[g(X, Y)|Y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{X|Y}(x, y) dx. \quad (1.59)$$

Los momentos de dos variables aleatorias más utilizados son la correlación y la covarianza.

La correlación estadística entre dos variables se define como

$$r_{XY} = E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x, y) dx dy. \quad (1.60)$$

La covarianza entre dos variables se define como

$$c_{XY} = E[(X - \bar{x})(Y - \bar{y})] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})(y - \bar{y}) f_{XY}(x, y) dx dy. \quad (1.61)$$

Propiedades de la correlación y la covarianza:

$$1) \quad r_{XY} = c_{XY} - \bar{x} \cdot \bar{y}. \quad (1.62)$$

$$2) \quad r_{XY}^2 \leq \bar{x}^2 \cdot \bar{y}^2. \quad (1.63)$$

$$3) \quad c_{XY}^2 \leq \sigma_X^2 \sigma_Y^2. \quad (1.64)$$

$$4) \quad c_{XY}^2 = \sigma_X^2 \sigma_Y^2 \quad \text{si y sólo si} \quad Y = \frac{c_{XY}}{\sigma_X^2} (X - \bar{x}) + \bar{y}. \quad (1.65)$$

La propiedad 4) indica que la covarianza (e igual ocurre con la correlación) toma el valor máximo si y sólo si existe una relación lineal entre las variables.

Se define el coeficiente de correlación como la covarianza normalizada

$$\rho_{XY} = \frac{c_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}, \quad (1.66)$$

y cumple que $0 \leq |\rho| \leq 1$.

Para el caso de N variables aleatorias X_1, \dots, X_N , la expresión (1.57) se puede generalizar

$$E[g(x_1, \dots, x_N)] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \dots, x_N) f_{X_1 \dots X_N}(x_1, \dots, x_N) dx_1 \cdots dx_N. \quad (1.67)$$

Se define la matriz de covarianza \mathbf{C}_X de N variables aleatorias como

$$\mathbf{C}_X = E[(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{x}})^t] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \cdots & c_{NN} \end{bmatrix}, \quad (1.68)$$

con $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_N]^t$, $\mathbf{x} = [\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N]^t$ y $c_{ij} = E[(X_i - \bar{x}_i)(X_j - \bar{x}_j)]$.

1.3.5. Relaciones estadísticas entre variables aleatorias

Independencia

Dos variables aleatorias X e Y son independientes si y sólo si su *fdp* conjunta puede expresarse como

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y), \quad (1.69)$$

o lo que es lo mismo

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y). \quad (1.70)$$

Como consecuencia de lo anterior, la *fdp* condicional es igual a la marginal, es decir,

$$f_{X|Y}(x, y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} = f_X(x). \quad (1.71)$$

Incorrelación

Dos variables aleatorias X e Y son incorreladas si y sólo si su covarianza es cero, es decir, $c_{XY} = 0$.

Ortogonalidad

Dos variables aleatorias X e Y son ortogonales si y sólo si su correlación es cero, es decir, $r_{XY} = 0$.

Relaciones entre independencia, incorrelación y ortogonalidad:

- 1) Independencia \Rightarrow Incorrelación.
- 2) Si $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$, entonces Incorrelación \Leftrightarrow Ortogonalidad.

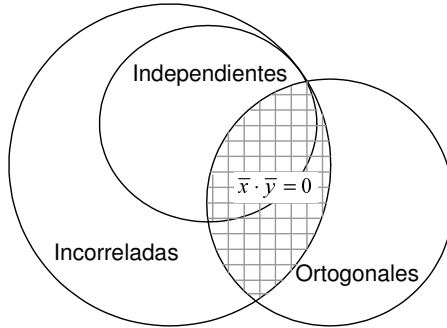


Figura T1.8: Relaciones entre variables aleatorias.

En la figura T1.8 se esquematizan mediante un diagrama de Venn las posibles relaciones entre variables.

1.3.6. Función característica

La función característica de una variable aleatoria N dimensional formada por las variables X_1, \dots, X_N se define como

$$\Phi_{\mathbf{X}}(\omega_1, \dots, \omega_N) = E[e^{j(\omega_1 X_1 + \dots + \omega_N X_N)}]. \quad (1.72)$$

Recurriendo a notación matricial, (1.72) se puede expresar como

$$\Phi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\Omega}) = E[e^{j\boldsymbol{\Omega}\mathbf{X}}], \quad (1.73)$$

con $\boldsymbol{\Omega} = [\omega_1, \dots, \omega_N]$ y $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_N]^t$.

1.3.7. Variables aleatorias gaussianas

La función densidad de probabilidad de una variable gaussiana bidimensional se define como

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} \cdot \exp(-a(x, y)), \quad (1.74)$$

donde

$$a(x, y) = \frac{1}{2(1 - \rho_{XY}^2)} \left[\frac{(x - \bar{x})^2}{\sigma_X^2} - 2\rho_{XY} \frac{(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sigma_X \sigma_Y} + \frac{(y - \bar{y})^2}{\sigma_Y^2} \right]$$

y está representada en la figura T1.9 para el caso sencillo de $\bar{x} = \bar{y} = 0$, $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 1$ y $\rho_{XY} = 0$.

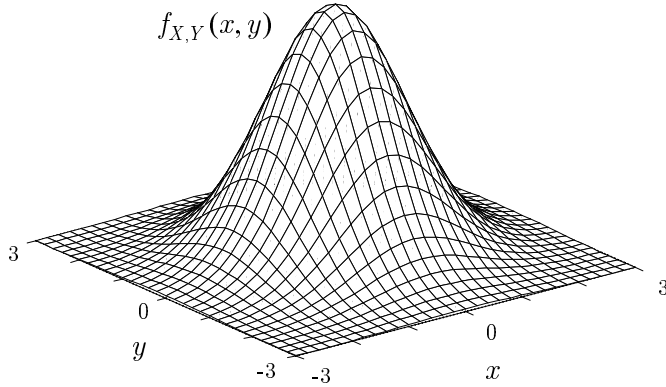


Figura T 1.9: Función densidad de probabilidad gaussiana bidimensional con $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 1$, $\bar{x} = \bar{y} = 0$ y $\rho_{XY} = 0$.

Si las variables son incorreladas, es decir si $\rho_{XY} = 0$, entonces

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

y, por tanto, también son independientes, lo que significa que

incorrelación \Leftrightarrow independenciam.

En el caso general de variable gaussiana N dimensional, la *fdp* se puede escribir, recurriendo a notación matricial, de la siguiente forma:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(\mathbf{C}_{\mathbf{X}})}} \cdot \exp \left(-\frac{1}{2} (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{x}})^t \mathbf{C}_{\mathbf{X}}^{-1} (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{x}}) \right), \quad (1.75)$$

donde $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_N]^t$ y $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N]^t$. La matriz $\mathbf{C}_{\mathbf{X}}$ es la matriz de covarianza de \mathbf{X} .

La función característica es

$$\Phi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\Omega}) = \exp \left\{ j\boldsymbol{\Omega}\bar{\mathbf{x}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{C}_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\Omega}^t \right\}, \quad (1.76)$$

con $\boldsymbol{\Omega} = [\omega_1, \dots, \omega_N]$.

1.3.8. Transformación de variables aleatorias

Dada una variable aleatoria bidimensional (U, V) definida a partir de otra variable aleatoria bidimensional (X, Y) según la relación

$$U = g_1(X, Y), V = g_2(X, Y),$$

existen dos métodos sistemáticos para determinar la *fdp* de (U, V) , supuesta conocida de *fdp* de (X, Y) .

Método directo

Consiste en aplicar la expresión

$$f_{UV}(u, v) = f_{XY}(h_1(u, v), h_2(u, v)) \cdot |J_{XY}(u, v)|, \quad (1.77)$$

siendo $h_1(u, v)$ y $h_2(u, v)$ las funciones que corresponden a la transformación inversa, es decir

$$\begin{aligned} x &= h_1(u, v) \\ y &= h_2(u, v) \end{aligned} \quad (1.78)$$

y donde $J_{XY}(u, v)$ es el jacobiano de la transformación inversa definido como

$$J_{XY}(u, v) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}. \quad (1.79)$$

Para el caso de una transformación de N variables en otras N , si \mathbf{X} es el vector de N variables de partida, \mathbf{Y} el vector de N variables transformadas e $\mathbf{Y} = \mathbf{g}(\mathbf{X})$ la transformación entre ambos donde

$$Y_1 = g_1(\mathbf{X}), \dots, Y_N = g_N(\mathbf{X}), \quad (1.80)$$

entonces para obtener la nueva *fdp* se aplica la expresión

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{h}(\mathbf{y})) \cdot |J_{\mathbf{X}}(\mathbf{y})|, \quad (1.81)$$

donde $\mathbf{X} = \mathbf{h}(\mathbf{Y})$ es la transformación inversa y $J_{\mathbf{X}}(\mathbf{y})$ el jacobiano de la transformación inversa definido como

$$J_{\mathbf{X}}(\mathbf{y}) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_N} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial y_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_N}{\partial y_1} & \frac{\partial x_N}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_N}{\partial y_N} \end{bmatrix} \quad (1.82)$$

En el caso de que la transformación no tenga inversa pero se pueda separar en tramos en los que sí la tenga, la nueva fdp se puede obtener aplicando la expresión (1.81) a cada tramo y sumando los resultados.

Método indirecto

Consiste en calcular previamente la *Fdp* conjunta mediante un cálculo de probabilidades sobre las variables X e Y , según la expresión

$$F_{UV}(u, v) = \Pr(U \leq u, V \leq v) = \Pr(g_1(X, Y) < u, g_2(X, Y) < v). \quad (1.83)$$

La *fdp* se obtiene derivando la *Fdp* respecto a u y v .

El método es generalizable de forma inmediata para el caso de N variables.

Caso particular: suma de variables aleatorias

Sea la transformación de variables aleatorias $Z = X + Y$. Si las variables X e Y son independientes, entonces la $f_Z(z)$ corresponde a la convolución de $f_X(x)$ con $f_Y(y)$.

$$f_Z(z) = f_X(x) * f_Y(y), \quad (1.84)$$

y la función característica corresponde al producto de funciones características

$$\Phi_Z(\omega) = \Phi_X(\omega)\Phi_Y(\omega). \quad (1.85)$$

La media y la varianza de Z , sea cual sea la relación entre X e Y , son

$$\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}, \quad (1.86)$$

$$\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2c_{XY}. \quad (1.87)$$

Si las variables X e Y son incorreladas, la varianza es la suma de las varianzas

$$\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2. \quad (1.88)$$

En el caso general de que Z sea la suma de N variables aleatorias independientes entre sí

$$z = \sum_{i=1}^N X_i,$$

entonces

$$f_Z(z) = f_{X_1}(x_1) * \cdots * f_{X_N}(x_N). \quad (1.89)$$

$$\Phi_Z(\omega) = \prod_{i=1}^N \Phi_{X_i}(\omega). \quad (1.90)$$

Además, sea cual sea la relación entre las variables

$$\bar{z} = E[Z] = \sum_{i=1}^N \bar{x}_i \quad (1.91)$$

$$\sigma_Z^2 = \sum_{i=1}^N \sigma_{X_i}^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{X_i X_j}. \quad (1.92)$$

Si las variables son incorreladas

$$\sigma_Z^2 = \sum_{i=1}^N \sigma_{X_i}^2. \quad (1.93)$$

Para el caso exclusivo de variables gaussianas se cumple que:

- 1) La suma de variables gaussianas es una variable gaussiana.
- 2) La transformación lineal de N variables conjuntamente gaussianas da lugar a N variables conjuntamente gaussianas.

1.3.9. Estimación de variable aleatoria

Dada una pareja de variables aleatorias, el problema de estimación de variable aleatoria consiste *adivinar* el valor de una de las variables a la vista del valor que ha tomado la otra variable.

Llamando X a la variable observada, Y a la variable a estimar e \hat{Y} a la estimación, se trata de determinar una función $\phi(\cdot)$ que permita realizar la estimación, $\hat{Y} = \phi(X)$.

El criterio habitualmente empleado para calcular el estimador es el de minimizar el error cuadrático medio (criterio MSE), es decir, minimizar $E[(Y - \hat{Y})^2]$. En estas condiciones el estimador óptimo viene dado por

$$\hat{y} = \phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{Y|X}(x, y) dy. \quad (1.94)$$

Una alternativa más sencilla es el estimador *lineal* óptimo, cuya forma es $\hat{Y} = aX + b$. Aplicando el criterio MSE se obtiene $a = \frac{c_{XY}}{\sigma_X^2}$ y $b = \bar{y} - a\bar{x}$, así

$$\hat{y} = \frac{c_{XY}}{\sigma_X^2} (x - \bar{x}) + \bar{y}. \quad (1.95)$$

En el caso del estimador lineal óptimo, el MSE mínimo (MMSE) alcanzado es

$$\text{MMSE} = (1 - \rho_{XY}^2) \sigma_Y^2. \quad (1.96)$$

Para el caso general de estimación de una variable aleatoria Y a partir de N variables observadas X_1, \dots, X_N , el estimador lineal óptimo se plantea como

$$\hat{Y} = \sum_{i=1}^N a_i X_i + b \quad (1.97)$$

y su solución se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\sum_{i=1}^N a_i c_{X_i X_m} = c_{Y X_m}, \quad m = 1, \dots, N \quad (1.98)$$

$$b = \bar{y} - \sum_{i=1}^N a_i \bar{x}_i. \quad (1.99)$$

El MMSE asociado adopta la forma

$$\text{MMSE} = \sigma_Y^2 - \sum_{i=1}^N a_i c_{Y X_i}, \quad (1.100)$$

donde a_i , $i = 1, \dots, N$ corresponden a la solución de (1.98).

1.4. Teorema de la Probabilidad Total

El teorema de la probabilidad total enunciado en (1.11), aplicado en el contexto de una variable aleatoria X , da lugar a la siguiente expresión general

$$f_X(x) = f_{X|A_1}(x) \cdot \Pr(A_1) + \dots + f_{X|A_N}(x) \cdot \Pr(A_N), \quad (1.101)$$

siendo $\{A_1, \dots, A_N\}$ una partición del espacio muestral de la misma variable aleatoria X o de otra variable distinta.

Como se deriva directamente de la expresión anterior, la esperanza de X (y por extensión, cualquier estadístico) se puede calcular de la siguiente forma:

$$E[X] = E[X|A_1] \cdot \Pr(A_1) + \dots + E[X|A_N] \cdot \Pr(A_N). \quad (1.102)$$

Otra expresión práctica que se extrae directamente de (1.101) es

$$f_{X|(X \in I)}(x) = \begin{cases} \frac{f_X(x)}{\Pr(X \in I)} & x \in I \\ 0 & x \notin I, \end{cases} \quad (1.103)$$

siendo I un intervalo de la recta real, tal que $\Pr(X \in I) \neq 0$.

1.5. Teorema de Bayes

El teorema de Bayes enunciado en (1.12) aplicado en el contexto de una variable aleatoria X da lugar a la siguiente expresión general

$$\Pr(A_m|(X = x)) = \frac{f_{X|A_m}(x) \cdot \Pr(A_m)}{\sum_{i=1}^N f_{X|A_i}(x) \cdot \Pr(A_i)}, \quad (1.104)$$

siendo $\{A_1, \dots, A_N\}$ una partición del espacio muestral de la misma variable aleatoria X o de otra variable distinta. Al igual que en el caso del teorema de la probabilidad total, pueden existir diferentes expresiones del teorema de Bayes según sea la naturaleza de la partición.

1.6. Teoremas asintóticos

1.6.1. Ley de los grandes números

La ley de los grandes números establece una relación entre la frecuencia relativa de un suceso y su probabilidad. Constituye, por tanto, el nexo

de unión entre la teoría y la práctica en el estudio de los experimentos aleatorios.

Dado un suceso A , su frecuencia relativa $fr(A)$ se define como el cociente entre el número de veces N_A que aparece como resultado del experimento y el número de veces N que se ha ejecutado el experimento, es decir $fr(A) = N_A/N$. Si la probabilidad del suceso A es $\Pr(A)$, entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr(|fr(A) - \Pr(A)| < \epsilon) = 1, \quad (1.105)$$

donde ϵ es un valor arbitrariamente pequeño.

Así, conforme aumenta el número de repeticiones del experimento, el valor de la frecuencia relativa cada vez es más probable que esté cerca del valor de la probabilidad.

1.6.2. Teorema del límite central

En un experimento aleatorio en el que influyen un número elevado de factores independientes entre sí, sin predominar ninguno de ellos, los resultados tienden a distribuirse de forma gaussiana.

Analíticamente esta idea se puede expresar de la siguiente manera: sea X_1, \dots, X_N un conjunto de variables aleatorias independientes entre sí e igualmente distribuidas, de media \bar{x}_i y varianza $\sigma_{X_i}^2$. En estas condiciones, la *Fdp* de la variable normalizada

$$Z = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \frac{X_i - \bar{x}_i}{\sigma_{X_i}} \quad (1.106)$$

cuando $N \rightarrow \infty$ tiende a ser gaussiana con $\bar{z} = 0$ y $\sigma_Z^2 = 1$.

Este resultado se cumple incluso para el caso de que las variables sumadas no estén igualmente distribuidas, siempre que ninguna de ellas domine en la suma.

Ejercicios

Ejercicio 1.1.

Sea X una variable aleatoria gaussiana cuya *fdp* es $f_X(x) = ke^{-(x-2)^2}$.
Determinar:

- a) El valor de la media \bar{x} , de la varianza, σ_X^2 y de la constante k .
- b) La $\Pr(X \geq 3)$, empleando la función $Q(\cdot)$.
- c) La $\Pr(1 \leq X < 3)$, empleando la función $Q(\cdot)$.

Solución

- a) Comparando la *fdp* dada con la *fdp* genérica de una gaussiana (1.23) se identifican de forma directa $\bar{x} = 2$ y $\sigma_X^2 = 1/2$. Por tanto, el valor de la constante k debe necesariamente ser

$$k = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Así,

$$\bar{x} = 2, \quad \sigma_X^2 = 1/2, \quad k = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

- b) Haciendo uso de la función $Q(\cdot)$ para el cálculo de probabilidades de variables gaussianas, según (1.26), se tiene que

$$\Pr(X \geq 3) = Q\left(\frac{3-2}{1/\sqrt{2}}\right)$$

y, por tanto,

$$\Pr(X \geq 3) = Q(\sqrt{2}) \approx 0,08$$

- c) En este caso, el intervalo de valores de X debe ser expresado como combinación de intervalos del tipo $X \geq x$ para ajustarse a la definición de la función. Se puede verificar fácilmente la siguiente equivalencia de sucesos

$$(X \geq 1) = (1 \leq X < 3) \cup (X \geq 3).$$

Tomando probabilidades a ambos lados y despejando, se tiene, según (1.3),

$$\Pr(1 \leq X < 3) = \Pr(X \geq 1) - \Pr(X \geq 3) = Q(-\sqrt{2}) - Q(\sqrt{2})$$

y con la propiedad $Q(x) + Q(-x) = 1$ resulta

$$\Pr(1 \leq X < 3) = 1 - 2Q(\sqrt{2}) \approx 0,84$$

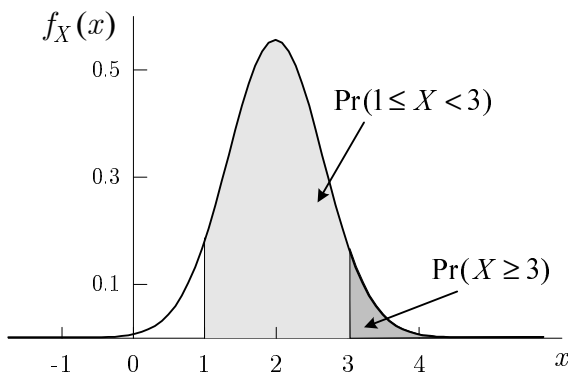


Figura 1.1 Función densidad de probabilidad gaussiana del ejercicio 1.1. Las áreas sombreadas corresponden a $\Pr(1 \leq X < 3)$ y $\Pr(X \geq 3)$.

Observar que en caso de que el intervalo cuya probabilidad se pide hubiese sido $[1, 3]$ en lugar de $[1, 3)$ el resultado habría sido

el mismo, pues la probabilidad de que una variable continua tome valor en un punto cualquiera es nula.

En la figura 1.1 se muestra la *fdp* y las áreas correspondientes a las probabilidades calculadas.

Ejercicio 1.2.

La variable aleatoria X tiene una *fdp* que viene dada por la siguiente expresión: $f_X(x) = ke^{-x}u(x)$. Determinar:

- La constante k .
- La función distribución de probabilidad $F_X(x)$.
- La $\Pr(X > 3)$.
- La *fdp* de la variable $X|(2 \leq X \leq 4)$.
- La $\Pr(X > 3)$ dado que $2 \leq X \leq 4$.

Solución

- La constante k se extrae de la condición de que el área bajo cualquier *fdp* debe ser 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} ke^{-x}u(x)dx = \int_0^{\infty} ke^{-x}dx = 1,$$

de donde se obtiene

$$k = 1$$

- La *Fdp* se obtiene a partir de la *fdp* mediante integración

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du = \int_0^x e^{-u} du = 1 - e^{-x}, \quad x \geq 0.$$

Para valores de x negativos $F_X(x)$ vale 0, por lo que se puede escribir

$$F_X(x) = (1 - e^{-x}) \cdot u(x)$$

c) La probabilidad pedida se obtiene integrando la *fdp* en el intervalo indicado

$$\Pr(X > 3) = \int_3^{\infty} e^{-x} dx = e^{-3}.$$

Así,

$$\Pr(X > 3) \approx 0,05$$

En la figura 1.2 se presenta la *fdp* y el área sombreada que corresponde a la probabilidad del intervalo considerado.

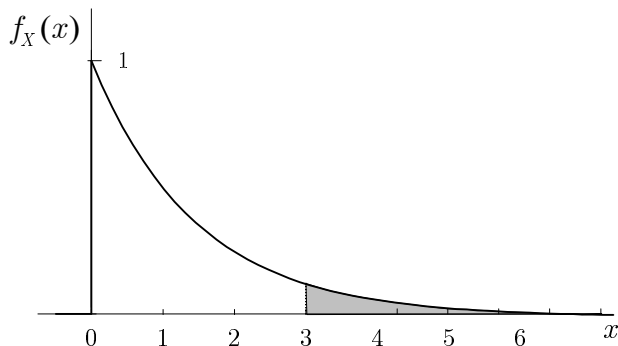


Figura 1.2 Función densidad de probabilidad del ejercicio 1.2 y área correspondiente a $\Pr(X > 3)$.

Una forma alternativa de obtener el resultado es a través de la *Fdp*. En efecto, observar que

$$\Pr(X > 3) = 1 - \Pr(X \leq 3) = 1 - F_X(3) = e^{-3}.$$

- d) La *fdp* de la variable aleatoria X condicionada a que X está entre 2 y 4, denotada como $X|(2 \leq X \leq 4)$ viene dada por la expresión (1.103)

$$f_{X|(2 \leq X \leq 4)}(x) = \begin{cases} \frac{f_X(x)}{\Pr(2 \leq X \leq 4)} & 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{otro valor} \end{cases}$$

Siguiendo los mismos pasos que en el apartado anterior, se obtiene

$$\Pr(2 \leq X \leq 4) = e^{-2} - e^{-4}.$$

Así, resulta

$$f_{X|(2 \leq X \leq 4)}(x) = \frac{1}{e^{-2} - e^{-4}} e^{-x} [u(x - 2) - u(x - 4)]$$

- e) Para calcular la probabilidad pedida basta con integrar esta *fdp* condicional en el intervalo $(3, 4]$

$$\Pr((X > 3)|(2 \leq X \leq 4)) = \int_3^4 \frac{1}{e^{-2} - e^{-4}} e^{-x} dx = \frac{e^{-3} - e^{-4}}{e^{-2} - e^{-4}}.$$

Con esto,

$$\Pr((X > 3)|(2 \leq X \leq 4)) \approx 0,27$$

En la figura 1.3 se presenta la *fdp* condicional y el área sombreada que corresponde a la probabilidad del intervalo considerado. Como es evidente, esta probabilidad es considerablemente mayor que la obtenida en el apartado c).

La probabilidad requerida se podría haber calculado de forma inmediata a partir de $f_X(x)$, pues, según (1.7),

$$\Pr((X > 3)|(2 < X \leq 4)) = \frac{\Pr(3 < X \leq 4)}{\Pr(2 < X \leq 4)}$$

y tanto el numerador como el denominador se obtienen integrando $f_X(x)$ en el intervalo indicado.

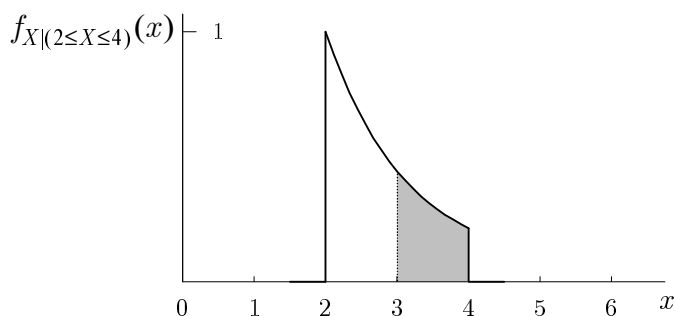


Figura 1.3 Funciones densidad de probabilidad del ejercicio 1.2. b) $f_{X|(2 \leq X \leq 4)}(x)$ y área correspondiente a $\Pr((X > 3)|(2 \leq X \leq 4))$.

Ejercicio 1.3.

La variable aleatoria Y está relacionada con la variable aleatoria X a través de una transformación lineal $Y = aX + b$, donde a y b son constantes, siendo $a \neq 0$.

- Determinar $f_Y(y)$ suponiendo conocida $f_X(x)$.
- Particularizar para el caso de X uniforme en el intervalo $[x_1, x_2]$.

Solución

- Según el método directo, la *fdp* de una transformación de una variable aleatoria se determina mediante la expresión (1.43)

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dx} \right|.$$

Para el problema planteado, $g^{-1}(y) = (y-b)/a$ y, por otra parte, $\left| \frac{dg^{-1}(y)}{dx} \right| = 1/|a|$. Sustituyendo en la expresión anterior, se tiene

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} \cdot f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Como se puede observar, una transformación lineal produce un desplazamiento y una expansión o compresión (con el consiguiente cambio de escala para que el área siga siendo 1) de la f_{dp} de partida, pero no cambia su naturaleza (su forma).

- b) Según el enunciado, $f_X(x) = \frac{1}{x_2 - x_1}$, $x_1 \leq x \leq x_2$. Aplicando el resultado del apartado anterior,

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a| \cdot (x_2 - x_1)}, \quad y_1 \leq y \leq y_2$$

siendo

$$y_1 = ax_1 + b,$$

$$y_2 = ax_2 + b.$$

La variable Y resulta ser también uniforme en el intervalo $[y_1, y_2]$, que es precisamente el intervalo transformado de $[x_1, x_2]$, como se muestra en la figura 1.4.

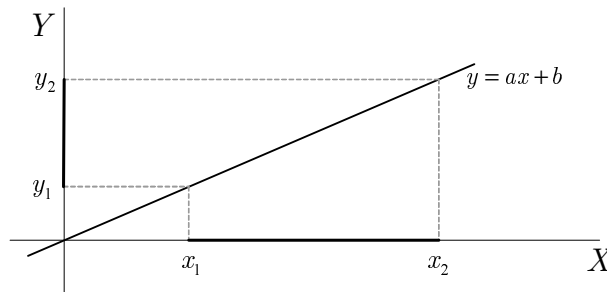


Figura 1.4 Transformación de intervalos mediante función lineal del ejercicio 1.3.

Se puede concluir que la transformación de una variable aleatoria uniforme a través de una función lineal da como resultado otra variable aleatoria uniforme en el intervalo transformado. Este práctico resultado será utilizado en ejercicios posteriores.

Ejercicio 1.4.

Considerar la variable aleatoria $Z = X \cdot Y$, donde X e Y son variables aleatorias independientes y uniformes en el intervalo $[0, 1]$. Determinar la función densidad de probabilidad de Z .

Solución

Este problema se puede solucionar aplicando cualquiera de los dos métodos sistemáticos, directo o indirecto, o bien por un camino alternativo basado en la función densidad de probabilidad condicional, que es factible dada la sencillez de la transformación. A continuación se resolverá el problema por los tres caminos indicados.

- Método directo. El método directo es aplicable cuando se tiene una transformación de N variables en otras N variables. En este caso se trata de una transformación de 2 en 1. El recurso que se suele emplear en estos casos es crear una variable *auxiliar* que tenga una relación cualquiera con las variables de partida para así disponer de una transformación de 2 variables en 2 variables. Una vez aplicado el método, la dependencia respecto a la variable auxiliar se eliminará calculando la *fdp* marginal, según (1.55).

Llamando W a la variable auxiliar, se establece una relación arbitraria con las variables de partida, por ejemplo, $W = X$. La expresión del método directo aplicada a este problema es, según (1.77),

$$f_{ZW}(z, w) = f_{XY}(w, z/w) \cdot |J_{XY}(z, w)|.$$

Al ser X e Y independientes, su función densidad de probabilidad conjunta es $f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = 1$ para $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

Por otra parte, la transformación inversa es $x = w$, $y = z/w$, con lo que el módulo del jacobiano toma el valor $|J_{XY}(z, w)| = 1/w$. Así,

$$f_{ZW}(z, w) = \frac{1}{w}, \quad 0 \leq w \leq 1, \quad 0 \leq z \leq w.$$

Hay que tener precaución con los límites de definición de la función resultante, pues el recinto rectangular en el que está definida la función densidad de probabilidad de las variables X e Y se transforma en el recinto triangular que se muestra en la figura 1.5.

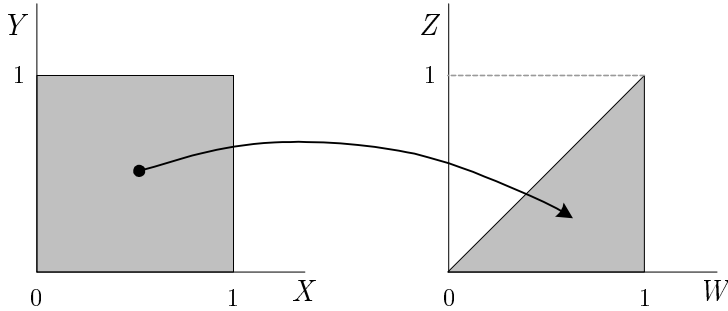


Figura 1.5 Transformación de recintos en el ejercicio 1.4.

Finalmente, basta con integrar $f_{ZW}(z, w)$ respecto a w , según se indica en (1.55), para obtener la función densidad de probabilidad marginal buscada $f_Z(z)$.

$$f_Z(z) = \int_z^1 \frac{1}{w} dw = -\ln(z), \quad 0 \leq z \leq 1$$

Una representación gráfica de esta función se muestra en la figura 1.6. Observar que son más probables valores del producto cercanos a 0 que cercanos a 1, algo lógico, puesto que al multiplicar dos números positivos menores que 1 entre sí, el producto siempre es menor que cualquiera de ellos.

- **Método indirecto.** En este caso se calcula previamente la *Fdp* $F_Z(z)$ y posteriormente la *fdp* $f_Z(z)$ mediante derivación.

$$F_Z(z) = \Pr(Z \leq z) = \Pr(X \cdot Y \leq z) = \Pr(Y \leq z/X).$$

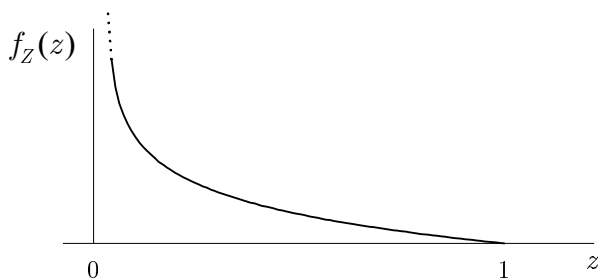


Figura 1.6 Función densidad de probabilidad de $Z = X \cdot Y$ del ejercicio 1.4.

En el último paso de la expresión anterior se ha tenido en cuenta que $X \geq 0$ (en caso de que X tomase valores negativos habría que cambiar el sentido de la desigualdad). La probabilidad indicada se obtiene integrando $f_{XY}(x, y)$ en el recinto determinado por la desigualdad $Y \leq z/X$, que se muestra en la figura 1.7. Así,

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int_{x=0}^{x=z} \int_{y=0}^{y=1} dx dy + \int_{x=z}^{x=1} \int_{y=0}^{y=z/x} dx dy \\ &= z + z[\ln(1) - \ln(z)] = z(1 - \ln(z)). \end{aligned}$$

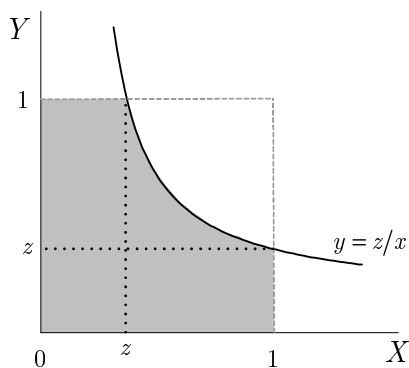


Figura 1.7 Región de integración de $f_{XY}(x, y)$ para obtener $f_Z(z)$ por el método indirecto en el ejercicio 1.4.

Derivando $F_Z(z)$ se llega al mismo resultado que en el apartado anterior.

- Método alternativo. Otra forma de resolver la transformación consiste en calcular la *fdp* conjunta $f_{ZX}(z, x)$ mediante la expresión (1.56)

$$f_{ZX}(z, x) = f_{Z|X}(z, x) \cdot f_X(x)$$

y posteriormente integrarla respecto a X para obtener la marginal $f_Z(z)$.

Para determinar la función densidad de probabilidad condicional, observar que cuando la variable X toma un valor concreto x , la variable $Z|(X = x)$ definida como "*Z condicionada a que X ha tomado el valor x*" vale $Z|(X = x) = x \cdot Y$. Por tanto, esta variable es uniforme en el intervalo $[0, x]$, ya que es el producto de una variable uniforme en el intervalo $[0, 1]$ multiplicada por una constante x . El valor de $f_{Z|X}(z, x)$ debe ser necesariamente $1/x$ para que el área sea 1. Resumiendo, $f_{Z|X}(z, x) = 1/x$ para $0 \leq z \leq x$. Sustituyendo en la expresión de la función densidad de probabilidad conjunta se tiene que

$$f_{ZX}(z, x) = \frac{1}{x}, \quad 0 \leq z \leq x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Finalmente, integrando respecto a la variable x se llega a

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{ZX}(z, x) dx = \int_z^1 \frac{1}{x} dx = -\ln(z), \quad 0 \leq z \leq 1,$$

que es el mismo resultado obtenido en apartados anteriores.

Para establecer correctamente los límites de esta integral hay que tener en cuenta que el recinto $0 \leq z \leq x$, $0 \leq x \leq 1$ en el que está definida la función $f_{ZX}(z, x)$ se puede expresar de forma equivalente como $0 \leq z \leq 1$, $z \leq x \leq 1$.

Ejercicio 1.5.

Sea X una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[-1, 3]$. Calcular la función densidad de probabilidad de la variable aleatoria Y , sabiendo que está relacionada con X a través de la función que se indica en la figura 1.8.

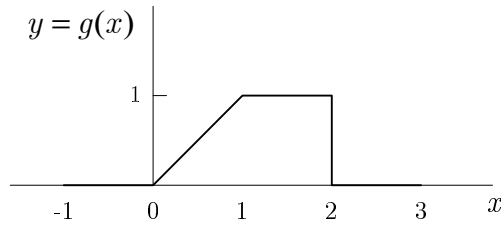


Figura 1.8 Función de transformación $y=g(x)$ del ejercicio 1.5.

Solución

En este problema no es posible aplicar el método directo, pues la función de transformación no tiene inversa ni se puede descomponer en un número finito de tramos que tengan inversa debido a los tramos constantes. El método indirecto sí se puede aplicar. No obstante, existe una forma más intuitiva de resolución basada en el teorema de la probabilidad total, que va a ser la aplicada aquí.

Observar que la función de transformación es extremadamente sencilla considerándola por tramos. En concreto, está formada por tres funciones constantes y una lineal que se pueden identificar fácilmente a partir de su expresión analítica

$$y = \begin{cases} 0 & -1 < x \leq 0 \\ x & 0 < x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \leq 2 \\ 0 & 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

Esto sugiere resolver el problema por tramos recurriendo a la ley de la probabilidad total (1.101)

$$f_Y(y) = f_{Y|A_1}(y) \cdot \Pr(A_1) + \cdots + f_{Y|A_N}(y) \cdot \Pr(A_N), \quad (1.107)$$

donde los sucesos $\{A_1, A_2, A_3, A_N\}$ se definen como

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv -1 < X \leq 0 \\ A_2 &\equiv 0 < X \leq 1 \\ A_3 &\equiv 1 < X \leq 2 \\ A_3 &\equiv 2 < X \leq 3. \end{aligned}$$

Ejercicio 1.6.

Se desea medir un parámetro constante usando un cuantificador de escasa precisión. En estos casos, aunque parezca paradójico, una forma de aumentar la precisión consiste en sumar ruido al parámetro a medir (técnica conocida como *Dithering*).

En la figura 1.10 se representa dicho método de medida. Al parámetro constante C que se desea medir se le suma una variable aleatoria N , uniforme en el intervalo $[-A/2, A/2]$. Esta suma pasa por el cuantificador cuya relación entrada-salida es la de la figura, obteniéndose la variable aleatoria Y . Sabiendo que el valor de C pertenece al rango $[-A/2, A/2]$ y que $A > 0$, calcular la esperanza de Y en función del valor de C para los dos casos siguientes:

- No se suma la variable aleatoria N .
- Sí se suma la variable aleatoria N .

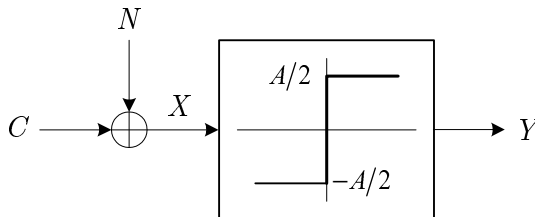


Figura 1.10 Diagrama de bloques del procedimiento de medida del parámetro C en el ejercicio 1.6.

Solución

- En este caso, ocurre que $Y = A/2$ si $C > 0$ mientras que $Y = -A/2$ si $C < 0$. Observar que Y no es una variable aleatoria, lo que significa que su esperanza es igual a su valor, por tanto,

$$E[Y] = \begin{cases} A/2 & \text{si } C \geq 0 \\ -A/2 & \text{si } C < 0 \end{cases}$$

- b) Ahora sí es Y una variable aleatoria discreta que puede tomar los valores $-A/2$ y $A/2$. Su esperanza se puede calcular, según (1.102), como

$$\begin{aligned} E[Y] &= (-A/2) \cdot \Pr(Y = -A/2) + (A/2) \cdot \Pr(Y = A/2) \\ &= (-A/2) \cdot \Pr(X \leq 0) + (A/2) \cdot \Pr(X > 0). \quad (1.108) \end{aligned}$$

Para calcular la probabilidad de que X sea positivo o negativo es necesario determinar su *fdp*. Puesto que $X = C + N$, siendo C constante y N una variable aleatoria, la *fdp* de X será la de N desplazada una cantidad igual a C , es decir $f_X(x) = f_N(x - C)$. En la figura 1.11 se representa gráficamente esta función. De aquí se obtiene

$$\begin{aligned} \Pr(X \leq 0) &= (1/A)(A/2 - C) \\ \Pr(X > 0) &= (1/A)(A/2 + C). \end{aligned}$$

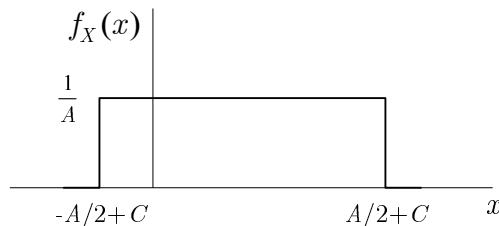


Figura 1.11 Función densidad de probabilidad de $X = C + N$ del ejercicio 1.6.

Sustituyendo estas probabilidades en (1.108), resulta

$$E[Y] = C$$

Esto significa que, en teoría, se podría medir el valor exacto del parámetro, es decir, la precisión de la medida sería infinita. Este resultado sugiere un procedimiento para mejorar en la práctica la precisión de la medida del parámetro C consistente en repetir la

medida un número elevado de veces sumándole previamente en cada caso un valor aleatorio del intervalo $[-A/2, A/2]$ y, a continuación, promediar las medidas. La ley de los grandes números garantiza que este promedio tiende a la media de la variable aleatoria Y (cuyo valor es C) cuando el número de medidas tiende a infinito.

Una técnica similar a la descrita se emplea para reducir los efectos no lineales de la cuantificación en la conversión analógica/digital de señales de audio.

Ejercicio 1.7.

Considerar la variable aleatoria X uniforme en el intervalo $[-A, A]$. Esta variable se cuantifica con el cuantificador de dos niveles cuya relación entrada-salida se representa en la figura 1.12, dando lugar a la variable Y y produciéndose un error de cuantificación $\varepsilon = X - Y$. Admitiendo que $P > 0$ y $A > 0$ con $P < A$, determinar:

- La función densidad de probabilidad de ε .
- El valor de P para que el valor cuadrático de ε sea mínimo.

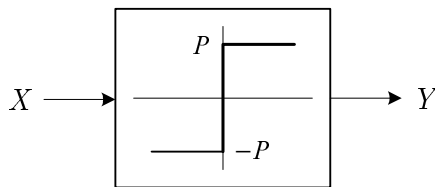


Figura 1.12 Diagrama de bloques del sistema propuesto en el ejercicio 1.7.

Solución

- Según el enunciado, $\varepsilon = X - Y = X - g(X) \equiv r(X)$. La función $\varepsilon = r(X)$ está representada en la figura 1.13. A continuación, se

puede aplicar algún método sistemático para obtener la *fdp* de la nueva variable. No obstante, al tratarse de una transformación muy simple, se puede resolver recurriendo al teorema de la probabilidad total mediante la expresión

$$f_{\varepsilon}(\varepsilon) = f_{\varepsilon|(X \geq 0)}(\varepsilon) \cdot \Pr(X \geq 0) + f_{\varepsilon|(X < 0)}(\varepsilon) \cdot \Pr(X < 0). \quad (1.109)$$

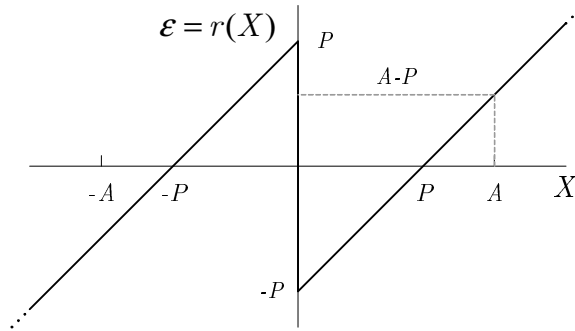


Figura 1.13 Función de transformación de la variable X en la variable ε en el ejercicio 1.7.

Los valores positivos de X se transforman en valores de ε en el intervalo $[-P, A - P]$, como se puede apreciar en la figura 1.13. Puesto que la función es lineal en este intervalo, la *fdp* no cambia de naturaleza, es decir, se mantiene uniforme, según se demuestra en el ejercicio 1.3. Esto significa que $f_{\varepsilon|(X \geq 0)}(\varepsilon)$ es uniforme en $[-P, A - P]$, cuya expresión analítica es

$$f_{\varepsilon|(X \geq 0)}(\varepsilon) = \frac{1}{A} [u(\varepsilon + P) - u(\varepsilon - (A - P))]. \quad (1.110)$$

Razonando de forma análoga y, dada la simetría del problema, se llega a

$$f_{\varepsilon|(X < 0)}(\varepsilon) = \frac{1}{A} [u(\varepsilon - (P - A)) - u(\varepsilon - P)]. \quad (1.111)$$

Sabiendo que $\Pr(X \geq 0) = \Pr(X < 0) = 1/2$, sustituyendo (1.110) y (1.111) en (1.109) se llega a

$$f_{\varepsilon}(\varepsilon) = \frac{1}{2A}[u(\varepsilon - (P - A)) - u(\varepsilon - P)] \\ + \frac{1}{2A}[u(\varepsilon + P) - u(\varepsilon - (A - P))]$$

La representación de $f_{\varepsilon}(\varepsilon)$ es diferente según el valor de P esté en el intervalo $[0, A/2]$ o en $[A/2, A]$. En las figuras 1.14.a y 1.14.b se representa gráficamente $f_{\varepsilon}(\varepsilon)$ para estos dos casos.

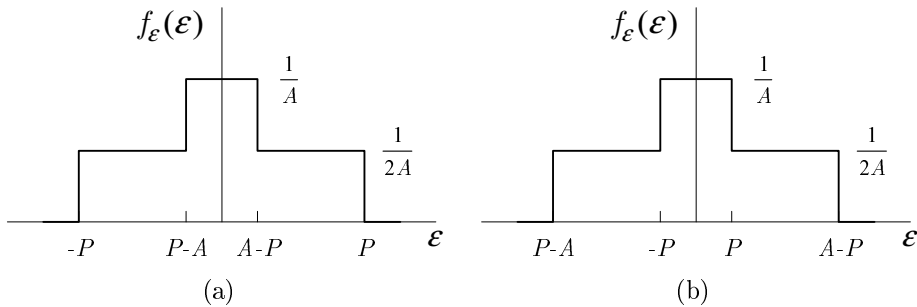


Figura 1.14 Función densidad de probabilidad de la variable ε del ejercicio 1.7 para (a) $0 \leq P \leq A/2$ y (b) $A/2 \leq P \leq A$.

- b) Para resolver este apartado es preciso obtener la expresión del valor cuadrático de la variable aleatoria ε en función del parámetro P y después derivar dicha expresión e igualarla a cero.

$$P_{\varepsilon} = E[\varepsilon^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 f_{\varepsilon}(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{3A}[P^3 + (A - P)^3].$$

Tomando $\partial P_{\varepsilon} / \partial P = 0$ y despejando el valor de P , se llega a

$$P = A/2$$

Ejercicio 1.8.

La variable aleatoria X se distribuye uniformemente en el intervalo $[-3A, 3A]$. La variable Y resulta de cuantificar la variable X con un cuantificador cuya relación entrada-salida es la representada en la figura 1.15.

- Determinar la función densidad de probabilidad de Y .
- Determinar y representar la función densidad de probabilidad de la variable aleatoria ε que representa el error de cuantificación, $\varepsilon = X - Y$.

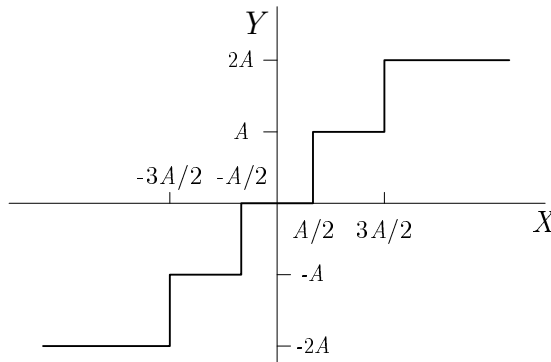


Figura 1.15 Relación entrada-salida del cuantificador del ejercicio 1.8.

Solución

- En este problema de transformación de variable aleatoria no es posible aplicar el método directo, pues la función de transformación no tiene inversa debido a los tramos constantes. El método indirecto sí se puede aplicar. No obstante, existe un camino de resolución inmediato aplicable cuando la variable aleatoria obtenida tras la transformación resulta ser discreta. El razonamiento es el siguiente: la variable aleatoria Y puede tomar los 5 valores $\{-2A, -A, 0, A, 2A\}$, cuyas probabilidades son:

$$\begin{aligned}
 \Pr(Y = -2A) &= \Pr(-3A \leq X \leq -3A/2) = 1/4 \\
 \Pr(Y = -A) &= \Pr(-3A/2 \leq X \leq -A/2) = 1/6 \\
 \Pr(Y = 0) &= \Pr(-A/2 \leq X \leq A/2) = 1/6 \\
 \Pr(Y = A) &= \Pr(A/2 \leq X \leq 3A/2) = 1/6 \\
 \Pr(Y = 2A) &= \Pr(3A/2 \leq X \leq 3A) = 1/4,
 \end{aligned}$$

de donde se obtiene directamente

$$\begin{aligned}
 f_Y(y) &= \frac{1}{4}\delta(y - 2A) + \frac{1}{6}\delta(y - A) \\
 &\quad + \frac{1}{6}\delta(y) + \frac{1}{6}\delta(y + A) + \frac{1}{4}\delta(y + 2A)
 \end{aligned}$$

b) La función que relaciona la variable error ε y la variable X es la representada en la figura 1.16.

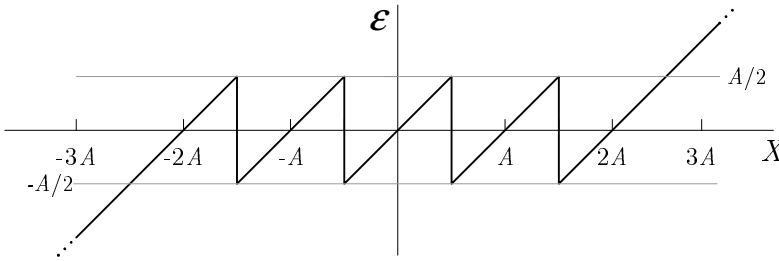


Figura 1.16 Relación entre el error de cuantificación ε y la variable X del ejercicio 1.8.

Como se puede observar, esta función de transformación es muy sencilla si se considera por tramos. En concreto, se puede dividir la función en 5 tramos en los que la transformación es lineal. Esta ventaja se puede aprovechar recurriendo al teorema de la probabilidad total (1.101), como se hizo en el ejercicio 1.5, que adaptado a este problema se traduce en

$$f_\varepsilon(\varepsilon) = \sum_{i=1}^5 f_{\varepsilon|A_i}(\varepsilon) \Pr(A_i), \quad (1.112)$$

donde

$$\begin{aligned}
A_1 &\equiv -3A \leq X < -3A/2 \\
A_2 &\equiv -3A/2 \leq X < -A/2 \\
A_3 &\equiv -A/2 \leq X < A/2 \\
A_4 &\equiv A/2 \leq X < 3A/2 \\
A_5 &\equiv 3A/2 \leq X < 3A.
\end{aligned}$$

Observar que el conjunto de sucesos $\{A_1, \dots, A_5\}$ constituyen una partición del espacio muestral de la variable X . El cálculo de la f_{dp} de ε en cada intervalo es inmediata (ver ejercicio 1.3). En particular,

- $f_{\varepsilon|A_i}(\varepsilon)$ para $i = 2, 3, 4$ es uniforme en $[-A/2, A/2]$, es decir

$$f_{\varepsilon|A_i}(\varepsilon) = \frac{1}{A} \left[u\left(\varepsilon + \frac{A}{2}\right) - u\left(\varepsilon - \frac{A}{2}\right) \right], \quad i = 2, 3, 4.$$

- $f_{\varepsilon|A_1}(\varepsilon)$ es uniforme en $[-A, A/2]$, es decir

$$f_{\varepsilon|A_1}(\varepsilon) = \frac{2}{A} \left[u\left(\varepsilon + A\right) - u\left(\varepsilon - \frac{A}{2}\right) \right].$$

- $f_{\varepsilon|A_5}(\varepsilon)$ es uniforme en $[-A/2, A]$, es decir

$$f_{\varepsilon|A_5}(\varepsilon) = \frac{2}{A} \left[u\left(\varepsilon + \frac{A}{2}\right) - u\left(\varepsilon - A\right) \right].$$

El razonamiento para llegar a estas conclusiones es, en todos los casos, el mismo. Para cada tramo se trata de la transformación de una variable aleatoria uniforme $X|A_i$ en otra variable aleatoria $\varepsilon|A_i$ a través de una transformación lineal, lo que significa que $\varepsilon|A_i$ también será uniforme en el intervalo en el que toma valores, según se deduce de los resultados del ejercicio 1.3.

Sabiendo por último que $\Pr(A_1) = \frac{1}{12}$, $\Pr(A_5) = \frac{1}{12}$ y que $\Pr(A_i) = \frac{2}{12}$ para $i = 2, 3, 4$, sustituyendo en (1.112), se obtiene (ver figura 1.17)

$$\begin{aligned}
f_{\varepsilon}(\varepsilon) &= \frac{5}{6A} \left[u\left(\varepsilon + \frac{A}{2}\right) - u\left(\varepsilon - \frac{A}{2}\right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{6A} \left[u\left(\varepsilon + A\right) - u\left(\varepsilon + \frac{A}{2}\right) \right] + \frac{1}{6A} \left[u\left(\varepsilon - \frac{A}{2}\right) - u\left(\varepsilon - A\right) \right]
\end{aligned}$$

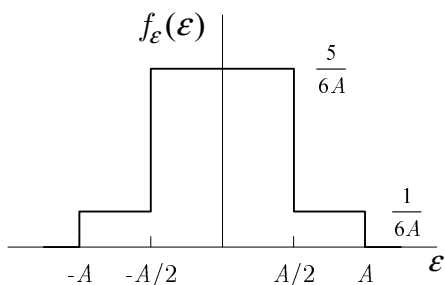


Figura 1.17 Función densidad de probabilidad de la variable ε del ejercicio 1.8.

Ejercicio 1.9.

Determinar la función densidad de probabilidad de la variable aleatoria X_E correspondiente a la parte entera de X y de la variable aleatoria X_F correspondiente a la parte fraccionaria de X para los dos casos siguientes:

- X uniforme en el intervalo $[0, 3]$.
- X con la función densidad de probabilidad de la figura 1.18.

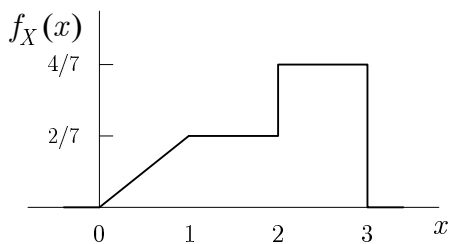


Figura 1.18 Función densidad de probabilidad de la variable aleatoria X del ejercicio 1.9, apartado b.

Solución

- El problema se puede resolver aplicando alguno de los métodos sistemáticos, teniendo en cuenta las funciones parte entera y

parte fraccionaria que se representan en las figuras 1.19.a y 1.19.b respectivamente.

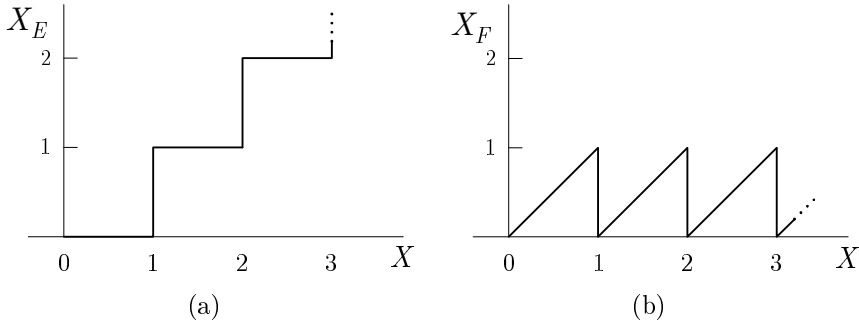


Figura 1.19 Funciones (a) parte entera y (b) parte fraccionaria en el ejercicio 1.9.

No obstante y, tal y como se ha hecho en ejercicios anteriores, dada la simplicidad de las dos funciones de transformación se puede recurrir a una forma alternativa de resolución. Respecto a la parte entera X_E se observa puede tomar tan sólo 3 valores: 0, 1 y 2, siendo

$$\begin{aligned} \Pr(X_E = 0) &= \Pr(0 \leq X < 1) = 1/3 \\ \Pr(X_E = 1) &= \Pr(1 \leq X < 2) = 1/3 \\ \Pr(X_E = 2) &= \Pr(2 \leq X < 3) = 1/3. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$f_{X_E}(x_E) = \frac{1}{3}\delta(x_E) + \frac{1}{3}\delta(x_E - 1) + \frac{1}{3}\delta(x_E - 2)$$

Respecto a la parte fraccionaria, se puede dividir la función de transformación en tres tramos lineales y aplicar el teorema de la probabilidad total (1.101)

$$f_{X_F}(x_F) = \sum_{i=1}^3 f_{X_F|A_i}(x_F) \cdot \Pr(A_i), \quad (1.113)$$

siendo

$$A_1 \equiv 0 \leq X < 1$$

$$A_2 \equiv 1 \leq X < 2$$

$$A_3 \equiv 2 \leq X \leq 3.$$

La variable $X_F|A_1$ es uniforme en $[0, 1]$, ya que se obtiene mediante la transformación identidad aplicada a la variable $X|A_1$, que es uniforme en $[0, 1]$. Lo mismo ocurre con las variables $X_F|A_2$ y $X_F|A_3$, con lo que

$$f_{X_F|A_1}(x_F) = f_{X_F|A_2}(x_F) = f_{X_F|A_3}(x_F) = u(x_F) - u(x_F - 1)$$

Teniendo en cuenta que $\Pr(A_1) = \Pr(A_2) = \Pr(A_3) = \frac{1}{3}$ y sustituyendo en (1.113) se llega a

$$f_{X_F}(x_F) = 1, \quad 0 \leq x_F \leq 1$$

b) En este caso, para la parte entera se tiene

$$\Pr(X_E = 0) = \Pr(0 \leq X < 1) = 1/7$$

$$\Pr(X_E = 1) = \Pr(1 \leq X < 2) = 2/7$$

$$\Pr(X_E = 2) = \Pr(2 \leq X < 3) = 4/7,$$

por tanto

$$f_{X_E}(x_E) = \frac{1}{7}\delta(x_E) + \frac{2}{7}\delta(x_E - 1) + \frac{4}{7}\delta(x_E - 2)$$

Para el cálculo de la *fdp* de la parte fraccionaria, se procede como en el apartado anterior. En este caso, las *fdp* condicionales toman las siguientes expresiones:

- $f_{X_F|A_1}(x_F)$ es lineal en $[0, 1]$, es decir

$$f_{X_F|A_1}(x_F) = 2x_F, \quad 0 \leq x_F < 1. \quad (1.114)$$

La variable $X_F|A_1$ se obtiene a partir de la variable $X|A_1$. La función de transformación en este intervalo es la función identidad. Por tanto, ambas funciones deben tener la misma f_{dp} . Dado que $A_1 \equiv (0 \leq X < 1)$, se puede escribir, según (1.103),

$$f_{X|(0 \leq X < 1)} = \frac{f_X(x)}{\Pr(0 \leq X < 1)} = 7f_X(x) \quad 0 \leq x < 1,$$

y puesto que en el intervalo $0 \leq x < 1$, $f_X(x) = \frac{2}{7}x$, se tiene

$$f_{X|(0 \leq X < 1)} = 2x, \quad 0 \leq x < 1,$$

y, por tanto,

$$f_{X_F|(0 \leq X < 1)} = 2x_F, \quad 0 \leq x_F < 1.$$

- $f_{X_F|A_2}(x_F)$ es uniforme en $[0, 1]$, es decir

$$f_{X_F|A_2}(x_F) = 1, \quad 0 \leq x_F < 1, \quad (1.115)$$

al igual que en el apartado anterior.

- $f_{X_F|A_3}(x_F)$ es, asimismo, uniforme en $[0, 1]$, es decir

$$f_{X_F|A_3}(x_F) = 1, \quad 0 \leq x_F < 1. \quad (1.116)$$

En este caso, las probabilidades de cada uno de los sucesos son

$$\Pr(A_1) = \frac{1}{7}, \quad \Pr(A_2) = \frac{2}{7}, \quad \Pr(A_3) = \frac{4}{7}.$$

Sustituyendo (1.114), (1.115) y (1.116) en (1.113) se llega a

$$f_{X_F}(x_F) = \frac{2}{7}x_F + \frac{6}{7}, \quad 0 \leq x_F \leq 1$$

Ejercicio 1.10.

Considerar las variables aleatorias X_1 y X_2 , ambas uniformes en el intervalo $[0, 1]$ e independientes entre sí. La variable aleatoria Y se define como la suma $Y = X_1 + X_2$.

- a) Determinar y representar la función densidad de probabilidad conjunta de la variable aleatoria bidimensional (Y, X_1) .
- b) Calcular $\Pr(Y \leq 2X_1)$.

Solución

- a) Se trata de un problema de transformación de dos variables aleatorias (X_1, X_2) en otras dos (Y, X_1) para lo que se puede aplicar alguno de los métodos sistemáticos. Dado que la transformación es sencilla se puede recurrir a una forma alternativa a través de la *fdp* condicional, mucho más intuitiva. Se parte de la expresión de la *fdp* conjunta

$$f_{YX_1}(y, x_1) = f_{Y|X_1}(y, x_1)f_{X_1}(x_1).$$

La *fdp* marginal $f_{X_1}(x_1)$ es un dato del problema, por tanto, basta determinar la *fdp* condicional $f_{Y|X_1}(y, x_1)$. Ésta se puede obtener con el siguiente razonamiento: si X_1 toma un valor concreto x_1 , la variable $Y|(X_1 = x_1)$ tomará valores en el rango $[x_1, x_1 + 1]$, puesto que en esas condiciones, $Y|(X_1 = x_1) = x_1 + X_2$. Al ser X_2 uniforme en el intervalo $[0, 1]$, lo será también la variable $Y|(X_1 = x_1)$, en este caso en el intervalo $[x_1, x_1 + 1]$. Con esto resulta

$$f_{Y|X_1}(y, x_1) = 1, \quad x_1 \leq y \leq x_1 + 1,$$

con lo cual,

$$f_{YX_1}(y, x_1) = 1, \quad 0 < x_1 < 1, \quad x_1 < y < x_1 + 1$$

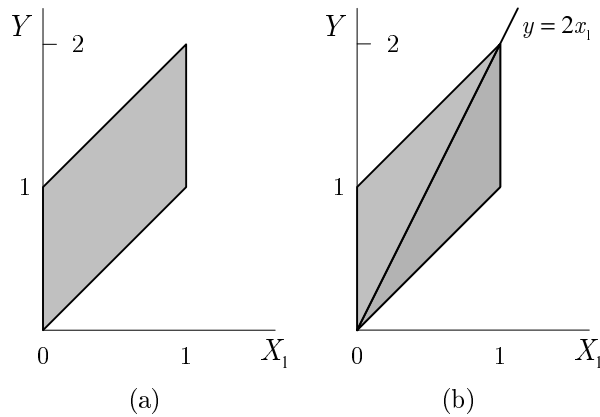


Figura 1.20 Función densidad de probabilidad condicional $f_{Y|X_1}(y, x_1)$ en el ejercicio 1.10. (a) Región de definición de $f_{Y|X_1}(y, x_1)$. (b) Región de integración correspondiente a $\Pr(Y \leq 2X_1)$.

La *fdp* es constante en el recinto representado en la figura 1.20a.

- b) Esta probabilidad se calcula integrando la *fdp* conjunta en el recinto limitado por la inecuación $Y \leq 2X_1$. Este recinto es la intersección del recinto de definición de la *fdp* con el recinto debajo de la recta $y = 2x_1$, indicados ambos en la figura 1.20b. El área del recinto intersección es la mitad del área del recinto de definición de la *fdp*. Al ser la *fdp* constante, la probabilidad pedida será $1/2$.

$$\Pr(Y \leq 2X_1) = 1/2$$

Ejercicio 1.11.

La variable aleatoria X_1 es uniforme en el intervalo $[0, 1]$ y la variable X_2 depende de la variable X_1 , ya que toma valores de manera uniforme en el intervalo $[-x_1, x_1]$. Calcular la *fdp* conjunta de (Y, X_1) , siendo $Y = X_1 + X_2$.

Solución

La resolución de este ejercicio es análoga a la del ejercicio 1.10. En particular, hay que calcular $f_{YX_1}(y, x_1)$. Sabiendo que

$$f_{YX_1}(y, x_1) = f_{Y|X_1}(y, x_1) \cdot f_{X_1}(x_1)$$

y dado que $f_{X_1}(x_1) = 1$ para $0 \leq x_1 \leq 1$, el problema se reduce a determinar la *fdp* condicional $f_{Y|X_1}(y, x_1)$.

Para ello, el razonamiento es el siguiente: suponer que X_1 toma el valor concreto x_1 . En ese caso, $Y|(X_1 = x_1) = x_1 + X_2$. Es decir, la variable $Y|(X_1 = x_1)$ es igual a la variable X_2 mas una constante de valor x_1 . Su *fdp* será, por tanto, la misma que la de X_2 pero desplazada x_1 . Como la *fdp* de X_2 es uniforme en el intervalo $[-x_1, x_1]$, la *fdp* de $Y|(X_1 = x_1)$ será también uniforme pero en el intervalo $[0, 2x_1]$, lo que significa que su amplitud es necesariamente $\frac{1}{2x_1}$. Así,

$$f_{Y|X_1}(y, x_1) = \frac{1}{2x_1}, \quad 0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2x_1.$$

Multiplicando esta función por $f_{X_1}(x_1) = 1$ se llega al resultado

$$f_{YX_1}(y, x_1) = \frac{1}{2x_1}, \quad 0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2x_1$$

Ejercicio 1.12.

La variable aleatoria X es una variable gaussiana con media \bar{x} y desviación típica σ_X . La variable aleatoria Y es uniforme en el intervalo $[0, 1]$. Sabiendo que ambas variables son independientes, determinar la expresión analítica de $f_{Z|Y}(z, y)$, siendo $Z = X \cdot Y$.

Solución

Suponer que la variable Y toma un valor concreto y_0 . En ese caso,

$$Z|(Y = y_0) = y_0 \cdot X.$$

Es decir, la variable $Z|(Y = y_0)$ es una variable aleatoria gaussiana X multiplicada por una constante, y_0 . Al tratarse de una gaussiana, basta conocer la media y la varianza para que la *fdp* quede totalmente determinada.

Respecto a la media se tiene que $E[y_0 \cdot X] = y_0 \cdot E[X] = y_0 \cdot \bar{x}$. Para la varianza se procede de igual forma, obteniéndose $\sigma_Y^2 = y_0^2 \cdot \sigma_X^2$. Sustituyendo el valor concreto y_0 por un y genérico, resulta

$$Z|(Y = y) \sim \mathcal{N}(y\bar{x}, y\sigma_X),$$

con lo que la *fdp* buscada adopta la siguiente forma

$$f_{Z|Y}(z, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}\sigma_X} \exp\left(-\frac{(z - y\bar{x})^2}{2y^2\sigma_X^2}\right),$$

$$-\infty \leq z \leq \infty, \quad 0 \leq y \leq 1$$

Ejercicio 1.13.

Las variables aleatorias X_1 y X_2 son independientes entre sí y uniformes en el intervalo $[0, 1]$. Determinar la *fdp* de la variable aleatoria $Y = \max\{X_1, X_2\}$, es decir, por cada pareja de valores de X_1 y X_2 , la variable Y toma el valor del mayor de ambos.

Solución

Se determinará primero la función distribución de probabilidad $F_Y(y)$ y se derivará posteriormente para obtener $f_Y(y)$, siguiendo el método indirecto de transformación de variables aleatorias.

$$F_Y(y) = \Pr(Y \leq y) = \Pr(\max\{X_1, X_2\} \leq y).$$

El suceso $\max\{X_1, X_2\} \leq y$ es equivalente a la intersección de los sucesos $X_1 \leq y$ y $X_2 \leq y$, por tanto,

$$\begin{aligned} F_Y(y) = \Pr(X_1 \leq y, X_2 \leq y) &= \int_0^y \int_0^y f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_0^y dx_1 \cdot \int_0^y dx_2 = y^2, \quad 0 \leq y \leq 1, \end{aligned}$$

ya que $f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = 1$, para $0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq 1$. Derivando, se llega a

$$f_Y(y) = 2y, \quad 0 \leq y \leq 1$$

El resultado confirma la intuición de que valores cercanos a 1 tienen más probabilidad de ser máximos que los valores cercanos a cero.

Ejercicio 1.14.

Considerar las variables aleatorias X e Y donde $Y = X^2$. Demostrar que si la función densidad de probabilidad de X es par, entonces X e Y son incorreladas.

Solución

Dos variables aleatorias son incorreladas si se cumple que $c_{XY} = 0$, es decir que $E[XY] = E[X]E[Y]$. Para el caso propuesto en el problema

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = 0 \\ E[XY] &= E[X^3] = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f_X(x) dx = 0, \end{aligned}$$

con lo cual queda demostrada la incorrelación entre ambas. Observar que en las dos integrales evaluadas el integrando es una función impar. Efectivamente, en ambos casos se trata del producto de una función impar ($p(x) = x$ y $p(x) = x^3$ respectivamente) con otra par, $f_X(x)$. Al integrar una función impar a lo largo de la recta real el resultado siempre es nulo, puesto que la integral en la parte positiva y en la parte negativa de la recta real dan el mismo resultado cambiado de signo. Este ejemplo muestra, además, que dos variables dependientes pueden ser incorreladas.

Ejercicio 1.15.

Demostrar que si la función densidad de probabilidad conjunta de dos variables aleatorias X e Y es uniforme en un recinto rectangular de lados paralelos a los ejes coordenados, entonces ambas variables son independientes.

Solución

La *fdp* descrita en el enunciado se puede expresar de forma general como

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{(b-a)(d-c)}, \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d.$$

Para verificar si X e Y son independientes es necesario comprobar que el producto de las *fdp* marginales coincide con la *fdp* conjunta. Las marginales son

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy = \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_c^d dy = \frac{1}{(b-a)}, \quad a \leq x \leq b$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx = \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b dx = \frac{1}{(d-c)}, \quad c \leq y \leq d,$$

donde, como se observa, los límites de la integración con respecto a una variable son independientes de la otra variable en ambos casos. Se puede verificar cómo, efectivamente, $f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.

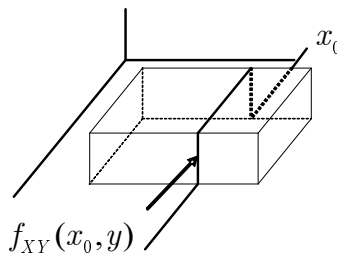


Figura 1.21 Función densidad de probabilidad $f_{XY}(x, y)$ y su corte por el plano $x = x_0$ en el ejercicio 1.15.

Es posible llegar a la misma conclusión de forma gráfica. En la figura 1.21 se representa la *fdp* conjunta y la *fdp* condicional que coincide,

salvo un factor de escala, con el corte de la *fdp* conjunta por un plano $X = x_0$. Como se puede apreciar, dicha *fdp* condicional no varía sea cual sea el valor de X , lo que significa que $f_{Y|X}(x, y) = f_Y(y)$. Como $f_{XY}(x, y) = f_{Y|X}(x, y)f_X(x)$, se concluye que $f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.

Ejercicio 1.16.

Considerar cuatro parejas de variables aleatorias cuya distribución es uniforme en los recintos numerados de la figura 1.22. Indicar para cada caso si la pareja de variables aleatorias son dependientes o independientes, ortogonales o no ortogonales y correladas o incorreladas.

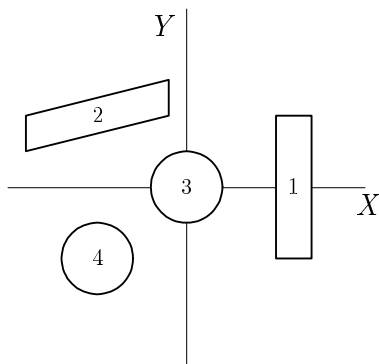


Figura 1.22 Regiones de definición de las variables aleatorias uniformes del ejercicio 1.16.

Solución

Dos variables aleatorias son dependientes cuando un cambio en una de ellas altera el comportamiento estadístico de la otra. En los casos 2, 3 y 4, el valor que tome una de ellas determina claramente el rango de valores que puede tomar la otra. Esto basta para concluir que hay dependencia. En el caso 1 no ocurre así. De hecho, en el problema 1.15 se demuestra que este tipo de *fdp* corresponde a variables independientes.

Para comprobar la ortogonalidad o no ortogonalidad de dos variables, basta recordar que dos variables X e Y son ortogonales si y sólo si

$E[XY] = 0$, es decir, si la media del producto es nula. Como se puede apreciar, en el caso 2 los productos de las variables toman siempre valores negativos, con lo que el promedio de ellos será un número negativo. Lo contrario ocurre para el caso 4. En ambos casos el promedio de los productos es un número distinto de cero, lo que hace que las variables no sean ortogonales. En los casos 1 y 3 los productos pueden tomar valores positivos y negativos en la misma proporción (dada la simetría de las *fdp*), por lo que la media resultará igual a cero y las variables serán ortogonales.

Para verificar si son o no incorreladas habría que determinar si existe tendencia a la variación conjunta de tipo lineal entre las dos variables, es decir, verificar si cuando una crece la otra crece (coeficiente de correlación positivo) o bien si cuando una decrece la otra crece (coeficiente de correlación negativo) en todo el rango de variación de ambas variables. Esta verificación puede llegar a ser bastante complicada desde el punto de vista puramente cualitativo, por lo que se sugiere otro método.

Se trata de determinar si $c_{XY} = 0$ o no, es decir, hay que evaluar

$$c_{XY} = E[(X - \bar{x})(Y - \bar{y})],$$

que equivale a determinar si las variables $X - \bar{x}$ y $Y - \bar{y}$ son o no ortogonales. Para el caso de *fdp* uniforme, la operación de restar las medias a las variables de partida supone un desplazamiento al origen de su centro de geometría.

Así, para verificar la incorrelación se proponen dos pasos:

- Desplazar la *fdp* de forma que el centro de geometría coincida con el origen de coordenadas.
- Verificar la ortogonalidad de las variables asociadas a esta nueva *fdp* siguiendo el razonamiento indicado anteriormente en el ejercicio.

En la figura 1.23.a se muestra la *fdp* desplazada de la pareja de variables correspondiente al caso 1. Para verificar la ortogonalidad hay que estudiar el promedio del producto de ambas. Los productos correspondientes a los cuadrantes I y III serán positivos mientras que los de los cuadrantes II y IV serán negativos (zona sombreada en la

figura). Dada la simetría de la f_{dp} , en promedio se cancelarán, con lo que se puede concluir que se trata de variables incorreladas.

Procediendo de igual forma para las variables del caso 2, en la figura 1.23.b se observa cómo ahora los valores positivos de los productos son superiores a los negativos, por lo que en promedio no se cancelarán, lo que significa que las variables son correladas. Es inmediato comprobar que las dos parejas restantes son incorreladas.

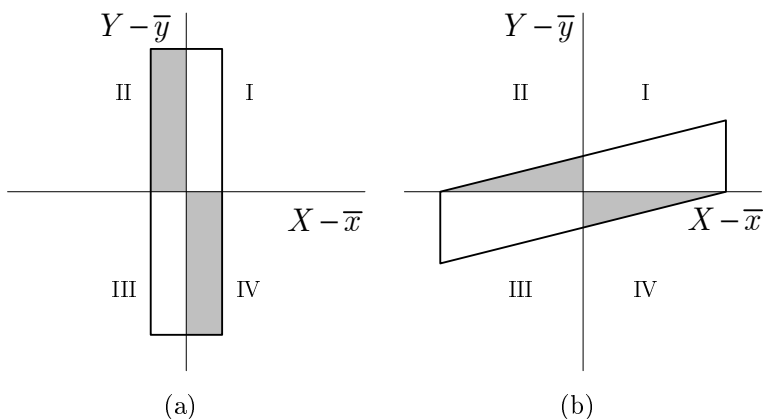


Figura 1.23 (a) f_{dp} del caso 1 desplazada y (b) f_{dp} del caso 2 desplazada en el ejercicio 1.16.

Resumiendo,

- 1) Independientes, incorreladas, ortogonales
- 2) Dependientes, correladas, no ortogonales
- 3) Dependientes, incorreladas, ortogonales
- 4) Dependientes, incorreladas, no ortogonales

Conviene apuntar que los razonamientos empleados para la resolución de este ejercicio tienen utilidad sólo en el caso de variables con f_{dp} extremadamente simple. En cualquier otra situación habrá que realizar los cálculos pertinentes a partir de la expresión analítica de la f_{dp} .

Ejercicio 1.17.

En este ejercicio se pretende demostrar que la relación estadística entre variables puede cambiar mediante un giro del sistema de coordenadas. Considerar las variables aleatorias X_1 y X_2 con desviaciones típicas σ_1 y σ_2 respectivamente y correladas entre sí, siendo ρ su coeficiente de correlación. Las variables Y_1 e Y_2 se obtienen a partir de X_1 y X_2 mediante la siguiente transformación,

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix},$$

que corresponde a un giro de un ángulo θ en el sistema de coordenadas en el que están definidas X_1 y X_2 . Determinar el ángulo de giro θ para que las variables Y_1 e Y_2 resulten incorreladas.

Solución

Las variables Y_1 e Y_2 serán incorreladas si se cumple que la covarianza es nula $c_{Y_1 Y_2} = 0$, es decir, si $E[Y_1 Y_2] = E[Y_1]E[Y_2]$. Sustituyendo en esta expresión Y_1 e Y_2 por su valor en función de X_1 , X_2 y θ , se tiene la ecuación

$$\begin{aligned} E[(\cos(\theta)X_1 + \text{sen}(\theta)X_2) \cdot (-\text{sen}(\theta)X_1 + \cos(\theta)X_2)] \\ = E[(\cos(\theta)X_1 + \text{sen}(\theta)X_2)] \cdot E[(-\text{sen}(\theta)X_1 + \cos(\theta)X_2)]. \end{aligned}$$

Operando en ambos términos y aplicando linealidad del operador esperanza

$$\begin{aligned} \text{sen}(\theta)\cos(\theta)(E[X_2^2] - E[X_1^2]) + (\cos^2(\theta) - \text{sen}^2(\theta))E[X_1 X_2] \\ = \text{sen}(\theta)\cos(\theta)(E^2[X_2] - E^2[X_1]) + (\cos^2(\theta) - \text{sen}^2(\theta))E[X_1]E[X_2]. \end{aligned}$$

A continuación, se identifican los estadísticos

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= E[X_i^2] - E^2[X_i] \\ c_{XY} &= E[X_1 X_2] - E[X_1]E[X_2] = \rho\sigma_X\sigma_Y \end{aligned}$$

y se reagrupan términos, obteniéndose

$$(\cos^2(\theta) - \text{sen}^2(\theta)) \rho\sigma_1\sigma_2 = \text{sen}(\theta)\cos(\theta)(\sigma_1^2 - \sigma_2^2).$$

Por último, sabiendo que

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= \cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta) \\ \operatorname{sen}(2\theta) &= 2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta),\end{aligned}$$

se tiene

$$\cos(2\theta)\rho\sigma_1\sigma_2 = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\theta)(\sigma_1^2 - \sigma_2^2),$$

con lo cual

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}$$

Ejercicio 1.18.

Se desea generar una variable aleatoria X con función distribución de probabilidad genérica $F_D(x)$ a partir de una variable aleatoria U que es uniforme en el intervalo $[0, 1]$. Para ello se propone la transformación $X = F_D^{-1}(U)$ indicada en la figura 1.24. Demostrar que la función distribución de probabilidad de la variable de salida es la deseada, es decir $F_X(x) = F_D(x)$.

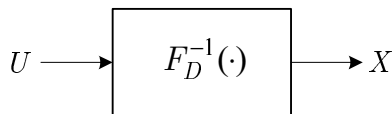


Figura 1.24 Transformación para generar una variable aleatoria en el ejercicio 1.18 .

Solución

Aplicando el método indirecto para la transformación de variables aleatorias se tiene que

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) = \Pr(F_D^{-1}(U) \leq x) = \Pr(U \leq F_D(x)).$$

El último paso de la ecuación anterior es posible gracias a que $F_D(\cdot)$ es una función monótona creciente. El valor de esta probabilidad se obtiene integrando la correspondiente f_{dp} como se indica en la figura 1.25, resultando $F_X(x) = F_D(x)$, como se quería demostrar.

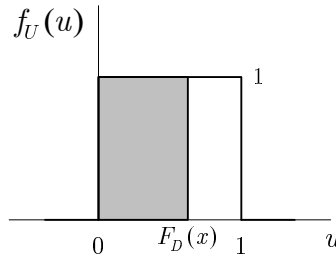


Figura 1.25 Integración para calcular $\Pr(U \leq F_D(x))$ en el ejercicio 1.18.

Ejercicio 1.19.

Sean X e Y dos variables aleatorias gaussianas de media cero, varianza σ^2 e independientes entre sí. Las variables R y ϕ corresponden a la conversión de coordenadas rectangulares a polares

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \phi = \arctan(Y/X)$$

Demostrar que R es una variable aleatoria de Rayleigh cuya función densidad de probabilidad viene dada por $f_R(r) = (r/\sigma^2)e^{-r^2/2\sigma^2}$, que ϕ es uniforme en el intervalo $[0, 2\pi]$ y que ambas son independientes.

Solución

La f_{dp} conjunta de dos variables aleatorias obtenidas por transformación de otras dos variables aleatorias, cuya f_{dp} conjunta es conocida, se puede calcular con la expresión (1.77) del método directo

$$f_{R\Phi}(r\phi) = f_{XY}(r\cos(\phi), r\sin(\phi)) \cdot |J_{XY}(r, \phi)|, \quad (1.117)$$

siendo $J_{XY}(r, \phi)$ el jacobiano de la transformación inversa: $x = r\cos(\phi)$, $y = r\sin(\phi)$. La f_{dp} conjunta de x e y es el producto de las marginales,

ya que se trata de variables aleatorias independientes, es decir

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2}. \quad (1.118)$$

El jacobiano resulta

$$J_{XY}(r, \phi) = \det \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -r\text{sen}(\phi) \\ \text{sen}(\phi) & r\cos(\phi) \end{bmatrix} = r. \quad (1.119)$$

Sustituyendo (1.118) y (1.119) en (1.117), se obtiene

$$f_{R\Phi}(r, \phi) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2}, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

Integrando esta f_{dp} conjunta se obtienen las marginales requeridas

$$f_R(r) = \int_0^{2\pi} f_{R\Phi}(r, \phi) \cdot d\phi = \frac{r}{\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2}, \quad r \geq 0$$

$$f_\Phi(\phi) = \int_0^\infty f_{R\Phi}(r, \phi) \cdot dr = \frac{1}{2\pi}, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2}, \quad r \geq 0$$

$$f_\Phi(\phi) = \frac{1}{2\pi}, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

Se comprueba que, efectivamente, ambas variables son independientes, pues el producto de las f_{dp} marginales coincide con la f_{dp} conjunta.

Ejercicio 1.20.

Se desea generar una variable aleatoria gaussiana de media nula y varianza σ^2 a partir de variables aleatorias uniformes en el intervalo $[0, 1]$ y se desea disponer para ello de una fórmula cerrada. Puesto que no existe una expresión analítica para la inversa de la función distribución de probabilidad de una variable aleatoria gaussiana, el método

del ejercicio 1.18 no es adecuado. Demostrar, combinando los resultados de los dos ejercicios anteriores, que un posible método consiste en aplicar la expresión

$$X = \sqrt{(-2\sigma^2 \ln(U_1))} \cdot \cos(2\pi U_2),$$

donde X es la variable aleatoria gaussiana simulada y U_1 y U_2 son variables aleatorias uniformes en el intervalo $[0, 1]$ independientes entre sí.

Nota: Se trata del método *Box-Muller* para generar variables gaussianas

Solución

Según se indica en el ejercicio 1.19, si X e Y son dos variables aleatorias gaussianas, independientes, de media nula y misma varianza σ^2 , entonces las variables R y Φ , obtenidas mediante la transformación $R = \sqrt{(X^2 + Y^2)}$, $\Phi = \arctan(Y/X)$, son independientes y siguen una distribución de Rayleigh de parámetro σ y una distribución uniforme en $[0, 2\pi]$ respectivamente.

Despejando X se obtiene $X = R\cos(\Phi)$, lo que significa que si se multiplica una variable de Rayleigh de parámetro σ por el coseno de una variable uniforme en $[0, 2\pi]$, ambas independientes, el resultado se distribuirá de forma gaussiana con media 0 y varianza σ^2 , que es lo deseado.

Para generar una variable de Rayleigh R a partir de una uniforme U_1 , se puede aplicar el método de la función distribución inversa, del ejercicio 1.18. Haciendo $u_1 = F_R^{-1}(r)$, siendo $F_R(r) = 1 - \exp(-r^2/2\sigma^2)$, se obtiene

$$R = \sqrt{(-2\sigma^2 \ln(1 - U_1))} = \sqrt{(-2\sigma^2 \ln(U_1))},$$

donde se ha aplicado que, a efectos estadísticos, $1 - U_1$ es idéntico a U_1 .

Multiplicando este resultado por $\cos(2\pi U_2)$, se obtiene la expresión propuesta en el enunciado.

Ejercicio 1.21.

En un sistema de comunicaciones digitales, la variable aleatoria X representa el símbolo transmitido y puede tomar los valores 0 y A con probabilidades P_0 y P_A respectivamente. Las variables N_0 y N_A representan el ruido que se suma durante la transmisión al símbolo 0 y al símbolo A respectivamente y sus *fdp* son $f_{N_0}(\eta)$ y $f_{N_A}(\eta)$. El valor recibido se modela mediante la variable aleatoria Y .

El receptor debe decidir el símbolo transmitido a partir de la observación del valor de la variable Y . Para ello, realiza una comparación del valor observado de Y con un umbral V , de forma que si $y \geq V$, el receptor decidirá que el símbolo enviado fue A , mientras que si $y < V$, el receptor decidirá que el símbolo enviado fue 0. Este procedimiento está esquematizado en el diagrama de bloques de la figura 1.26.

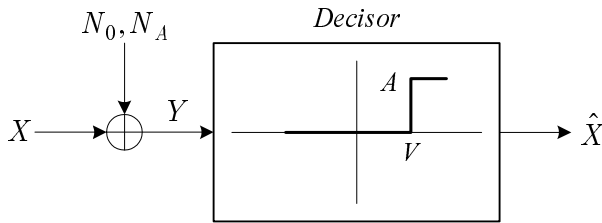


Figura 1.26 Diagrama de bloques del sistema de comunicaciones digitales propuesto en el ejercicio 1.21.

- Obtener una expresión que permita calcular el umbral óptimo de decisión V_o tal que la probabilidad de error asociada sea mínima.
- Particularizar el resultado anterior para el caso de que las *fdp* del ruido asociado al símbolo 0 y al símbolo A sean las indicadas en la figura 1.27, siendo $P_0 = P_A = \frac{1}{2}$.

Solución

- Inicialmente, es necesario determinar una expresión que relacione la probabilidad de error P_e con el umbral de decisión V .

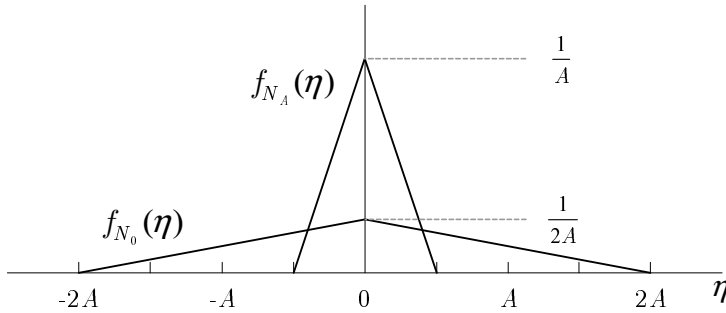


Figura 1.27 Funciones densidad de probabilidad de las variables aleatorias de ruido N_0 y N_A del ejercicio 1.21.

Posteriormente, habrá que derivar dicha expresión respecto a V e igualarla a cero para determinar el valor de V que la minimiza. Puesto que el ruido es diferente según el símbolo X transmitido, también lo será la variable Y . Interesa considerar, por tanto, la variable Y condicionada a cada valor del símbolo X . En concreto, $Y|(X = 0)$ e $Y|(X = A)$.

Un error puede ocurrir cuando el símbolo transmitido es $X = 0$ ó cuando el símbolo transmitido es $X = A$. Aplicando el teorema de la probabilidad total (1.101) se puede escribir

$$P_e = P_e|(X = 0) \cdot \Pr(X = 0) + P_e|(X = A) \cdot \Pr(X = A).$$

Un error cuando el símbolo enviado es $X = 0$ ocurrirá si la variable Y toma en esas circunstancias un valor superior al umbral V , pues en ese caso la decisión será el símbolo $\hat{X} = A$ y viceversa. Así,

$$P_e|(X = 0) = \Pr((Y > V)|(X = 0)) = \int_V^\infty f_{Y|(X=0)}(y)dy$$

$$P_e|(X = A) = \Pr((Y < 0)|(X = A)) = \int_{-\infty}^V f_{Y|(X=A)}(y)dy.$$

Con esto, la probabilidad de error en función de V , que se denotará como $P_e(V)$, viene dada por

$$P_e(V) = P_0 \cdot \int_V^\infty f_{Y|(X=0)}(y)dy + P_A \cdot \int_{-\infty}^V f_{Y|(X=A)}(y)dy, \quad (1.120)$$

que también se puede expresar como

$$P_e(V) = P_0 \cdot \left(1 - \int_{-\infty}^V f_{Y|(X=0)}(y) dy \right) + P_A \cdot \int_{-\infty}^V f_{Y|(X=A)}(y) dy.$$

A continuación se deriva y se iguala a cero para encontrar el mínimo de $P_e(V)$.

$$\frac{\partial P_e(V)}{\partial V} = -P_0 \cdot f_{Y|(X=0)}(V) + P_A \cdot f_{Y|(X=A)}(V) = 0,$$

El umbral óptimo V_o se obtiene de la ecuación

$$P_0 \cdot f_{Y|(X=0)}(V_o) = P_A \cdot f_{Y|(X=A)}(V_o)$$

Como se observa, V_o corresponde al valor del argumento en el que las dos f_{dp} (previamente escaladas por las probabilidades de los símbolos) son iguales, como por ejemplo ocurrirá en los puntos de corte (aunque no sólo en ellos, como se verá más adelante).

Una forma alternativa de resolver este apartado es a través del teorema de Bayes. Dado un valor observado y de la variable Y , se trata de considerar las probabilidades *a posteriori*

$$\Pr((X = 0)|(Y = y)),$$

$$\Pr((X = A)|(Y = y)),$$

que indican la probabilidad de que se haya enviado el símbolo 0 ó el símbolo A a la vista del valor que ha tomado Y . Elegir la mayor de ambas maximiza la probabilidad de acertar en la decisión y, por tanto, minimiza la probabilidad de error. Este criterio de decisión recibe el nombre de *máximo a posteriori* (MAP).

Acudiendo al teorema de Bayes, indicado en (1.104), se tiene

$$\Pr((X = 0)|(Y = y)) = \frac{f_{Y|(X=0)}(y) \cdot P_0}{f_Y(y)},$$

$$\Pr((X = A)|(Y = y)) = \frac{f_{Y|(X=A)}(y) \cdot P_A}{f_Y(y)}.$$

Para obtener el umbral de comparación se deben igualar ambas expresiones. La ecuación resultante proporciona el umbral óptimo y es la misma que se ha obtenido como solución de este apartado.

Es interesante tener en cuenta que la ecuación mencionada pueden tener varias soluciones diferentes, lo que significa que la decisión óptima implicaría varios umbrales, algo que no es posible con un decisor de umbral simple como el propuesto en este ejercicio.

- b) Según el enunciado del problema, las variables $Y|(X = 0)$ y $Y|(X = A)$ son

$$\begin{aligned} Y|(X = 0) &= N_0 \\ Y|(X = A) &= A + N_A, \end{aligned}$$

donde N_0 y N_A son las variables aleatorias que representan el ruido. Así,

$$\begin{aligned} f_{Y|(X=0)}(y) &= f_{N_0}(y) \\ f_{Y|(X=A)}(y) &= f_{N_A}(y - A), \end{aligned}$$

siendo $f_{N_0}(\cdot)$ y $f_{N_A}(\cdot)$ las *fdp* de las variables de ruido N_0 y N_A respectivamente. Aplicando el resultado del apartado anterior, el V óptimo es el que cumple que

$$\frac{1}{2}f_{N_0}(V_o) = \frac{1}{2}f_{N_A}(V_o - A).$$

En la figura 1.28 se representan estas dos funciones. Como se puede apreciar, existen dos puntos de corte, lo que significa que hay dos valores de V que anulan la derivada de $P_e(V)$. Estos dos valores son

$$V_1 = \frac{10}{17}A; \quad V_2 = \frac{22}{15}A.$$

Para determinar cuál de los dos corresponde al mínimo basta con evaluar $P_e(V_1)$ y $P_e(V_2)$ con la expresión (1.120) y elegir el que da lugar a una P_e menor. Estos valores son $P_e(V_1) = 0,14$ y $P_e(V_2) = 0,52$, por tanto, el umbral óptimo es $V_o = V_1$. El valor $P_e(V_2)$ corresponde a un máximo de la probabilidad de error.

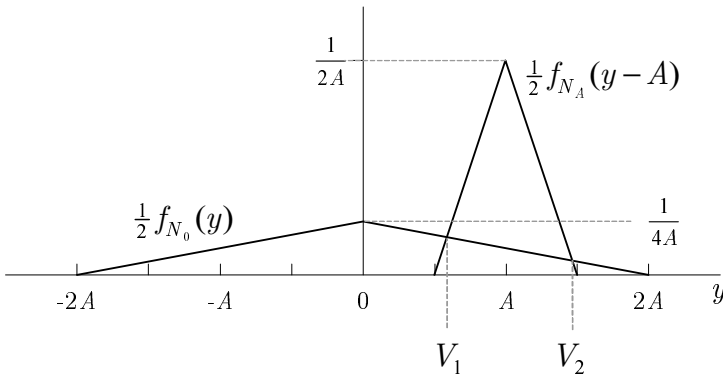


Figura 1.28 Funciones densidad de probabilidad condicional $f_{Y|(X=0)}(y)$ e $f_{Y|(X=A)}(y)$ del ejercicio 1.21.

$$V_o = \frac{10}{17}A$$

Tal y como se ha explicado en el apartado anterior, el hecho de que existan dos soluciones para el valor del umbral significa que, en realidad, la decisión óptima consistiría en emplear dos umbrales, de manera que el criterio de decisión sería, según se deduce de los resultados del apartado a), el siguiente: el símbolo decidido será 0 si $Y < V_1$ ó si $Y > V_2$ mientras que será A si $V_1 \leq Y \leq V_2$.

Es importante resaltar que la ecuación $\frac{1}{2}f_{N_0}(V) = \frac{1}{2}f_{N_A}(V - A)$ también se cumple para $V \geq 2A$ y para $V \leq -2A$, puesto en ambos casos las dos funciones son nulas y, por tanto, iguales. Estos posibles valores para el umbral tampoco corresponden a un mínimo de la probabilidad error, pues en ambos casos P_e toma el valor constante igual a 0.5, que es la probabilidad más desfavorable en el caso de símbolos equiprobables.

Ejercicio 1.22.

Considerar un sistema de comunicaciones digitales como el descrito en el ejercicio 1.21 en el que los símbolos transmitidos 0 y A tienen probabilidades P_0 y P_A respectivamente y en el que las variables aleatorias que representan el ruido son, en esta ocasión, gaussianas con medias nulas y varianzas σ_0^2 y σ_A^2 respectivamente, es decir, $N_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0)$ y $N_A \sim \mathcal{N}(0, \sigma_A)$.

- Calcular y representar la probabilidad de error en función del umbral de decisión V . Determinar el umbral óptimo de decisión V_o , tal que la probabilidad de error asociada sea mínima. Parámetros: $P_0 = P_A = \frac{1}{2}$, $\sigma_0 = \sigma_A = 1$ y $A = 5$.
- Repetir el apartado a) con $P_0 = P_A = \frac{1}{2}$, $\sigma_0 = 5$, $\sigma_A = 1$ y $A = 5$.
- Repetir el apartado a) con $P_0 = \frac{1}{5}$, $P_A = \frac{4}{5}$, $\sigma_0 = \sigma_A = 1$, $A = 5$.

Solución

La probabilidad de error ha sido obtenida en el ejercicio 1.21, y viene dada por la expresión (1.120)

$$P_e(V) = P_0 \cdot \int_V^\infty f_{Y|(X=0)}(y)dy + P_A \cdot \int_{-\infty}^V f_{Y|(X=A)}(y)dy.$$

Esta expresión se debe particularizar con

$$Y|(X=0) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0),$$

$$Y|(X=A) \sim \mathcal{N}(A, \sigma_A).$$

La probabilidad de error se puede expresar haciendo uso de la función $Q(\cdot)$ de esta manera

$$P_e(V) = P_0 \cdot Q\left(\frac{V}{\sigma_0}\right) + P_A \cdot \left[1 - Q\left(\frac{V-A}{\sigma_A}\right)\right]. \quad (1.121)$$

El valor del umbral óptimo es aquel que anula la derivada de $P_e(V)$. El resultado general obtenido en el ejercicio 1.21 es

$$P_0 \cdot f_{Y|(X=0)}(V_o) = P_A \cdot f_{Y|(X=A)}(V_o),$$

Sustituyendo las f_{dp} por sus expresiones, se tiene la ecuación

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \cdot e^{-\frac{(V_o)^2}{2\sigma_0^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_A} \cdot e^{-\frac{(V_o-A)^2}{2\sigma_A^2}}, \quad (1.122)$$

de la que habrá que despejar V_o .

- a) Para los parámetros indicados en el enunciado, la ecuación (1.122) se resuelve de forma inmediata, resultando

$$V_o = 2,5$$

es decir el punto medio de los valores de los dos símbolos. En la figura 1.29 están representadas las funciones densidad de probabilidad condicionadas (figura superior) y la probabilidad de error en función de V (figura inferior). La probabilidad de error mínima se obtiene sustituyendo este valor de V_o en (1.121)

$$P_e(2,5) = \frac{1}{2} \cdot Q(2,5) + \frac{1}{2} \cdot [1 - Q(2,5 - 5)] = 0,0062.$$

- b) Para obtener el umbral óptimo se particulariza (1.122) con los parámetros de este apartado

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}5} \cdot e^{-\frac{(V_o)^2}{50}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(V_o-5)^2}{2}}.$$

Tomando logaritmo en ambos miembros resulta la ecuación de segundo grado

$$24x^2 - 250x + (25^2 - 50\ln(5)) = 0,$$

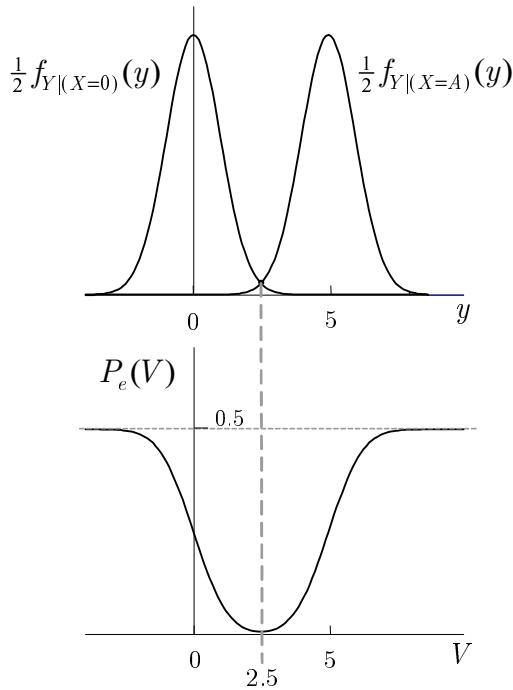


Figura 1.29 Funciones densidad de probabilidad condicionadas (arriba) y probabilidad de error (abajo) del ejercicio 1.22 para $P_0 = P_A = \frac{1}{2}$, $\sigma_0 = \sigma_A = 1$ y $A = 5$.

que tiene dos soluciones: $V_1 = 3,10$ y $V_2 = 7,31$. En estos dos valores se anula la derivada de $P_e(V)$. En la figura 1.30 se representan las funciones densidad de probabilidad condicionadas junto a la probabilidad de error para los parámetros de este apartado. Como se puede comprobar, V_1 corresponde a un mínimo y V_2 a un máximo. Por tanto,

$$V_o = 3,10$$

y la correspondiente probabilidad mínima de error es, según (1.121),

$$P_e(3,10) = \frac{1}{2} \cdot Q\left(\frac{3,10}{5}\right) + \frac{1}{2} \cdot [1 - Q(3,10 - 5)] \approx 0,15.$$

Esta probabilidad es, lógicamente, mayor que la obtenida en el apartado anterior puesto que en este caso existe más ruido. Observar que, tal y como ocurre en el ejercicio anterior, existen dos soluciones para la ecuación que permite obtener el valor del umbral óptimo. Esto significa que el esquema de decisión óptima no emplearía un solo umbral sino dos, siguiendo el criterio que se deduce de lo expuesto en el apartado a) del ejercicio 1.21. En concreto, la probabilidad de error se podría reducir empleando los dos umbrales hasta aproximadamente 0.12.

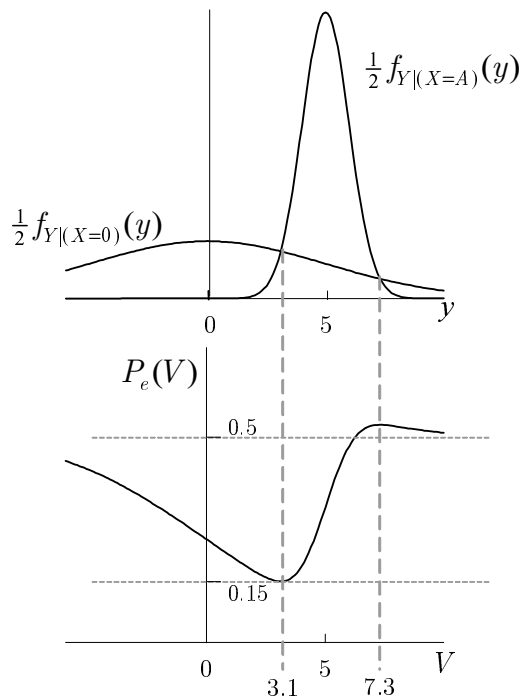


Figura 1.30 Funciones densidad de probabilidad condicionadas (arriba) y probabilidad de error (abajo) del ejercicio 1.22 para $P_0 = P_A = \frac{1}{2}$, $\sigma_0 = 5$, $\sigma_A = 1$ y $A = 5$.

- c) Se trata en este apartado de ver el efecto que tiene el que los símbolos no sean equiprobables. Procediendo como en los apartados anteriores se tiene

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(V_0)^2}{2}} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(V_0-5)^2}{2}},$$

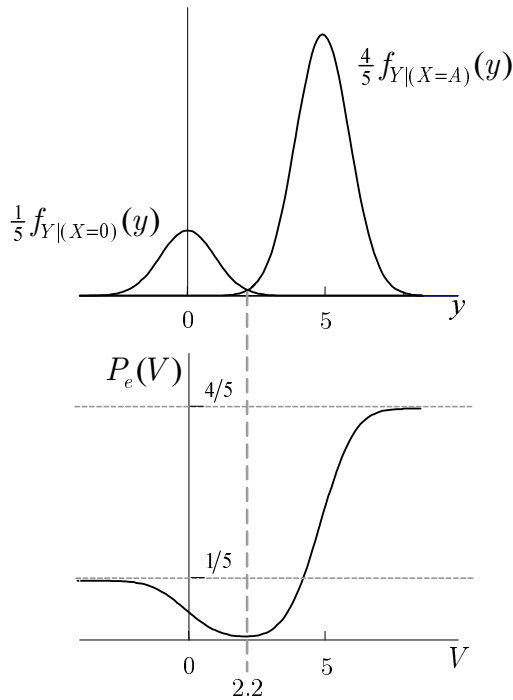


Figura 1.31 Funciones densidad de probabilidad condicionadas (arriba) y probabilidad de error (abajo) del ejercicio 1.22 para $P_0 = \frac{1}{5}$, $P_A = \frac{4}{5}$, $\sigma_0 = \sigma_A = 1$, $A = 5$.

que da como resultado

$$V_o = 2,22$$

La probabilidad de error mínima es

$$P_e(2,22) = \frac{1}{5} \cdot Q(2,22) + \frac{4}{5} \cdot [1 - Q(2,22 - 5)] \approx 0,005.$$

Esta probabilidad es menor que en el caso de que los símbolos sean equiprobables, porque existe menos incertidumbre sobre el símbolo transmitido. Observar que las probabilidades de error tienden a las probabilidades de cada uno de los símbolos cuando el umbral tiende a $\pm\infty$, como es lógico.

En la figura 1.31 se representan las funciones densidad de probabilidad condicionales y la curva de la probabilidad de error en función de V para este último caso.

Ejercicio 1.23.

En un sistema de comunicaciones digitales la variable X representa el símbolo transmitido en cada instante y puede tomar los valores $-A$ y A de forma equiprobable. A esta variable se le suma un ruido modelado por la variable aleatoria N , uniforme en el intervalo $[-3A/2, 3A/2]$, dando lugar a la variable Y . El receptor realiza la decisión del símbolo que se envió comparando el valor observado de Y con un umbral V , como se muestra en la figura 1.32. Calcular y representar probabilidad de error que se produce en función del valor de V (para V entre $-3A$ y $3A$).

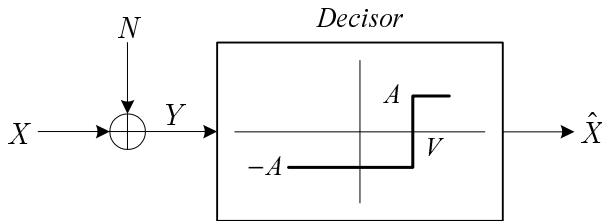


Figura 1.32 Diagrama de bloques del sistema de comunicaciones digitales propuesto en el ejercicio 1.23.

Solución

En el ejercicio 1.21 se obtuvo la expresión para la probabilidad de error de decisión binaria (1.120), que para el caso de símbolos equiprobables es

$$P_e = \frac{1}{2} \int_V^{\infty} f_{Y|(X=-A)}(y) dy + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^V f_{Y|(X=A)}(y) dy.$$

En este ejercicio el ruido asociado a ambos símbolos es el mismo. A partir de los datos del enunciado se puede escribir

$$Y|(X = A) = A + N$$

$$Y|(X = -A) = -A + N.$$

Así,

$$f_{Y|(x=A)}(y) = f_N(y - A),$$

$$f_{Y|(x=-A)}(y) = f_N(y + A),$$

siendo $f_N(\cdot)$ la *fdp* del ruido. Con esto, la probabilidad de error en función de V es

$$P_e(V) = \int_{-\infty}^V \frac{1}{2} f_N(y - A) dy + \int_V^{\infty} \frac{1}{2} f_N(y + A) dy.$$

Para evaluar esta probabilidad de error en función de V es necesario por tanto, calcular la integral de $\frac{1}{2} f_N(y - A)$ para valores de y menores que V y la integral de $\frac{1}{2} f_N(y + A)$ para valores de y mayores que V . En las figuras 1.33, 1.34 y 1.35 están representadas ambas funciones y se han marcado las áreas correspondientes a la integración en función del umbral V para tres rangos distintos de valores.

En la figura 1.33 se muestra el caso en el que $V > 5A/2$, en el que la probabilidad de error se mantiene constante. La figura 1.34 corresponde al caso en el que $A/2 \leq V \leq 5A/2$, donde la probabilidad de error es proporcional a V .

Por último, en la figura 1.35 se cubre el caso de que $0 \leq V \leq A/2$, donde se observa que la suma de áreas marcadas se mantiene constante cuando varía V y, por tanto, también será constante la probabilidad de error.

La expresión analítica concreta es

$$P_e(V) = \begin{cases} 1/2 & |V| \geq 5A/2 \\ \frac{1}{6A}(V + A/2) & A/2 \leq |V| \leq 5A/2 \\ 1/6 & |V| \leq A/2 \end{cases}$$

La simetría del problema hace que la $P_e(V)$ para valores de V negativos sea la misma que para valores positivos, de ahí la presencia del valor absoluto en la expresión analítica de la solución final. La representación gráfica de este resultado se muestra en la figura 1.36.

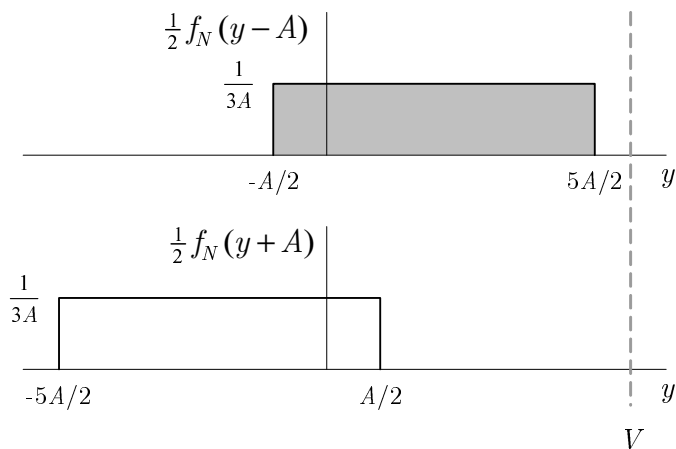


Figura 1.33 Funciones $\frac{1}{2}f_N(y-A)$ y $\frac{1}{2}f_N(y+A)$ y áreas correspondientes a la probabilidad de error para $V > 5A/2$ en ejercicio 1.23.

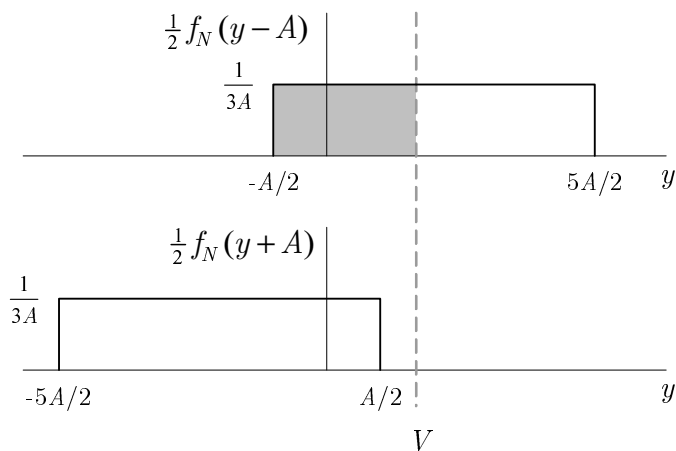


Figura 1.34 Funciones $\frac{1}{2}f_N(y-A)$ y $\frac{1}{2}f_N(y+A)$ y áreas correspondientes a la probabilidad de error para $A/2 \leq V \leq 5A/2$ en ejercicio 1.23.

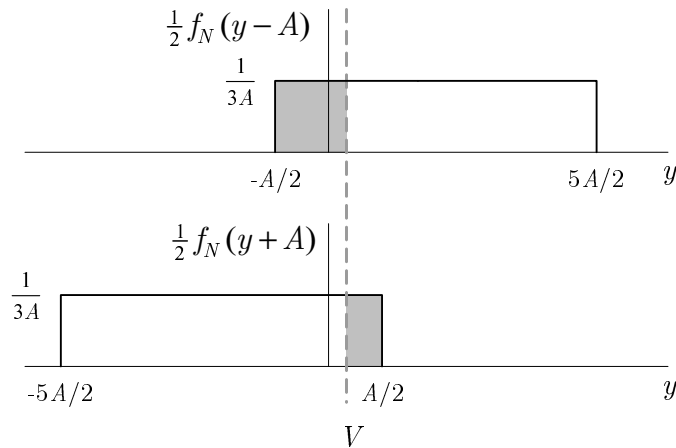


Figura 1.35 Funciones $\frac{1}{2} f_N(y-A)$ y $\frac{1}{2} f_N(y+A)$ y áreas correspondientes a la probabilidad de error para $0 \leq V \leq A/2$ en ejercicio 1.23.

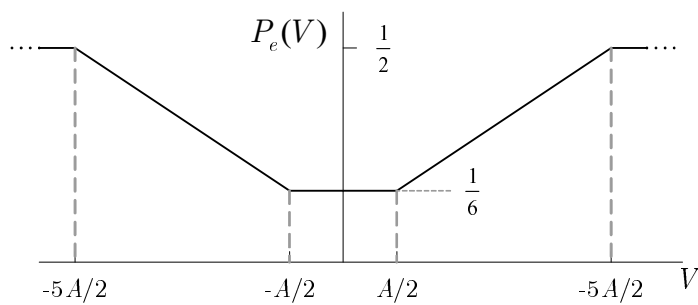


Figura 1.36 Probabilidad de error en función del umbral de decisión V en el ejercicio 1.23.

Ejercicio 1.24.

En un sistema de comunicaciones digitales, el transmisor puede enviar de forma equiprobable 4 símbolos diferentes cuyos valores son: $-3A/2$, $-A/2$, $A/2$ y $3A/2$. Al receptor llegan los símbolos acompañados de ruido que se puede modelar por una variable aleatoria gaussiana de media nula y varianza σ^2 . Los umbrales de decisión en el receptor están ubicados en $-A$, 0 y A , es decir, si Y es el valor recibido, entonces la regla de decisión es la mostrada en la tabla 1.1.

Tabla 1.1: Regla de decisión del ejercicio 1.24.

Valor Recibido	Símbolo decidido
$Y \leq -A$	$-3A/2$
$-A < Y \leq 0$	$-A/2$
$0 < Y \leq A$	$A/2$
$Y > A$	$3A/2$

- Determinar la probabilidad de error al decidir los símbolos, P_{es}
- Asumiendo que el nivel de ruido es suficientemente reducido respecto al nivel de los símbolos, obtener una expresión aproximada para la probabilidad de error de bit, P_{eb} .

Nota: Suponer que la asignación de bits a símbolos sigue un código Gray, es decir el grupo de bits asociado a un símbolo de un determinado valor solo varía en un bit respecto al grupo de bits asociado a los símbolos contiguos. Un ejemplo se muestra en la tabla 1.2.

Solución

- Sea X la variable aleatoria que representa a los símbolos transmitidos, N el nivel de ruido e $Y = X + N$. La probabilidad de

Tabla 1.2: Asignación de bits a niveles en el ejercicio 1.24.

Bits	Nivel
00	$-3A/2$
01	$-A/2$
11	$A/2$
10	$3A/2$

error en un símbolo P_{es} se puede expresar como

$$P_{es} = \frac{1}{4} [P_{es}|(X = -3A/2) + P_{es}|(X = -A/2) + P_{es}|(X = A/2) + P_{es}|(X = 3A/2)]. \quad (1.123)$$

Siguiendo el procedimiento de los ejercicios anteriores, estas probabilidades condicionadas se calculan integrando la *fdp* de Y condicionada a cada uno de los posibles valores de X .

$$P_{es}|(X = -3A/2) = \int_{-A}^{\infty} f_{Y|(X=-3A/2)}(y)dy$$

$$P_{es}|(X = 3A/2) = \int_{-\infty}^A f_{Y|(X=3A/2)}(y)dy$$

$$P_{es}|(X = -A/2) = \int_{-\infty}^{-A} f_{Y|(X=-A/2)}(y)dy + \int_0^{\infty} f_{Y|(X=-A/2)}(y)dy$$

$$P_{es}|(X = A/2) = \int_{-\infty}^0 f_{Y|(X=A/2)}(y)dy + \int_A^{\infty} f_{Y|(X=A/2)}(y)dy$$

En la figura se representan estas cuatro *fdp* y se marcan las áreas correspondientes a la integración indicada en las expresiones anteriores.

Observar que los símbolos interiores tienen doble posibilidad de error que los exteriores, puesto que una desviación mayor de $A/2$

tanto positiva como negativa respecto al valor del símbolo se traduce en una decisión errónea. Sabiendo que el ruido es gaussiano y de varianza σ^2 , las integrales se pueden expresar empleando la función $Q(\cdot)$. Como se puede observar, todas las áreas son iguales y corresponden a $Q(\frac{A}{2\sigma})$ con lo que las probabilidades anteriores quedan

$$P_{es}|(X = -3A/2) = P_{es}|(X = 3A/2) = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

$$P_{es}|(X = -A/2) = P_{es}|(X = A/2) = 2Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right).$$

Sustituyendo estos valores en (1.123) se llega a

$$P_{es} = \frac{3}{2}Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right).$$

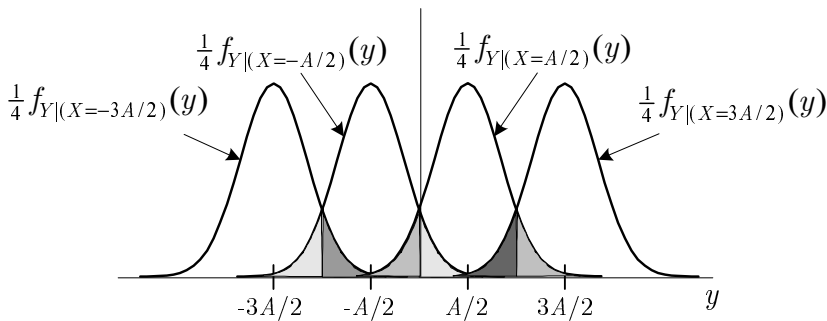


Figura 1.37 Funciones *fdp* condicionales del ejercicio 1.24 y áreas asociadas a la probabilidad de error.

- b) Para relacionar la probabilidad de error de bit con la de símbolo, se asume que la relación entre el nivel de los símbolos y el ruido es suficientemente alta (como se indica en el enunciado) de forma

que la probabilidad de una salto de más de un intervalo sea muy pequeña. En esas circunstancias, asumiendo código Gray, un símbolo erróneo significará un solo bit erróneo en cada bloque de 2 bits. Por tanto la probabilidad de error de bit P_{eb} será la mitad de la de símbolo, es decir

$$P_{eb} \approx \frac{3}{4} Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

Ejercicio 1.25.

Se desea estimar el valor de la variable aleatoria Y mediante una constante, es decir, $\hat{Y} = \alpha$, de forma que el error cuadrático medio cometido sea mínimo. Determinar el valor de la constante α y calcular dicho error.

Solución

Se trata de minimizar $E[(Y - \hat{Y})^2]$, para lo cual se deriva esta expresión respecto al parámetro α y se iguala a cero

$$\frac{\partial E[(Y - \alpha)^2]}{\partial \alpha} = 0.$$

Intercambiando el orden de la derivada con la esperanza y operando se tiene

$$E\left[\frac{\partial(Y - \alpha)^2}{\partial \alpha}\right] = E\left[2(Y - \alpha)\frac{\partial(Y - \alpha)}{\partial \alpha}\right] = E[2(\alpha - Y)] = 0,$$

de donde

$$\alpha = \bar{y}$$

La derivada segunda es positiva, $\frac{\partial^2 E[(Y-\alpha)^2]}{\partial \alpha^2} = 2 > 0$, con lo que se confirma que el resultado obtenido corresponde efectivamente a un mínimo.

Respecto al error cuadrático medio mínimo (MMSE), basta con evaluar $E[(Y - \hat{Y})^2]$ con $\alpha = \bar{y}$, resultando $\text{MMSE} = E[(Y - \bar{y})^2]$, que es la varianza de Y .

$$\text{MMSE} = \sigma_Y^2$$

Por tanto, la media es la constante que mejor representa los valores de una variable aleatoria en sentido de mínimos cuadrados. El valor del error cometido en estas circunstancias corresponde a la varianza.

Ejercicio 1.26.

La variable aleatoria bidimensional (X, Y) se distribuye de manera uniforme en el recinto indicado en la figura 1.38. Su *fdp* conjunta viene dada por la expresión

$$f_{XY}(x, y) = 2, \quad 0 < x \leq 1, \quad 0 < y \leq x.$$

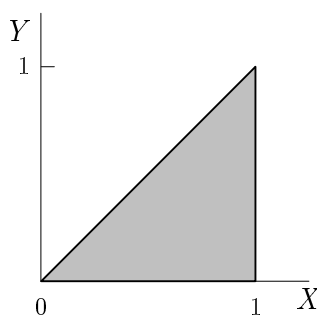


Figura 1.38 Recinto de definición de la variable (X, Y) del ejercicio 1.26.

- a) Calcular las *fdp* marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$.

- b) Calcular la *fdp* condicional $f_{Y|X}(x, y)$.
- c) Determinar una función $\phi(\cdot)$ tal que permita estimar el valor de Y a partir del valor de X , de forma que el error cuadrático medio cometido en la estimación sea mínimo.
- d) Determinar una función *lineal* que permita estimar el valor de Y a partir del valor de X de forma que el error cuadrático medio cometido en la estimación sea mínimo. Calcular dicho error.

Solución

- a) Las *fdp* marginales se calculan integrando la *fdp* conjunta respecto a la variable que desaparece, según (1.55)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy = \int_0^x 2 dy = 2x, \quad 0 < x \leq 1.$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx = \int_y^1 2 dx = 2(1 - y), \quad 0 < y \leq 1.$$

$$f_X(x) = 2x, \quad 0 < x \leq 1$$

$$f_Y(y) = 2(1 - y), \quad 0 < y \leq 1$$

Hay que tener precaución al establecer los límites de integración, pues el rango de valores que toma una variable depende del valor que haya tomado la otra. En particular, dado un valor de x concreto, la variable y sólo podrá tomar valores en el intervalo $[0, x]$. Igualmente, dado un valor de y , la variable x sólo podrá tomar valores en el intervalo $[y, 1]$, como se puede deducir fácilmente con ayuda de la figura 1.38. Las funciones $f_X(x)$ y $f_Y(y)$ obtenidas se representan en la figura 1.39.

Como se puede apreciar, es más probable que la variable X tome valores cercanos a 1 que a 0, y al revés ocurre para la variable Y . Esto está de acuerdo con la intuición, pues observando el

recinto donde pueden tomar valores las dos variables de forma equiprobable, se ve que hay más área en el entorno de $x = 1$ y en el entorno de $y = 0$ que en cualquier otro entorno. En concreto, el área de un recinto de lado Δx es mayor si Δx está ubicado cerca de 1 que si está cerca de 0. Lo correspondiente ocurre con la variable Y .

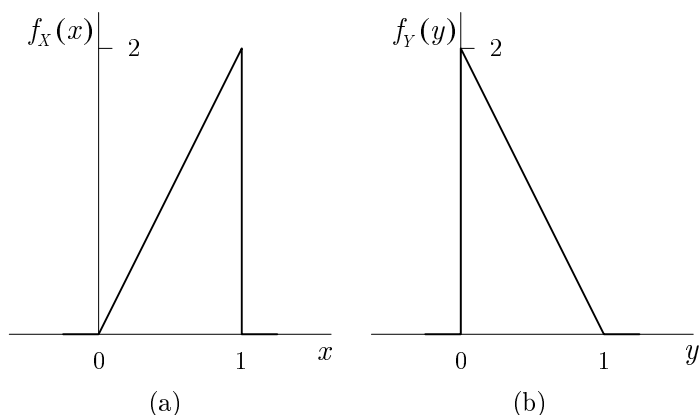


Figura 1.39 Funciones f_{dp} marginales del ejercicio 1.26. (a) $f_X(x)$ y (b) $f_Y(y)$.

b) La f_{dp} condicional de una variable a otra se obtiene mediante la expresión (1.56)

$$f_{Y|X}(y, x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}, \quad 0 < x \leq 1, \quad 0 < y \leq x.$$

$$f_{Y|X}(x, y) = \frac{1}{x}, \quad 0 < x \leq 1, \quad 0 < y \leq x$$

Interesa representar $f_{Y|X}(y, x)$ de forma paramétrica, como se muestra en la figura 1.40, donde se pone de manifiesto que para cada valor de x , la variable $Y|(X = x)$ se distribuye uniformemente entre 0 y x .

c) El estimador óptimo viene dado por la expresión (1.94)

$$y = \phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(x, y) dy$$

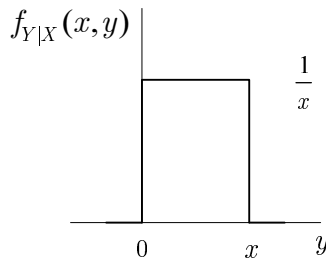


Figura 1.40 Función *fdp* condicional $f_{Y|X}(x, y)$ del ejercicio 1.26 representada de forma paramétrica.

Sustituyendo los resultados obtenidos en los apartados anteriores se tiene

$$y = \phi(x) = \int_0^x \frac{y}{x} dy = \frac{x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$y = x/2, \quad 0 < x \leq 1$$

En la figura 1.41 se representa la función de estimación óptima obtenida, junto con la región del plano en la que toman valores las variables X e Y . Como se puede apreciar, el valor de Y estimado corresponde con el punto medio del rango de valores que puede tomar Y , dado el valor observado de X . Por ejemplo, para un valor observado $x = \frac{1}{2}$, el valor estimado para y resulta ser $y = \frac{1}{4}$, que coincide con el punto medio del rango de valores que puede tomar y en esas condiciones, que es $[0, \frac{1}{2}]$. Este comportamiento es previsible, pues, según los resultado del ejercicio 1.25, el valor que mejor estima una variable aleatoria es su media. Dado que $Y|(X = x)$ es uniforme en $[0, x]$, su media es $x/2$, que es el resultado obtenido.

Observar que el estimador óptimo es lineal, lo que significa que en el próximo apartado, en el que se pide el estimador lineal óptimo, se debe obtener el mismo resultado.

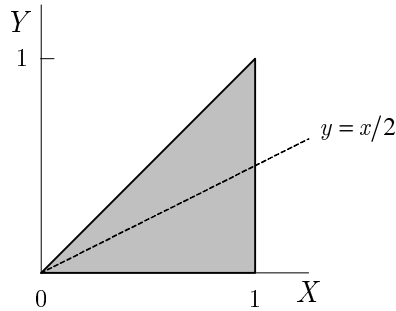


Figura 1.41 Función de estimación óptima, $y = x/2$, y región de definición de la variable (X, Y) del ejercicio 1.26.

- e) El estimador lineal óptimo viene dado, según (1.95), por la expresión $y = ax + b$, siendo

$$a = \frac{c_{XY}}{\sigma_X^2}, \quad b = \bar{y} - a\bar{x},$$

Para evaluarlo, es preciso previamente calcular la covarianza entre las dos variables, $c_{XY} = E[XY] - \bar{x} \cdot \bar{y}$ y la varianza $\sigma_X^2 = E[X^2] - \bar{x}^2$.

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x, y) dx dy \\ &= 2 \int_0^1 x \left(\int_0^x y dy \right) dx = \frac{1}{4}. \\ E[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_0^1 2x^3 dx = \frac{1}{2}. \\ E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}. \\ E[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^1 2y(1-y) dy = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

donde se han empleado las expresiones de $f_X(x)$ y $f_Y(y)$ obtenidas en el apartado b). De esta manera, $\sigma_X^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$, y $c_{XY} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{36}$, con lo cual, $a = \frac{1}{2}$ y $b = 0$. El resultado es, como se esperaba, idéntico al del apartado d).

$$y = x/2, \quad 0 \leq x \leq 1$$

La expresión del MMSE para el estimador lineal óptimo en el caso de 2 variables aleatorias es, según (1.96),

$$\text{MMSE} = (1 - \rho_{XY}^2) \sigma_Y^2,$$

siendo $\rho_{XY} = \frac{c_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$. El único estadístico que resta por calcular es la varianza $\sigma_Y^2 = E[Y^2] - \bar{y}^2$.

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y) dy = \int_0^1 2y^2(1-y) dy = \frac{1}{6},$$

con lo que $\sigma_Y^2 = \frac{1}{6} - (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{18}$, y así, $\rho_{XY}^2 = \frac{1}{4}$.

Sustituyendo valores se tiene

$$\text{MMSE} = \frac{1}{24}$$

Ejercicio 1.27.

Se desea estimar el valor de la variable aleatoria Y a partir de la observación del valor de las N variables X_1, \dots, X_N mediante la siguiente función lineal:

$$\hat{Y} = \sum_{i=1}^N a_i X_i + b.$$

- a) Demostrar que el sistema de ecuaciones para calcular las constantes a_i , $i = 1, \dots, N$ y b bajo el criterio de error cuadrático medio mínimo es, según (1.98) y (1.99),

$$\sum_{i=1}^N a_i c_{X_i X_m} = c_{Y X_m}, \quad m = 1, \dots, N \quad (1.124)$$

$$b = \bar{y} - \sum_{i=1}^N a_i \bar{x}_i.$$

- b) Demostrar que el error cuadrático medio mínimo alcanzado viene dado por (1.100)

$$\text{MMSE} = \sigma_Y^2 - \sum_{k=1}^N a_k c_{YX_k}.$$

Solución

- a) Se trata de encontrar los valores de a_i , $i = 1, \dots, N$ y b que minimicen el error cuadrático medio $E[(Y - \hat{Y})^2]$. Para ello se iguala a cero la derivada, con lo que se obtiene el siguiente sistema de $N + 1$ ecuaciones con $N + 1$ incógnitas

$$\begin{aligned} \frac{\partial E[(Y - \hat{Y})^2]}{\partial a_m} &= 0, \quad m = 1, \dots, N \\ \frac{\partial E[(Y - \hat{Y})^2]}{\partial b} &= 0. \end{aligned}$$

Intercambiando el operador esperanza con la derivada parcial

$$\begin{aligned} 2E \left[(Y - \hat{Y}) \cdot \frac{\partial (Y - \hat{Y})}{\partial a_m} \right] &= 0, \quad m = 1, \dots, N \\ 2E \left[(Y - \hat{Y}) \cdot \frac{\partial (Y - \hat{Y})}{\partial b} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo $\hat{Y} = \sum_{i=1}^N a_i X_i + b$ y derivando se tiene

$$\begin{aligned} 2E \left[\left(Y - \sum_{i=1}^N a_i X_i - b \right) \cdot (-X_m) \right] &= 0, \quad m = 1, \dots, N \\ 2E \left[\left(Y - \sum_{i=1}^N a_i X_i - b \right) \cdot (-1) \right] &= 0. \end{aligned}$$

Aplicando linealidad del operador esperanza y reordenando términos, la segunda ecuación se convierte en $b = \bar{y} - \sum_{i=1}^N a_i \bar{x}_i$.

Sustituyendo en la primera y operando

$$E \left[-Y X_m + \sum_{i=1}^N a_i X_i X_m + \bar{y} X_m - X_m \sum_{i=1}^N a_i \bar{x}_i \right] = 0, \\ m = 1, \dots, N.$$

que tras cierta manipulación da lugar a

$$\sum_{i=1}^N a_i (E[X_i X_m] - \bar{x}_i \cdot \bar{x}_m) = E[Y X_m] - \bar{y} \cdot \bar{x}_m, \quad m = 1, \dots, N.$$

A continuación se pueden identificar los siguientes estadísticos:

$$c_{X_i X_m} = E[X_i X_m] - \bar{x}_i \cdot \bar{x}_m \\ c_{Y X_m} = E[Y X_m] - \bar{y} \cdot \bar{x}_m,$$

con lo cual se llega finalmente al sistema propuesto en el enunciado.

- b) El error cuadrático medio mínimo es $E[(Y - \hat{Y})^2]$, donde \hat{Y} es el estimador óptimo calculado con el sistema de ecuaciones obtenido en el apartado anterior. Así,

$$\text{MMSE} = E \left[\left(Y - \sum_{k=1}^N a_k X_k - b \right) \left(Y - \sum_{m=1}^N a_m X_m - b \right) \right]$$

Sustituyendo b por su valor y reorganizando términos se tiene

$$\text{MMSE} = E \left[\left(Y - \bar{y} - \sum_{k=1}^N a_k (X_k - \bar{x}_k) \right) \times \left(Y - \bar{y} - \sum_{m=1}^N a_m (X_m - \bar{x}_m) \right) \right].$$

Aplicando linealidad del operador esperanza e identificando términos se llega a

$$\text{MMSE} = \sigma_Y^2 - \sum_{k=1}^N a_k c_{Y X_k} - \sum_{m=1}^N a_m c_{Y X_m} + \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N a_k a_m c_{X_k X_m}.$$

El término del doble sumatorio se puede escribir como

$$\sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N a_k a_m c_{X_k X_m} = \sum_{k=1}^N a_k \left(\sum_{m=1}^N a_m c_{X_k X_m} \right).$$

La expresión entre paréntesis coincide con el término a la izquierda de la igualdad en el sistema de ecuaciones que resuelve el problema de estimación óptima (1.124). Por tanto, se puede sustituir por el término a la derecha de la igualdad $c_{Y X_m}$. Así,

$$\begin{aligned} \text{MMSE} &= \sigma_Y^2 - \sum_{k=1}^N a_k c_{Y X_k} - \sum_{m=1}^N a_m c_{Y X_m} + \sum_{m=1}^N a_m c_{Y X_m} \\ &= \sigma_Y^2 - \sum_{k=1}^N a_k c_{Y X_k}, \end{aligned}$$

que es la expresión que se quería demostrar.

Ejercicio 1.28.

Se desea estimar el valor de la variable aleatoria Y a partir de dos observaciones ruidosas. En concreto, sea

$$\begin{aligned} X_1 &= Y + N_1 \\ X_2 &= Y + N_2, \end{aligned}$$

donde N_1 y N_2 son dos variables aleatorias que modelan el ruido. Se sabe que Y , N_1 y N_2 son independientes entre sí, que sus medias son nulas y que σ_Y^2 , $\sigma_{N_1}^2$ y $\sigma_{N_2}^2$ son valores conocidos.

- Determinar las constantes a_1 , a_2 y b para que $\hat{Y} = a_1 X_1 + a_2 X_2 + b$ sea el estimador lineal que minimiza el error cuadrático medio.
- Interpretar el resultado obtenido para el caso de que las varianzas del ruido sean iguales, $\sigma_{N_1}^2 = \sigma_{N_2}^2 \equiv \sigma_N^2$. ¿Qué ocurre si $\sigma_N^2 \rightarrow 0$?
- Repetir para el caso de que las varianzas del ruido sean diferentes, $\sigma_{N_1}^2 \neq \sigma_{N_2}^2$.

Solución

- a) Para diseñar un estimador óptimo lineal MSE se recurre al sistema de ecuaciones (1.98), (1.99)

$$\sum_{i=1}^N a_i c_{X_i X_m} = c_{Y X_m}, \quad m = 1, \dots, N \quad (1.125)$$

$$b = \bar{y} - \sum_{i=1}^N a_i \bar{x}_i. \quad (1.126)$$

Para el caso de $N = 2$, es necesario previamente determinar los valores de los siguientes estadísticos que aparecen en el sistema de ecuaciones: $\sigma_{X_1}^2$, $\sigma_{X_2}^2$, $c_{X_1 X_2}$, $c_{X_2 X_1}$, $c_{Y X_1}$ y $c_{Y X_2}$. Los valores de las medias son nulos, por lo que $b = 0$, como se deduce directamente de (1.126).

Respecto a $\sigma_{X_1}^2$, se tiene que

$$\begin{aligned} \sigma_{X_1}^2 &= E[X_1^2] = E[(Y + N_1)^2] \\ &= E[Y^2] + 2E[YN_1] + E[N_1^2] = \sigma_Y^2 + \sigma_{N_1}^2, \end{aligned}$$

ya que $E[YN_1] = 0$ al ser ambas variables independientes y tener N_1 media nula. De forma análoga se tiene $\sigma_{X_2}^2 = \sigma_Y^2 + \sigma_{N_2}^2$.

Con respecto a las covarianzas de las observaciones, se puede escribir

$$\begin{aligned} c_{X_1 X_2} = c_{X_2 X_1} &= E[X_1 X_2] - E[X_1]E[X_2] \\ &= E[(Y + N_1)(Y + N_2)] \\ &= E[Y^2] + E[YN_1] + E[YN_2] + E[N_1 N_2] \\ &= \sigma_Y^2, \end{aligned}$$

ya que, las medias son nulas y

$$E[YN_1] = E[YN_2] = E[N_1 N_2] = 0.$$

Por último,

$$\begin{aligned}
 c_{YX_1} &= E[YX_1] - E[Y]E[X_1] \\
 &= E[Y(Y + N_1)] - E[Y]E[(Y + N_1)] \\
 &= E[Y^2] + E[YN_1] - E[Y]E[(Y + N_1)] \\
 &= \sigma_Y^2.
 \end{aligned}$$

Siguiendo los mismos pasos se obtiene $c_{YX_2} = \sigma_Y^2$. Así, el sistema de ecuaciones (1.125) queda

$$\begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & c_{X_1X_2} \\ c_{X_2X_1} & \sigma_{X_2}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{YX_1} \\ c_{YX_2} \end{bmatrix}.$$

Sustituyendo los valores obtenidos se tiene

$$\begin{bmatrix} \sigma_Y^2 + \sigma_{N_1}^2 & \sigma_Y^2 \\ \sigma_Y^2 & \sigma_Y^2 + \sigma_{N_2}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_Y^2 \\ \sigma_Y^2 \end{bmatrix},$$

cuya solución es

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{\sigma_Y^2 \sigma_{N_2}^2}{\sigma_Y^2 \sigma_{N_1}^2 + \sigma_Y^2 \sigma_{N_2}^2 + \sigma_{N_1}^2 \sigma_{N_2}^2} \\
 a_2 &= \frac{\sigma_Y^2 \sigma_{N_1}^2}{\sigma_Y^2 \sigma_{N_1}^2 + \sigma_Y^2 \sigma_{N_2}^2 + \sigma_{N_1}^2 \sigma_{N_2}^2}
 \end{aligned}$$

- b) En caso de que las varianzas del ruido sean iguales entre sí, sustituyendo $\sigma_N^2 \equiv \sigma_{N_1}^2 = \sigma_{N_2}^2$ en las expresiones de a_1 y a_2 , se obtiene

$$a_1 = a_2 = \frac{\sigma_Y^2}{2\sigma_Y^2 + \sigma_N^2}.$$

El estimador resulta

$$\hat{Y} = \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_Y^2 + \frac{\sigma_N^2}{2}} \left(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2 \right), \quad (1.127)$$

que es la media aritmética multiplicada por un factor de *atenuación* igual a $\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_Y^2 + \frac{\sigma_N^2}{2}}$. Este factor será tanto menor cuanto mayor sea el nivel de ambos ruidos. Así, si los niveles de ruido de las dos observaciones son iguales, el peso de ambas en la estima es el mismo. Sin embargo, ese peso no es $\frac{1}{2}$, como en principio se podría esperar. Esto es consecuencia directa del criterio de minimización del error cuadrático medio, que hace que cuanto más ruido haya, más cercana sea la estima óptima al valor medio de la variable a estimar, en este caso, cero.

Si $\sigma_N^2 \rightarrow 0$, el estimador (1.127) tiende a la media aritmética de las observaciones

$$\hat{Y} \rightarrow \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2. \quad (1.128)$$

Observar que, en estas condiciones, N_1 y N_2 son variables aleatorias de media nula y varianza tendente a cero, lo que significa que $N_1 = N_2 \rightarrow 0$, con lo que $X_1 = X_2 \rightarrow Y$ y el estimador (1.128) es, en realidad,

$$\hat{Y} \rightarrow Y.$$

Esto significa que la estima tiende a ser perfecta, como cabe esperar de una estimación en ausencia de ruido.

- c) Caso de varianzas del ruido diferentes, la relación entre las constantes a_1 y a_2 es

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\sigma_{N_2}^2}{\sigma_{N_1}^2},$$

lo que significa que cuanto mayor sea el ruido en una observación, menor será su peso en la estima y viceversa.

Ejercicio 1.29.

Para estimar la media \bar{x} de una variable aleatoria X , se puede ejecutar N veces la variable de forma independiente y promediar los valores obtenidos. Esto es estadísticamente equivalente a ejecutar una sola vez N variables aleatorias independientes y estadísticamente iguales a

X y promediar los valores obtenidos. Según esto, la estimación de la media se puede llevar a cabo con la operación

$$\tilde{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i ,$$

donde \tilde{x} es el estimador de la media y donde X_1, \dots, X_N son las N variables estadísticamente iguales a X . Observar que el estimador \tilde{x} es también una variable aleatoria.

- a) Calcular la media y la varianza del estimador de la media propuesto, sabiendo que la media de X es \bar{x} y que la varianza es σ_X^2 .
- b) Admitiendo que N es suficientemente elevado, ¿qué se puede decir sobre la función densidad de probabilidad del estimador \tilde{x} ?
- c) Se desea estimar la probabilidad de error de bit en una simulación de un sistema de comunicaciones digitales. Para ello se transmiten N bits y se contabiliza el número de bits erróneos N_e en recepción. El estimador de la probabilidad de error \hat{p}_e consiste en el cociente $\frac{N_e}{N}$.

La cuestión de cuántos bits se deben enviar para que la estimación sea fiable se puede abordar con los resultados obtenidos en los apartados anteriores. En concreto, se plantea determinar cuál es el número mínimo de bits N que se deben enviar para que, con una probabilidad del β por ciento, la estima no se desvíe del valor correcto en más de un α por ciento. Particularizar el resultado para el caso de estimar una probabilidad de error del orden de 10^{-3} con $\alpha = 10\%$ y $\beta = 90\%$.

Solución

- a) El cálculo de la media es inmediato, pues basta con aplicar la propiedad de linealidad del operador esperanza, resultando

$$E[\tilde{x}] = E\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i\right] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E[X_i] = \bar{x},$$

es decir, la media del estimador coincide con el parámetro estadístico a estimar. Cuando esto ocurre se dice que el estimador es *insesgado*, que es una propiedad deseable en todo estimador.

Para determinar la varianza se aplica el hecho de que la varianza de la suma de variables aleatorias independientes es igual a la suma de las varianzas de cada una de las variables, según se indica en (1.93). Así,

$$\sigma_{\tilde{x}}^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma_{X_i}^2 = \frac{1}{N} \sigma_X^2,$$

donde σ_X^2 es la varianza de la variable X . Este resultado significa que, aunque la varianza del estimador nunca podrá ser nula (que sería lo ideal), sí puede reducirse tanto como se desee aumentando el número de valores promediados N . Cuando esto ocurre se dice que el estimador es *consistente*, que es otra propiedad deseable en un estimador.

Resumiendo resultados,

$$\begin{array}{l} E[\tilde{x}] = \bar{x} \\ \sigma_{\tilde{x}}^2 = \frac{1}{N} \sigma_X^2 \end{array}$$

- b) La variable \tilde{x} es la suma de un número elevado de variables aleatorias idénticas e independientes entre sí. En virtud del teorema del límite central es de esperar que \tilde{x} tienda a distribuirse de forma gaussiana con la media y varianza calculadas en el apartado anterior, es decir

$$\tilde{x} \sim \mathcal{N}(\bar{x}, \sigma_X/\sqrt{N})$$

- c) Sea X una variable aleatoria que representa los resultados de la transmisión. En particular, X tomará el valor 1 cuando se produzca un error al transmitir un bit y 0 cuando no se produzca. Las probabilidades asociadas son p_e y $1 - p_e$ respectivamente, siendo p_e la probabilidad de error que se desea estimar.

El estimador propuesto se puede escribir como

$$\hat{p}_e = \frac{N_e}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i,$$

donde $X_i = 1, \dots, N$ son N variables estadísticamente iguales a X . La estimación de la probabilidad de error consiste pues, en estimar la media de la variable X siguiendo la estrategia indicada en el enunciado. Aplicando resultados del apartado a), se tiene

$$E[\hat{p}_e] = \bar{x} = p_e$$

$$\sigma_{\hat{p}_e}^2 = \frac{1}{N} \sigma_X^2 = \frac{p_e(1-p_e)}{N},$$

donde se ha hecho uso de que $\bar{x} = p_e$ y $\sigma_X^2 = p_e(1-p_e)$, como es inmediato comprobar. Invocando ahora las conclusiones del apartado b), se puede afirmar que

$$\hat{p}_e \sim \mathcal{N}\left(p_e, \sqrt{\frac{p_e(1-p_e)}{N}}\right).$$

La cuestión planteada en el apartado se puede escribir de forma analítica así: encontrar en N mínimo tal que

$$\Pr\left(|\hat{p}_e - p_e| < \frac{\alpha}{100} p_e\right) \geq \frac{\beta}{100},$$

para cuyo cálculo hay que integrar la f_{dp} gaussiana en el intervalo indicado, tal y como se muestra en la figura 1.42.

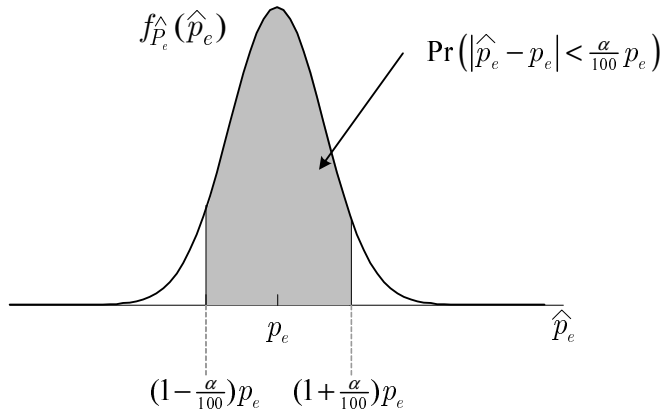


Figura 1.42 Función densidad de probabilidad del estimador \hat{p}_e del ejercicio 1.29 y área de integración correspondiente a $\Pr(|\hat{p}_e - p_e| < \frac{\alpha}{100} p_e)$.

Procediendo, se tiene

$$1 - 2Q\left(\frac{(1 + \frac{\alpha}{100})p_e - p_e}{\sigma_{\hat{p}_e}}\right) \geq \frac{\beta}{100}.$$

Sustituyendo $\sigma_{\hat{p}_e}^2$ por su valor se puede despejar el valor mínimo de N ,

$$N \geq \frac{10^4}{\alpha^2} \cdot \left[Q^{-1}\left(\frac{1 - \frac{\beta}{100}}{2}\right) \right]^2 \cdot \frac{1 - p_e}{p_e}$$

Para $p_e \approx 10^{-3}$, $\alpha = 10$ y $\beta = 90$ se obtiene $N \approx 23000$. Esto significa que para estimar una probabilidad de error que sea del orden de 10^{-3} de forma que con una probabilidad del 90 % la estima esté en un intervalo del 10 % alrededor del valor correcto habría que simular el envío de, al menos, 23000 bits.

Observar que, según se deriva de la expresión obtenida, tanto si $\alpha \rightarrow 0$ como si $\beta \rightarrow 100$, ocurre que $N \rightarrow \infty$, es decir, que el número de bits requeridos en la simulación aumenta ilimitadamente

al reducir el tamaño del intervalo de confianza y/o al aumentar la probabilidad de que la estima esté dentro del intervalo, algo que era de esperar según la intuición.

Ejercicio 1.30.

Sea una variable aleatoria gaussiana bidimensional con *fdp* $f_{X,Y}(x, y)$.

- Demostrar que la *fdp* marginal $f_X(x)$ es gaussiana.
- Aplicando los resultados del apartado a), demostrar que el estimador óptimo MSE indicado en (1.94) es lineal en el caso de que las dos variables involucradas sean conjuntamente gaussianas.

Solución

- Dada la *fdp* de una variable aleatoria bidimensional $f_{X,Y}(x, y)$, la *fdp* marginal de X se obtiene mediante (1.55)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy. \quad (1.129)$$

La *fdp* de una variable gaussiana bidimensional es, según (1.74),

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp(-a(x, y)),$$

con

$$a(x, y) = \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_X^2} - 2\rho \frac{(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-\bar{y})^2}{\sigma_Y^2} \right).$$

Sumando y restando el término $\rho^2(x-\bar{x})^2/\sigma_X^2$ en el argumento de la exponencial, resulta

$$\begin{aligned} & \exp \left(\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{y-\bar{y}}{\sigma_Y} - \rho \frac{(x-\bar{x})}{\sigma_X} \right)^2 + \frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_X^2} (1-\rho^2) \right] \right) \\ &= \exp \left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_X^2} \right) \exp \left(\frac{-1}{2\sigma_Y^2(1-\rho^2)} \left(y-\bar{y} + \rho \frac{(x-\bar{x})}{\sigma_X/\sigma_Y} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Así, $f_{XY}(x, y)$ se puede expresar como

$$f_{XY}(x, y) = \underbrace{\frac{\exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_X^2}\right)}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}}_{I_1(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2(1-\rho^2)}} \exp(-b(x, y))}_{I_2(x,y)},$$

con

$$b(x, y) = \frac{1}{2\sigma_Y^2(1-\rho^2)} \left(y - \bar{y} + \rho \frac{(x-\bar{x})}{\sigma_X/\sigma_Y} \right)^2.$$

Introduciendo esta expresión en la integral (1.129) se tiene

$$f_X(x) = I_1(x) \int_{-\infty}^{\infty} I_2(x, y) dy.$$

El integrando $I_2(x, y)$ corresponde a la *fdp* de una variable aleatoria gaussiana de media $\bar{y} - \rho \frac{(x-\bar{x})}{\sigma_X/\sigma_Y}$ y varianza $\sigma_Y^2(1-\rho^2)$, por lo que la integral desde menos infinito a infinito valdrá 1, con lo que finalmente queda

$$f_X(x) = I_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_X^2}\right),$$

que es la *fdp* de una gaussiana unidimensional.

De los cálculos anteriores se deriva un resultado importante para la resolución del próximo apartado. En concreto, sabiendo que la *fdp* conjunta de una variable aleatoria bidimensional se puede expresar como la *fdp* marginal por la *fdp* condicional, según se indica en (1.56)

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_{Y|X}(x, y)$$

y teniendo en cuenta que en el presente problema

$$f_{XY}(x, y) = I_1(x) I_2(x, y)$$

con $f_X(x) = I_1(x)$, se llega a que $f_{Y|X}(x, y) = I_2(x, y)$, es decir, la *fdp* condicional de dos variables gaussianas es

$$f_{Y|X}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2(1-\rho^2)}} \exp(-b(x, y)), \quad (1.130)$$

siendo

$$b(x, y) = \frac{1}{2\sigma_Y^2(1 - \rho^2)} \left(y - \bar{y} + \rho \frac{(x - \bar{x})}{\sigma_X/\sigma_Y} \right)^2.$$

- b) Dadas dos variables aleatorias X e Y , el estimador óptimo MSE para estimar el valor de Y a partir del valor de X viene dado, según (1.94), por

$$\hat{y} = \phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{Y|X}(x, y) dy,$$

que corresponde a la media de la variable aleatoria $Y|(X = x)$, cuya *fdp* es $f_{Y|X}(x, y)$. Esta *fdp* viene dada por la expresión (1.130), obtenida en el apartado anterior. Considerándola una función y con x como parámetro, se trata de una gaussiana cuya media es $\bar{y} + \frac{\rho\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \bar{x})$ y cuya varianza es $\sigma_Y^2(1 - \rho^2)$. Según lo comentado anteriormente, el estimador óptimo corresponde precisamente a la media de esta variable condicionada, con lo cual no es necesario realizar ningún cálculo. El estimador óptimo viene dado por

$$\hat{y} = \phi(x) = \bar{y} + \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \bar{x}),$$

que es una función lineal, como se quería demostrar.

Ejercicio 1.31.

Demostrar que la suma de variables aleatorias gaussianas independientes da lugar a otra variable aleatoria gaussiana.

Solución

Sea $Z = \sum_{i=1}^N X_i$, donde $X_i \sim \mathcal{N}(\bar{x}_i, \sigma_{X_i})$ para $i = 1, \dots, N$. La función característica de Z se puede expresar, según (1.39), como

$$\Phi_Z(\omega) = E[e^{j\omega Z}] = E[e^{j\omega \sum_{i=1}^N X_i}] = E \left[\prod_{i=1}^N e^{j\omega X_i} \right] = \prod_{i=1}^N E[e^{j\omega X_i}], \quad (1.131)$$

donde se ha aplicado que las variables son independientes entre sí y, por tanto, la esperanza del producto es igual al producto de las esperanzas. La función característica de una variable gaussiana es, tal y como se indica en (1.42),

$$\Phi_{X_i}(\omega) = E [e^{j\omega X_i}] = \exp \left(j\bar{x}_i\omega - \frac{\omega^2}{2}\sigma_{X_i}^2 \right) \quad (1.132)$$

Sustituyendo (1.132) en (1.131) se llega a

$$\begin{aligned} \Phi_Z(\omega) &= \prod_{i=1}^N \exp \left(j\omega\bar{x}_i - \frac{\omega^2}{2}\sigma_{X_i}^2 \right) \\ &= \exp \left(j\omega \sum_{i=1}^N \bar{x}_i - \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_{X_i}^2 \right) \end{aligned}$$

que corresponde a la función característica de una gaussiana con media $\bar{z} = \sum_{i=1}^N \bar{x}_i$ y varianza $\sigma_Z^2 = \sum_{i=1}^N \sigma_{X_i}^2$, lo que confirma que Z es una variable aleatoria gaussiana.

Ejercicio 1.32.

La expresión de la *fdp* de una variable aleatoria gaussiana N -dimensional es, según (1.75),

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(\mathbf{C}_{\mathbf{X}})}} \cdot \exp \left(-\frac{1}{2}(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{x}})^t \mathbf{C}_{\mathbf{X}}^{-1} (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{x}}) \right),$$

donde $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_N]^t$ es el vector formado por las N variables aleatorias X_1, \dots, X_N , $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N]^t$ es el vector de las medias y donde $\mathbf{C}_{\mathbf{X}}$ es la matriz de covarianza de las N variables aleatorias, definida en (1.68).

Confirmar que esta expresión para el caso de $N = 2$ es

$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp(-a(x_1, x_2)), \quad (1.133)$$

siendo

$$a(x_1, x_2) = \frac{\left[\frac{(x_1 - \bar{x}_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2 - \bar{x}_2)^2}{\sigma_2^2} \right]}{2(1 - \rho^2)}.$$

Solución

Particularizar la expresión para el caso de $N = 2$ requiere calcular el determinante y la matriz inversa de la matriz de covarianza de las dos variables aleatorias involucradas, X_1 y X_2 . Los vectores \mathbf{X} y $\bar{\mathbf{x}}$ son $\mathbf{X} = [X_1, X_2]^t$ y $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2]^t$. La matriz de covarianza para $N = 2$ adopta la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\mathbf{X}} &= E[(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{x}})^t] = E \left[\begin{bmatrix} X_1 - \bar{x}_1 \\ X_2 - \bar{x}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 - \bar{x}_1 & X_2 - \bar{x}_2 \end{bmatrix} \right] \\ &= E \begin{bmatrix} (X_1 - \bar{x}_1)^2 & (X_1 - \bar{x}_1)(X_2 - \bar{x}_2) \\ (X_2 - \bar{x}_2)(X_1 - \bar{x}_1) & (X_2 - \bar{x}_2)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde se ha usado la notación simplificada $\sigma_1 \equiv \sigma_{X_1}$, $\sigma_2 \equiv \sigma_{X_2}$ y $\rho \equiv \rho_{X_1, X_2}$. El determinante de la matriz de covarianza es

$$\det(\mathbf{C}_{\mathbf{X}}) = \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2). \quad (1.134)$$

La matriz inversa se puede expresar como

$$\mathbf{C}_{\mathbf{X}}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{bmatrix}}{(1 - \rho^2)}. \quad (1.135)$$

El exponente de la *fdp* N -dimensional queda entonces

$$\begin{aligned} (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{x}})^t \mathbf{C}_{\mathbf{X}}^{-1} (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{x}}) &= \begin{bmatrix} X_1 - \bar{x}_1 & X_2 - \bar{x}_2 \end{bmatrix} \mathbf{C}_{\mathbf{X}}^{-1} \begin{bmatrix} X_1 - \bar{x}_1 \\ X_2 - \bar{x}_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(1 - \rho^2)} \left[\left(\frac{X_1 - \bar{x}_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \frac{(X_1 - \bar{x}_1)(X_2 - \bar{x}_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{X_2 - \bar{x}_2}{\sigma_2} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.136)$$

Sustituyendo (1.134), (1.135) y (1.136) en (1.133) se llega a la expresión propuesta.

Ejercicio 1.33.

Sea X_1, \dots, X_N un conjunto de variables aleatorias igualmente distribuidas con misma media \bar{x} y misma varianza σ_X^2 . Considerar la variable suma

$$Z = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \frac{X_i - \bar{x}}{\sigma_X}.$$

Demostrar que la variable Z tiende a ser gaussiana con $\bar{z} = 0$ y $\sigma_Z^2 = 1$ cuando el número de variables sumadas tiende a infinito.

Sugerencia: Desarrollar la función característica de Z en serie de Taylor alrededor de $\omega = 0$.

Nota: Este es el enunciado del teorema del límite central para el caso de variables igualmente distribuidas.

Solución

Por comodidad, definamos la variable \hat{X}_i como $\hat{X}_i = \frac{X_i - \bar{x}}{\sigma_X}$. La función característica de Z se puede expresar, según (1.39), como

$$\begin{aligned} \Phi_Z(\omega) &= E[e^{j\omega Z}] = E[e^{j\frac{\omega}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \hat{X}_i}] = E \left[\prod_{i=1}^N e^{j\frac{\omega}{\sqrt{N}} \hat{X}_i} \right] \\ &= \prod_{i=1}^N E \left[e^{j\frac{\omega}{\sqrt{N}} \hat{X}_i} \right] = \prod_{i=1}^N \Phi_{\hat{X}} \left(\frac{\omega}{\sqrt{N}} \right) = \left[\Phi_{\hat{X}} \left(\frac{\omega}{\sqrt{N}} \right) \right]^N, \end{aligned}$$

donde, como en el ejercicio 1.31, se ha hecho uso de la independencia de las variables y donde $\Phi_{\hat{X}}(\omega)$ es la función característica de cualquier variable \hat{X}_i . A continuación se desarrolla $\Phi_{\hat{X}}(\omega)$ en serie de Taylor alrededor de $\omega = 0$, con lo cual se tiene

$$\begin{aligned} \Phi_Z(\omega) &= \left[\Phi_{\hat{X}}(0) + \frac{1}{1!} \Phi'_{\hat{X}}(0) \left(\frac{\omega}{\sqrt{N}} \right) + \frac{1}{2!} \Phi''_{\hat{X}}(0) \left(\frac{\omega}{\sqrt{N}} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3!} \Phi'''_{\hat{X}}(0) \left(\frac{\omega}{\sqrt{N}} \right)^3 + \dots \right]^N. \end{aligned}$$

A partir de la propiedad indicada en (1.41), se obtienen las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}\Phi_{\hat{X}}(0) &= 1 \\ \Phi'_{\hat{X}}(0) &= jE[\hat{X}] = 0 \\ \Phi''_{\hat{X}}(0) &= -E[\hat{X}^2] = -1.\end{aligned}$$

Sustituyendo, queda

$$\Phi_Z(\omega) = \left[1 - \frac{\omega^2}{2N} + \frac{1}{3!}\Phi'''_{\hat{X}}(0) \left(\frac{\omega}{\sqrt{N}}\right)^3 + \dots \right]^N.$$

Para un valor finito de ω , si $N \rightarrow \infty$, el tercer y posteriores sumandos de la expresión de $\Phi_Z(\omega)$ se hacen despreciables frente a los dos primeros, puesto que el orden del exponente de N es menor. Por tanto,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Phi_Z(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\omega^2}{2N} \right)^N = e^{-\frac{\omega^2}{2}}.$$

Como se puede comprobar, esta función característica corresponde a la de una variable gaussiana con media $\bar{z} = 0$ y varianza $\sigma_Z^2 = 1$, según se indica en (1.42), con lo que queda demostrado que Z es una variable aleatoria gaussiana.

Ejercicio 1.34.

En este problema se pretende demostrar que la aplicación de una transformación lineal a N variables conjuntamente gaussianas da lugar a otras N variables conjuntamente gaussianas.

En particular, sean N variables aleatorias conjuntamente gaussianas X_1, \dots, X_N , de medias nulas, cuya *fdp* conjunta viene dada por (1.75)

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(\mathbf{C}_{\mathbf{X}})}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{X}^t \mathbf{C}_{\mathbf{X}}^{-1} \mathbf{X}\right),$$

donde $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_N]^t$ es un vector formado por las N variables y donde $\mathbf{C}_{\mathbf{X}}$ es la matriz de covarianza asociada, definida en (1.68).

Considerar la transformación lineal $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, donde \mathbf{A} es una matriz de $N \times N$ invertible. Demostrar que \mathbf{Y} es también un vector de N variables conjuntamente gaussianas.

Solución

El método directo permite calcular la nueva *fdp* según la ecuación (1.81)

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{h}(\mathbf{y})) \cdot |J_{\mathbf{X}}(\mathbf{y})|. \tag{1.137}$$

La transformación $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ corresponde al siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1N}X_N \\ Y_2 &= a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2N}X_N \\ &\vdots \\ Y_N &= a_{N1}X_1 + a_{N2}X_2 + \dots + a_{NN}X_N. \end{aligned}$$

El jacobiano $J_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x})$ está definido en (1.82)

$$J_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_N}{\partial x_1} & \frac{\partial y_N}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_N}{\partial x_N} \end{bmatrix},$$

que aplicado a la transformación lineal da lugar a $J_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}) = \det(\mathbf{A})$, como es inmediato verificar. Es decir, el jacobiano de una transformación lineal corresponde al determinante de la matriz de transformación. Aplicando ese resultado a la transformación inversa $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Y}$, se tiene $J_{\mathbf{X}}(\mathbf{y}) = \det(\mathbf{A}^{-1}) = 1/\det(\mathbf{A})$. Sustituyendo en (1.137),

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) &= \frac{1/|\det(\mathbf{A})|}{\sqrt{(2\pi)^N \det(\mathbf{C}_{\mathbf{X}})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Y})^t \mathbf{C}_{\mathbf{X}}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Y})\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(\mathbf{C}_{\mathbf{X}})[\det(\mathbf{A})]^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{Y}^t(\mathbf{A}^{-1})^t \mathbf{C}_{\mathbf{X}}^{-1} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Y}\right). \end{aligned}$$

A continuación se debe verificar si la expresión obtenida corresponde a la *fdp* de N variables conjuntamente gaussianas. Para ello, observar

que la matriz de covarianza de \mathbf{Y} se puede expresar como

$$\mathbf{C}_Y = E[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^t] = E[(\mathbf{A}\mathbf{X})(\mathbf{A}\mathbf{X})^t] = E[\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{X}^t\mathbf{A}^t] = \mathbf{A}\mathbf{C}_X\mathbf{A}^t$$

y su inversa

$$\mathbf{C}_Y^{-1} = (\mathbf{A}\mathbf{C}_X\mathbf{A}^t)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^t\mathbf{C}_X^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

Observar asimismo que el determinante de \mathbf{C}_Y es

$$\det(\mathbf{C}_Y) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{C}_X)\det(\mathbf{A}^t) = \det(\mathbf{C}_X)[\det(\mathbf{A})]^2.$$

Identificando términos, $f_Y(\mathbf{y})$ se puede expresar como

$$f_Y(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(\mathbf{C}_Y)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{Y}^t\mathbf{C}_Y^{-1}\mathbf{Y}\right),$$

que corresponde a la *fdp* de N variables aleatorias conjuntamente gaussianas, como se quería demostrar.

Ejercicio 1.35.

En el ejercicio 1.31 se demostró que la suma de variables gaussianas independientes da lugar a una variable gaussiana. En este ejercicio se pretende demostrar que la suma sigue siendo gaussiana sea cual sea la relación que exista entre las variables. Para ello, considerar

$$Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_N,$$

donde las variables X_1, \dots, X_N son conjuntamente gaussianas. A través de la función característica, demostrar que Z es gaussiana. Asumir medias nulas.

Nota: La función característica de una variable gaussiana N dimensional de medias nulas viene dada por (1.76)

$$\Phi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\Omega}) = \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{C}_X\boldsymbol{\Omega}^t\right),$$

siendo \mathbf{C}_X la matriz de covarianza del vector $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_N]^t$ y siendo $\boldsymbol{\Omega} = [\omega_1, \dots, \omega_N]$.

Solución

La función característica de Z , según (1.39), se puede escribir como

$$\Phi_Z(\omega) = E[e^{j\omega z}] = E[e^{j\omega(x_1+x_2+\dots+x_N)}].$$

El último término de esta expresión corresponde, tal y como se indica en (1.72), con la definición de función característica $\Phi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\Omega})$ de una variable N dimensional \mathbf{X} para el caso particular de $\boldsymbol{\Omega}_o = [\omega, \dots, \omega]$. En efecto, observar que

$$E[e^{j\omega(x_1+x_2+\dots+x_N)}] = E[e^{j\boldsymbol{\Omega}_o\mathbf{X}}] = \Phi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\Omega}_o).$$

Al ser las variables X_1, \dots, X_N conjuntamente gaussianas, su función característica es, según (1.76), $\Phi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\Omega}) = \exp[-\frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{C}_X\boldsymbol{\Omega}^t]$. Particularizando esta función para $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_o$ se puede escribir

$$\Phi_Z(\omega) = \Phi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\Omega}_o) = \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}_o\mathbf{C}_X\boldsymbol{\Omega}_o^t\right).$$

El producto matricial del exponente se calcula fácilmente, al ser $\boldsymbol{\Omega}_o$ un vector de valores constantes.

$$\boldsymbol{\Omega}_o\mathbf{C}_X\boldsymbol{\Omega}_o^t = \begin{bmatrix} \omega & \dots & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{N1} & \dots & c_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ \omega \\ \vdots \\ \omega \end{bmatrix} = \omega^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij}.$$

La función característica de Z queda como

$$\Phi_Z(\omega) = \exp\left(-\frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij}\right),$$

que corresponde a la función característica de una variable gaussiana, según se indica en (1.42), siendo la media nula y la varianza

$$\sigma_Z^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij}.$$

Ejercicio 1.36.

Una variable aleatoria bidimensional se dice que presenta circularidad simétrica cuando su comportamiento estadístico no varía ante un giro del sistema de coordenadas. Demostrar que dos variables X_1 y X_2 conjuntamente gaussianas, independientes, con medias nulas y misma varianza σ^2 presentan dicha propiedad.

Solución

Se va a aplicar una transformación que suponga un giro a las variables de partida X_1 y X_2 , lo que dará lugar a las variables Y_1 e Y_2 . Se trata de verificar que la *fdp* de las variables transformadas es la misma que la de las variables de partida, sea cual sea el ángulo de giro.

Según se presentó en el ejercicio 1.17, la transformación que provoca un giro del sistema de coordenadas de un ángulo θ viene dada por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}y_1 &= \cos(\theta)x_1 + \text{sen}(\theta)x_2 \\y_2 &= -\text{sen}(\theta)x_1 + \cos(\theta)x_2.\end{aligned}$$

Se aplica el método directo para obtener la *fdp* de las variables transformadas, cuya expresión es, según (1.77),

$$f_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) \cdot |J_{X_1 X_2}(y_1, y_2)|,$$

donde

$$\begin{aligned}x_1 &= \cos(\theta)y_1 - \text{sen}(\theta)y_2 \\x_2 &= \text{sen}(\theta)y_1 + \cos(\theta)y_2.\end{aligned}$$

El jacobiano de esta transformación inversa es

$$J_{X_1 X_2}(y_1, y_2) = \det \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta) = 1.$$

Sustituyendo $f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$ por la *fdp* de una variable gaussiana bidimensional, se tiene

$$f_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp(-a(y_1, y_2)),$$

con

$$a(y_1, y_2) = \frac{1}{2\sigma^2} [\cos(\theta)y_1 - \text{sen}(\theta)y_2]^2 + \frac{1}{2\sigma^2} [\text{sen}(\theta)y_1 + \cos(\theta)y_2]^2.$$

Desarrollando los cuadrados en el exponente y simplificando se obtiene

$$f_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(\frac{-1}{2\sigma^2}(y_1^2 + y_2^2)\right),$$

lo que significa que Y_1 e Y_2 son variables conjuntamente gaussianas, independientes, con medias nulas y misma varianza σ^2 , al igual que X_1 y X_2 , con lo cual se puede concluir que son variables con circularidad simétrica.

Ejercicio 1.37.

Sea la variable $Z = \sum_{i=1}^N X_i^2$, donde X_1, \dots, X_N son variables aleatorias gaussianas independientes entre sí, de media nula y varianza unidad. Determinar la *fdp* de Z mediante los siguientes pasos:

- Calcular la *fdp* de $V = X_i^2$ con alguno de los métodos sistemáticos de transformación de variable aleatoria.
- Calcular la función característica de V , $\Phi_V(\omega)$.
- Partiendo del resultado anterior y teniendo en cuenta la independencia de las variables sumadas, calcular la función característica de Z , $\Phi_Z(\omega)$.
- A partir de $\Phi_Z(\omega)$, determinar $f_Z(z)$.

Solución

- El método directo para la transformación de variables aleatorias requiere que la transformación tenga inversa o que se pueda dividir en tramos en los que tenga inversa. En este problema, la transformación inversa es $x_i = \pm\sqrt{v}$, lo que significa que se deben considerar dos transformaciones por separado y sumar los resultados, según se indica en la teoría.

- Transformación $v = x_i^2$ para $x_i \geq 0$. La expresión del método directo es, según (1.43),

$$f_V(v) = f_{X_i}(x_i) \cdot \left| \frac{\partial x_i}{\partial v} \right|,$$

donde x_i debe ser sustituido por su valor según la función inversa $x_i = \sqrt{v}$. Con esto,

$$f_V(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v/2} \cdot \left| \frac{-1}{2\sqrt{v}} \right| u(v).$$

- Transformación $v = x_i^2$ para $x_i < 0$. En este caso la función inversa es $x_i = -\sqrt{v}$, lo que da lugar a la misma expresión

$$f_V(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v/2} \cdot \left| \frac{1}{2\sqrt{v}} \right| u(v).$$

La *fdp* de la variable transformada se obtiene sumando ambas contribuciones.

$$f_V(v) = \frac{v^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-v/2} u(v)$$

- b) La función característica de V es, según (1.39),

$$\Phi_V(\omega) = E [e^{j\omega v}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty v^{-1/2} e^{-v(1/2-j\omega)} dv.$$

Con el cambio de variable $t = v(1/2 - j\omega)$, la expresión anterior se transforma en

$$\Phi_V(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\frac{1}{2} - j\omega)}} \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt = \frac{1}{\sqrt{1 - 2j\omega}},$$

ya que la integral definida toma el valor $\sqrt{\pi}$.

$$\Phi_V(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2j\omega}}$$

- c) Como las variables X_1, \dots, X_N son independientes entre sí, también lo serán las variables X_1^2, \dots, X_N^2 . La función característica de la suma de variables independientes es igual al producto de las funciones características de cada una de las variables sumadas. Llamando $V_i \equiv X_i^2$, se tiene que $\Phi_{V_i}(\omega) = (1 - 2j\omega)^{-1/2}$ según el apartado anterior y, por tanto,

$$\Phi_Z(\omega) = \prod_{i=1}^N \Phi_{V_i}(\omega),$$

con lo cual

$$\Phi_Z(\omega) = \frac{1}{(1 - 2j\omega)^{N/2}}$$

- d) Según la teoría, la transformada de Fourier de una *fdp* corresponde a la función característica con argumento invertido, es decir,

$$TF\{f_Z(z)\} = \Phi_Z(-\omega),$$

por tanto, $f_Z(z) = TF^{-1}\{\Phi_Z(-\omega)\} = TF^{-1}\left\{\frac{1}{(1+2j\omega)^{N/2}}\right\}$. Teniendo en cuenta que N es par, se realiza la transformación inversa (consultar tabla de pares transformados y propiedades), resultando

$$f_Z(z) = \frac{1}{2^{N/2} \left(\frac{N}{2} - 1\right)!} z^{N/2-1} e^{-z/2} u(z)$$

La variable obtenida recibe el nombre de variable *Chi-cuadrado*.

Capítulo 2

Caracterización de señales aleatorias

2.1. Herramientas para el estudio de señales aleatorias

Aun siendo las señales deterministas y aleatorias conceptualmente muy diferentes, existen funciones que permiten caracterizarlas de forma común, lo que constituye una interesante unificación en el análisis de ambos tipos de señales.

En el caso de señales deterministas, la expresión analítica y la transformada de Fourier son las dos herramientas que permiten caracterizarlas en el dominio del tiempo y la frecuencia respectivamente. No obstante, para una señal aleatoria no tiene sentido definir tales funciones. En el caso de señales aleatorias que cumplan la propiedad de estacionariedad se recurre a lo que se conoce como función de *autocorrelación* y a la función *densidad espectral de potencia*(*dep*) para estudiar su comportamiento en el tiempo y en la frecuencia respectivamente.

Ocurre que también se pueden definir estas funciones para señales deterministas, con lo que autocorrelación y densidad espectral de potencia se convierten en las herramientas para el estudio unificado de ambos tipos de señales.

En la figura T2.1 se muestra el esquema de las herramientas empleadas en el estudio de ambos tipos de señales.

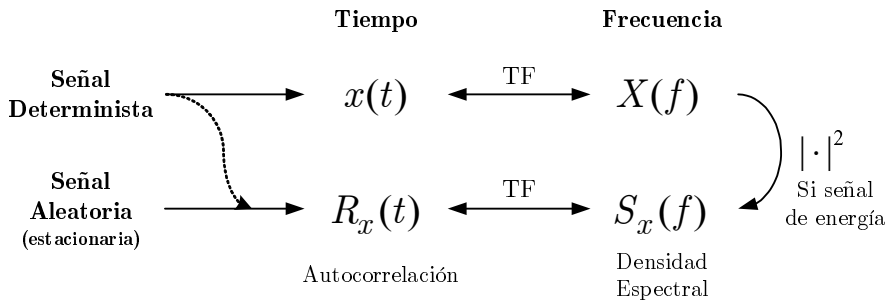


Figura T2.1: Caracterización en tiempo y frecuencia de señales deterministas y aleatorias

2.2. Señales aleatorias: definición

Una señal aleatoria es una señal cuyos valores en cada instante de tiempo son desconocidos. La incertidumbre que sobre ellos existe hace que se modelen matemáticamente en base a variables aleatorias.

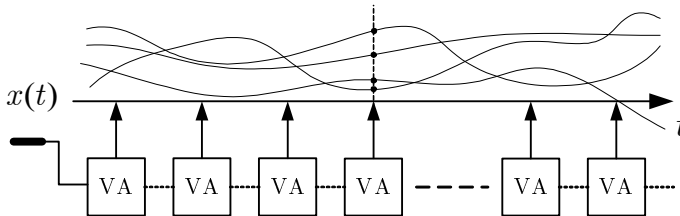


Figura T2.2: Modelo de señal aleatoria.

Una señal aleatoria continua $x(t)$ o discreta $x[n]$ se define como una secuencia infinita de variables aleatorias, cada una de las cuales corresponde a la señal en un instante t ó n .

Las características de una señal aleatoria vienen determinadas por el tipo de cada una de las variables aleatorias que la componen así como por las relaciones que puedan existir entre ellas. Gráficamente se puede visualizar una señal aleatoria mediante un eje temporal mudo del que *cuelgan* las diferentes variables aleatorias, como se muestra en la figura T2.2. La *manivela* imaginaria de la izquierda es la que acciona los

experimentos asociados a cada variable y les hace generar un valor que estará asociado al instante de tiempo correspondiente. De esta manera, cada vez que se ejecute el experimento que subyace tras la señal, se obtendrá una función del tiempo, que se denomina *realización*. Cada realización de una señal aleatoria es una señal determinista, puesto que su valor en cada instante de tiempo es conocido.

Las expresiones que se presentan a partir de este punto corresponden a señales aleatorias continuas. Las mismas expresiones son directamente trasladables al caso de señales aleatorias discretas. Sólo las más relevantes serán indicadas de forma explícita.

2.3. Caracterización señales aleatorias

2.3.1. Caracterización completa

Una señal aleatoria queda completamente caracterizada si se conoce la *fdp* conjunta (de dimensión infinita) de sus infinitas variables aleatorias. Sólo en casos muy particulares se puede disponer de dicha función.

Dos (o más) señales aleatorias quedan completamente caracterizadas de forma conjunta si se conoce la *fdp* conjunta de todas las variables aleatorias involucradas.

2.3.2. Caracterización parcial

Una señal aleatoria queda caracterizada parcialmente si se conoce su media y su autocorrelación.

La *media* de una señal aleatoria se define como

$$\overline{x(t)} = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{x(t)}(x) dx, \quad (2.1)$$

donde $f_{x(t)}(x)$ es la *fdp* de la variable aleatoria asociada al instante t . En la operación esperanza de la expresión anterior, el instante t es un parámetro constante. Se trata de la esperanza de la variable aleatoria asociada a dicho instante. Es lo que se llama un *promedio de conjunto*, en contraposición al clásico promedio temporal definido para señales deterministas.

La *autocorrelación* de una señal aleatoria se define como

$$R_x(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{x(t_1)x(t_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (2.2)$$

siendo $f_{x(t_1)x(t_2)}(x_1, x_2)$ la *fdp* conjunta de las dos variables aleatorias asociadas a los instantes t_1 y t_2 . La autocorrelación así definida implica operaciones realizadas sobre el conjunto de las realizaciones, por lo que se trata de una autocorrelación *de conjunto* en contraposición a la conocida función de autocorrelación temporal que se define para señales deterministas.

Dos señales $x(t)$ e $y(t)$ quedan parcialmente caracterizadas de forma conjunta si se conoce la correlación cruzada entre ambas, definida como

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E[x(t_1)y(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{x(t_1)y(t_2)}(x, y) dx dy, \quad (2.3)$$

donde $f_{x(t_1)y(t_2)}(x, y)$ es la *fdp* conjunta de la variable aleatoria asociada al instante t_1 de la señal $x(t)$ con la variable aleatoria asociada al instante t_2 de la señal $y(t)$.

2.4. Estacionariedad y ergodicidad

Estacionariedad y ergodicidad son dos propiedades que pueden cumplir las señales aleatorias. La primera de ellas tiene implicaciones teóricas importantes, mientras que la segunda tiene interés exclusivamente práctico.

2.4.1. Estacionariedad

Una señal aleatoria es estacionaria si su comportamiento estadístico no cambia a lo largo del tiempo. Existen distintos grados de estacionariedad.

Una señal aleatoria $x(t)$ se considera estacionaria *en sentido estricto* si la *fdp* conjunta de cualquier subconjunto de variables aleatorias se mantiene a lo largo del tiempo, es decir si

$$f_{x(t_1), \dots, x(t_N)}(x_1, \dots, x_N) = f_{x(t_1+\tau), \dots, x(t_N+\tau)}(x_1, \dots, x_N), \quad (2.4)$$

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N}, \forall \{t_1, \dots, t_N\} \in \mathbb{R}^N.$$

Éste es el mayor grado de estacionariedad posible.

Una señal aleatoria $x(t)$ se considera estacionaria *en sentido amplio* si cumple las dos condiciones siguientes:

- 1) Es estacionaria respecto a la media, es decir, la media es constante para todo t ,

$$\overline{x(t)} = \bar{x}, \quad \forall t. \quad (2.5)$$

- 2) Es estacionaria respecto a la autocorrelación, es decir, la autocorrelación sólo depende de la diferencia entre los dos instantes de tiempo involucrados,

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(t_1 - t_2) = R_x(\tau), \quad \forall t_1, t_2, \quad (2.6)$$

donde $\tau = t_1 - t_2$. La forma práctica de expresar la autocorrelación en estas condiciones es

$$R_x(\tau) = E[x(t + \tau)x(t)]. \quad (2.7)$$

En el caso de señales discretas, la estacionariedad en la autocorrelación implica

$$R_x[n_1, n_2] = R_x[n_1 - n_2] = R_x[n], \quad \forall n_1, n_2, \quad (2.8)$$

donde $n = n_1 - n_2$, y la expresión práctica es

$$R_x[n] = E[x[k + n]x[k]]. \quad (2.9)$$

Dos señales aleatorias se consideran conjuntamente estacionarias en sentido amplio si ambas son estacionarias en sentido amplio y su correlación cruzada sólo depende de la diferencia de instantes de tiempo,

$$R_{xy}(t_1, t_2) = R_{xy}(t_1 - t_2) = R_{xy}(\tau), \quad \forall t_1, t_2, \quad (2.10)$$

siendo $\tau = t_1 - t_2$. En estas condiciones, la correlación cruzada se puede expresar como

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t + \tau)y(t)]. \quad (2.11)$$

Para señales discretas conjuntamente estacionarias, la correlación cruzada cumple

$$R_{xy}[n_1, n_2] = R_{xy}[n_1 - n_2] = R_{xy}[n], \quad \forall n_1, n_2, \quad (2.12)$$

siendo $n = n_1 - n_2$. En estas condiciones, la correlación cruzada se puede expresar como

$$R_{xy}[n] = E[x[k+n]y[k]]. \quad (2.13)$$

La función de autocorrelación de señales estacionarias cumple las siguientes propiedades:

$$1) R_x(\tau) = R_x(-\tau). \quad (2.14)$$

$$2) |R_x(\tau)| \leq R_x(0). \quad (2.15)$$

$$3) TF\{R_x(\tau)\} \text{ es real, par y positiva.} \quad (2.16)$$

Para la correlación cruzada se cumple que $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$.

Un grado menor que la estacionariedad en sentido amplio es la cicloestacionariedad. Una señal aleatoria es cicloestacionaria cuando su comportamiento estadístico varía con el tiempo de forma periódica. Una señal aleatoria $x(t)$ se considera cicloestacionaria en sentido amplio si cumple las dos condiciones siguientes:

- 1) Es cicloestacionaria respecto a la media, es decir, la media de conjunto es una función periódica en t , de periodo T_0

$$E[x(t + T_0)] = E[x(t)]. \quad (2.17)$$

- 2) Es cicloestacionaria en la autocorrelación con periodo T_0 , es decir

$$R_x(t, t + \tau) = R_x(t + T_0, t + T_0 + \tau). \quad (2.18)$$

2.4.2. Ergodicidad

Una señal aleatoria estacionaria es ergódica si toda su aleatoriedad está presente en cualquiera de sus realizaciones, es decir, si una realización es representativa de todas las demás. Analíticamente, $x(t)$ es

ergódica si los promedios temporales de cualquiera de sus realizaciones $x_i(t)$ coinciden con sus promedios de conjunto. La ergodicidad sólo puede cumplirse en señales estacionarias. Existen distintos grados de ergodicidad.

Una señal es ergódica en la media si la media temporal de cualquier realización coincide con la media de conjunto, es decir, si

$$\langle x_i(t) \rangle = \bar{x}, \quad \forall i, \quad (2.19)$$

donde $\langle x_i(t) \rangle$ indica promedio temporal de la realización $x_i(t)$, cuyo valor se calcula como

$$\langle x_i(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_i(t) dt. \quad (2.20)$$

Una señal es ergódica en la autocorrelación si la autocorrelación temporal de cualquier realización coincide con la autocorrelación de conjunto, es decir si

$$\phi_{x_i}(\tau) = R_x(\tau), \quad \forall i, \quad (2.21)$$

donde $\phi_{x_i}(\tau)$ es la autocorrelación temporal de la realización $x_i(t)$, cuyo valor se calcula como

$$\phi_{x_i}(\tau) = \langle x_i(t)x_i(t - \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_i(t)x_i(t - \tau) dt. \quad (2.22)$$

2.5. Relaciones estadísticas entre señales

Las relaciones estadísticas entre señales aleatorias vienen determinadas por las relaciones estadísticas entre las variables aleatorias que las componen.

2.5.1. Independencia

Dos señales aleatorias $x(t)$ e $y(t)$ son independientes entre sí si cualquier variable de $x(t)$ es independiente de cualquier variable de $y(t)$.

2.5.2. Incorrelación

Dos señales aleatorias $x(t)$ e $y(t)$ son incorreladas entre sí si cualquier variable de $x(t)$ y cualquier variable de $y(t)$ son incorreladas entre sí. Analíticamente

$$E[x(t_1)y(t_2)] = E[x(t_1)]E[y(t_2)], \quad \forall t_1, t_2. \quad (2.23)$$

Si las señales son estacionarias, la expresión anterior se simplifica a

$$R_{xy}(\tau) = \bar{x} \cdot \bar{y}, \quad \forall \tau. \quad (2.24)$$

2.5.3. Ortogonalidad

Dos señales aleatorias $x(t)$ e $y(t)$ son ortogonales entre sí si cualquier variable de $x(t)$ es ortogonal a cualquier variable de $y(t)$. Analíticamente,

$$E[x(t_1)y(t_2)] = 0, \quad \forall t_1, t_2. \quad (2.25)$$

Si las señales son estacionarias, la expresión anterior se simplifica a

$$R_{xy}(\tau) = 0, \quad \forall \tau. \quad (2.26)$$

2.6. Potencia y densidad espectral de potencia

La propiedad de estacionariedad hace que las señales aleatorias sean señales de potencia.

La potencia de una señal aleatoria estacionaria $x(t)$ se define como

$$P_x = E[x^2(t)] = \overline{x^2} = R_x(0). \quad (2.27)$$

La potencia de la componente continua es

$$P_{x_{DC}} = E^2[x(t)] = \bar{x}^2. \quad (2.28)$$

La potencia de la componente alterna es

$$P_{x_{AC}} = E[x^2(t)] - E^2[x(t)] = \sigma_x^2. \quad (2.29)$$

La potencia de la suma de N señales aleatorias $z(t) = \sum_{n=1}^N x_n(t)$ es

$$P_z = \sum_{n=1}^N R_{x_n}(0) + \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N R_{x_n x_m}(0). \quad (2.30)$$

Si las señales son ortogonales la expresión anterior se simplifica

$$P_z = \sum_{n=1}^N R_{x_n}(0) = \sum_{n=1}^N P_{x_n}, \quad (2.31)$$

lo que significa que, en estas condiciones, la potencia de la suma es igual a la suma de las potencias.

La densidad espectral de potencia de una señal aleatoria estacionaria es la transformada de Fourier de la autocorrelación (Teorema de *Wiener-Kintchine*), según se indica en el esquema de la figura T2.1.

$$S_x(f) = \text{TF}\{R_x(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \quad (2.32)$$

Para señales discretas, la densidad espectral de potencia viene dada por la expresión

$$S_x(\Omega) = \text{TF}\{R_x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_x[n] e^{-j\Omega n}. \quad (2.33)$$

Propiedades de la densidad espectral de potencia

- 1) $S_x(f)$ es una función par, real y positiva.
- 2) La potencia de una señal en un intervalo de frecuencias $[f_1, f_2]$ se obtiene integrando su densidad espectral de potencia en el correspondiente intervalo, es decir, $P_{x \in [f_1, f_2]} = 2 \int_{f_1}^{f_2} S_x(f) df$, donde el factor 2 se debe a la bilateralidad y simetría de la densidad espectral.
- 3) Como consecuencia de la propiedad 2), la potencia total de una señal se obtiene integrando su densidad espectral de potencia en todas las frecuencias, es decir $P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df$.

Ejercicios

Ejercicio 2.1.

Indicar si las secuencias discretas de la figura 2.1 pueden o no corresponder a la autocorrelación de una señal discreta estacionaria. Caso negativo, indicar por qué.

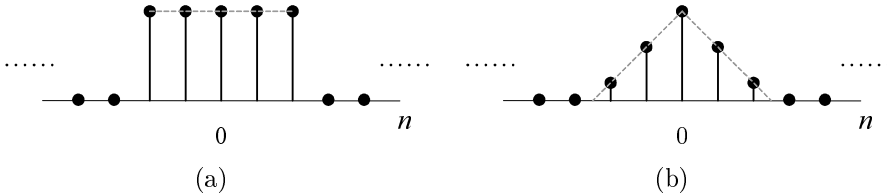


Figura 2.1 Posibles secuencias de autocorrelación del ejercicio 2.1.

Solución

Una función de autocorrelación debe cumplir las propiedades indicadas en (2.14), (2.15) y (2.16), es decir, que:

- sea par.
- su valor máximo sea positivo y lo alcance en el origen, es decir, $|R_x[n]| \leq R_x[0]$.
- su transformada de Fourier (que coincide con la *dep*) sea no negativa, es decir, $S_x(\Omega) = TF\{R_x[n]\} \geq 0$.

Ambas secuencias son pares y toman el valor máximo positivo en el origen. La secuencia (a) es un pulso rectangular por lo que su transformada de Fourier es una función de tipo sinc, que toma valores tanto positivos como negativos, por lo tanto la secuencia (a) no puede ser una función de autocorrelación. En cambio, la secuencia (b) es de tipo triangular, lo que significa que su transformada es una función de tipo

sinc^2 , que siempre es positiva, con lo cual b sí puede ser una función de autocorrelación.

Secuencia (a): No.
Secuencia (b): Sí.

Ejercicio 2.2.

La señal aleatoria $x(t)$ está definida de la siguiente forma: $x(t) = a^{|t-t_0|}$ donde t_0 es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[-D, D]$. Determinar la media de conjunto de $x(t)$. ¿Se trata de una señal estacionaria en la media?

Solución

En la figura 2.2 se representan superpuestas algunas realizaciones de la señal. Como se puede apreciar, la media de las variables aleatorias asociadas a tiempos mayores que D va a ser mayor que la media de las variables aleatorias asociadas a tiempos entre $-D$ y D . Esto nos puede hacer sospechar que la señal no es estacionaria en la media. Para confirmarlo hay que determinar analíticamente la media de conjunto $E[x(t)]$ y verificar si es o no constante. Aplicando (1.29) se puede escribir

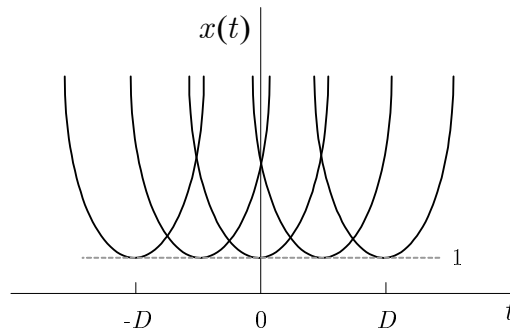


Figura 2.2 Realizaciones de la señal definida en el ejercicio 2.2.

$$E[x(t)] = E[a^{|t-t_0|}] = \int_{-D}^D a^{|t-t_0|} \frac{1}{2D} dt_0.$$

Para resolver esta integral es necesario distinguir varios casos, según el intervalo en el que se encuentre t .

- $t > D$. En estas condiciones el exponente $|t - t_0|$ siempre es positivo y, por tanto, $a^{|t-t_0|} = a^{(t-t_0)}$. Sustituyendo en la integral, se obtiene

$$E[x(t)] = \frac{(a^D - a^{-D})a^t}{2D \ln(a)}.$$

- $t < -D$. En este caso el exponente $|t - t_0|$ es siempre negativo y, por tanto, $a^{|t-t_0|} = a^{-(t-t_0)}$. Sustituyendo en la integral, resulta

$$E[a(t)] = \frac{(a^D - a^{-D})a^{-t}}{2D \ln(a)}.$$

- $-D \leq t \leq D$. La integral hay que dividirla en dos partes:

$$\begin{aligned} E[x(t)] &= \int_{-D}^t a^{(t-t_0)} \frac{1}{2D} dt_0 + \int_t^D a^{-(t-t_0)} \frac{1}{2D} dt_0 \\ &= \frac{a^D(a^t + a^{-t}) - 2}{2D \ln(a)}. \end{aligned}$$

Con esto, se tiene

$$E[a(t)] = \begin{cases} \frac{(a^D - a^{-D})a^{|t|}}{2D \ln(a)} & |t| > D \\ \frac{a^D(a^t + a^{-t}) - 2}{2D \ln(a)} & |t| \leq D \end{cases}$$

Como se puede apreciar, $E[x(t)]$ varía con t , lo que significa que $x(t)$ no es estacionaria en la media.

Ejercicio 2.3.

Calcular la media y la autocorrelación de la señal aleatoria

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \psi),$$

donde A y ψ son variables aleatorias independientes entre sí, ambas con distribución uniforme en los intervalos $[0, 1]$ y $[0, 2\pi]$ respectivamente. Indicar si la señal $x(t)$ es no

- a) Estacionaria en la media.
- b) Estacionaria en la autocorrelación.
- c) Ergódica en la media.
- d) Ergódica en la autocorrelación.

Solución

- a) Teniendo en cuenta que A y ψ son independientes, la media de conjunto es

$$E[x(t)] = E[A \cos(\omega_0 t + \psi)] = E[A] \cdot E[\cos(\omega_0 t + \psi)].$$

Dado que, según (1.29),

$$\begin{aligned} E[\cos(\omega_0 t + \psi)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t + \psi) f_{\Phi}(\psi) d\psi \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(\omega_0 t + \psi) \frac{1}{2\pi} d\psi = 0, \end{aligned}$$

la media de conjunto es nula, es decir, $E[x(t)] = 0$. Al ser la media de conjunto constante, la señal es estacionaria en la media.

Estacionaria en la media

- b) Con respecto a la autocorrelación de conjunto, se puede escribir, según (2.2),

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= E[x(t_1)x(t_2)] = E[A^2 \cos(\omega_0 t_1 + \psi) \cos(\omega_0 t_2 + \psi)] \\ &= E[A^2] E[\cos(\omega_0 t_1 + \psi) \cos(\omega_0 t_2 + \psi)] \\ &= E[A^2] E[\tfrac{1}{2} \cos(\omega_0(t_1 - t_2)) + \tfrac{1}{2} \cos(\omega_0(t_1 + t_2) + 2\psi)], \end{aligned}$$

donde, de nuevo, se ha tenido en cuenta la independencia entre A y ψ . Sabiendo que

$$\begin{aligned} E[A^2] &= 1/3, \\ E\left[\frac{1}{2}\cos(\omega_0(t_1 - t_2))\right] &= \frac{1}{2}\cos(\omega_0(t_1 - t_2)), \\ E\left[\frac{1}{2}\cos(\omega_0(t_1 + t_2) + 2\psi)\right] &= 0, \end{aligned}$$

la autocorrelación toma la expresión final

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau) = \frac{1}{6}\cos(\omega_0(t_1 - t_2)) = \frac{1}{6}\cos(\omega_0\tau),$$

donde se ha definido $\tau = t_1 - t_2$. Como se observa, la autocorrelación no depende de los instantes concretos t_1 y t_2 en los que se evalúa el promedio sino de la diferencia entre ellos, por lo cual, la señal es estacionaria en la autocorrelación. Al ser estacionaria en la media y en la autocorrelación se puede concluir que la señal $x(t)$ es estacionaria (en sentido amplio).

Estacionaria en la autocorrelación

- c) Respecto a la ergodicidad en la media, hay que verificar si se cumple que la media temporal de cualquier realización coincide con la media de conjunto. Así ocurre, pues ambas son nulas como a continuación se comprueba. La media temporal de una realización $x_i(t)$ en la que $A = A_i$ y $\psi = \psi_i$, viene dada por la expresión (2.20) particularizada para señales periódicas

$$\langle x_i(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} A_i \cos(\omega_0 t + \psi_i) dt = 0 = E[x(t)].$$

Ergódica en la media

- d) De igual forma, para determinar la posible ergodicidad en la autocorrelación hay que comprobar si la autocorrelación temporal

de cualquier realización coincide con la autocorrelación de conjunto. La autocorrelación temporal de una realización $x_i(t)$ en la que $A = A_i$ y $\psi = \psi_i$, viene dada por la expresión (2.22), que, particularizada para el caso de una señal periódica, es

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} A_i^2 \cos(\omega_0(t+\tau) + \psi) \cos(\omega_0(t) + \psi) dt = \frac{A_i^2}{2} \cos(\omega_0\tau),$$

que es diferente de $R_x(\tau)$, con lo que la señal no es ergódica en la autocorrelación.

No ergódica en la autocorrelación

Ejercicio 2.4.

Calcular la *dep* de la señal aleatoria

$$x(t) = A \cos(2\pi(f_c + \xi)t + \psi)$$

que modela la señal de un oscilador. La amplitud A y la frecuencia central del oscilador f_c son constantes, mientras que la desviación de frecuencia ξ y la fase ψ son variables aleatorias independientes entre sí. La variable ψ es uniforme en el intervalo $[0, 2\pi]$ y la función densidad de probabilidad de ξ es $f_\xi(\xi)$.

Solución

Como paso previo, se calculará la autocorrelación $R_x(\tau)$, que, según (2.7), es

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= E[x(t + \tau)x(t)] \\ &= E[A^2 \cos(2\pi(f_c + \xi)(t + \tau) + \psi) \cos(2\pi(f_c + \xi)t + \psi)] \\ &= \frac{A^2}{2} E[\cos(2\pi(f_c + \xi)(2t + \tau) + 2\psi)] + \frac{A^2}{2} E[\cos(2\pi(f_c + \xi)\tau)]. \end{aligned}$$

Si en la primera de las esperanzas de la ecuación anterior se aplica la relación trigonométrica $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

asociando $\alpha = 2\pi(f_c + \xi)(2t + \tau)$ y $\beta = 2\psi$, y además se tiene en cuenta que ξ y ψ son independientes, resulta

$$E[\cos(2\pi(f_c + \xi)(2t + \tau) + 2\psi)] = E[\text{sen}(2\pi(f_c + \xi)(2t + \tau))] \cdot E[\cos(2\psi)] \\ + E[\cos(2\pi(f_c + \xi)(2t + \tau))] \cdot E[\text{sen}(2\psi)] = 0,$$

ya que $E[\text{sen}(2\psi)] = E[\cos(2\psi)] = 0$ como es inmediato comprobar (ver ejercicio 2.3). De esta forma queda $R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} E[\cos(2\pi(f_c + \xi)\tau)]$. Esta es la expresión más simplificada a la que se puede llegar, pues para evaluar el promedio es necesario concretar el valor de $f_\xi(\xi)$. No obstante, se puede proseguir con el ejercicio, pues lo que se requiere es la *dep* de $x(t)$. Teniendo en cuenta que la transformada de Fourier implica una integración sobre la variable τ , se puede escribir

$$S_x(f) = TF\{R_x(\tau)\} \\ = TF\left\{\frac{A^2}{2} E[\cos(2\pi(f_c + \xi)\tau)]\right\} \\ = \frac{A^2}{2} E[TF\{\cos(2\pi(f_c + \xi)\tau)\}] \\ = \frac{A^2}{4} E[\delta(f - (f_c + \xi)) + \delta(f + (f_c + \xi))] \\ = \frac{A^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f + (f_c + \xi)) f_\xi(\xi) d\xi + \frac{A^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - (f_c + \xi)) f_\xi(\xi) d\xi,$$

donde se ha intercambiando el orden de la transformada de Fourier y del promedio estadístico. Esto es posible al tratarse de integrales que afectan a variables no relacionadas. Así,

$$S_x(f) = \frac{A^2}{4} f_\xi(f - f_c) + \frac{A^2}{4} f_\xi(f + f_c)$$

Es interesante resaltar que el perfil de la *dep* coincide con el de la *fdp* de ξ . En el caso ideal de oscilador con frecuencia constante f_c , la *fdp* sería $f_\xi(\xi) = \delta(\xi)$ y la correspondiente *dep* quedaría como

$$S_x(f) = \frac{A^2}{4} \delta(f - f_c) + \frac{A^2}{4} \delta(f + f_c),$$

que es, como se sabe, la *dep* de un oscilador perfecto.

Ejercicio 2.5.

Calcular la autocorrelación de la señal aleatoria discreta $x[n]$ cuyos valores se obtienen a partir de una secuencia de dígitos binarios equiprobables e independientes según la regla siguiente:

- Un 1 tras un 0 da lugar a una muestra de amplitud A .
- Un 0 tras un 1 da lugar a una muestra de amplitud $-A$.
- Un dígito repetido da lugar a una muestra de amplitud 0.

Solución

Para resolver este tipo de problema es aconsejable representar un tramo de una realización cualquiera para visualizar el aspecto de la señal propuesta. En la figura 2.3 se muestra el tramo de realización de la señal $x[n]$ correspondiente a la secuencia de bits indicada en la parte superior.

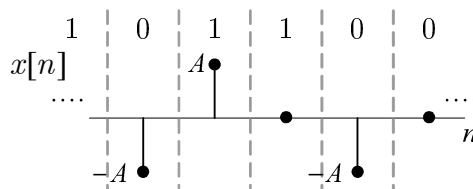


Figura 2.3 Tramo de una realización de la señal $x[n]$ del ejercicio 2.5.

La expresión de la autocorrelación de una señal discreta es, según (2.9), $R_x[n] = E[x[k]x[k+n]]$. Se va a calcular para cada valor de n por separado hasta encontrar una ley general que permita extender los resultados para los restantes valores.

Para cada n es necesario determinar:

- El conjunto de posibles valores de la variable aleatoria a promediar.

- El conjunto de bits que participan en la determinación de dichos valores (que se denominarán *bits involucrados*).
- La combinación de valores de dichos bits que determinan cada uno de los valores de la variable.
- La probabilidad de estas combinaciones de bits, que será, en último término, la probabilidad de cada uno de los valores de la variable.

La aplicación de estos pasos para cada n se resume a continuación.

- $n = 0$. Se trata de calcular $R_x[0] = E[x^2[k]]$, es decir, la media de los valores al cuadrado que se pueden encontrar al elegir un índice k cualquiera. La variable aleatoria a promediar es $x^2[k]$. Los posibles valores que puede tomar son: A^2 y 0. Los bits involucrados son: el bit asociado al instante k y el anterior. Llamando b_n al bit asociado al índice n , los bits involucrados son $\{b_{k-1}, b_k\}$.

La combinación de valores de estos bits que hacen que la variable aleatoria sea A^2 es $\{0, 1\}$ ó $\{1, 0\}$ mientras que la combinación que da lugar al valor 0 es $\{0, 0\}$ ó $\{1, 1\}$. La probabilidad de cada combinación es $1/2$. Esto significa que la variable aleatoria puede tomar el valor A^2 con probabilidad $1/2$ y el valor 0 con probabilidad $1/2$. Al tratarse de una variable aleatoria discreta, la media se obtiene de forma práctica multiplicando los posibles valores por sus probabilidades, como se indica en (1.32), lo que resulta en $R_x[0] = E[x^2[k]] = A^2/2$.

Esta información queda resumida en la tabla 2.1, cuya estructura se repetirá en el resto del ejercicio. En la primera columna se indica la variable aleatoria cuyo promedio hay que calcular y los posibles valores que puede tomar. En la segunda columna aparecen los bits involucrados y la combinación de valores de éstos que dan lugar a cada posible valor de la variable aleatoria. Por último, en la tercera columna se muestran las probabilidades de cada combinación de bits involucrados, que es igual a la probabilidad de cada valor de la variable aleatoria de la primera columna.

Tabla 2.1: Bits involucrados en el cálculo de $R_x[0]$ en el ejercicio 2.5.

$x^2[k]$	$\{b_{k-1}, b_k\}$	Pr
A^2	$\{0, 1\}, \{1, 0\}$	$1/2$
0	$\{0, 0\}, \{1, 1\}$	$1/2$

Tabla 2.2: Bits involucrados en el cálculo de $R_x[1]$ en el ejercicio 2.5.

$x[k]x[k+1]$	$\{b_{k-1}, b_k, b_{k+1}\}$	Pr
$-A^2$	$\{1, 0, 1\}, \{0, 1, 0\}$	$1/4$
0	resto de combinaciones	$3/4$

- $n = 1$. En este caso hay que determinar $R_x[1] = E[x[k]x[k+1]]$, es decir, el promedio del producto de un valor y el siguiente. La variable aleatoria a promediar es $x[k]x[k+1]$. Los posibles valores de la variable son $-A^2$ y 0 . Los bits involucrados son, en este caso, $\{b_{k-1}, b_k, b_{k+1}\}$. El resumen se muestra en la tabla 2.2. Multiplicando cada valor por su probabilidad para evaluar el promedio, se tiene $R_x[1] = -A^2/4$.
- $n \geq 2$, que significa calcular $R_x[n] = E[x[k]x[k+n]]$. La variable a promediar es $x[k]x[k+n]$. Como se indica en la figura 2.4, a partir de $n = 2$, los bits involucrados son siempre cuatro (recuadrados en la figura): los asociados a los índices observados y los inmediatamente anteriores, es decir, $\{b_{k-1}, b_k, b_{k+n-1}, b_{k+n}\}$. Estos bits son independientes entre sí, según se indica en el enunciado. Esto significa que $x[k]$ y $x[k+n]$ son variables aleatorias independientes entre sí, puesto que $x[k]$ depende de $\{b_{k-1}, b_k\}$ y $x[k+n]$ depende de $\{b_{k+n-1}, b_{k+n}\}$. Así,

$$R_x[n] = E[x[k]x[k+n]] = E[x[k]]E[x[k+n]] = \bar{x}^2.$$

La media $\bar{x}=0$, como se puede deducir de forma inmediata a partir de la definición de la señal, por tanto, $R_x[n] = 0$, para $n \geq 2$.

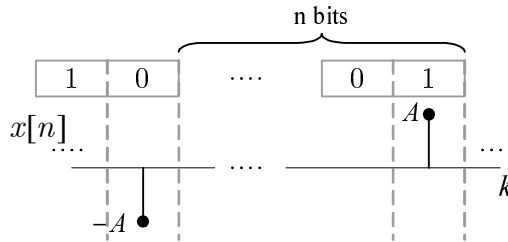


Figura 2.4 Detalle de $x[k]$ y $x[k + n]$ para $n \geq 2$ en el ejercicio 2.5.

Con esto, se han calculado los valores de la autocorrelación para $n \geq 0$. Para valores de n negativos no hace falta realizar los cálculos pues la autocorrelación es una función par, resultando finalmente

$$R_x[n] = \frac{A^2}{2} \delta[n] - \frac{A^2}{4} \delta[n - 1] - \frac{A^2}{4} \delta[n + 1]$$

Ejercicio 2.6.

Calcular la autocorrelación de la señal $x[n]$ cuyos valores se obtienen a partir de una secuencia de dígitos binarios equiprobables e independientes según la regla siguiente:

- Un 0 da lugar a una muestra de amplitud 0.
- Un 1 da lugar a una muestra de amplitud A si la amplitud de la muestra asociada al 1 anterior es $-A$ o bien a una muestra de amplitud $-A$ si la amplitud de la muestra asociada al 1 anterior es A .

Solución

Este ejercicio se resuelve de forma similar al anterior. En la figura 2.5 se muestra un tramo de realización de la señal asociado a una determinada secuencia de bits.

Se calculará $R_x[n]$ para cada valor de n por separado.

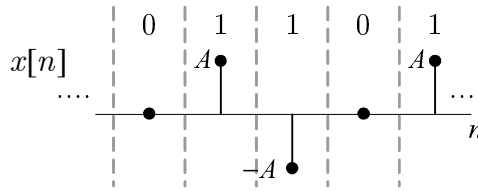


Figura 2.5 Tramo de una realización de la señal $x[n]$ del ejercicio 2.6.

- $n = 0$. Se trata de calcular $R_x[0] = E[x^2[k]]$. El único bit involucrado en los cálculos para este caso es $\{b_k\}$. Los valores relevantes para realizar este promedio están resumidos en la tabla 2.3, cuya estructura se ha explicado en el ejercicio anterior. El resultado que se obtiene es $R_x[0] = A^2/2$.

Tabla 2.3: Bits involucrados en el cálculo de $R_x[0]$ en el ejercicio 2.6.

$x^2[k]$	$\{b_k\}$	Pr
A^2	$\{1\}$	1/2
0	$\{0\}$	1/2

- $n = 1$. $R_x[1] = E[x[k]x[k+1]]$. Los bits involucrados en este caso son $\{b_k, b_{k+1}\}$. Los posibles valores del producto de una variable y la siguiente son $-A^2$ y 0. En la tabla 2.4 se recoge esta información. Con esto se tiene $R_x[0] = A^2/2$.

Tabla 2.4: Bits involucrados en el cálculo de $R_x[1]$ en el ejercicio 2.6.

$x[k]x[k+1]$	$\{b_k, b_{k+1}\}$	Pr
$-A^2$	$\{1, 1\}$	1/4
0	resto de combinaciones	3/4

resultando $R_x[0] = A^2/2$.

- $n \geq 2$. En este caso, los posibles valores de la variable aleatoria $x[k] \cdot x[k+n]$ son A^2 , $-A^2$ y 0. El valor A^2 lo tomará siempre que los bits asociados a los índices elegidos $k+n$ y k valgan 1 y haya un número impar de bits 1 en los $n-1$ bits intermedios. Análogamente se razona para el valor de $-A^2$. Hay, por consiguiente, $n+1$ bits involucrados: $\{b_k, \dots, b_{k+n}\}$ (ver tabla 2.5).

Tabla 2.5: Bits involucrados en el cálculo de $R_x[n]$ para $n \geq 2$ en el ejercicio 2.6.

$x[k]x[k+n]$	$\{b_k, \dots, b_{k+n}\}$	Pr
A^2	{1, impar, 1}	$\frac{1}{4} \cdot \text{Pr}(n^0 \text{ impar de bits 1})$
$-A^2$	{1, par, 1}	$\frac{1}{4} \cdot \text{Pr}(n^0 \text{ par de bits 1})$
0	resto de combinaciones	resto de probabilidad

Dada una secuencia de cualquier número de bits (en este caso de $n-1$), la mitad de las combinaciones tendrán un número par de unos (o de ceros) y la otra mitad un número impar. Si los bits son equiprobables, la probabilidad de un número par y de un número impar de unos es la misma (igual a $1/2$). Aplicando este hecho al problema, se obtiene que $R_x[n] = 0$ para $n \geq 2$.

Combinando resultados parciales se llega a la solución final

$$R_x[n] = \frac{A^2}{2} \delta[n] - \frac{A^2}{4} \delta[n-1] - \frac{A^2}{4} \delta[n+1]$$

Ejercicio 2.7.

La señal discreta $x[n]$ puede tomar dos valores: $-A$ y A y se construye a partir de una secuencia de dígitos binarios equiprobables e independientes de la siguiente forma:

- Un 1 provoca un cambio en la amplitud de la señal.
- Un 0 hace que se mantenga la amplitud anterior.

Calcular la autocorrelación de $x[n]$.

Solución

Un tramo de una realización de esta señal se muestra en la figura 2.6.

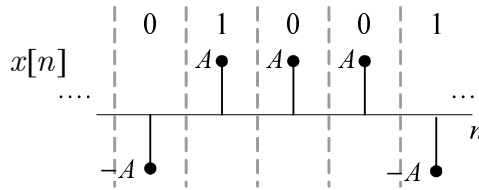


Figura 2.6 Tramo de una realización de la señal $x[n]$ del ejercicio 2.7.

Como en ejercicios anteriores, se procede para cada valor de n por separado.

- $n = 0$. $R_x[0] = E[x^2[k]]$. Este caso es muy simple, pues la variable aleatoria $x^2[k]$ siempre toma el valor A^2 , por tanto $R_x[0] = A^2$.
- $n = 1$. $R_x[1] = E[x[k]x[k+1]]$. La variable aleatoria producto $x[k]x[k+1]$ puede tomar los valores A^2 y $-A^2$. El valor A^2 lo tomará cuando $x[k]$ y $x[k+1]$ tomen el mismo valor y esto ocurrirá si el bit asociado al instante k vale 0. De la misma forma, el valor $-A^2$ ocurrirá cuando $x[k]$ y $x[k+1]$ tomen valores opuestos, lo que sucederá cuando el bit asociado al instante $k+1$ valga 1. Por tanto, el bit involucrado es únicamente $\{b_{k+1}\}$ (ver tabla 2.6). Así, $R_x[1] = 0$.

Tabla 2.6: Bits involucrados en el cálculo de $R_x[1]$ en el ejercicio 2.7.

$x[k]x[k+1]$	$\{b_{k+1}\}$	Pr
A^2	$\{0\}$	1/2
$-A^2$	$\{1\}$	1/2

- $n \geq 2$. $R_x[n] = E[x[k]x[k+n]]$. Al igual que antes, la variable aleatoria $x[k]x[k+n]$ puede tomar los valores A^2 y $-A^2$. El valor A^2 lo tomará cuando $x[k]$ y $x[k+n]$ tomen el mismo valor. Esto ocurrirá cuando el número de unos en los bits desde el b_{k+1} hasta el b_{k+n} sea par, independientemente del valor que tome el bit b_k . Es decir, los bits involucrados son $\{b_{k+1}, \dots, b_{k+n}\}$. Razonando análogamente para el otro caso, se llega a la tabla 2.7.

Tabla 2.7: Bits involucrados en el cálculo de $R_x[n]$ para $n \geq 2$ en el ejercicio 2.7.

$x[k]x[k+n]$	$\{b_{k+1}, \dots, b_{k+n}\}$	Pr
A^2	{nº par de bits 1}	1/2
$-A^2$	{nº impar de bits 1}	1/2

De aquí se obtiene $R_x[n] = 0$ para $n \geq 2$. Combinando resultados se llega a

$$R_x[n] = A^2\delta[n]$$

Ejercicio 2.8.

La señal discreta $x[n]$ se construye a partir de una secuencia de dígitos binarios de la siguiente forma:

- un 1 da lugar a una muestra de amplitud A .
- un 0 da lugar a una muestra de amplitud 0.

Los dígitos binarios son independientes pero *no equiprobables*. Llamando p a la probabilidad del uno y q a la probabilidad del cero, calcular la autocorrelación de $x[n]$.

Solución

Se sigue el mismo método que en los ejercicios anteriores. Para calcular $R_x[n]$ hay que distinguir dos casos:

- $n = 0$. $R_x[0] = E[x^2[k]]$. La tabla 2.8 recoge la información necesaria para realizar este cálculo, obteniéndose $R_x[0] = A^2p$.

Tabla 2.8: Bits involucrados en el cálculo de $R_x[0]$ en el ejercicio 2.8.

$x^2[k]$	$\{b_k\}$	Pr
A^2	$\{1\}$	p
0	$\{0\}$	q

- $n \neq 0$. $R_x[n] = E[x[k]x[k+n]]$. En la tabla 2.9 está recogida la información necesaria para realizar este cálculo. Así, resulta $R_x[n] = A^2p^2$ para $n \neq 0$.

Tabla 2.9: Bits involucrados en el cálculo de $R_x[n]$ para $n \neq 0$ en el ejercicio 2.8.

$x[k]x[k+n]$	$\{b_k, b_{k+n}\}$	Pr
A^2	$\{1, 1\}$	p^2
0	resto de combinaciones	$1 - p^2$

La autocorrelación resulta

$$R_x[n] = \begin{cases} A^2p\delta[n] & n = 0 \\ A^2p^2 & n \neq 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2.9.

Repetir los ejercicios 2.5, 2.6, y 2.7 para el caso en el que los dígitos binarios sean independientes pero no equiprobables, siendo p y q las probabilidades de los bits 1 y 0 respectivamente.

Solución

El procedimiento a seguir es esencialmente el mismo que en los mencionados ejercicios con la única diferencia de que al calcular las probabilidades habrá que incluir los valores genéricos p y q .

Solución al ejercicio 2.5 con $\Pr(1) = p$ y $\Pr(0) = q$

Las tablas que resumen la información necesaria para los cálculos asociados a cada n y los valores de la autocorrelación que se obtienen son:

- $n = 0$. Resumen en tabla 2.10. $R_x[0] = 2A^2pq$.

Tabla 2.10: Bits involucrados en el cálculo de $R_x[0]$ en el ejercicio 2.9/2.5.

$x^2[k]$	$\{b_{k-1}, b_k\}$	Pr
A^2	$\{0, 1\}, \{1, 0\}$	$2pq$
0	$\{0, 0\}, \{1, 1\}$	$p^2 + q^2$

- $n = 1$. Resumen en tabla 2.11. $R_x[1] = -A^2(p^2q + q^2p)$.

Tabla 2.11: Bits involucrados en el cálculo de $R_x[1]$ en el ejercicio 2.9/2.5.

$x[k]x[k+1]$	$\{b_{k-1}, b_k, b_{k+1}\}$	Pr
$-A^2$	$\{1, 0, 1\}, \{0, 1, 0\}$	$p^2q + q^2p$
0	resto de combinaciones	$p^3 + 2p^2q + 2q^2p + q^3$

- $n \geq 2$. No es necesaria una tabla. $R_x[n] = \bar{x}^2 = 0$ para $n \geq 2$.

Por tanto,

$$R_x[n] = 2A^2pq\delta[n] - A^2(p^2q + q^2p)(\delta[n-1] + \delta[n+1])$$

Solución al ejercicio 2.6 con $\Pr(1) = p$ **y** $\Pr(0) = q$

Sean P_i y P_p las probabilidades de que en una secuencia de $n - 1$ bits haya un número impar y par de bits 1 respectivamente. Las tablas que resumen la información necesaria para los cálculos asociados a cada n y los valores de la autocorrelación que se obtienen son:

- $n = 0$. Resumen en la tabla 2.12. $R_x[0] = A^2p$.

Tabla 2.12: Bits involucrados en el cálculo de $R_x[0]$ en el ejercicio 2.9/2.6.

$x^2[k]$	$\{b_k\}$	Pr
A^2	$\{1\}$	p
0	$\{0\}$	q

- $n = 1$. Resumen en la tabla 2.13. $R_x[1] = -A^2p^2$.

Tabla 2.13: Bits involucrados en el cálculo de $R_x[1]$ en el ejercicio 2.9/2.6.

$x[k]x[k+1]$	$\{b_k, b_{k+1}\}$	Pr
$-A^2$	$\{1, 1\}$	p^2
0	resto de combinaciones	$1 - p^2$

- $n \geq 2$. Resumen en la tabla 2.14. $R_x[n] = A^2p^2(P_i - P_p)$.

Tabla 2.14: Bits involucrados en el cálculo de $R_x[n]$ para $n \geq 2$ en el ejercicio 2.9/2.6.

$x[k]x[k+n]$	$\{b_k, \dots, b_{k+n}\}$	Pr
A^2	$\{1, \text{impar}, 1\}$	$p^2 \cdot P_i$
$-A^2$	$\{1, \text{par}, 1\}$	$p^2 \cdot P_p$
0	resto de combinaciones	resto de probabilidad

Al no ser iguales las probabilidades de los ceros y los unos, las probabilidades de un número par e impar de unos en una secuencia de $n - 1$ bits no son iguales y, en consecuencia, no se cancelan en el cómputo del promedio. Aplicando conceptos básicos de combinatoria se puede escribir

$$P_i = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-2)/2 \rfloor} \binom{n-1}{2k+1} p^{2k+1} q^{n-2-2k}$$

$$P_p = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n-1}{2k} p^{2k} q^{n-1-2k},$$

donde $\lfloor \cdot \rfloor$ es la función *parte entera*. Con esto,

$$P_i - P_p = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k q^{n-1-k} (-1)^{k+1} = -(q-p)^{n-1}. \quad (2.34)$$

Uniendo los resultados parciales anteriores y teniendo en cuenta que la autocorrelación es siempre una función par se llega a

$$R_x[n] = \begin{cases} A^2 p & n = 0 \\ -A^2 p^2 (q-p)^{|n|-1} & n \neq 0 \end{cases}$$

Solución al ejercicio 2.7 con $\Pr(1) = p$ y $\Pr(0) = q$

Llamando en esta ocasión P_i y P_p a las probabilidades de que en una secuencia de n bits haya un número impar y par de bits 1 respectivamente, se obtiene

- $n = 0$. Resumen en la tabla 2.15. $R_x[0] = A^2$.
- $n = 1$. Resumen en la tabla 2.16. $R_x[1] = A^2(q-p)$.

Tabla 2.15: Bits involucrados en el cálculo de $R_x[0]$ en el ejercicio 2.9/2.7.

$x^2[k]$	$\{b_k\}$	Pr
A^2	$\{0\}, \{1\}$	1

Tabla 2.16: Bits involucrados en el cálculo de $R_x[1]$ en el ejercicio 2.9/2.7.

$x[k]x[k+1]$	$\{b_{k+1}\}$	Pr
A^2	$\{0\}$	q
$-A^2$	$\{1\}$	p

Tabla 2.17: Bits involucrados en el cálculo de $R_x[n]$ para $n \geq 2$ en el ejercicio 2.9/2.7.

$x[k]x[k+n]$	$\{b_{k+1}, \dots, b_{k+n}\}$	Pr
A^2	n° par de bits 1	P_p
$-A^2$	n° impar de bits 1	P_i

- $n \geq 2$. Resumen en la tabla 2.17. Sustituyendo $n - 1$ por n en la expresión (2.34) se tiene $P_p - P_i = (q - p)^n$, resultando

$$R_x[n] = A^2(q - p)^n, \text{ para } n \geq 2.$$

Combinando resultados se llega a

$$R_x[n] = \begin{cases} A^2 & n = 0 \\ A^2(q - p)^{|n|} & n \neq 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2.10.

Considerar una señal discreta aleatoria $x[n]$ que se construye a partir de una secuencia de dígitos binarios equiprobables e independientes de la forma que se describe a continuación.

Se toman los bits en grupos de M . Cada una de las $N = 2^M$ combinaciones posibles de bits da lugar a una secuencia de N muestras en la que todas ellas son de amplitud cero salvo una de ellas que tiene amplitud A y está ubicada en una posición diferente dentro de la secuencia, según sea la combinación de bits. La señal $x[n]$ se construye concatenando estas secuencias. Un ejemplo del mapeo de bits a secuencias para $N = 4$ se muestra en la figura 2.7. Un tramo de realización para una determinada secuencia de bits siguiendo el mapeo anterior se presenta en la figura 2.8.

Para conseguir un modelo de señal estacionaria, admitir que cada realización de la señal $x[n]$ es posteriormente retardada un número de muestras aleatorio D . Considerar para ello la señal aleatoria $y[n]$ obtenida a partir de $x[n]$ según la relación: $y[n] = x[n - D]$, siendo D una variable aleatoria que puede tomar los valores $0, \dots, N - 1$ de forma equiprobable.

Calcular la media y la autocorrelación de $y[n]$.

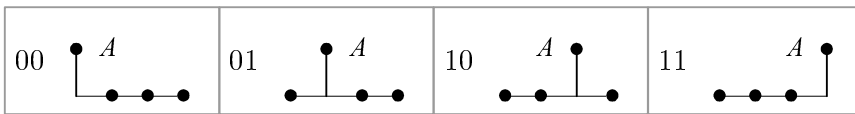


Figura 2.7 Asignación de bits a secuencias en el ejercicio 2.10 para $N = 4$.

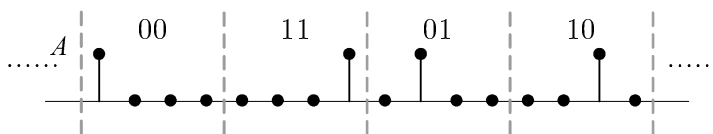


Figura 2.8 Tramo de una realización de la señal $x[n]$ definida en el ejercicio 2.10 para $N = 4$.

Solución

En la figura 2.9 se muestran tramos de cuatro realizaciones de la señal

$y[n]$ para el caso particular de $N = 4$ y para diferentes valores de la variable retardo D , que van a servir de apoyo para la resolución de este ejercicio. La separación de cada *bloque* de 4 muestras correspondiente a una pareja de bits en cada realización se ha marcado con una línea corta vertical discontinua. Las líneas verticales de mayor longitud sirven para visualizar el cómputo de los promedios.

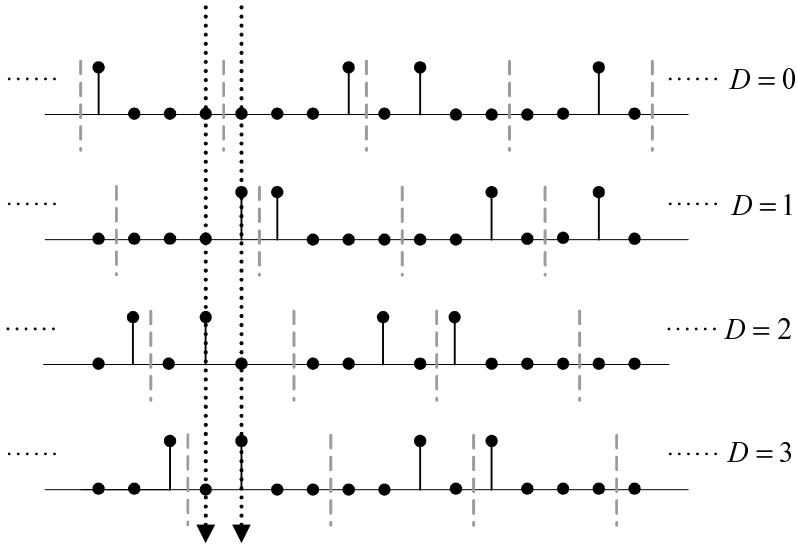


Figura 2.9 Tramos de cuatro realizaciones diferentes de la señal $y[n]$ definida en el ejercicio 2.10 para $N = 4$ y para cuatro valores del retardo D diferentes.

Para determinar la media hay que elegir cualquier instante de tiempo y hacer el promedio (en *vertical*) a lo largo de las diferentes realizaciones. Como se puede deducir a partir de la figura, en promedio, en una de cada N realizaciones aparecerá un valor A mientras que en el resto aparecerá el valor cero. Esto es así sea cual sea el instante de tiempo elegido. Por tanto, la media (de conjunto) de la señal será

$$\bar{y} = A/N$$

Con respecto a la autocorrelación $R_y[n] = E[y[k]y[k+n]]$ se procede para diferentes valores de n por separado.

- $n = 0$. $R_y[0] = E[y^2[k]] \equiv \overline{x^2}$. Siguiendo el mismo razonamiento empleado para calcular la media, para el valor cuadrático se obtiene $\overline{y^2} = A^2/N$.
- $|n| \geq N$. Si la separación entre las dos variables es mayor o igual que N ambas pertenecerán a *bloques* diferentes. Dado que los N bits asociados a un bloque son independientes de los N bits asociados a cualquier otro bloque, las variables aleatorias de un bloque serán independientes de las variables aleatorias de otro. Esto significa que $y[k]$ y $y[k+n]$ son independientes y, por tanto,

$$R_y[n] = E[y[k]y[k+n]] = E[y[k]]E[y[k+n]] = \overline{y^2} = A^2/N^2.$$

- $1 \leq |n| \leq N - 1$. En esta situación puede ocurrir o bien que $y[k]$ y $y[k+n]$ pertenezcan al mismo bloque (como es el caso de las tres realizaciones inferiores de la figura 2.9 para las variables elegidas) o bien que pertenezcan a bloques adyacentes (como es el caso de la realización superior de la figura 2.9). En el primero de los casos $E[y[k]y[k+n]]$ valdría cero, puesto que el producto $y[k]y[k+n]$ es necesariamente cero al ser siempre cero uno de los factores. En el segundo caso, las variables $y[k]$ y $y[k+n]$ son independientes, por lo que $E[y[k]y[k+n]]$ sería igual a $\overline{y^2}$ según lo explicado anteriormente.

El promedio $E[y[k]y[k+n]]$ se puede calcular recurriendo al teorema de la probabilidad total en su expresión (1.102)

$$E[y[k]y[k+n]] = 0 \cdot \Pr(\text{mismo bloque}) + \overline{y^2} \cdot \Pr(\text{bloques adyacentes}). \quad (2.35)$$

La probabilidad de que dos variables aleatorias pertenezcan a bloques adyacentes cuando su separación es 1 muestra se determina fácilmente, pues existe sólo una posibilidad entre N posibilidades equiprobables. En general, cuando la separación es de n muestras, hay n casos favorables frente a N posibles, resultando

$$\Pr(\text{bloques adyacentes}) = |n|/N.$$

Sustituyendo en (2.35) se tiene

$$E[y[k]y[k+n]] = \frac{|n|}{N} \cdot \frac{A^2}{N^2}.$$

Resumiendo resultados se llega a

$$R_y[n] = \begin{cases} A^2/N & n = 0 \\ A^2|n|/N^3 & |n| = 1, \dots, N-1 \\ A^2/N^2 & |n| \geq N \end{cases}$$

En la figura 2.10 se representa gráficamente $R_y[n]$.

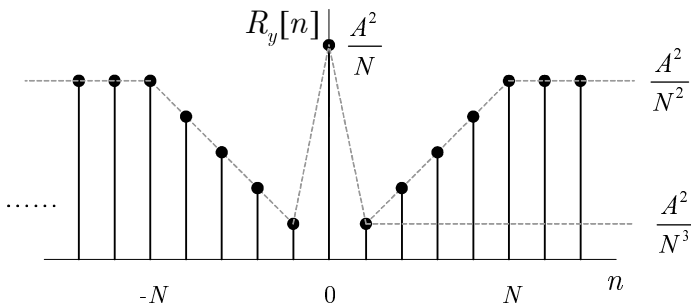


Figura 2.10 Autocorrelación de la señal $y[n]$ del ejercicio 2.10.

Ejercicio 2.11.

Considerar la señal determinista discreta periódica $x[n]$ de periodo 4 muestras cuyo periodo principal es

$$x_P[n] = n, \quad 0 \leq n \leq 3.$$

La señal aleatoria $y[n]$ se define como $y[n] = x[n-D]$, donde D es una variable aleatoria discreta que puede tomar de forma equiprobable los valores 0, 1, 2 y 3. Calcular la media y la autocorrelación de $y[n]$.

Solución

Aunque el problema se puede resolver de forma puramente analítica, es recomendable, siempre que sea posible, representar diversas realizaciones de la señal bajo estudio, pues se ganará intuición sobre lo que se está calculando. En la figura 2.11 se muestran las 4 posibles realizaciones diferentes de la señal $y[n]$ (en general, el número de realizaciones distintas de una señal aleatoria es infinito aunque en este caso particular son sólo 4).

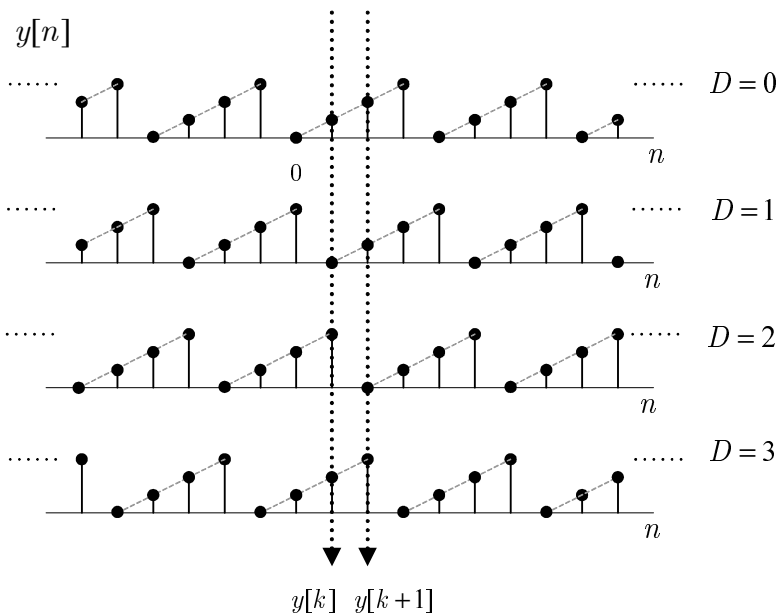


Figura 2.11 Diferentes realizaciones de la señal $y[n]$ del ejercicio 2.11.

Para determinar $E[y[k]]$ hay que elegir un instante de tiempo k cualquiera y calcular el promedio (en *vertical*) de los valores que toma la variable aleatoria seleccionada. En este caso se comprueba que, sea cual sea el valor de k elegido, los posibles valores son enteros que van desde 0 hasta 3, todos con la misma probabilidad (ver línea discontinua vertical en la figura 2.11). Aplicando (1.32), $\bar{y} = \frac{1}{4}(0 + 1 + 2 + 3)$, es decir

$$\bar{y} = 3/2$$

Para determinar la autocorrelación $R_y[n]$ se procede para cada índice n por separado.

- $n = 0$. $R_y[0] = E[y^2[k]]$. Con el mismo razonamiento seguido para el cálculo de la media, se observa que, elegido un instante de tiempo k cualquiera, los valores al cuadrado que se encuentran son $0^2, 1^2, 2^2$ y 3^2 , todos con la misma probabilidad de $\frac{1}{4}$. Por tanto,

$$R_y[0] = (0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2) \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{2}.$$

- $n = 1$. $R_y[1] = E[y[k]y[k+1]]$. Las dos líneas verticales de la figura 2.11 marcan los valores de dos variables separadas una muestra. Los posibles productos de $y[k]$ e $y[k+1]$ son $0 \cdot 1, 1 \cdot 2, 2 \cdot 3$ y $3 \cdot 0$, lo que significa que

$$R_y[1] = (0 + 2 + 6 + 0) \cdot \frac{1}{4} = 2.$$

- $n = 2$. $R_y[2] = E[y[k]y[k+2]]$. Repitiendo la misma operación, esta vez con dos muestras separadas dos posiciones, se tiene que los posibles productos son $0 \cdot 2, 1 \cdot 3, 2 \cdot 0$ y $3 \cdot 1$ y por tanto

$$R_y[2] = (0 + 3 + 0 + 3) \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}.$$

- $n = 3$. $R_y[3] = E[y[k]y[k+3]]$. Los posibles productos son ahora $0 \cdot 3, 1 \cdot 0, 2 \cdot 1$ y $3 \cdot 2$, y así

$$R_y[2] = (0 + 0 + 2 + 6) \cdot \frac{1}{4} = 2.$$

A partir de este punto, la autocorrelación se repite de forma periódica con periodo 4 como era de esperar, pues las realizaciones son periódicas de periodo 4. El resultado final es

$$R_y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p[n - 4k].$$

$$p[n] = \frac{7}{2}\delta[n] + 2\delta[n - 1] + \frac{3}{2}\delta[n - 2] + 2\delta[n - 3]$$

La representación de esta función de autocorrelación se puede ver en la figura 2.12.

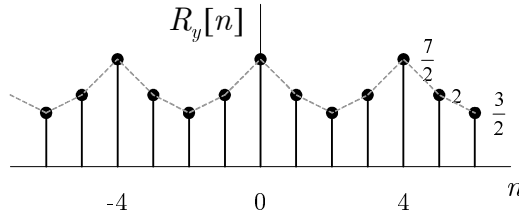


Figura 2.12 Autocorrelación de la señal $y[n]$ del ejercicio 2.11.

Existe una forma más rigurosa de resolver el problema sin recurrir a la representación gráfica de las realizaciones, como a continuación de muestra.

En lo que respecta al cálculo de la media se tiene

$$\bar{y} = E[y[k]] = E[x[k - D]].$$

Se trata, por tanto, de calcular la esperanza de una función de la variable aleatoria D . Aplicando (1.29) se tiene

$$E[x[k - D]] = \int_{-\infty}^{\infty} x[n - D]f_D(D)dD.$$

Al ser D una variable aleatoria discreta, su *fdp* está formada por deltas, $f_D(D) = \sum_{i=0}^3 \Pr(D = i)\delta(D - i)$. Sustituyendo en la expresión anterior

$$\bar{y} = \sum_{i=0}^3 x[k-i] \cdot \Pr(D = i) = \frac{1}{4}[x[k-0]+x[k-1]+x[k-2]+x[k-3]] = \frac{3}{2},$$

sea cual sea el valor de k , ya que se trata de la suma de 4 valores consecutivos de $x[n]$.

Procediendo de similar manera se puede calcular la autocorrelación. En concreto,

$$\begin{aligned} E[y[k]y[k+n]] &= E[x[k-D]x[k+n-D]] \\ &= \sum_{i=0}^3 x[k-i]x[k+n-i] \Pr(D=i). \end{aligned}$$

Para $n=0$, la expresión anterior se reduce a

$$R_y[0] = \frac{1}{4} (x^2[k] + x^2[k-1] + x^2[k-2] + x^2[k-3]) = \frac{7}{2},$$

independiente del valor que tome k . Razonando de igual forma para los restantes valores de n , se llega al mismo resultado de $R_y[n]$ representado en la figura 2.12.

Ejercicio 2.12.

Sea $x(t)$ una señal aleatoria estacionaria de media nula y *dep* $S_x(f)$. Si $y(t) = Ax(t) + B$ donde A y B son constantes, determinar $S_y(f)$.

Solución

Basta sustituir $x(t)$ en $y(t)$ en la expresión de la autocorrelación y aplicar linealidad del operador esperanza

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= E[y(t+\tau)y(t)] \\ &= E[(Ax(t+\tau) + B)(Ax(t) + B)] \\ &= E[A^2x(t+\tau)x(t)] + E[ABx(t+\tau)] + E[ABx(t)] + E[B^2] \\ &= A^2R_x(\tau) + B^2. \end{aligned}$$

Tomando la transformada de Fourier se obtiene

$$S_y(f) = A^2S_x(f) + B^2\delta(f)$$

Ejercicio 2.13.

En la figura 2.13 se representan las densidades espectrales de potencia de dos señales aleatorias independientes $x(t)$ e $y(t)$. Determinar la *dep* de $z(t)$ y su potencia si $z(t) = x(t) + y(t)$. ¿Se cumple en estas condiciones la superposición de potencias?.

Nota: Considerar la media de ambas señales del mismo signo.

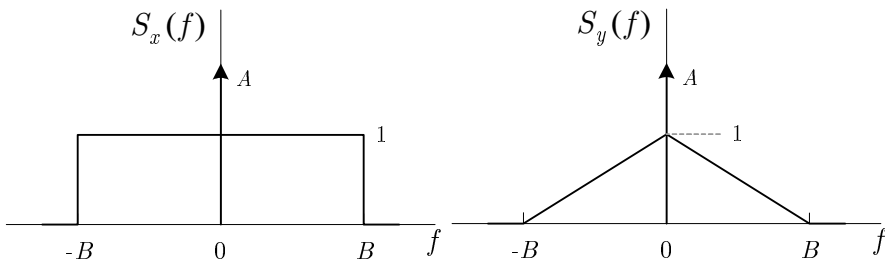


Figura 2.13 Densidades espectrales de potencia de las señales $x(t)$ e $y(t)$ del ejercicio 2.13.

Solución

Para determinar la *dep* de $z(t)$ se calculará primero la autocorrelación y posteriormente la transformada de Fourier de dicha autocorrelación, siguiendo las indicaciones del esquema de la figura 2.1. La autocorrelación de la suma de dos señales viene dada por la expresión general $R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau)$. Al ser ambas señales independientes, las correlaciones cruzadas son

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) = E[x(t + \tau)y(t)] &= E[x(t + \tau)]E[y(t)] = \bar{x} \cdot \bar{y} \\ R_{yx}(\tau) &= \bar{y} \cdot \bar{x}. \end{aligned}$$

Para determinar las medias, se debe recordar que la integral de la *dep* de una señal a frecuencia cero corresponde a la potencia de la componente continua que, a su vez, es igual a la media de la señal al cuadrado, según (2.28)

$$\int_{0^-}^{0^+} S_x(f)df = P_{x_{DC}} = \bar{x}^2.$$

Para las señales del enunciado se tiene que

$$\int_{0^-}^{0^+} S_x(f)df = A \Rightarrow \bar{x} = \pm\sqrt{A}$$

y de la misma manera $\bar{y} = \pm\sqrt{A}$. Con esto, resulta

$$R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau) + 2A.$$

Tomando la transformada de Fourier se tiene finalmente,

$$S_z(f) = S_x(f) + S_y(f) + 2A\delta(f),$$

cuya representación gráfica se muestra en la figura 2.14.

Cabe indicar que la *dep* de la suma no coincide con la suma de las *dep* puesto que las señales, aun siendo independientes (e incorreladas, por tanto) no son ortogonales al tener ambas una media distinta de cero. No se cumple el principio de superposición de potencias, como se puede verificar integrando las correspondientes *dep*, que da como resultado

$$\begin{aligned} P_x &= A + 2B \\ P_y &= A + B \\ P_z &= 4A + 3B \neq P_x + P_y. \end{aligned}$$

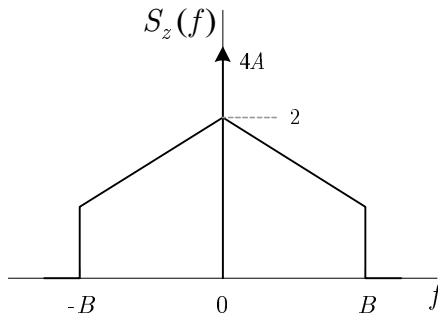


Figura 2.14 Densidad espectral de potencia de la señal $z(t)$ del ejercicio 2.13.

Ejercicio 2.14.

Considerar la señal $z(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t + \psi)$ correspondiente a una modulación de amplitud, donde $x(t)$ es la señal de información, aleatoria y estacionaria, f_0 es la frecuencia de la portadora y ψ es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[0, 2\pi]$. Asumiendo que $x(t)$ y ψ son independientes, demostrar que la *dep* de $z(t)$ es

$$S_z(f) = \frac{1}{4}S_x(f - f_0) + \frac{1}{4}S_x(f + f_0).$$

Solución

Se calcula primero la autocorrelación de $z(t)$.

$$\begin{aligned} R_z(\tau) &= E[z(t + \tau)z(t)] \\ &= E[x(t + \tau)\cos(2\pi f_0(t + \tau) + \psi)x(t)\cos(2\pi f_0 t + \psi)] \\ &= E[x(t + \tau)x(t)] \cdot E[\cos(2\pi f_0(t + \tau) + \psi)\cos(2\pi f_0 t + \psi)], \end{aligned}$$

donde se ha aplicado que $x(t)$ y ψ son independientes. La segunda esperanza se puede simplificar puesto que

$$\begin{aligned} &E[\cos(2\pi f_0(t + \tau) + \psi)\cos(2\pi f_0 t + \psi)] \\ &= E[\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0(2t + \tau) + 2\psi)] + E[\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0\tau)] = \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0\tau), \end{aligned}$$

ya que la primera esperanza es nula (ver ejercicio 2.3). Sustituyendo, queda

$$R_z(\tau) = E[x(t + \tau)x(t)]\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0\tau) = \frac{1}{2}R_x(\tau)\cos(2\pi f_0\tau).$$

Tomando la transformada de Fourier

$$S_z(f) = TF\{R_z(\tau)\} = \frac{1}{2}S_x(f) * [\frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)]$$

y realizando la convolución, se llega al resultado propuesto.

Ejercicio 2.15.

Como es sabido del estudio de las señales deterministas, si una señal $x(t)$ se muestrea con una frecuencia $f_s = \frac{1}{T_s}$ dando lugar a la señal discreta $y[n]$, la transformada de Fourier de $y[n]$ consiste en réplicas de la transformada de $x(t)$ equiespaciadas según la expresión

$$Y(\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s) \Big|_{\omega=\Omega/T_s}, \quad (2.36)$$

siendo $\omega_s = 2\pi f_s$. En este ejercicio se pretende demostrar que ocurre lo mismo con las densidades espectrales de potencia cuando se muestrea una señal aleatoria estacionaria.

- Demostrar que si se muestrea la señal aleatoria $x(t)$ dando lugar a $y[n] = x(nT_s)$, entonces $R_y[n] = R_x(nT_s)$.
- Utilizando los resultados del apartado anterior, demostrar que la *dep* de la señal $y[n]$ viene dada por:

$$S_y(\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_x(\omega - k\omega_s) \Big|_{\omega=\Omega/T_s},$$

siendo $S_x(\omega)$ la *dep* de $x(t)$.

Solución

- La demostración es inmediata, pues

$$R_y[n] = E[y[k+n]y[k]] = E[x((k+n)T)x(kT)] = R_x(nT).$$

Por tanto, si se muestrea una señal continua, aleatoria y estacionaria, la autocorrelación de la señal muestreada corresponde al muestreo de la autocorrelación de la señal continua de partida.

- Según el resultado del apartado anterior, $R_x(\tau)$ y $R_y[n]$ resultan ser una pareja de señales deterministas en la que una corresponde al muestreo de la otra. Por tanto, se pueden aplicar los

resultados relativos al muestreo de las señales deterministas (según la expresión (2.36) indicada en el enunciado), teniendo en cuenta que las transformadas de Fourier de ambas señales son: $TF\{R_x(\tau)\} = S_x(\omega)$, $TF\{R_y[n]\} = S_y(\Omega)$, con lo que se llega a la expresión propuesta.

Ejercicio 2.16.

Considerar la secuencia binaria periódica cuyo periodo de 7 bits es: 1110010. Esta secuencia es lo que se conoce como *secuencia pseudo-aleatoria*, pues sus características son parecidas a las de una secuencia binaria aleatoria de símbolos equiprobables.

La señal discreta $x[n]$ se construye a partir de dicha secuencia de forma que un uno da lugar a una muestra de amplitud A y un cero da lugar a una muestra de amplitud $-A$.

Determinar la autocorrelación de la señal $x[n]$ y compararla con la autocorrelación de una señal blanca $y[n]$ que toma los valores A y $-A$ de forma independiente y equiprobable.

Nota: La autocorrelación temporal de una señal determinista y periódica de periodo N viene dada por la expresión

$$\phi_x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k \in \langle N \rangle} x[k-n]x[k]$$

donde N es el periodo de la señal y donde la expresión $k \in \langle N \rangle$ indica que el sumatorio debe realizarse a lo largo de un periodo cualquiera de la señal. La autocorrelación será una señal periódica del mismo periodo N .

Solución

Para evaluar $\phi_x[n]$ es necesario multiplicar en un periodo la señal $x[k]$ con una versión de ella desplazada n muestras, $x[k-n]$. Para ello es imprescindible recurrir a una representación de las señales involucradas. En la figura 2.15 se muestra un tramo de la señal $x[k]$, una versión sin desplazar, desplazada $n = 1$ muestra y desplazada $n = 2$ muestras a modo de ejemplo. Las líneas discontinuas verticales marcan un periodo de la señal en el que se van a realizar las operaciones. Repitiendo

el procedimiento para n desde 0 hasta $N - 1$ se obtiene un periodo completo de la autocorrelación.

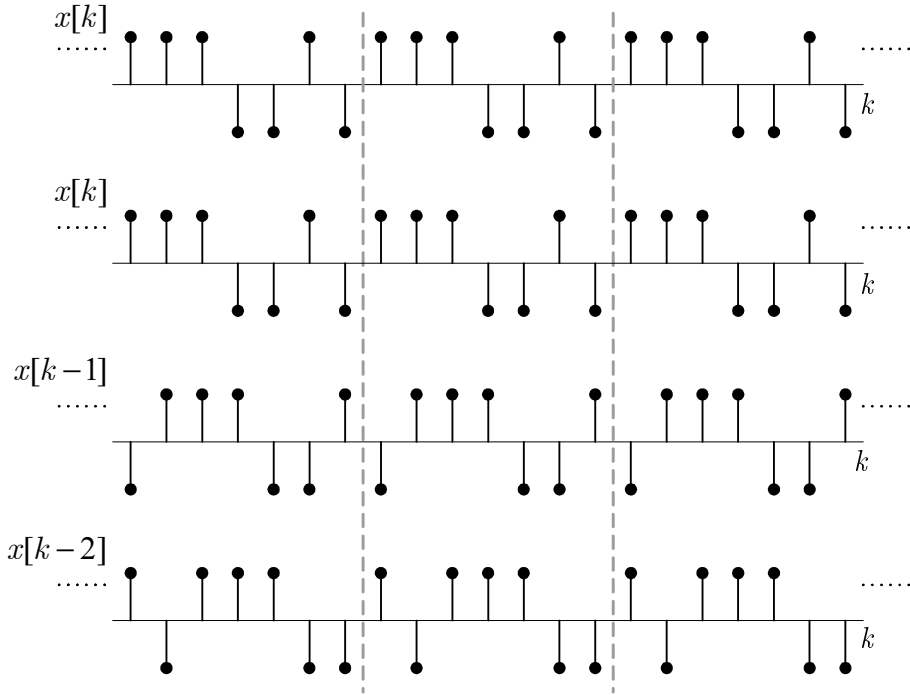


Figura 2.15 Tramos de $x[n]$ con diferentes desplazamientos en el ejercicio 2.16.

Realizando las correspondientes operaciones resulta la siguiente autocorrelación:

$$\phi_x[n] = \begin{cases} A^2 & n = 0 \\ -A^2/7 & n = 1, \dots, 6 \end{cases}$$

Periódica, de periodo 7

En la figura 2.16 se representa un tramo de la autocorrelación calculada. En el caso de emplear otra secuencia de las mismas características pero con un N mayor, el periodo aumentaría y los valores de la autocorrelación asociados a los índices $n = 1, \dots, N - 1$ se harían más

Solución

- a) La media viene dada por $E[x(t)] = E[A\cos(\omega_0 t)] = E[A]\cos(\omega_0 t)$, que es una función periódica en t de periodo $T = T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Observar que la media no es constante en el tiempo y, por tanto, la señal no es estacionaria pero sí es cicloestacionaria con periodo T_0 .

La autocorrelación para dos instantes de tiempo diferentes es

$$\begin{aligned} R_x(t, t + \tau) &= E[A\cos(\omega_0 t)A\cos(\omega_0(t + \tau))] \\ &= \frac{E[A^2]}{2}\cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau) + \frac{E[A^2]}{2}\cos(\omega_0 \tau). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Como se observa, la autocorrelación depende de los dos instantes de tiempo y no sólo de la diferencia τ , por tanto la señal no es estacionaria.

Para verificar si es cicloestacionaria hay que comprobar si existe un T para el que se cumpla que $R_x(t, t + \tau) = R_x(t + T, t + T + \tau)$. Esta comprobación es inmediata pues

$$\begin{aligned} R_x(t + T, t + T + \tau) &= E[A\cos(\omega_0(t + T))A\cos(\omega_0(t + T + \tau))] \\ &= \frac{E[A^2]}{2}\cos(2\omega_0(t + T) + \omega_0 \tau) \\ &\quad + \frac{E[A^2]}{2}\cos(\omega_0 \tau). \end{aligned} \quad (2.38)$$

La igualdad entre (2.37) y (2.38) se cumple para $T = T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, por lo tanto la señal es cicloestacionaria con periodo T_0 .

- b) Procediendo de igual forma, con respecto a la media se puede escribir

$$E[x(t)] = E\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a[k]p(t - kD)\right] = \bar{a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(t - kD), \quad (2.39)$$

donde se ha aplicado que la secuencia $a[k]$ es estacionaria con media $\bar{a} = E[a[n]]$. Para $T = D$,

$$E[x(t+D)] = \bar{a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(t - (k-1)D),$$

que es una expresión idéntica a (2.39), ya que el sumatorio en ambos casos se recorre para todos los valores del índice desde $-\infty$ hasta ∞ . Así, se tiene que $E[x(t)] = E[x(t+D)]$. De nuevo se comprueba que la media varía con el tiempo de una forma periódica de periodo D .

En lo que respecta a la autocorrelación se tiene

$$\begin{aligned} R_x(t, t+\tau) &= \\ E \left[\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a[k]p(t-kD) \right) \cdot \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a[i]p(t+\tau-iD) \right) \right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} E \left[a[k]a[i] \right] p(t-kD)p(t+\tau-iD). \end{aligned}$$

Llegados a este punto, ya se puede comprobar cómo la autocorrelación depende de los dos instantes de tiempo t y $t+\tau$, por lo tanto la señal no es estacionaria. Para la siguiente parte del ejercicio interesa modificar la expresión anterior con el cambio de variable $l = k - i$ resultando

$$R_x(t, t+\tau) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} R_a[l] \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(t-kD)p(t+\tau-(k-l)D), \quad (2.40)$$

donde $R_a[l] = E[a[k]a[k-l]]$ es la autocorrelación de la secuencia $a[n]$. Considerar ahora

$$\begin{aligned} R_x(t+T, t+T+\tau) &= \\ = \sum_{l=-\infty}^{\infty} R_a[l] \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(t+T-kD)p(t+T+\tau-(k-l)D). \end{aligned}$$

Para $T = D$ se cumple que

$$\begin{aligned} R_x(t + D, t + D + \tau) \\ = \sum_{l=-\infty}^{\infty} R_a[l] \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(t - (k - 1)D)p(t + \tau - (k - l - 1)D), \end{aligned}$$

y con el cambio de variable $k' = k - 1$ resulta

$$\begin{aligned} R_x(t + D, t + D + \tau) \\ = \sum_{l=-\infty}^{\infty} R_a[l] \sum_{k'=-\infty}^{\infty} p(t - k'D)p(t + \tau - (k' - l)D). \quad (2.41) \end{aligned}$$

El sumatorio en k de (2.40) y el sumatorio en k' de (2.41) tienen el mismo valor, pues en ambos el índice recorre todos los valores desde $-\infty$ hasta ∞ . Ambas expresiones son equivalentes y, en consecuencia, la señal $x(t)$ es cicloestacionaria con periodo D .

Ejercicio 2.18.

Sea $x(t)$ una señal cicloestacionaria de periodo T . Demostrar que esta señal se puede convertir en estacionaria si se incluye un retardo aleatorio a las diferentes realizaciones. En concreto, demostrar que la señal $y(t) = x(t + \psi)$, donde ψ es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[0, T]$ es una señal estacionaria en sentido amplio.

Solución

Hay que demostrar que la señal es estacionaria tanto en la media como en la autorrelación, es decir, que $E[y(t)]$ y $R_y(t, t + \tau)$ no dependen de t . Comenzando con la media, se tiene que $E[y(t)] = E[x(t + \psi)]$, donde tanto la señal $x(t)$ como la variable ψ son aleatorias. Aplicando (1.58), esta esperanza se puede calcular como

$$E[y(t)] = \int_0^T E[x(t + \psi)|\psi] \frac{1}{T} d\psi, \quad (2.42)$$

donde la esperanza condicional $E[x(t + \psi)|\psi]$ viene dada por la ecuación (1.59) y sólo afecta a las variables de $x(t)$, siendo ψ un parámetro.

La señal $x(t)$ es cicloestacionaria en la media, es decir, $E[x(t)]$ es una función periódica en t con periodo T , lo que significa que $E[x(t+\psi)|\psi]$ donde ψ es considerado constante, también lo será, ya que se trata de un simple desplazamiento de la función.

La integral (2.42) se extiende en un periodo completo desde 0 hasta T , lo que implica que esta integral dará siempre el mismo valor independientemente de t . Así, $E[y(t)]$ no depende de t , como se quería demostrar. La señal es estacionaria en la media.

Siguiendo los mismo pasos para la autocorrelación, resulta

$$R_y(t, t + \tau) = E[y(t)y(t + \tau)] = E[x(t + \psi)x(t + \tau + \psi)].$$

Aplicando de nuevo (1.58), esta esperanza se puede reescribir como

$$R_y(t, t + \tau) = \int_0^T E[x(t + \psi)x(t + \tau + \psi)|\psi] \frac{1}{T} d\psi. \quad (2.43)$$

La señal $x(t)$ es cicloestacionaria en la autocorrelación, lo que significa que $E[x(t)x(t + \tau)]$ es una función periódica en t con periodo T . Razonando de forma similar a como se ha hecho para la media se puede afirmar que la esperanza $E[x(t + \psi)x(t + \tau + \psi)|\psi]$ tiene la misma periodicidad y la integral (2.43) es invariante con t . Por tanto, la autocorrelación $R_y(t, t + \tau)$ no depende de t , lo que significa que la señal es también estacionaria en la autocorrelación.

Ejercicio 2.19.

Una señal digital PAM consiste en una secuencia de pulsos idénticos cuyas amplitudes pueden tomar un conjunto finito de valores, representados por la secuencia $a[n]$, como se indica en la siguiente expresión (ver ejercicio 2.17, apartado b):

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a[k] \cdot p(t - kD - \psi),$$

donde $p(t)$ es el pulso prototipo, D es la separación entre pulsos (o lo que es lo mismo, el periodo de símbolo) y ψ es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[-D/2, D/2]$ introducida conseguir un modelo de señal estacionaria.

a) Demostrar que la *dep* de $x(t)$ se puede expresar como

$$S_x(f) = \frac{1}{D} |P(f)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_a[k] e^{-j2\pi f k D},$$

donde $R_a[k]$ es la autocorrelación de la secuencia de amplitudes $a[k]$ y $P(f)$ es la transformada de Fourier del pulso $p(t)$.

b) Demostrar que en el caso de que las amplitudes de los pulsos sean independientes entre sí, la expresión anterior adopta la siguiente forma más sencilla de calcular:

$$S_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{D} |P(f)|^2 + \left(\frac{\bar{a}}{D}\right)^2 |P(f)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k/D),$$

donde \bar{a} y σ_a^2 son la media y la varianza respectivamente de la secuencia de amplitudes $a[n]$.

Solución

a) Para calcular la *dep*, se calcula previamente la autocorrelación y después su transformada de Fourier.

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= E[x(t + \tau)x(t)] \\ &= E \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} a[l] \cdot p(t + \tau - lD - \psi) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] \cdot p(t - nD - \psi) \right] \\ &= E \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[l]a[n]p(t + \tau - lD - \psi)p(t - nD - \psi) \right] \\ &= E \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n+k]a[n] \times \right. \\ &\quad \left. p(t + \tau - kD - nD - \psi)p(t - nD - \psi) \right]. \end{aligned}$$

donde se ha realizado el cambio de variable $k = l - n$. Teniendo en cuenta que la secuencia de amplitudes $a[k]$ es independiente de ψ y que $E[a[k+n]a[k]] \equiv R_a[k]$ queda

$$R_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_a[k] E[p(t+\tau-kD-nD-\psi)p(t-nD-\psi)].$$

El operador esperanza actúa sobre una función de la variable aleatoria ψ . Aplicando (1.29) se puede escribir

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_a[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(t+\tau-kD-nD-\psi)p(t-nD-\psi) f_{\psi}(\psi) d\psi \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_a[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-D/2}^{D/2} p(t+\tau-kD-nD-\psi)p(t-nD-\psi) \frac{1}{D} d\psi. \end{aligned}$$

Con el cambio de variable $u = t - nD - \psi$ la expresión queda

$$R_x(\tau) = \frac{1}{D} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_a[k] \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{t-nD-D/2}^{t-nD+D/2} p(u+\tau-kD)p(u) du}_{}$$

El término marcado por la llave es una suma de infinitas integrales definidas. Observar que los intervalos de integración de las diferentes integrales no se solapan y cubren toda la recta real, con lo que esta suma de integrales equivale a una única integral definida desde $-\infty$ hasta ∞ . En la figura 2.17 se muestra un ejemplo hipotético de la función de u que aparece en el integrando $p(u+\tau-kD)p(u)$ y varios intervalos de integración consecutivos correspondientes a los índices $n+1$, n y $n-1$ para clarificar esta idea.

Con esta simplificación, la expresión para la autocorrelación se reduce a

$$R_x(\tau) = \frac{1}{D} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_a[k] \int_{-\infty}^{\infty} p(u+\tau-kD)p(u) du.$$

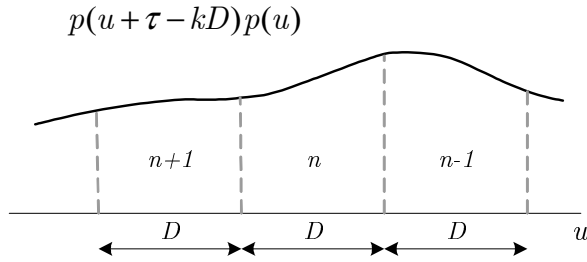


Figura 2.17 Función $p(u + \tau - kD)p(u)$ e intervalos consecutivos de integración en el ejercicio 2.19.

Finalmente, se puede ver que la integral en la expresión anterior corresponde a la autocorrelación determinista del pulso $p(t)$, denotada como $\phi_p(\tau)$, con argumento desplazado, es decir, $\phi_p(\tau - kD)$. Con esto, la expresión final de la autocorrelación $R_x(\tau)$ queda

$$R_x(\tau) = \frac{1}{D} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_a[k] \phi_p(\tau - kD).$$

Aplicando la transformada de Fourier se tiene el resultado propuesto en el enunciado

$$S_x(f) = TF\{R_x(\tau)\} = \frac{1}{D} |P(f)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_a[k] e^{-j2\pi f k D}$$

donde se ha aplicado que la transformada de Fourier de la autocorrelación de una señal determinista de energía corresponde al módulo al cuadrado la transformada de Fourier de la propia señal, en concreto $TF\{\phi_p(\tau)\} \equiv |P(f)|^2$. Esta equivalencia se puede consultar en el esquema de la figura 2.1.

- b) Según se indica en el enunciado, la señal aleatoria discreta $a[n]$ está formada por variables aleatorias independientes. En esta situación, la autocorrelación $R_a[n]$ adopta una expresión muy

sencilla que sólo depende de \bar{a} y σ_a^2 . En concreto, es inmediato demostrar que $R_a[n] = \sigma_a^2 + (\bar{a})^2$ para $n = 0$ y $R_a[n] = (\bar{a})^2$ para $n \neq 0$. Sustituyendo este resultado en la expresión general de la dep $S_x(f)$ obtenida en el apartado anterior se tiene

$$S_x(f) = \frac{1}{D} |P(f)|^2 \left(\sigma_a^2 + (\bar{a})^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f k D} \right).$$

El sumatorio se puede simplificar recurriendo a la fórmula del *sumatorio de Poisson*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f k D} = \frac{1}{D} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k/D).$$

Con esto, resulta

$$S_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{D} |P(f)|^2 + \left(\frac{\bar{a}}{D} \right)^2 |P(f)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k/D)$$

Ejercicio 2.20.

Determinar y representar la dep de las siguientes señales PAM:

- Señal Unipolar RZ (*Return to Zero*). Está construida con pulsos rectangulares de duración $D/2$, siendo D el periodo de bit. Las amplitudes son 0 y A independientes entre sí asociadas a los bits 0 y 1 respectivamente.
- Señal Bipolar NRZ (*Non Return to Zero*). Está construida con pulsos rectangulares de duración D , siendo D el periodo de bit. Las amplitudes son $-A$, 0 y A y están relacionadas con los bits de forma que un bit 0 da lugar a una amplitud 0 mientras que un bit 1 da lugar a amplitudes alternadas $-A$ y A .

- c) Señal Diferencial NRZ. Está construida con pulsos rectangulares de duración D , siendo D el periodo de bit. Las amplitudes son $-A$ y A y están relacionadas con los bits de forma que un bit 0 mantiene la amplitud anterior mientras que un bit 1 conmuta la amplitud anterior de $-A$ a A o viceversa .

En la figura 2.18 se muestra un ejemplo de cada una de estas señales para una determinada secuencia de bits.

Nota: Considerar bits independientes y equiprobables.

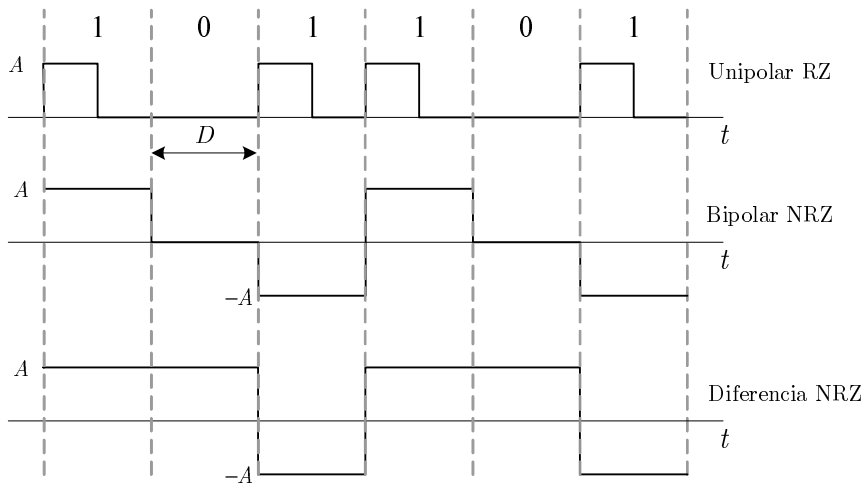


Figura 2.18 Ejemplos de tres señales PAM. a) Unipolar RZ, b) bipolar NRZ y c) diferencial NRZ del ejercicio 2.20.

Solución

- a) Dado que los bits son independientes, también lo serán las amplitudes de los pulsos, pues hay una correspondencia biunívoca entre ambos. La expresión de la *dep* para una señal PAM con amplitudes independientes ha sido obtenida en el apartado b) del ejercicio 2.19. Para evaluarla es preciso determinar el valor medio \bar{a} y la varianza σ_a^2 de la secuencia de amplitudes, así como el módulo al cuadrado de la transformada de Fourier del pulso empleado.

La secuencia de amplitudes $a[n]$ es una señal aleatoria discreta que puede tomar los valores 0 y A de forma independiente y equiprobable. Es inmediato comprobar que la media de esta señal es $\bar{a} = A/2$ y que la varianza es $\sigma_a^2 = A^2/4$.

Por otra parte, el pulso prototipo empleado es rectangular de duración $D/2$ y amplitud 1, por tanto el módulo al cuadrado de su transformada de Fourier viene dado por la expresión $|P(f)|^2 = \frac{D^2}{4} \text{sinc}^2(fD/2)$, siendo $\text{sinc}(x) = \text{sen}(\pi x)/(\pi x)$. Sustituyendo estos valores en la expresión general de la *dep* de señales PAM con amplitudes independientes se tiene

$$S_x(f) = \frac{A^2 D}{16} \text{sinc}^2(fD/2) + \frac{A^2}{16} \text{sinc}^2(fD/2) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k/D)$$

El primer sumando de la expresión corresponde la parte continua de la *dep* mientras que el segundo término está formado por deltas a frecuencias múltiplos de $1/D$. De todas estas deltas, las de índice par se anulan, ya que la función $\text{sinc}^2(fD/2)$ por la que van multiplicadas es nula para $f = k/D$ con k par.

La *dep* resultante se muestra en la figura 2.19. La existencia de una delta a frecuencia cero se debe a que la señal tiene valor medio distinto de cero y por tanto, existe potencia de continua.

- b) En este caso las amplitudes no son independientes, por lo que habrá que emplear la expresión general para la *dep* obtenida en el apartado a) del ejercicio 2.19. Para evaluarla hay que conocer la autocorrelación de la secuencia de amplitudes $R_a[n]$ y el módulo al cuadrado de la transformada de Fourier del pulso prototipo empleado.

La secuencia de amplitudes de esta señal corresponde a la señal discreta que se analizó en el ejercicio 2.6 y cuya autocorrelación viene dada por

$$R_a[n] = (A^2/2)\delta[n] - (A^2/4)\delta[n - 1] - (A^2/4)\delta[n + 1].$$

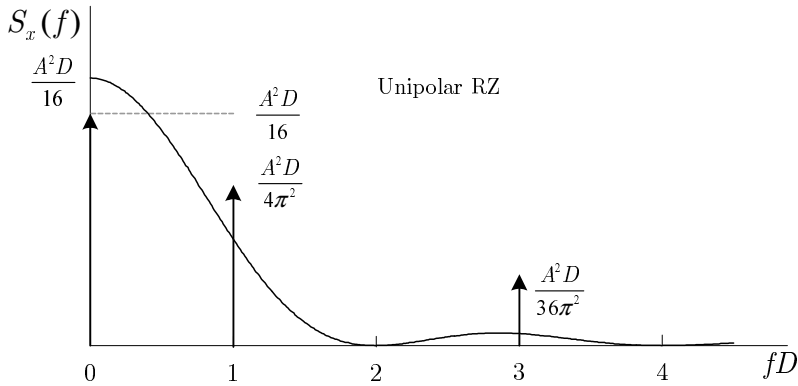


Figura 2.19 Densidad espectral de potencia de la señal unipolar RZ analizada en el ejercicio 2.20.

El pulso empleado es rectangular de duración D cuya transformada de Fourier es $D^2\text{sinc}^2(fD)$. Sustituyendo estos valores en la expresión general se llega a

$$S_x(f) = D\text{sinc}^2(fD) \left[\frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{4}(e^{j2\pi fD} + e^{-j2\pi fD}) \right].$$

Tras cierta manipulación, la expresión anterior se puede simplificar como

$$S_x(f) = A^2 D \text{sinc}^2(fD) \text{sen}^2(\pi fD)$$

En la figura 2.20 se representa esta *dep*. En este caso queda patente el hecho de que el perfil de la *dep* no sólo depende del espectro del pulso prototipo empleado sino que también influye de forma determinante la regla de construcción de dicha secuencia de amplitudes a partir de los bits, que modifica sus estadísticos de la secuencia de amplitudes.

- c) En este caso las amplitudes tampoco son independientes. La secuencia de amplitudes de esta señal corresponde a la señal discreta que se analizó en el ejercicio 2.7 y cuya autocorrelación

es $R_a[n] = A^2\delta[n]$. El pulso prototipo empleado es rectangular de duración D y amplitud 1, cuya transformada de Fourier al cuadrado es $|P(f)|^2 = D^2\text{sinc}^2(fD)$. Sustituyendo se llega a

$$S_x(f) = A^2D\text{sinc}^2(fD)$$

Su representación se muestra en la figura 2.20.

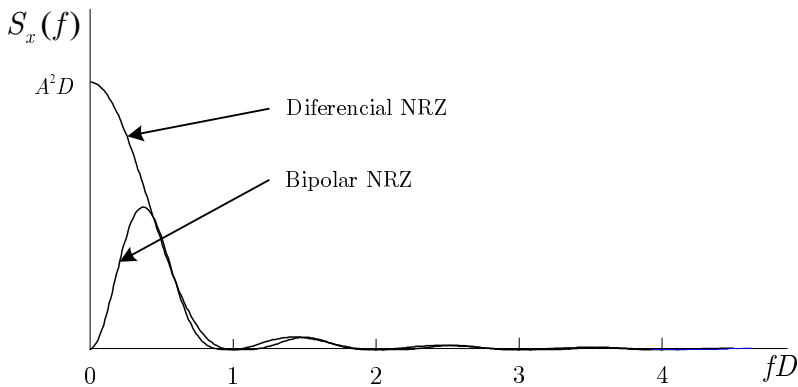


Figura 2.20 Densidades espectrales de potencia de las señales diferencial NRZ y bipolar NRZ analizadas en el ejercicio 2.20.

Ejercicio 2.21.

Las señales digitales PAM multinivel permiten aumentar la velocidad de transmisión binaria en enlaces con una relación señal a ruido elevada sin aumentar el ancho de banda ocupado respecto a la correspondiente señal PAM de dos niveles.

Considerar la señal PAM multinivel NRZ- M (siendo M potencia de 2), construida a partir de una secuencia binaria, de forma que cada secuencia de $\log_2(M)$ bits sirve para seleccionar una de las M posibles amplitudes que van desde 0 hasta $M - 1$.

Sabiendo que los símbolos binarios son independientes y equiprobables y que el pulso empleado es rectangular de duración igual al periodo de símbolo D , determinar una expresión para la *dep* de dicha señal.

Solución

En la figura 2.21 se representa un tramo de una realización de la señal propuesta para el caso de $M = 4$.

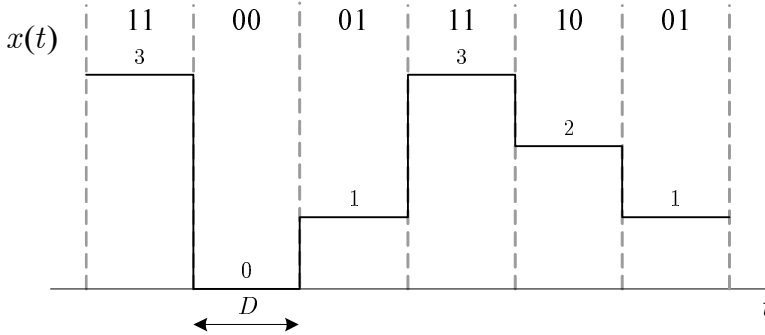


Figura 2.21 Tramo de realización de la señal PAM multinivel para $M = 4$ definida en el ejercicio 2.21.

Como se puede apreciar, cada pareja de bits de la secuencia de partida se emplea para seleccionar uno de los 4 niveles posibles. El pulso prototipo empleado es rectangular de duración D y amplitud 1 y la secuencia de amplitudes puede tomar los valores 0, 1, 2, 3 de forma equiprobable e independiente, pues así ocurre con la secuencia de parejas de bits. La expresión para la *dep* es la obtenida en el apartado b) del ejercicio 2.19, repetida aquí por comodidad

$$S_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{D} |P(f)|^2 + \left(\frac{\bar{a}}{D}\right)^2 |P(f)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k/D).$$

Para evaluarla es preciso determinar el valor medio \bar{a} y la varianza σ_a^2 de la secuencia de amplitudes, así como el módulo al cuadrado de la transformada de Fourier del pulso empleado. Las variables aleatorias de la secuencia $a[n]$ son discretas y pueden tomar valores desde 0 hasta $M - 1$ de forma equiprobable. La media se calcula como producto de posibles valores por sus probabilidades, según (1.32)

$$\bar{a} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} k = (M - 1)/2.$$

De forma análoga, el valor cuadrático viene dado por

$$\overline{a^2} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} k^2 = (M-1)(2M-1)/6,$$

con lo que la varianza toma el valor

$$\sigma_a^2 = \overline{a^2} - (\overline{a})^2 = (M^2 - 1)/12.$$

El módulo al cuadrado de la transformada del pulso rectangular de duración D es $|P(f)|^2 = D^2 \text{sinc}^2(fD)$. Sustituyendo estos valores se obtiene la expresión

$$S_x(f) = \frac{M^2 - 1}{12} D \text{sinc}^2(fD) + \frac{(M - 1)^2}{4} \delta(f)$$

Observar que el sumatorio de deltas que aparece en la expresión general se anula, pues las deltas están ubicadas en los nullos de la función $\text{sinc}^2(fD)$, salvo la correspondiente a frecuencia cero (ya que la señal tiene media distinta cero).

Curiosamente, la *dep* es la misma (salvo por un factor de escala) sea cual sea el número de niveles empleados M . El ancho espectral de la señal depende solamente del periodo de símbolo D . Esto significa que, fijado D , se puede aumentar ilimitadamente el número de bits por segundo ($\frac{\log_2(M)}{D}$) que la señal conlleva sin más que aumentar el número de niveles M , manteniéndose el mismo ancho de banda.

La técnica multinivel es muy útil y se emplea en la mayoría de los sistemas de transmisión digital, aunque existe un límite, pues aumentar M supone un aumento de la amplitud máxima de la señal y, por tanto, de su potencia. Incluso en el caso de que se mantenga la amplitud máxima y se aumente M a costa de reducir la separación entre niveles, también se encontraría un límite, ya que llegaría un momento en el que el ruido presente en toda transmisión impediría al receptor distinguir entre los diferentes niveles de la señal.

Ejercicio 2.22.

Considérese una señal digital binaria que emplea dos pulsos diferentes $p_1(t)$ y $p_2(t)$ para representar los dígitos binarios. Analíticamente, este tipo de señal se puede expresar como

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [a[k] \cdot p_1(t - kD - \psi) + b[k] \cdot p_2(t - kD - \psi)],$$

donde D es el periodo de bit, ψ es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[0, D]$, $a[n]$ es igual al bit n -ésimo y $b[n] = 1 - a[n]$. Asumiendo que los dígitos binarios son independientes y equiprobables, obtener una expresión para la *dep* de $x(t)$.

Solución

Inicialmente es preciso determinar la autocorrelación y las correlaciones cruzadas de las secuencias aleatorias $a[k]$ y $b[k]$, pues se van a necesitar posteriormente.

Las secuencias $a[n]$ y $b[n]$ son secuencias blancas con media, con autocorrelación $R_a[n] = R_b[n] = \frac{1}{4}\delta[n] + \frac{1}{4}$. Por otra parte, es inmediato comprobar que $R_{ab}[n] = R_{ba}[n] = -\frac{1}{4}\delta[n] + \frac{1}{4}$.

Considerar a continuación la descomposición de $x(t)$ en dos señales: $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, siendo

$$x_1(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a[l] \cdot p_1(t - lD - \psi),$$

$$x_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b[n] \cdot p_2(t - nD - \psi).$$

La autocorrelación de $x(t)$ se puede expresar como

$$R_x(\tau) = R_{x_1}(\tau) + R_{x_2}(\tau) + R_{x_1x_2}(\tau) + R_{x_2x_1}(\tau).$$

Para el cálculo de estas cuatro correlaciones se van a aplicar resultados conocidos de la PAM monopulso abordada en el ejercicio 2.19.

- $R_{x_1}(\tau)$. La señal $x_1(t)$ es PAM monopulso. La autocorrelación viene dada por la expresión

$$R_{x_1}(\tau) = \frac{1}{D} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_a[k] \phi_{p_1}(\tau - kD).$$

- $R_{x_2}(\tau)$. La señal $x_2(t)$ es también PAM monopulso y su autocorrelación viene dada por la expresión

$$R_{x_2}(\tau) = \frac{1}{D} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_b[k] \phi_{p_2}(\tau - kD).$$

- $R_{x_1x_2}(\tau)$. Siguiendo los mismos pasos que en el ejercicio 2.19 se llega fácilmente a la siguiente expresión para la correlación cruzada

$$R_{x_1x_2}(\tau) = \frac{1}{D} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{ab}[k] \phi_{p_1p_2}(\tau - kD),$$

siendo $\phi_{p_1p_2}(\tau)$ la correlación cruzada determinista de las señales $p_1(t)$ y $p_2(t)$.

- $R_{x_2x_1}(\tau)$. De igual forma se tiene que

$$R_{x_2x_1}(\tau) = \frac{1}{D} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{ba}[k] \phi_{p_2p_1}(\tau - kD).$$

A continuación se calcula la transformada de Fourier de cada una de estas funciones para obtener la *dep* de cada término

- $TF\{R_{x_1}(\tau)\} \equiv S_{x_1}(f)$.

$$S_{x_1}(f) = \frac{1}{4D} |P_1(f)|^2 + \frac{1}{4D^2} |P_1(f)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k/D).$$

- $TF\{R_{x_2}(\tau)\} \equiv S_{x_2}(f)$.

$$S_{x_2}(f) = \frac{1}{4D} |P_2(f)|^2 + \frac{1}{4D^2} |P_2(f)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k/D).$$

$$\blacksquare TF\{R_{x_1x_2}(\tau)\} \equiv S_{x_1x_2}(f).$$

$$S_{x_1x_2}(f) = \frac{-1}{4D}P_1(f)P_2^*(f) + \frac{1}{4D^2}P_1(f)P_2^*(f) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k/D).$$

$$\blacksquare TF\{R_{x_2x_1}(\tau)\} \equiv S_{x_2x_1}(f).$$

$$S_{x_2x_1}(f) = \frac{-1}{4D}P_1^*(f)P_2(f) + \frac{1}{4D^2}P_1^*(f)P_2(f) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k/D).$$

En la obtención de las dos últimas expresiones se ha aplicado la siguiente identidad, válida para señales de energía

$$TF\{\phi_{z_1z_2}(\tau)\} = TF\left\{\int_{-\infty}^{\infty} z_1(t + \tau)z_2(t)dt\right\} = Z_1(f) \cdot Z_2^*(f).$$

La *dep* buscada $S_x(f)$ se obtiene como

$$S_x(f) = TF\{R_x(\tau)\} = S_{x_1}(f) + S_{x_2}(f) + S_{x_1x_2}(f) + S_{x_2x_1}(f).$$

Aplicando las identidades complejas

$$|A + B|^2 = |A|^2 + |B|^2 + AB^* + A^*B$$

$$|A - B|^2 = |A|^2 + |B|^2 - AB^* - A^*B,$$

se llega finalmente a la expresión

$$S_x(f) = \frac{1}{4D} |P_1(f) - P_2(f)|^2 + \frac{1}{4D^2} |P_1(f) + P_2(f)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k/D)$$

Ejercicio 2.23.

En la modulación digital de pulsos por posición N-PPM (*Pulse Position Modulation*) la información digital determina la posición de un pulso rectangular dentro del periodo de símbolo, donde N es el número de posiciones posibles. Un ejemplo para $N = 4$ se muestra en la parte superior de la figura 2.22.

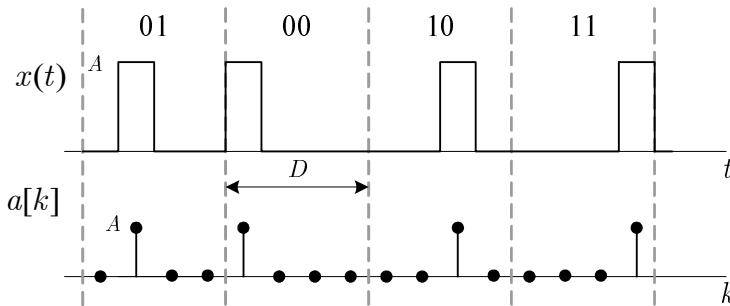


Figura 2.22 Tramo de realización de una señal 4-PPM y secuencia correspondiente de amplitudes en el ejercicio 2.23.

De forma analítica, una señal N-PPM se puede expresar como

$$x(t) = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} p\left(t - \frac{D}{N}d[k] - kD - \varphi\right),$$

donde D es el periodo de símbolo, $d[k]$ es una variable aleatoria discreta que puede tomar valores forma equiprobable dentro del rango $0, \dots, N - 1$, $p(t)$ es un pulso rectangular de amplitud 1 y duración D/N y φ es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[0, D]$. Esta señal N-PPM se puede identificar con una señal PAM como la definida en el ejercicio 2.19 mediante la siguiente expresión:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a[k - k_0] \cdot p\left(t - k\frac{D}{N} - \psi\right),$$

donde k_0 es una variable aleatoria discreta que puede tomar valores de forma equiprobable dentro del rango $0, \dots, N - 1$, ψ es una variable

aleatoria uniforme en el intervalo $[0, D/N]$ e independiente de k_0 y $a[k]$ es una secuencia de amplitudes formada por la concatenación de *bloques* de N muestras asociados a cada una de las posiciones de los pulsos PPM. En la parte inferior de la figura 2.22 se muestra la secuencia de amplitudes correspondiente al tramo de la realización de la señal 4-PPM representada en la parte superior.

En el ejercicio se determinó una expresión general para la *dep* de una señal PAM, que particularizada para este problema es

$$S_x(f) = \frac{N}{D} |P(f)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_a[k] \cdot e^{-j\omega k D/N}. \quad (2.44)$$

Asumiendo símbolos binarios independientes y equiprobables, calcular la *dep* de la señal $x(t)$.

Solución

Para resolver este problema es necesario calcular la autocorrelación de la secuencia de amplitudes $a[k - k_0]$ y la transformada de Fourier del pulso $P(f)$ y sustituirlas en la expresión (2.44).

La secuencia de amplitudes descrita es idéntica a la que se estudió en el ejercicio 2.10 y cuya autocorrelación resultó ser

$$R_a[n] = \begin{cases} A^2/N & n = 0 \\ A^2|n|/N^3 & |n| = 1, \dots, N-1 \\ A^2/N^2 & |n| \geq N, \end{cases}$$

que se puede expresar de una forma más compacta como

$$R_a[n] = \frac{A^2}{N^2} [1 - \Lambda_N[n]] + \frac{A^2}{N} \delta[n],$$

siendo

$$\Lambda_N[n] = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{N} & |n| \leq N \\ 0 & \text{resto,} \end{cases}$$

es decir la función triángulo de base $2N + 1$ muestras. El sumatorio que aparece en (2.44) corresponde a la transformada de Fourier de la secuencia discreta $R_a[n]$ con argumento $\Omega = \omega D/N$. En particular, si

se denota con $S_a(\Omega)$ a la *dep* de $a[n]$, entonces $S_a(\Omega) \equiv TF\{R_a[n]\}$ y

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} R_a[k] \cdot e^{-j\omega kD/N} = S_a(\Omega)|_{\Omega=\omega D/N}. \quad (2.45)$$

Es inmediato comprobar consultando las tablas de transformadas que

$$S_a(\Omega)|_{\Omega=\omega D/N} = \frac{A^2}{N} \left[1 - \frac{\text{sen}^2(\pi f D)}{N^2 \text{sen}^2(\pi f D/N)} \right] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{ND} \delta(f - kN/D), \quad (2.46)$$

donde $\omega = 2\pi f$. Respecto a la transformada de Fourier del pulso

$$|P(f)|^2 = \frac{D^2}{N^2} \text{sinc}^2(fD/N). \quad (2.47)$$

Sustituyendo (2.45), (2.46) y (2.47) en (2.44), se tiene

$$S_x(f) = \frac{A^2 D}{N^2} \text{sinc}^2(fD/N) \left(1 - \frac{\text{sen}^2(\pi f D)}{N^2 \text{sen}^2(\pi f D/N)} \right) + \frac{A^2}{N^2} \delta(f)$$

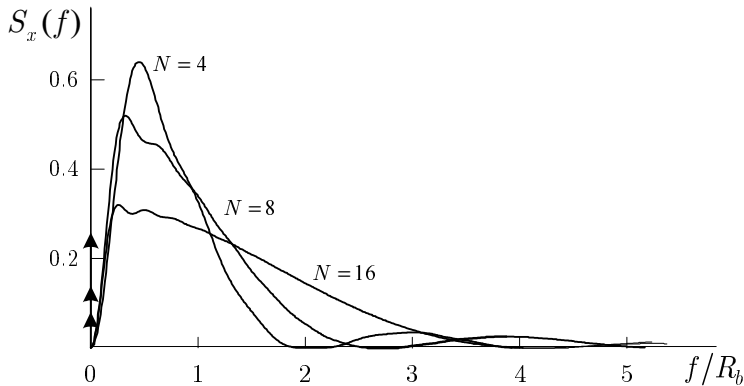


Figura 2.23 Densidad espectral de potencia de una señal PPM para diferentes valores de N en el ejercicio 2.23.

En la figura 2.23 se representa la *dep* de una señal PPM de potencia unitaria para los casos de $N = 4, 8$ y 16 , donde el eje de frecuencias está escalado por el régimen binario $R_b = \log_2(N)/D$.

Ejercicio 2.24.

Sea $x(t)$ una señal digital binaria que emplea dos pulsos diferentes $p_1(t)$ y $p_2(t)$ para representar los dos dígitos binarios como la presentada en el ejercicio 2.22. Considerar el caso de que los dos pulsos sean:

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \cos(2\pi f_1 t) \cdot [u(t) - u(t - D)] \\ p_2(t) &= \cos(2\pi f_2 t) \cdot [u(t) - u(t - D)], \end{aligned}$$

donde D es el periodo de bit, $f_1 = k_1/D$ y $f_2 = k_2/D$, siendo k_1 y k_2 dos valores enteros positivos y distintos.

La señal resultante corresponde a una modulación FSK (Frequency Shift Keying) binaria con continuidad de fase. En la figura 2.24 se muestra un tramo de una realización de esta señal.

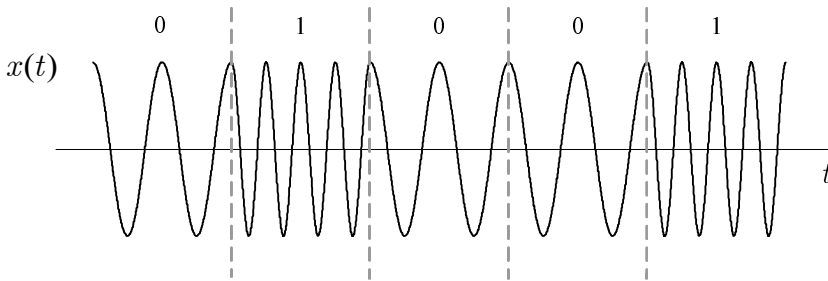


Figura 2.24 Tramo de realización de una señal FSK binaria en el ejercicio 2.24.

- Aplicando lo resultado del ejercicio 2.22, calcular la *dep* de $x(t)$.
- Calcular y representar gráficamente la *dep* de la señal FSK obtenida en el apartado anterior para el caso de $k_1 = 10$, $k_2 = 11$ y para el caso de $k_1 = 10$, $k_2 = 20$.

Solución

- a) La expresión obtenida en el ejercicio 2.22 para la *dep* de una señal digital binaria que emplea dos pulsos diferentes es

$$\begin{aligned}
 S_x(f) &= \frac{1}{4D} |P_1(f) - P_2(f)|^2 \\
 &\quad + \frac{1}{4D^2} |P_1(k/D) + P_2(k/D)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k/D),
 \end{aligned}
 \tag{2.48}$$

Basta, por tanto, sustituir en ella la transformada de Fourier de los dos pulsos FSK cuya expresión es

$$\begin{aligned}
 P_1(f) &= \frac{D}{2} \operatorname{sinc}((f - f_1)D) \cdot e^{-j\pi(f-f_1)D} \\
 &\quad + \frac{D}{2} \operatorname{sinc}((f + f_1)D) \cdot e^{-j\pi(f+f_1)D} \\
 P_2(f) &= \frac{D}{2} \operatorname{sinc}((f - f_2)D) \cdot e^{-j\pi(f-f_2)D} \\
 &\quad + \frac{D}{2} \operatorname{sinc}((f + f_2)D) \cdot e^{-j\pi(f+f_2)D}.
 \end{aligned}$$

Desafortunadamente, una vez realizada la sustitución en (2.48), el sumando $\frac{1}{4D} |P_1(f) - P_2(f)|^2$ da lugar a una expresión elaborada que no admite simplificación. Sin embargo, el segundo término de (2.48) sí se puede simplificar notablemente. Sabiendo que $f_1 = k_1/D$ y $f_2 = k_2/D$, se puede escribir

$$P_1(k/D) = \frac{1}{2}D \operatorname{sinc}(k-k_1) \cdot e^{-j\pi(k-k_1)} + \frac{1}{2}D \operatorname{sinc}(k+k_1) \cdot e^{-j\pi(k+k_1)}.
 \tag{2.49}$$

Esta expresión (2.49) se anula para todos los valores de k excepto para $k = k_1$ y $k = -k_1$, en cuyo caso toma el valor $D/2$. Lo mismo ocurre con $P_2(k/D)$, con lo cual $S_x(f)$ queda

$$\begin{aligned}
 S_x(f) &= \frac{1}{4D} |P_1(f) - P_2(f)|^2 + \frac{1}{16} \delta(f - k_1/D) \\
 &\quad + \frac{1}{16} \delta(f - k_2/D) + \frac{1}{16} \delta(f + k_1/D) + \frac{1}{16} \delta(f + k_2/D)
 \end{aligned}$$

- b) En las figuras 2.25 y 2.26 se representa $S_x(f)$ para la parte positiva del espectro para los dos casos indicados. Observar que en los dos casos hay una delta en cada una de las frecuencias f_1 y f_2 . Esto ocurrirá en una señal FSK siempre que k_1 y k_2 sean enteros.

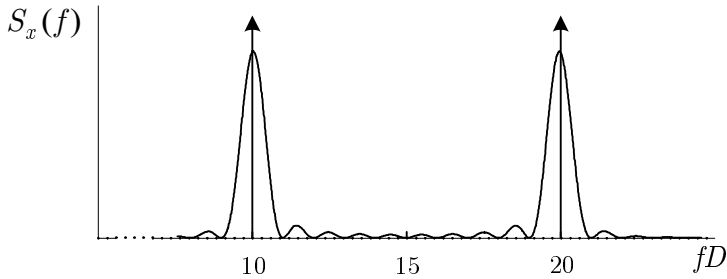


Figura 2.25 Dep de señal FSK para $f_1 = 10/D$, $f_2 = 20/D$ en el ejercicio 2.24.

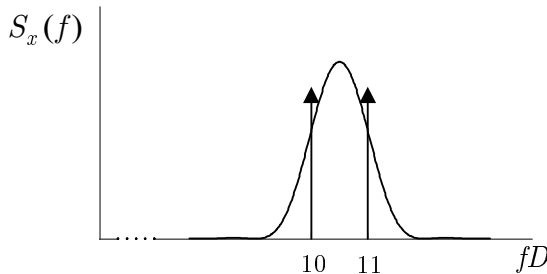


Figura 2.26 Dep de señal FSK para $f_1 = 10/D$, $f_2 = 11/D$ en el ejercicio 2.24.

Observar asimismo, que cuando ambas frecuencias están suficientemente separadas, se pueden distinguir dos perfiles de tipo *sinc* correspondientes a cada uno de los pulsos individuales, mientras que si ambas frecuencias están próximas, ambos perfiles se mezclan resultando un solo lóbulo centrado en la frecuencia promedio de f_1 y f_2 .

Ejercicio 2.25.

En este ejercicio se plantea el cálculo de la *dep* de una señal de tipo OFDM (Orthogonal Frequency Division Modulation), que es la modulación empleada en numerosos sistemas digitales de alta velocidad como ADSL, DVB, WiMax, PLC, WiFi, etc. Para ello, considerar inicialmente la siguiente señal digital QAM, formada por la suma de dos señales PAM:

$$x_k(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_k[i]p_{ka}(t - iD - \psi) + \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_k[i]p_{kb}(t - iD - \psi),$$

donde k es un parámetro entero, D es el periodo de símbolo, ψ es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[0, D]$ y las secuencias de amplitudes $a_k[i]$ y $b_k[i]$ son independientes entre sí. En cada una de estas secuencias, a su vez, las muestras asociadas a diferentes instantes i son independientes entre sí, de media nula y misma varianza σ^2 . Los pulsos $p_{ka}(t)$ y $p_{kb}(t)$ se definen como

$$p_{ka}(t) = \cos(\omega_0 kt) \cdot [u(t) - u(t - D)]$$

$$p_{kb}(t) = \text{sen}(\omega_0 kt) \cdot [u(t) - u(t - D)],$$

con $\omega_0 = 2\pi/D$.

- Aplicando los resultados del ejercicio 2.19, calcular la *dep* de $x_k(t)$.
- La señal OFDM consiste en la suma de N señales del tipo de $x_k(t)$, independientes entre sí

$$z(t) = \sum_{k=1}^N x_k(t).$$

Demostrar que la *dep* de $z(t)$ es la suma de las *dep* de cada una de las señales $x_k(t)$ por separado.

- Obtener una expresión para la *dep* de $z(t)$ y hacer una representación gráfica para el caso de $N = 5$.

Solución

- a) La señal $x_k(t)$ se puede expresar como la suma de dos señales PAM. Llamando

$$x_{ka}(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_k[i]p_{ka}(t - iD - \psi)$$

$$x_{kb}(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_k[i]p_{kb}(t - iD - \psi),$$

se tiene $x_k(t) = x_{ka}(t) + x_{kb}(t)$. La autocorrelación de la suma de dos señales viene dada por

$$R_{x_k}(\tau) = R_{x_{ka}}(\tau) + R_{x_{kb}}(\tau) + R_{x_{ka}x_{kb}}(\tau) + R_{x_{kb}x_{ka}}(\tau).$$

Al ser las secuencias $a_k[i]$ y $b_k[i]$ independientes entre sí y de media nula, las correlaciones cruzadas se anulan. Concretamente,

$$R_{x_{ka}x_{kb}}(\tau) = E \left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_k[i]p_{ka}(t + \tau - iD - \psi) \right. \\ \left. \times b_k[j]p_{kb}(t - jD - \psi) \right],$$

y aplicando linealidad del operador esperanza,

$$R_{x_{ka}x_{kb}}(\tau) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} E[a_k[i]b_k[j]] \\ \times E[p_{ka}(t + \tau - iD - \psi)p_{kb}(t - jD - \psi)],$$

donde se ha hecho uso de que ψ es independiente de las amplitudes. A su vez, $a_k[i]$ y $b_k[j]$ son independientes entre sí y de media nula,

$$E[a_k[i]b_k[j]] = E[a_k[i]]E[b_k[j]] = 0,$$

con lo cual, $R_{x_{ka}x_{kb}}(\tau) = R_{x_{kb}x_{ka}}(\tau) = 0$. Por tanto,

$$R_{x_k}(\tau) = R_{x_{ka}}(\tau) + R_{x_{kb}}(\tau)$$

$$S_{x_k}(\tau) = S_{x_{ka}}(\tau) + S_{x_{kb}}(\tau).$$

Para el cálculo de la *dep* de $S_{x_{ka}}(\tau)$ se pueden aplicar los resultados del ejercicio 2.19. Para $S_{x_{ka}}(\tau)$ se puede escribir

$$S_{x_{ka}}(f) = \frac{\sigma^2}{D} |P_{ka}(f)|^2. \quad (2.50)$$

La transformada de Fourier de $p_{x_{ka}}(t)$ es

$$\begin{aligned} P_{x_{ka}}(f) &= \frac{D}{2} \operatorname{sinc}((f - f_0k)D) \cdot e^{-j\pi(f - f_0k)D} \\ &+ \frac{D}{2} \operatorname{sinc}((f + f_0k)D) \cdot e^{-j\pi(f + f_0k)D}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $f_0 = 1/D$, y tras cierta manipulación algebraica, el módulo al cuadrado de la transformada se puede expresar como

$$|P_{x_{ka}}(f)|^2 = \frac{D^2}{4} (\operatorname{sinc}(fD - k) + \operatorname{sinc}(fD + k))^2$$

De forma análoga se puede proceder para $x_{kb}(t)$, obteniéndose el mismo resultado. Finalmente, sustituyendo en (2.50), se tiene

$$\begin{aligned} S_{x_k}(f) &= S_{x_{ka}}(f) + S_{x_{kb}}(f) \\ &= \frac{\sigma^2 D}{2} (\operatorname{sinc}(fD - k) + \operatorname{sinc}(fD + k))^2 \end{aligned}$$

Así,

$$S_{x_k}(f) = \frac{\sigma^2 D}{2} (\operatorname{sinc}(fD - k) + \operatorname{sinc}(fD + k))^2$$

- b) Se trata de N señales de media nula con amplitudes independientes entre sí. Esto va a provocar que sean señales ortogonales, lo que significa que la *dep* de la suma es la suma de las *dep* individuales. En el apartado anterior se ha demostrado este hecho

para el caso de dos señales $x_{ka}(t)$ y $x_{kb}(t)$. Se procede a la demostración para el caso de las N señales propuestas.

La autocorrelación de la suma de señales es la suma de las autocorrelaciones más las correlaciones cruzadas, es decir,

$$\begin{aligned}
 R_z(\tau) &= E[z(t+\tau)z(t)] = E\left[\sum_{k=1}^N \sum_{k'=1}^N x_k(t+\tau)x_{k'}(t)\right] \\
 &= \sum_{k=1}^N \sum_{k'=1}^N E[x_k(t+\tau)x_{k'}(t)] \\
 &= \sum_{k=1}^N R_{x_k}(\tau) + \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{k'=1 \\ k' \neq k}}^N R_{x_k x_{k'}}(\tau). \tag{2.51}
 \end{aligned}$$

Las correlaciones cruzadas son todas nulas para el problema bajo estudio. En efecto, para $k \neq k'$

$$\begin{aligned}
 R_{x_k x_{k'}}(\tau) &= E[x_k(t+\tau)x_{k'}(t)] \\
 &= E\left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_k[i]p_{ka}(t+\tau-iD-\psi) + b_k[i]p_{kb}(t+\tau-iD-\psi)\right. \\
 &\quad \left.\times \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{k'}[j]p_{k'a}(t-jD-\psi) + b_{k'}[j]p_{k'b}(t-jD-\psi)\right] \\
 &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(E[a_k[i]a_{k'}[j]] \right. \\
 &\quad \times E[p_{ka}(t+\tau-iD-\psi)p_{k'a}(t-jD-\psi)] \\
 &\quad + E[a_k[i]b_{k'}[j]] E[p_{ka}(t+\tau-iD-\psi)p_{k'b}(t-jD-\psi)] \\
 &\quad + E[b_k[i]a_{k'}[j]] E[p_{kb}(t+\tau-iD-\psi)p_{k'a}(t-jD-\psi)] \\
 &\quad \left. + E[b_k[i]b_{k'}[j]] E[p_{kb}(t+\tau-iD-\psi)p_{k'b}(t-jD-\psi)] \right), \tag{2.52}
 \end{aligned}$$

donde se ha aplicado la independencia entre las amplitudes y la fase aleatoria.

Finalmente, según se indica en el enunciado, las amplitudes de las distintas señales son independientes entre sí y de media nula con lo que son ortogonales, es decir, $\forall i, j$ se cumple que

$$E [a_k[i]a_{k'}[j]] = E [a_k[i]b_{k'}[j]] = E [b_k[i]a_{k'}[j]] = E [b_k[i]b_{k'}[j]] = 0, \tag{2.53}$$

Sustituyendo (2.53) en (2.52) se tiene $R_{x_k, x_{k'}}(\tau) = 0$ para $k \neq k'$, lo que significa que las señales son ortogonales entre sí.

Con esto, (2.51) se reduce a $R_z(\tau) = \sum_{k=1}^N R_{x_k}(\tau)$ y, por tanto, $S_z(f) = \sum_{k=1}^N S_{x_k}(f)$, como se quería demostrar.

- c) Según el resultado del apartado b) $S_z(f) = \sum_{k=1}^N S_{x_k}(f)$. En el apartado a) se ha calculado la *dep* $S_{x_k}(f)$ de una señal QAM, con lo cual, la expresión para la *dep* de una la señal OFDM propuesta es

$$S_z(f) = \frac{\sigma^2 D}{2} \sum_{k=0}^N (\text{sinc}(fD - k) + \text{sinc}(fD + k))^2$$

En la figura 2.27 se representa la parte de frecuencias positivas de la *dep* de una señal OFDM para $N=5$, junto con las *dep* de cada una de las señales QAM que la componen. La componente correspondiente a $k = 0$ no se ha incluido.

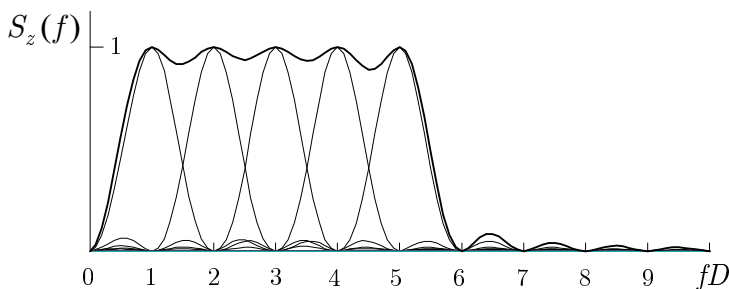


Figura 2.27 *Dep* de señal OFDM para $N = 5$ en el ejercicio 2.25.

Ejercicio 2.26.

En un sistema inalámbrico la señal que llega a un receptor móvil se puede modelar como la suma de N señales provenientes de N caminos distintos, lo que provocará el conocido fenómeno de desvanecimiento o *fading* debido a la posible interferencia destructiva. Cada una de estas señales llega al receptor con un ángulo distinto θ_i que se puede considerar una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y con un desplazamiento de *frecuencia Doppler* $\xi_i = \frac{v}{\lambda_c} \cos(\theta_i)$, donde v es la velocidad del móvil y λ_c es la longitud de onda a la frecuencia central de funcionamiento. La señal recibida se puede expresar como $z(t) = \sum_{i=1}^N x_i(t)$, con

$$x_i(t) = A \cos(2\pi f_c t + 2\pi \xi_i t + \psi_i),$$

siendo f_c la frecuencia central de funcionamiento, ψ_i una fase aleatoria uniforme en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y donde se asume que todas las contribuciones tienen la misma potencia $A^2/2$, siendo P la potencia total de la señal recibida. Las variables ξ_i y ψ_i , $i = 1, \dots, N$ son todas independientes entre sí.

- Calcular la *fdp* de ξ_i .
- Calcular la *dep* de $z(t)$ suponiendo $f_c \gg v/\lambda_c$.

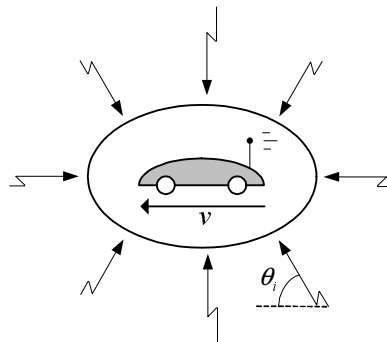


Figura 2.28 Esquema del enlace inalámbrico multicamino del ejercicio 2.26.

Solución

- a) Se trata de una sencilla transformación de una variable uniforme mediante la función coseno

$$\xi_i = \frac{v}{\lambda_c} \cos(\theta_i).$$

Dada la simetría par tanto de la función de transformación como de la f_{dp} de θ_i , basta con realizar los cálculos para $0 \leq \theta_i \leq \pi$ y duplicar el resultado. Aplicando el método directo de transformación de variables aleatorias, según se indica en (1.43), se tiene

$$f_{\xi_i}(\xi_i) = f_{\theta_i}(\theta_i) \cdot \left| \frac{d\theta_i}{d\xi_i} \right| = f_{\theta_i}(\cos^{-1}(\frac{\lambda_c}{v} \xi_i)) \cdot \frac{\frac{\lambda_c}{v}}{\sqrt{1 - (\frac{\lambda_c}{v} \xi_i)^2}}.$$

Sustituyendo $f_{\theta_i}(\cdot)$ por su expresión e incluyendo el factor 2 mencionado se llega a

$$f_{\xi_i}(\xi_i) = \begin{cases} \frac{\frac{\lambda_c}{\pi v}}{\sqrt{1 - (\frac{\lambda_c}{v} \xi_i)^2}} & |\xi_i| \leq \frac{v}{\lambda_c} \\ 0 & |\xi_i| > \frac{v}{\lambda_c} \end{cases}$$

cuya representación gráfica se muestra en la figura 2.29.

- b) Se demostrará primero que las distintas contribuciones son independientes entre sí y de media nula, lo que significa que son ortogonales, es decir que $R_{x_i x_j}(\tau) = 0$ para $i \neq j$.

La independencia de las distintas señales $x_1(t), \dots, x_N(t)$ es fácil de verificar, puesto que $x_i(t)$ depende de las variables aleatorias ξ_i y ψ_i , mientras que $x_j(t)$ depende de las variables aleatorias ξ_j y ψ_j . Dado que estas variables son todas independientes entre sí, así lo serán las señales.

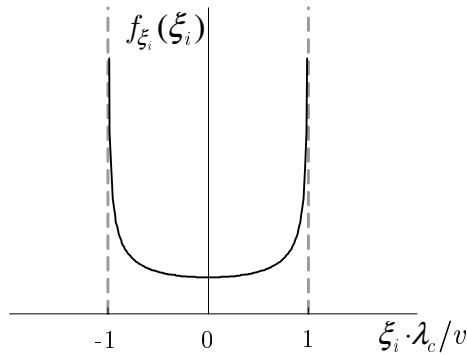


Figura 2.29 Función densidad de probabilidad de la desviación de frecuencia Doppler del ejercicio 2.26.

Siendo las correlaciones cruzadas $R_{x_i x_j}(\tau)$ nulas, la autocorrelación de la suma es $R_z(\tau) = \sum_{i=1}^N R_{x_i}(\tau)$. Dado que todas las contribuciones son señales estadísticamente idénticas, todas tendrán la misma autocorrelación y, en consecuencia, $R_z(\tau) = N R_{x_i}(\tau)$. De aquí se deriva que $S_z(f) = N S_{x_i}(f)$.

Por último, $S_{x_i}(f)$ se puede determinar aplicando directamente el resultado del ejercicio 2.4, pues $x_i(t)$ es una senoide con desviación aleatoria de frecuencia. Así,

$$S_z(f) = N \left[\frac{A^2}{4} f_{\xi_i}(f - f_c) + \frac{A^2}{4} f_{\xi_i}(f + f_c) \right]. \quad (2.54)$$

Teniendo en cuenta que la potencia total P es N veces la potencia de cada contribución $A^2/2$, según se indica en el enunciado, y aplicando los resultados del apartado a), $S_z(f)$ se puede expresar finalmente como

$$S_z(f) = \frac{\frac{P \lambda_c}{2\pi v}}{\sqrt{1 - \left[\frac{\lambda_c}{v} (f - f_c) \right]^2}}, \quad f_c - \frac{v}{\lambda_c} \leq |f| \leq f_c + \frac{v}{\lambda_c}$$

donde se ha tenido en cuenta que $f_c \gg v/\lambda_c$, lo cual garantiza

que no hay solapamiento entre las dos contribuciones espectrales de (2.54). En la figura 2.30 se representa gráficamente $S_z(f)$.

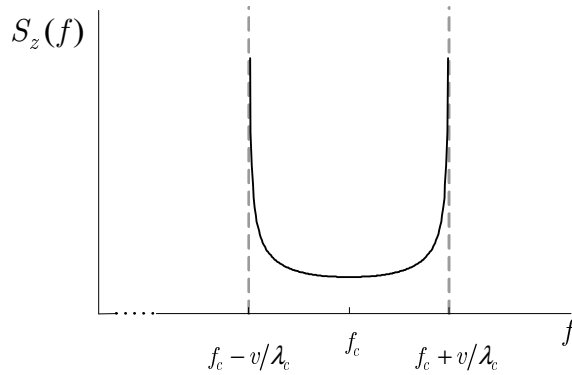


Figura 2.30 *Dep* de la señal recibida en el sistema radio del ejercicio 2.26.

La *dep* obtenida corresponde a lo que se conoce en el contexto de comunicaciones inalámbricas como *espectro Doppler*. El modelo del sistema inalámbrico considerado en este ejercicio se conoce como *modelo de Jakes*.

Capítulo 3

Procesado de señales aleatorias

3.1. Señales aleatorias y sistemas LTI: Análisis

Sea la señal discreta, aleatoria y estacionaria $x[n]$ la entrada de un sistema lineal invariante en el tiempo (LTI) causal cuya respuesta al impulso es $h[n]$, según se indica en la figura T3.1.a. La señal de salida $y[n]$ es también aleatoria y se puede expresar como la suma de convolución

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad (3.1)$$

Cada variable aleatoria de la señal de salida es una combinación lineal de variables aleatorias de la señal de entrada, donde las constantes de la combinación son los valores de la respuesta al impulso del sistema. Las mismas consideraciones se pueden aplicar para un sistema LTI de tiempo continuo, como el indicado en la figura T3.1.b. En este caso, la señal a la salida viene dada por la expresión

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=0}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau) \quad (3.2)$$

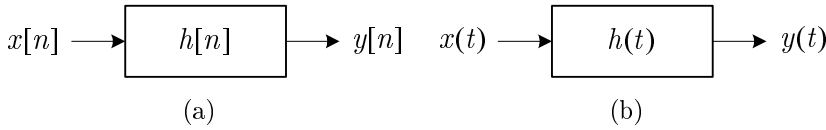


Figura T3.1 (a) Sistema LTI de tiempo discreto con entrada $x[n]$, salida $y[n]$ y respuesta al impulso $h[n]$. (b) Sistema LTI de tiempo continuo con entrada $x(t)$, salida $y(t)$ y respuesta al impulso $h(t)$.

3.1.1. Caracterización completa de la señal a la salida

La determinación de la *fdp* conjunta de las variables de la señal de salida $y[n]$ requiere conocer la *fdp* conjunta de las variables de la señal de entrada y aplicar alguno de los métodos de transformación de variable aleatoria descritos en el tema 1. En la práctica, tanto conocer la *fdp* conjunta de las variables de la señal de entrada como aplicar la transformación es una tarea muy complicada.

Existe una excepción, que es el caso de que la señal de entrada sea gaussiana, ya que la salida será entonces también gaussiana, pues la transformación lineal de N variables conjuntamente gaussianas en otras N variables da como resultado variables conjuntamente gaussianas.

Las mismas consideraciones se aplican para señales de tiempo continuo.

3.1.2. Caracterización parcial de la señal a la salida

La media de la señal $y[n]$ se puede calcular como

$$\bar{y} = \bar{x} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} h[k] = \bar{x} \cdot H(\Omega = 0), \quad (3.3)$$

donde $H(\Omega)$ es la respuesta en frecuencia del sistema LTI.

La autocorrelación de la señal $y[n]$ viene dada por

$$R_y[n] = R_x[n] * h[n] * h[-n]. \quad (3.4)$$

La densidad espectral de potencia de $y[n]$ es

$$S_y(\Omega) = S_x(\Omega) \cdot |H(\Omega)|^2. \quad (3.5)$$

La correlación cruzada de entrada-salida es

$$R_{xy}[n] = R_x[n] * h[-n], \quad R_{yx}[n] = R_x[n] * h[n]. \quad (3.6)$$

Estas mismas expresiones son trasladables al caso de señales aleatorias continuas:

$$\bar{y} = \bar{x} \cdot \int_{\tau=0}^{\infty} h(\tau) = \bar{x} \cdot H(f=0), \quad (3.7)$$

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau), \quad (3.8)$$

$$S_y(f) = S_x(f) \cdot |H(f)|^2, \quad (3.9)$$

$$R_{xy}(\tau) = R_x(\tau) * h(-\tau), \quad (3.10)$$

$$R_{yx}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau). \quad (3.11)$$

3.2. Señales aleatorias discretas y sistemas LTI: Diseño. Filtros de Wiener

Suponer que se desea estimar los valores de una señal aleatoria, que se va a denominar señal *deseada* $d[n]$, a partir de la observación de los valores de otra señal aleatoria $x[n]$, que se llamará señal *observada*, mediante un sistema LTI aplicado a la señal observada. A la estimación se la denotará como $\hat{d}[n]$. Todas las señales son de media nula. El criterio para diseñar el sistema consiste en minimizar el error cuadrático medio cometido en la estimación (criterio MSE).

En la figura T3.2 se muestra un esquema del procedimiento indicado, donde $y[n] = \hat{d}[n]$ es la salida del filtro y $\varepsilon[n]$ es la señal de error en la estimación, $\varepsilon[n] = d[n] - \hat{d}[n]$.

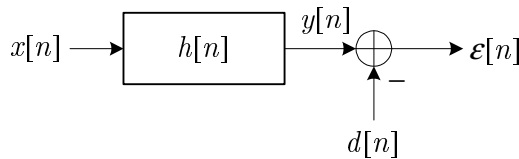


Figura T3.2: Configuración del sistema de filtrado óptimo.

Se trata, en último término, de un problema de estimación de variable aleatoria, que ya se abordó en el capítulo 1. El criterio MSE adopta

en este contexto la forma

$$\min_{h[n]} \{E[(\varepsilon^2[n])]\} \Rightarrow \min_{h[n]} \{E[(d[n] - \hat{d}[n])^2]\}. \quad (3.12)$$

Para el caso sencillo de filtro causal de respuesta al impulso finita (FIR) de orden P , el sistema de ecuaciones que permite obtener los valores de los $P + 1$ coeficientes de la respuesta al impulso del filtro se obtiene a partir de (3.12)

$$\sum_{k=0}^P h[k]R_x[k - m] = R_{dx}[m], \quad m = 0, \dots, P. \quad (3.13)$$

Este es el sistema de ecuaciones de *Wiener* y al filtro resultante se le denomina filtro de *Wiener* o filtro óptimo MSE. El MSE mínimo (MMSE) obtenido viene dado por

$$\text{MMSE} = E[\varepsilon^2[n]] = R_d[0] - \sum_{k=0}^P h_o[k]R_{dx}[k], \quad (3.14)$$

siendo $h_o[n]$ la solución de (3.13).

El aspecto de la matriz del sistema de ecuaciones de *Wiener* para $P = 3$ es, según se deriva de (3.13),

$$\begin{bmatrix} R_x[0] & R_x[1] & R_x[2] & R_x[3] \\ R_x[1] & R_x[0] & R_x[1] & R_x[2] \\ R_x[2] & R_x[1] & R_x[0] & R_x[1] \\ R_x[3] & R_x[2] & R_x[1] & R_x[0] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ h[2] \\ h[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{dx}[0] \\ R_{dx}[1] \\ R_{dx}[2] \\ R_{dx}[3] \end{bmatrix},$$

donde se ha aplicado la propiedad $R_x[n] = R_x[-n]$. La matriz es simétrica y además todos los elementos dentro de la diagonal y cada subdiagonal tienen el mismo valor. A este tipo de matriz se le llama Toeplitz.

En un problema de estimación óptima se cumple el *principio de ortogonalidad*, que establece que el error es ortogonal a cada una de las observaciones, es decir

$$E[\varepsilon[n]x[n - m]] = 0, \quad m = 0, \dots, P. \quad (3.15)$$

Tabla T3.1: Tipos de problema que se resuelven con filtrado MSE.

Nombre	Señal observada	Señal deseada
Filtrado clásico	$s[n] + \eta[n]$	$s[n]$
Igualación	$s[n] * g[n] + \eta[n]$	$s[n]$
Predicción	$s[n]$	$s[n + m]$
Alisamiento	$s[n]$	$s[n - m]$

El diseño de filtros MSE permite resolver una gran variedad de problemas de procesado estadístico de señales aleatorias según sean la señal observada y la señal deseada. En la tabla T3.1 se indican algunos de los más representativos. En esta tabla, $s[n]$ es una señal aleatoria, $\eta[n]$ es una señal de ruido, $g[n]$ es la respuesta al impulso de un sistema LTI y m es una constante entera y positiva.

Ejercicios

Ejercicio 3.1.

Calcular la autocorrelación de la señal discreta aleatoria $s[n]$ que se obtiene a partir de la siguiente fórmula recursiva:

$$s[n] = \rho s[n-1] + w[n],$$

donde $w[n]$ es una señal blanca de potencia σ^2 y $|\rho| < 1$, siendo ρ un número real.

Solución

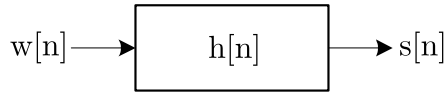


Figura 3.1 Sistema que modela la señal $s[n]$ del ejercicio 3.1.

La forma más sencilla de abordar el problema es considerar la señal $s[n]$ como la salida de un sistema LTI (ver figura 3.1) cuya entrada es $w[n]$. Para obtener la respuesta al impulso $h[n]$ de dicho sistema se puede aplicar la transformada Z a la fórmula recursiva del enunciado

$$S(z) = \rho S(z)z^{-1} + W(z),$$

de donde se puede extraer la función de transferencia del sistema

$$H(z) = \frac{S(z)}{W(z)} = \frac{1}{1 - \rho z^{-1}},$$

cuya transformada Z inversa corresponde a la respuesta al impulso $h[n] = \rho^n u[n]$.

La relación entre la autocorrelación de una señal a la salida de un sistema LTI y la autocorrelación a la entrada viene dada por la expresión

(3.4), $R_s[n] = h[n] * h[-n] * R_w[n]$. Según el enunciado, la señal $w[n]$ es blanca de potencia σ^2 , lo que significa que $R_w[n] = \sigma^2 \delta[n]$. Calculando la convolución $R_s[n] = \sigma^2 \delta[n] * \rho^n u[n] * \rho^{-n} u[-n]$ se llega a

$$R_s[n] = \frac{\sigma^2}{1 - \rho^2} \rho^{|n|}$$

Ejercicio 3.2.

La señal aleatoria $x[n]$ está formada por variables aleatorias incorreladas y su *dep* a frecuencia cero es $S_X(0) = 1/a^2$. La señal $y[n]$ es la salida de un sistema lineal con entrada $x[n]$. La respuesta impulsiva de dicho sistema es $h[n] = a\delta[n] + b\delta[n - 1]$. Calcular la autocorrelación de $y[n]$.

Solución

Al ser $y[n]$ la salida de un sistema LTI, su autocorrelación viene dada por (3.4), $R_y[n] = R_x[n] * h[n] * h[-n]$. A partir de la información del enunciado se puede deducir $R_x[n]$ teniendo en cuenta las siguientes consideraciones:

- El hecho de que $S_X(0) = 1/a^2$ significa que $S_X(\Omega)$ no tiene una delta en el origen (pues en ese caso $S_X(0)$ tomaría un valor infinito). Esto significa que la potencia de continua de la señal $x[n]$ es nula y, según (2.28), también su media es nula $\bar{x} = 0$.
- Las diferentes muestras de $x[n]$ son incorreladas, lo que implica que $R_x[n] = \bar{x}^2$ para $n = 0$ y $R_x[n] = \bar{x}^2$ para $n \neq 0$. Al ser $\bar{x} = 0$, queda $R_x[n] = \bar{x}^2 \delta[n]$.
- Por último, se sabe que

$$S_X(\Omega) = TF\{R_x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_x[n] e^{-j\Omega n}$$

y, por consiguiente, $S_X(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_x[n] = 1/a^2 = \bar{x}^2$. En consecuencia, $R_x[n] = (1/a^2)\delta[n]$.

Sustituyendo en (3.4) y calculando las correspondientes convoluciones se obtiene

$$R_y[n] = \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2} \right) \delta[n] + \frac{b}{a} \delta[n - 1] + \frac{b}{a} \delta[n + 1]$$

Ejercicio 3.3.

La señal aleatoria estacionaria $x[n]$ con media \bar{x} y autocorrelación $R_x[n]$ es expandida por un factor N como se indica en la figura 3.2, resultando la señal $y[n]$.

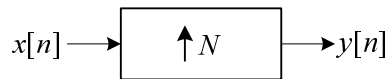


Figura 3.2 Sistema expansor propuesto en el apartado a) del ejercicio 3.3.

- a) Demostrar que $y[n]$ no es estacionaria.
- b) Considerar a continuación el sistema formado por un expansor de factor N seguido de un retardo discreto aleatorio, como se muestra en la figura 3.3, siendo D una variable aleatoria que puede tomar valores enteros entre 0 y $N - 1$ de forma equiprobable. Demostrar que la señal resultante $z[n]$ es estacionaria, determinar su media y su función de autocorrelación.

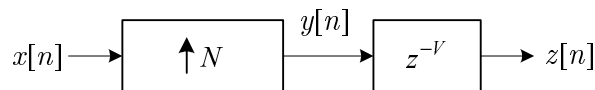


Figura 3.3 Sistema expansor seguido de retardo aleatorio propuesto en el apartado b) del ejercicio 3.3.

Solución

- a) En la figura 3.4 se muestran tres realizaciones de la señal $x[n]$ y de la correspondiente señal $y[n]$ a la salida del expansor para el caso particular de $N = 3$. La simple inspección de las realizaciones de $y[n]$ es suficiente para concluir que la señal no es estacionaria en la media, puesto que las variables aleatorias asociadas a índices no múltiplos de 3 (de N en general) siempre toman un valor nulo, por lo que la media de dichas variables es nula. Esta operación se indica con la primera línea vertical de la figura 3.4.

Por otra parte, las variables asociadas a índices múltiplos de 3 (de N en general) tendrán una media igual a la media de conjunto de la señal $x[n]$, como se indica con la segunda línea vertical de la figura 3.4.

En definitiva, la media de las diferentes variables aleatorias que componen $y[n]$ no es constante (salvo en el caso particular de que la media de $x[n]$ fuese nula), por lo que la señal $y[n]$ no es estacionaria.

- b) En el segundo sistema las realizaciones de $y[n]$ se retrasan un número D aleatorio de muestras. Varias realizaciones de la señal $x[n]$ y las correspondientes de $z[n]$ para $N = 3$ y diferentes valores de D se muestran en la figura 3.5. En este caso, la situación es claramente distinta. En concreto, atendiendo a los valores que toman cada una de las variables aleatorias (mirar *en vertical*) se puede apreciar que en 2 de cada 3 realizaciones tomará valor cero mientras que en 1 de cada 3 tomará el valor correspondiente a la variable de $x[n]$ de la que procede. Este razonamiento es válido sea cual sea el índice elegido. Aplicando la ley de la probabilidad total se tiene que $E[z[n]] = \bar{x}/3$ y, en el caso general,

$$\bar{z} = \bar{x}/N$$

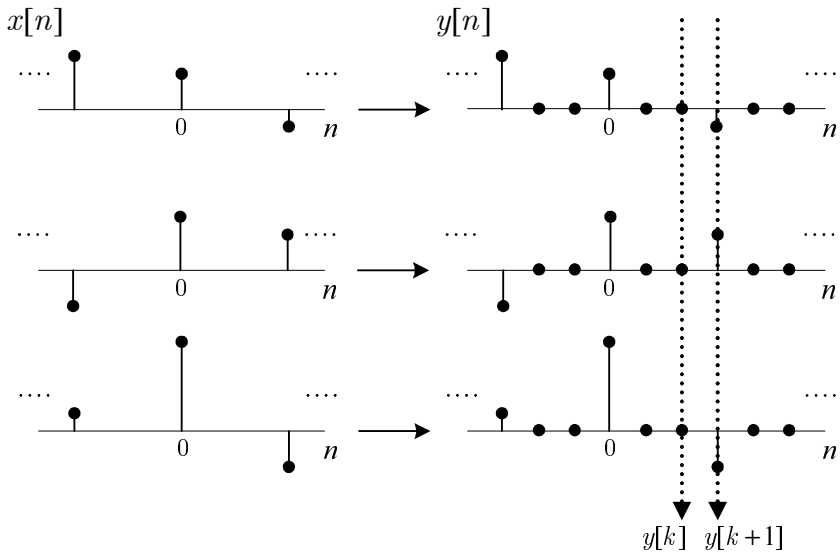


Figura 3.4 Realizaciones de las señales $x[n]$ e $y[n]$ en el ejercicio 3.3.

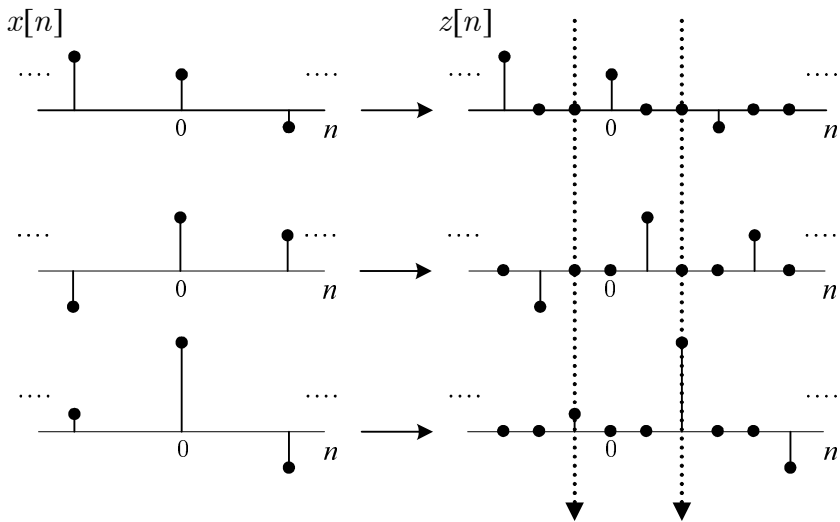


Figura 3.5 Realizaciones de las señales $x[n]$ y $z[n]$ en el ejercicio 3.3.

Respecto a la autocorrelación se procede para diferentes valores de n por separado.

- $n = 0$. $R_z[0] = E[z^2[k]]$. Razonando igual que con la media se tiene fácilmente que $R_z[0] = E[x^2[k]]/N = R_x[0]/N$.
- $n \neq$ múltiplo de N . Si se toman dos variables separadas un número de posiciones que no es múltiplo de N , entonces el producto de ellas siempre será nulo, puesto que siempre será nula al menos una de ellas. La figura 3.5 puede ayudar a entender esta afirmación. Esto significa que $R_z[n] = E[z[k]z[k+n]] = 0$.
- $n =$ múltiplo de N , es decir, $n/N = l$, siendo l un número entero cualquiera distinto de 0. La autocorrelación se puede expresar entonces como $R_z[n] = E[z[k]z[k+lN]]$. Se trata de calcular el promedio del producto de dos variables aleatorias que estén separadas un número entero de veces N . A modo de ejemplo, sea $l = 1$ y $N = 3$ (lo que significa $n = 3$). En la figura 3.5, se han marcado los valores que toman dos variables separadas $n = 3$ con líneas verticales discontinuas. Como se puede apreciar, en 2 de cada 3 realizaciones el producto de los valores será igual a cero mientras que en 1 de cada 3 el producto corresponde al de dos variables de la señal original $x[n]$ que inicialmente (antes de la expansión) estaban separadas 1 muestra. Esto significa que $R_z[3] = R_x[1]/3$. Generalizando para cualquier N , resulta $R_z[N] = R_x[1]/N$. Si en lugar de $l = 1$ se toma $l = 2$ se tendría, siguiendo el mismo razonamiento, $R_z[2N] = R_x[2]/N$ y, en general, $R_z[lN] = R_x[l]/N$.

Resumiendo estos resultados se tiene finalmente

$$R_z[n] = \begin{cases} \frac{1}{N}R_x[n/N] & n/N \text{ entero} \\ 0 & \text{resto de valores.} \end{cases}$$

La señal es, por tanto, estacionaria. Observar que $R_z[n]$ corresponde a la expansión de $R_x[n]$ por un factor N .

Por supuesto, este problema se puede abordar de forma exclusivamente analítica sin recurrir a la ayuda que supone la representación de distintas realizaciones y razonamientos basados en ellas. A continuación se presenta el cálculo de la autocorrelación con esta forma alternativa de resolución.

Sabiendo que

$$y[n] = \begin{cases} x[n/N] & n/N \text{ entero} \\ 0 & \text{resto de valores,} \end{cases}$$

y que

$$z[n] = y[n - D],$$

la relación entre $z[n]$ y $x[n]$ se puede expresar como

$$z[n] = \begin{cases} x[\frac{n-D}{N}] & \frac{n-D}{N} \text{ entero} \\ 0 & \text{resto de valores,} \end{cases}$$

donde D es una variable aleatoria. La autocorrelación viene dada por

$$R_z[n] = \begin{cases} E[x[\frac{k+n-D}{N}]x[\frac{k-D}{N}]] & \text{si } \frac{k+n-D}{N} \text{ y } \frac{k-D}{N} \text{ son enteros} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Definiendo los sucesos

$$A \equiv \frac{k+n-D}{N} \text{ es entero,} \quad B \equiv \frac{k-D}{N} \text{ es entero.}$$

la expresión de $R_z[n]$ se puede reescribir como

$$R_z[n] = \begin{cases} R_x[n/N] & \text{si } A \cap B \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Aplicando a continuación la ley de la probabilidad total se tiene

$$R_z[n] = R_x[n/N] \cdot \Pr(A \cap B), \tag{3.16}$$

Observar que $\Pr(A|B) = 1$ si y sólo si n/N es entero (caso contrario vale 0) y que $\Pr(B) = 1/N$ puesto que dado un k

cualquiera, sólo uno de los posibles valores de $k-D$ será múltiplo de N , con lo cual

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A|B) \Pr(B) = \begin{cases} 1/N & n/N \text{ entero} \\ 0 & \text{resto de valores} \end{cases} \quad (3.17)$$

Sustituyendo (3.17) en (3.16), resulta

$$R_z[n] = \begin{cases} \frac{1}{N} R_x[n/N] & n/N \text{ entero} \\ 0 & \text{resto de valores,} \end{cases}$$

que es el mismo resultado obtenido anteriormente.

Ejercicio 3.4.

Sea la señal aleatoria estacionaria $x[n]$, cuyas variables aleatorias son uniformes en el intervalo $[-A, A]$ e independientes entre sí. La señal $x[n]$ es la entrada de un sistema cuya relación entrada salida se muestra en la figura 3.6, siendo $y[n]$ la señal a la salida. Determinar:

- La autocorrelación de las señales $x[n]$, $y[n]$ y $z[n]$.
- La correlación cruzada de $x[n]$ con $y[n]$. Indicar si estas señales son o no independientes, incorreladas, y ortogonales entre sí.
- La autocorrelación de $w[n]$.
- La función densidad de probabilidad de las variables de $w[n]$.
- La función densidad de probabilidad de las variables de $w[n]$ en el caso de que no exista la unidad retardo entre $x[n]$ y $z[n]$.

Solución

- Para calcular $R_x[n] = E[x[k+n]x[k]]$ es necesario distinguir dos casos:

- $n = 0$. $R_x[0] = E[x^2[k]]$. Definiendo $X \equiv x[k]$ se tiene

$$R_x[0] = E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_{-A}^A x^2 \cdot \frac{1}{2A} dx = \frac{A^2}{3}.$$

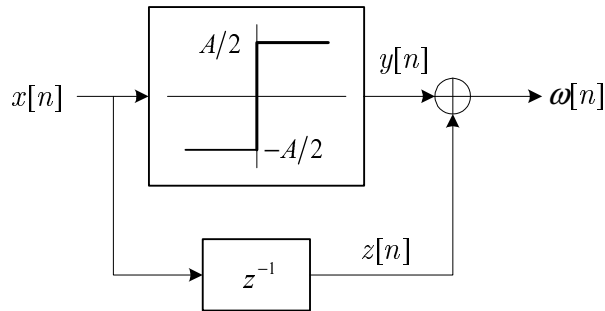


Figura 3.6 Diagrama de bloques del sistema propuesto en el ejercicio 3.4.

- $n \neq 0$. En este caso $x[k + n]$ y $x[k]$ son independientes y, por tanto,

$$R_x[n] = E[x[k + n]x[k]] = E[x[k + n]]E[x[k]] = 0,$$

ya que $E[x[k + n]] = E[x[k]] = 0$, como se puede comprobar fácilmente.

Por tanto,

$$R_x[n] = \frac{A^2}{3}\delta[n]$$

Respecto al cálculo de $R_y[n]$, conviene tener en cuenta que se trata del cálculo de un promedio estadístico que involucra a las variables de la señal $y[n]$, por lo que basta con expresar dicho promedio en función de promedios estadísticos de $x[n]$. No es necesario en ningún caso calcular la *fdp* de las variables de $y[n]$. Es decir,

$$R_y[n] = E[y[k + n]y[k]] = E[g(x[k + n])g(x[k])],$$

donde $g(\cdot)$ es la función que relaciona $y[n]$ con $x[n]$.

De nuevo, es necesario distinguir dos casos:

- $n = 0$. $R_y[0] = E[g^2(x[k])]$. Definiendo $X \equiv x[k]$ y aplicando (1.29) se tiene

$$\begin{aligned} R_y[0] &= E[g^2(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x) f_X(x) dx \\ &= \int_{-A}^A \frac{A^2}{4} \cdot \frac{1}{2A} dx = \frac{A^2}{4}. \end{aligned}$$

- $n \neq 0$. En este caso $x[k+n]$ y $x[k]$ son independientes, lo que implica que $g(x[k+n])$ y $g(x[k])$ también lo son y, por tanto,

$$\begin{aligned} R_y[n] &= E[y[k+n]y[k]] = E[g(x[k+n])g(x[k])] \\ &= E[g(x[k+n])] \cdot E[g(x[k])] = 0, \end{aligned}$$

ya que $E[g(x)] = 0$, como es inmediato comprobar.

Así,

$$R_y[n] = \frac{A^2}{4} \delta[n]$$

Procediendo de forma análoga con $z[n]$,

$$R_z[n] = E[z[k+n]z[k]] = E[x[k+n-1]x[k-1]] = R_x[n] = \frac{A^2}{3} \delta[n],$$

según se ha obtenido más arriba. Por tanto,

$$R_z[n] = \frac{A^2}{3} \delta[n]$$

b) $R_{xy}[n] = E[x[k+n]y[k]] = E[x[k+n]g(x[k])]$. Se distinguen dos casos:

- $n = 0$. $R_{xy}[0] = E[x[k]g(x[k])]$. Definiendo $X \equiv x[k]$, se puede escribir

$$R_{xy}[0] = E[Xg(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} xg(x)f_X(x)dx =$$

$$\int_{-A}^0 x \cdot \frac{-A}{2} \cdot \frac{1}{2A} dx + \int_0^A x \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{1}{2A} dx = \frac{A^2}{4}.$$

- $n \neq 0$. En este caso $x[k+n]$ y $g(x[k])$ son independientes y, por tanto, $R_{xy}[n] = E[x[k+n]] \cdot E[g(x[k])]$ = 0 ya que $E[x[k+n]] = 0$, y así

$$R_{xy}[n] = \frac{A^2}{4} \delta[n]$$

Respecto a la relación estadística entre $x[n]$ e $y[n]$ se puede decir lo siguiente:

- Dos señales son independientes si todas las variables de una de las señales son independientes de todas las variables de la otra señal. En este caso las señales son dependientes ya que $y[n]$ se obtiene como función de $x[n]$.
- Dos señales son incorreladas si todas las variables de una de las señales son incorreladas con todas las variables de la otra señal. Analíticamente esto significa que

$$E[x[k+n]y[k]] = E[x[k+n]]E[y[k]]$$

o, escrito de forma más compacta, $R_{xy}[n] = \bar{x} \cdot \bar{y}$. En este caso no se cumple, puesto que $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$, siendo $R_{xy}[n] \neq 0$. Las señales son, por tanto, correladas.

- Dos señales son ortogonales si todas las variables de una de las señales son ortogonales a todas las variables de la otra señal, es decir, si se cumple que $E[x[k+n]y[k]] = 0$, o escrito de otra forma, $R_{xy}[n] = 0$. Claramente esto no se cumple para las señales bajo estudio, así que no son ortogonales. En resumen, las señales $x[n]$ e $y[n]$ son

Dependientes, correladas, no ortogonales

c) Como $w[n] = y[n] + z[n]$, se puede escribir

$$R_w[n] = R_y[n] + R_z[n] + R_{zy}[n] + R_{yz}[n].$$

Las autocorrelaciones han sido calculadas anteriormente. Falta por determinar las correlaciones cruzadas $R_{zy}[n]$ y $R_{yz}[n]$.

$$R_{zy}[n] = E[z[k+n]y[k]] = E[x[k+n-1]y[k]] \equiv R_{xy}[n-1].$$

Aplicando los resultados del apartado anterior,

$$\begin{aligned} R_{zy}[n] &= \frac{A^2}{4}\delta[n-1] \\ R_{yz}[n] &= R_{zy}[-n] = \frac{A^2}{4}\delta[n+1]. \end{aligned}$$

Sustituyendo, se llega a

$$R_w[n] = \frac{7A^2}{12}\delta[n] + \frac{A^2}{4}\delta[n-1] + \frac{A^2}{4}\delta[n+1]$$

d) La variable aleatoria $w[n]$ se puede expresar en función de variables aleatorias de $x[n]$, cuya *fdp* es conocida. En concreto,

$$w[n] = y[n] + z[n] = g(x[n]) + x[n-1].$$

Dado que $x[n]$ y $x[n-1]$ son independientes, también lo serán $g(x[n])$ y $x[n-1]$, lo que significa que la *fdp* de la suma de ambas

variables corresponde a la convolución de las f_{dp} individuales, según se indica en (1.84). Definiendo $W \equiv w[n]$, $Y \equiv g(x[n])$ y $X \equiv x[n - 1]$, se puede escribir $W = Y + X$ y, según lo anterior, $f_{\omega}(\omega) = f_Y(y) * f_X(x)$.

Por inspección se obtiene fácilmente $f_Y(y)$, que resulta ser

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}\delta(y - A/2) + \frac{1}{2}\delta(y + A/2),$$

mientras que $f_X(x)$ es conocida del enunciado del problema y siendo su expresión $f_X(x) = \frac{1}{2A}[u(x + A) - u(x - A)]$. Así,

$$f_{\omega}(\omega) = \frac{1}{2}f_X(\omega - A/2) + \frac{1}{2}f_X(\omega + A/2).$$

Sustituyendo se obtiene la expresión definitiva

$$f_{\omega}(\omega) = \frac{1}{4A}[u(\omega + A/2) - u(\omega - 3A/2)] + \frac{1}{4A}[u(\omega + 3A/2) - u(\omega - A/2)].$$

La representación gráfica de $f_{\omega}(\omega)$ se muestra en la figura 3.7

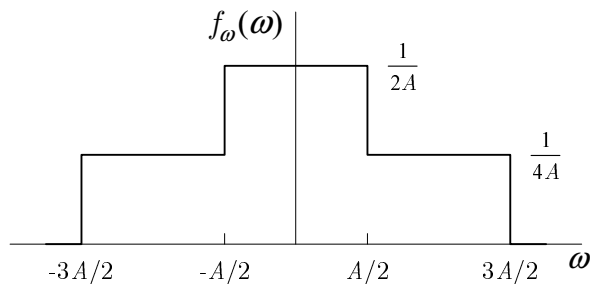


Figura 3.7 Función densidad de probabilidad de las variables de $\omega[n]$ del ejercicio 3.4.

- e) En este caso $\omega[n] = y[n] + z[n] = g(x[n]) + x[n]$. Definiendo $W \equiv w[n]$ y $X \equiv x[n]$ se puede escribir que $W = g(X) + X$. Se trata de un problema de transformación de variable aleatoria que se puede resolver por alguno de los métodos sistemáticos o,

como en este caso sencillo, recurriendo a la ley de la probabilidad total.

$$f_{\omega}(\omega) = f_{\omega|(X<0)}(\omega) \cdot \Pr(X < 0) + f_{\omega|(X \geq 0)}(\omega) \cdot \Pr(X \geq 0). \quad (3.18)$$

Se determinan a continuación las *fdp* condicionales:

- Cuando $X < 0$ resulta $W = (X - A/2)|(X < 0)$. La variable aleatoria $X|(X < 0)$ (" X condicionada a X negativa") es una variable formada por los valores negativos de la variable X , por tanto, será uniforme en el intervalo $[-A, 0]$. Si a esta variable le restamos $A/2$, obtenemos W , lo que significa que W es uniforme en $[-3A/2, -A/2]$.

$$f_{\omega|(X<0)}(\omega) = \frac{1}{A}[u(\omega + 3A/2) - u(\omega + A/2)]. \quad (3.19)$$

- Procediendo de la misma forma se llega a

$$f_{\omega|(X \geq 0)}(\omega) = \frac{1}{A}[u(\omega - 3A/2) - u(\omega - A/2)]. \quad (3.20)$$

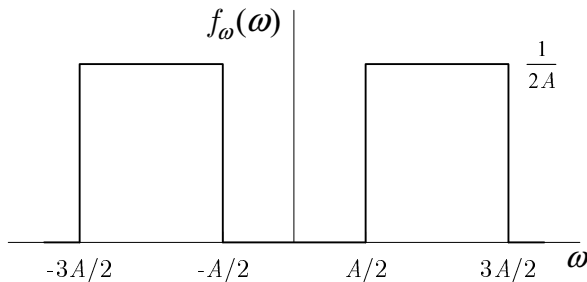


Figura 3.8 Función densidad de probabilidad de las variables de $\omega[n]$ del ejercicio 3.4 sin la unidad de retardo.

Sustituyendo (3.19) y (3.20) en (3.18), queda (ver figura 3.8)

$$f_{\omega}(\omega) = \frac{1}{2A}[u(\omega + 3A/2) - u(\omega + A/2)] + \frac{1}{2A}[u(\omega - A/2) - u(\omega - 3A/2)]$$

Ejercicio 3.5.

Considérese la señal aleatoria $x[n]$ compuesta por variables aleatorias uniformes en el intervalo $[-A, A]$ e independientes entre sí. La señal $y[n]$ resulta de pasar la señal $x[n]$ retardada un número entero de muestras N por el sistema cuya relación entrada-salida es la que aparece en la figura 3.9. Finalmente, la señal $z[n]$ se obtiene como suma de $x[n]$ e $y[n]$. Calcular la autocorrelación de $z[n]$.

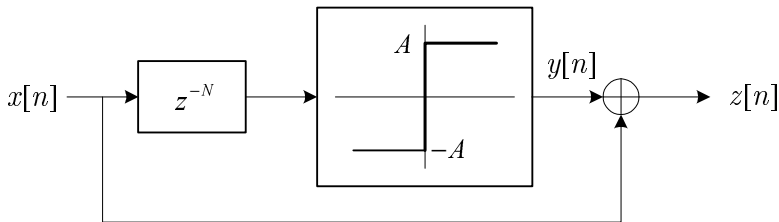


Figura 3.9 Diagrama de bloques del sistema propuesto en el ejercicio 3.5.

Solución

En este tipo de problemas, interesa expresar todas las señales en función de la señal de entrada, ya que es de ésta de la que se conocen los parámetros estadísticos. Así, se puede escribir

$$\begin{aligned}
 R_z[n] &= E[z[k+n]z[k]] \\
 &= E[(x[k+n] + g(x[k+n-N]))(x[k] + g(x[k-N]))] \\
 &= E[x[k+n]x[k]] + E[x[k+n]g(x[k-N])] \\
 &\quad + E[x[k]g(x[k+n-N])] + E[g(x[k+n-N])g(x[k-N])],
 \end{aligned}$$

donde $g(\cdot)$ es la relación entrada-salida del sistema no lineal. Como se puede apreciar, se trata de calcular esperanzas de productos de variables. Para ello es útil determinar si dichas variables son o no independientes entre sí. Las variables involucradas son: $x[k+n]$, $x[k]$, $x[k-N]$ y $x[k+n-N]$. El valor de los parámetros n y N determina posibles identidades entre ellas.

En particular, para $n = 0$ ocurre que $x[k + n]$ y $x[k]$ son la misma variable, al igual que ocurre con $x[k - N]$ y $x[k + n - N]$. Para $n = N$, $x[k]$ y $x[k + n - N]$ son la misma variable mientras que para $n = -N$ ocurre lo propio con $x[k + n]$ y $x[k - N]$. Para cualquier otro valor de n las cuatro variables son diferentes. Por tanto, hay que distinguir cuatro casos. Por comodidad se llamará X a cualquier variable aleatoria de $x[n]$. Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} E[X] &= 0, \\ E[X^2] &= \frac{A^2}{3}, \\ E[g^2(X)] &= A^2, \end{aligned}$$

los cálculos quedan de la siguiente manera:

- $n = 0$.

$$R_z[0] = E[X^2] + 2E[X]E[g(X)] + E[g^2(X)] = \frac{4A^2}{3}.$$

- $n = N$.

$$\begin{aligned} R_z[N] &= (E[X])^2 + E[X]E[g(X)] \\ &\quad + E[Xg(X)] + (E[g(X)])^2 = \frac{A^2}{2}. \end{aligned}$$

- $n = -N$.

$$\begin{aligned} R_z[-N] &= (E[X])^2 + E[Xg(X)] \\ &\quad + E[X]E[g(X)] + (E[g(X)])^2 = \frac{A^2}{2}. \end{aligned}$$

- $n \neq 0, n \neq N, n \neq -N$.

$$R_z[n] = (E[X])^2 + 2E[X]E[g(X)] + (E[g(X)])^2 = 0,$$

donde los promedios $E[g(X)]$ y $E[Xg(X)]$ se calculan como

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx = \int_{-A}^0 (-A)\frac{1}{2A}dx + \int_0^A A\frac{1}{2A}dx = 0,$$

$$E[Xg(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} xg(x)f_X(x)dx = \int_{-A}^0 (-A)x \frac{1}{2A} dx + \int_0^A Ax \frac{1}{2A} dx = \frac{A^2}{2}.$$

Por tanto,

$$R_z[n] = \frac{4A^2}{3}\delta[n] + \frac{A^2}{2}\delta[n - N] + \frac{A^2}{2}\delta[n + N]$$

Ejercicio 3.6.

Considérese la señal aleatoria $x[n]$ compuesta por variables aleatorias uniformes en el intervalo $[-A, A]$ e independientes entre sí. La señal $y[n]$ resulta de pasar la señal $x[n]$ por el sistema que aparece en la figura 3.10. La señal $z[n]$ se obtiene como *producto* de $x[n]$ e $y[n]$.

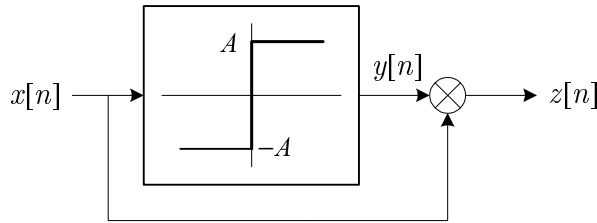


Figura 3.10 Sistema propuesto en el ejercicio 3.6.

- a) Calcular la autocorrelación de $z[n]$.
- b) Calcular la función densidad de probabilidad de las variables aleatorias de $z[n]$.

Solución

- a) La autocorrelación de $z[n]$ es

$$\begin{aligned} R_z[n] &= E[z[k+n]z[k]] \\ &= E[x[k+n]y[k+n]x[k]y[k]] \\ &= E[x[k+n]g(x[k+n])x[k]g(x[k])], \end{aligned}$$

donde $g(\cdot)$ es la relación entrada-salida del sistema. Se deben distinguir dos casos:

- $n = 0$. Llamando $X \equiv x[k]$ se tiene que

$$R_z[0] = E[X^2 g^2(X)] = \frac{A^4}{3}.$$

- $n \neq 0$. En este caso $x[k+n]$ y $x[k]$ son independientes, por lo que la esperanza se puede factorizar dando lugar a

$$R_z[n] = (E[Xg(X)])^2 = \frac{A^4}{4},$$

con lo que el resultado es

$$R_z[n] = \begin{cases} A^4/3 & n = 0 \\ A^4/4 & n \neq 0 \end{cases}$$

- b) La variable aleatoria $z[n]$ será expresada en función de variables aleatorias de $x[n]$ cuya *fdp* es conocida,

$$z[n] = x[n]y[n] = x[n]g(x[n]).$$

Definiendo por comodidad $Z \equiv z[n]$ y $X \equiv x[n]$ se puede escribir $Z = Xg(X)$. Se trata de un problema sencillo de transformación de variable aleatoria que se puede resolver recurriendo a la ley de la probabilidad total.

$$f_Z(z) = f_{Z|(X < 0)}(z) \cdot \Pr(X < 0) + f_{Z|(X \geq 0)}(z) \cdot \Pr(X \geq 0).$$

La variable $Z|(X < 0)$ está compuesta por los valores que toma la variable Z cuando X toma valores negativos, por tanto

$$Z|(X < 0) = (-AX)|(X < 0).$$

La variable $Z|(X \geq 0)$ está compuesta por los valores que toma la variable Z cuando X toma valores positivos. Sustituyendo se tiene

$$Z|(X \geq 0) = (AX)|(X \geq 0)$$

Por su parte, la variable $X|(X < 0)$ consiste en los valores de X cuando X toma valores negativos, por tanto es uniforme en el intervalo $[-A, 0]$. Así, la variable $(-AX)|(X < 0)$ será uniforme en el intervalo $[0, A^2]$ con lo que $f_{Z|(X < 0)}(z) = (1/A^2)$ en el intervalo $0 \leq z \leq A^2$.

Análogamente, la variable $X|(X \geq 0)$ consiste en los valores de X cuando X es positivo, por tanto es uniforme en el intervalo $[0, A]$. Así, la variable $(AX)|(X \geq 0)$ será uniforme en el intervalo $[0, A^2]$ con lo que $f_{Z|(X > 0)}(z) = (1/A^2)$ en $0 \leq z \leq A^2$.

Contando con que $\Pr(X < 0) = \Pr(X \geq 0) = 1/2$, resulta

$$f_Z(z) = \frac{1}{A^2} \quad 0 \leq z \leq A^2$$

Una forma alternativa mucho más sencilla en este caso para solucionar este apartado consiste en resolver el problema de transformación de variable aleatoria observando que la función $Z = Xg(X) = A|X|$ es lineal (en dos tramos), por lo que Z mantiene la naturaleza uniforme de X , ahora en el intervalo $[0, A^2]$, que es el resultado obtenido arriba.

Ejercicio 3.7.

Una señal aleatoria gaussiana $z[n]$ con media nula y función de autocorrelación $R_z[n] = \sigma^2\delta[n]$ es la entrada de un sistema lineal cuya respuesta impulsiva es $h[n] = \delta[n] - k\delta[n-1]$, obteniéndose a la salida la señal $\omega[n]$. Calcular la probabilidad de que $\omega[n_0+1] > \omega_0$ dado que $\omega[n_0] = \omega_0$ y expresarla en función de los parámetros del problema, k , σ y ω_0 , haciendo uso de la función $Q(\cdot)$ definida en (1.24).

Solución

Por simplicidad en la notación, a las variables aleatorias involucradas en los cálculos $\omega[n_0]$ y $\omega[n_0+1]$ se las renombra como X e Y respectivamente, tal y como se indica en la figura 3.11. Según el enunciado, se trata de calcular la siguiente probabilidad condicionada:

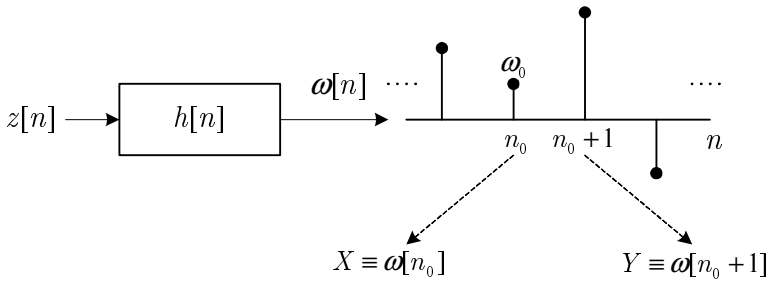


Figura 3.11 Identificación de variables aleatorias en el ejercicio 3.7.

$$\Pr((Y \geq \omega_0)|(X = \omega_0)).$$

El cálculo de esta probabilidad requiere conocimiento de la *fdp* condicionada de Y a X , que se puede expresar en función de la *fdp* conjunta de X e Y y de la *fdp* marginal de X , según la expresión

$$\Pr((Y \geq \omega_0)|(X = \omega_0)) = \int_{\omega_0}^{\infty} f_{Y|X}(\omega_0, y) dy = \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{f_{X,Y}(\omega_0, y)}{f_X(\omega_0)} dy, \quad (3.21)$$

donde se ha aplicado (1.56). Puesto que la señal a la entrada del sistema LTI es gaussiana, también lo será a la salida, es decir, todas las variables aleatorias de la señal de salida son gaussianas y conjuntamente gaussianas, lo que significa que:

- La variable aleatoria X es gaussiana con *fdp* genérica

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left(-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma_x^2}\right).$$

- La variable aleatoria bidimensional (X, Y) es gaussiana bidimensional con *fdp* genérica

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}} \exp(-a(x, y))$$

con

$$a(x, y) = \frac{1}{2(1-\rho_{xy}^2)} \left[\frac{(x - \bar{x})^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y - \bar{y})^2}{\sigma_y^2} - 2\rho_{xy} \frac{(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sigma_x\sigma_y} \right].$$

Los parámetros estadísticos \bar{x} , \bar{y} , σ_x^2 , σ_y^2 , ρ_{xy} , se pueden obtener a partir de los parámetros del problema de la siguiente forma:

- Según (3.3), $\bar{x} = \bar{y} \equiv E[\omega[n]] = E[z[n]] \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] = 0$ ya que $E[z[n]] = 0$.
- $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 \equiv E[\omega^2[n]] = R_\omega[0]$.
- $\rho_{xy} = \frac{c_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{r_{xy}}{\sigma_x^2} \equiv \frac{E[\omega[n_0 + 1]\omega[n_0]]}{E[\omega^2[n_0]]} = \frac{R_\omega[1]}{R_\omega[0]}$.

Los parámetros estadísticos buscados quedan, pues, en función de la autocorrelación de la señal $\omega[n]$. Esta autocorrelación se puede determinar sabiendo que $R_\omega[n] = h[n] * h[-n] * R_z[n]$, según (3.4). Realizando la convolución indicada se tiene que

$$R_\omega[n] = (1 + k^2)\sigma^2\delta[n] - k\sigma^2\delta[n - 1] - k\sigma^2\delta[n + 1].$$

A partir de $R_\omega[n]$ se obtiene

- $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2(1 + k^2)$.
- $\rho_{xy} = \frac{-k}{1 + k^2}$.

Volviendo al cálculo de la probabilidad (3.21), se sustituyen las *fdp* por su expresión

$$\begin{aligned} \Pr((Y \geq \omega_0)|(X = \omega_0)) &= \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{f_{X,Y}(x = \omega_0, y)}{f_X(x = \omega_0)} dy \\ &= \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2(1-\rho_{xy}^2)}} \exp\left(\frac{-(y - \omega_0\rho_{xy})^2}{2\sigma_x^2(1 - \rho_{xy}^2)}\right) dy. \end{aligned}$$

Observar que el último integrando corresponde con una *fdp* gaussiana con media $\omega_0\rho_{xy}$ y varianza $\sigma_x^2(1 - \rho_{xy}^2)$. Por tanto, la probabilidad buscada es

$$\Pr((Y \geq \omega_0)|(X = \omega_0)) = Q\left(\frac{\omega_0 - \omega_0\rho_{xy}}{\sigma_x\sqrt{1 - \rho_{xy}^2}}\right)$$

y sustituyendo σ_x^2 y ρ_{xy} por los valores anteriormente calculados se llega a la expresión final

$$\Pr = Q \left(\frac{\omega_0}{\sigma \sqrt{1+k^2}} \sqrt{\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}} \right)$$

Ejercicio 3.8.

En un problema de filtrado óptimo MSE, sea $x[n]$ la señal observada, $d[n]$ la señal deseada, $\hat{d}[n]$ la señal estimación, $\varepsilon[n] = d[n] - \hat{d}[n]$ el error de estimación, y sea el filtro causal de orden P . Asumiendo señales de media nula,

- a) Demostrar el principio de ortogonalidad, cuya expresión es, según (3.15),

$$E[\varepsilon[n]x[n-m]] = 0, \quad m = 0, \dots, P.$$

- b) Demostrar que el sistema de ecuaciones lineales que permite obtener los coeficientes del filtro (sistema de ecuaciones de *Wiener*) viene dado por la expresión (3.13)

$$\sum_{k=0}^P h[k]R_x[k-m] = R_{dx}[m], \quad m = 0, \dots, P. \quad (3.22)$$

- c) Demostrar que la expresión para el MMSE es, según (3.14),

$$\text{MMSE} = R_d[0] - \sum_{k=0}^P h_o[k]R_{dx}[k], \quad (3.23)$$

siendo $h_o[n]$ la solución de (3.22).

Solución

- a) Se parte de la expresión del MSE a minimizar

$$E[\varepsilon^2[n]] = E[(d[n] - \hat{d}[n])^2]. \quad (3.24)$$

La señal a la salida del filtro es la señal estimación $\hat{d}[n]$, por tanto,

$$\hat{d}[n] = \sum_{k=0}^P h[k]x[n-k].$$

Con esto, (3.24) se puede expresar como

$$E[\varepsilon^2[n]] = E \left[\left(d[n] - \sum_{k=0}^P h[k]x[n-k] \right)^2 \right].$$

Para obtener los valores $h[n]$, $n = 0, \dots, P$ que minimizan la expresión anterior se deriva respecto a cada uno de ellos y se iguala a cero

$$\frac{\partial E \left[\left(d[n] - \sum_{k=0}^P h[k]x[n-k] \right)^2 \right]}{\partial h[m]} = 0, \quad m = 0, \dots, P.$$

Intercambiando el orden de la derivada y la esperanza y derivando se tiene

$$E \left[2 \underbrace{\left(d[n] - \sum_{k=0}^P h[k]x[n-k] \right)}_{\varepsilon[n]} (-x[n-m]) \right] = 0, \quad m = 0, \dots, P, \tag{3.25}$$

siendo el término marcado con una llave el error $\varepsilon[n]$. Así se llega a la expresión que se quería demostrar.

- b) Aplicando la propiedad de linealidad del operador esperanza a la expresión (3.25) y reorganizando términos se obtiene

$$\sum_{k=0}^P h[k] E[x[n-k]x[n-m]] = E[d[n]x[n-m]], \quad m = 0, \dots, P.$$

El término $E[x[n-k]x[n-m]]$ se identifica con $R_x[k-m]$ y el término $E[d[n]x[n-m]]$ con $R_{dx}[m]$. Sustituyendo en la ecuación anterior se llega al sistema de ecuaciones propuesto.

c) Inicialmente se debe obtener una expresión general para el error cuadrático medio MSE en función de los coeficientes del filtro $h[n]$, para $n = 0, \dots, P$. Posteriormente se sustituirán estos coeficientes por los óptimos obtenidos mediante el sistema de ecuaciones deducido en el apartado b), con lo que se obtendrá el MMSE buscado. El MSE se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \text{MSE} &\equiv E[\varepsilon^2[n]] \\
 &= E[(d[n] - \hat{d}[n])^2] = E \left[\left(d[n] - \sum_{m=0}^P h[m]x[n-m] \right)^2 \right] \\
 &= E[d^2[n]] - \sum_{m=0}^P h[m]E[d[n]x[n-m]] \\
 &\quad - \sum_{k=0}^P h[k]E[d[n]x[n-k]] \\
 &\quad + \sum_{m=0}^P \sum_{k=0}^P h[k]h[m]E[x[n-k]x[n-m]].
 \end{aligned}$$

Identificando los términos de esperanza con correlaciones de las señales y reordenando se puede escribir la expresión general para el MSE siguiente:

$$\begin{aligned}
 \text{MSE} = E[d^2[n]] - 2 \sum_{k=0}^P h[k]R_{dx}[k] \\
 + \sum_{m=0}^P \left(\sum_{k=0}^P h[k]R_x[n-k] \right) h[m].
 \end{aligned}$$

El término entre paréntesis corresponde a la parte izquierda de (3.22). Si los coeficientes $h[n]$ son los óptimos $h_o[n]$, se puede sustituir dicho término por la parte derecha del sistema de ecua-

ciones, que es $R_{dx}[m]$. Así el MSE se convierte en el MMSE

$$\text{MMSE} = E[d^2[n]] - 2 \sum_{k=0}^P h_o[k] R_{dx}[k] + \sum_{m=0}^P \underbrace{\left(\sum_{k=0}^P h_o[k] R_x[n-k] \right)}_{R_{dx}[m]} h_o[m].$$

Simplificando y sustituyendo $E[d^2[n]]$ por $R_d[0]$ se llega a la expresión final (3.23).

En los próximos ejercicios, las señales involucradas tienen medias nulas y, por tanto, las expresiones demostradas en este ejercicio serán directamente aplicables.

Ejercicio 3.9.

En frecuentes ocasiones es necesario modelar la respuesta de un sistema IIR mediante un filtro FIR. Una posibilidad para conseguir este objetivo es hacer que las salidas de ambos filtros sean lo más parecidas posible en sentido MSE cuando a la entrada se aplica ruido blanco. El esquema del procedimiento se muestra en la figura 3.12, donde $w[n]$ es ruido blanco de potencia 1, $h[n]$ es la respuesta al impulso del filtro FIR a determinar, $g[n]$ es la respuesta del filtro IIR de partida, $\epsilon[n]$ es la señal diferencia entre las salidas de los filtros y D es un retardo entero.

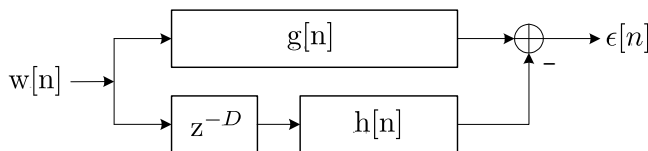


Figura 3.12 Sistema para modelar un filtro IIR propuesto en el ejercicio 3.9.

En las condiciones indicadas,

- a) Calcular los coeficientes del filtro FIR óptimo de orden P para realizar dicho cometido, dejando resultado en función del parámetro de retardo D .
- b) Demostrar que el MMSE alcanzado se puede expresar de la siguiente forma:

$$\text{MMSE} = \sum_{n=0}^{\infty} g^2[n] - \sum_{n=0}^P g^2[n + D].$$

- c) Determinar el valor óptimo del parámetro D para que el MMSE sea mínimo.
- d) Obtener D y $h[n]$ óptimos para el caso particular de $P = 4$ y

$$g[n] = \begin{cases} n & n = 0, \dots, 6 \\ 12 - n & n = 7, \dots, 12 \\ 0 & \text{resto.} \end{cases}$$

Nota: Suponer filtros causales.

Solución

- a) Inicialmente es necesario identificar la señal observada $x[n]$ y la señal deseada $d[n]$. La señal observada es siempre la señal de entrada al filtro óptimo que se quiere diseñar, por tanto, en este caso se tiene que $x[n] = w[n - D]$. La señal deseada es la salida del filtro IIR, es decir, $d[n] = w[n] * g[n]$. A continuación se calculan $R_x[n]$ y $R_{dx}[n]$.

$$R_x[n] = E[x[k+n]x[k]] = E[w[k+n-D]w[k-D]] = R_w[n] = \delta[n]$$

$$R_{dx}[n] = R[d[k+n]x[k]] = E[d[k+n]w[k-D]] = R_{dw}[n + D],$$

donde se ha aplicado que $R_w[n] = \delta[n]$, ya que se trata de ruido blanco de potencia unidad.

El término $R_{dw}[n]$ corresponde a la correlación cruzada de la salida con la entrada del filtro IIR y se puede expresar, según (3.6), como

$$R_{dw}[n] = R_w[n] * g[n] = g[n].$$

Así, $R_{dx}[n] = g[n + D]$. Particularizando estas expresiones en el sistema de ecuaciones de *Wiener* (3.13), se obtiene

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h[0] \\ \vdots \\ h[P] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g[D] \\ \vdots \\ g[D + P] \end{bmatrix},$$

cuya matriz es diagonal de unos y su solución es

$$h_o[n] = g[n + D], \quad n = 0, \dots, P$$

- b) La expresión general para el error cuadrático medio mínimo es, según (3.14),

$$\text{MMSE} = E[d^2[n]] - \sum_{k=0}^P h_o[k] R_{dx}[k].$$

En el apartado anterior se ha obtenido $R_{dx}[n] = g[n + D]$ y $h_o[n] = g[n + D]$. Resta determinar $E[d^2[n]]$, para lo cual se calcula previamente $R_d[n]$, ya que $E[d^2[n]] = R_d[0]$. $R_d[n]$ corresponde a la autocorrelación a la salida de un sistema LTI y se puede expresar como $R_d[n] = R_w[n] * g[n] * g[-n] = g[n] * g[-n]$. Sustituyendo, se tiene

$$E[d^2[n]] = R_d[0] = g[n] * g[-n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g^2[k].$$

Al introducir en la expresión del MMSE los valores de $R_x[n]$, $R_{dx}[n]$ y $E[d^2[n]]$ obtenidos, la expresión resultante es la indicada en el enunciado.

- c) El valor de D que minimiza el MMSE es aquél que hace que el segundo sumatorio sea máximo. Este segundo sumatorio corresponde a la energía de $g[n]$ en el intervalo $n = D, \dots, D + P$. Por consiguiente, el valor óptimo de D corresponde al inicio de la ventana de duración $P + 1$ muestras en la que la energía de $g[n]$ es máxima.
- d) Tal y como se muestra en la figura 3.13, la ventana de 5 muestras en la que la energía es mayor comienza en $D = 4$. En estas condiciones

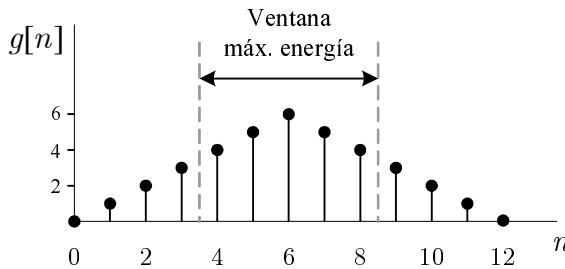


Figura 3.13 Ubicación de la ventana de máxima energía de $g[n]$ en el ejercicio 3.9.

$$h_o[0] = 4, h_o[1] = 5, h_o[2] = 6, h_o[3] = 5, h_o[4] = 4$$

Ejercicio 3.10.

En la figura 3.14 se representa el modelo de una canal de transmisión genérico por el que se pretende transmitir una señal $s[n]$ con función de autocorrelación conocida $R_s[n]$. La señal $\eta[n]$ es ruido de media nula e independiente de $s[n]$, con función de autocorrelación $R_\eta[n]$.

- a) Plantear, en función de $g[n]$, $R_s[n]$ y $R_\eta[n]$, el diseño del igualador lineal óptimo MSE de tipo FIR de orden P que habría que ubicar a la salida del canal para recuperar la señal de partida.

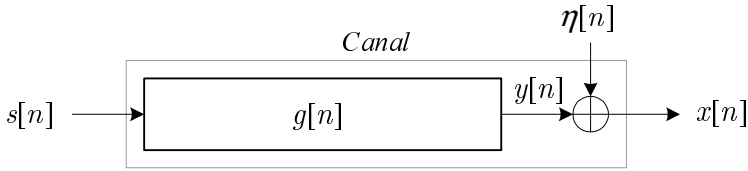


Figura 3.14 Modelo de canal propuesto en el ejercicio 3.10.

- b) Particularizar los resultados del apartado anterior para el caso del diseño de un igualador MSE de orden 1, siendo $R_s[n] = \delta[n]$, $g[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$ y siendo $\eta[n]$ una señal de ruido blanco con potencia σ_n^2 . Explicar el comportamiento del sistema diseñado cuando $\sigma_n^2 \rightarrow 0$.

Solución

- a) El funcionamiento de un igualador en un sistema de transmisión consiste, en términos generales, en recuperar la señal transmitida a partir de la señal recibida. La señal recibida es la señal observada por el sistema a diseñar, en este caso $x[n] = y[n] + \eta[n]$, donde $y[n]$ es la salida del filtro del canal y la señal deseada es $d[n] = s[n]$. Así,

$$R_x[n] = R_y[n] + R_\eta[n] + R_{y\eta}[n] + R_{\eta y}[n].$$

Al ser la señal $s[n]$ y el ruido $\eta[n]$ independientes, también lo serán las señales $y[n]$ y $\eta[n]$. Como, por otra parte, el ruido es de media nula, entonces $R_{y\eta}[n] = R_{\eta y}[n] = 0$, lo que significa que $R_x[n] = R_y[n] + R_\eta[n]$. Por último, la señal $y[n]$ es la salida de un sistema LTI, así que se puede expresar su autorrelación, según (3.4), como $R_y[n] = R_s[n] * g[n] * g[-n]$. Con esto, la autocorrelación de la señal observada es

$$R_x[n] = R_s[n] * g[n] * g[-n] + R_\eta[n].$$

Respecto la correlación cruzada, se tiene

$$\begin{aligned} R_{dx}[n] &= E[d[k+n]x[k]] \\ &= E[d[k+n](y[k] + \eta[k])] = R_{sy}[n] + R_{s\eta}[n]. \end{aligned}$$

El segundo sumando es nulo, como se ha indicado anteriormente, mientras que el primer sumando corresponde con la correlación cruzada de la señal de entrada con la señal de salida de un sistema LTI que, según (3.6), es $R_{sy}[n] = R_s[n] * g[-n]$. Así, $R_{dx}[n] = R_s[n] * g[-n]$.

En resumen, se trata de resolver el sistema de ecuaciones de *Wiener*,

$$\sum_{k=0}^P h[k] R_x[k-m] = R_{dx}[m], \quad m = 0, \dots, P$$

con

$$\begin{aligned} R_x[n] &= R_s[n] * g[n] * g[-n] + R_\eta[n] \\ R_{dx}[n] &= R_s[n] * g[-n] \end{aligned}$$

b) Aplicando de forma directa los resultados del apartado a) se tiene

$$R_x[n] = R_s[n] * g[n] * g[-n] + R_\eta[n] = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} + \sigma_n^2 \delta[n].$$

$$R_{dx}[n] = R_s[n] * g[-n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n].$$

El sistema de ecuaciones de *Wiener* resultante es

$$\begin{bmatrix} 4/3 + \sigma_n^2 & 2/3 \\ 2/3 & 4/3 + \sigma_n^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

cuya solución para $\sigma_n^2 \rightarrow 0$ es

$$h_o[0] = 1, \quad h_o[1] = -1/2$$

En estas condiciones se puede comprobar que $g[n] * h_o[n] = \delta[n]$, lo que significa que el filtro MMSE obtenido en el caso de no existir ruido es el filtro inverso del filtro del canal, tal y como corresponde al comportamiento básico de un igualador. En cualquier otro caso con $\sigma_n^2 \neq 0$ la solución se aleja del filtro inverso para compensar, no sólo la distorsión introducida por el canal sino también el efecto del ruido.

Ejercicio 3.11.

Se desea realizar una grabación musical en un recinto al aire libre (ver figura 3.15). Debido a las reflexiones en las paredes laterales, el sonido que llega al equipo grabador está acompañado por un eco con un retardo de 1 muestra y la mitad de amplitud de la del camino directo.

Simultáneamente se están realizando audiciones en los recintos contiguos que suponen un ruido para el equipo grabador que se puede considerar blanco, de media nula, de potencia 8 veces menor que la de la señal emitida en el recinto e independiente de esta.

Diseñar un filtro discreto FIR de 2 etapas que elimine al máximo (en sentido MSE) el efecto conjunto del eco y del ruido sabiendo que la autocorrelación de la señal sonora $s[n]$ es $R_s[n] = (\frac{1}{2})^{|n|}$.

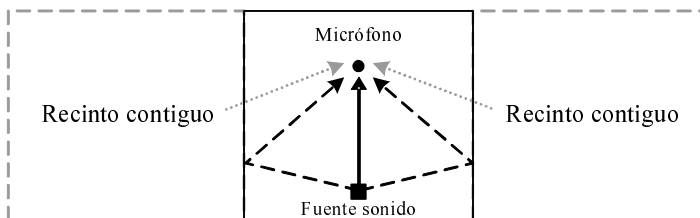


Figura 3.15 Esquema del recinto de grabación propuesto en el ejercicio 3.11.

Solución

La señal observada es, según el enunciado,

$$x[n] = s[n] + \frac{1}{2}s[n-1] + \eta[n],$$

donde $\eta[n]$ es la señal de ruido cuya autocorrelación es $R_\eta[n] = \frac{1}{8}\delta[n]$, puesto que la potencia de la señal $s[n]$ es $R_s[0] = 1$ y la del ruido debe ser 8 veces menor. La señal deseada es $d[n] = s[n]$. La autocorrelación de $x[n]$ se obtiene de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} R_x[n] &= E[x[k+n]x[k]] \\ &= E\left[\left(s[k+n] + \frac{1}{2}s[k+n-1] + \eta[k+n] \right) \times \right. \\ &\quad \left. \left(s[k] + \frac{1}{2}s[k-1] + \eta[k] \right) \right] \\ &= \frac{5}{4}R_s[n] + \frac{1}{2}R_s[n+1] + \frac{1}{2}R_s[n-1] + R_\eta[n], \end{aligned}$$

donde se han omitido los términos de correlación cruzada entre señal y ruido al ser nulos, puesto que señal y ruido son independientes y de medias nulas. Sustituyendo valores resulta

$$R_x[n] = \frac{5}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^{|n|} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{|n+1|} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{|n-1|} + \frac{1}{8}\delta[n].$$

Respecto a la correlación cruzada $R_{dx}[n]$ se tiene

$$\begin{aligned} R_{dx}[n] &= E[d[k+n]x[k]] \\ &= E \left[s[k+n] \left(s[k] + \frac{1}{2}s[k-1] + \eta[k] \right) \right] \\ &= R_s[n] + \frac{1}{2}R_s[n+1]. \end{aligned}$$

Así,

$$R_{dx}[n] = \left(\frac{1}{2} \right)^{|n|} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{|n+1|}.$$

Introduciendo estos datos en el sistema de ecuaciones de *Wiener* (3.13) para el caso de un filtro de orden $P = 1$ (2 etapas), resulta

$$\frac{5}{8} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \end{bmatrix} = \frac{5}{8} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

cuya solución es

$$h_o[0] = \frac{4}{5}, \quad h_o[1] = \frac{-1}{5}$$

Este problema se podría también haber resuelto aplicando los resultados del apartado a) del ejercicio 3.10 con $g[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n - 1]$, puesto que se trata de un igualador.

Ejercicio 3.12.

La señal aleatoria $s[n]$, cuya autocorrelación es $R_s[n] = \delta[n]$, atraviesa un canal que está modelado por un sistema LTI cuya respuesta al impulso es $g[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n - 1]$ y por una ganancia aleatoria que se representa con la señal $\alpha[n]$, con media $\bar{\alpha} = 1/2$ y autocorrelación $R_\alpha[n] = (1/2)^{|n|} + 1/4$. Finalmente se le suma ruido blanco $\eta[n]$ de media cero y potencia 1, como se indica en la figura 3.16.

Sabiendo que $s[n]$, $\alpha[n]$ y $\eta[n]$ son señales aleatorias independientes entre sí, determinar la respuesta al impulso de un filtro MSE de dos coeficientes para recuperar la señal $s[n]$.

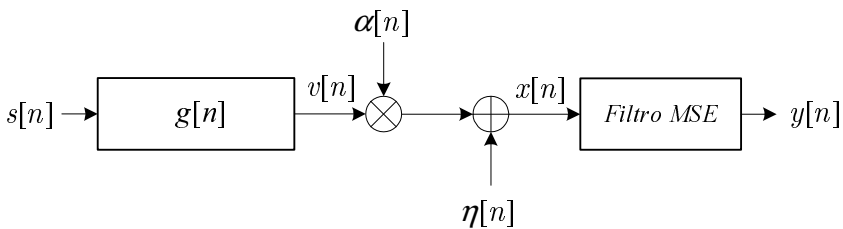


Figura 3.16 Sistema propuesto en el ejercicio 3.12.

Solución

Aunque se trata del diseño de un igualador MSE, el resultado del ejercicio 3.10 no es aplicable debido a la presencia de la ganancia aleatoria $\alpha[n]$, que aparece de forma multiplicativa.

La señal observada es $x[n] = v[n]\alpha[n] + \eta[n]$, donde $v[n]$ es la señal a la salida del canal. La señal deseada es $d[n] = s[n]$. Teniendo en

cuenta que las señales $\alpha[n]$, $\eta[n]$ y $v[n]$ son independientes entre sí, la autocorrelación de la señal observada es:

$$\begin{aligned}
 R_x[n] &= E[x[k+n]x[k]] \\
 &= E[(\alpha[k+n]v[k+n] + \eta[n])(\alpha[k]v[k] + \eta[n])] \\
 &= E[\alpha[k+n]\alpha[k]] E[v[k+n]v[k]] + E[\eta[k+n]\eta[k]] \\
 &= R_\alpha[n]R_v[n] + R_\eta[n].
 \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 R_v[n] &= R_s[n] * g[n] * g[-n] \\
 &= \delta[n] * (\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]) * (\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n+1]) \\
 &= \frac{5}{4}\delta[n] + \frac{1}{2}(\delta[n-1] + \delta[n+1]).
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$R_x[n] = R_\alpha[n]R_v[n] + R_\eta[n] = \frac{41}{16}\delta[n] + \frac{3}{8}(\delta[n-1] + \delta[n+1]).$$

Teniendo en cuenta que la señal y el ruido son ortogonales, la correlación cruzada de la señal deseada y la observada resulta

$$\begin{aligned}
 R_{dx}[n] = R_{sx}[n] &= E[s[k]x[k-n]] \\
 &= E[s[k](v[k-n]\alpha[k-n] + \eta[n-k])] \\
 &= E[s[k]v[k-n]\alpha[k-n]] \\
 &= E[s[k]\alpha[k-n](s[k-n] + \frac{1}{2}s[k-n-1])] \\
 &= \bar{\alpha} \cdot R_s[n] + \frac{1}{2}\bar{\alpha} \cdot R_s[n+1] \\
 &= \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{4}\delta[n+1].
 \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones (3.13) queda

$$\begin{bmatrix} 41/16 & 3/8 \\ 3/8 & 41/16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y su solución

$$h_o[0] \approx 0,20 \quad h_o[1] \approx -0,03$$

Ejercicio 3.13.

Sea la señal aleatoria continua $s_c(t)$ de media cero y con densidad espectral de potencia constante de valor S_0 . Tal y como se muestra en la figura 3.17, esta señal atraviesa un canal cuya función de transferencia es $H(s) = \omega_c/(s + \omega_c)$ y posteriormente se le suma una señal de ruido $\eta_c(t)$ de densidad espectral de potencia N_0 en la banda $[-B, B]$ Hz. La señal resultante $x_c(t)$ se muestrea con un periodo $T_s = \frac{1}{2B}$ a la entrada al receptor obteniéndose la señal discreta $x[n]$. Determinar el sistema de ecuaciones que permite obtener los coeficientes del filtro óptimo de orden 1 para estimar la señal original a partir de $x[n]$ de forma que el error cuadrático medio sea mínimo. Concretamente, la salida $s_{est}[n]$ del filtro diseñado debe ser una estima de $s_c(nT_s)$.

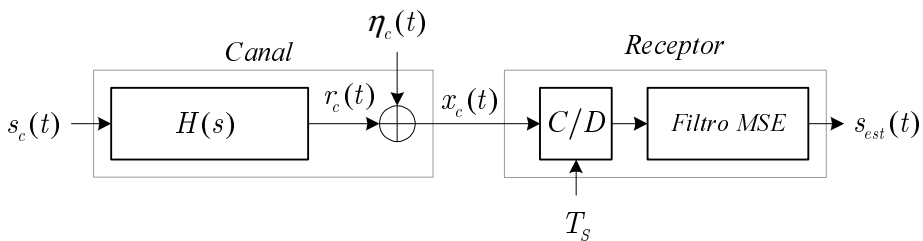


Figura 3.17 Sistema propuesto en el ejercicio 3.13.

Solución

La señal observada $x[n]$ es la entrada del filtro óptimo a diseñar. La señal deseada es, según se indica en el enunciado, $d[n] = s_c(nT_s)$. A continuación se calcularán $R_x[n]$ y $R_{dx}[n]$. Dado que $x[n] = x_c(nT_s)$, entonces $R_x[n] = R_{x_c}(nT_s)$, donde $R_{x_c}(\tau) = R_{r_c}(\tau) + R_{\eta_c}(\tau)$ puesto que $x_c(t) = r_c(t) + \eta_c(t)$ y la señal y el ruido son independientes y de media nula. Como $r_c(t)$ es la salida de un sistema LTI se puede escribir, según (3.8),

$$R_{r_c}(\tau) = R_{s_c}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau).$$

La respuesta al impulso del filtro del canal se obtiene aplicando la transformada inversa de Laplace a la función de transferencia $H(s)$

resultando $h(t) = \omega_c e^{-\omega_c t} u(t)$ y por tanto, $h(\tau) * h(-\tau) = \frac{1}{2} \omega_c \cdot e^{-\omega_c |\tau|}$. Por otra parte, la *dep* de la señal de información es constante e igual a S_0 , lo que significa que su autocorrelación es $R_{s_c}(\tau) = S_0 \delta(\tau)$. Así,

$$R_{r_c}(\tau) = \frac{1}{2} S_0 \omega_c \cdot e^{-\omega_c |\tau|}.$$

Para obtener la autocorrelación del ruido es necesario hacer la transformada inversa de Fourier de su *dep*, que es constante de valor N_0 en el intervalo $[-B, B]$, dando como resultado $R_{\eta_c}(\tau) = 2BN_0 \text{sinc}(2B\tau)$. Con esto, ya se tiene la autocorrelación de la señal observada

$$\begin{aligned} R_x[n] &= R_{x_c}(nT_s) = R_{r_c}(nT_s) + R_{\eta_c}(nT_s) \\ &= \frac{1}{2} S_0 \omega_c \cdot e^{-\omega_c |nT_s|} + 2BN_0 \delta[n], \end{aligned}$$

ya que $\text{sinc}(2BnT_s) = \text{sinc}(n) = \delta[n]$, al ser $T_s = \frac{1}{2B}$.

La correlación cruzada de la señal deseada con la observada es

$$\begin{aligned} R_{dx}[n] &= E[d[k+n]x[k]] \\ &= E[s_c((k+n)T_s)x(kT_s)] \\ &= E[s_c((k+n)T_s)(\eta_c(kT_s) + r_c(kT_s))] \\ &= R_{s_c r_c}(nT_s), \end{aligned}$$

donde, de nuevo, se ha tenido en cuenta que la correlación cruzada de la señal con el ruido es nula. La función $R_{s_c r_c}(\tau)$ es la correlación cruzada de la señal de entrada a un sistema LTI con la señal de salida, así, según (3.10),

$$R_{s_c r_c}(\tau) = R_{s_c s_c}(\tau) * h(-\tau) = S_0 \omega_c \cdot e^{\omega_c \tau} u(-\tau).$$

Por tanto,

$$R_{dx}[n] = S_0 \omega_c \cdot e^{\omega_c n T_s} u(-n).$$

El sistema de ecuaciones de *Wiener* en (3.13) resulta

$$\boxed{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} S_0 \omega_c + 2BN_0 & \frac{1}{2} S_0 \omega_c \cdot e^{-\omega_c T_s} \\ \frac{1}{2} S_0 \omega_c \cdot e^{-\omega_c T_s} & \frac{1}{2} S_0 \omega_c + 2BN_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0 \omega_c \\ 0 \end{bmatrix}}$$

Ejercicio 3.14.

En el sistema de la figura 3.18, la señal continua $s_c(t)$ es muestreada con un periodo T_s dando lugar a la señal discreta $s[n] = s_c(nT_s)$. Se desea diseñar un filtro interpolador que a partir de la muestra actual de la señal de entrada $s[n]$ y de la muestra anterior $s[n - 1]$ proporcione a la salida una estimación de error cuadrático medio mínimo de un valor intermedio de la señal $s_i[n]$ determinado por el parámetro μ , es decir

$$s_i[n] = s_c((n - 1)T_s + \mu T_s),$$

como se indica en la figura 3.19. Considerando que μ puede tomar cualquier valor entre 0 y 1,

- a) Calcular los coeficientes del filtro interpolador descrito.
- b) Obtener una expresión del error cuadrático medio mínimo alcanzado en función de T_s y μ .
- c) Interpretar cualitativamente la dependencia del error cuadrático medio con ambos parámetros.

Dato:

$$R_{s_c}(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau| & |\tau| \leq 1 \\ 0 & |\tau| > 1 \end{cases}$$

Nota: Considerar $T_s \ll 1$.

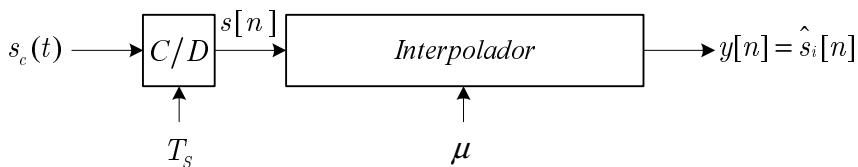


Figura 3.18 Diagrama de bloques del sistema interpolador del ejercicio 3.14.

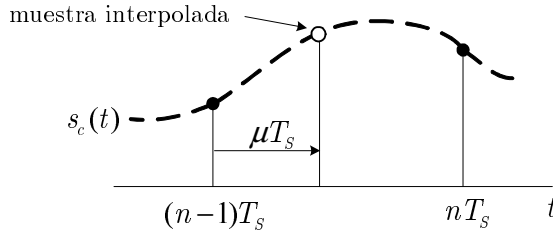


Figura 3.19 Ejemplo del procedimiento de interpolación ideal del ejercicio 3.14.

Solución

- a) Para diseñar un filtro óptimo MSE es preciso identificar la señal observada $x[n]$ y la señal deseada $d[n]$, y calcular a continuación $R_x[n]$ y $R_{dx}[n]$. Con esta información, se resuelve el sistema de ecuaciones de *Wiener* en (3.13) que da los valores de la respuesta al impulso del filtro.

Según el enunciado, la señal observada es $x[n] = s[n]$, la señal deseada es $d[n] = s_i[n]$ y el orden del filtro es $P = 1$. La autocorrelación de la señal observada se obtiene de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} R_x[n] = R_s[n] &= E[s[k+n]s[k]] \\ &= E[s_c((k+n)T_s)s_c(kT_s)] \\ &= R_{s_c}(nT_s), \end{aligned}$$

y la correlación cruzada de la señal deseada con la observada viene dada por

$$\begin{aligned} R_{dx}[n] &= E[s_i[k+n]x[k]] \\ &= E[s_c((k+n-1)T_s + \mu T_s)s_c(kT_s)] \\ &= R_{s_c}((n-1 + \mu)T_s). \end{aligned}$$

Estas funciones deben ser evaluadas en $n = 0$ y $n = 1$ para obtener los coeficientes del sistema de ecuaciones de *Wiener* de orden 1.

Sustituyendo en la expresión de $R_{s_c}(\tau)$ proporcionada en el enunciado se tiene

$$\begin{aligned} R_x[0] &= 1 \\ R_x[1] &= 1 - T_s \\ R_{dx}[0] &= 1 - T_s + \mu T_s \\ R_{dx}[1] &= 1 - \mu T_s, \end{aligned}$$

con lo que el sistema de ecuaciones queda

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 - T_s \\ 1 - T_s & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - T_s + \mu T_s \\ 1 - \mu T_s \end{bmatrix},$$

cuya solución es

$$h_o[0] = \mu, \quad h_o[1] = 1 - \mu$$

Este resultado significa que el filtro interpolador obtiene su salida según la relación

$$y[n] = \mu s[n] + (1 - \mu)s[n - 1],$$

que corresponde a una *interpolación lineal* entre los dos valores de la señal observados, tal y como se muestra en la figura 3.20.

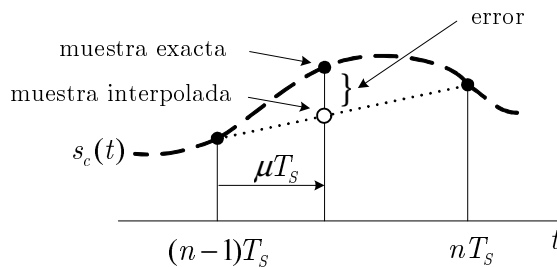


Figura 3.20 Resultado del procedimiento de interpolación del ejercicio 3.14.

- b) El MMSE viene dado por la expresión $E[d^2[n]] - \sum_{k=0}^P h_o[k] R_{dx}[k]$ indicada en (3.14). Para evaluarla sólo resta determinar $E[d^2[n]]$, que corresponde al valor cuadrático de $d[n]$. Dado que

$$d[n] = s_i[n] = s_c((n-1)T_s + \mu T_s),$$

y teniendo en cuenta que las señales son estacionarias, el valor cuadrático de todas ellas será el mismo. Así,

$$E[d^2[n]] = E[s_c^2(t)] = R_{s_c}(0) = 1.$$

Sustituyendo valores en la expresión del MMSE, resulta

$$\text{MMSE} = 2T_s\mu(1 - \mu)$$

- c) En la figura 3.21 se ha representado el MMSE en función del parámetro μ . Como se puede ver, tanto en el caso de que $\mu \rightarrow 0$ como en el caso de que $\mu \rightarrow 1$ el MMSE tiende a cero, hecho lógico, pues la muestra a estimar coincide con una de las dos muestras que se emplean para la estimación y, por tanto, no se comete error en la estimación. Precisamente para $\mu = 0,5$ el MMSE alcanza su valor máximo puesto que la muestra a estimar está a la máxima distancia de las dos muestras observadas.

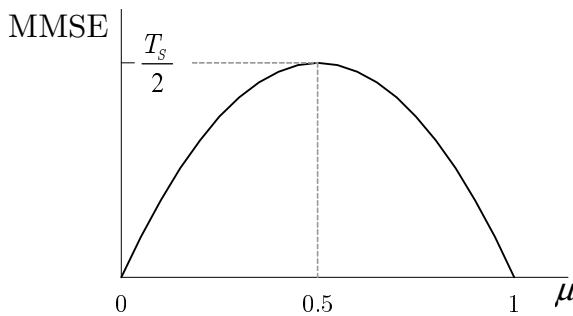


Figura 3.21 MMSE en función del parámetro μ del ejercicio 3.14.

Respecto a la dependencia con T_s , observar que $\text{MMSE} \rightarrow 0$ cuando $T_s \rightarrow 0$, puesto que cuanto menor sea el periodo de

muestreo de la señal continua, más parecidas tienden a ser las muestras consecutivas y, por tanto, más precisa será una interpolación lineal entre ellas. Consecuentemente, al aumentar el valor de T_s , el MMSE aumenta, puesto que las muestras son menos parecidas y la interpolación lineal menos precisa.

Ejercicio 3.15.

La señal de tiempo continuo $x_c(t)$ con $R_{x_c}(\tau) = (1/2)^{|\tau|}$, es muestreada con un periodo T_s y aplicada a la entrada del sistema que se muestra en la figura 3.22. El predictor debe estimar, a partir del valor presente en la entrada, el siguiente valor.

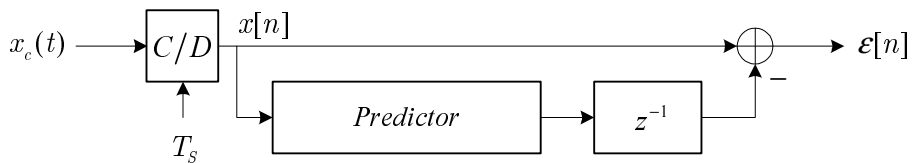


Figura 3.22 Sistema propuesto en el ejercicio 3.15.

- a) Diseñar el predictor óptimo MSE de una etapa y demostrar que la señal error de predicción $\varepsilon[n]$ es una señal blanca.
- b) Obtener una expresión para el MMSE en función del periodo de muestreo T_s e interpretar cualitativamente el resultado.

Solución

- a) Llamando $x[n]$ a la señal $x_c(t)$ muestreada, $x[n] = x_c(nT_s)$. La señal observada es $x[n]$ y la señal deseada es $d[n] = x[n+1]$ puesto que se trata de predecir el próximo valor de $x[n]$. El orden del filtro a diseñar es $P = 0$, es decir un filtro de un solo coeficiente.

La autocorrelación de la señal observada viene dada por

$$\begin{aligned}
 R_x[n] &= E[x[k+n]x[k]] \\
 &= E[x_c((n+k)T_s)x_c(kT_s)] \\
 &= R_{x_c}(nT_s) \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{|nT_s|}.
 \end{aligned}$$

La correlación cruzada de la señal deseada con la observada es

$$\begin{aligned}
 R_{dx}[n] &= E[d[k+n]x[k]] \\
 &= E[x[k+n+1]x[k]] \\
 &= E[x_c((n+k+1)T_s)x_c(kT_s)] \\
 &= R_{x_c}((n+1)T_s) \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{|(n+1)T_s|}.
 \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones de *Wiener* (3.13) para $P = 0$ es $R_x[0] \cdot h[0] = R_{dx}[0]$. Sustituyendo valores, resulta $1 \cdot h_o[0] = 2^{-T_s}$.

$$h_o[0] = 2^{-T_s}$$

Demostrar que la señal de error es blanca significa comprobar que su autocorrelación es del tipo $R_\varepsilon[n] = K\delta[n]$, donde K es una constante. La señal de error se puede expresar como

$$\varepsilon[n] = x[n] - h_o[0]x[n-1],$$

siendo $h_o[0]$ el único coeficiente del filtro predictor. Por comodidad de notación se define $\rho \equiv h_o[0]$.

Para determinar su autocorrelación se procede de la siguiente

forma:

$$\begin{aligned}
 R_\varepsilon[n] &= E[\varepsilon[k+n]\varepsilon[k]] \\
 &= E[(x[k+n] - \rho x[k+n-1])(x[k] - \rho x[k-1])] \\
 &= E[x[k+n]x[k]] - \rho E[x[k+n]x[k-1]] \\
 &\quad - \rho E[x[k+n-1]x[k]] + \rho^2 E[x[k+n-1]x[k-1]] \\
 &= (1 + \rho^2)R_x[n] - \rho R_x[n+1] - \rho R_x[n-1] \\
 &= (1 + \rho^2) \cdot \rho^{|n|} - \rho \cdot \rho^{|n+1|} - \rho \cdot \rho^{|n-1|}.
 \end{aligned}$$

Esta expresión resultante es nula para todos los valores de n excepto para $n = 0$ en el que toma el valor $(1 - \rho^2)$, es decir, $R_\varepsilon[n] = (1 - \rho^2)\delta[n]$, con lo que queda demostrado que la señal es blanca.

- b) Para $P = 0$, $\text{MMSE} = E[d^2[n]] - h_o[0]R_{dx}[0]$, según (3.14). Sabiendo que

$$E[d^2[n]] = E[x^2[n+1]] = E[x_c^2((n+1)T_s)] = R_{x_c}(0) = 1,$$

se tiene que $\text{MMSE} = 1 - 2^{-T_s} \cdot 2^{-T_s}$.

$$\text{MMSE} = 1 - 2^{-2T_s}$$

Para interpretar cualitativamente este resultado hay que tener en cuenta que en un problema de estimación, la bondad de la estima será tanto mayor cuanto mayor sea la relación estadística entre la variable a estimar y las observaciones. Si se emplea un estimador de tipo lineal, como es el caso, lo que influye es la relación estadística de tipo lineal o *correlación*.

Observando el resultado obtenido, se ve que MMSE decrece tendiendo a cero conforme T_s decrece. Esto se debe a que cuanto menor es la separación entre dos muestras de una señal continua, mayor es su correlación y más fiable será la estima de una a partir de la otra. Lo contrario ocurre en el extremo opuesto. El MMSE aumenta hasta su valor máximo conforme T_s crece, pues la correlación entre muestras cada vez más distantes decrece.

Ejercicio 3.16.

Se desea diseñar un sistema que prediga el valor que va a tomar una señal $s[n]$ en el instante correspondiente a q muestras posteriores al instante observado. Sabiendo que la función de autocorrelación de la señal es $R_s[n] = (1/3)^{|n|}$,

- Determinar, en función de q , los valores de los coeficientes del filtro óptimo MSE de orden 1 para realizar dicha tarea.
- Obtener una expresión para el MMSE alcanzado en función del parámetro q .
- Determinar el valor de dicho error para los dos casos extremos $q = 0$ y $q \rightarrow \infty$, e interpretar cualitativamente el resultado.

Solución

- En este problema la señal observada es $x[n] = s[n]$ y la deseada, $d[n] = s[n + q]$. De forma inmediata se pueden obtener las funciones $R_x[n]$ y $R_{dx}[n]$ que se requieren para resolver un diseño de un filtro de *Wiener*. En concreto,

$$\begin{aligned} R_x[n] &= R_s[n] = (1/3)^{|n|} \\ R_{dx}[n] &= E[d[k+n]s[k]] = E[s[k+n+q]s[k]] \\ &= R_s[n+q] = (1/3)^{|n+q|}. \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones de *Wiener* para $P = 1$ es, según (3.13),

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^{-q} \\ 3^{-(q+1)} \end{bmatrix}$$

y su solución

$$h_o[0] = 3^{-q}, \quad h_o[1] = 0$$

b) Teniendo en cuenta que

$$R_d[0] = E[d^2[n]] = E[s^2[n+q]] = R_s[0] = 1,$$

el MMSE definido en (3.14) toma el valor

$$\text{MMSE} = R_d[0] - \sum_{k=0}^P h_o[k]x[n-k] = 1 - 3^{-q} \cdot 3^{-q},$$

con lo cual,

$$\text{MMSE} = 1 - 3^{-2q}$$

c) El MMSE = 0 cuando $q = 0$ puesto que en esta situación se está intentando *predecir* la propia muestra observada. En el otro extremo, cuando $q \rightarrow \infty$, el MMSE crece hasta su valor máximo de 1, que coincide con la potencia de la propia señal $s[n]$. Este comportamiento se debe a que cuanto más alejada está la muestra a predecir, menos información se puede extraer sobre ella a partir de las muestras observadas. En estas condiciones, (ver ejercicio 1.25) la predicción consiste en el valor medio $\hat{d}[n] = \bar{d} = 0$, y el error cuadrático medio cometido coincide con la varianza, $E[(d[n] - \bar{d})^2] = E[d^2[n]] = 1$.

Ejercicio 3.17.

Considérese un predictor lineal óptimo MSE de orden P para predecir el próximo valor de una señal $s[n]$. Calcular los coeficientes y el MMSE alcanzado para los dos casos extremos siguientes:

- a) Señal $s[n]$ de media nula, potencia S y muestras incorreladas entre sí.
- b) Señal $s[n]$ de media nula, potencia S y muestras totalmente correladas entre sí, es decir, $R_s[n] = R_s[0]$, $\forall n$. Explicar cualitativamente los resultados.

Solución

- a) La señal observada es $x[n] = s[n]$ y la señal deseada es el próximo valor $d[n] = s[n + 1]$. Así, $R_x[n] = R_s[n]$ y $R_{dx}[n] = R_s[n + 1]$. Las diferentes variables aleatorias que componen $s[n]$ son incorreladas entre sí, y como sus medias son nulas, son entonces ortogonales, lo que se traduce en $R_s[n] = 0$ para $n \neq 0$. Para $n = 0$ toma el valor de la potencia S , por lo tanto, $R_s[n] = S\delta[n]$. Con esto, $R_x[n] = S\delta[n]$, $R_{dx}[n] = S\delta[n + 1]$. El sistema de ecuaciones que resuelve el problema es el sistema de *Wiener* en (3.13)

$$\begin{bmatrix} S & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h[0] \\ \vdots \\ h[P] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

cuya única solución es la trivial, es decir

$$h_o[n] = 0, \quad n = 0, \dots, P$$

Sustituyendo estos datos en la expresión (3.14)

$$\text{MMSE} = E[d^2[n]] - \sum_{k=0}^P R_{dx}[k]h_o[k],$$

se tiene $\text{MMSE} = E[d^2[n]] = E[s^2[n]] = S$.

$$\text{MMSE} = S$$

El motivo de este resultado reside en el hecho de que las variables aleatorias observadas son ortogonales a la variable a estimar, por lo que no se puede extraer información a partir de ellas con métodos lineales, como es el caso del filtrado óptimo de

Wiener. En esta situación, la estimación da como resultado el valor medio de la señal (previamente conocido), cuyo valor es 0 en este problema. La potencia del error coincide con la potencia de la señal (que es el máximo valor posible en problemas de predicción).

- b) En este caso $R_x[n] = R_s[n] = R_s[0] = S$ para todo n . Entonces, $R_{dx}[n] = R_s[n + 1] = S$ para todo n también. El sistema de ecuaciones que resuelve el problema es ahora

$$\begin{bmatrix} S & \cdots & S \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S & \cdots & S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h[0] \\ \vdots \\ h[P] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S \\ \vdots \\ S \end{bmatrix},$$

que tiene infinitas soluciones, en concreto, todas las que cumplan la condición $h[0] + h[1] + \cdots + h[P] = 1$, por ejemplo

$$h_o[0] = 1, \quad h_o[n] = 0, \quad n = 1, \dots, P$$

que corresponde a la relación entrada salida $y[n] = s[n]$.

El valor del MMSE particularizado para este apartado es

$$\text{MMSE} = S - S \sum_{k=0}^P h_o[k] = 0,$$

es decir, la estima es perfecta.

$$\text{MMSE} = 0$$

La explicación de este resultado es sencilla, pues $s[n]$ es un caso extremo de señal aleatoria en la que todos los valores dentro de una misma realización son iguales entre sí, es decir, las realizaciones son señales de valor constante. Por este motivo, su estimación se puede realizar sin error si se dispone de observaciones de la señal en instantes anteriores (con una sola observación bastaría).

Ejercicio 3.18.

Un proceso se denomina predecible si es posible predecir sin error su valor en cualquier instante a partir de un determinado número de valores anteriores. Demostrar que la señal aleatoria

$$x[n] = A \cos(\Omega n + \phi),$$

donde ϕ es una variable aleatoria uniforme en $[0, 2\pi]$, es predecible a partir de las dos observaciones consecutivas inmediatamente anteriores a la muestra que se quiere estimar.

Solución

La señal observada es $x[n]$, la deseada es $d[n] = x[n + 1]$ y el orden del filtro es $P = 1$, puesto que se emplean dos valores para realizar la estimación. La autocorrelación de $x[n]$ se obtiene de forma inmediata, pues se trata de una senoide con fase aleatoria. Procediendo, se obtiene $R_x[n] = \frac{A^2}{2} \cos(\Omega n)$. Para la correlación cruzada $R_{dx}[n]$ resulta

$$R_{dx}[n] = R_x[n + 1] = \frac{A^2}{2} \cos(\Omega(n + 1)).$$

Sustituyendo valores en el sistema de ecuaciones de *Wiener* (3.13)

$$\begin{bmatrix} A^2/2 & \frac{A^2}{2} \cos(\Omega) \\ \frac{A^2}{2} \cos(\Omega) & A^2/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A^2}{2} \cos(\Omega) \\ \frac{A^2}{2} \cos(2\Omega) \end{bmatrix},$$

cuya solución, tras cierta manipulación, es

$$\begin{aligned} h_o[0] &= 2 \cos(\Omega) \\ h_o[1] &= -1. \end{aligned}$$

Introduciendo estos resultados en la expresión del MMSE (3.14) se obtiene

$$\begin{aligned} \text{MMSE} &= R_d[0] - h^0[0] \cdot R_{dx}[0] - h^0[1] \cdot R_{dx}[1] \\ &= \frac{A^2}{2} - A^2 \cos^2(\Omega) + \frac{A^2}{2} \cos(2\Omega) = 0. \end{aligned}$$

El MMSE es nulo, lo que significa que no existe error en la predicción, como se quería demostrar.

Bibliografía

- [1] C. Alberola López, *Probabilidad, Variables Aleatorias y Procesos Estocásticos*, Servicio de publicaciones, Universidad de Valladolid, 2004.
- [2] P.Z. Peebles Jr, *Principios de Probabilidad, variables aleatorias y señales aleatorias*, McGraw-Hill, 4^a Edición, 2006.
- [3] S.L. Miller, D.G. Childers, *Probability and Random Processes with applications to signal processing and communications*, Elsevier, 2004.
- [4] Carol Ash, *The Probability Tutoring Book. An Intuitive Course for Engineers and Scientists (and Everyone Else!)*, IEEE Press, 1993.
- [5] A. Papoulis, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, 4^a Edición, 2002.
- [6] J.A. Cadzow, *Foundations of Digital Signal Processing and Data Analysis*, McMillan, 1987.
- [7] C.W. Therrien, *Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing*, Prentice Hall, 1992.
- [8] A.V. Oppenheim, A.S. Willsky, *Señales y Sistemas*, 2^a Edición. Prentice Hall, 1998.